zad. 1

$n\, 2^{n-1}$ ← ile różnych delegacji, dla każdego z n-1 osób tak / nie (2 wybory)

na n sposobów wybieramy przewodniczącego

$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$ SUMA delegacji każdego rozmiaru, w każdej k-osobowej delegacji którą wybieramy na $\binom{n}{k}$ sposobów wybieramy na k sposobów przewodniczącego

Zad. 2

~~Za miast wstawić k jedynek, ... możemy wstawić ...~~

~~k-1 ...~~ 10

~~1 ...~~ 1

~~L=k+1 zer~~ 0

Każdej jedynce możemy przypisać dokładnie jedno zero, które będzie za nią. Możemy też dać jedynkę na sam koniec ciągu. Tak więc ilość takich ciągów

$\binom{l+1}{k}$ ← wybieramy k zer (lub ostatnie miejsce) dla każdej jedynki, możliwości jedn zgodnie z l+1 a nie l.

Zad. 3 Fakt: Liczb podzielnych przez a w ciągu 1 ... n jest $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$

Oznaczmy: $D_k = \{ l : k \mid l \}$

* 2, 3, 5, 7 - pierwsze więc LCM-y to po prostu iloczyny

Szukana liczba:

$|D_5 \cap D_7 \cap (D_2 \cup D_3)|$

$$|D_2 \cup D_3| - |D_5 \cap (D_2 \cup D_3)| - |D_7 \cap (D_2 \cup D_3)| + \ldots$$

** $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$A \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D)$

$(A \cap C) \cap (A \cap D) = A \cap C \cap D$

$$\underset{**}{\overset{*}{=}} \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \right) - \left(\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor \right) - \left(\left\lfloor \frac{n}{14} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor \right)$$

$$+ \left(\left\lfloor \frac{n}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor \right)$$

zad. 4

Na pozycji k-tej możemy wstawić $n-k$ liczb. Resztę ciągu tworzymy ze zliczeń $n-1$ elementowego (zabraliśmy jeden element); stąd wynik:

$$(n-k)\cdot(n-1)!$$

zad. 6

$5\cdot 4=20$ SZUFLAD

Ω - WSZYSTKIE ROZMIESZCZENIA

$|\Omega| = 20^n$

A_i - WSZYSTKIE ROZMIESZCZENIA T.Ż. i-ta ~~szafka~~ KOMODA (CAŁA) jest pusta

$|A_i| = (20-4)^n$

dalej:

$|A_1 \cap \dots \cap A_k| = (20-k4)^n$ * z zasady włączeń i wyłączeń

SZUKANA LICZBA:

$$|\Omega| - |A_1 \cup \dots \cup A_5| \overset{*}{=} 20^n - \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i+1}\binom{5}{i}(20-i4)^n = \sum_{i=0}^{5}(-1)^{i}\binom{5}{i}(20-i4)^n$$

zad. 8

BSO $a_i \in \mathbb{N}$ (możemy je ponumerować)

Rozważmy:

$A_i = \{1,2,\dots,a_i\}$, oczywiste, że $|A_i \cup \dots \cup A_j| = \max\{a_i,\dots,a_j\}$

$|A_i \cap \dots \cap A_j| = \min\{a_i,\dots,a_j\}$

* Korzystając z zasady włączeń i wyłączeń

$$\max\{a_1,\dots,a_n\} = |A_1 \cup \dots \cup A_n| \overset{*}{=} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}|A_1 \cap \dots \cap A_i| =$$

$$= a_1 + a_2 + \dots + a_n - \dots$$

zad. 9

Ω - wszystkie usadzenia ludzi

$|\Omega|$ - $n!$

A_i - wszystkie usadzenia t.ż. i-ta para wrogów siedzi obok siebie

$*$

$|A_1 \cap \ldots \cap A_k| = (n-k-1)! \cdot 2^k$

liczba ustawień — zmieniają miejscami pary wrogów

$n-k$ osób przy okrągłym stole

k - ludzi „SPRZĘŻAMY" z jego wrogiem

Z zasady włączeń i wyłączeń, szukana liczba:

$$|\Omega| - |A_1 \cup \ldots \cup A_{\frac{n}{2}}| \overset{*}{=} n! - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} 2^i (n-k-1)! =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} 2^i (n-k-1)!$$

Zad. 13

Zał: $|G| = 2^k$ $|X| = 2l+1$

Z tw. o orbitach i stabilizatorach oraz z tw. Lagrange'a dla grup skończonych:

$\forall_x$ $|G(x)| = \dfrac{|G|}{|G_x|}$ Skoro $|G| = 2^k$ a $|G(x)| \in \mathbb{N}$ to $|G(x)| = 2^d$ $d \in \mathbb{Z}$ $(d \geq$

Skoro orbity $|G(x)|$ tworzą partycję X to:

$$|X| = \sum_{i=0}^{m} |G(x_i)| = \sum_{i=0}^{m} 2^{d_i}$$

reprezentanci orbit

Skoro $|X| = 2l+1$ musi istnieć x_i t.ż. $|G(x_i)| = 2^0 = 1$ to znaczy że x_i jest punktem stałym ■