Matematikk valgfag – Forelesing 2

Fourierrekker II

Hans Jakob Rivertz
IDI-ait
27. August 2020

Plan

Læringsmål

Trigonometriske rekker

- Repetisjon av Fourier-~~transform~~ rekker
- Partielle difflikninger PDE
- Laplace likning
- Generell løsning av varmelikningen

Innhold

Læringsmål

Trigonometriske rekker

- Repetisjon av Fourier-transform
- Partielle difflikninger PDE
- Laplace likning
- Generell løsning av varmelikningen

Læringsmål

- Kjenne til når en fourierrekke kan deriveres ledd for ledd.
- Kjenne til viktige partsielle differensiallikninger.
- Kunne separere variablene i en PDE.
- Kunne løse de separerte likningene og sette sammen løsningene
- Kunne anvende fourierrekker- sinus- eller cosinusrekker på rand- eller initialbetingelse.

Innhold

Læringsmål

Trigonometriske rekker

- Repetisjon av Fourier-transform
- Partielle difflikninger PDE
- Laplace likning
- Generell løsning av varmelikningen

Definisjon (Repetisjon av Fourier-rekker)

Gitt en kontinuerlig eller stykkvis kontinuerlig funksjon $f(x)$. Fourierrekken til f er

Periodisk med periode $2L = T$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

der

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, \mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Setning (Derivasjon av fourierrekke)

Gitt en funksjonen $f(x)$ og la denne ha Fourierrekke

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

Hvis $f(x)$ periodisk med periode $T = 2L$, $f(x)$ er kontinuerlig og $f'(x)$ er stykkvis kontinuerlig så er

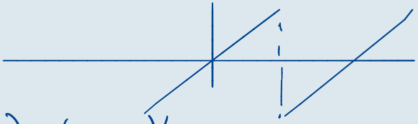
$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left(-a_n \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Eksempel (Nødvendighet av kontinuitet)

Fourierrekken til sagtann funksjonen med periode $T = 2$ er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi x$$

Leddvis derivasjon gir



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^n(-\cos n\pi x)\cdot(n\pi x)'$$

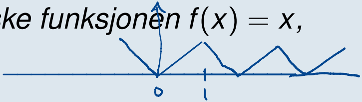
$$= \sum_{n=1}^{\infty} -2(-1)^n \cos n\pi x$$

konvergerer for ingen x.

(PS! Sagtannfunksjonen er ikke kontinuerlig.)

Eksempel (derivasjon av kontinuerlig periodisk funksjon)

Fourierrekken for den jevne periodiske funksjonen $f(x) = x$, $0 < x < 1$, $f(-x) = f(x)$*:*

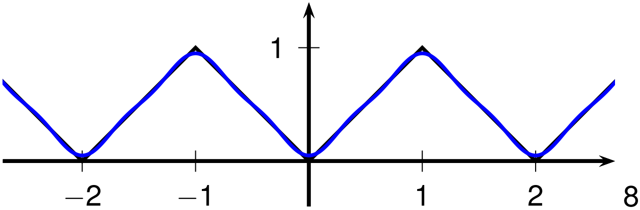


$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{4}{25\pi^2}\cos 5\pi x - \cdots$$

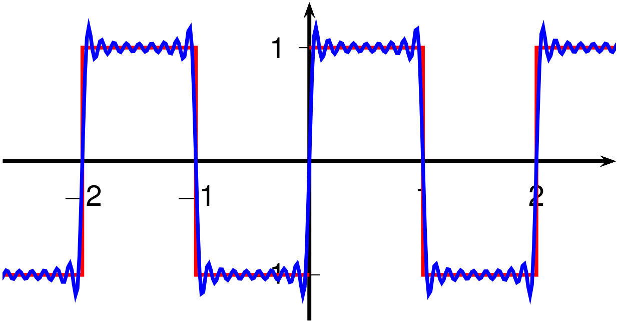
Funksjonen $f(x)$ *tilfredstiller betingelsen i setning 1. Vi kan derfor deriverer Foureierreken ledd for ledd.*

$$f'(x) \sim -\frac{4}{\pi}\sin\pi x - \frac{4}{3\pi}\sin 3\pi x - \frac{4}{5\pi}\sin 5\pi x - \cdots$$

Grafen til $f(x)$ i eksempelet



Grafen til $f'(x)$ i eksempelet



Partielle differensiallikninger

Definisjon (Partielle differensiallikninger)

*En **partiell differensiallikning** av orden n er en likning, der den ukjente er en funksjon y i flere variable $x_1, x_2, \ldots, x_r$, og som inneholder partielle deriverte av y opp til n-te orden og eventuelt y og variablene $x_1, x_2, \ldots x_r$.*
*En funksjon $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ kalles for **en løsning** av en partielle differensiallikning hvis den tilfredstiller likningen for alle verdier av variablene.*

Laplace likning

Eksempel (Laplace likning)

Differensiallikningen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

er et eksempel på en partiell differensiallikning av andre orden. Den kalles for ***Laplace-likningen i to variable****. I tre variable lyder likningen*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Vi kan også skrive Laplace-likningen på formen $f_{xx} + f_{yy} = 0$

Løsning av PDE

Funksjonen $u = x^2 - y^2$ er én av løsningene til Laplace-likningen,
(*) $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Vis at u er løsning av (*)

Deriverer $u_x = 2x$, $u_{xx} = 2$
$u_y = -2y$, $u_{yy} = -2$

$u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$ OK stemmer.

Dirichletproblem

I et Dirichletproblem er verdien til den ukjente funksjonen gitt for randen til området. Et spesialtilfelle er en rektangulær rand:

$$\begin{aligned} f(a,y) &= W(y) \\ f(b,y) &= E(y) \\ f(x,c) &= S(x) \\ f(x,d) &= N(x). \end{aligned}$$

Neumannproblem

I et Neumannproblem er verdier til de deriverte av den ukjente funksjonen gitt på randen. For eksempel kan en slik ranbetingelse være

$$\begin{aligned} f_x(a,y) &= 0 \\ f_x(b,y) &= 0 \\ f_y(x,c) &= 0 \\ f_y(x,d) &= 0. \end{aligned}$$

Eksempel (Varmelikningen)

Differensiallikningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0.$$

*er et eksempel på en partiell differensialliknin av andre orden. Den kalles for **Varmelikningen**.*

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

er to- og en-dimensjonale vesjoner av varmelikningen.

Variasjon av varmelikning

La $P(x, y, t)$ være en populasjon av en art

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) + cP.$$

α beskriver hvor godt arten sprer seg med tiden og c måler hvor stor evne arten har til å formere seg. Randbetingelsen som ofte brukes er at arten ikke kan leve på randen av habitatet. Derfor er verdien av P lik null på randen.

Eksempel (Bølgelikningen)

Differensiallikningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0.$$

er en partiell differensiallikning av andre orden. Den kalles for ***Bølgelikningen****.*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

er to- og en-dimensjonale vesjoner av bølgelikingen.

Homogen PDE

En lineær partiell differensiallikning kalles for **homogen** hvis hvert ledd inneholder en forekomst av den ukjente størrelsen eller en partiell derivert av denne. Alle eksemplene hittil i kurset er homogene

- Laplace likningen
- Varmelikningen
- Bølgelikningen

Ikke alle PDE er homogene. For eksempel er **Poissonlikningen**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g(x, y)$$

ikke homogen med mindre $g(x, y)$ er lik null for alle inputverdier for x og y.

Superposisjonsprinsippet

Setning (Superposisjonsprinsippet)

Hvis $f(x, y, z, t)$ og $g(x, y, z, t)$ begge er løsninger av samme homogene lineære partielle differensialikning, så er summen

$$a\,f(x, y, z, t) + b\,g(x, y, z, t)$$

også en løsning av den samme likningen for hvilket som helst par av konstanter a og b.

Bevis for $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$:

$u_1 = f(x,t)$ løsning når $f_{tt} - c^2 f_{xx} = 0$

$u_2 = g(x,t)$ løsning –"– $g_{tt} - c^2 g_{xx} = 0$

La $u = af + bg$

$$u_{xx} = af_{xx} + bg_{xx} \qquad u_x = af_x + bg_x$$

$$u_{tt} = af_{tt} + bg_{tt}$$

Setter inn i likningen.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = (af_{tt} + bg_{tt}) - c^2(af_{xx} + bg_{xx})$$

$$= af_{tt} + bg_{tt} - c^2 af_{xx} - c^2 bg_{xx}$$

$$= a(f_{tt} - c^2 f_{xx}) + b(g_{tt} - c^2 g_{xx})$$

$$= a \cdot 0 + b \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

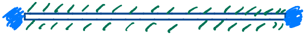
QED.

Rand- og Initialverdiproblem

Vi vil finne løsningen av varmelikningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

med initialbetingelse $T(x,0) = \sin^2 \pi x$ og randbetingelse $T(0,t) = T(1,t) = 0$.



Metode for å løse en PDE som er både lineær og homogen.

Ser etter løsninger på formen

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

Separering

Sett inn $T(x,t) = F(x)G(t)$ i likningen:

$$T_t(x,t) = F(x)G'(t) = F''(x)G(t). = T_{xx}(x,t)$$

og separer

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Hver side av liknigen er konstant lik k fordi VS er funksjon av t og HS er funsjon av x Derfor har vi

$$G'(t) = k\,G(t) \text{ og } F''(x) = k\,F(x)$$

Diskusjon av positiv k

For positive verdier av k får vi

$$F(x) = A\,e^{\sqrt{k}x} + B\,e^{-\sqrt{k}x}.$$

- Randbetingelser $T(0,t) = 0$ og $T(1,t) = 0$ gir $F(0)G(t) = 0$ og $F(1)G(t) = 0$.
- Enten $G(t) = 0$ for alle verdier av t eller $F(0) = F(1) = 0$.
- Tilfellet $G(t) = 0$ (konstant lik 0) er uinteressant.
- Enden på “visen” er at $A = B = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} F(0) = A + B = 0 \\ F(1) = A e^{\sqrt{k}} + B e^{-\sqrt{k}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = B = 0.$$

Diskusjon av $k = 0$

$F''(x) = 0 \iff F'(x) = A \iff F(x) = Ax + B$

For $k = 0$ får vi $F(x) = Ax + B$

- Randbetingelser $T(0, t) = 0$ og $T(1, t) = 0$ gir $F(0)G(t) = 0$ og $F(1)G(t) = 0$.
- Enten $G(t) = 0$ for alle verdier av t eller $F(0) = F(1) = 0$.
- Tilfellet $G(t) = 0$ (konstant lik 0) er uinteressant.
- Enden på “visen” er at $A = B = 0$.

$F(0) = B = 0$

$F(1) = A = 0$

Diskusjon av negativ k

For negative verdier $k = -\omega^2$ får vi løsninger $\omega > 0$

$F'' = -\omega^2 F$
$G' = -\omega^2 G$

$$F(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

generell løsning.

og $G(t) = Ce^{-\omega^2 t}$.

- Randbetingelser $T(0,t) = 0$ og $T(1,t) = 0$ gir $F(0)G(t) = 0$ og $F(1)G(t) = 0$.
- Enten $G(t) = 0$ for alle verdier av t eller $F(0) = F(1) = 0$.
- Tilfellet $G(t) = 0$ (konstant lik 0) er uinteressant.
- Da er $F(0) = A = 0$ og
- $F(1) = B\sin\omega = 0$. Det betyr at $\omega = n\pi$ der n er et heltall.
- Uendelig mange løsninger. $n > 0$

$$T_n(x,t) = G(t)\cdot F(t) = e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Superposisjonsprinsippet og Fourier rekker

Superposisjonsprinsippet: (generell løsning)

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$$

Initialbetingelse

$$T(x,0) = \sin^2 \pi x$$

Fra generell løsning

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x.$$

Fortsettelse

- Skriver om $\sin^2 \pi x = 1 - \cos^2 \pi x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x$.
- Finner B_n-ene i sinus-rekken.
- Da er løsningen lik

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8e^{-(2n-1)^2\pi^2 t} \sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)((2n-1)^2-4)\pi}.$$

Sinus-rekke $\qquad L=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x$$

$$b_n = 2\int_0^L \frac{1}{2}\sin n\pi x\,dx - \frac{2}{2}\int_0^L \cos 2\pi x \sin n\pi x\,dx$$

$$\int \sin n\pi x\,dx = \left[-(\cos n\pi x)\cdot\frac{1}{n\pi}\right]_0^L = \left(-(-1)^n+1\right)\cdot\frac{1}{n\pi}$$

$$-\int_0^1 \cos 2\pi x \sin n\pi x \, dx = \dots$$

$$\sin(2\pi x + n\pi x) = \cos 2\pi x \sin n\pi x + \sin 2\pi x \cos n\pi x$$

$$\sin(-2\pi x + n\pi x) = \cos 2\pi x \sin n\pi x - \sin 2\pi x \cos n\pi x$$

Summen gange med 1/2

$$\cos 2\pi x \sin n\pi x = \frac{1}{2}\left(\sin (n+2)\pi x + \sin (n-2)\pi x\right)$$

$$\dots \quad -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin (n+2)\pi x \, dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \sin (n-2)\pi x \, dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \sin(n+2)\pi x \, dx =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(n+2)\pi x}{(n+2)\pi}\right]_0^1 = \frac{+1}{2(n+2)\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \sin(n-2)\pi x \, dx = \frac{1}{2(n-2)\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$n \neq 2$$

$$n = 2 \qquad -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin(n-2)\pi x \, dx = \underline{0}$$