TW. 4 (test na dzielnik normalny)

Jeśli $H \leq G$, to mamy:

$$H \trianglelefteq G \iff \forall g \in G\ \forall h \in H\ \ ghg^{-1} \in H$$

Dowód

($\Rightarrow$) Załóżmy że $H \trianglelefteq G$ i weźmy $g \in G$ i $h \in H$. Wtedy:

$$gh \in gH \overset{}{\underset{H \trianglelefteq G}{=\!=}} Hg \Rightarrow ghg^{-1} \in H.$$

($\Leftarrow$) Weźmy dowolny $g \in G$. CEL: $gH \overset{?}{=} Hg$.

(?)($\subseteq$) ——— " ——— $a \in gH \Rightarrow \exists h \in H\ \ a = gh \,/\cdot_p g^{-1}$

Mamy: $ag^{-1} = ghg^{-1} \in H$ (założenie ($\Leftarrow$))

$ag^{-1} \in H \Rightarrow a \in Hg$

(?)($\supseteq$) Analogicznie. ■

Przykład

Niech $SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \overbrace{GL_n(\mathbb{R})}^{\det \neq 0.} \mid \det(A) = 1\}$. Łatwo zauważyć, że $SL_n(\mathbb{R}) < GL_n(\mathbb{R})$. Pokażemy, że $SL_n(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$, używając TW. 4.

Weźmy $A \in GL_n(\mathbb{R})$ i $B \in SL_n(\mathbb{R})$. Liczymy:

$$\det(ABA^{-1}) = \det(A)\underbrace{\det(B)}_{1}\det(A)^{-1} = \det(A)\det(A)^{-1} = 1$$

$\Rightarrow ABA^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$. Czyli z TW 4. $SL_n(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$

Uwaga

Jeśli $f: G \to H$ jest homomorfizmem, to $\mathrm{im}(f) \leq H$, ale $\mathrm{im}(f)$ nie musi być dzielnikiem normalnym H.

Np. mamy homomorfizm:

$f: \mathbb{Z}_2 \longrightarrow S_3$ $\quad f(0) = id$, $f(1) = (1,2)$

Wtedy $\mathrm{im}(f) = \{id, (1,2)\} \ntrianglelefteq S_3$.

Przykład (na ker i im)

Rozważmy następujący homomorfizm:

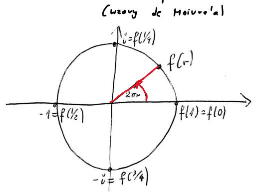
$f: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ $\quad f(r) = \cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r) =: e^{2\pi i r}$

na przykład $f(1/4) = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$.

To jest homomorfizm, bo: $(r, s \in \mathbb{R})$

$$f(r+s) = e^{2\pi i(r+s)} = e^{2\pi i r + 2\pi i s} \underset{\uparrow}{=} e^{2\pi i r} e^{2\pi i s} = f(r)f(s)$$

(wzory de Moivre'a)



• Liczymy $\ker(f) = \{r \in \mathbb{R} \mid \underbrace{e^{2\pi i r}}_{f(r)} = 1\}$.

Weźmy $r \in \mathbb{R}$. Wtedy:

$e^{2\pi i r} = 1 \iff \cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r) = 1 \iff$

$\iff \cos(2\pi r) = 1$ oraz $\sin(2\pi r) = 0 \iff r \in \mathbb{Z}$

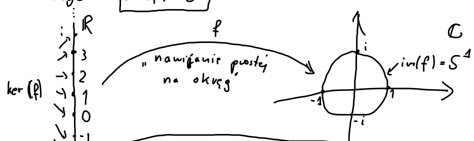
Stąd $\boxed{\ker(f) = \mathbb{Z}}$

• Liczymy $\mathrm{im}(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists r \in \mathbb{R}\ \ e^{2\pi i r} = z\}$

Stąd $z \in \mathrm{im}(f) \iff z = \cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r)$ dla pewnej $r \in \mathbb{R}$ $\iff$

$\iff |z| = 1 \iff z \in S^1 \leftarrow$ okrąg jednostkowy

Czyli $\boxed{\mathrm{im}(f) = S^1}$



Ogólny związek jądra z monomorfizmami

TW.

Niech $f: G \to H$ będzie homomorfizmem. Wtedy mamy:

f jest monomorfizmem (czyli „1-1") $\iff \ker(f) = \{e_G\}$.

Dowód

($\Rightarrow$) Załóżmy, że f jest „1-1". CEL: $\ker(f) \overset{?}{=} \{e_G\}$

(?)($\supseteq$) $\ker(f) \leq G \Rightarrow e_G \in \ker(f) \Rightarrow \{e_G\} \subseteq \ker(f)$

(?)($\subseteq$) Weźmy $a \in \ker(f)$. Wtedy:

$$\overset{\Downarrow}{f(a) = e_H} = f(e_G) \underset{f:\,„1\text{-}1"}{\Longrightarrow} a = e_G \quad \text{OK.}$$

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\ker(f) = e_G$. CEL: f jest „1-1"

Weźmy $g_1, g_2 \in G$, takie że $f(g_1) = f(g_2)$.

Mamy pokazać: $g_1 \overset{?}{=} g_2$.

$$f(g_1) = f(g_2) \Rightarrow e_H = f(g_1)f(g_2)^{-1} = f(g_1)f(g_2^{-1}) = f(g_1 g_2^{-1})$$

$\Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in \ker(f) = \{e_G\} \Rightarrow g_1 g_2^{-1} = e_G \Rightarrow g_1 = g_2$. ■

Uwaga

Jeśli chcemy sprawdzić czy homomorfizm f jest monomorfizmem to pokazujemy, że $\ker(f) = \{e\}$. Tak ZAWSZE jest szybciej!

Przykład

Homom. z tw. Cayley'a $\alpha: G \to S_G$ $\quad \alpha(g) = F_g$

$F_g(x) = gx$

$g \in \ker(\alpha) \Rightarrow \alpha(g) = id \Rightarrow F_g = id$

$\Downarrow$

$e = id(e) = F_g(e) = ge = g$

Czyli $\ker(\alpha) = \{e\}$ i z TW. 4 α powyżej jest monomorfizmem. ■