Matematikk valgfag – Forelesing 4

Numerisk løsning av PDE II
Hyperbolske likninger, (Bølgeligningen)

Hans Jakob Rivertz
IDI-avdeling-kalvskinnet

10. september 2020

Plan

Læringsmål

Partielle differensiallikninger

Nummerisk derivasjon

Diskretisering

Stabilitet

Innhold

Læringsmål

Partielle differensiallikninger

Nummerisk derivasjon

Diskretisering

Stabilitet

Læringsmål

- Kjenne til og skille viktige typer partsielle differensiallikninger. (Som sist!)
- Kjenne til nummeriske formler for (partsielle) deriverte.
- Kunne løse Hyperbolsk PDE nummerisk
- Kjenne til stabilitets-kriterier (CFL-kriteriet)

Innhold

Partiell deriverte

Vi repeterer fra TDAT2002:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x}, \quad f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y}$$

Partielle differensiallikninger

Definisjon (Partielle differensiallikninger)

*En **partiell differensiallikning** av orden n er en likning, der den ukjente er en funksjon u i flere variable $x_1, x_2, \ldots, x_r$, og som inneholder partielle deriverte av y opp til n-te orden og eventuelt u og variablene $x_1, x_2, \ldots x_r$.*

Vi vil begrense oss til lineære andre ordens PDE på formen:

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

Hvis en av variablene står for tid vil vi bruke variablene x og t.

Klassifisering av PDE

En PDE kalles for

1. Parabolsk hvis $B^2 - 4AC = 0$ (Kapittel 8.1) Forrige uke
2. Hyperbolsk hvis $B^2 - 4AC > 0$ (Kapittel 8.2) Denne forelesning
3. Eliptisk hvis $B^2 - 4AC < 0$ (Kapittel 8.3 ikke pensum i år)

Eksempel (Hyperbolsk likning (Bølgeligningen))

Den partielle differensiallikningen

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0.$$

er et eksempel på hyperbolsk likning. Den kalles for ***Bølgeligningen****.*

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

er to- og en-dimensjonale vesjoner av varmelikningen. Vi skal kun se på den endimensjonale og da på formen

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Bølgeligningen i 1 dimensjon

Vi skal kun se på den endimensjonale bølgeligningen med rand- og startbetingelser

$$\begin{aligned}
u_{tt} = c^2 u_{xx}, &\quad \text{for} \quad \text{alle } a \le x \le b,\ t \ge 0 \\
u(x,0) &\quad = \quad f(x),\ \text{for alle } a \le x \le b \\
u_t(x,0) &\quad = \quad g(x),\ \text{for alle } a \le x \le b \\
u(a,t) &\quad = \quad l(t),\ \text{for alle } t \ge 0 \\
u(b,t) &\quad = \quad r(t),\ \text{for alle } t \ge 0
\end{aligned}$$

c er bølgehastigheten.

Innhold

Nummerisk andre deriverte

Bakteppe: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

De andre-deriverte

- $f_{tt}(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_t(x,t+\Delta t) - f_t(x,t)}{\Delta t}$
- $f_{xx}(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_t(x+\Delta x,t) - f_t(x,t)}{\Delta x}$

tilnærmes med

$$f_{tt}(x,t) \approx \frac{f(x,t+k) - 2f(x,t) + f(x,t-k)}{k^2}$$

$$f_{xx}(x,t) \approx \frac{f(x+h,t) - 2f(x,t) + f(x-h,t)}{h^2}$$

k og h er steglengde. Feilene er

- $k^2 u_{tttt}(x,c_2)/12$ der $t-k < c_2 < t+k$.
- $h^2 u_{xxxx}(c_1,t)/12$ der $x-h < c_1 < x+h$.

Nummerisk sentral-derivert

Bakteppe:

- $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.
- $u_t(x, 0) = g(x)$.

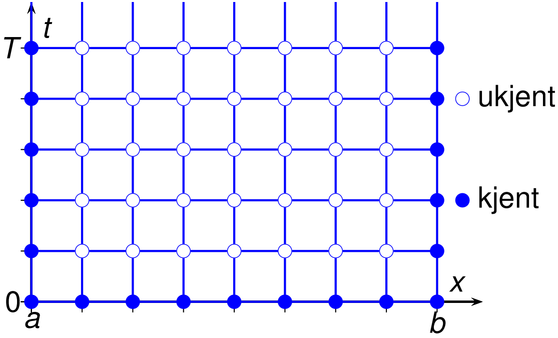
Den første-deriverte $f_t(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x,t+\Delta t) - f_t(x,t)}{\Delta t}$ tilnærmes med

$$f_t(x,t) \approx \frac{f(x,t+k) - f(x,t-k)}{2k}$$

k er steglengde. Feilen er $k^2 f_{ttt}(x, c_3)/6$ der $t - k < c_3 < t + k$.

Innhold

Diskretisering



Diskretisering med M steg i x-retning og N steg i t-retning

Steglengder: $k = T/N$ og $h = (b - a)/M$

Posisjoner $x_i = a + i\ h$, tider $t_j = j\ k$

Samplinger $w_{ij} \approx u(x_i, t_j)$.

Diskret versjon av likningen

Bakteppe:

- $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

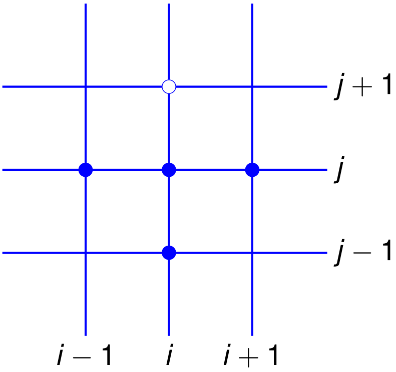
$$\frac{w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}}{k^2} - c^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

Løser for $w_{i,j+1}$

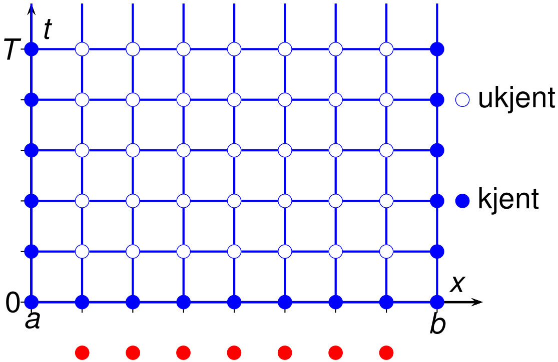
$$w_{i,j+1} = \sigma^2 w_{i-1,j} + (2 - 2\sigma^2) w_{ij} + \sigma^2 w_{i+1,j} - w_{i,j-1}$$

der $\sigma = \frac{ck}{h}$.

Stensil for metoden



Stensil mangler data i starten



Sentralderivert og initial-data.

Bakteppe:

- $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.
- $u_t(x,0) = g(x)$.

$$\frac{w_{i,1} - 2w_{i0} + w_{i,-1}}{k^2} - c^2 \frac{w_{i+1,0} - 2w_{i0} + w_{i-1,0}}{h^2} = 0$$

Sentralderivert og initial-data.

$$g(x_i) \approx \frac{w_{i,1} - w_{i,-1}}{2k}$$

Eliminerer $w_{i,-1}$.

$$w_{i,1} = \frac{\sigma^2}{2} w_{i-1,0} + (1 - \sigma^2) w_{i0} + \frac{\sigma^2}{2} w_{i+1,0} + k\, g(x_i)$$

Metoden på matriseform.

$$A = \begin{bmatrix} 2-2\sigma^2 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \sigma^2 & 2-2\sigma^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma^2 \\ 0 & \cdots & \sigma^2 & 2-2\sigma^2 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{w}_0 = \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_m) \end{bmatrix}^T$.
- $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \cdots & g(x_m) \end{bmatrix}^T$.
- $\mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} l(t_j) & 0 & \cdots & 0 & r(t_j) \end{bmatrix}^T$.
- **Startsteget:** $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2}A\mathbf{w}_0 + k\mathbf{g} + \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{s}_0$
- **Påfølgende steg:** $\mathbf{w}_{j+1} = A\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_{j-1} + \sigma^2\mathbf{s}_j$.

Innhold

Stabilitet (CLF-betingelsen)

Setning (Courant, Friedrichs, Lewy)

Metoden over er stabil for $c > 0$ hvis $\sigma = ck/h \leq 1$.

Beviset bruker at feilen ε_n i den n-te iterasjonen tilfredstiller rekursjons likningen.

$$\varepsilon_n = A\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n-2}.$$

Anta at feilen er en egenvektor ε_0 for A med egenverdi λ. Det gir rekursjonslikningen:

$$\varepsilon_n = \lambda\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n-2}.$$

Som har karakteristisk likning $t^2 = \lambda t - 1$, som har løsning

$$t_1 = \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2 - 4}{4}} \quad t_2 = \frac{\lambda}{2} - \sqrt{\frac{\lambda^2 - 4}{4}}$$

Vi får generell løsning for feilen:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0(a\, t_1^n + b\, t_2^n)$$

For stabilitet må $|t_1| < 1$ og $|t_2| < 1$ Det impliserer at $|\lambda| < 2$.
Videre er det lett å vise at $t_1(\lambda)$ og $t_2(\lambda)$ har maksimum og minimum på intervallet $[-2, 2]$ i endepunktene $\lambda = 2$ og $\lambda = -2$.
Egenverdiene til A er

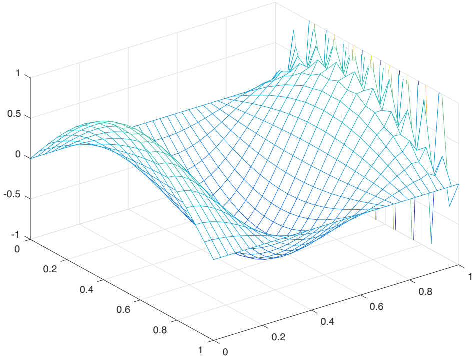
$$\lambda_j = 2\Big(1 - \sigma^2 + \sigma^2 \cos \pi j/(m+1)\Big)$$

Vi har da at

$$\lambda_j < 2$$

og

$$\lambda_j > 2\Big(1 - 2\sigma^2\Big)$$



Figur: Ustabil med $k = 0.0294$, $h = 0.0500$, $c = 2$ og $\sigma = 1.1765$.

Eksempel.

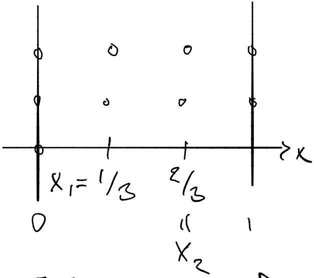
Gitt likningen $u_{tt} = 3u_{xx}$ med $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$ og $u_t(x,0) = \sqrt{3}\sin(\pi x)$. La $h = 1/3$. Finn en passende verdi for k som gir stabile utregninger. Finn A og gjør 2 steg med metoden.

$$c^2 = 3$$

$$c = \sqrt{3}$$

$$\sigma = \frac{ck}{h} = 3\sqrt{3}\,k \leq 1$$

$$k = \frac{1}{3\sqrt{3}} \qquad \sigma = 1$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} \sqrt{3}\sin \pi x_1 \\ \sqrt{3}\sin \pi x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{rand}$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \underbrace{A w_0}_{= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + k \cdot \vec{g} + \frac{1}{2}\sigma^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(3\sqrt{3}) \\ 1/(3\sqrt{3}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/9 \\ \sqrt{3}/9 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = A w_1 - \overbrace{w_0}^{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} =} + \sigma^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/9 \\ \sqrt{3}/9 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = A w_2 - w_1 + \sigma^2 \vec{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$