5.2

Oznaczmy:
X_j - zmienna losowa przyjmująca 1 jeżeli kupon typu j jest w wybranym zbiorze oraz 0 jeżeli tego kuponu nie ma w zbiorze.

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, X liczba różnych kuponów w danym zbiorze. Liczymy:

$$P(X_j = 1) = 1 - (1 - p_j)^k$$

X_j przyjmuje wartości $\{0, 1\}$ stąd, $E(X_j) = P(X_j = 1)$ oraz $X_j^2 = X_j$

Liczymy wartość oczekiwaną X:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - (1 - p_i)^k\right) = n - \sum_{i=1}^{n} (1 - p_i)^k$$

Policzmy wariancję X:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \underbrace{E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)}_{\sum_{i=1}^{n} X_i = X} + \sum_{\substack{(i,j)\in\{1...n\}\times\{1...n\} \\ i\neq j}} E(X_i X_j) = E(X) - \sum_{\substack{(i,j)\in\{1...n\}\times\{1...n\} \\ i\neq j}} 1 - (1 - p_i - p_j)^k$$

Podstawiając wyniki otrzymujemy:

$$Var(X) = \sum_{\substack{(i,j)\in\{1...n\}\times\{1...n\} \\ i\neq j}} (1 - p_i - p_j)^k + E(X) - (E(X))^2 - n(n-1)$$