Maurycy Borkowski

31.03.2020

L5Z3 (3 punkty)

Błąd został popełniony tu:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) = \frac{-\sin x \sin^2 x - \cos x 2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{-\sin x(\sin^2 x + 2\cos^2 x)}{\sin^4 x} =$$

$$= \frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x} \neq \frac{1-\cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin x}$$

L5Z4 (10 punktów)

Dowód. Skoro $f(x)$ i $g(x)$ rosnące to dla dowolnych $a, b \in [0,1]$:

$$(f(a) - f(b))(g(a) - g(b)) \geqslant 0$$

Dalej:

$$\int_0^1 \int_0^1 (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy \geqslant 0$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (f(x)g(x) + f(y)g(y) - [f(x)g(y) + f(y)g(x)]) dx dy \geqslant 0$$

$$(1-0)\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f(y)g(y)dy\right) - \int_0^1 \int_0^1 [f(x)g(y) + f(y)g(x)) dx dy \geqslant 0$$

$$2\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 g(y)\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dy - \int_0^1 f(y)\left(\int_0^1 g(x)dx\right)dy \geqslant 0$$

$$2\int_0^1 f(x)g(x)dx - 2\int_0^1 g(x)dx \int_0^1 f(x)dx \geqslant 0$$

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geqslant \int_0^1 g(x)dx \int_0^1 f(x)dx$$

$\square$