Algebra L9 (suma 14 punktów)

Maurycy Borkowski

13.05.2020

zad. 4 (1 punkt)

I

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = t - 2$$

II

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{\mathcal{B}}(t) = t^3 - 4 \cdot t^2 + 5$$

Rozpisałem na kartce potęgi macierzy i zgadłem wielomiany.

zad. 6 (1 punkt)

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[X, Z], Y] = 0$$

$(XY-YX)Z-Z(XY-YX)+(YZ-ZY)X-X(YZ-ZY)+(XZ-ZX)Y-Y(XZ-ZX) =$

Z łączności dodawania:

$XYZ-YXZ-ZXY+ZYX+YZX-ZYX-XYZ+XZY+XZY-ZXY-YXZ+YZX = 0$

zad. 7 (2 punkty)

$$[M_u, M_v] = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u_2v_1 - u_1v_2 & u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 & 0 & u_3v_2 - u_2v_3 \\ u_1v_3 - u_3v_1 & u_2v_3 - u_3v_2 & 0 \end{pmatrix} = M_{u\times v}$$

Skoro dla dowolnych wektorów możemy zapisać ich iloczyn wektorowy w postaci komutatora macierzowego a z **zad. 6** wiemy, że on spełnia tożsamość Jacobiego to iloczyn wektorowy też ją spełnia.

zad. 8 (2 punkty)

I

$$m_D^B(F \circ G) = m_D^C(F)m_C^B(G)$$

Uzasadnienie:

- Prawa: wektor zapisany w bazie B przenosimy przekształceniem G jest zapisany w bazie C, mamy wektor w bazie C następnie przenosimy go przekształceniem F jest zapisany w bazie D.
- Lewa: wektor zapisany w bazie B przenosimy przekształceniem G jest zapisany w pewnej bazie teraz na niego nakładamy przekształcenie F i jest zapisany w bazie B.

II

$m_{B'}^B(Id_U)$ zgodnie z przyjętym (na wykładzie) oznaczeniem jest macierzą przejścia z bazy B do B'

zad. 9 (2 punkty)

$\Rightarrow$

Skoro F jest izomorfizmem to istnieje $F^{-1} : W \to V$:

$$E = m_C^C(F \circ F^{-1}) = m_D^C(F)m_C^D(F^{-1})$$

Znaleźliśmy macierz odwrotną, zatem szukana macierz jest odwracalna.

$\Leftarrow$

Oznaczmy macierz odwrotną jako G.

$$E = m_D^C(F)G$$

Wnioskujemy że G jest macierzą pewnego przekształcenia liniowego, które bierze wektory z W w bazie D i *wyrzuca* wektory z V z bazy C. Dalej:

$$E = m_D^C(F)m_C^D(H) = m_C^C(F \circ H) = m_C^C(Id)$$

Więc: $F \circ H = Id$ z tego F jest izomorfizmem.

zad. 10 (2 punkty)

I

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 6t + 5$$

Rozwiązuję układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + bc - 6a + 5 = 0 \\ d^2 + bc - 6d + 5 = 0 \\ ab + bd - 6b = 0 \\ ac + cd - 6c = 0 \end{cases}$$

Wnioskuje $a = d = 3$, wtedy b, c prawie dowolne:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

II

$$\mu_{\mathcal{B}}(t) = t^2 - 4t + 4$$

Rozwiązuję układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + bc - 4a + 4 = 0 \\ d^2 + bc - 4d + 4 = 0 \\ ab + bd - 4b = 0 \\ ac + cd - 4c = 0 \end{cases}$$

Wnioskuje $a = d = 2$, wtedy b, c prawie dowolne:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

zad. 12 (2 punkty)

Najogólnieszą postacią elementu z $K[A]$ jest:

$$a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + a_2 A^{m-2} + \cdots + a_{m-1} A + a_m E$$

Jak widać, żeby stworzyć go wystarczy baza: A, E. Oczywiste, że $\{A, E\} \leqslant 2$

zad. 13 (2 punkty)

Skoro $V = ker\mathcal{P} \oplus Im\mathcal{P}$ to każdy wektor z V zapisujemy jednoznacznie:
$v = u + w$ gdzie $u \in ker\mathcal{P}$ oraz $w \in Im\mathcal{P}$
Z liniowości $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}v = \mathcal{P}u + \mathcal{P}w = \mathcal{P}w$$

A to już jest definicja rzutu (z szarego z Kostrikina).