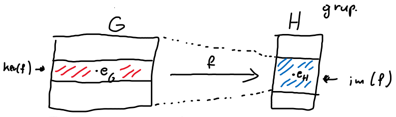
Niech $f: G \to H$ będzie homomorfizmem grup.



Def

$\ker(f) := \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ ← jądro f

$\mathrm{im}(f) := \{f(g) \mid g \in G\}$ ← obraz f

Czyli $\ker(f) = f^{-1}(\{e_H\})$, $\mathrm{im}(f) = f(G)$

przeciwobraz — obraz

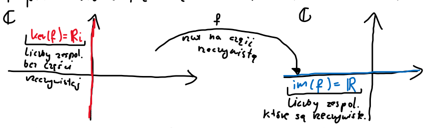
Przykłady

(1) $r_5 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ funkcja 5-tej reszty.

$\ker(r_5) = 5\mathbb{Z}$, $\mathrm{im}(r_5) = \mathbb{Z}_5$.

(2) Niech $f: (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}, +)$ $f(a+bi) = a$.

f jest homomorfizmem (nawet funkcją $\mathbb{R}$-liniową)



TW. 1

Niech $f: G \to H$ będzie homomorfizmem. Wtedy:

(i) $\mathrm{im}(f) \leq H$;

(ii) jeśli f jest monomorfizmem, to $G \cong \mathrm{im}(f)$.

Dowód

(i) • $e_H = f(e_G) \in \mathrm{im}(f)$ OK

• jeśli $f(g_1) \in \mathrm{im}(f)$, $f(g_2) \in \mathrm{im}(f)$, to:

• $f(g_1)f(g_2) = f(g_1 g_2) \in \mathrm{im}(f)$ OK

$f(g) \in \mathrm{im}(f) \Rightarrow (f(g))^{-1} = f(g^{-1}) \in \mathrm{im}(f)$ OK

Czyli $\mathrm{im}(f) \leq H$.

(ii) Z (i), $\mathrm{im}(f) \leq H$ czyli $\mathrm{im}(f)$ jest grupą.

Jeśli f jest monomorfizmem, to $f: G \to \mathrm{im}(f)$ jest $\cong$. ■

Wniosek

W takim razie $\boxed{\text{tw. Cayley'a}}$ mówi, że każda grupa $\boxed{d: G \to S_G \text{ monom.}}$

jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy bijekcji S_G.

Jądro ma pewne dodatkowe własności:

TW. 2

Niech $f: G \to H$ będzie homomorfizmem grup. Wtedy:

(i) $\ker(f) \leq G$

(ii) $\forall_{g \in G}$ $g\ker(f) = \ker(f)g$ (warstwy lewostronne ker(f) pokrywają się z warstwami prawostr.)

Dowód

(i) • $f(e_G) = e_H \Rightarrow e_G \in \ker(f)$ OK

• $a, b \in \ker(f) \Rightarrow f(a) = e_H = f(b) \Rightarrow f(ab) = f(a)f(b) = e_H e_H = e_H$

$\Rightarrow ab \in \ker(f)$ OK

• $a \in \ker(f) \Rightarrow f(a) = e_H \Rightarrow$ $f(a)^{-1} = e_H^{-1}$, $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$, $e_H^{-1} = e_H$, $f(a^{-1}) = e_H$ $\Rightarrow a^{-1} \in \ker(f)$

Czyli $\ker(f) \leq G$.

(ii) Weźmy $g \in G$. Pokażemy $g\ker(f) \overset{?}{=} \ker(f)g$

$\subseteq$ Weźmy $a \in g\ker(f)$. Czyli $g^{-1}a \in \ker(f)$,

tzn. $f(g^{-1}a) = e_H$. Wtedy:

$f(ag^{-1}) = f(\underbrace{gg^{-1}}_{e_G}ag^{-1}) = f(g)\underbrace{f(g^{-1}a)}_{e_H}f(g^{-1}) = f(g)f(g)^{-1} = e_H$

$\Rightarrow ag^{-1} \in \ker(f) \Rightarrow a \in \ker(f)g$ OK.

$\supseteq$ Analogicznie. ■

Def

Podgrupę $N \leq G$ nazywamy dzielnikiem normalnym (lub podgrupą normalną), oznaczone przez $N \trianglelefteq G$, gdy

$\forall_{g \in G}$ $gN = Ng$ (warstwy lewostronne N pokrywają się z warstwami prawostronnymi N)

Intuicja

Dzielniki normalne to dokładnie te podgrupy przez które można wydzielać (wykład za tydzień)

Przykłady

(1) $\{e\} \trianglelefteq G$, $G \trianglelefteq G$, bo $\forall_{g \in G}$ mamy:

$g\{e\} = \{g\} = \{e\}g$ i $gG = G = Gg$.

(2) G: przemienna, $H \leq G \Rightarrow H \trianglelefteq G$.

(3). Widzieliśmy, że $\{id, (1,2)\} \ntrianglelefteq S_3$.

(4) Ale np. $A_3 = \{id, (1,2,3), (1,3,2)\} \triangleleft S_3$.

Zauważmy, że $[S_3 : A_3] = \frac{6}{3} = 2$ (tw. Lagrange'a).

TW. 3

$H \leq G$, $[G:H] = 2 \Rightarrow H \triangleleft G$

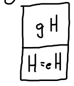
Dowód

Weźmy $g \in G$.

1° $g \in H$ Wtedy $gH = H = Hg$ OK.

2° $g \notin H$ Wtedy $gH \neq H$

Ale G jest rozłączną sumą warstw H (zawsze) oraz (w naszej sytuacji) $[G:H] = 2$ są tylko 2 warstwy!



Stąd $gH = G \setminus H$ ← dopełnienie H w G.

Podobnie $Hg = G \setminus H$.

Czyli $gH = G \setminus H = Hg$ OK $H \triangleleft G$.

■