7.2

a) ~~1. BAZA~~ INDUKCJA

$\langle CP_1', CP_0'\rangle = 0$

Ze zwarunku rekurencyjnego $\{\bar{P}_k\}$, $\bar{P}_k$ jest wyznaczony jednoznacznie, jeżeli $\{P_k\}$ jest dany ciągiem wielomianów to $P_k = \alpha_k \bar{P}_k$. Więc

$P_k = \alpha \bar{P}_k$, $P_k' = \beta \bar{P}_k \Rightarrow P_k' \alpha_k = \beta_k P_k$

b) Pokażmy, że $\{P_0, P_1 \dots P_n\}$ LNZ, bo wtedy bazą Π_n jest n elementów

Zał. $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j P_j = 0$ Dla dowolnego i: $0 = \langle v_i, 0\rangle = \langle v_i, \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P_j\rangle =$

$= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \langle P_j, P_i\rangle = \alpha_i \langle P_i, P_i\rangle = 0$

z tego $\alpha_i = 0$ z dowolności wyboru i ■

c) $Q \in \Pi_{k-1}$ Q możemy zapisać w bazie $\{P_k\}$ tj. $Q = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j P_j$

$$\langle Q, P_k\rangle = \langle \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j P_j, P_k\rangle = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \overbrace{\langle P_j, P_k\rangle}^{0 \text{ ORTOGONALNE}} = \sum_{j=0} \alpha_j 0 = 0$$ ■