z. 15 / lista 2

Mamy $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$ dla

$B, A \subset W$ gdzie W jest przestrzenią liniową.

Niech ~~X~~ $W, W' < V$, $\dim V < \infty$. Pokażemy, że

$W + W' = \operatorname{lin}(W \cup W')$. Niech B_0 bazą $W \cap W'$. B_0 lnz,

Więc istnieje $B \supseteq B_0$, które jest
~~Niech~~ B ~~jest~~ bazą W. Wtedy $W' \cap B$ jest lnz,

więc istnieje $B' \supseteq (W' \cap B)$, które jest bazą W'.

1) $\operatorname{lin}(B \cup B') \subseteq \operatorname{lin}(W \cup W')$, bo $B \cup B' \subseteq W \cup W'$

2) $\operatorname{lin}(W \cup W') \subseteq \operatorname{lin}(B \cup B')$, bo dla każdej kombinacji liniowej wektorów z $W \cup W'$ można je przedstawić jako kombinację liniową wektorów z B lub kombinację liniową wektorów z B'

3) $(\operatorname{lin}(B \cup B')) \subseteq W + W'$ - weźmy v będący kombinacją liniową wektorów z $B \cup B'$. Można tę kombinację rozbić na dwie sumy - po wektorach należących do B i tych należących do $B' \setminus B$. ~~Każda~~ Pierwsza z sum należy do $\operatorname{lin} B = W$, druga do $\operatorname{lin} B' = W'$, stąd $v \in W + W'$

4) $W + W' \subseteq \operatorname{lin}(B \cup B')$ - weźmy $a+b : a \in W, b \in W'$, a jest kombinacją liniową wektorów z W, b z W', stąd $a+b \in \operatorname{lin}(B \cup B')$

Z powyższych zawierań $\operatorname{lin}(W \cup W') = W + W'$. (b)

Stąd wprost wynika, że $W + W' = \operatorname{lin}(W \cup W') < V$ (a)

B' lnz

c) $B \cup B'$ lnz, bo B lnz, a każdy $v \in \mathrm{lin}(B' \setminus B)$ nie należy do $\mathrm{lin}\, B$, bo żaden wektor z $B' \setminus B \notin \mathrm{lin}\, B$

Zatem $B \cup B'$ jest bazą $\mathrm{lin}(B \cup B') = \mathrm{lin}(W \cup W')$

Trzeba jeszcze pokazać, że $B_0 = B \cap B'$. $B_0 \subseteq B$ z definicji B i $B_0 \subseteq W' \cap B$, bo należy do B i W'

Dodatkowo $B \cap B' \subseteq B_0$, bo $B \cap B' \subseteq W \cap W' = \mathrm{lin}\, B_0$, a $B \cap B'$ lnz. Teraz z zas. wł. i wyk.

$\dim(W + W') = |B \cup B'| = |B| + |B'| - |B \cap B'|$
$= |B| + |B'| - |B_0| = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')$.

Z.17 / Lista 2

Weźmy $V = \mathbb{R}[X]$ z bazą $B = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$.

a) Niech F jest określone na B tak:

$$\begin{cases} F(1) = 0 \\ F(x^n) = x^{n-1} \end{cases}$$

Ze względu na swoje zdefiniowanie na B F jest homomorfizmem, jest w V, więc jest endomorfizmem, jest epimorfizmem, bo dla każdego $P(x)$

$F(xP(x)) = P(X)$

F nie jest monomorfizmem, bo $F(1) = F(2) = 0$.

b) Niech $F(P(X)) = xP(X)$. F jest liniowe, bo

$F(\alpha P(X)) = x\alpha P(X) = \alpha x P(X) = \alpha F(P(X))$

$F(P(X) + R(X)) = x(P(X) + R(X)) = xP(X) + xR(X) = F(P(X)) + F(R(X))$

Stąd F jest endomorfizmem.

F jest monomorfizmem, bo $P \neq R \Rightarrow xP(x) \neq xR(X)$ ~~dla~~ (o ile P, R posiadają chociaż 1 miejsce zerowe, ale w p.p. $P = R = 0$).

F nie jest epimorfizmem, bo nie istnieje $P(X)$:

$F(P(X)) = 1$.

2.11 b) Teza nie jest prawdziwa.

Weźmy R^2 z bazą $(0,1)$ i $(1,0)$ i ~~układ~~ zbiór $A = \{(0,1), (1,1), (2,1)\}$. Zbiór tego jest lz, ale dla F:

$F((0,1)) = (0,1)$

$F((1,0)) = (0,0)$

Zachodzi

$F(A) = \{(0,1)\}$, który jest lnz.

2.11 c) Teza nie jest prawdziwa - weźmy F przekształcający każdy wektor w 0. Wówczas dla lnz układu ~~B~~ $v_1, v_2, \dots, v_n$ układ $F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)$ jest układem $0, 0, \dots, 0$, który jest lz.