Zad. 3 teza: $k! | s \cdot (s+1) \cdot \ldots \cdot (s+k-1)$

$$\frac{s \cdot (s+1) \cdot \ldots \cdot (s+k-1)}{k!} = \frac{s \cdot (s+1) \cdot \ldots \cdot (s+k-1)}{k!} = \frac{(s+k-1)!}{(s-1)!} \cdot \frac{1}{k!} = \binom{s-1}{k} \in \mathbb{Z} \quad \square$$

Zad. 5

Rozważmy sumy: $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$\vdots$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Rozważmy dwa przypadki:

1. $\exists_k \; n | S_k$ wtedy $i = 1, j = k$

2. $\forall_k \; n \nmid S_k$ tj. $\forall_k \; S_k \not\equiv_n 0$ więc możliwe reszty: $\underbrace{1, 2, \ldots, n-1}_{n-1}$

Z zasady szufladkowej Dirichleta $\exists \, S_i, S_j$ t.ż. $S_i \equiv_n S_j$ (BSO $i < j$)

wtedy $S_j - S_i \equiv_n 0$ czyli $a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j \equiv_n 0$ $\blacksquare$

Zad. 6

* (nawet mniej bo np. 1 nie jest możliwe)

Maksymalna suma: $99 + 98 + \ldots + 90 = 945$, czyli ≤ 945 możliwych sum*

Możliwych ~~podziałów~~ podzbiorów jest $2^{10} = 1024$, z zasady szufladkowej Dirichleta conajmniej dwa podzbiory będą miały tą samą sumę.

Zad. 7 ... n-szufladek

Zad. 2

teza $\sum_{d:d|n} \phi(d) = n$

Oznaczmy $A(d) = \{k \in \{1, \dots n\} : \gcd(k, n) = d\}$

Zauważmy, że:

$|A(d)| = \phi(n/d)$

dla każdego n, m ≤ n istnieje t.ż. $\frac{n}{m} \in$ $\exists d A(d)$

$A(d)$ parami rozłączne oraz $\bigcup_{d:d|n} A(d) = \{1, 2 \dots n\}$

Zatem:

też przechodzi po wszystkich dzielnikach

$$n = \sum_{d:d|n} |A(d)| = \sum_{d:d|n} \phi(n/d) = \sum_{d:d|n} \phi(d)$$

$\blacksquare$

Zad. 12

a) $\binom{m+n}{r} = \sum_{s=0}^{r} \binom{m}{s}\binom{n}{r-s}$

Dla dowolnego podziału S zbioru R mamy:

$\forall_{S \subseteq R} \quad S \subseteq M \iff S' \subseteq N$

b) $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k} \overset{*}{=} \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$

$* \quad \frac{(n-m)!}{(n-k)!\,(k-m)!} = \frac{(n-m)!}{(k-m)!\,(n-k)!}$

$N \supseteq K \supseteq M \iff \begin{cases} N \supseteq M \\ N \setminus M \supseteq N \setminus K \\ N \setminus M \supseteq K \setminus M \end{cases}$

Zad. 13

a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-k-1+1)!\,(k-1)!\,k} = \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}$

b) $\sum_{0 \le k \le n}$

D-d indukcyjny po n: 1. Bdaza: $\binom{0}{m} = 0 = \binom{1}{m+1}$

2. KRok: Zał. $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} + \binom{n+1}{m} \xrightarrow{\text{zał. ind.}} \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} \overset{*}{=} \binom{n+2}{m+1}$ ∎

* REGUŁA PASCALA RACHUNKOWY D-d