Lista 2 - Topologia 2021

Ćw. 1 Znajdź podprzestrzeń X przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$ zawierającą zbiór $A = [0, 1)$ taką, że A jest w X otwarty, ale nie jest domknięty.

Ćw. 2 Pokaż, że podprzesteń $X = \{\frac{1}{n} : n \in \{1, 2, , \ldots\}\}$ przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$ jest dyskretna (tzn. każdy podzbiór jest otwarty). A $Y = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \{1, 2, , \ldots\}\}$?

Ćw. 3 Niech Y będzie poprzestrzenią przestrzeni X i niech $A \subseteq Y$. Czy:

a) jeśli A jest otwarty w Y, to A otwarty w X?
b) jeśli A jest otwarty w X, to A otwarty w Y?
c) jeśli A jest gęsty w Y i Y jest gęsty w X, to A jest gęsty w X?

Ćw. 4 W zbiorze $X = \mathbb{R} \cup \{g\}$, gdzie g jest gruszką, topologię definiujemy następująco:

- bazowymi otoczeniami liczb rzeczywistych są ich singletony,
- otoczeniami gruszki są zbiory postaci $\{g\} \cup A$, gdzie $A \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus A$ jest skończony.

a) Znajdź $\mathrm{Int}(0, 1)$, $\overline{\mathbb{N}}$, $\mathrm{Bd}(\mathbb{Q} \cup \{g\})$.
b) Pokaż, że 0 nie jest granicą ciągu $x_n = \frac{1}{n}$.
c) Czy ciąg $x_n = \frac{1}{n}$ jest zbieżny? A ciąg $y_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$?
d) Opisz jak wyglądają ciągi zbieżne w tej przestrzeni.
e) Pokaż, że X jest przestrzenią Hausdorffa.

Zad. 5 Pokaż, że w przestrzeni Hausdorffa punkty są domknięte, a ciągi zbieżne mają tylko jedną granicę.

Zad. 6 Czy podprzestrzeń przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa?

Zad. 7 Ustalmy X i topologię $\mathcal{T}$ na X. Pokaż, że $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ i dla każdego otoczenia $U \ni x$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ taki, że $x \in B \subseteq U$.

Zad. 8 Powiemy, że $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią *metryzowalną*, jeżeli istnieje metryka na X, której kule generują topologię $\mathcal{T}$. Udowodnij, że jeśli X jest przestrzenią metryzowalną i w X istnieje przeliczalny zbiór gęsty A, to X ma bazę przeliczalną. (Wskazówka. Przyjmij oznaczenia: niech d oznacza metrykę generującą topologię na X; niech $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$.)

Zad. 9 Posługując się stwierdzeniem udowodnionym w powyższym zadaniu pokaż, że strzałka nie jest metryzowalna. (Wskazówka: najtrudniej pokazać, że strzałka nie ma bazy przeliczalnej. Żeby to zobaczyć rozważ otoczenia x postaci $[x, x + 1)$ i użyj charakteryzacji bazy z zad. 7).

Zadanie nadobowiązkowe.

Zad. 10 Czy kostka Cantora jest podprzestrzenią metryczną kostki Hilberta? Czy jest jej podprzestrzenią topologiczną (i co to w ogóle znaczy)?