Maurycy Borkowski

12.06.2020

SUMA: 11 punktów

zad. 1 (1 punkt)

Posłuchajcie, bracia miła,
rzecz wam może i banalna
usłyszycie mój zamętek,
macierz zwie się ortogonalna

Pożałuj mię, stary, młody,
boć mi przyszły krwawe gody.
nazwa mogła być dość konwencjonalna
po prostu logicznie . . . ortonormalna

zad. 4 (1 punkt)

Dowód. Dla dowolnego wektora (x, y, z) z płaszczyzny i dowolnego (x', y', z') z $Lin([a, b, c])$:

$$< (x, y, z),(x', y', z') >= xx' + yy' + zz'$$

Z def. przestrzenii liniowej i założeń:

$$< (x, y, z),(x', y', z') >= xx'+yy'+zz' = x\cdot ka+y\cdot kb+z\cdot kc = k\cdot(ax+by+cz) = k\cdot 0 = 0$$

Z dowolności wyboru (x, y, z) i (x', y', z'):
$Lin([a, b, c]) = W^{\perp}$ $\square$

zad. 5 (1 punkt)

Dowód. Z założeń:

$$||x|| = ||y|| = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$< x + y, x - y >= x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 - y_3^2$$

Z pierwszego równania:

$$||x|| - ||y|| = x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 - y_3^2 = 0$$

Zauważamy w powyżej sumie szukaną tożsamość:

$$< x + y, x - y >= ||x|| - ||y|| = 0$$

$\square$

zad. 7 (2 punkty)

$U, W < V$:

II

Korzystamy z własności: $X \subset Y \implies Y^\perp \subset X^\perp$:

$$(U + W)^\perp \subset U^\perp$$

Analogicznie pokazujemy:

$$(U + W)^\perp \subset W^\perp$$

Z powyższych inkluzji

$$(U + W)^\perp \subset U^\perp \cap W^\perp$$

Inkluzja w drugą stronę jest w trywialna: wektory z przekroju są prostopadłymi do pewnego wektora z U i W, ten wektor też znajduję się w $U + W$.

I

Z **II**

$$U^{\perp^\perp} \cap W^{\perp^\perp} = (U^\perp + W^\perp)^\perp$$

Dalej:

$$(U^{\perp^\perp} \cap W^{\perp^\perp})^\perp = ((U^\perp + W^\perp)^\perp)^\perp$$

Korzystając z tw. $V^{\perp^\perp} = V$:

$$(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$$

zad. 8 (2 punkty)

I

Dla dowolnego v:

$$P_w^2(v) = P_w((v|e_1)e_1 + \cdots + (v|e_k)e_k)$$

Z rodzielności iloczynu skalarnego względem dodawania:

$$P_w^2(v) = P_w((v|e_1)e_1) + \cdots + P_w((v|e_k)e_k))$$

Baza jest ortonormalna więc:

$$P_w^2(v) = (v|e_1)e_1 + \cdots + (v|e_k)e_k$$

Zgodnie z definicją:

$$P_w^2(v) = (v|e_1)e_1 + \cdots + (v|e_k)e_k = P_w(v)$$

II

P_w zgodnie z definicją to jest pewna kombinacja liniowa wektorów e_j czyli wektory $x = P_w(y)$ są kombinacją liniową wektorów bazy W czyli należą do przestrzeni liniowej rozpinanej przez tą bazę czyli do W.

zad. 8 (2 punkty)

Dowód. Oznaczmy jako U przestrzeń dopełniającą $U \oplus W = V$.
Niech $v = v_u + v_w$ z odpowiednich podprzestrzeni liniowych.
Z definicji rzutu: $P_w(v) = v_w \neq w$:

$$||v - w|| = ||v_u + v_w - w|| = ||v_u + X||$$

Gdzie X jest pewnym niezerowym wektorym. Dalej:

$$||v-w|| = ||v_u+X|| > ||v_u|| = ||v_u+v_w-v_w|| = ||v_u+v_w-P_w(v)|| = ||v-P_w(v)||$$

□

zad. 16 (2 punkty)

Dowód. Korzystamy z: macierz jest ortogonalna wtw. gdy $AA^T = I$.
A,B dowolne macierze ortogonalne:

$$(AB)(AB)^T = (AB)B^TA^T = ABB^TA^T = AIA^T = I$$

□