NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Matematikk valgfag
Forelesing 3

Numerisk løsning av PDE I
Parabolske likninger, (Diffusjonslikninger)

Hans Jakob Rivertz
IDI-avdeling-kalvskinnet

3. september 2020

Plan

Læringsmål

Partielle differensiallikninger

Nummerisk derivasjon

Forover differensmetode

Stabilitetsanalyse for FDM

Bakover differensmetode

Crank Nicolson

Innhold

Læringsmål

- Kjenne til og skille viktige typer partsielle differensiallikninger.
- Kjenne til nummeriske formler for (partsielle) deriverte.
- Kunne løse Parabolsk PDE nummerisk (Forover differensmetode)
- Kjenne til stensiler for metodene
- Kjenne til stabilitets kriterier
- Kunne løse Parabolsk PDE nummerisk (Bakover differensmetode)
- Krank -Nicolson

Innhold

Partiell deriverte

Vi repeterer fra TDAT2002:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x}, \quad f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y}$$

Partielle differensiallikninger

Definisjon (Partielle differensiallikninger)

En ***partiell differensiallikning*** *av orden n er en likning, der den ukjente er en funksjon u i flere variable $x_1, x_2, \ldots, x_r$, og som inneholder partielle deriverte av y opp til n-te orden og eventuelt u og variablene $x_1, x_2, \ldots x_r$.*

Vi vil begrense oss til lineære andre ordens PDE på formen:

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

Hvis en av variablene står for tid vil vi bruke variablene x og t.

Klassifisering av PDE

En PDE kalles for

1. Parabolsk hvis $B^2 - 4AC = 0$ (Kapittel 8.1) Denne forelesning
2. Hyperbolsk hvis $B^2 - 4AC > 0$ (Kapittel 8.2) Neste uke
3. Eliptisk hvis $B^2 - 4AC < 0$ (Kapittel 8.3 ikke pensum i år)

Eksempel (Parabolsk likning (Varmelikningen))

Den partiell differensiallikningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = 0.$$

er et eksempel på parabolsk likning. Den kalles for ***Varmelikningen****.*

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

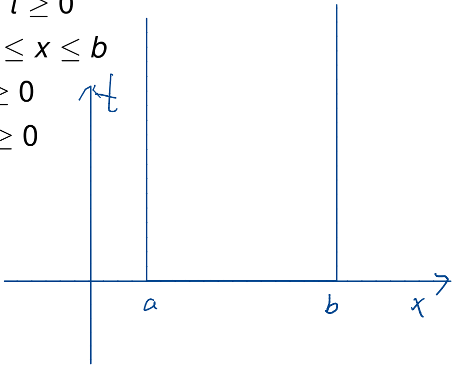
er to- og en-dimensjonale versjoner av varmelikningen. Vi skal kun se på den endimensjonale og da på formen

$$u_t = D\, u_{xx}$$

Varmelikningen i 1 dimensjon

Vi skal kun se på den endimensjonale varmelikningen med rand- og startbetingelser

$$
\begin{aligned}
u_t = D\,u_{xx}, &\quad \text{for} \quad \text{alle } a \le x \le b,\ t \ge 0 \\
u(x,0) &= f(x),\ \text{ for alle } a \le x \le b \\
u(a,t) &= l(t),\ \text{ for alle } t \ge 0 \\
u(b,t) &= r(t),\ \text{ for alle } t \ge 0
\end{aligned}
$$



D kalles diffusjonskonstant.

Innhold

Nummerisk første derivert

Bakteppe: $u_t = D\, u_{xx}$.

Den første-deriverte $f_t(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x,t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t}$ tilnærmes med

$$f_t(x, t) \approx \frac{f(x, t + k) - f(x, t)}{k}$$

k er steglengde. Feilen er $k\, u_{tt}(x, c_2)/2$ der $t < c_2 < t + k$.

Nummerisk andrederivert

Bakteppe: $u_t = D\, u_{xx}$.

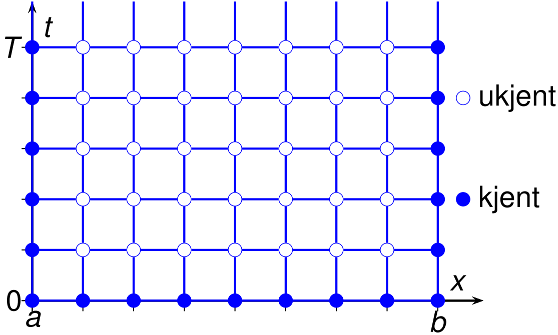
Den andre-deriverte $f_{xx}(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x-\Delta x,t) - f_x(x,t)}{\Delta x}$ tilnærmes med

$$f_{xx}(x,t) \approx \frac{f(x+h,t) - 2f(x,t) + f(x-h,t)}{h^2}$$

Feilen er $h^2 u_{xxxx}(c_1,t)/12$ der $x < c_1 < x+h$.

Innhold

Diskretisering



Diskretisering med M steg i x-retning og N steg i t-retning

Steglengder: $k = T/N$ og $h = (b - a)/M$

Posisjoner $x_i = a + i\ h$, tider $t_j = j\ k$

Samplinger $w_{ij} = u(x_i, t_j)$.

Varmelikningen i punktet (x_i, t_j) (FDM)

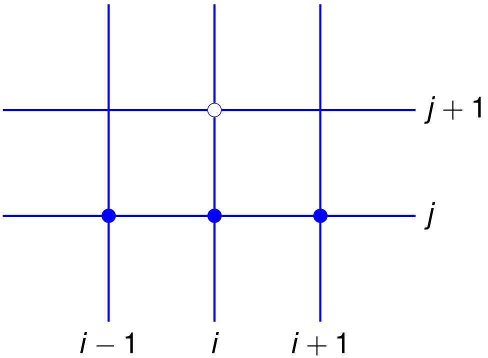
$$\frac{D}{h^2}\left(w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}\right) \approx \frac{1}{k}\left(w_{i,j+1} - w_{ij}\right)$$

Feilen går som $O(k) + O(h^2)$
Løser for $w_{i,j+1}$

$$\begin{aligned} w_{i,j+1} &= w_{ij} + \frac{Dk}{h^2}\left(w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}\right) \\ &= \sigma w_{i+1,j} + (1 - 2\sigma)w_{ij} + \sigma w_{i-1,j} \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{Dk}{h^2}.$$

Stensil for FDM



Forover-differensmetode.

$$
\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ \\ \vdots \\ \\ w_{m,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\sigma & \sigma & \cdots & 0 \\ \sigma & 1-2\sigma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma \\ 0 & \cdots & \sigma & 1-2\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ \\ \vdots \\ \\ w_{m,j} \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} w_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{M,j} \end{bmatrix}
$$

Her er $m = M - 1$, $w_{0,j} = l(t_j)$ og $w_{M,j} = r(t_j)$.

MATLAB diag( )

Forover-differensmetode.

- $$A = \begin{bmatrix} 1-2\sigma & \sigma & \cdots & 0 \\ \sigma & 1-2\sigma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma \\ 0 & \cdots & \sigma & 1-2\sigma \end{bmatrix}$$

$$\vec{s}_j = \begin{bmatrix} w_{0j} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ w_{nj} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{w}_{j+1} = A\mathbf{w}_j + \sigma\mathbf{s}_j$
- Stabil når $\sigma = Dk/h^2 < 1/2$. (Betinget stabil)

Innhold

Stabilitetsanalyse for FDM

Kriterium:
Egenverdiene til A må ligge mellom -1 og 1. Ellers vil avrundingsfeil forstørres for hvert ledd.

Teorem for stabilitet

Setning

$m \times m$*-matrisen* $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *har egenverdiene*

$$\lambda_j = 1 - 2\cos \pi j/(m+1)$$

Konsekvens for FDM

$$A = (1-\sigma)I - \sigma T$$

Har egenverdier

$$\lambda_j = (1-\sigma) - \sigma(1 - 2\cos \pi j/(m+1))$$

1. Maksverdi for λ_i er 1
2. Minverdi for λ_i er $1 - 4\sigma$
3. Stabilitet krever at at $1 - 4\sigma > -1$

Altså

$$\sigma < \frac{1}{2}.$$

Innhold

Varmelikningen i punktet (x_i, t_j)
Bakover-differensmetode.

$$\frac{D}{h^2}\left(w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}\right) \approx \frac{1}{k}\left(w_{ij} - w_{i,j-1}\right)$$

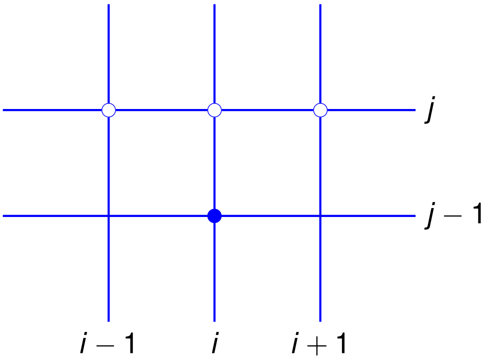
Feilen går som $O(k) + O(h^2)$
Løser for $w_{i,j-1}$

$$w_{i,j-1} = -\sigma w_{i+1,j} + (1+2\sigma)w_{ij} - \sigma w_{i-1,j}$$

$$\sigma = \frac{Dk}{h^2}.$$

- Stensil neste side.
- Matriseform for likningen om to sider.

Stensil for Bakover-differensmetode.



Bakover-differensmetode.

$$
\begin{bmatrix}
1+2\sigma & -\sigma & \cdots & 0 \\
-\sigma & 1+2\sigma & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & -\sigma \\
0 & \cdots & -\sigma & 1+2\sigma
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w_{1,j} \\ \\ \vdots \\ \\ w_{m,j}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
w_{1,j-1} \\ \\ \vdots \\ \\ w_{m,j-1}
\end{bmatrix}
+ \sigma
\overset{\vec{S}_j \, =}{
\begin{bmatrix}
w_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{M,j}
\end{bmatrix}}
$$

Her er $m = M - 1$, $w_{0,j} = l(t_j)$ og $w_{M,j} = r(t_j)$.

Bakover-differensmetode.

$B\vec{w}_j = \vec{w}_{j-1} + \sigma \vec{s}_j$

- $$B = \begin{bmatrix} 1+2\sigma & -\sigma & \cdots & 0 \\ -\sigma & 1+2\sigma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\sigma \\ 0 & \cdots & -\sigma & 1+2\sigma \end{bmatrix}$$
- $\mathbf{w}_j = B^{-1}\left(\mathbf{w}_{j-1} + \sigma \mathbf{s}_j\right)$
- Stabil for alle $\sigma = Dk/h^2$. (Ubetinget stabil)

Stabilitetsanalyse for BDM

Kriterium:
Egenverdiene til B^{-1} må ligge mellom -1 og 1. Ellers vil avrundingsfeil forstørres for hvert ledd.
Egenverdiene til B må være større enn 1 eller mindre enn -1.

Stabilitetsanalyse for BDM

$$B = (1+\sigma)I + \sigma T$$

Har egenverdier

$$\begin{aligned} \lambda_j &= (1+\sigma) + \sigma(1 - 2\cos \pi j/(m+1)) \\ &= 1 + 2\sigma(1 - \cos \pi j/(m+1)) \\ &> 1 \end{aligned}$$

Egenverdiene til B^{-1}

er $\frac{1}{\lambda_j}$

1. Minverdi for λ_j er 1

Altså BDM er alltid stabil.

Innhold

Varmelikningen i punktet (x_i, t_j)
Crank Nicolson.

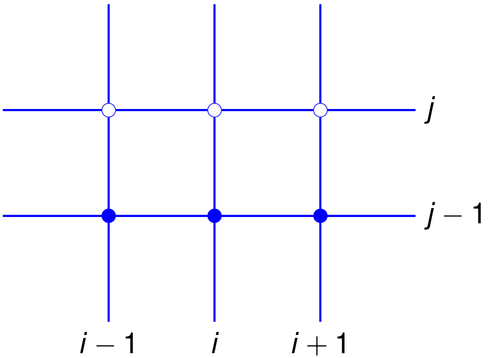
$$\frac{D}{2}u_{xx}(x_i, t_j) \qquad\qquad \frac{D}{2}u_{xx}(x_i, t_{j-1})$$

$$\underbrace{\frac{D}{2h^2}\left(w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}\right) + \frac{D}{2h^2}\left(w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j-1}\right)}_{\approx\ \frac{D}{2}u_{xx}\left(x_i,\, t_{j-1}+\frac{k}{2}\right)} \approx \underbrace{\frac{1}{k}\left(w_{ij} - w_{i,j-1}\right)}_{\approx\ u_t\left(x_i,\, t_{j-1}+\frac{k}{2}\right)}$$

Feilen går som $O(k^2) + O(h^2)$
Fortsatt er $\sigma = \frac{Dk}{h^2}$.

- Stensil neste side.
- Matriseform for likningen om to sider.

Stensil for Crank Nicolson.



Matriseform Crank Nicolson.

- $A = \begin{bmatrix} 2+2\sigma & -\sigma & \cdots & 0 \\ -\sigma & 2+2\sigma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\sigma \\ 0 & \cdots & -\sigma & 2+2\sigma \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 2-2\sigma & \sigma & \cdots & 0 \\ \sigma & 2-2\sigma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma \\ 0 & \cdots & \sigma & 2-2\sigma \end{bmatrix}$
- $A\mathbf{w}_j = B\mathbf{w}_{j-1} + \sigma\left(\mathbf{s}_j + \mathbf{s}_{j-1}\right)$
- $\mathbf{w}_j = A^{-1}\left[B\mathbf{w}_{j-1} + \sigma\left(\mathbf{s}_j + \mathbf{s}_{j-1}\right)\right]$
- Ubetinget stabil