Titel der Studien/Diplomarbeit

Studien/Diplomarbeit
von
cand. aer. ....

durchgeführt am
Institut für Aerodynamik und Gasdynamik
der Universität Stuttgart
und bei (Name der Firma /
Forschungseinrichtung etc. bei externen Arbeiten).

Stuttgart, im (Monat) (Jahr)

Aufgabenstellung

An diese Stelle wird die Aufgabenstellung der Arbeit eingebunden.

Übersicht

Nach der Titelseite des Berichtes und dem Aufgabenblatt soll das Wesentliche aus dem Inhalt der Arbeit in wenigen Sätzen zusammengefasst werden. Diese Übersicht soll keine Formeln und möglichst keine Literaturhinweise enthalten.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur

a_i	[-]	Polynomkoeffizient
c_f	[-]	Reibungswiderstandsbeiwert der turbulent umströmten ebenen Platte
c_{w_V}	[-]	volumenbezogener Widerstandsbeiwert
D	[m]	Durchmesser
L	[m]	Körperlänge
$n_{krit.}$	[-]	kritischer Anfachungsfaktor (relevant für die Umschlagsberechnung)
Re_L	[-]	längenbezogene Reynoldszahl
Re_V	[-]	volumenbezogene Reynoldszahl
r	[m]	Radius
U_∞	$[m/s]$	Anströmgeschwindigkeit
V	$[m^3]$	Volumen
W	$[N]$	Widerstand
x, y, z	[m]	kartesische Koordinaten
α	[°]	Anstellwinkel
ν	$[m^2/s]$	kinematische Viskosität des Strömungsmediums
ρ	$[kg/m^3]$	Dichte des Strömungsmediums

1 Einleitung

Ich will hier meinen Text sehen! Sie führt in die Problematik ein, skizziert die Motivation und Zielsetzung sowie das geplante Vorgehen und die angestrebten Ergebnisse und sollte ca. 1 - 2 Seiten umfassen.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Cras elit. Nunc tempor tortor in leo. Nam lectus tortor, pharetra pellentesque, iaculis ut, pretium sed, sem. Nunc congue, sapien id euismod congue, nisl enim mollis sapien, sed suscipit turpis turpis vitae diam. Praesent quam. Cras eleifend. Morbi elementum fermentum tellus. Morbi arcu metus, laoreet molestie, sodales quis, luctus non, eros. Cras ligula. Sed ultrices. Nullam interdum nonummy lectus. Quisque congue hendrerit libero. Donec urna. Vestibulum luctus, massa non pulvinar nonummy, erat ipsum ultricies tortor, a convallis nibh mi non orci.

Vivamus diam libero, blandit a, malesuada in, egestas accumsan, nunc. Nulla a tellus. Nullam varius. Donec commodo felis in dolor. Cras eleifend, tellus commodo mollis gravida, orci dui iaculis elit, sit amet scelerisque arcu justo non diam. Aenean ipsum lacus, rutrum vel, bibendum vitae, laoreet sed, nisl. Nunc iaculis ante vestibulum odio. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Duis nec sapien. Quisque interdum quam imperdiet eros. Nulla vitae arcu cursus ante pharetra tincidunt. In at mauris. Phasellus pharetra, mi eu accumsan commodo, diam odio consectetuer ligula, a ullamcorper nulla augue et augue. Vivamus diam. Curabitur at lorem. Vestibulum volutpat leo quis metus. Proin metus neque, dapibus a, laoreet quis, ullamcorper eget, magna.

Nam eu dolor a nisl faucibus suscipit. Nulla interdum sapien id lectus. Curabitur fringilla pulvinar nibh. Aenean porta luctus purus. Cras dictum mauris quis velit. Nullam pharetra pede at risus. Nullam orci sapien, porttitor eu, iaculis et, bibendum ultricies, ipsum. Mauris eget justo. Donec semper auctor tortor. Mauris a ante et magna facilisis mollis. Proin sem turpis, interdum quis, fermentum aliquet, faucibus scelerisque, quam. In mi nibh, facilisis eu, euismod sed, luctus ut, sapien. Etiam ut dui eget libero dapibus elementum.

2 Strömungsmechanische Grundlagen

Die Grundlage zur Verifizierung ist SunwinT. Um zu verstehen, welche Grundlagen untersucht werden sollen, wird in diesem Kapitel zunächst eine Übersicht über die physikalischen Grundlagen gegeben

Um eine Strömung physikalisch beschreiben zu können, werden mehrere Erhaltungssätze angewendet:

- Massenerhaltung
- Impulsverhaltung (in vektorieller Form)
- Energieerhaltung

2.1 Euler-Gleichungen

Durch Vernachlässigung der Wärmeübertragung und Reibung knnen die Navier-Stokes-Gleichungen zu den Euler-Gleichungen vereinfacht werden.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{(}F_{inv}(U)) = 0^1 \tag{2.1}$$

$\vec{U}$ beschreibt dabei die konservativen Erhaltungsgröen

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad , \tag{2.2}$$

wobei ρ für die Dichte, $\vec{(}v) = (u, v, w)$ für die Geschwindigkeiten in drei Raumdimensionen und E für die totale Energie steht, welche sich aus der inneren Energie e und der kinetischen Energie zusammensetzt

$$E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2). \tag{2.3}$$

$\vec{(}F_{inv}(U))$ bezeichnet in 2.1 den reibungsfreien Flusstensor $\vec{(}F_{inv} = (F^x_{inv}, F^y_{inv}, F^z_{inv},))$:

$$F^{\vec{x}}_{inv} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix} \quad , F^{\vec{y}}_i = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix} \quad , F^{\vec{z}}_i = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p)w \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Unter Zuhilfenahme der thermischen und kalorischen Zustandsgleichung für ideale Gase schließt sich schlielich das Gleichungssystem

$$p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)). \tag{2.5}$$

Dabei reprsentiert γ den adiabaten Exponent. Fr Luft gilt γ=1.4.

2.2 Navier-Stokes-Gleichungen

Sollen nun auch Reibung und Wärmeübertragung berücksichtigt werden, müessen die bereits vorgestellten Euler-Gleichungen (2.1) um einen reibungsbehafteten Flussterm F_{vis} erweitert werden. Dadurch wird eine Strömung so allgemein wie möglich beschrieben.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{(}F_{inv}(U)) - \nabla \cdot \vec{(}F_{vis}(U, \nabla U)) = 0 \tag{2.6}$$

Wie auch der reibungslose Flussterm, reprsentiert auch der viskose Term $F_{vis} = (F_{vis}^x, (F_{vis}^y, (F_{vis}^z)$ alle Raumrichtungen. Dieser berücksichtigt einerseits den Spannungstensor τ

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad , \tag{2.7}$$

für den gilt:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right). \tag{2.8}$$

Dabei repräsentiert δ_{ij} das Kronekterdelta mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{fr j=i} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{2.9}$$

Für die dynamische Viskosität μ wird Sutherlands Law angewedent, das die Abhnigkeit der Viskositt mit der Temperatur beschreibt

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + S}{T + S} \tag{2.10}$$

mit

$$\mu_0 = 1,716 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms},$$
$$T_0 = 273,15K \text{ und}$$
$$S = 110,55K.$$

Andererseits wird bei den NS-Gleichungen in der Zeile der Energieerhaltung auch die Wrmeebertragung bercksichtigt. Der dafür notwendige Wärmestromdichtevektor $\vec{q}$ wird durch das Fouriesche Gesetzt erzeugt:

$$\vec{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{x}}, \tag{2.11}$$

wobei λ die temperaturabhnige Stoffgre der Wrmeleitfhigkeit reprsentiert und sich wiederum aus der dynamischen Viskositt μ, der Wrmeleitfhigkeit bei konstantem Druck c_p so wie der Prandtlzahl berechnen lsst:

$$\lambda = \frac{\mu c_p}{Pr} \tag{2.12}$$

Die Prandtlzahl wird dabei auf $Pr = 0,72$ festgesetzt, was für Luft zwischen 200 K und 600 K angenommen werden kann. so erhlt man schlielich die viskosen Flussterme zu

$$F_{vis}^{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + q_x \end{pmatrix} \quad , F_{vis}^{\vec{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + q_y \end{pmatrix} \quad ,$$

$$F_{vis}^{\vec{z}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + q_z \end{pmatrix} \quad , \tag{2.13}$$

3 Discontinous Galerkin Verfahren

In diesem Kapitel wird das in SUNWinT implementierte DG Verfahren skizziert. Da ein rumlich und zeitlich getrennter Ansatz gewhlt wurde, wird zunchst auf die rumliche und im Anschluss daran auf die zeitliche Diskretisierung eingegangen.

3.1 Räumliche Diskretisierung

Als Grundlage dient die Euler-Gleichung in differentieller konservativer Form

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U)}_{R(U)} = 0 \tag{3.1}$$

Diese Gleichung ist fr die exakte Lsung gleich null, bei einer numerischen Nherung jedoch wird R(U) nicht exakt null sein. Um allerdings mglichst nahe ran zu kommen, werden nun einige Anstze vorgestellt und angewandt. Bei der Methode der gewichteten Residuen, die in SUNWinT implementiert ist, wird nun nicht das betrachtete Intervall eines Raumes diskretisiert, sondern der Funktionenraum. Dazu whlt man eine beliebige Anzahl elementarer Basisfunktionen. Dies können beispielsweise Polynome, wie in SUNWinT verwendet[1], sein aber auch trigonometrische Funktionen o.. wre mglich. Die Ansatzfunktion ist nun eine Linearkombination aus diesen Basisfunktionen[2]. Die dafr bentigten Koefizienten a_i werden auch Freiheitsgrade genannt und so bestimmt, dass die Ansatzfunktion eine mglichst gute Approximation darstellt. Das bedeutet die Freiheitsgrade werden so bestimmt, dass der lokale Fehler (die Abweichung von null) mglichst gering ist. So wird nun U aus Gl. 3.1 approximiert zu

$$\hat{\mathrm{U}}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} U_k(t) b_k(x) \tag{3.2}$$

Da ein zeitlich und rumlich getrennter Ansatz verwendet wirk sind die Freiheitgrade U_k nur von der Zeit t abhngig und die Basisfunktionen b_k nur von der Position im Raum. Die Anzahl der Basisfunktionen und Freiheitgrade ist von der Ordnung des Verfahrens abhngig. Nachdem die Basisfunktionen gewhlt wurden und in Gl. 3.1 eingesetzt wurde, muss nun das Residuum mglichst verschwinden. Dazu gibt es mehrere verschiedene Anstze, wie beispielsweise die Methode der kleinsten Quadrate, die fordert, dass der Betrag des Residuums bezglich der Freiheitgrade mglichst verschwindet. Hier wird allerdings nur auf die Galerkin-Methode eingegangen, da diese im Code von SUNWinT verwendet wird. Die Galerkin-Methode fordert, dass das Integral des Produkt der Basisfunktionen mit dem Residuum auf dem gewhlten Intervall verschwindet. Das heit, das Residuum muss orthogonal auf dem Raum der Ansatzfunktionen stehen. Dazu muss

$$\int_\Omega v_k(x) R(\hat{\mathrm{U}}(\mathrm{x,t})) d\Omega \stackrel{!}{=} 0 \tag{3.3}$$

[1]Basissfunktionen in SUNWinT: $1, x, x^2, x^3$, ...

[2]Ansatzfunktion: $v = a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2$...

Entscheidend bei diesem Ansatz ist, dass $v_k(x) = b_k(x)$ gilt, also die Basisfunktionen identisch mit den Gewichtungsfunktionen sind. Zu beachten ist auerdem, dass U bzw. Û der Lsungsvektor ist, der fr jede Zustandsvariable eine Zeile hat. Das in Gl. 3.3 beschriebe Gleichungssystem besitzt daher Anzahl der Basisfunktionen/Ordnung des Verfahrens · Anzahl der Zustandsvariablen Gleichungen.

Entscheidend fr das discontinous Galerkin Verfahren ist, dass die Ansatzfunktion Û nicht ber den gesamten Raum, sondern nur innerhalb einer Zelle stetig sein muss. Teilt man nun den Raum in beliebig viele Elemente E, die sich nicht berlappen drfen, gilt: Zur Vereinfachung der folgenden Rechenschritte wird wieder die Notation aus Gl 3.1 verwendet:

$$\int_\Omega v_k \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_\Omega \underbrace{v_k}_{g(x)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} F(U)}_{f'(x)} \Omega = 0 \tag{3.4}$$

Wie Gl. 3.4 entnommen werden kann, bietet sich nun der hintere Term fr eine partielle Integration an, mit der man auch die aufwndige partielle Ableitung von F(Û) umgeht.

4 Verifizierung

Beim Modellieren und Simulieren kann nach Roy [1] prinzipiell in zwei Fehlerquellen unterschieden werden. Es gibt physikalische Modelierungsfehler und mathematische Fehler. Ersteres wird der Sparte der Validierung zugeordnet, die sich unter anderem mit falschen Vereinfachungen beschäftigt oder dem Gültikeitsbereich bestimmter Modelle. Dies steht bei der Prüfung eines implementierten Verfahrens allerdings an letzter Stelle, da dafür die Richtigkeit der Gleichungen und des Codes vorrausgesetzt werden muss. Die Verifizierung der Gleichungen sowie die Verifizierung des Codes sind beides rein mathematische Verfahren, die lediglich prüfen ob die Gleichungen richtig gelöst werden. Die Validierung hingegen überprüft, ob die richtigen Gleichungen gelöst werden[2].

Nach Trembkay et Al. [2] dient die Verifizierung des Codes dazu nachzuweisen, dass der numerische Code richtig funktioniert (u.a. keine Bugs). Dazu wird der Fehler mit einer bekannten Lösung verglichen und bewertet. Die Verifizierung der Gleichungen hingegen überprüft die erwartete Genauigkeit bezogen auf bestimmte Anwendungsprobleme. An erster Stelle bei der Überprüfung von Code sollte immer die Verifizierung des Codes stehen, mit der sich diese Arbeit befasst.

4.1 Verifizierung des Codes

Um Code zu verifizieren gibt es verschieden Ansätze:

- Methode der exakten Lösung
- Methode der manufactured Solutions
- Vergleich zu bereits bekannten numerischen Lösungen
- Code-to-Code-Vergleich

Wobei die letzen beiden Ansätze nicht zur fundierten Verifizierung gezählt werden können[1] und daher hier vernachlässigt werden.

4.1.1 Methode der exact solutions

Bei der Methode der exact solutions werden zu Verifizierung nur Gleichungen verwendet, deren Lösung analytisch bestimmt werden kann. Das Vorgehen lässt sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Wahl der PDEs (für CFD-Anwendungen meist Gl. 2.1 bzw, Gl. 2.6)
2. Wahl eines Rechengebietes bzw. der Domain
3. Wahl der Rand-/Anfangswerten
4. Analytische Lösung der PDEs finden (z.B. Seperation der Variablen, Charakteristikmethode, Transformation)

Dabei darf nicht vernachlässigt werden, dass nur für sehr wenige PDE-Systeme eine analytische

Lösung existiert. So müssen häufig relevante Vereinfachungen bei der Wahl der Dimensionen, der Geometrie der zu untersuchenden Körpern, dem physikalischen Modell oder ähnlichem gemacht werden. Dies begrenzt die Anwendung auf wenige, vereinfachte Gleichungen. Als Beispiel hierfür führt Oberkampf et Al. [4] die Couette-Strömung an. Es handelt sich dabei um einen der wenigen Strömungsfälle, für den eine exakte analytische Lösung existiert. Eine Coutte-Strömung beschreibt die laminare, stationäre Strömung einer Flüssigkeit zwischen zwei parallel zueinander liegenden Platten, wobei sich eine der Platten relativ zur anderen bewegt. Da die viskose Flüssigkeit an beiden Platten haftet, stellt sich ein linearer Geschwindigeitsverlauf zwischen den Platten ein. Dadurch muss der diffusive Teil der NS-Gleichungen, ein Term der zweiten Ableitung der Geschwindigkeit null sein. Eine Verifizierung des Codes durch die Methode der exact solution mit der Couette-Strömung kann floglich nicht überprüfen, ob der diffusive Term richtig implementiert ist. Ähnliches gilt auch für die andern analytischlösbaren Fälle. Wie das genannte Beispiel zeigt, kann somit nicht garantiert werden, dass die Komplexität des implementierten Codes mit all seinen Anwendungsfällen vollständig verifiziert wird.

4.1.2 Methode der Manufactured Solutions

Besonders um die Konvergenzordnung des implementierten Codes zu verifizieren, sind exakte analytische Lsungen von besonderer Bedeutung. Solche exakten Lsungen knnen mit der Methode der Manufactured Solutions auch fr komplexe, d.h. nicht-lineare, gekoppelte, hherdimensionale PDEs gefunden werden, bei denen die traditionellen exakten Lsungen an ihre Grenzen stoen. Im traditionellen Ansatz wird versucht eine analytische Lsung durch vorgegebene Rand- bzw. Initialbedingungen zu bestimmen. Die Methode der Manucatured Solutions hingegen nutz zur reinen Verifizierung des Codes aus, dass keine physikalisch sinnvolle Lsung untersucht werden muss. Dies ermglicht die Vorgabe einer beliebigen Lsung auf dem Rechengebiet der PDEs. Dies kann erreicht werden, indem die rechte Seite der Gleichung 2.1 bzw. 2.6 durch einen analytischen Quellterm vorgegeben wird. Vorgehen nach Roy et Al [1] um die Konvergenzordnung zu bestimmen

1. Festlegung des zu lsenden PDE-Systems
2. Wahl der manufactured solutions fr jede Zustandsvariable
3. Anwendung der manufactured solutions auf das PDE-System um analytische Quellterme zu erzeugen
4. Durchfhren der numerischen Rechnungen auf mehrereren unterschiedlich feinen Gittern
5. Auswerten des globalen Diskretisierungsfehlers in der numerischen Lsung
6. Abgleich der daraus entstandenen Konvergenzordnung mit der formalen Konvergenzordnung

Richtlinien fr die Wahl der Manufactured solutions

Um verwertbare Ergebnisse mit dieser Methode zu bekommen, ist es sinnvoll die Richtlinien von Oberkampf und Roy [4] zu beachten. Demnach muss unteranderem die Lsung zwar nicht physikalisch sein, Naturgesetze, wie keine negativen Temperaturen, mssen dennoch eingehalten werden. Eine Verletzung knnte bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit zu einem negativen Term unter der Wurzel fhren. Alle Teile des Codes knnen nur dann richtig verifiziert werden, wenn kein Term der Manuctured Solutions den anderen um ein Vielfaches bersteigt. So wird beispielsweise mit der Wahl einer sehr niedrigen Renoldszahl gewhrleistet, dass sowohl der konvektive Teil, wie auch der diffusive

Teil der governing equations verifiziert wird. Um dies nachzuweisen sei auf das Vorgehen von Roy at Al. [5] verwiesen, die das Verhltnis der Terme in wichtigen Regionen berprfen. Wichtig bei der Wahl der Manufactured solutions ist auch, dass die Ableitungen, dazu zhlen auch mehrfache und gemischte Ableitungen, stetig sind und nicht verschwinden. Aus diesem Grund werden meist trigonometrische oder Exponentialfunktionen verwendet. Um besonders bei hherdimensionalen Rechnungen auf vielfach verfeinerten Gittern Resourcen zu sparen, ist es empfehlenswert nicht eine ganze Periode der trigonometrischen Funktionen auf der Domain abzubilden. Für korrekte Ergebnisse reichen breits $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{5}$.

5 Ergebnisse

Der Darstellung der Ergebnisse ist ein besonderer Abschnitt zu widmen, evtl. unterteilt in experimentelle und theoretische Ergebnisse und Vergleich zwischen Theorie und Messung. Aus der Diskussion der Ergebnisse sind auch Schlussfolgerungen und Empfehlungen abzuleiten. Auftretende Diskrepanzen und unplausible Ergebnisse sind klar herauszustellen, mögliche Ursachen sind zu diskutieren.

5.1 Verschiedene Sektionen

5.1.1 Verschiedene Untersektionen

6 Zusammenfassung

Für den eiligen Leser ist die Vorgehensweise zusammen mit den wesentlichen Ergebnissen am Schluss in einer “Zusammenfassung” klar herauszustellen. Diese soll ausführlicher sein als die ”Übersicht” am Anfang der Arbeit. Auch diese Zusammenfassung soll möglichst keine Formeln enthalten.

Literaturverzeichnis

[1] T.M. Smith C.C. Ober C.J. Roy, C.C. Nelson: *Verification of Euler/Navier-Stokes codes using the method of manufactured solutions.* International Journal for Numerical Methods in Fluids, No. 44, S. 599–620, 2004.

[2] D. Pelletier D. Trembley, S. tienne: *Code Verification and the Method of Manufactured Solutions for Fluid-Structure Interaction Problems.* Conference Paper, 2006.

[3] Ryan Glasby, Nicholas Burgess, Kyle Anderson, Li Wang, Steven Allmaras und Dimitri Mavriplis: *Comparison of SU/PG and DG finite-element techniques for the compressible navier-stokes equations on anisotropic unstructured meshes.* In: 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 2013, S. 691.

[4] W.L. Oberkampf und C.J. Roy: *Verification and Validation in Scientific Computing.* Cambrige University Press, New York, 2010.

[5] Christopher Roy, Eric Tendean, Subramanya Veluri, Rifki Rifki, Edward Luke und Shelley Hebert: *Verification of rans turbulence models in Loci-CHEM using the method of manufactured solutions.* In: 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 2007, S. 4203.

Anhang A

In diesem Abschnitt soll das Prinzip der Methode der Manufactured Solutions am Beispiel der zweidimensionalen Eulergleichung Gl. 2.1 gezeigt werden. Dafr werden die von Glasby [3] vorgestellten Gleichungen als Manufactured Solutions eingesetzt:

$$\rho = 0,5(\sin(x^{+}y^{)} + 1,5) \tag{.1}$$

$$u = \sin(x^{+}y^{2}) + 0,5 \tag{.2}$$

$$v = 0,1(\cos(x^{+}y^{2}) + 0,5) \tag{.3}$$

$$e = 0,5(\cos(x^{2} + y^{2}) + 1,5) \tag{.4}$$

Wie Gl. 2.2 entnommen werden kann, braucht SUNWinT konservative Zustandsvaraiblen, weshalb die oben stehenden Gleichungen entsprechend miteinander multipliziert werden mssen. Um nun die entsprechenden Quellterme berechnen zu knnen, mssen die entsprechenden konservativen Eulergleichungen gelst werden. Der bersichtlichkeit wegen werden Gl. 2.1 hier nochmals anders formuliert:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = f_{source1} \tag{.5}$$

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^{+}p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = f_{source2} \tag{.6}$$

$$\frac{\partial\rho v}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^{+}p)}{\partial y} = f_{source3} \tag{.7}$$

$$\frac{\partial\rho e}{\partial t} + \frac{\partial((\rho e + p)u)}{\partial x} + \frac{\partial((\rho e + p)v)}{\partial y} = f_{source4} \tag{.8}$$

In diese Gleichungen knne nun unsere manufactured solutions eingesetzt werden um die Quellterme $f_{source1}$-$f_{source4}$ zu bestimmen. Da Gl. .1 - .4 nicht von der Zeit abhngen verschwindet jeweils der erste Term, die darauf folgeden werden nach den blichen mathematischen Ableitungsregeln abgeleitet. Da die Ableitungen je nach Ausgangsgleichung und gewhlten Manufactured solutions teilweise sehr unbersichtilich werden, empfiehlt es sich diese mit einer Software wie Matlab zu erzeugen.