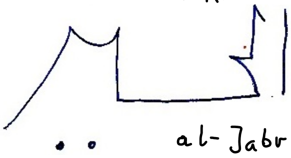
ALGEBRA



al-Jabr (przenoszenie)

$$x+3=4 \rightsquigarrow x=4-3=1$$

Historycznie: konkretne równania stopnia 1, 2

Potem: równania ogólne np

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta=b^2-4ac$$

Pojawiają się działania algebraiczne $(+,\cdot,-,:,\sqrt{\ })$ na <u>literach</u> (a,b,c).

Algebra obecnie zajmuje się działaniami na dowolnych zbiorach (o których można myśleć jak o zbiorach liter).

Niech teraz A będzie dowolnym zbiorem (np. $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$). $\mathbb{N},\mathbb{C}$

Chcemy zdefiniować pojęcie działania na zbiorze A.

Popatrzmy najpierw na bardzo naturalny przykład: działanie dodawania na $\mathbb{N}$.

Bierzemy dwie liczby np. $2, 3\in\mathbb{N}$

i dostajemy sumę $2+3=5\in\mathbb{N}$

Czyli to działanie jest funkcją ze zbioru par: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ w zbiór $\mathbb{N}$.

$$+:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$$
$$(a,b)\longmapsto a+b$$

(nie piszemy $\cancel{+((a,b))}$)

Def.

<u>Działaniem</u> $*$ na zbiorze A nazywamy dowolną funkcję

$$*: A\times A\longrightarrow A.$$

Konwencja

Dla $a,a'\in A$ piszemy $a*a'$ zamiast $*((a,a'))$.

Na razie nie ma żadnych dodatkowych założeń o $*$ i działanie może być „dziwne".

Przykłady

(1) Na zbiorach $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ mamy zwykłe działania dodawania $(+)$ i mnożenia $(\cdot)$.

(2) Mamy też mnóstwo innych „dziwnych" działań

np. $a*b:=(2a\cdot b)+5a^2$ na (np.) $\mathbb{R}$

(3) Teraz ważny ogólny przykład. Niech X będzie dowolnym zbiorem i $\underbrace{X^X}_{A}$ oznacza $\boxed{\text{zbiór funkcji } X\to X}$.

Dla $f,g\in X^X$ $(f,g: X\longrightarrow X)$ mamy

złożenie $f\circ g: X\to X$ $\quad f\circ g\in X^X$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$. Czyli $\circ$ to działanie na X^X.

$\circ$ – złożenie funkcji

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

(4) Niech $\underbrace{P(X)}_{A}$ będzie zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru X. Wtedy przekrój $(\cap)$ i suma $(\cup)$ są działaniami na zbiorze $P(X)$.

(5) Rozważmy zbiór $\underbrace{\mathbb{R}\cup\{\infty\}}_{A}$, gdzie ∞ to (nowy) formalny symbol.

Definiujemy działanie $+$ na A

$\forall a,b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\} \quad a+\infty=\infty=\infty+a$

$\forall a,b\in\mathbb{R} \quad a+b \longleftarrow$ dodawanie z $\mathbb{R}$.