Maurycy Borkowski

26.03.2020

5/5 (10 punktów)

Obliczmy $\int e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}dx$:

$$\int e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}dx = \int e^t t2tdt = 2\int e^t t^2 dt = 2t^2e^t - 2\int 2te^t = 2t^2e^t - 4\left(te^t - \int e^t dt\right)$$
$$= 2t^2e^t - 4\left(te^t - e^t\right) + C = 2xe^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C$$

Dowód. Podstawmy: $u = 2x^2, du = 4xdx$

$$\int_0^1 4x^2e^{2x^2}dx$$
$$\int_0^2 2ue^u \frac{du}{\sqrt{8u}} = \frac{2}{\sqrt{8}}\left[\int_0^2 \sqrt{u}e^u du\right]$$

Korzystamy z $x \leqslant \sqrt{x}$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$ oraz $x \geqslant \sqrt{x}$ dla $x \geqslant 1$:

$$\frac{2}{\sqrt{8}}\left[\int_0^2 \sqrt{u}e^u du\right] \geqslant \frac{2}{\sqrt{8}}\left[\int_0^1 ue^u du + \int_1^2 \sqrt{u}e^{\sqrt{u}} du\right]$$

Łatwo policzyć $\int_0^1 ue^u du = 1$:

$$\frac{2}{\sqrt{8}}\left[1 + \int_1^2 \sqrt{u}e^{\sqrt{u}} du\right]$$

Z górnego mamy, że wartość szukana to:

$$\frac{2}{\sqrt{8}}[1 + e^{\sqrt{2}}4(2-\sqrt{2}) - 2e]$$

Dalej szacując e:

$$\int_0^1 4x^2e^{2x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{8}}[1+e^{\sqrt{2}}4(2-\sqrt{2})-2e] > \frac{2}{\sqrt{8}}[1+(2.7)^{\sqrt{2}}4(2-\sqrt{2})-2(2.7)] > (1.8)^2 > (e-1)^2$$

$\square$