Lista 1 - Topologia 2021

Zad. 1 Pooglądaj kule i ciągi zbieżne w różnych przestrzeniach metrycznych. W szczególności np.:

- Opisz, jak wygląda kula o środku w ciągu $(0,0,0,\dots)$ i promieniu $1/13$ w kostce Cantora.
- Opisz, jak wyglądają ciągi zbieżne w kostce Cantora.

Zad. 2 Które z omawianych metryk są niezmiennicze na przesunięcia, tzn. $d(x,y) = d(x+z, y+z)$ dla każdego $x,y,z \in X$?

Zad. 3 Udowodnij, że jeśli ciąg (x_n) punktów z $\mathbb{R}^2$ jest zbieżny do $x \in \mathbb{R}^2$ w metryce euklidesowej, to jest zbieżny w metryce maksimum. Dla jakich innych par metryk na $\mathbb{R}^2$ zachodzi taka implikacja?

Zad. 4 Wykaż, że podzbiory $\mathbb{R}^n$ postaci $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$ są otwarte, a $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ są domknięte.

Zad. 5 Uzasadnij, że nie istnieje ciąg (x_n) elementów $\mathbb{R}^2$, który jest zbieżny w metryce centrum, ale nie jest zbieżny w metryce euklidesowej.

Zad. 6 Sprawdź, że w dowolnej przestrzeni metrycznej (X,d) sfera, a więc zbiór postaci $\{y \in X \colon d(x,y) = r\}$ (dla ustalonego $x \in X$ i $r > 0$) jest zbiorem domkniętym. Pokaż, we $\overline{B_r(x)} \subseteq \{y \colon d(x,y) \le r\}$, ale niekoniecznie musi zachodzić przeciwna inkluzja.

Zad. 7 Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Pokaż, że dla każdego $A,B \subseteq X$ zachodzą równości i inkluzje (w przypadku inkluzji pokaż, że nie muszą zachodzić inkluzje odwrotne):

$$\begin{aligned} \overline{A} &= (\mathrm{Int}(A^c))^c & \qquad \overline{A\cup B} &= \overline{A}\cup\overline{B}, \\ \overline{A\cap B} &\subseteq \overline{A}\cap\overline{B}, & \overline{\overline{A}} &= \overline{A}, \\ \mathrm{Bd}(A\cup B) &\subseteq \mathrm{Bd}(A)\cup\mathrm{Bd}(B) & \mathrm{Bd}(A) &= \mathrm{Bd}(X\setminus A). \end{aligned}$$

Zad. 8 Znajdź wnętrze, domknięcie (i brzeg) następujących podzbiorów $\mathbb{R}^2$ z normą euklidesową.

$\mathbb{R}\times\mathbb{N}$, $\{\langle x,y\rangle \colon x^2+y^2 = 1\}$, $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $\{\langle x,y\rangle \colon y = 2x\}$, $\{\langle x,y\rangle \in (0,\infty)\times\mathbb{R} \colon y = \sin 1/x\}$

Powtórz polecanie dla normy maksimum i metryki centrum.

Zad. 9 Pokaż, że w kostce Cantora wszystkie trójkąty są równoramienne.

Zad. 10 Pokaż, że jeżeli (X,d) jest przestrzenią metryczną, to funkcja $\rho \colon X\times X \to [0,\infty)$ zdefiniowana przez

$$\rho(x,y) = \min(d(x,y),1)$$

jest metryką. Co więcej, rodziny zbiorów otwartych w (X,ρ) i (X,d) są takie same.

Zad. 11 Czy istnieje metryka na $\mathbb{R}^2$ taka, że $[0,1]\times[0,1]$ jest kulą (w tej metryce)?

Zadania rekreacyjne i problemy

Zad. 12 Metrykę można definiować na każdym zbiorze, w ostateczności dyskretną... Spróbuj wymyślić jakieś *niedyskretne* metryki na X, jeżeli X jest ...

- pewnym grafem spójnym skończonym,
- pewnym grafem spójnym nieskończonym,
- pewnym grafem niespójnym,
- zbiorem słów w języku polskim,
- rodziną wszystkich wielokątów na płaszczyźnie,
- pewną rodziną przestrzeni metrycznych (czemu nie?).

Być może w niektórych wypadkach łatwiej zdefiniować *pseudometrykę*, czyli funkcję, która spełnia wszystkie warunki metryki poza tym, że mogą się zdarzyć różne punkty x, y takie, że $d(x, y) = 0$. Jeśli mamy sensownego kandydata na (pseudo)metrykę, który nie spełnia warunku symetrii, to można go łatwo *usymetrycznić* (jak?).

Zad. 13 W przestrzeniach metrycznych można zdefiniować symetralną (jako zbiór tych punktów, które są równoodległe od dwóch ustalonych punktów). Jak wyglądają symetralne w normie miejskiej? Maksimum? Jak wygląda symetralna w przestrzeni $C[0, 1]$ z metryką supremum? Jakie inne geometryczne obiekty znane z przestrzeni euklidesowych potrafisz uogólnić na inne przestrzenie metryczne? A jakich się nie da?