zad. 24* i zad. 28

Maurycy Borkowski

12.10.2020

L1Z24*

Koło

Powierzchnia wpisanego prostokątu to:

$$S(x) = 2x \cdot 2y = 2x \cdot (2\sqrt{r^2 - x^2}) = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Liczymy pochodną:

$$\frac{dS}{dx} = 4\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{4x(-2x)}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Przekształcając mamy:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{4r^2 - 8x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Szukamy maksimum:

$$\frac{4r^2 - 8x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

$$4r^2 - 8x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{r^2}{2}$$

Z warunków zadania:

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Dalej liczymy y:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Kula

Możemy wyznaczyć jedną współrzędną z dwóch pozostałych (i r):

$$z = \sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}$$

Funkcja,w której szukamy maximum:

$$V(x, y) = xyz = xy\sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}$$

Chcemy znaleźć punkty, gdzie $\nabla V(x, y) = (0, 0)$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = y\sqrt{4r^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 y}{\sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}} = \frac{4r^2 y - 2x^2 y - y^3}{\sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x\sqrt{4r^2 - x^2 - y^2} - \frac{xy^2}{\sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}} = \frac{4r^2 x - 2xy^2 - x^3}{\sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}}$$

Przyrównując do 0 (wyciągamy z mianownika zmienną):

$$4r^2 - 2x^2 - y^2 = 0$$

$$4r^2 - 2y^2 - x^2 = 0$$

Podstawiając pierwsze do drugiego:

$$4r^2 - 2(4r^2 - 2x^2) - x^2 = 0$$

$$-4r^2 + 3x^2 = 0$$

$$x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

Wyznaczamy pozostałe współrzędne:

$$y = 4r^2 - 2(\frac{2r}{\sqrt{3}})^2 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

$$z = \sqrt{4r^2 - 2(\frac{2r}{\sqrt{3}})^2} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

L1Z28

Oznaczmy: $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, g_2(x, y, z) = x + y + z$, warunki zadania: $g_1(X) = 1, g_2(X) = 0$ Korzystając z twierdzenia (mnożniki Lagrange'a):

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$$

Daje nam to równania:

$$\begin{cases} yz = 2x\lambda_1 + \lambda_2 \\ xz = 2y\lambda_1 + \lambda_2 \\ xy = 2z\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

Zauważmy, że $\lambda_1 \neq 0$ inaczej nie byłyby spełnione warunki.
Podstawiając 1. do 2. i 3.:

$$\begin{cases} \frac{yz-\lambda_2}{2\lambda_1} z = 2y\lambda_1 + \lambda_2 \\ \frac{yz-\lambda_2}{2\lambda_1} y = 2z\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz^2 - \lambda_2 z = 4y\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \\ y^2 z - \lambda_2 y = 4z\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz^2 - 4y\lambda_1^2 = \lambda_2 z + 2\lambda_1\lambda_2 \\ y^2 z - 4z\lambda_1^2 = \lambda_2 y + 2\lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(z^2 - 4\lambda_1^2) = \lambda_2(z + 2\lambda_1) \\ z(y^2 - 4\lambda_1^2) = \lambda_2(y + 2\lambda_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (z + 2\lambda_1)\,(y(z - 2\lambda_1) - \lambda_2) = 0 \\ (y + 2\lambda_1)\,(z(y - 2\lambda_1) - \lambda_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (z + 2\lambda_1)\,(yz - 2y\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \\ (y + 2\lambda_1)\,(yz - 2z\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \end{cases}$$

Uwzględniając powyższy układ równań i warunki z zadania mamy:
dla max: $y = z = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ $x = \frac{2}{\sqrt{6}}$ dla min: $y = z = \frac{1}{\sqrt{6}}$ $x = -\frac{2}{\sqrt{6}}$