

Heuristické metody

Aplikace heuristik pro hledání globálního minima průběhu chemického systému

Lukáš Tryner

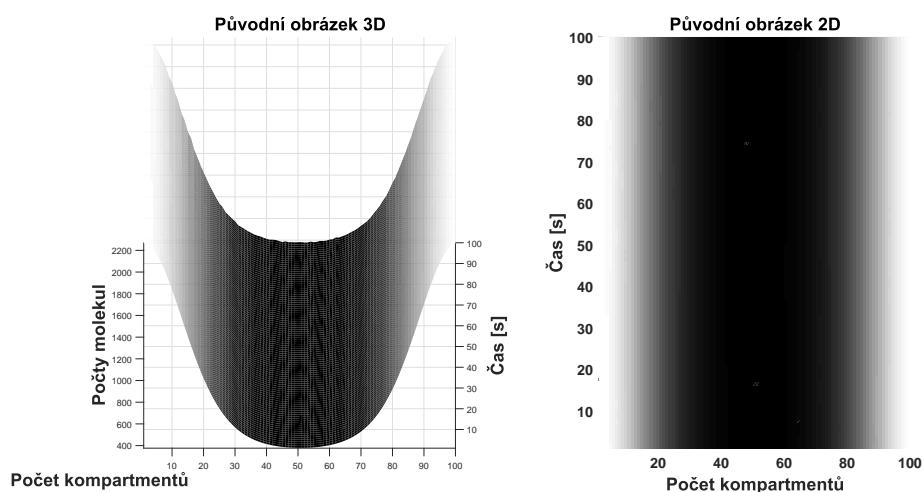
27. dubna 2019

1 Úvod

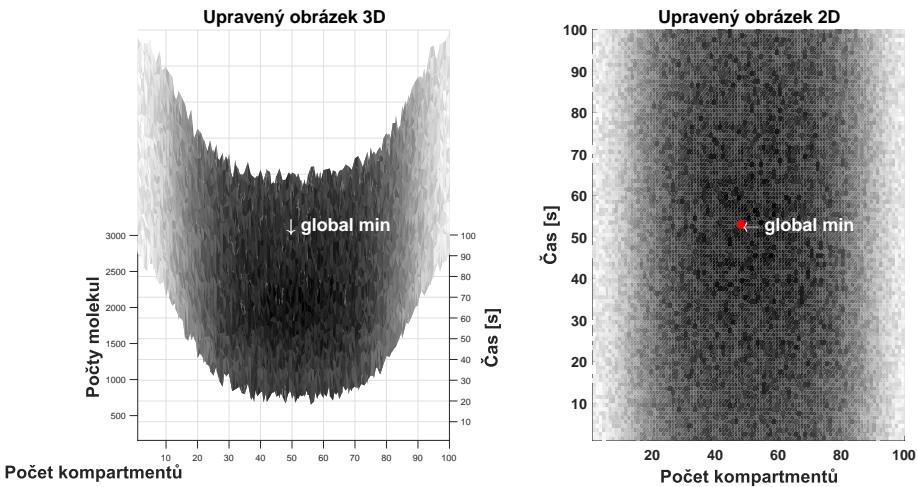
Cílem této práce je test tří vybraných heuristických metod pro hledání globálního minima stochastického průběhu chemického systému, který se vyznačuje tzv. *Turingovy* vzory. *Turingovy* vzory označují stav v příslušného systému, které se od sebe po nějaké významné časovou dobu razantně neodlišují.

Tímto způsobem můžeme zaznamenat několik stavů stochastického procesu, kde každý z nich bude ve tvaru „vlny“, která bude mít v této práci tři vrcholy. Jelikož se samotné zaznamenané stav v od sebe mnoha neodlišují, tak tímto způsobem bychom obdrželi mnoho hodnot s podobnými hodnotami mezi jednotlivými vrcholy. To odpovídá plochám s degenerovanými body, ve kterých by všechny heuristiky „uvízly“.

Proto jsme pro zjednodušení nejprve upravily stochastický proces tak, aby výsledná plocha obsahovala dva půlvrcholy a prostor mezi nimi, tedy jsme zmenšili plochu s degenerovanými body na jednu, vykreslena je na obrázku 1. Dále jsme výslednou plochu modifikovali pomocí přičtení umělé plochy s hodnotami, které graficky odpovídají překlopenému jehlanu. Ty jsme dále zašuměli. Výsledkem je plocha, která je ilustrována na obrázku 2. Ta má jedno globální minimum bez rozsáhlých degenerovaných ploch, ale na druhou stranu obsahuje zašumělá místa s lokálními minimy, které budou „mást“ některé z uvažovaných heuristik.



Obrázek 1: Původní zmenšená plocha.



Obrázek 2: Upravená plocha.

2 Heuristiky

2.1 Random shooting

První uvažovanou heuristikou je *Random shooting* (náhodná střelba, *RS*), tedy že náhodně vybereme jednu z hodnot plochy a tento mechanismus několikrát opakujeme. Numericky tato metoda spočívá v náhodné generaci dvou čísel, podle kterých vybereme daný bod plochy a následně se podíváme, jaká je zde hodnota. Nevýhodou je náhodnost všech výsledků, kdy jejich hodnota by měla s rostoucím počtem výstřelů konvergovat ke střední hodnotě ze všech hodnot bodů plochy. Animace *RS* je ilustrována na obrázku 3.

Obrázek 3: Animace heuristiky *Random shooting*.

2.2 Shoot and go

Druhou metodou je *Random Restart Hill Climbing/Shoot and go* metoda (*SG*), kdy v prvním kroku opět náhodně vybereme jednu z hodnot plochy. Poté zavedeme okolí daného bodu a v tomto okolí najdeme lokální minimum, do které se přesuneme. Pro nový bod si opět zavedeme okolí a hledáme nové lokální minimum, kdy cílem je pro určité rozměry okolí a počtu možných skoků do nových bodů doskákat až do globálního minima celé plochy. Poté vygenerujeme náhodně další počáteční bod a celý průběh opakujeme. Ilustrována je na obrázku 4. Bude zajímavé pozorovat, jak se mění úspěšnost zásahů do globálního minima podle velikosti uvažovaného okolí a počtu možných skoků.

Obrázek 4: Animace heuristiky *Shoot and go*.

2.3 Lokální Simulated Annealing

Poslední metodou je *Simulated Annealing* (Simulované žíhání, *SA*), kdy opět začínáme z náhodně vygenerovaného bodu. Poté podle zavedeného sousedství/okolí náhodně vybereme jiný bod a vypočítáme rozdíl hodnot nového bodu od počátečního, které říkáme energie. Podle hodnoty energie následně vypočítáme pravděpodobnost k přeskoku z počátečního do nového bodu, která je dále závislá na teplotě systému, což je nezáporný parametr, který říká, že s vyšší hodnotou se systém chová jako náhodná procházka a s nižší jako *Hill Climbing/Steepest Descent* metoda. Poté vygenerujeme náhodné číslo a podle něho určíme, zda dojde k přeskoku do nového bodu či nikoliv. Pro fixní teplotu tento postup několikrát opakujeme, poté snížíme teplotu a pokračujeme do té doby, dokud bod nedoskáče blízko ke globálnímu minimu. Proto je třeba dobré zvolit všechny parametry (pro malé okolí může metoda uvíznout v lokálním minimu a algoritmus pak poběží do nekonečna, protože nedojde ke splnění ukončující podmínky). Ukázka průběhu metody je na obrázku 5. Postupně dochází ke generaci nových bodů za určité teploty, žlutě jsou označeny, pokud do nich nedošlo k přeskoku, zeleně, pokud ano.

Tyto tři heuristiky byly aplikovány v programu MATLAB a jejich cílem je hledání globálního minima v zadané ploše.

3 Statistika

Dva důležité parametry pro ovlivnění úspěšnosti heuristik jsou *uvažované sousedství*, tj. z jak velké matice se středem v původním bodu budeme vybírat nový bod, a *počet možných přeskoků do jiného bodu*. Pro optimální porovnání *SG* a *SA* metody budeme uvažovat pro obě metody stejné hodnoty parametrů. Tím budeme moci i porovnat doby jejich trvání.

Obrázek 5: Animace heuristiky *Simulated annealing*.

Vždy nejprve vygenerujeme několik náhodných bodů, což bude představovat *RS* metodu. Pro každý z nich vybere zvolené okolí. Pro *SG* metodu najdeme v daném okolí minimum, a tam se přesuneme a přepíšeme pozici a hodnotu původního bodu. Takto se každý z původních bodů za nějaký zvolený počet skoků dostane do určité hodnoty a kontrolní hodnotou bude průměrná hodnota všech bodů, počet bodů, které doskákaly do globálního minima a čas trvání celé metody. Pro *SA* začneme od zvolené startovní teploty, pro kterou necháme body náhodně vybrat určitý počet nových bodů. Metoda náhodně zvolí jeden bod ze sousedství původního bod (tedy může i původní bod) a za určité pravděpodobnosti se do něj přemístí. Po určité době snížíme teplotu systému a vše opakujeme. Zastavovací podmírkou bude, pokud se průměrná hodnota stavů velmi přiblíží ke globálnímu minimu, nebo pokud dojde k vyčerpání možných výběrů nových bodů k přeskoku.

Počáteční teplotu *SA* zvolme $100^{\circ}C$ a vždy necháme *SA* vybrat postupně 10 nových bodů, tj. začneme v původním bodu, náhodně vybereme jeden ze sousedních bodů, podle spočtené energie určíme pravděpodobnost k přeskoku a generací náhodného čísla z $U(0, 1)$ určíme, zda k přeskoku došlo, pokud ano, tak původní bod se přesune do nového, pokud ne, tak ponecháme původní bod ve stejné pozici a náhodně vybereme další sousední bod až pro danou teplotu vygenerujeme postupně k nových bodů. Poté teplotu snížíme 0.9-krát a celý postup opakujeme až do jedné ze zastavovacích podmínek. Počet zmenšení teploty uvažujme n -krát, tedy celkově můžeme zvolit $k \cdot n$ nových bodů. Stejnou hodnotu nových bodů tedy uvažujme i pro *SG* metodu pro možné porovnání obou metod.

Zkoumejme první závislost na sousedství, tj. budeme postupně zvětšovat matici, označme ji \mathbb{N} , se sousedními body původního bodu generovaného metodou *RS*. Matici \mathbb{N} uvažujme pro zjednodušení vždy čtvercovou. Volbu nových bodů fixujme na hodnotě 1000, můžeme ale libovolně volit parametry k a n pro heuristiku *SA*. Jelikož je původní bod prostředním prvkem matice \mathbb{N} ,

tak její rozměry předpokládejme $m \times m$, kdy $m = 3, 5, \dots, 21$. Počet vygenerovaných počátečních bodů RS zvolme 1000. Parametry k a n budeme v tomto případě fixovat, kdy $k = 10$ a $n = 100$. Minimum zadané funkce má hodnotu 156.25, průměrná hodnota je 1333.57. Výsledky jsou v tabulce 1 pro heuristiky SA a SG , RS spočívala jenom v generaci 1000 náhodných bodů, kdy jejich průměrná hodnota byla podobná celkové průměrné hodnotě. Všimněme si, že do hodnoty $m = 15$ byla heuristika SA lepší oproti SG vzhledem k nižší průměrné hodnotě všech bodů a většímu počtu zásahů do globálního minima. Poté došlo ke zvratu a od $m = 17$ se všechny body SG dostaly do globálního minima, naopak pro SA se postupně začal zhoršovat průměr i počet zásahů. To plyne z náhodného výběru z matice, kdy se zvětšující se maticí je pro SA těžší se trefit do lepší hodnoty, která by byla pro nižší hodnotu teploty přijata algoritmem. Pro nízké hodnoty se tato heuristika chová jako *Steepest descent* metoda, tedy pokud není náhodně zvolena nižší hodnota, než ve které je původní bod, tak nedojde k přeskoku. Naopak body pomocí SG lehce doskáčou vzhledem k veliké matici \mathbb{N} až do globálního minima.

m	Heuristika	Mean	Min	Zásahy	Čas trvání (s)
3	SG	1046.93	156.25	5	19.58
3	SA	874.19	156.25	3	21.34
5	SG	610.46	156.25	9	21.29
5	SA	435.39	156.25	21	22.55
7	SG	390.81	156.25	13	20.58
7	SA	311.43	156.25	92	21.68
9	SG	281.95	156.25	257	20.87
9	SA	224.28	156.25	261	21.86
11	SG	192.04	156.25	676	22.21
11	SA	168.99	156.25	856	22.63
13	SG	170.03	156.25	836	22.62
13	SA	162.82	156.25	910	23.53
15	SG	173.90	156.25	790	22.36
15	SA	159.29	156.25	944	23.35
17	SG	156.25	156.25	1000	23.21
17	SA	156.85	156.25	923	24.20
19	SG	156.25	156.25	1000	24.44
19	SA	157.43	156.25	887	26.19
21	SG	156.25	156.25	1000	24.39
21	SA	157.63	156.25	829	25.72

Tabulka 1: Závislost na sousedství.

Proto nyní provedeme výzkum SA heuristiky a konkrétně volby nejoptimálnějších parametrů k a n . Uvažujme, že $k \cdot n = 1000$, $m = 9$ pro lepší pozorování zlepšení/zhoršení algoritmu. Snižování teploty uvažujme stejně jako v předchozím případě, aneb hledejme nejlepší volbu parametru k a n pro tuto volbu. Výsledky jsou v tabulce 2. Vidíme, že nejlepší volbou je $n = 25$ a $k = 40$, pro kterou je průměrná hodnota 172.57 a došlo 412-krát k zásahu do globálního minima. Dále si všimněme, že tato volba má nejkratší čas trvání.

Problémem je, že tato volba k a n je optimální jenom pro $m = 9$ a snižování teploty 0.9-krát v každém kroku n . Se zvýšením m je nižší pravděpodobnost, že dojde k optimálnímu výběru nového bodu, který má nižší hodnotu oproti původnímu bodu a dále pro méně kroků n se model chová jako *Steepest descent*, tedy větší část modelu dochází k náhodné procházce. Proto nedochází k tak výraznému „stlačení“ všech bodů do oblasti kolem globálního minima a z toho plyne vyšší

n	k	Mean	Min	Zásahy	Čas trvání (s)
1000	1	269.44	156.25	133	25.34
500	2	265.41	156.25	172	23.85
200	5	245.87	156.25	206	23.97
100	10	224.28	156.25	261	21.86
50	20	188.36	156.25	329	22.20
40	25	181.61	156.25	361	26.83
25	40	172.57	156.25	412	21.02
20	50	178.52	156.25	361	23.56
10	100	226.00	156.25	98	25.52
5	200	278.29	156.25	31	34.84
2	500	329.62	156.25	23	48.75
1	1000	348.91	156.25	19	93.19

Tabulka 2: Závislost na výběru k a n .

průměrná hodnota a nižší počet středních zásahů.

Proto se nyní zabývejme volbou snižování teploty. Předpokládejme vyšší hodnotu m , například $m = 15$. Pro tuto hodnotu má za snižování teploty 0.9-krát SA model pro $n = 25$ a $k = 40$ průměrnou hodnotu 162.73 a počet zásahů 514, což je mnohem horší oproti předchozí volbě $n = 100$ a $k = 10$ z tabulky 1. Proto nyní budeme snižovat teplotu v každém kroku n více. Ideálním výsledkem by bylo nalezení volby, která bude dávat maximální počet možných zásahů pro tuto volbu m a která by tento počet dávala i pro větší volby m , kde SG prozatím vítězilo.

Snižování teploty	Mean	Min	Zásahy	Čas trvání (s)
0.9	162.73	156.25	514	26.01
0.8	157.79	156.25	910	26.56
0.7	158.42	156.25	951	26.33
0.65	158.86	156.25	957	24.59
0.6	159.31	156.25	947	27.47
0.5	160.58	156.25	925	24.78
0.3	163.35	156.25	902	25.77

Tabulka 3: Závislost na výběru k a n .

Z tabulky 3 vidíme, že nejlepší hodnoty obdržíme pro snižování teploty mezi hodnotami 0.6 a 0.8 (0.8 má nejnižší střední hodnotu, 0.65 nejvíce zásahů). I tak ale po zvětšení parametru m na $m = 17$ nedosáhneme na počet zásahů rovný 1000 (maximum 961).

3.1 Úprava lokální SA

Východiskem může být úprava SA heuristiky. Do této doby jsme vždy vygenerovali nový bod pro danou teplotu a podle rozdílu energií původního a nového bodu vypočítali pravděpodobnost přeskoku. Tedy k -krát jsme vygenerovali nový bod pro jednu hodnotu teploty a vždy rozhodli, zda se tam původní bod přemístí, či nikoliv. Nyní ponecháme původní bod a nejprve vygenerujeme k nových bodů a poté vybereme nejlepší z nich, tj. který má nejnižší hodnotu. Dále vypočítáme energii a pravděpodobnost a určíme, zda dojde k přeskoku. Ukázka animace této metody je na obrázku 6.

Obrázek 6: Animace upravené heuristiky *Simulated annealing*.

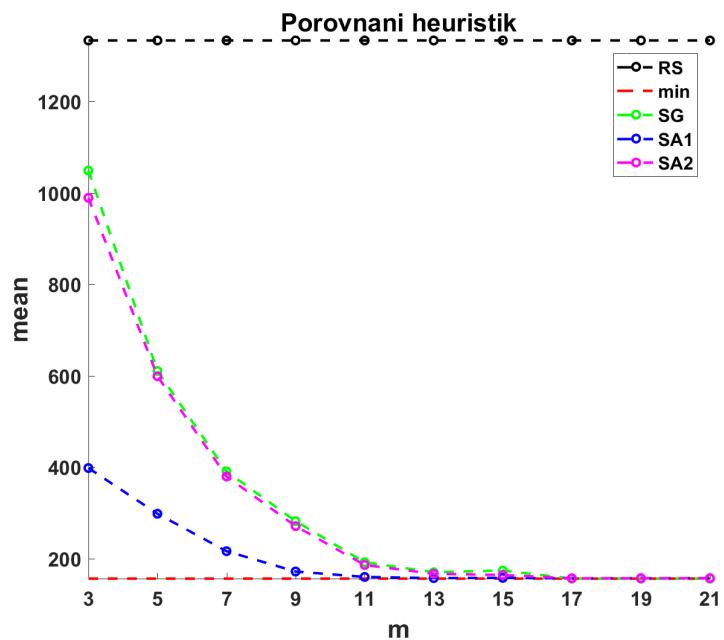
Výsledkem je, že i přes tuto úpravu maximum možných zásahů nezískáme. Nejvyšší hodnoty zásahů jsou okolo 970 pro hodnotu $n = 200$ a $k = 5$. Maximum 1000 obdržíme až při zdvojnásobení počtu nových bodů, tj. 2000, čas ale bude oproti SG také dvojnásobný.

Tedy musíme shledat, že od $m = 17$ je lepší uvažovat heuristiku SG , jelikož matice sousedství je pro SA tak rozumná, že dochází s malou pravděpodobností k výběru globálního minima. Navíc je i při vybrání malá šance k přeskoku, vzhledem k nízké hodnotě energie a malému rozdílu mezi původním a novým bodem v globálním minimu.

Poslední statistikou bude porovnání všech zmíněných metod v grafu, kde budeme ilustrovat závislost nejnižší průměrné hodnoty bodů pro každou heuristiku a rozměrů matice \mathbb{N} , tj. parametru m . Opět uvažujeme 1000 počátečních výstřelů pro všechny metody. Počáteční teplotu $100^{\circ}C$ a snižování teploty 0.9-krát. Pro heuristiku SA jsme vygenerovali výsledky pro oba možné případy (klasickou implementaci a pozdější úpravu) postupně pro všechny volby parametrů k a n a vybrali ten s nejnižší průměrnou střední hodnotou.

V grafu tedy budeme mít pět křivek, jednu pro heuristiku RS , což bude vodorovná přímka s osou x procházející na ose y bodem 1333.57, což je průměrná hodnota bodů celého obrázku. Druhá vodorovná křivka bude označovat hodnotu globálního minima, tedy 156.25. Dále jednu pro metodu SG , jejichž hodnoty jsou v tabulce 1. Poslední dvě budou pro různé implementace heuristiky SA . Výsledky jsou na obrázku 7. Hodnoty nejlepších voleb k a n pro obě heuristiky SA jsou v tabulce 4. Z tabulky i obrázku vidíme, že první implementace SA , označena $SA1$, je téměř celou dobu lepší oproti druhé, označené $SA2$. Ta má celý průběh podobné hodnoty jako heuristika SG (což odpovídá, protože SG hledá lokální minimum ve svém sousedství, $SA2$ vybírá nejlepší volbu pro přeskok z náhodně vygenerovaných bodů ze sousedství původního bodu).

Heuristika $SA1$ vyhrává proti $SA2$ téměř ve všech případech. V prvních šesti pro nízké hodnoty m jsou mezi ní a ostatními heuristikami veliké rozdíly, ať už pro minimální hodnotu střední hodnoty, tak pro počty zásahů do globálního minima. Dále si všimněme optimální volby parametrů k a n , kdy pro metodu $SA1$ se vyplatí pro nižší hodnoty m volit nízké n a vysoké k a pro větší rozměry m tomu je naopak. Pro $SA2$ se spíše vyplatí volit vysoké n a velmi nízké k .



Obrázek 7: Závislost heuristik na m .

m		n	k	Mean	Zásahy		n	k	Mean	Zásahy
3	$SA1$	1	1000	398.86	12	$SA2$	20	50	989.36	3
5	$SA1$	10	100	298.15	55	$SA2$	200	5	598.88	9
7	$SA1$	20	50	216.23	243	$SA2$	500	2	379.78	35
9	$SA1$	25	40	171.81	410	$SA2$	125	8	271.16	164
11	$SA1$	40	25	159.87	863	$SA2$	125	8	186.04	726
13	$SA1$	50	20	157.34	936	$SA2$	1000	1	166.72	853
15	$SA1$	50	20	157.85	913	$SA2$	200	5	164.26	885
17	$SA1$	125	8	156.83	939	$SA2$	1000	1	156.93	938
19	$SA1$	125	8	156.97	918	$SA2$	250	4	157.18	916
21	$SA1$	1000	1	157.26	863	$SA2$	250	4	157.14	888

Tabulka 4: Závislost heuristik na m .

3.2 Globální SA

Vidíme, že s „lokálními verzemi“ heuristiky *Simulated annealing*, tj. kdy nový bod vybíráme z matici N, s velkou maticí sousednosti N nevyhrajeme proti metodě *Shoot and go* (tzv. férový přístup). Proto nyní uvažujme „globální verzi“, tedy že matice N bude představovat celou plochu a tedy budeme nový krok náhodně z celé plochy (tzv. *neférový* přístup).

Opět nyní provedeme analýzu pro různé varianty parametrů k a n pro stejné hodnoty jako v předchozím případě. Uvažujme nejprve postup výběru nového bodu stejně jako v metodě *SA1*, tedy že vygenerujeme nový bod a hned se rozhodneme, zda se do něj přemístíme. Označme tuto metodu *SA3*. Výsledky jsou v tabulce 5. Vidíme, že většina výsledků je podobných, nejlepší volbou je $k = 8$ a $n = 125$, jelikož mají nejmenší střední hodnotu a největší počet zásahů. Takto je ale tato metoda mnohem horší oproti předchozím příkladům.

Proto nyní provedeme analýzu hodnoty pro snižování hodnoty teploty v každém kroku pro získání lepších výsledků. Uvažujme $k = 8$ a $n = 125$. Zjistili jsme, že tento model de facto nezávisí na hodnotě koeficientu snižování teploty, jelikož průměrná energie i počet zásahů jsou pro všechny volby velmi podobné.

Po stejném testu snižování teploty pro jiné volby k a n jsme obdrželi stejné výsledky, kde všechny volby parametrů dosahují maximálního počtu zásahů okolo hodnoty 100 a minimální střední hodnoty 197. Tato metoda je tedy neefektivní.

Nyní uvažujme „globální verzi“ metody *Simulated annealing* pro výběr nového bodu podle metody *SA2*. Označme tuto metodu *SA4*. Opět pro fixní koeficient snižování teploty 0.9-krát provedeme analýzu volby parametrů k a n . Výsledky jsou také v tabulce 5. Vidíme, že všechny výsledky dávají podobné hodnoty, jako v předchozím případě.

Proto opět vyšetříme ovlivnění koeficientem snižování teploty. Pro různé volby k a n opět nezískáme lepší výsledky. Proto je i tato metoda nevhodná. K výraznému zlepšení nedojde ani po zvýšení počtu generovaných nových stavů. Navíc je pro obě metody dlouhý výpočetní čas, jelikož dochází k časté generaci nových náhodných stavů.

n	k		Mean	Zásahy		Mean	Zásahy
1000	1	<i>SA3</i>	198.53	103	<i>SA4</i>	198.99	91
500	2	<i>SA3</i>	198.96	101	<i>SA4</i>	198.81	99
250	4	<i>SA3</i>	198.76	101	<i>SA4</i>	198.45	89
200	5	<i>SA3</i>	199.83	81	<i>SA4</i>	198.83	93
125	8	<i>SA3</i>	198.68	90	<i>SA4</i>	200.59	91
100	10	<i>SA3</i>	200.03	94	<i>SA4</i>	198.93	77
50	20	<i>SA3</i>	201.08	96	<i>SA4</i>	199.21	109
40	25	<i>SA3</i>	201.84	81	<i>SA4</i>	200.57	86
25	40	<i>SA3</i>	206.71	80	<i>SA4</i>	200.21	100
20	50	<i>SA3</i>	213.72	64	<i>SA4</i>	202.11	72
10	100	<i>SA3</i>	240.84	38	<i>SA4</i>	201.04	94
8	125	<i>SA3</i>	252.37	53	<i>SA4</i>	201.61	97
5	200	<i>SA3</i>	279.48	27	<i>SA4</i>	199.24	113
4	250	<i>SA3</i>	299.10	17	<i>SA4</i>	197.93	115
2	500	<i>SA3</i>	324.89	20	<i>SA4</i>	192.29	129
1	1000	<i>SA3</i>	351.71	14	<i>SA4</i>	185.82	178

Tabulka 5: Závislost heuristiky *SA3* a *SA4* na volbě parametrů k a n .

3.3 Fast SA

Poslední úpravou metody *Simulated annealing* bude heuristika *Fast Simulated annealing (FSA)*. V ní vybíráme nový bod pokud náhodně, nebo pomocí Cauchyho mutace, který ovlivňuje námi zvolený parametr $r \in \mathbb{R}$. Snižování teploty je pak dáno parametrem α .

Uvažujme stále stejný počet generovaných nových stavů a stejnou počáteční teplotu systému. Držme pro první analýzu fixní $\alpha = 1$ a $r = 0.5$ a opět zkoumejme ideální volbu parametrů k a n . Výsledky jsou v tabulce 6 pro obě metody mutace. Vidíme, že Cauchyho mutace vykazuje lepší výsledky a že nejlepší volbou vypadá $k = 4$ a $n = 250$.

Nyní můžeme zkoumat optimální hodnotu α pro fixní $r = 0.5$, $k = 4$ a $n = 250$. V tabulce 7 vidíme, že optimální hodnota α je v intervalu 1 až -1, kdy se počty zásahů ani střední hodnota nijak zvláště nemění.

Uvažujme tedy $\alpha = 1$ a zkoumejme nyní optimální výběr parametru r . Nejlepší volbou pro r je interval od 3 do 4, viz tabulka 7, kde *FSA* dává dobré výsledky. Další výhodou je, že je několikanásobně rychlejší oproti předchozím *SA* metodám, kdy nejlepší metody trvaly okolo 20 sekund, *FSA* trvá zlomek této hodnoty, okolo setiny sekundy.

Pokud tedy zvýšíme hodnoty k a n na $k = 8$ a $n = 500$, tedy uvažujeme 4000 nových bodů, tak už získáváme maximální počet zásahů a to za čas 0.015 sekundy. Vidíme tedy, že jsme našli optimální heuristiku, pro kterou je sice potřeba vygenerovat více nových bodů, ale dobou trvání lehce vyhrává nad metodou *Shoot and go*.

n	k	Mutace	Mean	Zásahy	Mutace	Mean	Zásahy
1000	1	<i>random</i>	199.33	94	<i>Cauchy</i>	188.21	370
500	2	<i>random</i>	200.94	84	<i>Cauchy</i>	185.22	376
250	4	<i>random</i>	205.20	64	<i>Cauchy</i>	182.93	414
200	5	<i>random</i>	208.45	59	<i>Cauchy</i>	183.73	408
125	8	<i>random</i>	221.25	40	<i>Cauchy</i>	190.24	336
100	10	<i>random</i>	237.43	37	<i>Cauchy</i>	201.76	279
50	20	<i>random</i>	375.15	5	<i>Cauchy</i>	316.42	38
40	25	<i>random</i>	406.71	6	<i>Cauchy</i>	350.93	18
25	40	<i>random</i>	473.47	6	<i>Cauchy</i>	418.73	1
20	50	<i>random</i>	481.90	1	<i>Cauchy</i>	426.14	5
10	100	<i>random</i>	493.49	0	<i>Cauchy</i>	451.78	6
8	125	<i>random</i>	516.08	0	<i>Cauchy</i>	454.21	5
5	200	<i>random</i>	527.00	1	<i>Cauchy</i>	449.30	2
4	250	<i>random</i>	515.57	3	<i>Cauchy</i>	452.05	7
2	500	<i>random</i>	513.11	3	<i>Cauchy</i>	452.44	8
1	1000	<i>random</i>	523.40	1	<i>Cauchy</i>	454.97	4

Tabulka 6: Závislost heuristiky *SA3* na volbě parametrů k a n .

4 Závěr

V tomto protokolu jsme analyzovali tři heuristické metody pro hledání globálního minima upraveného stochastického procesu s *Turingovým vzorem*.

Pokud bychom neuvažovali fixní počet generace nových bodů pro všechny metody, tak nejlepší metodou je *Fast Simulated annealing* s Cauchyho mutací, která pro 4000 nových bodů má

α	Mean	Zásahy	r	Mean	Zásahy
5	446.58	5	100	203.65	87
2	211.35	222	10	167.81	438
1	182.93	414	5	159.44	729
0.5	182.97	418	4	158.48	783
0.1	183.80	430	3	158.39	806
-0.1	184.76	396	2	160.65	749
-0.5	181.28	424	1	167.62	573
-1	184.12	393	0.5	182.93	418
-2	210.16	231	0.1	295.92	67
-5	448.45	6	0.01	797.02	3

Tabulka 7: Závislost na výběru α pro fixní $r = 0.5$ a na výběru r pro fixní $\alpha = 1$, $k = 4$ a $n = 250$.

stoprocentní počet zásahů do globálního minima. Druhou metodou je *Shoot and go* pro výběr velké matice sousednosti \mathbb{N} a poté klasické *Simulated Annealing* s lokálním výběrem nových bodů.

Pokud bychom uvažovali fixní počet, tak je nejlepší metodou *Shoot and go* pro velkou matici sousednosti, poté klasické *Simulated Annealing* s lokálním výběrem nových bodů a pak upravená verze lokální *Simulated Annealing*.

Heuristika	Počet nutných bodů	Čas (s)	
<i>FSA</i>	4000	0.015	$k = 8, n = 500, \alpha = 1, r = 3$
<i>SG</i>	9	0.3	$m = 17$
<i>SA1</i>	2000	63	$k = 8, n = 250, m = 17$
<i>SA2</i>	2000	85	$k = 1, n = 2000, m = 17$
<i>SA3</i>	50000+	300+	$k = 5, n = 10000+$
<i>SA4</i>	25000+	400+	$k = 25000+, n = 1$

Tabulka 8: Porovnání všech heuristik.