Przykłady $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ $\mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, \dots\}$

(1) Popatrzmy najpierw na najbardziej naturalne działania dodawania i mnożenia na $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Na każdym z tych zbiorów $+, \cdot$ są łączne i przemienne. Poza tym 0 jest zawsze elem. neutralnym $+$ i 1 jest zawsze elem. neutralnym $\cdot$.

Elementy odwrotne? Np. 1 NIE ma elementu odwrotnego w $(\mathbb{N}, +)$. Czyli $(\mathbb{N}, +)$ NIE są grupą.

łatwo zauważyć: $\boxed{(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +) : \text{grupy przemienne.}}$

0 nie ma elem. odwrotnego względem $\cdot$, czyli $(\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{R}, \cdot), (\mathbb{C}, \cdot)$ NIE są grupami.

(2) Rozważmy teraz „dziwne" działanie na $\mathbb{R}$
$$a * b := a + b^2.$$
Dziwne działania zwykle nie są łączne.

Aby pokazać, że $*$ NIE jest łączne należy wskazać konkretne elementy $a, b, c \in \mathbb{R}$, takie że
$(a * b) * c \neq a * (b * c)$. $\boxed{a * b = a + b^2}$

Zgadujemy np. $a = 0, b = 0, c = 2$. Sprawdzamy:
$$(0 * 0) * 2 = (0 + 0^2) * 2 = 0 * 2 = 0 + 2^2 = 4$$
$$0 * (0 * 2) = 0 * (0 + 2^2) = 0 * 4 = 0 + 4^2 = 16$$
(przy czym $4 \neq 16$)

Czyli faktycznie dział. $*$ nie jest łączne.

(3) Wiemy, że składanie funkcji na zbiorze X^X jest łączne i ma element neutralny id_X. Wiemy też, że jeśli $f \in X^X$ nie jest bijekcją, to f nie ma elementu ~~neutralnego~~ odwrotnego. Rozważmy:
$$S_X := \{f \in X^X \mid f \text{ jest bijekcją}\}.$$

Składanie bijekcji daje bijekcje, czyli $\circ$ wciąż jest działaniem na zbiorze S_X. (składanie funkcji)

To działanie jest wciąż łączne na S_X.

$id_X \in S_X$ i wciąż jest elem. neutralnym $\circ$ na S_X.

$\forall f \in S_X$ $f^{-1} \in S_X$ elem. odwrotny do f. Stąd $(S_X, \circ)$: grupa

(4) Rozważmy (niedawno zdefiniowane) działanie $+$ na zbiorze $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Udowodnimy, że jest ono łączne.

Weźmy $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Jeśli $a = \infty$ lub $b = \infty$ lub $c = \infty$, to mamy:
$$(a + b) + c = \infty = a + (b + c).$$

Jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}$ to oczywiście: $(a+b)+c = a + (b + c)$ ∎

Łatwo zauważyć, że 0 to wciąż elem. neutralny. Ale ∞ nie ma elementu odwrotnego, bo $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ $a + \infty = \infty \neq 0$. Czyli $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, +)$ NIE jest grupą.

(5) dwa działania $\bullet$ i $*$ na $\{0, 1\}$, które były zdefiniowane przez tabelki. Mamy:
$$(0 \bullet 0) \bullet 1 = 1 \bullet 1 = 0$$
$$0 \bullet (0 \bullet 1) = 0 \bullet 0 = 1$$
(przy czym $0 \neq 1$) $\bullet$ nie jest łączne.

Rozważając przypadki można sprawdzić, że $*$ na $\{0, 1\}$ jest łączne, 0 jest elementem neutralnym, $0 * 0 = 0$, $1 * 1 = 0$ czyli każdy element ma element odwrotny. Stąd $(\{0, 1\}, *)$ jest grupą przemienną.

Tw.
Niech $f : A \to B$ będzie bijekcją, $*$ będzie działaniem na A i $\cdot$ będzie działaniem na B indukowanym przez działanie $*$ poprzez funkcję f.
Jeśli działanie $*$ jest łączne, to działanie $\cdot$ też jest łączne.

Dowód $x, y, z \in B$. Wtedy:
$$(x \cdot y) \cdot z = \underbrace{f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y))}_{a} \cdot z = f\big(\underbrace{f^{-1}(f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)))}_{\text{kasują się}} * f^{-1}(z)\big) =$$
$$= f\big((f^{-1}(x) * f^{-1}(y)) * f^{-1}(z)\big) \overset{\text{łączność } *}{=\!=} \underbrace{f\big(f^{-1}(x) * (f^{-1}(y) * f^{-1}(z))\big)}_{\substack{\| \text{ jak poprzednio} \\ x \cdot (y \cdot z)}}$$ ∎

Uwaga
Analogiczne twierdzenia są prawdziwe dla przemienności, elementów neutralnych i ogólnie każdej algebraicznej własności działań.

W szczególności: (Lista 1 ZAD 4)
Jeśli $A, B, *, \cdot$ j.w. oraz $(A, *)$ jest grupą, $(B, \cdot)$ jest też grupą.