zad. 8

$f(x)$ – $n+1$ różniczk., ciągła, gdy

~~$L_n(x)$~~, z wł. wielomianu Czebyszewa $L_n(x)$ st. n oraz interpolacje w pasach różnych punktach, korzystamy z tw. z Wykładu:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!} p_{n+1}(x) \qquad \xi_x \in [-1,1]$$

Z def:

$$p_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = x^{n+1} + \dots \qquad x_1, x_2, \dots \text{ – punkty interpolacji}$$

$$T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + \dots = \cos(k \arccos(x)) \underset{*}{\leq} 1$$

Wobec powyższego:

$$p_{n+1}(x) = 0 \iff T_{n+1}(x) = 0$$

a z tego:

$$p_{n+1}(x) = C \cdot T_{n+1}(x)$$

Z powyższego $C = 2^n$ więc $p_{n+1}(x) \overset{**}{=} \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}$

Ostatecznie

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)} p_{n+1}(x) \underset{**}{\overset{*}{\leq}} \frac{e}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Zadana dokładność zachodzi dla $n \geq 6$