Przykłady obliczeń na permutacjach

(1) Weźmy $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

to jest zapis w postaci tabularycznej lub dwuwierszowej

(2) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1,2,3) \circ (4,5)$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (3,5)$

zapis w postaci iloczynu cykli rozłącznych

(3) Mnożenie (składanie) permutacji

(i) w postaci tabularycznej $4 \xmapsto{\sigma_1} 5 \xmapsto{\sigma_2} 3$, $5 \xmapsto{\sigma_1} 4 \xmapsto{\sigma_2} 4$

$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $1 \xmapsto{\sigma_1} 2 \xmapsto{\sigma_2} 1$, $2 \xmapsto{\sigma_1} 3 \xmapsto{\sigma_2} 5$, $3 \xmapsto{\sigma_1} 1 \xmapsto{\sigma_2} 2$

(ii) jako iloczyn cykli rozłącznych

$\sigma_2 \circ \sigma_1 = (1,2)(3,5)(1,2,3)(4,5) = (2,5,4,3)$

(4) Permutacje odwrotne

(i) w postaci tabularycznej

$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}}_{= (1,3,2)(4,5)}$

odwracamy   przestawiamy

(ii) iloczyn cykli rozłącznych   ogólnie $(i_1, i_2, \ldots, i_k)^{-1} = (i_k, i_{k-1}, \ldots, i_2, i_1)$

$\sigma_1^{-1} = ((1,2,3)(4,5))^{-1} \underset{\text{cykli rozł.}}{\overset{\text{przemien.}}{=}} (1,2,3)^{-1}(4,5)^{-1} = (3,2,1)(5,4) = (1,3,2)(4,5)$ ok

(5) Podnoszenie do potęg

Zdecydowanie łatwiej podnosić do potęg przy zapisie w postaci iloczynu cykli rozłącznych np.:

$\sigma_1^{10} = ((1,2,3)(4,5))^{10} = (1,2,3)^{10}(4,5)^{10} = \underline{(1,2,3)}$

przemienne!

Zauważmy, że: transpozycja (cykl długości 2) ma rząd 2 i ogólnie długości k ma rząd k.

TW.

Każda permutacja $\underbrace{}_{\text{różna od id}}$ ma przedstawienie w postaci iloczynu cykli rozłącznych

Idea dowodu   Weźmy $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq id$ i dowolny $i \in X_\sigma$

X_σ: skończony! Weźmy cykl:

$\tau := (i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^{k-1}(i))$, gdzie

$k := \min\{n > 0 \mid \sigma^n(i) = i\}$

Jeśli $\sigma = \tau$ to OK. Jeśli nie, to bierzemy $j \in X_\sigma \setminus X_\tau$ i tworzymy cykl $\tau' := (j, \sigma(j), \ldots, \sigma^{l-1}(j))$ rozłączny z τ. Jeśli $\sigma = \tau \circ \tau'$ to OK. Jeśli nie to kontynuujemy... ∎

TW.

Każdy cykl rozkłada się na iloczyn transpozycji (nie są one rozłączne!)

Dowód

Np. $(1,2,3,4,5) = (1,2)(2,3)(3,4)(4,5)$.

Ogólnie $(i_1, \ldots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \ldots (i_{k-1}, i_k)$ ∎

Wniosek (z dwóch ostatnich twierdzeń).

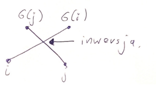
Każda permutacja rozkłada się na iloczyn transpozycji.

Ostatnie pojęcia dotyczące permutacji.

Def

Niech $\sigma \in S_n$ oraz $1 \leq i < j \leq n$

(1) Parę (i,j) nazwiemy inwersją σ, gdy $\sigma(i) > \sigma(j)$.



(2) $sgn(\sigma) = (-1)^{\text{liczba inwersji } \sigma}$ ← znak permutacji σ

(3) Mówimy, że σ jest parzysta, gdy $sgn(\sigma) = 1$ (tzn. σ ma parzyście wiele inwersji), i że σ jest nieparzysta, gdy $sgn(\sigma) = -1$ (tzn. σ ma nieparzyście wiele inwersji).

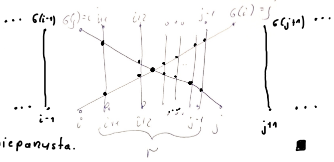
Fakt

σ transpozycja $\Rightarrow$ σ jest nieparzysta

Dowód

$\sigma = (i,j)$ $i < j$

σ ma $\underbrace{2r+1}_{\text{nieparzyście wiele}}$ inwersji



czyli $\sigma = (i,j)$: nieparzysta. ∎

TW. (bez dowodu)

$\forall \sigma, \tau$ $sgn(\sigma \circ \tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$.

TW.

σ jest parzysta $\Longleftrightarrow$ w rozkładzie σ na transpozycje jest parzyście wiele transpozycji

Dowód

Z Faktu i poprzedniego TW. ∎

Wniosek

- Cykl długości parzystej jest permutacją nieparzystą.
- —— " —— nieparzystej —————— " —— parzystą.

Uwaga

(1) Rozkład permutacji na cykle rozłączne jest jednoznaczny z dokładnością do permutacji czynników (np. $(1,2)(3,4) = (3,4)(1,2)$)

(2) Rozkład permutacji na transpozycje jest bardzo niejednoznaczny, ale jednoznaczna jest tylko parzystość ilości transpozycji w rozkładzie (np. $(1,2) = (1,2)(2,3)(2,3)$)