Preliminaria

Zadanie 1. Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania różniczkowego:
a) $x(t) = \mathrm{tg}\, t, \quad x' = 1 + x^2,$ b) $x(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad tx' + x = \cos t.$
Zadanie 2. Znajdź rozwiązania stacjonarne poniższych równań, jeśli to możliwe, zbadaj ich charakter:
a) $y'(t) = ye^t,$ b) $y'(t) = (t-1)(y^2-1),$ c) $y'(t) = \log(y^2+1),$ d) $y'(t) = y^3+y^2-2y.$
Zadanie 3. Zbadaj zachowanie (granicę dla $t \to +\infty$) rozwiązań poniższych zagadnień (o ile się da):
a) $y'(t) = y^4e^t$, $y(0) = 1$, b) $y'(t) = y^4e^{-t}$, $y(0) = 1$, c) $y'(t) = y^4-1$, $y(0) = 2$, d) $y'(t) = y^4-1$, $y(0) = -2$, e) $y'(t) = e^{-y} - 1$, $y(0) = 1$,

Równania o zmiennych rozdzielonych

Zadanie 4. Znajdź rozwiązania ogólne następujących równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych:
a) $y' = e^{x+y},$ b) $y' = \sqrt{x}/y,$ c) $y' = \sqrt{y/x}.$
Zadanie 5. Znajdź rozwiązania ogólne następujących równań i naszkicuj ich wykresy dla różnych stałych C. Następnie znajdź rozwiązanie równania spełniające podany warunek początkowy: a) $y' = 2,\ y(0) = 2,$ b) $y' = y/x,\ y(1) = 5,$ c) $y' = -y^2e^x,\ y(0) = 1/2.$
Zadanie 6. Rozwiąż równania nie rozdzielając różniczek dy i dt (czyli całkując metodą "klasyczną"):
a) $y' = (1+t)(1+y),$ *b)* $y' = e^{t+y+3},$ *c)* $tyy' = \ln t,\ \ y(1) = 1.$
Zadanie 7. Równania postaci $dy/dt = f(y/t)$, gdzie f jest daną funkcją, nazywamy równaniem jednorodnym. Udowodnij, jeżeli y jest rozwiązaniem równania jednorodnego, to funkcja $v(t) = y(t)/t$ spełnia równanie o zmiennych rozdzielonych $t(dv/dt) + v = f(v)$.
Zadanie 8. Rozwiąż równania jednorodne: $2x+t-tx' = 0, \quad tx' = x-te^{x/t}, \quad tx' = x\cos\left(\log\frac{x}{t}\right).$
Zadanie 9. Dla danej rodziny krzywych znajdź trajektorie ortogonalne:
$y = Cx^2, \quad y = C\sin x, \quad y = Ce^x, \quad x^2+y^2 = Cx.$

Równania liniowe pierwszego rzędu

Zadanie 10. Znajdź całkę ogólną (tzn. rozwiązanie ogólne) równań liniowych mnożąc je przez odpowiedni czynnik całkujący: $x' + x\cos t = 0, \quad x' + t^2x = t^2, \quad x' + \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{1}{1+t^2}, \quad x' + x = te^t.$
Zadanie 11. Rozwiąż następujące zagadnienia początkowe bez znajdowania rozwiązania ogólnego:
$y' + \sqrt{1+t^2}y = 0, \quad y(0) = \sqrt{5}; \qquad y' + ty = 1 + t, \quad y(3/2) = 0.$
Zadanie 12. Udowodnij, że dla równania $x' + a(t)x = f(t)$, gdzie a i f są funkcjami ciągłymi, $a(t) \geqslant c > 0$, oraz $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, zachodzi relacja $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.
Zadanie 13. Udowodnij, że równanie Bernoulliego, tzn. równanie postaci: $x' + a(t)x = b(t)x^m$, $m \in \mathbb{R}$, sprowadza się przez zamianę zmiennych $z(t) = x(t)^{1-m}$ do równania liniowego.
Zadanie 14. Rozwiąż równania: $tx' + x = x^2\log t,\ x' = tx + t^3x^2.$
Zadanie 15. Równanie postaci $x' + a(t)x = b(t)x^2 + f(t)$, gdzie a, b, f są danymi funkcjami, nazywa się równaniem Riccatiego. Nie istnieje ogólny sposób całkowania tego równania. Udowodnij, że jeżeli znamy jedno rozwiązanie $x_1(t)$, to funkcja $u(t) = x(t) - x_1(t)$ spełnia równanie Bernoulliego.
Zadanie 16. Znajdź rozwiązania szczególne następujących równań Riccatiego, zredukuj je do równań typu Bernoulliego i scałkuj: $t^2x' + tx + t^2x^2 = 4, \quad x' + 2xe^t - x^2 = e^{2t} + e^t.$

Równania zupełne

Zadanie 17. W podanych równaniach dobierz stałą a tak, aby było ono zupełne, a następnie rozwiąż je: $t + ye^{2ty} + ate^{2ty}y' = 0$, $\quad \frac{1}{t^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{(at+1)}{y^3}y' = 0$.

Zadanie 18. Znajdź wszystkie funkcje $f(t)$, dla których równanie $y^2 \sin t + yf(t)(dy/dt) = 0$ jest zupełne. Rozwiąż równanie dla tych funkcji f.

Zadanie 19. Znajdź współczynnik $f = f(t)$ w równaniu $f(t)x' + t^2 + x = 0$, jeżeli wiadomo, że ma ono czynnik całkujący postaci $u(t) = t$.

Zadanie 20. Równanie liniowe niejednorodne $(dy/dt) + a(t)y = b(t)$ nie jest zupełne. Znajdź czynnik całkujący.

Zadanie 21. Rozwiąż równania w postaci różniczek zupełnych:
$2tx\,dt + (t^2 - x^2)\,dx = 0$, $\quad e^{-x}\,dt - (2x + te^{-x})\,dx = 0$.

Zadanie 22. Sprawdź, że podana funkcja $\mu(x, y)$ jest czynnikiem całkującym danego równania i rozwiąż równanie:
a) $\quad 6xy\,dx + (4y + 9x^2)\,dy = 0$, $\quad \mu(x, y) = y^2$, b) $\quad -y^2\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0$, $\quad \mu(x, y) = 1/(x^2y)$,
c) $\quad y(x + y + 1)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0$, $\quad \mu(x, y) = e^x$

Zadanie 23. Równanie różniczkowe może mieć więcej niż jeden czynnik całkujący. Udowodnij, że $\mu_1(x, y) = 1/(xy)$, $\mu_2(x, y) = 1/y^2$, $\mu_3(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ są czynnikami całkującymi równania $y\,dx - x\,dy = 0$. Uzasadnij, że otrzymane przy pomocy tych czynników całkujących rozwiązania są równoważne.

Zadanie 24. Scałkuj równania metodą czynnika całkującego:
$\left(\frac{x}{y} + 1\right) dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right) dy = 0$, $(x^2 + y)dx - xdy = 0$, $(y + x^2)dy + (x - xy)dx = 0$.

Zadanie 25. Uzasadnij, że równanie o zmiennych rozdzielonych $M(t) + N(y)(dy/dt) = 0$ jest równaniem zupełnym.

Zadanie 26. Uzasadnij, że jeżeli $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$, to wyrażenie $M(t, y) - \int(\partial N(t, y)/\partial t)dy$ nie zależy od od y (tzn. zależy tylko od t).

Andrzej Raczyński