Løsningsforslag til eksamen i AST4220, høsten 2008

Oppgave 1

a) Den første Friedmannligningen med $k = +1$ og kosmologisk konstant er

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \frac{c^2}{a^2} = \frac{\Lambda}{3}.$$

Det er tilstrekkelig å sette inn uttrykket i oppgaveteksten og vise at det oppfyller denne ligningen. Men det er heller ikke så vanskelig å løse denne diffligningen. Vi skriver den om litt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) &= \frac{\Lambda}{3} - \frac{c^2}{a^2} \\ &= \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{a_\Lambda^2} - 1\right),\end{aligned}$$

der vi har innført $a_\Lambda^2 \equiv 3c^2/\Lambda$. Av det siste uttrykket merker vi oss at vi må ha $a \geq a_\Lambda$, siden venstresiden av ligningen ikke kan være negativ. Vi tar kvadratroten på begge sider, separerer variablene og integrerer:

$$\int_{a_\Lambda}^{a} \frac{da'}{\sqrt{\left(\frac{a'}{a_\Lambda}\right)^2 - 1}} = c\int_0^t dt' = ct.$$

Bruker vi substitusjonen $a' = a_\Lambda \cosh x$ og identiteten $\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$, finner vi at

$$\int_0^{\cosh^{-1}(a/a_\Lambda)} \frac{a_\Lambda \sinh x dx}{\sinh x} dx = a_\Lambda \cosh^{-1}\left(\frac{a}{a_\Lambda}\right) = ct,$$

som til slutt gir

$$a(t) = a_\Lambda \cosh\left(\frac{ct}{a_\Lambda}\right),$$

som vi skulle vise. Vi ser at a_Λ er den minste verdien skalafaktoren kan ha i denne modellen. Dette er altså en universmodell som *ikke* har en singularitet i $t = 0$ (eller noe annet sted).

b) Ti e-foldinger etter $t = 0$ har vi

$$\ln\left(\frac{a(t)}{a_\Lambda}\right) = 10,$$

dvs.

$$\frac{a(t)}{a_\Lambda} = \cosh\left(\frac{ct}{a_\Lambda}\right) = e^{10},$$

eller

$$\frac{ct}{a_\Lambda} = \cosh^{-1}(e^{10}) \approx 10.69,$$

som gir

$$t = 10.69\frac{a_\Lambda}{c} = 10.69\frac{\sqrt{3}}{\Lambda}.$$

Kosmologisk konstant-leddet i den første Friedmannligningen er alltid lik $\Lambda/3$. Krumningsleddet er

$$\frac{c^2}{a^2(t)} = \frac{c^2}{a_\Lambda^2(e^10)^2} = e^{-20}c^2\frac{\Lambda}{3c^2} = e^{-20}\frac{\Lambda}{3},$$

dvs. en faktor $e^{-20} = 2.1 \times 10^{-9}$ mindre enn kosmologisk konstant-leddet.

c) Den første Friedmannligningen kan skrives om til denne formen:

$$1 + \frac{kc^2}{a^2H^2} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)},$$

der $\rho_c(t)$ er den kritiske tettheten ved tid t. Vi vet at $\rho(t_0) > \rho_c(t_0)$, og det betyr at $k = +1$. Men k er konstant, og venstresiden vil derfor alltid være større enn 1, og da følger det at tettheten alltid vil være større enn den kritiske.

Oppgave 2

a) Friedmannligningene er

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Betingelsen $\rho + 3p/c^2$ betyr at $\ddot{a} < 0$. Den første ligningen kan vi skrive som

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}.$$

Siden $H_0 > 0$, må høyresiden være positiv i dag, slik at det første leddet er større enn det andre. Men siden ρ per antagelse faller raskere enn $1/a^2$ betyr det at det første leddet også dominerer når vi går bakover i tid (laver verdier av a). Vi kan altså konkludere med at $\dot{a} > 0$ for alle $t \leq t_0$. Til sammen har vi at $a(t)$ er en strengt voksende funksjon for $t \leq t_0$ med $\ddot{a}(t) < 0$ for alle t. En slik funksjon må krysse t-aksen et sted, og det vil si at det må finnes et tidspunkt der $a = 0$.

b) I denne modellen er $\ddot{a} > 0$ i dag, men siden $\rho_{\mathrm{m}} \propto a^{-3}$ og $\rho_\Lambda =$ konstant, var $\ddot{a} < 0$ for alle tidspunkter før universet begynte å akselerere. Argumentet fra forrige punkt kan da brukes også på denne modellen, og det må derfor finnes et tidspunkt der $a = 0$.

Oppgave 3

a) Rødforskyvningen der størrelsen på det observerbare universe var 10 km er gitt ved

$$1 + z = \frac{15 \times 10^9 \text{ ly}}{10 \text{ km}} = \frac{1.4 \times 10^{26} \text{ m}}{10^4 \text{ m}} \approx 1.4 \times 10^{22}.$$

Strålingstemperaturen var da

$$T = T_0(1 + z) = 2.73 \times 1.4 \times 10^{22} \text{ K} = 3.9 \times 10^{22} \text{ K}.$$

Dette svarer til en termisk energi

$$k_{\mathrm{B}}T = 3.3 \times 10^12 \text{ MeV} = 3.3 \times 10^9 \text{ GeV}.$$

Ved slike energier kan vi regne med at alle frihetsgradene i Standardmodellen var til stede, var relativistiske og i termisk likevekt. Det effektive antallet relativistiske frihetsgrader blir (se kapittel 2 i forelesningsnotatene)

$$g_* = 28 + \frac{7}{8} \times 90 = 106.75,$$

og tiden etter Big Bang er da gitt ved

$$t = 2.423 g_*^{-1/2} \left(\frac{k_\mathrm{B} T}{1\ \mathrm{MeV}} \right)^{-2} \mathrm{s} = 2.1 \times 10^{-26}\ \mathrm{s}.$$

b) For dette potensialet er totalt antall e-foldinger gitt ved

$$\begin{aligned} N_\mathrm{tot} &= \frac{8\pi}{E_\mathrm{Pl}^2} \int_{\phi_\mathrm{end}}^{\phi_\mathrm{i}} \frac{V}{V'} d\phi \\ &= \frac{4\pi}{p E_\mathrm{Pl}^2} (\phi_\mathrm{i}^2 - \phi_\mathrm{end}^2) = \frac{4\pi\phi_\mathrm{i}^2}{p E_\mathrm{Pl}^2} \left(1 - \frac{\phi_\mathrm{end}^2}{\phi_\mathrm{i}^2} \right). \end{aligned}$$

Her er ϕ_i feltverdien ved start av inflasjon, og ϕ_end er verdien der inflasjon slutter. Den sistnevnte er bestemt av at $\epsilon(\phi_\mathrm{end}) = 1$, der slow-roll-parameteren ϵ er gitt ved

$$\epsilon = \frac{E_\mathrm{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = \frac{E_\mathrm{Pl}^2}{16\pi} \frac{p}{\phi^2}.$$

Dette gir

$$\phi_\mathrm{end} = \frac{p E_\mathrm{Pl}}{4\sqrt{\pi}}.$$

For at vi skal ha slow-roll, må vi ha $\epsilon(\phi_\mathrm{i}) \ll 1$, som gir

$$\phi_\mathrm{i}^2 \gg \frac{p^2 E_\mathrm{Pl}^2}{16\pi} = \phi_\mathrm{end}^2.$$

Det betyr at

$$N_\mathrm{tot} \approx \frac{4\pi\phi_\mathrm{i}^2}{p E_\mathrm{Pl}^2} \gg \frac{4\pi}{p E_\mathrm{Pl}^2} \frac{p^2 E_\mathrm{Pl}^2}{16\pi} = \frac{p}{4},$$

og siden $p/4$ er et tall av størrelsesorden 1, har vi vist det ønskede resultatet.

Oppgave 4

a) Jeansbølgelengden er lengdeskalaen som skiller balanse mellom trykkgradient og gravitasjon fra gravitasjonell kollaps. Fouriermoder av tetthetsperturbasjonen med $\lambda > \lambda_\mathrm{J}$ vil øke med tiden.

b) I et EdS-univers har vi $a(t) = a_0(t/t_0)^{2/3}$, slik at $H = 2/3t$, $\rho(t) = \rho_c(t) = 3H^2/8\pi G = 1/6\pi G t^2$, og $(1+z)^{3/2} = (a_0/a)^{3/2} = t_0/t$, $c_s^2 = c_{s0}^2(t_0/t)^2$. Ligningen for tidsutviklingen av tetthetsperturbasjonene blir derfor

$$\ddot{\Delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\Delta}_k = \frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{3} - k^2 c_{s0}^2 t_0^2\right)\Delta_k.$$

Setter vi inn $\Delta_k \propto t^n$, finner vi at n må oppfylle andregradsligningen

$$n^2 + \frac{1}{3}n - \left(\frac{2}{3} - k^2 c_{s0}^2 t_0^2\right) = 0,$$

som har løsninger som kan skrives på formen oppgitt i oppgaveteksten (etter litt omskriving):

$$n = \frac{1}{6}\left(-1 \pm \sqrt{25 - 26k^2 c_{s0}^2 t_0^2}\right).$$

c) Vi har tre muligheter å ta hensyn til. Den første er $25 - 36k^2 c_{s0}^2 t_0^2 > 0$, dvs. $kc_{s0}t_0 < 5/6$. Da har vi to reelle røtter. Dersom vi skal ha en voksende løsning, må vi i tillegg ha $n > 0$. Da må $25 - 36k^2 c_{s0}^2 t_0^2 > 1$, som gir kravet

$$kc_s t_0 < \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

For $25 - 36k^2 c_{s0}^2 t_0^2 < 0$ har vi to komplekse røtter

$$n = \frac{1}{6}(-1 \pm i\sqrt{D}),$$

der $D = 36k^2 c_{s0}^2 t_0^2 - 25$. I dette tilfellet kan den generelle løsningen skrives

$$\begin{aligned}
\Delta_k(t) &= At^{(-1-i\sqrt{D})/6} + Bt^{(-1+i\sqrt{D})/6} \\
&= At^{-1/6}(e^{\ln t})^{-i\sqrt{D}/6} + Bt^{-1/6}(e^{\ln t})^{i\sqrt{D}/6} \\
&= t^{-1/6}[A\cos\left(\frac{\sqrt{D}}{6}\ln t\right) - i\sin\left(\frac{\sqrt{D}}{6}\ln t\right) \\
&+ B\cos\left(\frac{\sqrt{D}}{6}\ln t\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{D}}{6}\ln t\right)] \\
&= C_1 t^{-1/6}\cos\left(\frac{\sqrt{D}}{6}\ln t\right) + C_2 t^{-1/6}\sin\left(\frac{\sqrt{D}}{6}\ln t\right),
\end{aligned}$$

som vi ser er oscillasjoner med dempet amplitude.

Det siste tilfellet vi må ta for oss, er grensetilfellet $25 - 36k^2 c_{s0}^2 t_0^2 = 0$. Da har vi én reell rot, $n = -1/6$, som svarer til en avtagende løsning.