zad 8 ✓

Macierz przekształcenia

• $B_S = -(D+L)^{-1}U$ *dla każdego $i$ $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$

Rozpatrujemy macierz (równą $B_S$): $B_S = I - (D+L)^{-1}A$

• Pokażmy, że promień spektralny jest $\leq 1$, weźmy $\lambda$, w wart. własne wł.

$$(I-(D+L)^{-1}A)x = \lambda x$$

$$\Downarrow \; A = U+D+L$$

$$-(D+L)^{-1}Ux = \lambda x$$

$$-Ux = \lambda(D+L)x$$

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda \sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j$$

$i$-ty wiersz w nim $|x_i|=1$, $|x_j| \leq 1$

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}|$$

$$\Downarrow$$

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|} < 1$$

$$\lambda a_{ii}x_i = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j - \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j$$

$$|\lambda||a_{ii}| \leq \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|$$

$$|\lambda| \leq \frac{\sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|} < 1$$ wiem to z *