Zadanie 3.3. *Funkcja $f(x)$ jest dodatnia i ciągła dla $x \geqslant 0$. Pokazać, że $g(x) = (\int_0^x f(t)dt)^{-1} \int_0^x tf(t)dt$ jest rosnąca.*

Dowód. Weźmy dowolnego $x \geqslant 0$ (dla $x \in R$ twierdzenie nie zachodzi). Wtedy pochodna g w punkcie x wynosi:

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} = \frac{(\frac{d}{dx} \int_0^x tf(t)dt) \int_0^x f(t)dt - (\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt) \int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}$$

Mianownik jest dodatni oraz większy od zera, skupmy się na liczniku. Licząc pochodne i stosując lemat dostajemy:

$$xf(x) \int_0^x f(t)dt - f(x) \int_0^x tf(t)dt = f(x)[x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt] =$$
$$f(x) \int_0^x [xf(t) - tf(t)]dt = f(x) \int_0^x f(t)(x-t)dt > 0$$

gdyż $f(x) > 0, f(t)(x-t) > 0$ dla $t \in [0, x]$. $\square$