Kompendium for matematikk valgfag

Hans Jakob Rivertz

Foreløpig versjon 19. august 2019

INNHOLD

KAPITTEL 1

LAPLACETRANSFORM

1.1 Definisjoner

1.1.1 Introduksjon

Tidligere har vi sett på metoder for å løse differensiallikninger på formen

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(t).$$

Dette er en andre ordens lineær differensiallikning med konstante koeffisienter a og b. Likninger av denne typen kommer i mange anvendelser. Funksjonen $f(t)$ bestemmes gjerne fra en pådyttet ytre kraft i et mekanisk system eller et varierende signal i en elektrisk krets.

For spesielle funksjoner $f(t)$ kan man bruke ubestemte koeffisienters metode eller variasjon av parametre. Begge disse metodene fungerer greit når $f(t)$ er en kontinuerlig funksjon. Når $f(t)$ ikke er kontinuerlig er begge metodene bortimot ubrukelige.

1.1.2 Stykkvis kontinuerlige funksjoner

Både i elektriske kretser og i mekaniske systemer kan det hende at den ytre påvirkningen $f(t)$ beskrives av en funksjon som ikke er kontinuerlig.

Definisjon 1.1. En funksjon f kalles **stykkvis kontinuelig** på et intervall hvis den har et endelig antall brudd i intervallet og at høyre og venstreside grensen er endelig i hvert brudd. Et slikt brudd kalles for et **sprang**.

Eksempel 1.1. Funksjonen f definert ved

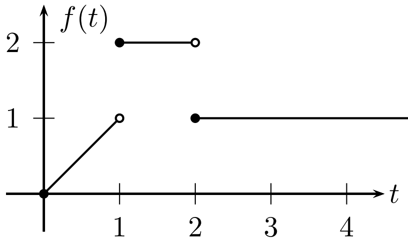
$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{for } 0 \leq t < 1 \\ 2, & \text{for } 1 \leq t < 2 \\ 1, & \text{for } t \geq 2 \end{cases}$$

er stykkvis kontinuerlig på intervallet $[0, \infty)$. Figur 1.1 viser grafen til $f(t)$. Funksjonen har brudd i $t = 1$ og $t = 2$. I $t = 1$ er venstreside-grensen lik

$$\lim_{t \to 1^-} f(t) = 1,$$

mens høyreside-grensen er

$$\lim_{t \to 1^+} f(t) = 2.$$



Figur 1.1: Funksjonen fra eksempel 1.1.

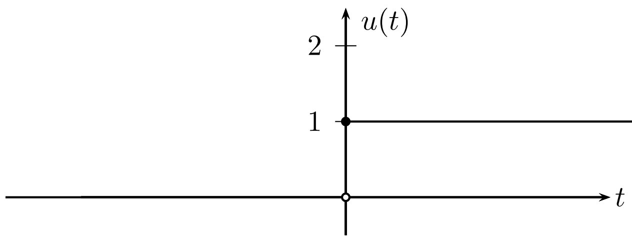
Merknad 1.1. Kontinuerlige funksjoner regnes også som stykkvis kontinuerlig funksjoner.

Et viktig spesialtilfelle er sprangfunksjonen. Den er gitt som følger

Definisjon 1.2. Sprangfunksjonen er gitt ved

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}.$$

Figur 1.2 viser grafen til sprangfunksjonen.



Figur 1.2: Sprangfunksjonen.

Sprangfunksjonen kan brukes til å skrive om funksjoner på delt forskrift. For eksempel kan funksjonen $f(t)$ fra eksempel 1.1 skrives som

$$f(t) = t + u(t-1)(2-t) - u(t-2).$$

Følgende eksempel gir en oppskrift på hvordan det kan gjøres.

Eksempel 1.2 (Omskriving av funksjon på delt forskrift). La

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & , 0 \leq t \leq a_1 \\ f_2(t) & , a_1 < t \leq a_2 \\ f_3(t) & , a_2 < t \leq \infty \end{cases}$$

Da er $f(t) = f_1(t) + u(t - a_1)(f_2(t) - f_1(t)) + u(t - a_2)(f_3(t) - f_2(t))$.

Merknad 1.2. Formelen i eksempelet over stemmer ikke på intervallgrensene. Det fører heldigvis ikke til alvorlige problemer og vi velger å overse det.

Regneeksempel 1.1. Skriv om funksjonen $f(t)$ ved hjelp av sprangfunskjoner.

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & , t \in [0, \pi/2)^1 \\ 1 & , t \in [\pi/2, \infty) \end{cases}$$

Løsning: Vi bruker oppskriften fra eksempel 1.2.

$$f(t) = \sin t + u(t - \pi/2)(1 - \sin t).$$

Noen ytre påvirkninger på et system er voldsomme. En gnist i et system, et lyn, to legemer som støter i hverandre. Felles for disse er at en viss energi overføres i et kort tidsrom $\Delta t = h$. Til dette bruker vi impulsfunksjonen.

Definisjon 1.3. **Impulsfunksjonen** med bredde h er definert ved

$$\delta_h(t) = \frac{u(t) - u(t-h)}{h}.$$

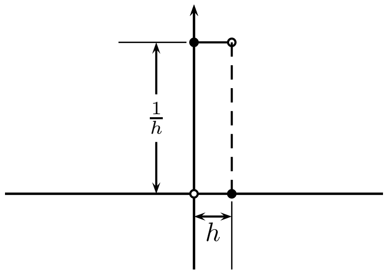
Figur 1.3 viser grafen til en typisk impulsfunksjon.

En ekstem kort impuls kan modelleres ved hjelp av en såkalt **Dirac-deltafunksjon**. Når h blir veldig liten blir $1/h$ veldig stor. I grensen når h går mot null blir $1/h$ uendelig stor.

Definisjon 1.4. Dirac-deltafunksjonen er er grensen

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \delta_h(t).$$

[1]Tegnet $\in$ betyr “element i”. Når vi skriver $t \in M$ betyr det at t er med i mengden M.



Figur 1.3: Impulsfunksjon med bredde h.

Dirac-deltafuksjonen en egentlig ikke en ordentlig funksjon, men en såkalt distribusjon. For vårt bruk i vil vi bare trenge å kjenne egenskapene til $\delta(t)$. Vi vil ikke trenge å vite hva en distribusjon egentlig er.

Setning 1.1. *Dirac-deltafunksjonen tilfredstiller følgende (noe merkelige) egenskaper.*

1. $\delta(t) = 0$ *for* $t \neq 0$,
2. $\lim_{t\to 0} \delta(t) = \infty$,
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$

Den siste egenskapen krever at $f(t)$ *er en kontinuerlig funksjon.*

Oppgaver fra kapittel 1.1

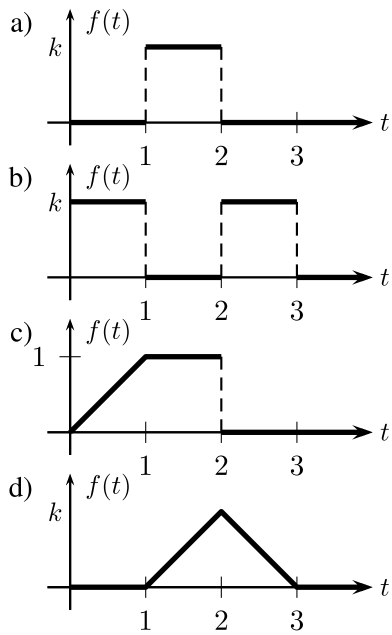
1. Skriv om funksjonene ved bruk av sprangfunksjonen.

   a) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

   b) $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 1, & 2 \le t < 4 \\ 0 & t \ge 4 \end{cases}$

   c) $h(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 2 \\ 0 & t \ge 2 \end{cases}$

2. Skriv om funksjonene ved bruk av sprangfunksjonen. I a), b) og d) er k maksverdien til funksjonen. Den er ikke bestemt i oppgaven.



3. Regn ut integralene

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^t\,\delta(t-1)\,\mathrm{d}t.$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \delta(t-\pi)\,\cos t\,\mathrm{d}t.$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \delta(t)\,\frac{1+t}{\cos t}\,\mathrm{d}t.$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^t\,\delta(t+2)\,\mathrm{d}t.$

4. Regn ut integralet $\displaystyle\int_0^{\infty} \delta_{1/2}(t)\,\mathrm{d}t$, der $\delta_{1/2}(t)$ er impulsfunksjonen med bredde $1/2$.

5. Vis at $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)\,\mathrm{d}t = 1$

1.2 Laplacetransform

1.2.1 Definisjon av Laplace

Laplacetransform, eller ofte bare Laplace, er en såkalt integraltransform. Det vil si et integral som omformer en funksjon $f(t)$, $t \geq 0$, til en annen funksjon $(\mathcal{L}f)(s)$. Laplace inngår i metoder for løsning av differensiallikninger. Metoden er spesielt nyttig i for eksempel kretsteknikk.

Definisjon 1.5. **Laplacetransformen** til en funskjon $f(t)$, $t \geq 0$, er funksjonen $\mathscr{L}\left(f\right)(s)$ definert ved

$$\mathscr{L}\left(f\right)(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Den **inverse Laplacetransformasjonen** $\mathscr{L}^{-1}\left(F(s)\right)(t)$ til $F(s) = \mathscr{L}\left(f\right)(s)$ er gitt ved

$$\mathscr{L}^{-1}\left(F(s)\right)(t) = f(t).$$

Integralet som regnes ut er avhengig av verdien til s det gjør at vi får en funksjon av s.

Merknad 1.3 (Til orientering). Til vårt bruk er det ikke nødvendig behandle definisjonsområdet til en Laplacetransform. Du kan tenke på s som en reell variabel uten at det skaper problemer. Egentlig tar variabelen s verdier i det komplekse tallplanet. Definisjonsområdet til $F(s)$ er alle komplekse tall s der integralet $\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$ konvergerer.

Vi vil nå se på et enkelt eksempel.

Eksempel 1.3. Sprangfunskjonen $u(t)$ har Laplacetransform

$$\mathscr{L}\left(u(t)\right)(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^b = \frac{1}{s}.$$

Funksjonen $u(t)$ kalles også for Heavisidefunksjonen eller på engelsk unit step function.

Eksempel 1.4. På liknende måte regner vi ut den Laplacetransformerte av funksjonen $f(t) = t$

$$\mathscr{L}\left(t\right)(s) = \int_0^\infty t\, e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[t\,\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s}\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = 0 + \left[\frac{1}{-s^2}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}.$$

Eksempel 1.5. Vi regner også ut Laplace av eksponensialfunksjonen e^{at}

$$\mathscr{L}\left(e^{at}\right)(s) = \int_0^\infty e^{at}\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{a-s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}.$$

1.2.2 Magien bak Laplace

For å forstå nytteverdien av Laplacetransformasjoen er det nyttig å se på noen av dens egenskaper. Grunnen til at Laplace undervises er dens styrke i å forenkle løsningsprosessen av initialverdiproblemer. Prosessen består av følgende tre trinn.

1. Et initialverdiproblem omformes til en algebraisk likning.
2. Den algebraiske likningen løses ved hjelp av kun algebra.
3. Løsningen i trinn to omformes tilbake for å gi løsningen på det opprinnelige initialverdiproblemet.

En viktig egenskap til Laplacetransformasjonen er at den er lineær.

Setning 1.2 (Linearitet). *La $f(t)$ og $g(t)$ være funksjoner definert for $t \geq 0$ med Laplacetransformasjoner $F(s)$ og $G(s)$. Lineærkombinasjonen $h(t) = a\,f(t) + b\,g(t)$ der a og b er konstanter har Laplacetransformasjon*

$$H(s) = a\,F(s) + b\,G(s).$$

Hvis $f(t)$ har Laplacetransformasjon $F(s)$ så har $f'(t)$ Laplacetransformasjonen $s\,F(s) - f(0)$. Vi ser dette ved følgende utregning der vi bruker delvis integrasjon.

$$\mathscr{L}\left(f'\right)(s) = \int_0^\infty f'(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty s\,f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = -f(0) + s\,F(s).$$

Det er blant annet denne egenskapen som vi bruker når vi skal løse en differensiallikning ved hjelp av Laplace.

Regneeksempel 1.2. Vi ser på følgende differensiallikning.

$$y' - 2y = t, \quad y(0) = 1$$

Vi anvender Laplacetransformen på begge sider av likhetstegnet.

$$-y(0) + s\,Y(s) - 2\,Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Resultatet er ikke en differensiallikning, men en likning vi kan løse med algebra. Vi løser likningen for $Y(s)$ og får

$$Y(s) = \frac{1+s^2}{s^2(s-2)}.$$

Det viste seg at det var mye enklere å finne $Y(s)$ enn $y(t)$ direkte. Neste utfordring er å finne $y(t)$. Du spør muligens om det var verdt å bruke Laplace når det viser seg å være ekstra arbeid å finne $y(t)$ fra $Y(s)$. Vi skal komme tilbake til dette senere og vi skal se at Laplace virkelig er nyttig.

Først finner vi $y(t)$ fra $Y(s)$. Forenkling av utrykket for $Y(s)$ er helt sentralt i metoden, som du kommer til å se snart. Vi skriver om $Y(s)$ ved hjelp av delbrøksoppspalting. Det vil si at vi skriver $Y(s)$ som en sum av enklere brøker som har faktorene fra nevneren til $\frac{1+s^2}{s^2(s-2)}$ i nevnerene:

$$\frac{1+s^2}{s^2(s-2)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-2}.$$

Vi multipliserer med $s^2(s-2)$ og får

$$1 + s^2 = A(s-2) + B(s^2 - 2s) + C\,s^2 = -2A + (A-2B)s + (B+C)s^2.$$

Vi får $A = -1/2$, $B = -1/4$ og $C = 5/4$. Vi har derfor

$$Y(s) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{s-2}.$$

Veien videre er å sammenlikne hvert ledd med Laplacetransformasjonene vi har gjennomført til nå, nemlig $u(t)$, t og e^{at}. Vi får derfor

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}u(t) + \tfrac{5}{4}e^{2t}.$$

Tabeller for Laplacetransformasjoner vil være svært nyttige for å finne $y(t)$ og til å utføre Laplace transformasjonen av likningene. Noen Laplacetransformasjoner er beskrevet i tabell 1.1 på side 17.

Oppgaver fra kapittel 1.2

1. Finn Laplacetransformasjonen til følgende funksjoner ved hjelp av definisjonen.
   a) $\cos bt$ b) $\sin bt$
   c) $e^{at}\cos bt$ d) t^2
   e) $e^{at}\sin bt$ f) t^3

2. Finn Laplacetransformasjonen til følgende funksjoner ved hjelp av tabell 1.1 på side 17. Du kan også få bruk for setning 1.2 og trigonometriske identiteter.
   a) $a\,t + b$ b) $4t^2 - 1$
   c) $\cos^2 t$ d) $\sin^2 t$
   e) $\cos^2 \omega t$ f) $\sin^2 \omega t$

3. Finn Laplacetransformasjonen til funksjonene i oppgave 1 i seksjon 1.1 ved hjelp av definisjonen.

4. Finn Laplacetransformasjonen til funksjonene i oppgave 2 i seksjon 1.1.

5. Finn den inverse Laplacetransformasjonen $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F)$ til følgende $F(s)$ ved hjelp av tabell 1.1 på side 17 og eventuelt setning 1.2.

a) $\dfrac{1}{s-4}$ b) $\dfrac{2}{s}$
c) $\dfrac{2}{s^2+4}$ d) $\dfrac{2s}{s^2+9}$
e) $\dfrac{a}{s^3}+\dfrac{b}{s^2}+\dfrac{c}{s}$ f) $\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{1}{s^2}$

6. Finn den inverse Laplacetransformasjonen $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F)$ til følgende $F(s)$ ved hjelp av tabell 1.1 på side 17 og eventuelt setning 1.2. Du vil få bruk for delbrøksoppspalting.

a) $\dfrac{1}{(s^2+4)(s-1)}$ b) $\dfrac{1-s}{(s-2)(s-3)}$
c) $\dfrac{s^2+1}{(s^2+4)(s-1)}$ d) $\dfrac{2s}{s(s^2+9)}$
e) $\dfrac{1}{s^2-4}$ f) $\dfrac{1}{s(s-1)^2}$

1.3 Laplace transformasjon og differensiallikninger

1.3.1 Derivasjon i tidsområdet.

I forrige kapittel brukte vi Laplacetransformasjon for å forenkle en førsteordens lineær differensiallikning. Vi kan gjøre det samme for andre ordens, tredje ordens og høyere ordens lineære differensiallikninger. Følgende egenskap er nyttig til det formålet.

Setning 1.3. *Hvis $y(t)$ er n ganger deriverbar og $y(t)$ har Laplacetransform $Y(s)$ så har $y^{(n)}(t)$ Laplacetransform*

$$s^n\,Y(s) - y^{(n-1)}(0) - sy^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{n-2}y'(0) - s^{n-1}y(0).$$

Bevis. Setningen er allerede vist for $n = 1$. Anta at den er sann for $n = k$. Vi skal vise at den er sann for $n = k + 1$. La $h(t) = y^{(k)}(t)$. Laplacetransformasjonen til $h'(t) = y^{(k+1)}(t)$ er

$$\begin{aligned} s\,H(s) - h(0) &\\ = s\left(s^k\,Y(s) - y^{(k-1)}(0) - sy^{(k-2)}(0) - \cdots - s^{k-2}y'(0) - s^{k-1}y(0)\right) - y^{(k)}(0) &\\ = s^{k+1}\,Y(s) - y^{(k)}(0) - sy^{(k-1)}(0) - \cdots - s^{k-1}y'(0) - s^k y(0). & \quad (1.2) \end{aligned}$$

Setningen er dermed vist ved induksjon. □

Vi kommer til å bruke følgende spesialtilfeller.

$$\mathscr{L}\left(y'(t)\right) = sY(s) - y(0) \quad (1.3)$$

$$\mathscr{L}\left(y''(t)\right) = s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) \quad (1.4)$$

Eksempel 1.6. Vi kan bruke 1.3 til å regne ut $\mathscr{L}\left(e^{at}\right)$:
La $f(t) = e^{at}$. Da er $f'(t) = a\,e^{at} = a\,f(t)$. På den ene siden er

$$\mathscr{L}\left(f'(t)\right) = s\,F(s) - f(0) = s\,F(s) - 1.$$

På den andre siden er

$$\mathscr{L}\left(f'(t)\right) = \mathscr{L}\left(a\,f(t)\right) = a\,F(s).$$

Vi har derfor likningen

$$s\,F(s) - 1 = a\,F(s)$$

som vi løser og får

$$F(s) = \frac{1}{s-a}.$$

1.3.2 Løsning av lineære 2.-ordens differensiallikninger

Setning 1.3 brukes til å skrive om en differensiallikning til en ren algebraisk likning. Initialverdiproblemet

$$y'' + ay' + by = r(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$$

skrives om ved å bruke at $\mathscr{L}\left(y'(s)\right)(s) = sY(s) - y(0)$ og $\mathscr{L}\left(y''(s)\right)(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$. I stedet for å løse initialverdiproblemet så løser vi

$$(s^2 + as + b)Y - sy(0) - y'(0) - ay(0) = R(s)$$

og finner $Y(s)$. Deretter finner vi $y(t)$.

Regneeksempel 1.3. Løs initialvediproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = 5\cos t, t \geq 0, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Løsning: Laplacetransform gir

$$s^2Y - s\,y(0) - y'(0) + 2sY - 2y(0) + 2Y = 5\frac{s}{1+s^2}.$$

Vi erstatter $y(0)$ og $y'(0)$ med deres verdier.

$$s^2Y + 2sY + 2Y = \frac{s}{1+s^2}.$$

Denne likningen har løsning

$$Y = \frac{5s}{(1+s^2)(s^2+2s+2)}.$$

For å finne $y(t)$ utfører vi først en delbrøksoppspalting av høyresiden

$$\frac{5s}{(1+s^2)(s^2+2s+2)} = \frac{As+B}{1+s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2}$$

Forenkling gir

$$5s = (As+B)(s^2+2s+2) + (Cs+D)(1+s^2)$$

Utregning av parantesene gir

$$5s = As^3 + 2As^2 + 2As + Bs^2 + 2Bs + 2B + Cs + D + Cs^3 + Ds^2.$$

Samling av ledd av samme orden

$$5s = (A+C)s^3 + (2A+B+D)s^2 + (2A+2B+C)s + (2B+D).$$

Vi løser sytemet av likninger

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ 2A+B+D &= 0 \\ 2A+2B+C &= 5 \\ 2B+D &= 0 \end{aligned}$$

Systemet har løsning $A = 1$, $B = 2$, $C = -1$, $D = -4$. Vi setter inn i yttrykket for Y

$$Y = \frac{s+2}{1+s^2} + \frac{-s-4}{(s+1)^2+1}.$$

$$Y = \frac{s}{1+s^2} + \frac{2}{1+s^2} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{3}{(s+1)^2+1}.$$

Vi slår opp i tabell 1.1 over Laplacetransformasjoner på side 17 og finner

$$y(t) = \cos t + 2\sin t - e^{-t}\cos t - 3e^{-t}\sin t$$

Oppgaver fra kapittel 1.3

1. Bruk oppskriften i eksempel 1.6 til å regne ut
   a) $\mathscr{L}(t) = \frac{1}{s^2}$
   b) $\mathscr{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$
   c) $\mathscr{L}(\cos\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
   d) $\mathscr{L}(\sin\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

2. Løs initialverdiproblemene gitt under ved hjelp av Laplace.
   a) $y'' + 4y = 0$,
   $y(0) = 0, y'(0) = 0$.
   b) $y'' - 2y' + 2y = 0$,
   $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
   c) $y'' - y = 0$,
   $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
   d) $y'' + 2y' + 2y =$,
   $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

3. Løs initialverdiproblemene gitt under ved hjelp av Laplace. Gi svaret som en funksjon i s. Dvs, du behøver ikke å utføre invers Laplace.
   a) $y'' + 4y = \delta(t-\pi)$,
   $y(0) = 0, y'(0) = 0$.
   b) $y'' + 9y = \delta(t-3\pi)$,
   $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
   c) $y'' + y = \delta(t-\pi) + \delta(t-2\pi)$,
   $y(0) = 0, y'(0) = 0$.
   d) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-2\pi)$,
   $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

4. Løs initialverdiproblemene gitt under ved hjelp av Laplace.
   a) $y'' - 4y = \cos t$,
   $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
   b) $y'' + 9y = \sin t$,
   $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
   c) $y'' - 2y' + y = e^t$,
   $y(0) = 0, y'(0) = 2$.
   d) $y'' + 5y' + 6y = t$,
   $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

1.4 Forskyvningsteoremene

1.4.1 Forskyvning i t-rommet

Dette del-kapittelet handler om Laplacetransformasjonen av stykkvis kontinuerlige funskjoner. Dette gjøres ved å bruke sprangfunksjoner og linearitet.

Setning 1.4. *Hvis funksjonen $f(t)$ har Laplacetransformasjonen $F(s)$, har $f(t-a)u(t-a)$ Laplacetrasnformasjonen $e^{-as}F(s)$.*

$$\mathscr{L}\left(f(t-a)u(t-a)\right) = e^{-as}F(s).$$

Invers Laplacetransform av $e^{-as}F(s)$ er gitt ved

$$\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right) = f(t-a)u(t-a).$$

Bevis. Det er tilstrekkelig å vise at $\mathscr{L}\left(f(t-a)u(t-a)\right) = e^{-as}F(s)$. I følgende utregning bruker vi substitusjonen $x = t-a$ i tredje likhetstegn. I fjerde likhetstegn har vi benyttet oss av $e^{-st-sa} = e^{-st}e^{-as}$.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(f(t-a)u(t-a)\right) &= \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty f(x)e^{-s(x+a)}\mathrm{d}x = e^{-sa}\int_0^\infty f(x)e^{-sx}\mathrm{d}x = e^{-as}F(s).\end{aligned}$$

□

Forskyvningsteoremet vil brukes både for å regne ut en Laplacetransform og dens inverse.

Eksempel 1.7. Laplacetransformen til $u(t-1)e^{t-1}$ er

$$\mathscr{L}\left(u(t-1)e^{t-1}\right) = e^{-s}\frac{1}{s-1}.$$

Invers Laplace transform til $e^{-2s}\frac{2}{s^2+4}$ er

$$\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-\pi s}\frac{2}{s^2+4}\right) = u(t-\pi)\sin 2(t-\pi).$$

Vi har brukt formelen $\mathscr{L}\left(\sin\omega t\right)(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

Svært ofte er ikke uttrykket du skal regne ut Laplace av på formen $f(t-a)u(t-a)$. Neste eksempel viser blant annet hvordan dette kan gjøres.

Regneeksempel 1.4. Finn Laplacetransformen til funskjonen i regneeksempel 1.1.
Løsning: Funksjonen er allerede omskrevet ved hjelp av sprangfunksjoner

$$f(t) = \sin t + u(t-\pi/2)(1-\sin t).$$

Vi må skrive om andre ledd til formen

$$u(t-\pi/2)g(t-\pi/2).$$

Det gjør vi ved å skrive om $\sin t$ til en funksjon på formen $g(t-\pi/2)$.

$$\begin{aligned}\sin t &= \sin\big((t-\pi/2)+\pi/2\big) \\ &= \sin(t-\pi/2)\cos\pi/2+\cos(t-\pi/2)\sin\pi/2, \qquad \text{(A.9)} \\ &= \cos(t-\pi/2)\end{aligned}$$

Vi har derfor

$$f(t)=\sin t+u(t-\pi/2)(1-\cos(t-\pi/2)).$$

Vi bruker at Laplace er lineær

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f(t)) &= \mathscr{L}(\sin t)+\mathscr{L}(u(t-\pi/2)(1-\cos(t-\pi/2))) \\ &= \frac{1}{s^2+1}+e^{-s\pi/2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right).\end{aligned}$$

Vi skal nå løse et enkelt initialverdiproblem med en Dirac-Delta impuls.

Regneeksempel 1.5. Løs initialverdiproblemet

$$y''+y=\delta(t-\pi), \quad y(0)=1,\, y'(0)=0.$$

Løsning: Vi utfører laplace transformasjon på problemet.

$$s^2Y-s\,y(0)-y'(0)+Y=e^{-\pi s}.$$

Innsatt verdiene for $y'(0)$ og $y(0)$ får vi

$$s^2Y-s+Y=e^{-\pi s}.$$

Vi løser for Y.

$$Y=\frac{s}{1+s^2}+e^{-\pi s}\frac{1}{1+s^2}.$$

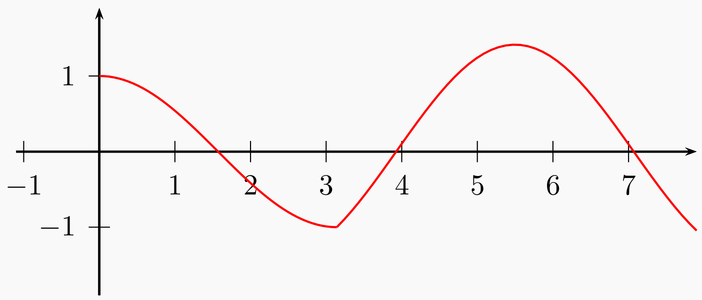
Invers Laplacetransform gir oss

$$y(t)=\cos t+u(t-\pi)\sin(t-\pi).$$

Vi kan skrive om resultatet til

$$y(t)=\cos t-u(t-\pi)\sin t.$$

Grafen til løsningen er tegnet i figuren under.



1.4.2 Forskyvning i s-rommet

Forskyvning i s-rommet er nyttig for funksjoner med en faktor e^{bt}, der b er en konstant.

Setning 1.5. *Hvis $\mathscr{L}(f(t)) = F(s)$ så er*

$$\mathscr{L}\left(f(t)e^{bt}\right) = F(s-b), \tag{1.5}$$

der b er en konstant.

Bevis. Fra definisjonen har vi

$$\begin{aligned} F(s-b) &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-b)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{bt}e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathscr{L}\left(f(t)e^{bt}\right). \end{aligned}$$

□

Eksempel 1.8. Finn laplacetransformasjonen til $t^n e^{at}$.
Løsning: Vi bruker at $\mathscr{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Da er

$$\mathscr{L}\left(t^n e^{at}\right) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Oppgaver fra kapittel 1.4

1. Regn ut Laplace til følgende funksjoner
   a) $e^{t-1}\cos(t-1)\,u(t-1)$
   b) $\cos(t-1)\,u(t-1)$
   c) $(t^2-2t+1)\,u(t-1)$
   d) $(t^2+t)\,u(t-1)$
   e) $e^{2t}\cos(3t)\,u(t-1)$

2. Regn ut Laplace til funksjonene i oppgave 1 i kapittel 1.1.

3. Regn ut Laplace til funksjonene i oppgave 2 i kapittel 1.1.

4. Løs initialverdiproblemene gitt under ved hjelp av Laplace.
   a) $y'' + 4y = (\sin(t-\pi))u(t-\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
   b) $y'' + 9y = 1 + (\cos t - 1)\,u(t-2\pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   c) $y'' + y = u(t-\pi) - \frac{1}{2}u(t-2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
   d) $y'' + 2y' + 2y = e^{t-2\pi}u(t-2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5. Bruk forskyvningsteoremet i s-rommet til å finne Laplace til funksjonene
   a) t^2e^{-2t}
   b) $(t^3-t)e^t$
   c) $t\cos te^t$
   d) $\sin 2te^{-3t}$

6. Regn ut Invers Laplace til følgende funksjoner ved hjelp av forskyvningsteoremet i s-rommet.

   a) $\dfrac{1}{(s-4)^3}$

   b) $\dfrac{2}{(s-1)^2+4}$

   c) $\dfrac{s}{(s+2)^2+4}$

   d) $e^{-s}\dfrac{1}{s-3}$

7. Finn invers laplace til

   a) $\dfrac{1}{s(s^2+s-2)}$

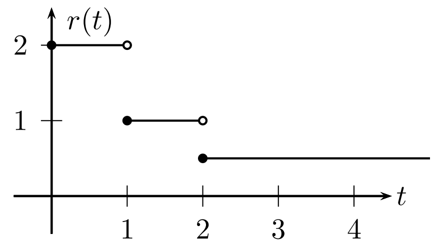
   b) $\dfrac{e^{-s}}{s(s^2+s-2)}$

   c) $\dfrac{e^{-2s}}{s(s^2+s-2)}$

8. Løs initialverdiproblemet

$$y'' + y' - 2y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

der r er gitt ved den følgende grafen.



	$f(t)$	$\mathscr{L}(f)(s)$		$f(t)$	$\mathscr{L}(f)(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$	2	$\delta(t)$	1
3	t	$\frac{1}{s^2}$	4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	6	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$u(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$	8	$\delta(t-a)$	e^{-as}
9	$u(t-a)(t-a)$	$\frac{1}{s^2}e^{-as}$	10	$u(t-a)(t-a)^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}e^{-as}$
11	$u(t-a)\cos\omega(t-a)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}e^{-as}$	12	$u(t-a)\sin\omega(t-a)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}e^{-as}$
13	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$			
14	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	15	t^ne^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
16	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	17	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
18	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	19	$t\sin\omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$

Tabell 1.1: Mye brukte Laplacetransformasjoner.

KAPITTEL 2

FOURIERREKKER OG PARTIELLE DIFFERENSIALLIKNINGER

2.1 Trigonometriske rekker

2.1.1 Ortogonale trigonometriske funksjoner.

Ortogonalt er et annet ord for vinkelrett. Første gang du hører om ortogonale funksjoner vil det muligens virke merkelig at funksjoner kan stå vinkelrett på hverandre. Bakgrunnen er at vi definerer et **prikkprodukt** som vi også kaller **indreprodukt** mellom funksjoner definert på et intervall $[a, b]$.

Definisjon 2.1. Indreproduktet mellom funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ definert på intervallet $[a, b]$ er gitt ved integralet

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Eksempel 2.1. Indreproduktet mellom $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$, begge definert på intervallet $[0, 1]$, er lik

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

Definisjon 2.2. Vi sier at to funksjoner f og g er **ortogonale** på intervallet $[a, b]$ hvis

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Eksempel 2.2. For eksempel er $f(x) = 1-x$ og $g(x) = 1+3x$ ortogonale med hensyn på produktet $f \cdot g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ fordi

$$\int_{-1}^{1} (1-x)(1+3x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1+2x-3x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x + x^2 - x^3\right]_{-1}^{1} = 0.$$

Setning 2.1. *Funksjonene*

$$1, \cos\tfrac{\pi x}{L}, \cos\tfrac{2\pi x}{L}, \ldots, \cos\tfrac{n\pi x}{L}, \ldots,$$
$$\sin\tfrac{\pi x}{L}, \sin\tfrac{2\pi x}{L}, \ldots, \sin\tfrac{n\pi x}{L}, \ldots$$

danner en familie av inbyrdes ortogonale funksjoner på intervallet $[-L, L]$.

Vi kan sjekke dette ved å regne ut

$$\int_{-L}^{L} \cos\tfrac{n\pi x}{L} \cos\tfrac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\tfrac{(n-m)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\tfrac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right]\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

som er lik 0 når $m \neq n$ og lik L når $m = n$. Tilsvarende er

$$\int_{-L}^{L} \sin\tfrac{n\pi x}{L} \sin\tfrac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\tfrac{(n-m)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\tfrac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right]\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

også lik 0 når $m \neq n$ og lik L når $m = n$. Integralene

$$\int_{-L}^{L} \sin\tfrac{n\pi x}{L} \cos\tfrac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \tfrac{1}{2}\left[\sin\left(\tfrac{(n-m)\pi x}{L}\right) - \sin\left(\tfrac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right]\mathrm{d}x \tag{2.3}$$

er alle lik 0. Vi har brukt omskrivningsformlene på side 34 for produkter av trigonometriske funksjoner.

2.1.2 Definisjon av trigonometriske rekker

Definisjon 2.3 (Trigonometriske rekker). En **trigonometrisk rekke** er en uendelig rekke på formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\tfrac{\pi n x}{L} + b_n \sin\tfrac{\pi n x}{L}\right), \tag{2.4}$$

der $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ er konstante koeffisienter.

En trigonometrisk rekke definerer en funksjon hvis den konvergerer. Da er den en periodisk funksjon $f(x)$ med periode $2L$. Trigonometriske rekker kan blant annet brukes til å løse partielle differensiallikninger. Vi kommer tilbake til det senere.

Definisjon 2.4. En trigonometrisk rekke 2.4 konvergerer hvis grensen

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos\tfrac{n\pi x}{L}+b_n\sin\tfrac{n\pi x}{L}\right)$$

eksisterer for alle x.

Eksempel 2.3. En trigonometrisk rekke kan ha uendelig mange ledd, men trenger ikke ha det. For eksempel er

$$1+\cos x+\cos 2x+\sin x+\sin 2x$$

et eksempel på en trigonometrisk rekke. Alle koefisienter a_n og b_n er lik null for $n = 3, 4, 5, \ldots$.

Setning 2.2. *Hvis en funksjon $f(x)$ er lik en trigonometrisk rekke*

$$f(x) = a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\tfrac{n\pi x}{L}+b_n\sin\tfrac{n\pi x}{L}\right),$$

så kan vi regne ut verdiene til koeffisientene ved hjelp av formelene

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x\\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\tfrac{\pi n x}{L}\,\mathrm{d}x\\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\sin\tfrac{\pi n x}{L}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

2.1.3 Fourierrekker

Fourierrekker har mange anvendelser. Komprimering av lyd og bilder kan baseres på fourierrekker. Noen partielle differensiallikninger kan løses ved hjelp av fourierrekker.

Definisjon 2.5. La $f(x)$ være en stykkevis kontinuerlig, periodisk funksjon med periode $2L$. Dens **Fourierrekke** er definert ved

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi X}{L},$$

der

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} f(x)\mathrm{d}x, \text{ for } n = 1,2,3,\ldots \text{ og} \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L} f(x)\mathrm{d}x, \text{ for } n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

Definisjon 2.6. En funksjon $f(x)$ kalles stykkvis glatt hvis både $f(x)$ og $f'(x)$ er stykkvis kontinuerlige.

Fourierrekken til en funksjon er ikke bare en tilnærming til funksjonen men er nøyaktig lik funksjonen i alle bortsett fra et endelig antall punkter på intervallet $[-L, L]$.

Teorem 2.1. *Fourierrekken til en periodisk stykkvis glatt funksjon $f(x)$ med periode $2L$ konvergerer mot verdien til f i alle punkter t, bortsett fra punkter der f er diskontinuerlig. I et slikt punkt, $x = x_0$, konvergerer f mot gjennomsnittet av høyre- og venstre-sidegrensene til $f(x)$.*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) + \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right).$$

Fordi Fourierrekken til en funksjon ikke nødvendigvis konvergerer mot funksjonen der funksjonen har diskontinuerlige sprang, så skriver vi $\sim$ istedet for $=$.

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Vi sier at Fourierrekken **representerer** funksjonen. En funksjon må være periodisk eller definert på et endelig intervall for at funksjonen skal kunne representeres av en Fourierrekke.

Regneeksempel 2.1. Finn Fourierrekken til den periodiske funksjonen $f(t) = t$, $-1 \le t < 1$, $f(t+2) = f(t)$.
Løsning: Perioden er 2. Derfor er $L = 1$. Koeffisientene er $a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\mathrm{d}t = 0$,

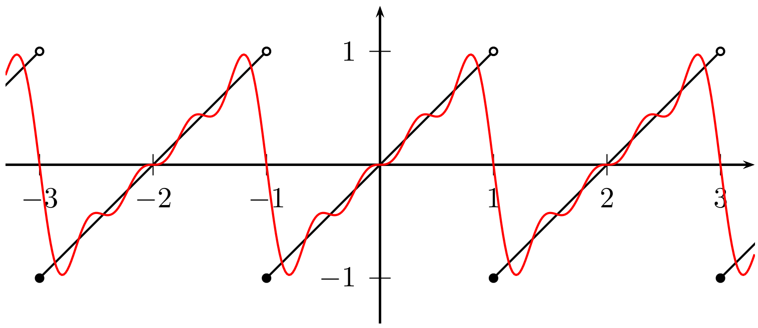
$$a_n = \int_{-1}^{1} t\cos n\pi t\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{1}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\sin n\pi t\,\mathrm{d}t = 0,$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} t\sin n\pi t\,\mathrm{d}t = \left[-t\frac{1}{n\pi}\cos n\pi t\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos n\pi t\,\mathrm{d}t$$

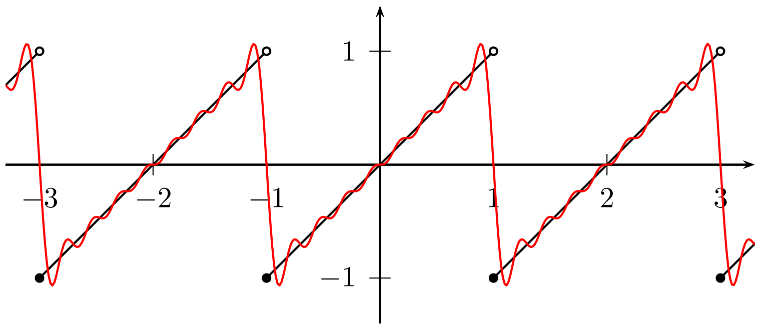
$$= \left[-1\frac{1}{n\pi}\cos n\pi - 1\frac{1}{n\pi}\cos(-n\pi) \right] = \frac{2}{n\pi}(-1)^n.$$

Fourierrekken til $f(t)$ er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi x$$



Figur 2.1: De 4 første sinus leddene i rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi t$ tilnærmer den periodiske funksjonen $f(t) = t$, $1 \leq t < 1$, $f(t+2) = f(t)$.



Figur 2.2: De 8 første sinus leddene i rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi t$ tilnærmer den periodiske funksjonen $f(t) = t$, $1 \leq t < 1$, $f(t+2) = f(t)$.

Oppgaver fra kapittel 2.1

1. Regn ut indreproduktet $f \cdot g$ til funksjonene.

   a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

   b) $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $x \in [-1, 1]$.

   c) $f(x) = 1$, $g(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$.

2. Finn en trigonometrisk rekke som er lik funksjonene. (Hint. Det krever minimalt med regning.)

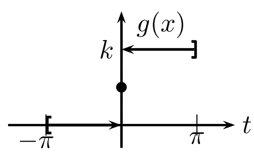
   a) $\cos^2 x$

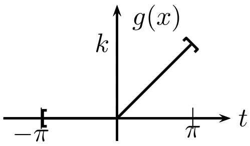
   b) $\sin^2 \pi x$

   c) $\cos^3 \pi x$

   d) $\cos^4 x$

3. Regn ut indreproduktet mellom $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi, pi]$ og funksjonene $g(x)$ gitt i figurene.

   a) 

b) 

4. Bestem a og b slik at $h(x) = 1 + a\,x + b\,x_2$, $x \in [-1, 1]$, er ortogonal med $f(x) = 1$ og $g(x) = x$ på intervallet $[-1, 1]$.

5. Fullfør detaljene i utregningene av

   a) $\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\, \mathrm{d}x$, (se side 19).

   b) $\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\, \mathrm{d}x$, (se side 19).

   c) $\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\, \mathrm{d}x$, (se side 19).

6. Finn Fourierrekken til den periodiske funksjonen

   a) $f(x) = 1 - |x|, -2 < x < 2$,
   $f(x + 4) = f(x)$.

   b) $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 1 \end{cases}$,
   $f(x + 2) = f(x)$.

   c) $f(x) = \begin{cases} t + 1, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 1 \end{cases}$,
   $f(x + 2) = f(x)$.

2.2 Mer om Fourierrekker

2.2.1 Jevne og odde funksjoner

Vi minner om definisjonen av odde og jevne funksjoner.

Definisjon 2.7. En funksjon $f(x)$ kalles **jevn** hvis $f(-x) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. En funksjon $f(x)$ kalles **odde** hvis $f(-x) = -f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Setning 2.3. *La $f(x)$ være en stykkvis kontinuerlig periodisk funksjon.*

1. *Hvis $f(x)$ er odde så er*
$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$
der
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

2. *Hvis $f(x)$ er jevn så er*
$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L},$$
der
$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x$$
og
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Eksempel 2.4. Vi skal finne Fourierrekken til den jevne periodiske funksjonen gitt ved $f(x) = x$, $x \in [0,1]$ med periode $T = 2$.

Løsning: Vi har $L = 1$ og $b_n = 0$, $n = 1, 2, 3 \dots$ fordi $f(x)$ er jevn. Vi regner ut

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

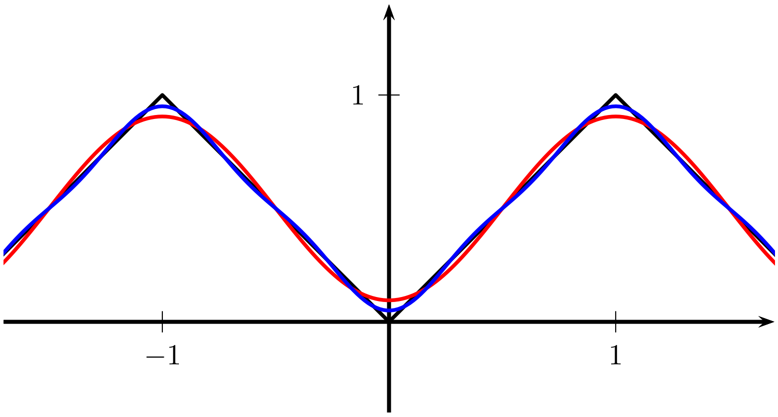
$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{L}\int_0^1 x \cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,\mathrm{d}x &= 2\left[\frac{1}{n\pi}x\sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{n\pi}\sin n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{2}{n^2\pi^2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

For alle heltallige n er $\sin n\pi = 0$ For odde n har vi at $\cos n\pi = -1$ og for jevne n har vi $\cos n\pi = 1$. Derfor har vi

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1).$$

Fourier rekken til $f(x)$ er

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{4}{25\pi^2}\cos 5\pi x - \cdots$$



Figur 2.3: Tegningen viser grafen til funksjonen $f(x)$ i seksempel 2.4 sammen med $a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos n\pi$, for $m = 1$, (rød graf) og $m = 3$, (blå graf).

Merknad 2.1. Om vi regner ut $f(1)$ i eksempel 2.4 ved å regne ut funksjonsutrykket og fourierrekken så får vi

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2} + \frac{4}{25\pi^2} + \cdots$$

Vi skriver om og får

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

En funksjon definert på et intervall $[0, L]$ kan utvides til en periodisk funskjon med periode $2L$ på to fornuftige måter. De to måtene kalles for en jevn **periodiske utvidelse** og en odde periodisk utvidelse.

2.2.2 Cosinusrekke

I noen anvendelser ønsker man å representere en funksjon $f(x)$ definert på intervallet $[0, L]$ som en **cosinus rekke**

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Vi lager en **jevn periodisk utvidelse** av $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} f(-x), & -L < x < 0 \\ f(x), & 0 < x < L \end{cases}, \\ f(x+2L) &= f(x). \end{aligned}$$

Vi regner ut $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ved hjelp av formlene i setning 2.3.

2.2.3 Sinusrekke

I andre anvendelser ønsker man å representere en funksjon $f(x)$ definert på intervallet $[0, L]$ som en **sinus rekke**

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

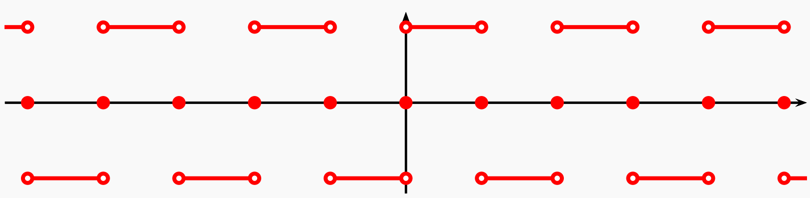
Vi lager en **odde periodisk utvidelse** av $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} -f(-x), & -L < x < 0 \\ f(x), & 0 < x < L \end{cases}, \\ f(x+2L) &= f(x). \end{aligned}$$

Vi regner ut $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ved hjelp av formlene i setning 2.3.

Eksempel 2.5. Vi vil finne sinusrekken til funksjonen $f(x) = 1$ definert på intervallet $[0, 1]$.

Løsning: Vi utvider $f(x)$ til en odde periodisk funksjon som vist i figuren.



Vi regner ut koeffisientene $b_1, b_2, \ldots$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^1 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = 2\int_0^1 \sin n\pi x\, dx = \frac{2}{n\pi}(-\cos n\pi + 1) = \begin{cases} 0, & \text{n jevn} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{n odde} \end{cases}.$$

Vi får derfor

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sin \pi x + \frac{4}{3\pi}\sin 3\pi x + \frac{4}{5\pi}\sin 5\pi x + \frac{4}{7\pi}\sin 7\pi x + \cdots$$

Fourierrekker kan brukes til å tilnærme funksjoner. Det gjøres ved å ta med et endelig antall ledd i Fourierrekken. En slik rekke kalles for en trunkert Fourierrekke.

Oppgaver fra kapittel 2.2

1. Hvilke av funksjonene under er odde, jevne eller ingen av delene. Begrunn svaret ved å sjekke betingelsene i definisjonen.
   a) x
   b) x^4
   c) $\cos x$
   d) $\sin x$
   e) $x^2 - x$
   f) $x^3 - x + \sin x$
   g) $\tan x$
   h) $\tan^2 x$
   i) $f(x)^2$
2. Skriv funksjonene som en sum av en odde og jevn funksjon.
   a) $1 + x + x^2 + x^3$
   b) e^x
3. Bevis at
   a) Produktet av to odde funksjoner er en jevn funksjon.
   b) Produktet av to jevne funksjoner er en jevn funksjon.
   c) Produktet av en jevn og en odde funksjoner er en odde funksjon.
4. Finn Fourierrekkene til de jevne funksjonene med periode $2L$ gitt ved
   a) $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi)$, $L = \pi/2$
   b) $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$, $L = 1$
5. Finn Fourierrekkene til de odde funksjonene med periode $2L$ gitt ved
   a) $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi)$, $L = \pi/2$
   b) $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, $L = 1$

2.3 Derivasjon av Fourierrekker

Derivasjon av Fourierrekker krever våkenhet. Vi skal se at under visse betingelse på $f(x)$ så kan vi derivere $f(x)$ ved å derivere dens Fourierrekke ledd for ledd.

Setning 2.4. *Gitt en funksjonen $f(x)$ og la denne ha Fourierrekke*

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

der

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Hvis $f(x)$ er kontinuerlig og $f'(x)$ er stykkvis kontinuerlig så er

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left(-a_n \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Setningen sier at vi kan derivere ledd for ledd av en Fourierrekke under de gitte betingelsene på $f(x)$. Det er svært viktig at forutsetningene for $f(x)$ er oppfylt i setningen over. I eksempelet nedenfor skal vi se på et eksempel der $f(x)$ ikke er kontinuerlig.

Eksempel 2.6. I eksempel 2.4 så fikk vi Fourierrekken

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{4}{25\pi^2}\cos 5\pi x - \cdots$$

for den jevne periodiske funksjonen $f(x) = x$, $0 < x < 1$, $f(-x) = f(x)$. Funksjonen $f(x)$ tilfredstiller betingelsen i setning 2.4. Vi kan derfor deriverer Foureierreken ledd for ledd.

$$f'(x) \sim \frac{4}{\pi}\sin\pi x + \frac{4}{3\pi}\sin 3\pi x + \frac{4}{5\pi}\sin 5\pi x + \cdots$$

Denne rekken gjenkjenner vi som Fourerrekken i eksempel 2.5. Funksjonen i eksempel 2.5 er ikke kontinuerlig. Den er stykkvis deriverbar med derivert lik 0. Om vi deriverer Fourierrekken ledd for ledd en gang til får vi det absurde at

$$0 = 4\sin\pi x + 4\sin 3\pi x + 4\sin 5\pi x + \cdots$$

Rekken er ikke engang konvergent. Derfor kan vi konkludere med at betingelsen i setning 2.4 er nødvendig.

2.4 Partielle differensiallikninger

2.4.1 Definisjon og bakgrunn

Partielle differensiallikninger brukes til å beskrive fenomener i vitenskaper som økonomi, fysikk, biologi og kjemi. I fysikken brukes de i mange områder som mekanikk, kvantemekanikk, Einsteins generelle relativitetsteori, fluid mekanikk, varmelære og et utall andre områder. Populasjoners endring over tid or rom kan kan beskrives ved hjelp differensiallikninger. Innen matematikken er partielle differensiallikninger en del av analysen, men de legger også grunnlaget for andre disipliner.

Definisjon 2.8 (Partielle differensiallikninger). En **partiell differensiallikning** av orden n er en likning, der den ukjente er en funksjon y i flere variable $x_1, x_2, \ldots, x_r$, og som inneholder partielle deriverte av y opp til n-te orden og eventuelt y og variablene $x_1, x_2, \ldots x_r$.

Eksempel 2.7 (Laplace likning). Differensiallikningen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

er et eksempel på en partiell differensiallikning av andre orden. Den kalles for **Laplace-likningen i to variable**. I tre variable lyder likningen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Funksjonen $f(x,y) = x^2 - y^2$ er én løsning av Laplacelikningen. Vi ser det ved at $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 2 - 2 = 0$. Antallet løsninger av Laplacelikningen er svært stor. I anvendelser er derfor ofte randbetingelser gitt. I et Dirichletproblem er verdien til den ukjente funksjonen gitt for randen til området. Et spesialtilfelle er en rektangulær rand:

$$\begin{aligned} f(a,y) &= W(y) \\ f(b,y) &= E(y) \\ f(x,c) &= S(x) \\ f(x,d) &= N(x). \end{aligned}$$

I et Neumannproblem er verdier til de deriverte av den ukjente funksjonen gitt på randen. For eksempel kan en slik ranbetingelse være

$$\begin{aligned} f_x(a,y) &= 0 \\ f_x(b,y) &= 0 \\ f_y(x,c) &= 0 \\ f_y(x,d) &= 0. \end{aligned}$$

Eksempel 2.8 (Varmelikningen). Differensiallikningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = 0.$$

er et eksempel på en partiell differensialliknin av andre orden. Den kalles for **Varmelikningen**.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

er to- og en-dimensjonale vesjoner av varmelikningen.

Varmelikningen forklarer hvordan varme og dermed temperaturen sprer seg i et ideelt legeme. En variant av varmelikningen kan brukes i studiet av populasjoner i biologien. Et område H med de nødvendige betingelsene for at en art kan leve kalles for et habitat. Populasjonen til arten kan modelleres med randverdiproblemet

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right) + c\,P,$$

der α beskriver hvor godt arten sprer seg med tiden og c måler hvor stor evne arten har til å formere seg. Randbetingelsen som ofte brukes er at arten ikke kan leve på randen av habitatet. Derfor er verdien av P lik null på randen.

Eksempel 2.9 (Bølgelikningen). Differensiallikningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.$$

er en partiell differensiallikning av andre orden. Den kalles for **Bølgelikningen**.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

er to- og en-dimensjonale vesjoner av bølgelikingen.

2.4.2 Homogene likninger og superposisjonsprinsippet

En lineær partiell differensiallikning kalles for homogen hvis hvert ledd inneholder en forekomst av den ukjente størrelsen eller en partiell derivert av denne. For eksempel er ikke **Poissonlikningen**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x,y)$$

ikke homogen med mindre $f(x,y)$ er lik null for alle inputverdier for x og y. De øvrige differensiallikningene i kapittelet er eksempler på homogene lineære differensiallikninger. Følgende setning er svært viktig for løsning av homogene lineære partielle differensiallikninger.

Setning 2.5 (Superposisjonsprinsippet). *Hvis $f(x,y,z,t)$ og $g(x,y,z,t)$ begge er løsninger av samme homogene lineære partielle differensialikning, så er summen*

$$a\,f(x,y,z,t) + b\,g(x,y,z,t)$$

også en løsning av den samme likningen for hvilket som helst par av konstanter a og b.

Superposisjonsprinsippet gjør at vi kan finne en familie[1] av løsninger av en differensiallikning som vi legger sammen for å få en løsning av rand-/initialverdipoblemet.

2.4.3 Generell løsning av varmelikningen

Separasjon av varmelikningen

Vi vil finne løsningen av varmelikningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

med initialbetingelse $T(x,0) = \sin^2 \pi x$ og randbetingelse $T(0,t) = T(1,t) = 0$. Vi lar rand og initialbetingelsene ligge en liten stund mens vi undersøker løsningene av differensiallikningen.

Om vi setter inn $T(x,t) = F(x)G(t)$ inn i likningen får vi

$$F(x)G'(t) = F''(x)G(t).$$

[1] Ordet **familie** er kun et synonym på mengde. Det brukes ofte når elementene i mengden ikke er punkter.

Da er likningen separabel. Seperasjon av variable fører til likningen

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Hver side av denne liknigen er lik en konstant k fordi de har ikke felles variable. Derfor har vi $G'(t) = k\,G(t)$ og $F''(x) = k\,F(x)$.

Separasjon av variable gir en skare av løsninger. For positive verdier av k får vi

$$F(x) = A\,e^{\sqrt{k}x} + B\,e^{-\sqrt{k}x}.$$

Randbetingelsene $T(0,t) = 0$ og $T(1,t) = 0$ medfører $F(0)G(t) = 0$ og $F(1)G(t) = 0$. Det vil si at enten er $G(t) = 0$ for alle verdier av t eller så er $F(0) = F(1) = 0$. Tilfellet $G(t) \equiv 0$ er uinteressant fordi da er $T(x,t) \equiv 0$.[2] Vi sitter igjen med $F(0) = F(1) = 0$. Dvs at $A + B = 0$ og $Ae + Be^{-1} = 0$. Vi løser for A og B og får $A = B = 0$.

For negative verdier $k = -\omega^2$ får vi løsninger

$$F(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

og

$$G(t) = Ce^{-\omega^2 t}.$$

Av samme grunn som over får vi at $F(0) = F(1) = 0$. Det gir $F(0) = A = 0$ og $F(1) = B\sin\omega = 0$. Det betyr at $\omega = n\pi$ der n er et positivt heltall. Vi har derfor uendelig mange løsninger som tilfredstiller varmelikningen og randbetingelsene.

$$e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Anvendelse av superposisjonsprinsippet og Fourierrekker.

Superposisjonsprinsippet sier at summen av disse løsningene fortsatt er en løsning.

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x.$$

Initialbetingelsen var oppgitt til å være

$$T(x,0) = \sin^2 \pi x.$$

I tillegg får vi fra den generelle løsningen at

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x.$$

Problemet vårt er redusert til å finne koeffisientene B_n i sinusrekken til $\sin^2 \pi x$. Vi skriver først om $\sin^2 \pi x = 1 - \cos^2 \pi x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x$. Denne utvider vi til en odde periodisk funksjon med periode

[2] Med tre streker i $G(t) \equiv 0$ menes at $G(t)$ er **identisk lik** 0. Det vil si at $G(t) = 0$ for alle verdier av t.

2. Vi regner ut koeffisientene

$$
\begin{aligned}
B_n = \frac{2}{1}\int_0^1 \sin n\pi x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\sin n\pi x - \frac{1}{2}\sin(n-2)\pi x - \frac{1}{2}\sin(n+2)\pi x\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{1}{2(n-2)\pi}\cos(n-2)\pi x + \frac{1}{2(n+2)\pi}\cos(n+2)\pi x\right]_0^1 \\
&= \left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{1}{2(n-2)\pi}\cos(n-2)\pi x + \frac{1}{2(n+2)\pi}\cos(n+2)\pi x\right]_0^1 \\
&= \left(-\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2(n-2)\pi} + \frac{1}{2(n+2)\pi}\right)((-1)^n-1) = \frac{4}{n(n^2-4)\pi}((-1)^n-1)
\end{aligned}
$$

for $n \neq 2$.

$$B_2 = \frac{2}{1}\int_0^1 \sin 2\pi x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\sin 2\pi x - \frac{1}{2}\sin 0\pi x - \frac{1}{2}\sin 4\pi x\right)\mathrm{d}x = 0.$$

Vi har dermed

$$\sin^2 \pi x \sim -\frac{8}{-3\pi}\sin \pi x - \frac{8}{15\pi}\sin 3\pi x - \cdots - \frac{8}{(2n-1)((2n-1)^2-4)\pi}\sin(2n-1)\pi x - \cdots$$ [3]

og løsningen av initialverdiproblemet er

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{(2n-1)((2n-1)^2-4)\pi} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\sin(2n-1)\pi x. \tag{2.6}$$

2.4.4 Generell løsning av bølgelikningen

Separasjon av bølgelikningen

Vi vil løse bølgelikningen for svingninger av en gitarstreng med lengde L. For enkelhets skyld antar vi at svingningene ikke avtar overt tid, men at strengen svinger evig. Da her vi likningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Initial- og startbetingelser er $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$, $u(0,t)=f(t)$ og $u_t(0,t)=0$.

Vi setter inn $u(x,t)=F(x)G(t)$ i bølgelikningen. Da får vi den separerbare likningen

$$F''(x)G(t) - c^2F(x)G''(t).$$

Etter dividerer med $F(x)G(t)$ fås

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = c^2\frac{G''(t)}{G(t)}$$

Siden denne likningen skal være sann for alle par (x,t) så er den sann for (x,t_0) der t_0 er en konstant. Det betyr at

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = c^2\frac{G''(t_0)}{G(t_0)} = K, \text{(Konstant)}$$

Da er også

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = c^2K.$$

[3]En konsekvens av formelen er at $\pi = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^n}{(2n-1)((2n-1)^2-4)}$.

Vi har derfor to ordinære differensiallikninger i stedet for en partiell differensiallikning.

$$\begin{aligned} F''(x) &= K\,F(x) \\ G''(t) &= c^2 K\,G(t) \end{aligned}$$

Av randbetingelsen $u(0,t) = u(L,t) = 0$ får vi $F(0) = F(L) = 0$ eller $G(t) \equiv 0$. Med $G(t) \equiv 0$ får vi $u(x,t) \equiv 0$ som er uten interesse. Vi sitter derfor igjen med $F(0) = F(L) = 0$. Når $K = k^2$ er positiv har vi løsningen $F(x) = a\,e^{kt} + b\,e^{-kt}$. Randbetingelsene gir da systemet $a + b = 0$ og $ae + b/e = 0$. Dette systemet har bare den trivielle løsninge $a = b = 0$. Dette medfører at $u(x,t) = F(x)G(t) = 0\,G(t) \equiv 0$. Vi får også $u(x,t)$ når K er lik null. Vi må derfor ha negativ K. Vi lar $K = -\omega^2$. Løser vi likningen $F''(x) = -\omega^2 F(x)$ får vi

$$F(x) = A\,\cos\omega x + B\,\sin\omega x.$$

Av randbetingelsen $F(0) = 0$ får vi $0 = A\cos 0 + B\sin 0 = A$. Randbetingelsen $F(L) = 0$ gir oss likningen $B\sin\omega L = 0$. Det betyr at $\omega L = n\pi$ der n er et vilkårlig helt tall. Vi får derfor løsningene

$$F(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

For samme verdier for ω løser vi $G''(t) = -c^2\omega^2 G(t)$ og får

$$G(t) = C\cos\frac{n\pi ct}{L} + D\sin\frac{n\pi ct}{L}.$$

Initialbetingelsen $u_t(x,0)$ medfører at $F(x) \equiv 0$ eller $G'(0) = 0$. Siden $F(x) \not\equiv$ så må $G'(0) = 0$. Dvs at

$$0 = G'(0) = -C\frac{n\pi c}{L}\sin 0 + D\frac{n\pi ct}{L}\cos 0 = D\frac{n\pi ct}{L}.$$

Derfor er $D = 0$. Løsningene på formen $F(x)G(t)$ er derfor

$$u(x,t) = \cos\frac{n\pi ct}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Komplett løsning av bølgelikningen med Fourierrekker

Vi bruker superposisjonsprinsippet til å finne løsningen av rand og initialverdiproblemet. Superposisjonsprinsippet sier at

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi ct}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

er en løsning av bølgelikningen.

Eneste betingelse som ikke er brukt til nå er initialbetingelsen $u(x,0) = f(x)$. Vi kan skrive

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Det betyr at B_n er lik sinusrekke-koeffisientene til $f(x)$. For å finne disse kan vi finne den odde periodiske utvidelsen av $f(x)$. Vi vil se på noen eksempler. La $f(x) = \frac{4U_0}{L^2}x(x-L)$. Da er

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \frac{4U_0}{L^2}x(x-L)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{8U_0}{L^3}\left[-\frac{L}{n\pi}x(x-L)\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L + \frac{8U_0}{L^3}\int_0^L \frac{L}{n\pi}(2x-L)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{8U_0}{n\pi L^2}\left[\frac{L}{n\pi}(2x-L)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L - \frac{8U_0}{n\pi L^2}\int_0^L \frac{L}{n\pi}2\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + 0 - \frac{16U_0}{n^2\pi^2 L}\left[-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L = \frac{16U_0}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{16U_0}{n^3\pi^3}((-1)^n - 1). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Som tidligere ser vi at $B_n = 0$ for alle partall n. Vi får derfor

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-32U_0}{(2n-1)^3\pi^3} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L}.$$

Fordi $f(x)$ er glatt på $[0, L]$ så har vi likhet i alle punkt for sinusrekken til $f(x)$. Løsningen til initialverdiproblemet er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-32U_0}{(2n-1)^3\pi^3} \cos \frac{(2n-1)\pi ct}{L} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L}.$$

Oppgaver fra kapittel 2.4

1. Løs likningene ved hjelp av ODE-tekninkker.
   a) $u_{xy} = u_x$
   b) $u_{xx} = u$
2. Bruk teknikken med separasjon av variable til å løse følgende partielle differensiallikninger.
   a) $u_t = 4u_{xx}$
   b) $u_{xx} = u_{yy}$
   c) $u_t = u_{xx} + u$
   d) $u_{tt} = u_{xx} - u$
3. Bruk separasjon av variable til å finne alle løsninger på formen $F(x)G(y)$ til randverdiproblemene med randbetingelser $u(x, 0) = 0$ og $u(x, 1) = 0$.
   a) $u_{xx} = u_{yy}$
   b) $u_x = 4u_{yy}$
4. Bruk separasjon av variable og fourierrekker til å finne alle løsninger på formen $F(x)G(t)$ til problemene med randbetingelser $u(0, t) = 0$ og $u(1, t) = 0$ og initialverdier som gitt nedenfor.
   a) $u_t = 4u_{xx}$, $u(x, 0) = \sin \pi x$
   b) $u_{tt} = u_{yy}$, $u(x, 0) = \sin \pi x + \sin 3\pi x + \sin 5\pi x$
   c) $u_t = u_{xx} + u$, $u(x, 0) = \sin^2 \pi x$
   d) $u_{tt} = u_{xx} - u$, $u(x, 0) = (1 - x)x$

TILLEGG A

TRIGONOMETRI

A.1 Trigonometriske identiteter

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{A.1}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{A.2}$$

$$\sin 2x = 2\cos x \sin x \tag{A.3}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \tag{A.4}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{A.5}$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x \tag{A.6}$$

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x \tag{A.7}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{A.8}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{A.9}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x - y) + \cos(x + y)\Big) \tag{A.10}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x - y) - \cos(x + y)\Big) \tag{A.11}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x - y) + \sin(x + y)\Big) \tag{A.12}$$

TILLEGG B

FORENKLING AV RASJONALE UTTRYKK

B.1 Motivasjon

Adderer vi to rasjonale uttrykk danner vi felles nevner før vi adderer tellerene. For eksempel er

$$\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1(1+x^2)}{x(1+x^2)} - \frac{x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x+x^3}.$$

Å gå den andre veien kalles delbrøksoppspalting. Det er ofte nyttig i for eksempel integrasjon. Utregningen over viser at $\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x+x^3}$ Integranden i $\int \frac{1}{x+x^3}\mathrm{d}x$ erstattes med $\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$:

$$\int \frac{1}{x+x^3}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

B.2 Delbrøksoppspalting

Hensikten med delbrøksoppspalting er å skrive om den rasjonale funksjonen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ til en sum av enklere rasjonale funksjoner der hvert ledd har nevner av grad 1 eller grad 2.

Delbøksoppspalting utføres i 4 trinn.

Først faktoriserer vi nevneren $Q(x)$ i lineære faktorer og kvadratiske faktorer. For eksempel faktoriserer $x + x^3$ i faktorene x og $1 + x^2$. Videre faktorisering av $1 + x^2$ er ikke mulig. Utrykket $x - x^3$ faktoriserer i x, $1 - x$ og $1 + x$. I noen utrykk repeteres en faktor flere ganger. For eksempel faktoriseres $x^3 - 2x^2 + x$ som $x(x-1)^2$. Vi sier at faktoren $x - 1$ har **multiplisitet** 2.

Andre trinn er å danne for hver faktor $(x - r)$ eller $(x^2 + px + q)$, med multiplisitet m, **delbrøkene**

$$\frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$

eller

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(x^2+px+q)^m}$$

Vi får like mange ukjente A_1, B_1 etc som graden til $Q(x)$.

Tredje trinn er å sette opp likningen

$$P(x) = \text{(summen av alle delbrøkene vi fant i andre trinn)} \cdot Q(x).$$

Fjerde trinn er å finne finne nok likninger i de ukjente A_1, B_1 etc og løse disse.

Eksempel B.1. Finn delbrøksoppspalting av $\frac{1}{x+x^3}$.
Løsning: $P(x) = 1$ og $Q(x) = x + x^3$. Faktoriseringen av $Q(x)$ er $x(1 + x^2)$. Vi får to delbrøker $\frac{A}{x}$ og $\frac{Bx+C}{1+x^2}$. Så setter vi opp likningen $1 = (\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2})Q(x)$. Denne forenkles til

$$1 = (A + B)x^2 + Cx + A$$

Denne gir likingene $A + B = 0$, $C = 0$ og $A = 1$. Denne har løsning $A = 1$, $B = -1$ og $C = 0$. Vi har vist at

$$\frac{1}{x + x^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}.$$

TILLEGG C

INTEGRASJON

C.1 Delvis integrasjon

Setning C.1 (Delvis integrasjon). *La $f(x)$ og $g(x)$ være funksjoner som har kontinuerlige deriverte. Da er*

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)'g(x)\mathrm{d}x.$$

Tilsvarende formel for bestemt integral er

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)'g(x)\mathrm{d}x.$$

Setning C.2 (Substitusjon). *La $g(u)$ være en kontinuerlig funksjon og la funksjonen $f(x)$ ha kontinuerlig derivert. Da er*

$$\int g(f(x))f'(x)\mathrm{d}x = \int g(u)\mathrm{d}u.$$

Tilsvarende formel for bestemt integral er

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\mathrm{d}x = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\mathrm{d}u.$$

TILLEGG D

GRESKE TEGN

A	α	alfa	N	ν	ny
B	β	beta	Ξ	ξ	ksi
Γ	γ	gamma	O	o	omrikon
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ε	epsilon	P	ρ	rho
Z	ζ	zeta	Σ	σ	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	θ	theta	Υ	υ	ypsilon
I	ι	iota	Φ	ϕ	phi
K	κ	kappa	X	χ	khi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	my	Ω	ω	omega

Tabell D.1: Det greske alfabetet

BIBLIOGRAFI

[1] Ladis D. Kovach. *Advanced Engineering Mathematics*. Addison-Wesley, 1982.

[2] Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, 10 edition, 2011.

[3] D. Lay. *Linear Algebra and its applications*. Pearson, Boston, 2011.

[4] Timothy Sauer. *Numerical Analysis*. Pearson, 2014.

[5] John R. Søyland. *Lineær Algebra*. Søyland, 3 edition, 2002.

REGISTER