NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forelesning 5 i Fysikk

Kirchhoffs lover

Hans Jakob Rivertz
IDI-avdeling-kalvskinnet

12. november 2019

Plan

Læringsmål

Kirchhoffs første lov

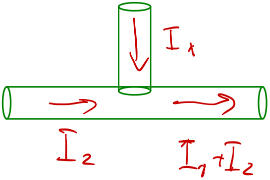
Kirchhoffs andre lov

Læringsmål

- Forstå og kunne anvende Kirchhoffs første lov.
- Forstå og kunne anvende Kirchhoffs andre lov.
- Kunne anvende Kirchofs lov til å sette opp likninger for strøm og ladninger i en krets.
- Forstå RC-kretser, herunder opp- og ut-ladning av kondensatorer.

Kirchhoffs første lov

- I en forgrening (junction) vil det ikke hope seg opp vesentlig mye ladning.
- Ladning per tid som går inn i en forgrening er derfor lik ladningen som går ut av forgreningen.



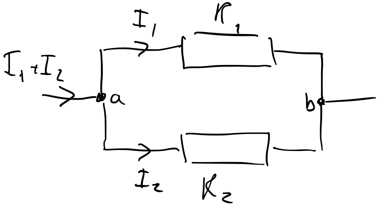
Lov (Kirchhoffs første lov)

Netto strøm inn i en forgrening er lik null.

Eksempel (Paralell-kobling av motstander)

Bruk Ohms lov, Kirchhoffs første lov til å vise at en parallellkobling av to motstander R_1 og R_2 gir samlet motstand

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



Ohms lov.

$$V_{ab} = R_1 I_1$$

$$V_{ab} = R_2 I_2$$

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2}$$

$$I_1 + I_2 = V_{ab}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = V_{ab}\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}\right) = \frac{V_{ab}}{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)}$$

Kirchhoffs første lov og paralellkobling av motstander

Skriver om

$$V_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\left(I_1 + I_2\right)$$

Kirchhoffs andre lov

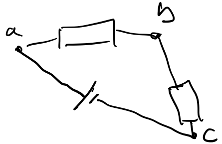
Lov (Kirchhoffs andre lov)

I en lukket sløyfe er summen av alle potensialforskjellene lik null.

“Bevis” for tilfelle med 3 punkter.

- Potensialet er en funksjon av posisjonene langs lederen og tiden.
- Potensialforskjellen mellom a og b er $V_{ab} = V_a - V_b$.
- Summen av potensialforskjellene langs en leder i punktene a, b og c er

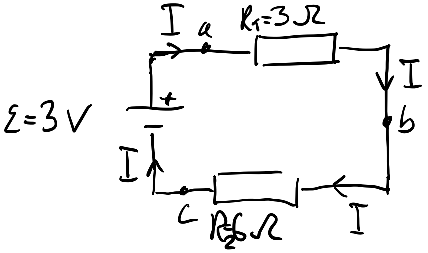
$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = V_a - V_b + V_b - V_c + V_c - V_a = 0.$$



Hvordan anvende Kirchhoffs lover for å analysere en krets med motstander.

- Velg retning til strømmene.
- Sett inn størrelser på strømmene (bruk Kirchhoffs 1. lov for å redusere antall ukjente)
- Identifiser de sluttede sløyfene og gi de en retning.
- Sett opp likninger for hver sløyfe ved hjelp av Kirchhoffs andre lov.

Enkelt eksempel



Ingen koblinger en krets.

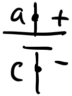
$V_a > V_b$

$$V_{ab} = V_a - V_b = R_1 \cdot I$$

$$V_{bc} = V_b - V_c = R_2 \cdot I.$$

$V_b > V_c$

$$V_{ca} = -\varepsilon$$



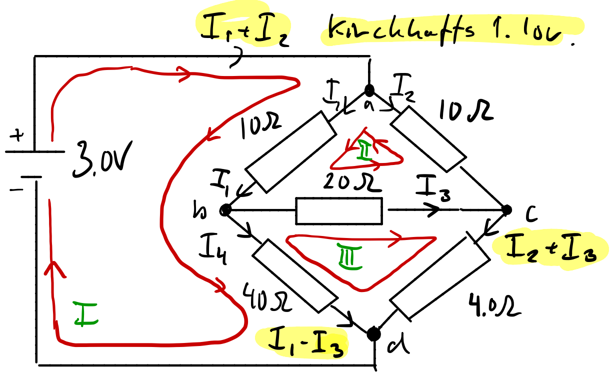
$V_c < V_a$

Kirchhoffs 2 lov for kretsen:

$$0 = V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = R_1 I + R_2 I - \varepsilon.$$

Eksempel (Anvendelse av Kirchhoffs lover)

Bruk Kirchofs lov til å finne alle strømmene i følgende krets



$$I_1 = I_3 + I_4$$

$$I_4 = I_1 - I_3$$

Kirchhoffs andre lov og kobling av motstander

$$\text{I} \qquad 10\,\Omega \cdot I_1 + 40\,\Omega\,(I_1 - I_3) - 3{,}0\,\text{V} = 0$$

$$\text{II} \qquad 10\,\Omega\, I_1 + 20\,\Omega\, I_3 - 10\,\Omega\, I_2 = 0$$

$$\text{III} \qquad 20\,\Omega\, I_3 + 40\,\Omega\,(I_2 + I_3) + 40\,(I_1 - I_3) = 0$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} 50\,\Omega\, I_1 & & -40\,\Omega\, I_3 & = 3.0\,\text{V} \\ 10\,\Omega\, I_1 & -10\,\Omega\, I_2 & +20\,\Omega\, I_3 & = 0 \\ 40\,\Omega\, I_1 & +4\,\Omega\, I_2 & -16\,\Omega\, I_3 & = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} :10\,\Omega \\ :10\,\Omega \\ :4\,\Omega \end{array}$$

Kirchhoffs andre lov og kobling av motstander

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 10 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løses og gir

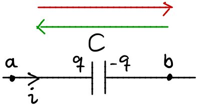
riktig svar.

Fortegnsegler for Kirchhoffs 2. lov

Sløyfens "retning"

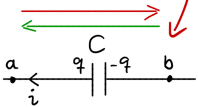
$+V_{ab}$

$-V_{ab}$



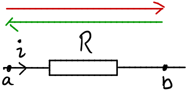
$$V_{ab} = \frac{q}{C}$$

$$\dot{q} = i$$

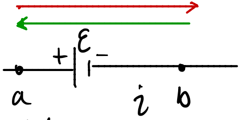


$$V_{ab} = \frac{q}{C}$$

$$\dot{q} = -i$$



$$V_{ab} = Ri$$



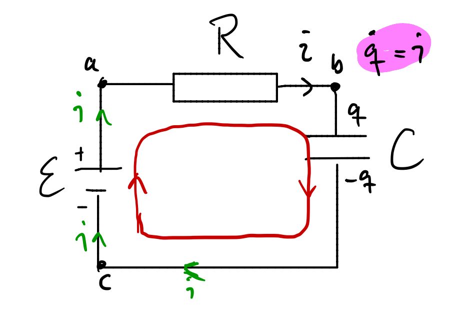
$$V_{ab} = \mathcal{E}$$

Oppladning av RC-krets

Eksempel

Bruk Kirchhoffs lover til å sette opp en differensial-likning for ladningen på kondensatoren i følgende krets.

$$\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$$



$$0 = V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = R\,i + \frac{q}{C} - \varepsilon \, . = R\dot{q} + \frac{q}{C} - \varepsilon \quad \Big| :R$$

$$\dot{q} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}$$

Løse likningen

$$\dot{q} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Etter tilstrekkelig lang tid er $\dot{q} = 0$.

Stasjonær løsning: $\frac{q_s}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}$

$$q_s = \mathcal{E} \cdot C.$$

En tidsavhengig løsning kan skrives som sum av stasjonær q_s og q_h

$q = q_h + q_s$ Sette inn i likningen

$$\dot{q}_h + \frac{q_h}{RC} + \frac{q_s}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \dot{q}_h = -\frac{1}{RC} q$$

Generell løsning.

$$q_h(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

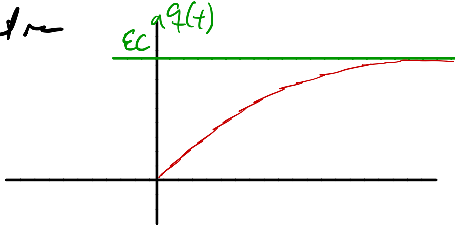
$$q(t) = q_s + q_h(t) = \mathcal{E}C + Q_0 e^{-t/RC}.$$

Hvis $q(0) = 0$ så får vi

$$\mathcal{E}C + Q_0 = 0 \qquad Q_0 = -\mathcal{E}C.$$

Opplading av kondensator

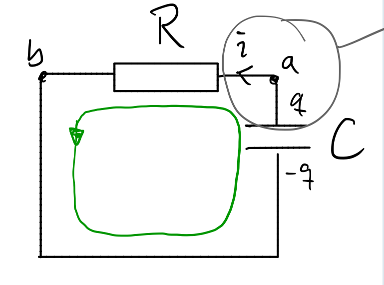
$$q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{t/RC}\right)$$



Utladning av RC-krets

Eksempel

I følgende krets vil kondensatoren utlades



$i = -\dot{q}$

$$V_{ab} + V_{ba} = 0$$

$$R i - \frac{q}{C} = 0$$

$$-R\dot{q} - \frac{q}{C} = 0 \qquad \dot{q} = -\frac{1}{RC} q$$

$$q(t) = q_0 e^{-t/RC}$$

Utladning av RC-krets