NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Matematikk valgfag – Forelesing 1

Fourierrekker I

Hans Jakob Rivertz

IDI-AIT

20. August 2020

Plan

Læringsmål

Trigonometriske rekker

Indre produkt ~ prikk produkt

- Indreprodukt mellom funksjoner definert på et intervall
- Periodiske funksjoner
- Indreprodukt mellom sinus og cosinus-funksjoner
- Trigonometriske rekker

Odde og jevne funksjoner

- Odde og jevne funksjoner
- Odde og jevne periodiske utvidelser
- Sinus- og cosinusrekker

Innhold

Læringsmål

- Kjenne til indreprodukt mellom funksjoner definert på et intervall.
- Ortogonal (uendelig) basis av trigonometriske funksjoner.
- Kjenne definisjonen av trigonometriske rekker.
- Kjenne til at enhver stykkvis glatt funksjon definert på et intervall kan skrives som en trigonometrisk rekke. kontinuerlig
- Kunne regne ut koeffisientene til en trigonometrik rekke.
- Fourierrekker av jevne og odde funksjoner.
- Sinus- og cosinus-rekker

Innhold

Læringsmål

Trigonometriske rekker

- Indreprodukt mellom funksjoner definert på et intervall
- Periodiske funksjoner
- Indreprodukt mellom sinus og cosinus-funksjoner
- Trigonometriske rekker

Odde og jevne funksjoner

- Odde og jevne funksjoner
- Odde og jevne periodiske utvidelser
- Sinus- og cosinusrekker

Indreprodukt mellom funksjoner

Ligner på prikk-produkt $\underline{x} = [x_1, x_2, x_3]$ $\underline{y} = [y_1, y_2, y_3]$

$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$

Definisjon

Indreproduktet $\langle f, g \rangle$ *mellom funksjonene* f *og* g *definert på intervallet* $[a, b]$ *er gitt ved integralet*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Samplet versjon dele opp intervallet i n like dela med lengde $\Delta x = (b-a)/n$. n samplingspunkter $x_1^*, \dots, x_n^*$

$$[f(x_1^*), \dots, f(x_n^*)] \cdot [g(x_1^*), \dots, g(x_n^*)] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) g(x_i^*) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

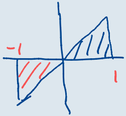
gange med Δx : $\displaystyle \underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) g(x_i^*) \Delta x}} \to \int_a^b f(x) g(x) \, dx$

Eksempel på indreprodukt mellom funksjoner

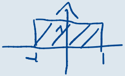
Eksempel

La $f(x) = 1$ *og* $g(x) = x$, *begge definert på intervallet* $[-1, 1]$.
Indreproduktene $\langle f, g\rangle$, $\langle f, f\rangle$ *og* $\langle g, g\rangle$ *er*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = 0$$



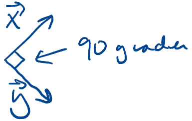
$$\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)^2\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2$$



$$\langle g, g\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)^2\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = 2/3$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}(-1)^3 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Ortogonale funksjoner



$\boxed{\vec{x}\cdot\vec{y}=0}$

Fra eksempelet i forige foil så vi at $\langle f, g \rangle = 0$. Vi definerer

Definisjon

*To funksjoner f og g definert på et intervall $[a, b]$ kalles **ortogonale** hvis $\langle f, g \rangle = 0$.*

Definisjon

*En mengde $S = \{f_1, f_2, \ldots\}$ av funksjoner definert på et intervall $[a, b]$ kalles for en **innbyrdes ortogonal** familie av funksjoner på $[a, b]$ hvis*

$$\langle f_i, f_j \rangle = 0, \ \text{når } i \neq j \text{ hvis } \langle f_i, f_i \rangle \neq 0 \, \forall i, j = 1, 2, 3, \ldots$$

familie synonymt med mengde

Periodiske funksjoner

Definisjon

En funksjon definert på $\mathbb{R}$ kalles for periodisk med peiode T hvis $f(x+T) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Indreproduktet mellom to periodiske funksjoner f og g med periode $T = 2L$ er definert ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Indreprodukt mellom sinus og cosinus-funksjoner

Setning

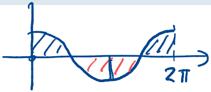
Funksjonene

$$1, \cos\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{L}, \ldots,$$

$$\sin\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{2\pi x}{L}, \ldots, \sin\frac{n\pi x}{L}, \ldots$$

danner en familie av inbyrdes ortogonale funksjoner på intervallet $[-L, L]$.

$f(x) = \cos\frac{2\pi x}{L}$ cos har periode 2π



$f(0) = 1$ $f(L) = 1$ $f(2L) = f(T) = 1$

Sjekk av setningen

En trigonometrisk identitet (se tabell i kompendiet) gir

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right]\,\mathrm{d}x$$

- I spesialtilfellet der $m = n$ blir svaret lik L
- I spesialtilfellet der $m \neq n$ blir svaret lik 0

Trigonometriske rekker

Definisjon (Trigonometriske rekker)

*En **trigonometrisk rekke** er en uendelig rekke på formen*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \tfrac{\pi n x}{L} + b_n \sin \tfrac{\pi n x}{L} \right), \tag{1}$$

der $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ er konstante koeffisienter og der L er en reell konstant.

Enkelt eksempel

En trigonometrisk rekke kan ha uendelig mange ledd men det er ikke noe i veien fra at kun et endelig antall ledd er forskjellig fra null

Eksempel

$$1 + \sin x - \cos 2x + \sin 3x$$

er en trigonometrisk rekke der $L = \pi$*. Alle koeffisienter bortsett fra* $a_0 = 1$ *,*$b_1 = 1$ *,*$a_2 = -1$ *og* $b_3 = 1$ *er lik null.*

Eksempel

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\left\langle f(x), \cos\frac{2\pi x}{L} \right\rangle = \overset{0}{\overset{/\!/}{\left\langle a_0, \cos\frac{2\pi x}{L} \right\rangle}}$$

$$+ \; a_1 \overset{0}{\overset{/\!/}{\left\langle \cos\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L} \right\rangle}} + a_2 \overset{L}{\overset{/\!/}{\left\langle \cos\frac{2\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L} \right\rangle}} + \cdots$$

$$= 0 + 0 + a_2 \cdot L + 0 \cdots 0 \qquad = a_2 L$$

Setning (Formler for koefisientene til en Trig. rekke)

Hvis en funksjon $f(x)$ er lik en trigonometrisk rekke

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \tfrac{n\pi x}{L} + b_n \sin \tfrac{n\pi x}{L} \right),$$

så kan vi regne ut verdiene til koeffisientene ved hjelp av formelene

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} 1 \cdot f(x)\, \mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \tfrac{\pi n x}{L}\, \mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \tfrac{\pi n x}{L}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tilsvarende

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \langle a_0, g(x) \rangle + \sum_k a_k \langle \cos \tfrac{k\pi x}{L}, g(x) \rangle + b_n \cdots$$

Definisjon (Fourierrekken til funkjonen f)

La $f(x)$ være en stykkevis kontinuerlig, periodisk funksjon med periode $2L$. Dens ***Fourierrekke*** *er definert ved*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

der

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \ \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots \text{ og} \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \ \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

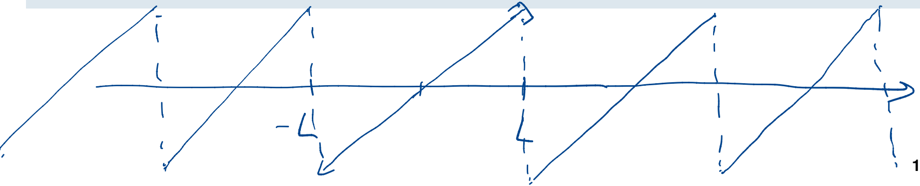
Stykkvis glatte funksjoner

Definisjon

En funksjon $f(x)$ kalles stykkvis glatt hvis både $f(x)$ og $f'(x)$ er stykkvis kontinuerlige.

Eksempel

Sagtann-funksjonen med periode $T = 2L$, definert ved $f(x) = x$ for alle $x \in (-L, L]$. For alle heltall k er $f(x) = f(x - kT)$ når $x \in (-L + 2kL, L + 2kL]$.



Fundamentalt teorem for fourierrekker

Setning

Fourierrekken til en periodisk stykkvis glatt funksjon $f(x)$ med periode $2L$ konvergerer mot f i alle punkter x, bortsett fra punkter der f er diskontinuerlig. I et slikt punkt, $x = x_0$, konvergerer f mot gjennomsnittet av høyre- og venstre-sidegrensene til $f(x)$.

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) + \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right).$$

Eksempel (Fourier til sagtann med periode T=2)

Finn Fourierrekken til sagtannfunksjonen med periode T=2.

Løsning: *Perioden er 2. Derfor er* $L = 1$*. Koeffisientene er*

$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = 0,$

delvis integrasjon

$$a_n = \int_{-1}^{1} t\cos n\pi t\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{1}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\sin n\pi t\,\mathrm{d}t = 0,$$

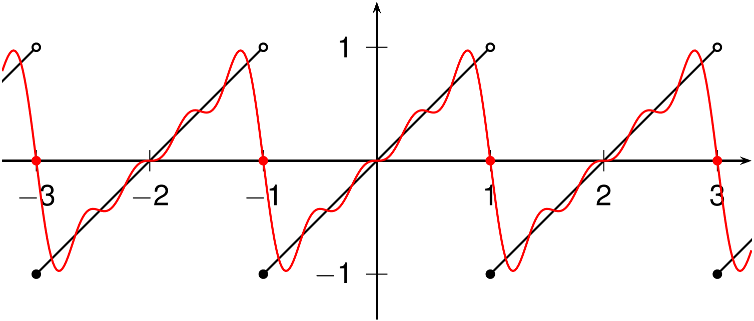
$$b_n = \int_{-1}^{1} t\sin n\pi t\,\mathrm{d}t = \left[-t\frac{1}{n\pi}\cos n\pi t\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{n\pi}\underbrace{\int_{-1}^{1}\cos n\pi t\,\mathrm{d}t}_{=0}$$

$$= \left[-1\frac{1}{n\pi}\cos n\pi - 1\frac{1}{n\pi}\cos(-n\pi)\right] = \frac{2}{n\pi}(-1)^n.$$

Fourierrekken til $f(t)$ *er* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^n\sin n\pi x$

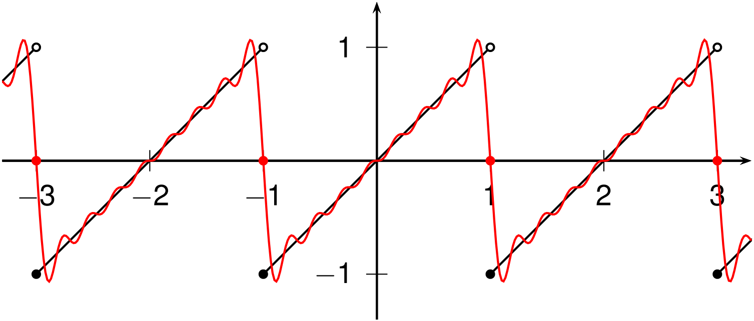
Kun sinus ledd

Figur til eksempel (tilnærming med 4 sinusledd)



Figur: De 4 første sinus leddene i rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi t$ tilnærmer den periodiske funksjonen $f(t) = t$, $1 \leq t < 1$, $f(t+2) = f(t)$.

Figur til eksempel (tilnærming med 8 sinusledd)



Figur: De 8 første sinus leddene i rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi t$ tilnærmer den periodiske funksjonen $f(t) = t$, $1 \leq t < 1$, $f(t+2) = f(t)$.

Innhold

Læringsmål

Trigonometriske rekker

- Indreprodukt mellom funksjoner definert på et intervall
- Periodiske funksjoner
- Indreprodukt mellom sinus og cosinus-funksjoner
- Trigonometriske rekker

Odde og jevne funksjoner

- Odde og jevne funksjoner
- Odde og jevne periodiske utvidelser
- Sinus- og cosinusrekker

Odde og jevne funksjoner

Definisjon

*En funksjon $f(x)$ kalles **jevn** hvis $f(-x) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. En funksjon $f(x)$ kalles **odde** hvis $f(-x) = -f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.*

Eksempler

Jevne funksjoner : $1, x^2, x^4, x^6, \ldots, x^{2n}, \ldots$

Odde — " —— $x, x^3, x^5, x^7, \ldots, x^{2n+1}, \ldots$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Eksempler på jevne og odde funksjoner

ω = konstant.

- $\sin \omega x$ er en odde funksjon
- $\cos \omega x$ er en jevn funksjon
- $1 + x$ er hverken jevn eller odde
- Sagtannfunksjonen er en odde funksjon

Fourier av odde og jevne funksjoner

Setning (Fourier for odde funksjoner)

For odde funksjoner er alle a-ene null. Dvs $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = 0$.

Setning (Fourier for jevne funksjoner)

For jevne funksjoner er alle b-ene null. Dvs $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = 0$.

Fourierrekken for odde funksjoner

Setning

*La $f(x)$ være en stykkvis kontinuerlig periodisk funksjon. Hvis $f(x)$ er **odde** så er*

Tilde ~

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

der

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Fourierrekken for jevne funksjoner

Setning

La $f(x)$ være en stykkvis kontinuerlig periodisk funksjon.
*Hvis $f(x)$ er **jevn** så er*

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

der

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x \text{ og } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Odde og jevne periodiske utvidelser

En funksjon definert på et intervall $[0, L]$ kan utvides til en periodisk funskjon med periode $2L$ på to fornuftige måter. De to måtene kalles for en **jevn periodiske utvidelse**

$$f_{jevn}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

og en **odde periodisk utvidelse**.

$$f_{odde}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

$f(x) = x \quad x \in [0, L)$

$f_{odde}(-x) = -f(-(-x)) = -f(x) = -f_{odde}(x)$

$x > 0$

Sinus- og cosinusrekker

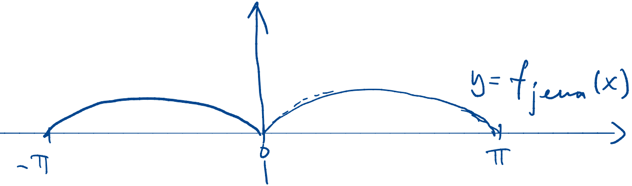
Definisjon

La f være definert på $[0, L]$. Fourierrekken til f_{odde} kalles for ***sinusrekken*** *til f*

Definisjon

La f være definert på $[0, L]$. Fourierrekken til f_{jevn} kalles for ***cosinusrekken*** *til f*

Eksempel



Eksempel

Finn ***cosinusrekken*** *til funksjonen* $f(x) = \sin x,\ 0 < x < \pi$.

Merk at selv om sin x er odde er det den **jevne** funksjonen

$$f_{jevn}(x) = \begin{cases} \sin(x), & 0 < x < \pi \\ -\sin(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

vi skal finne Fourierrekken til. Da vet vi at $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ og så videre. Vi skal derfor kun regne ut a_0 og a_1, a_2 og så videre.

Finne a_0 til f_{jevn} fra forrige foil

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(-\cos\pi - (-\cos 0)\Big) = \frac{2}{\pi}$$

Finne a_n til f_{jevn}

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \overbrace{\frac{1}{2}\Big(\sin(1-n)x - \sin(1+n)x\Big)}^{\text{Kompendiet}} \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{1}{1-n}\cos(1-n)x + \frac{1}{1+n}\cos(1+n)x\Big]_0^\pi$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{når } n \text{ er odde} \\ \frac{4n}{(1-n^2)\pi}, & \text{når } n \text{ er jevn} \end{cases}$$

a_1 tas separat

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi (\sin 0 - \sin 2x)\,dx = 0$$