Niech Σ będzie skończonym alfabetem i niech $L \subseteq \Sigma^*$. Jak pamiętamy, relacja $\sim_L$ z *Twierdzenia o indeksie* zdefiniowana jest, na zbiorze Σ^* jako: $w \sim_L v$ wtedy i tylko wtedy gdy $\forall x \in \Sigma^* \ (wx \in L \Leftrightarrow vx \in L)$. Podobnie możemy zdefiniować relację równoważności $\sim_L^{inf}$. Mianowicie $w \sim_L^{inf} v$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\forall x, y \in \Sigma^* \ (xwy \in L \Leftrightarrow xvy \in L)$.

Niech i_L (od słowa *indeks*) będzie równe $|\Sigma^*/\sim_L|$ (czyli i_L to liczba klas abstrakcji na jakie $\sim_L$ dzieli Σ^*). Podobnie, niech $i_L^{inf} = |\Sigma^*/\sim_L^{inf}|$.

Kolejne trzy zadania dotyczą wzajemnych relacji między liczbami i_L i i_L^{inf}.

Zadanie 8. Udowodnij, że jeśli jedna z liczb i_L, i_L^{inf} jest skończona, to obie są skończone (z Twierdzenia o Indeksie wiemy, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy gdy L jest regularny). Dokładniej mówiąc:

a. udowodnij, że $i_L \leqslant i_L^{inf}$;

b. udowodnij, że $i_L^{inf} \leqslant i_L^{i_L}$.

Zadanie 9. (za 2 punkty).
W zadaniu tym należy pokazać, że szacowanie z punktu **b** poprzedniego zadania nie może być poprawione. Dokładniej mówiąc:
a. Udowodnij, że jeśli $\Sigma = \{a, b, c\}$ to dla każdego skończonego zbioru Q istnieje minimalny DFA A, o zbiorze stanów Q i funkcji przejścia δ, taki że dla każdej funkcji $f : Q \longrightarrow Q$ istnieje słowo w dla którego dla każdego $q \in Q$ zachodzi: $\delta(q, w) = f(q)$. Przez automat minimalny rozumiemy tu taki, w którym każdy stan jest osiągalny ze stanu początkowego, i w którym dla każdych dwóch stanów q, q' istnieje słowo w takie że dokładnie jeden ze stanów $\delta(q, w)$, $\delta(q', w)$ jest akceptujący.
b. Korzystając z tezy punktu **a.** udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje język L taki, że $i_L \leqslant n$ zaś $n^n \leqslant i_L^{inf}$.

Zadanie 10. Pokaż, że jeśli $|\Sigma| = 1$ to $i_L^{inf} = i_L$.

Zadanie 11. Pokaż, że dla każdego n istnieje język $L_n \subseteq \{a, b, \#\}^*$, którego wszystkie słowa mają długość $2n$, i taki, że najmniejszy rozstrzygający go deterministyczny automat skończony ma przynajmniej 2^n stanów.

Zadanie 12. Pokaż, że stała z lematu o pompowaniu dla języka regularnego może być wykładniczo mniejsza od indeksu tego języka. Dokładniej mówiąc, pokaż, że istnieje wielomian p oraz ciąg języków $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ taki, że dla każdego n najmniejszy automat rozstrzygający L_n ma przynajmniej 2^n stanów ale liczba $p(n)$ może być przyjęta jako stała z lematu o pompowaniu dla języka L_n. *Wskazówka. Nie bez powodu najpierw jest poprzednie zadanie a teraz jest to.*

5 Niedeterministyczne Automaty Skończone

Zadanie 20. Skonstruuj niedeterministyczny automat skończony rozpoznający język tych słów nad $\{0,1\}^*$ które, jako liczba w systemie dwójkowym, dzielą się przez 5, przy czym liczba jest wczytywana
a) począwszy od najbardziej znaczącego bitu,
b) począwszy od najmniej znaczącego bitu.

Zadanie 21. Udowodnij, że jeśli dla pewnego języka L istnieje rozpoznający go $NDFA$, to istnieje również $NDFA$ rozpoznający język $L^R = \{w : w^R \in L\}$

Zadanie 22. Wiadomo, że L jest językiem regularnym. Pokaż, że w takim razie język $\{w : \exists n \in \mathbb{N}\ w^n \in L\}$ jest też językiem regularnym. Przez w^n rozumiemy tu słowo w skonkatenowane ze sobą n razy.

Zadanie 23. Załóżmy, że L jest pewnym językiem regularnym. Czy język $L/2 = \{w : \exists v\ vw \in L\ \wedge |v| = |w|\}$ jest regularny?

Zadanie 24. Załóżmy, że $L \subseteq \{0,1\}^*$ jest regularny. Czy wynika z tego, że język

$$\sqrt{L} = \{w \in \{0,1\}^* : \ \exists x \in \{0,1\}^*\ \exists y \in L\ \ wx = y\ \wedge\ |y| = |w|^2\}$$

jest regularny?

Zadanie 25. Minimalny DFA rozpoznający język L ma zawsze tyle samo stanów co minimalny DFA rozpoznający dopełnienie L. Stwierdzenie to przestaje być prawdziwe, jeśli rozważamy automaty niedeterministyczne. Udowodnij, że istnieje język L, który daje się rozpoznać za pomocą $NDFA$ o mniej niż 20 stanach, ale którego dopełnienie nie daje się rozpoznać żadnym $NDFA$ o mniej niż 200 stanach. *Wskazówka: wystarczy rozważyć alfabet jednoelementowy.*

Niech Σ będzie skończonym alfabetem i niech $L \subseteq \Sigma^*$. Jak pamiętamy, relacja $\sim_L$ z *Twierdzenia o indeksie* zdefiniowana jest, na zbiorze Σ^* jako: $w \sim_L v$ wtedy i tylko wtedy gdy $\forall x \in \Sigma^* \ (wx \in L \Leftrightarrow vx \in L)$. Podobnie możemy zdefiniować relację równoważności $\sim_L^{inf}$. Mianowicie $w \sim_L^{inf} v$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\forall x, y \in \Sigma^* \ (xwy \in L \Leftrightarrow xvy \in L)$.

Niech i_L (od słowa *indeks*) będzie równe $|\Sigma^*/\sim_L|$ (czyli i_L to liczba klas abstrakcji na jakie $\sim_L$ dzieli Σ^*). Podobnie, niech $i_L^{inf} = |\Sigma^*/\sim_L^{inf}|$.

Kolejne trzy zadania dotyczą wzajemnych relacji między liczbami i_L i i_L^{inf}.

Zadanie 8. Udowodnij, że jeśli jedna z liczb i_L, i_L^{inf} jest skończona, to obie są skończone (z Twierdzenia o Indeksie wiemy, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy gdy L jest regularny). Dokładniej mówiąc:

a. udowodnij, że $i_L \leqslant i_L^{inf}$;

b. udowodnij, że $i_L^{inf} \leqslant i_L^{i_L}$.

$w \sim_L v \iff \forall_x \ (wx \in L \iff vx \in L)$

$w \sim_L^{inf} v \iff \forall_{x,y} \ (xwy \in L \iff xvy \in L)$

a) $i_L \leqslant i_L^{inf}$

Zauważmy, że $w \sim_L^{inf} v \Rightarrow w \sim_L v$

(bo dla $x = \varepsilon$ mamy $(\forall_y \ \varepsilon wy \in L \iff \varepsilon vy \in L) \iff (\forall_y \ wy \in L \iff vy \in L)$)

Zatem $i_L^{inf} \geqslant i_L$

b) $i_L^{inf} \leqslant i_L^{i_L}$

(z zał. że i_L^{inf} lub i_L jest skończona i a)

wiemy, że istnieje DFA rozpoznający L t.że $|Q| = i_L$)

Niech $f : \Sigma^* \to Q^{i_L}$

$$f(w) = \langle \hat{\delta}(q_0, w), \hat{\delta}(q_1, w), \dots, \hat{\delta}(q_{i_L - 1}, w) \rangle$$

Definiujemy $w \sim_f v \iff f(w) = f(v)$

Pokażemy, że $w \sim_f v \Rightarrow w \sim_L^{inf} v$

Weźmy dowolne $x, y \in \Sigma^*$.

Wtedy $\hat{\delta}(q_0, xw) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), w) \overset{\text{zał.}}{=} \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), v) = \hat{\delta}(q_0, xv)$ oraz $\hat{\delta}(q_0, xwy) = \hat{\delta}(q_0, xvy)$

Co daje $\forall_{x,y}\ (xwy \in L \Leftrightarrow xvy \in L)$

Zatem $w \sim_L^{inf} v$

Stąd $|\Sigma^*/_{\sim_L^{inf}}| \leqslant |\Sigma^*/_{\sim_f}| \leqslant i_L^{\,i_L}$

Czyli

$$i_L \leqslant i_L^{inf} \leqslant i_L^{\,i_L} \quad \square$$

Zadanie 10. Pokaż, że jeśli $|\Sigma| = 1$ to $i_L^{inf} = i_L$.

Analogicznie jak w zad. 8 mamy

$i_L \leqslant i_L^{inf}$

Wystarczy pokazać $i_L^{inf} \leqslant i_L$

Weźmy w, v t.że $w \not\sim_L^{inf} v$.

Wtedy bso. istnieją x, y t.że $xwy \in L$ i $xvy \notin L$

Skoro $\Sigma = \{0\}$, to $x = 0^k$, $y = 0^l$, $w = 0^n$, $v = 0^m$

Czyli $xwy = 0^{k+n+l}$, $xvy = 0^{k+m+l}$.

Co daje nam $w \not\sim_L v$, bo dla $z = 0^{k+l}$ $wz \in L \wedge vz \notin L$.

Co przez kontrapozycję daje $w \sim_L v \Rightarrow w \sim_L^{inf} v$

Czyli $i_L^{inf} \leqslant i_L$

Ostatecznie $i_L = i_L^{inf}$ $\square$

Zadanie 11. Pokaż, że dla każdego n istnieje język $L_n \subseteq \{a, b, \#\}^*$, którego wszystkie słowa mają długość $2n$, i taki, że najmniejszy rozstrzygający go deterministyczny automat skończony ma przynajmniej 2^n stanów.

Zadanie 12. Pokaż, że stała z lematu o pompowaniu dla języka regularnego może być wykładniczo mniejsza od indeksu tego języka. Dokładniej mówiąc, pokaż, że istnieje wielomian p oraz ciąg języków $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ taki, że dla każdego n najmniejszy automat rozstrzygający L_n ma przynajmniej 2^n stanów ale liczba $p(n)$ może być przyjęta jako stała z lematu o pompowaniu dla języka L_n. *Wskazówka. Nie bez powodu najpierw jest poprzednie zadanie a teraz jest to.*

Niech L_n - język z zadania 11

Wiemy, że $w \in L_n \Rightarrow |w| = 2n$

Jaka może być stała z LoP, oznaczmy ją N?

Rozważmy przypadki:

1) $1 \leq N \leq 2n$

Dzielimy wtedy $w = xyz$, $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq N$

Mamy $|z| = 2n - N$ i $|x| < N$

Zatem dla $k = 0$ $|xz| < 2n - N + N = 2n$ ↯

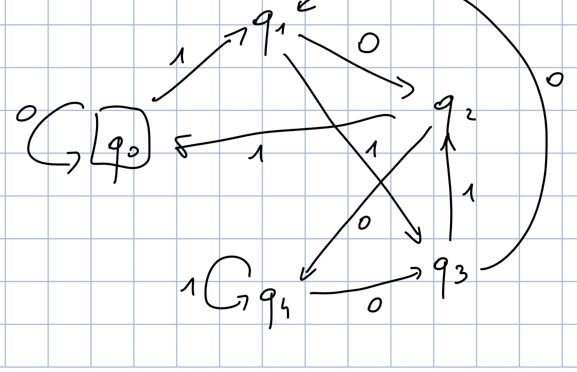
2) $N \geq 2n + 1$

Wtedy teza jest zawsze spełniona, bo poprzednik implikacji jest fałszywy.

Niech $p(n) = 2n + 1$ □

Zadanie 20. Skonstruuj niedeterministyczny automat skończony rozpoznający język tych słów nad $\{0, 1\}^*$ które, jako liczba w systemie dwójkowym, dzielą się przez 5, przy czym liczba jest wczytywana
a) począwszy od najbardziej znaczącego bitu,
b) począwszy od najmniej znaczącego bitu.

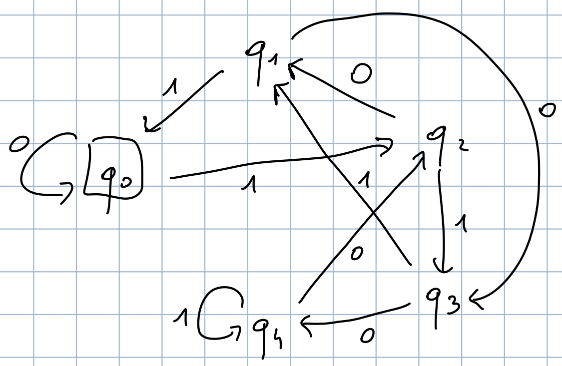
a)



$F = \{q_0\}$

1	1
2	2
4	4
8	3
16	1
32	2
64	4
128	3

b)



Zadanie 21. Udowodnij, że jeśli dla pewnego języka L istnieje rozpoznający go $NDFA$, to istnieje również $NDFA$ rozpoznający język $L^R = \{w : w^R \in L\}$

Załóżmy, że L jest rozpoznawany przez NFA A

Skonstruujemy NFA A', który rozpoznaje L^R

Wiemy, że $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$.

Konstruujemy $A' = \langle \Sigma, Q \cup \{q_0'\}, q_0', \delta', \{q_0\} \rangle$

$\delta'(q_0', \varepsilon, p)$ dla $p \in F$ – dodajemy nowy stan początkowy

$\delta'(q, a, p) \iff \delta(p, a, q)$ – odwracamy relacje

Pokażemy, że A' rozpoznaje L^R.

Weźmy $w^R \in L^R$.

Niech $S_i = \hat{\delta}(q_0, w[1, \dots, i])$, $S_0 = \{q_0\}$

Skoro A rozpoznaje L, to po $|w|$ krokach $F \cap S_{|w|} \neq \emptyset$

Pokażemy, że $S_i \cap \hat{\delta}'(F, w^R[1, \dots, |w|-i]) \neq \emptyset$ dla $i = 0, \dots, |w|$

Dla $i = |w|$

$\delta'(F, \varepsilon) = F$, czyli ok

Zał. że $S_i \cap \hat{\delta}'(F, w^R[1, \dots, |w|-i]) \neq \emptyset$, pokażemy $S_{i-1} \cap \hat{\delta}'(F, w^R[1, \dots, |w|-i-1]) \neq \emptyset$

Niech $q \in S_i \cap \hat{\delta}'(F, w^R[1, \dots, |w|-i])$

Wtedy istnieją p, a t. że $\delta(p, a, q)$, czyli $\delta'(q, a, p)$, więc $p \in \hat{\delta}'(F, w^R[1, \dots, |w|-i-1])$.

Czyli $S_0 \cap \hat{\delta}'(F, w^R) \neq \emptyset$, ale $S_0 = \{q_0\}$

Stąd A' rozpoznaje L^R $\square$

Zadanie 22. Wiadomo, że L jest językiem regularnym. Pokaż, że w takim razie język $\{w : \exists n \in \mathbb{N}\ w^n \in L\}$ jest też językiem regularnym. Przez w^n rozumiemy tu słowo w skonkatenowane ze sobą n razy.

Wystarczy skonstruować automat rozpoznający $L' = \{w : \exists_n\ w^n \in L\}$

Niech DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$ rozpoznaje L

Lemat

Jeśli $w^k \in L$ i $k > |Q|$, to istnieje $n \leqslant |Q|$ t. że $w^n \in L$

D-d

Z zasady szufladkowej istnieją $1 \leqslant i < j \leqslant k$ t. że $\hat{\delta}(q_0, w^i) = \hat{\delta}(q_0, w^j)$

Czyli $\hat{\delta}(q_0, w^i) = \hat{\delta}(q_0, w^{j+j-i})$.

Zatem dla $i \leqslant |Q| < j$ i dowolnego m mamy

$$\hat{\delta}(q_0, w^{|Q|}) = \hat{\delta}(q_0, w^{|Q| + m(j-i)})$$

Rozważmy $|Q| < k = (k-i) + i = i + m(j-i) + l$, gdzie $l < j - i$

Zatem $\hat{\delta}(q_0, w^k) = \hat{\delta}(q_0, w^{i+l+m(j-i)}) = \hat{\delta}(q_0, w^{i+l})$

Przyjmujemy $n = i + l$ i otrzymujemy tezę $\square$

Konstrukcja automatu

Oznaczmy $n = |Q|$

Niech B : DFA rozpoznający L'. $B = \langle \Sigma, Q', q_0', \delta', F' \rangle$

Definiujemy $Q' = Q^n$, $q_0' = \langle q_0, q_1, \dots, q_{n-1} \rangle$.

Następnie $\hat{\delta}'(\langle p_0, p_1, \dots, p_{n-1} \rangle, w) := \langle \hat{\delta}(p_0, w), \hat{\delta}(p_1, w), \dots, \hat{\delta}(p_{n-1}, w) \rangle$

Oraz $F' := \{\langle p_0, \dots, p_{n-1} \rangle \in Q' : \exists_{k < |Q|, i_1, \dots, i_k} : \hat{\delta}(0, w) = p_{i_1}, \hat{\delta}(p_{i_1}, w) = p_{i_2}, \dots, \hat{\delta}(p_{i_k}, w) \in F\}$

D-d poprawności

$L_B = L'$

($\subseteq$)

Weźmy $w \in L_B$.

Wtedy $\hat{\delta}'(q_0', w) \in F$, czyli istnieje $k < |Q|$ i ciąg indeksów $i_1, \dots, i_k$ t. że

$q_0' = \langle p_0, \dots, p_{n-1} \rangle$

$p_{i_1} = \hat{\delta}(q_0, w)$

$\hat{\delta}(p_{i_j}, w) = p_{i_{j+1}}$ dla $j < k$

oraz $p_k \in F$

Zatem $\hat{\delta}(q_0, w^k) \in F$

Czyli $w^k \in L$, zatem $w \in L'$.

($\supseteq$)

Weźmy $w \in L'$

Wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ t. że $w^n \in L$.

Z lematu wiemy, że istnieje $k \leq |Q|$ t. że $w^k \in L$

Rozważmy teraz ciąg $\langle \hat{\delta}(q_0, w), \hat{\delta}(q_0, w^2), \dots, \hat{\delta}(q_0, w^k) \rangle$

Spełnia on własności z F', zatem $w \in L_B$ $\square$

Zadanie 25. Minimalny *DFA* rozpoznający język *L* ma zawsze tyle samo stanów co minimalny *DFA* rozpoznający dopełnienie *L*. Stwierdzenie to przestaje być prawdziwe, jeśli rozważamy automaty niedeterministyczne. Udowodnij, że istnieje język *L*, który daje się rozpoznać za pomocą *NDFA* o mniej niż 20 stanach, ale którego dopełnienie nie daje się rozpoznać żadnym *NDFA* o mniej niż 200 stanach. *Wskazówka: wystarczy rozważyć alfabet jednoelementowy.*

Rozważmy język $L = \{0^n : 210 \nmid n\}$

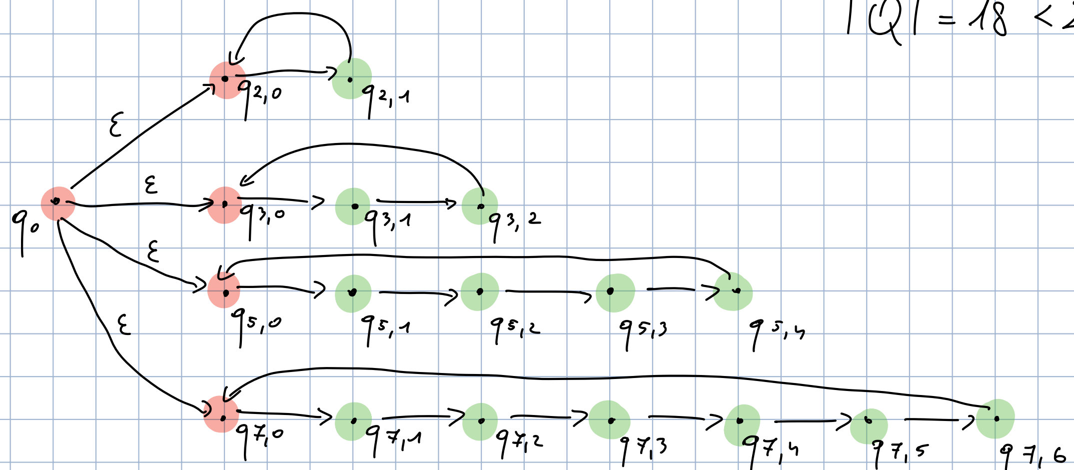
oraz jego dopełnienie $L' = \{0^n : 210 \mid n\}$

Wiemy, że $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Jeśli $210 \nmid n$, to jakaś liczba z $2, 3, 5, 7$ również nie dzieli n.

Budujemy automat:

$|Q| = 18 < 20$



Konstrukcja podobna do tej z wykładu

Teraz pokażemy, że L' wymaga automatu o przynajmniej 210 stanach:

Załóżmy, że NFA A rozpoznaje L' i $|Q| < 210$.

Rozważmy teraz słowa $w_i = 0^i$ dla $i = 1, \dots, 210$

Z zasady szufladkowej istnieją $i \neq j$ t.że $\hat{\delta}(q_0, w^i) = \hat{\delta}(q_0, w^j)$

Jeśli bso $i = 210$, to mamy sprzeczność, bo A zaakceptował 0^j $210 \nmid j$.

Teraz rozważmy $i, j < 210$

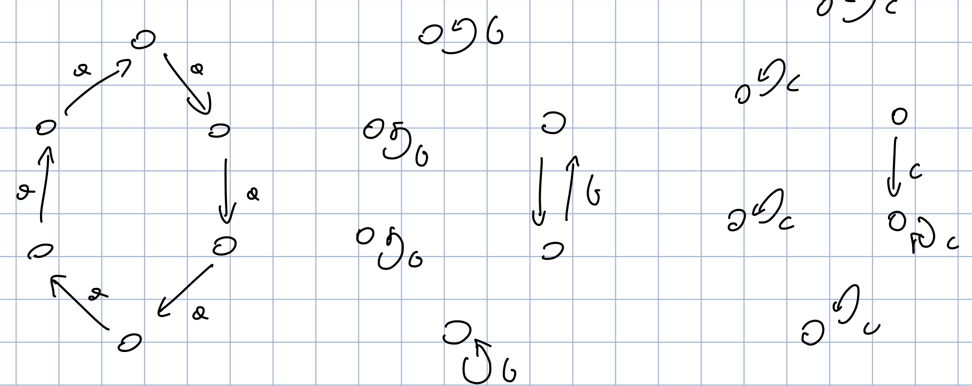
Wtedy A zaakceptuje słowa $0^{i+210-i}$ i $0^{j+210-i}$,

ale $210 \nmid j+210+i$ ↯

Czyli automat wymaga przynajmniej 210 stanów.

Zadanie 9. (za 2 punkty).
W zadaniu tym należy pokazać, że szacowanie z punktu **b** poprzedniego zadania nie może być poprawione. Dokładniej mówiąc:
a. Udowodnij, że jeśli $\Sigma = \{a, b, c\}$ to dla każdego skończonego zbioru Q istnieje minimalny DFA A, o zbiorze stanów Q i funkcji przejścia δ, taki że dla każdej funkcji $f : Q \longrightarrow Q$ istnieje słowo w dla którego dla każdego $q \in Q$ zachodzi: $\delta(q, w) = f(q)$. Przez automat minimalny rozumiemy tu taki, w którym każdy stan jest osiągalny ze stanu początkowego, i w którym dla każdych dwóch stanów q, q' istnieje słowo w takie że dokładnie jeden ze stanów $\delta(q, w)$, $\delta(q', w)$ jest akceptujący.
b. Korzystając z tezy punktu **a.** udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje język L taki, że $i_L \leqslant n$ zaś $n^n \leqslant i_L^{inf}$.

a)



b)

$|Q| = n = i_L$

$(f : Q \to Q) \longmapsto w \in \Sigma^*$

$[w]_{\sim^{inf}_L} \xleftrightarrow{\text{bijekcja}} \hat{\delta}(\cdot, w)$

Zadanie 11. Pokaż, że dla każdego n istnieje język $L_n \subseteq \{a, b, \#\}^*$, którego wszystkie słowa mają długość $2n$, i taki, że najmniejszy rozstrzygający go deterministyczny automat skończony ma przynajmniej 2^n stanów.

$L_n = \{ w w^R \in \{a, b\}^* : |w| = n \}$

zob. a, c $|Q| < 2^n$

Wszystkich słów 2^n $|w| = |v| = n$

z zasady szufladkowej $\exists_{\substack{v, w \\ v \neq w}}$ $\hat{\delta}(q_0, v) = \hat{\delta}(q_0, w)$

czyli $\underset{F}{\hat{\delta}(q_0, w w^R)} = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, w), w^R) = \underset{\cancel{A}\ F}{\hat{\delta}(q_0, v w^R)}$ ↯