Lista 3

Maurycy Borkowski

25.03.2020

zad. 1 (1 punkt)

a)

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{x+2y+z}{-3} \end{pmatrix}$$

b)

$$P(1) = a + b + c + d + e = 0$$

$$P(0)'' = 12a0^2 + 6b0 + c = c = 0$$

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = P(x') = xx'^4 + yx'^3 + 0x'^2 + zx' - (x + y + z)$$

$$F^{-1}(X - X^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zad. 3 (1 punkt)

$$P(-2) = -8a + 4b - 2c + d = 1$$

$$P(-1) = -a + b - c + d = 3$$

$$P(1) = a + b + c + d = 13$$

$$P(2) = 8a + 4b + 2c + d = 33$$

Rozwiążmy układ równań:

$$\begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 1 \\ -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = 13 \\ 8a + 4b + 2c + d = 33 \end{cases}$$

Macierz rozszerzona $(A|B)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -8 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 33 \end{array}\right)$$

W postaci schodkowej:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -39 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -30 \end{array}\right)$$

Z niej uzyskujemy rozwiązanie, szukany wielomian:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$$

zad. 4 (1 punkt)

a)
Po sprowadzeniu do postaci schodkowej:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Odpowiada ona:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Mamy:

$$x_2 = \frac{5x_3 + x_4}{-4}$$

$$x_1 = \frac{7}{4}(5x_3 + x_4) - 9x_3 - 4x_4 + 2 = -\frac{1}{4}x_3 - \frac{9}{4}x_4 + 2$$

Ostatecznie:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x_3 - \frac{9}{4}x_4 + 2 \\ \frac{5x_3 + x_4}{-4} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1/4 \\ -5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -9/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Macierz rozszerzona:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -9 & 10 & 3 & 7 & 7 \\ -4 & 7 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -9 & 10 & 3 & 7 & 7 \\ 7 & 5 & -4 & -6 & 3 \\ 0 & 23 & -3 & -1 & 16 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -63 & 70 & 21 & 49 & 49 \\ 63 & 45 & -36 & -54 & 27 \\ 0 & 23 & -3 & -1 & 16 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -63 & 70 & 21 & 49 & 49 \\ 0 & 115 & -15 & -5 & 76 \\ 0 & 23 & -3 & -1 & 16 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -63 & 70 & 21 & 49 & 49 \\ 0 & 23 & -3 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Wobec powyższego układ jest sprzeczny.

zad. 7 (2 punkty)

Dowód. Z tw. Bezouta wielomian z zadania dzieli się bez reszty przez: $(x-1),(x-2)\dots(x-14)$ wobec tego jest postaci $(x-1)(x-2)\dots(x-14)Q(x)$ albo jest wielomianem zerowym. Wiemy, że stopień wielomianu z zadania $\leqslant 13$, wnioskujemy, że wielomian, o którym mowa jest wielomianem zerowym.

Zdefiniujmy $F:\mathbf{R}^{14}\to\mathbf{R}_{13}[X]$ następująco:

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{14} \end{pmatrix}\right) = P(x)$$

taki że,

$$P(1)=x_1, P(2)=x_2 \dots P(14)=x_{14}$$

Z poprzedniej części wiemy, że:

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

Zauważmy, że jeżeli $x_i \neq 0$ dla pewnego i to na pewno:

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{14} \end{pmatrix}\right) \neq 0$$

Możemy zatem wywnioskować: $kerF = \{0\}$
Z faktu (był na wykładzie) lub Tw. o indeksie:

$$kerF = \{0\} \Leftrightarrow F \ \ jest \ \ 1-1$$

Dalej, skoro $dim\mathbf{R}^{14} = dim\mathbf{R}_{13}[X] = 14 < \infty$ to F jest izomorfizmem.

Więc dla dowolnych $x_1, x_2 \dots x_{14}$ istnieje jedyny $P(x)$ spełniający warunki zadania. $\square$

zad. 9 (2 punkty)

Sprawdźmy czy dany zestaw wektorów jest bazą tej p.l. to znaczy czy jest LNZ (bo $dimR^3 = 3$)
Rozwiążemy układ równań odpowiadający:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -21 & -5 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Zatem jedynym rozwiązaniem układu jest $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mamy więc:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \wedge \gamma = 0$$

Więc zestaw wektorów z zadania jest LNZ i z tym jest bazą R^3
Zatem dowolny wektor z R^3 powinien być rozwiązaniem układu równań.

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

zad. 11 (2 punkty)

Dowód. Skoro układ ma dwa rozwiązania to jeżeli traktujemy kolumny jako wektory to da się pewien wektor $AX = B$ przedstawić na dwa sposoby. Zatem układ kolumn nie jest LNZ bo przedstawia się niejednoznacznie w układzie kolumn macierzy. Oznaczmy wektory oznaczające kolumny: $v_1, \dots v_n$, oraz bazę p.l. rozpinanej przez te wektory B.
$dim(B) < n$ bo baza jest maksymalnym zbiorem LNZ, a zbiór $v_1, \dots v_n$ LZ.
Z definicji rzędu macierzy:

$$rank(A) = dim(Lin(v_1, \dots v_n)) = dim(B) < n$$

□

zad. 12 (2 punkty)

Dowód. Wiemy, że dim p.l. rozpinanych przez kolumny i wiersze są sobie równe i są równe $rank(A) = m$.
Wnioskujemy, że kolumny traktowane jako wektory należą do p.l. K^m.
Skoro dim p.l. rozpinanej przez kolumny jest równy m a i z powyższego to kolumny są bazą K^m.
W takim razie dowolny wektor $AX = B \in K^m$ można zapisać kombinacją liniową kolumn. Układ jest niesprzeczny. □

Przykład:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

$Rank(A) = 2$