G1: Grafteori 1 TDAT2005 Algoritmer og datastrukturer Anette Wrålsen, høsten 2018 Institutt for datateknologi og informatikk, NTNU Plan for dagen 1 10.1 Grafer 2 10.2 Stier og kretser 3 10.3 Matriserepresentasjoner av grafer Oversikt 1 10.1 Grafer 2 10.2 Stier og kretser 3 10.3 Matriserepresentasjoner av grafer Grafer Definisjon (Graf) En graf G består av to endelige mengder VpGq: alle hjørnene til G, og EpGq: alle kantene til G sammen med kant-hjørne-funksjonen som beskriver hvilke hjørner en kant ligger inntil. Noen flere definisjoner: Naboer: To hjørner som har en kant mellom seg. Loop: En kant som starter og ender i samme hjørnet. Nabokanter: To kanter som møtes i et hjørne. Parallelle kanter: To (eller flere) kanter som går mellom de to samme hjørnene tom graf: Graf uten hjørner. Merk: Noen bruker det engelske ordet “node” for hjørne også på norsk (inkludert deler av lærestoffet i dette faget). e , ez TPG : vcattaibid ey e3 ECG c)={e , ,ez,e3,eB Hjamehautfunhgon : a e , in { a .b}tb,a} H : v , - ✓2 ez - { b} Hee. } e3 - { b. c) Vy Vz E4 - { qc } ezogezparallelle . Rettede grafer Definisjon (Rettet graf) En rettet graf G består av to endelige mengder VpGq: alle hjørnene til G, og EpGq: alle de rettede kantene til G. Hver rettet kant korresponderer med et ordnet par pv1, v2q av hjørner, der v1 er startpunktet og v2 er endepunktet til den rettede kanten. qq.F.e.ee#. a - b ealmskib) Yaat Este :B'd. c ez-> (b. b) Definisjon En graf G kalles simpel hvis den ikke har parallelle kanter eller looper. I en simpel graf kan vi bruke notasjonen tv1, v2u for kanten mellom hjørnene v1 og v2. Definisjon En graf H kalles en delgraf eller en undergraf av en graf G hvis hvert hjørne i H også er et hjørne i G, og enhver kant i H også er en kant i G. ¥4 G Mti 's " ah atop t : is I Egaf Simpel 0 lwhehmpel Oppgave Hvilke av de følgende grafene er simple delgrafer av grafen G under? G : a - be a 1 1 Hz -b=c : 1 1 Epee Ce - d Cdedgy. He : a - b - Ha : a - b c 146gal . oh e-d as : ab Hz : a - BI 11 tube I I (like e - d nnpd ce simple Komplette grafer Definisjon En komplett graf Kn med n hjørner der n er et positivt heltall, er en simpel graf med n hjørner og nøyaktig en kant mellom hvert par av hjørner. Ke Kz Kz K4 Ks • Eto oh: . ; : " ngkagkenjmuakanpee •@;y F# Komplette todelte grafer Definisjon En komplett todelt graf Km,n med pm, nq hjørner, der m og n er positive heltall, er en simpel graf med hjørner v1, v2,..., vm og w1,w2,...,wn slik at for alle i “ 1, 2,..., m og for alle j “ 1, 2,..., n så finnes det nøyaktig en kant mellom hvert par av hjørner pvi,wjq og ingen flere kanter i grafen enn disse. Kaz : I¥fx , K " : Tn#xgy Graden til et hjørne i en graf Definisjon La G være en graf og v et hjørne i G. Da er graden til v, skrevet degpvq, antall kanter som ligger inntil hjørnet. En loop teller da to ganger. Totalgraden til G er summen av gradene til alle hjørnene i G. Teorem Hvis G er en graf, er totalgraden til G to ganger antall kanter i G, dvs. Totalgraden til G “ ^vPV pGq degpvq “ 2 ¨ pantall kanter i Gq. Korollar Totalgraden til enhver graf er et partall. @9Eb degas 'II c deg (c) = 1 deg (d)=3 deg(e) =O to (Hoer want " bidrar " med 2) Proposisjon I enhver graf er det et partalls antall hjørner med odde grad. Bevis. Anta at G er en graf med et odde antall hjørner av odde grad. Da kan vi regne ut totalgraden til G som følger: psummen av gradene til hjørnene av partalls gradq ` psummen av gradene til hjørnene med odde gradq “pen sum av mange partallq`pen sum av et odde antall oddetallq “et partall ` et oddetall “ et oddetall Dette motsier korollaret på forrige lysark, så konklusjonen er at G må ha et partalls antall hjørner med odde grad. Kan det fumes en graf med be hjamo med grad hhu . 1,3 og 5 ? Nei , fordi It 3+5=9 son er et oddetall , gtofalgrad me rare et portal . Proposisjon I enhver graf er det et partalls antall hjørner med odde grad. Bevis. Anta at G er en graf med et odde antall hjørner av odde grad. Da kan vi regne ut totalgraden til G som følger: psummen av gradene til hjørnene av partalls gradq ` psummen av gradene til hjørnene med odde gradq “pen sum av mange partallq`pen sum av et odde antall oddetallq “et partall ` et oddetall “ et oddetall Dette motsier korollaret på forrige lysark, så konklusjonen er at G må ha et partalls antall hjørner med odde grad. FG =) portals ant . hjamer med odde grad . Eksempel 1. Finnes det en graf med fire hjørner av grad hhv. 1, 1, 2 og 3? 2. Finnes det en graf med fire hjørner av grad hhv. 1, 1, 3 og 3? N jet ! Tre odde hjamer . Tja ! , Fo minst 4 stk : a - b × - y Ci J ⇐oh Ft ieI Merk at proposisjonen bare sier at hvis en graf eksisterer, så må antall hjørner av odde grad være et partall. Det betyr at den kan brukes til å vise at grafen i 1. i eksemplet ikke eksisterer, men for å vise at grafen i 2. faktisk eksisterer må vi vise til et eksempel – proposisjonen er ikke nok. Oversikt 1 10.1 Grafer 2 10.2 Stier og kretser 3 10.3 Matriserepresentasjoner av grafer Broene i Königsberg Kan man på en søndagstur klare å gå alle broene nøyaktig en gang og ende turen samme sted som man startet? b b a C y#/ d d Definisjon La G være en graf, og v og w hjørner i G. En vei fra v til w er en endelig alternerende rekke av kanter og hjørner v0e1v1e2 ¨¨¨ vn´1envn der v0 “ v, vn “ w, og tvi´1, vi u er endepunktene til ei for i “ 1, 2,..., n. Den trivielle veien fra v til v består av bare v selv. Et spor fra v til w er en vei fra v til w som ikke repeterer noen kant. En sti fra v til w er et spor som ikke repeterer noe hjørne. En rundtur eller lukket vei er en vei som starter og slutter i samme hjørne. En krets er en lukket vei som ikke repeterer noen kant. En krets som består av bare et hjørne kalles en triviell krets. En simpel krets er en krets som ikke repeterer noe hjørne bortsett fra det første og det siste. Merk: Terminologien her varierer en del, så sjekk alltid definisjonene hvis du bruker andre kilder. € b aabezdezc Vaeintae , es / µ Spor , e } D= Sti dezceyd Rundtur, e4 kerbs , srmpd this grafen er hmpel , web . Kan ii besbnve en oei entydig bare vedhjelpav hjamene : [⟸9 xztx Sammenhengende grafer Definisjon La G være en graf. To hjørner v og w er sammenhengende hvis det finnes en vei fra v til w. Videre sier vi at grafen G er sammenhengende hvis det for ethvert par av hjørner i grafen finnes en vei mellom dem. Lemma La G være en graf. a) Hvis G er sammenhengende, går det en sti mellom ethvert par av forskjellige hjørner. b) Hvis hjørnene v og w er del av en krets i G og en kant fjernes fra kretsen, finnes det fortsatt et spor fra v til w. c) Hvis G er sammenhengende og har en ikke-triviell krets, kan en kant fjernes fra kretsen uten at G blir usammenhengende. sammenh .÷dbde GIT hjamo anger ni factid . a-#tb - ← iwhe rep . hjaq v. - ~ , w wv Definisjon En graf H er en sammenhengende komponent av en graf G hvis i) H er en undergraf av G, ii) H er sammenhengende og iii) ingen sammenhengende undergraf av G har H som undergraf og inneholder hjørner eller kanter som ikke er i H. " Starstwuhz " any b Tre sawmenk . G : d. of homponenter " e. of Eulerkretser Definisjon La G være en graf. En Eulerkrets for G er en krets som inneholder ethvert hjørne og enhver kant i G. Teorem Hvis en graf har en Eulerkrets, har ethvert hjørne partallsgrad. F Neil Benzie : Vi bhrsitteude 11 ' " fast " i hjamomed odde grad. • - • His start hja met ¥£E has deducts \}Wµ oddegrad in ci bmkeopp 1 pao uei at og sci 2 pm " book " og til shtt ihke kunne homme tnbake . Teorem (Kontrapositiv versjon) Hvis et hjørne i en graf har odde grad, har grafen ikke en Eulerkrets. Teorem Hvis ethvert hjørne i en ikketom sammenhengende graf har partallsgrad, har grafen en Eulerkrets. Kan du finne en Eulerkrets i følgende graf? Teorem En graf G har en Eulerkrets hvis og bare hvis G er sammenhengende og ethvert hjørne i G har partallsgrad. a → b ⇐~b→~a b ggtygfpygtle He biipatausgad ⇒oh . 8 d Eulerspor Definisjon La G være en graf, og v og w to forskjellige hjørner i G. Et Eulerspor fra v til w i G er da et spor i G som inneholder alle hjørner og enhver kant i G. Korollar La G være en graf, og v og w to hjørner i G. Da har G et Eulerspor fra v til w hvis og bare hvis G er sammenhengende, v og w har odde grad, og alle andre hjørner i G har partallsgrad. Kan du starte i rom A, gå gjennom hver dør i huset nøyaktig en gang og slutte i rom B? (Oppgaven er kopiert fra boka) mummies Theft Hamiltonkretser Definisjon Gitt en graf G er en Hamiltonkrets for G en simpel krets som inneholder alle hjørner i G. Proposisjon Hvis en graf G har en ikketriviell Hamiltonkrets, har G en undergraf H med følgende egenskaper: i) H inneholder alle hjørner i G, ii) H er sammenhengende, iii) H har samme antall hjørner som kanter, og iv) ethvert hjørne i H har grad 2. Det betyr at enhver graf som ikke har en undergraf som over heller ikke kan ha en Hamiltonkrets! Eksempel Begrunn at grafen ikke har en Hamiltonkrets. Hamiltonkretser brukes til å løse Omreisende-selger-problemet for vektede grafer ved å finne alle Hamiltonkretser i en graf og regne ut avstanden for hver for å se hvilken som blir kortest. KI ⟸Oversikt 1 10.1 Grafer 2 10.2 Stier og kretser 3 10.3 Matriserepresentasjoner av grafer 10.3 Nabomatriser Dette delkapitlet dekkes også av en ca. 10 minutter lang video lenket opp i Blackboard. Matriserepresentasjoner av rettede grafer Definisjon La G være en rettet graf med ordnede hjørner v1, v2,..., vn. Da er nabomatrisen til G matrisen A “ raijs over de ikke-negative heltallene slik at aij “ antall piler fra vi til vj for alle i, j “ 1, 2,..., n. Eksempel Finn nabomatrisen til grafen under: a b d c a bad 0 1 0 1 Ife: :# Ma d 0 000 Matriserepresentasjoner av urettede grafer Definisjon La G være en urettet graf med ordnede hjørner v1, v2,..., vn. Da er nabomatrisen til G matrisen A “ raijs over de ikke-negative heltallene slik at aij “ antall kanter som forbinder vi og vj for alle i, j “ 1, 2,..., n. Eksempel Finn nabomatrisen til grafen under: a b d c :*Iii . Nabomatriser og antall veier av lengde n Teorem Hvis G er en graf med hjørner v1, v2,..., vn og og A er nabomatrisen til G, så for hvert positive heltall n gir elementene bij i An oss antall veier med lengde n fra vi til vj . Se video en for demo ! Eksempel Finn antall veier av lengde tre i de to grafene under, og hvilke hjørner de går mellom. x y z x1 y1 z1 Se udeoeu ! G2: Grafteori 2 TDAT2005 Algoritmer og datastrukturer Anette Wrålsen, høsten 2018 Institutt for datateknologi og informatikk, NTNU Plan for dagen 1 Høydepunkter fra forrige gang 2 10. 4 Grafisomorfier 3 10. 5 og 10.6 Trær Oversikt 1 Høydepunkter fra forrige gang 2 10. 4 Grafisomorfier 3 10. 5 og 10.6 Trær Grafer Definisjon (Graf) En graf G består av to endelige mengder VpGq: alle hjørnene til G, og EpGq: alle kantene til G sammen med kant-hjørne-funksjonen som beskriver hvilke hjørner en kant ligger inntil. Noen flere definisjoner: Naboer: To hjørner som har en kant mellom seg. Loop: En kant som starter og ender i samme hjørnet. Nabokanter: To kanter som møtes i et hjørne. Parallelle kanter: To (eller flere) kanter som går mellom de to samme hjørnene tom graf: Graf uten hjørner. Merk: Noen bruker det engelske ordet “node” for hjørne også på norsk (inkludert deler av lærestoffet i dette faget). Hva er en... rettet/urettet graf? simpel graf? komplett graf med n hjørner? Hva mener vi med graden til et hjørne i en graf? Og hva er totalgraden til en graf? Når er en graf sammenhengende? Hva er en Eulerkrets? Et Eulerspor? Hva er en Hamiltonkrets? Hva er nabomatrisa til en graf? Oversikt 1 Høydepunkter fra forrige gang 2 10. 4 Grafisomorfier 3 10. 5 og 10.6 Trær Grafisomorfier Definisjon La G og G1 være grafer. Da sier vi at G er isomorf med G1 hvis det finnes bijeksjoner g : VpGq Ñ VpG1 q og h : EpGq Ñ EpG1 q som bevarer kant-hjørne-funksjonene til G og G1 slik at for alle v P VpGq og alle e P EpGq er v et endepunkt for e ô gpvq er et endepunkt for hpeq. Eksempel Vis at følgende grafer er isomorfe: a b d c w1 w2 w3 Thi w4 : Y / and wy G q • G brow , }g:vcaHKa ') C no WZ d to W3 a d ×→n(wjeal→ECa r n ') pins a p 8mF (d. ouueudt) one Isomorfiinvarianter Definisjon En egenskap P kalles en isomorfiinvariant hvis, gitt to grafer G og G1 , så G har egenskap P og G1 er isomorf med G ñ G1 har egenskap P. Teorem Alle følgende egenskaper er isomorfiinvarianter (n, m, k er alle heltall): 1. Å ha n kanter; 2. Å ha m hjørner; 3. Å ha et hjørne av grad k; 4. Å ha m hjørner av grad k; 5. Å ha en krets av lengde k; 6. Å ha en simpel krets av lengde k; 7. Å ha m simple kretser av lengde k; 8. Å være sammenhengende; 9. Å ha en Eulerkrets; 10. Å ha en Hamiltonkrets. Å vise at to grafer ikke er isomorfe Altså (kontrapositiven) - hvis to grafer ikke deler en isomorfiinvariant, kan de ikke være isomorfe! Hvorfor er ikke følgende grafer parvis isomorfe? • A bar 1 hjome air grad 2 , Bhar 2 . o.tl#Iog..lII:FEFhEhrgIsYEy A B oAw.lgvhj.avgrad4.Birgen.Fw@Hyfo.DogofIFfIgrad4.D ngen . • Char to hj . air goad C D 2 , Dhar et . Isomorfi av simple grafer Definisjon Hvis G og G1 er simple grafer, sier vi at G er isomorf med G1 hvis det finnes en bijeksjon g : VpGq Ñ VpG1 q som bevarer kant-hjørne-korrespondansene til G og G1 slik at for alle v,w P VpGq har vi tv,wu P EpGqôtgpvq, gpwqu P EpG1 q. Eksempel Vis at følgende grafer er isomorfe: G : a b c d e f H : w x r t y z Isomorfi : Isomorht : Isomorfis : r - t - - - i 1 Anar anax ahat y - Z bust b now bnor I 1 Cray cnaz Chaz 9 wt ' dust dnsey dnsey enow enot enox f moX f nor f now Avgjør om grafene under er eller ikke er isomorfe ogbegmnn AO × y / \ tegner × y + ftp.t.E#h.*q s r pr ✓g Haft BO s - y 1 # Inner isomorfi : 3 Gafene er simple, Hd ¥iE! ⟸Istimewa. , 5 - 6 Avgjør om grafene under er eller ikke er isomorfe og begun T Tog Ser me isonofe / " → \ fordi T has to limber air ✓6 / / Y bngde 3 (v. his guilty) \ / H - ✓4 wens I bare has en s K - e (p #) . / \ p #n =- Oversikt 1 Høydepunkter fra forrige gang 2 10. 4 Grafisomorfier 3 10. 5 og 10.6 Trær Trær Definisjon En graf kalles kretsfri hvis den ikke har noen ikketrivielle kretser. En graf kalles et tre hvis det er kretsfritt og sammenhengende. Et trivielt tre er et tre som består av bare et hjørne, og et tomt tre er et tre som ikke har noen hjørner. En graf kalles en skog hvis den er kretsfri og ikke sammenhengende. z -5 nrizehete ×1 " ! I - 3 Gets) Ibkete (we faeuhauh.) Ten%,Yf§l,gpslug kayaker tar Lemma Et tre med mer enn et hjørne har minst et hjørne av grad 1. Definisjon La T være et tre. Et hjørne i T av grad 1 kalles et løv(hjørne). Har T bare et hjørne kaller vi også dette hjørnet et løv. Et hjørne i T med grad mer enn 1 kalles et grenhjørne. ⇒* Kev Into gonhjamer t.no To Teorem For ethvert positivt heltall n, har et tre med n hjørner n ´ 1 kanter. Teorem For ethvert positivt heltall n, så hvis G er en sammenhengende graf med n hjørner og n ´ 1 kanter, er G et tre. n = I n = 2 n =3 n = 4 . → ⟺on Buis For watemabish indulegon . Induhspushypotesen : PG) : Et te med whjomo hair in . 1 kanter . Basisskg : Pa) : n = 1 . Det fens bare et tie med e hjame C se over) opp 177 isomorfi . Det her 0 banter, See P (e) Stunner . Ind . skg PCH ⇒Pcktl) : His alle termed k hjomer hark . l kanter , Soi has alle formed htl hjomer K Kanter Teorem For ethvert positivt heltall n, har et tre med n hjørner n ´ 1 kanter. Teorem For ethvert positivt heltall n, så hvis G er en sammenhengende graf med n hjørner og n ´ 1 kanter, er G et tre. Anta at Ter et te med KH hjaner. stolen K > l er ktl 22 , Sao vedhemmac#-) vet ii at T har et hjame air grad 1 . Det betyr at ii bar felgeude situaspm : T = G e- ✓dvs . e er en leant son Ser at (Fame iesmdnetwtsiomd 1) Ger sawmenhengende fordi Ter det og in ibke splitter opp T wed as taut e og ✓§Yg¥{ " Eggleton taintedmino , et hja one 3) G her K hjamer fodi Thwhetog in her fienet et hjome . Alta er Get te wed kwjonoogdefor let kanter . Da meet ha Kt) t.ie 's k banter ⇒oh ! Teorem For ethvert positivt heltall n, har et tre med n hjørner n ´ 1 kanter. Teorem For ethvert positivt heltall n, så hvis G er en sammenhengende graf med n hjørner og n ´ 1 kanter, er G et tre. G samuaah . graf u hj . , u - l hanker ⇒toe ! a.- Rottrær Definisjon Et rottre er et tre der et hjørne kalles roten. Nivået til et hjørne i et rottre er antall kanter langs den unike stien mellom det og roten. Høyden til treet er det lengste mulige nivået. Gitt et grenhjørne v i et tre, kaller vi alle hjørner som er et nivå lenger fra roten enn v for barna til v. Hvis w er et barn av v, kaller vi v forelderen til w. To hjørner med samme forelder kalles søsken. Gitt to hjørner v og w slik at v ligger på den unike stien mellom w og roten, sier vi at v er en forfader for w og at w er en etterkommer av v. + ← not /\ Hoyde 2 Kunnecgsci 2 * Ninl valgtetaunet 11 hpemetxovore 3 g NWEZ not . Binærtrær Definisjon Et binært tre er et rottre der enhver forelder har maksimalt to barn. Hvert barn i et binært tre kalles enten et venstre barn eller et høyre barn (men ikke begge deler) og hver forelder har maksimalt et venstre barn og et høyre barn. Et fullt binærtre er et tre der hver forelder har nøyaktig to barn. Gitt en forelder v i et binært tre T, er det venstre undertreet av v binærtreet med vs venstre barn som rot og som består av det venstre barnet og alle dets etterkommere samt alle kanter i T som går mellom disse hjørnene. Det høyre undertreet defineres tilsvarende. I. ļ, jļ,/ļ, T.to A. ļ, b. 14.5g , lhkebiharte , Beworbe Fullt tebam benarte Teorem Hvis k er et positivt heltall og T er et fullt binært tre med k grenhjørner, har T 2k ` 1 hjørner og k ` 1 løvhjørner. •hļ, 1<=6 gruhpemer kevhjomo : 6+1=7 14.4hm totauaet ' . B tkeyde 4 hjaaer * hfaooieie24 7<-24--16 Teorem Hvis T er et binært tre med t løvhjørner og høyde h, så er t § 2h. Ekvivalent kan vi si at log2 t § h. Eksempel Finnes det et binært tre med høyde 5 og 38 løvhjørner? Hayde 5 ⇒25=32 er wax . out . kevwpeno, sci 38 gavitj .