Zad.1

```
egdes1 := krawędzie G1
eggeo2 := krawędzie G2

for e1 in egdes1:
    flag = False
    for e2 in eggeps2:
        if e1==e2:
            del e2
            flag=True
            break
    if !Flag:
        return False

return True
```

Zad.2

a) 

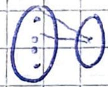
$\sum_{i=0}^{n} deg(v_i) = 2m \quad m \in \mathbb{N}$ z lematu:

Nie istnieje $m \in \mathbb{N}$ t.ż $2m = 1+2+2+3+3 = 11$

Więc nie istnieje taki graf prosty

b) Nie istnieje: v_i dla którego $deg(v_i)=4$ musi być połączony z pozostałymi 3 wierzchołkami st.1 już nie mogą być połączone z innymi. Zostaje jeden wierzchołek st.3 który ma st.1 i nie możemy dodać żadnej krawędzi.

c) 3 przypadki

-  Wszystkie wierzchołki st. 0 a nie 2
-  Nie możemy dać więcej krawędzi. st. >2 lub nie będzie dwudzielny
-  Tak samo jak wyżej

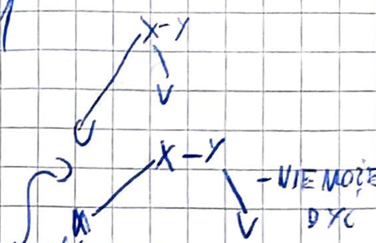
st. >2 lub nie będzie dwudzielny

Zad. 3

• Zał. $k = d(G) > 3$, $d(u,v) = k$. $\bar{d}$ – odległość w $\bar{G}$

Weźmy dowolne $x, y \in V(G)$,

1° $d(x,y) \neq 1 \Rightarrow \exists \{x,y\} \in E(\bar{G}) \Leftrightarrow \bar{d}(x,y) = 1$



2° $d(x,y) = 1$

x nie połączone z u lub v

y nie połączone z u lub v

dla (inaczej $d(u,v) \leq 3$)

I) y, x nie jest połączony z u i z v, więc w $\bar{G}$ są połączone:

$\bar{d}(x,y) = 2$

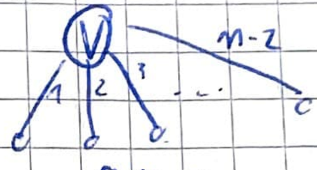
II) Jest jedna krawędź z $\{x,y\} \times \{u,v\}$

BSO x łączy z u: $x - u \rightsquigarrow v$

Więc w $\bar{G}$ $y - v - x$, $d(x,y) = 2$

Zad. 4 $d(G)=2$ $\max\{\deg(v) : v \in V(G)\} = n-2$

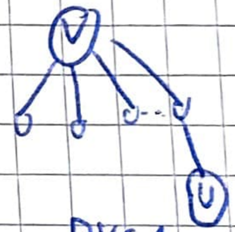
Niech v t.ż $\deg(v) = n-2$



Rys. 0

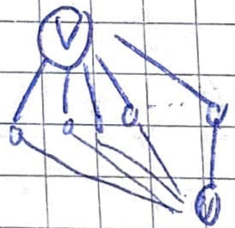
- Aby ~~$d(G)=2$~~ v musi być niepołączony bezpośrednio z dokładnie jednym wierzchołkiem, oznaczmy go u.

Więc u musi być połączony z jednym z sąsiadów v (G spójny)



Rys. 1

- W oparciu z Rys. 2 możemy sąsiedztwo z u do sąsiadów v $d? 3$ ale $d(G)=2$ więc musimy połączyć u z resztą sąsiadów v.



Rys. 3

Mamy więc conajmniej: $(n-2)+(n-2)$ krawędzi.

$2n-4 \leq m$

■

Zad 8

Dla ~~[illegible]~~ i, j wyraz macierzy $B^T B$ o tych współrzędnych i, j:

$$(B^T B)_{i,j} = \begin{cases} 1 - e_i, e_j \text{ - wsp. nad } \\ 2 - j = i \\ 0 - w.p.p. \end{cases}$$

bo $[0 \dots 1 \dots 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \iff$ są takie sam jedna wierzchołka

$$(B^T B - 2I)_{i,j} = \begin{cases} 1 - e_i, e_j \text{ - współrzędny nad dokładnie jeden więcej} \\ 0 - w.p.p. \end{cases}$$

$$B^T B - 2I = C$$

Zad 11

- Ze wzoru Cayleya liczba drzew indeksowanych $\{1 \dots k\}$ k^{k-2}.

- ~~[illegible]~~ Ile drzew z 1 wisząc! Wszystkie drzewa $\{2 \dots n\}$ razy n (każdy wierzchołek może połączyć z 1)

Więc $(n-1) \cdot (n-1)^{n-3}$

Wszystkich drzew: n^{n-2}

Ostatecznie: $p = \frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}}$

Liczymy granice $\lim_{n \to \infty} p(n) = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} \right] = e^{-1}$

Zad 5

a) • $r(G) \leq d(G)$ trywialne $\min\{\} \leq \max\{\}$

• $d(G) \leq 2 \cdot r(G)$

niech $d(u,v) = d(G)$

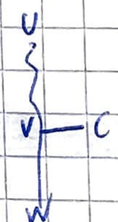
niech $c \in$ w. centralny

$$d(G) = d(u,v) \leq d(u,c) + d(c,v) \leq 2 \cdot r(G)$$

b)

$\}$ $d(G)$

Lemat: w. centralny c leży na najdłuższej ścieżce dł. $d(G)$



D-d: Jeżeli c leży poza $u \to w$ to $r(v) < r(c)$

b, c) Z Lematu wiemy, że centrum leży na najdłuższej ścieżce. Jeżeli zbiór wierzchołków centrum większy niż 2 to dla pewnych i, j, k $r(c_i) < r(c_k)$, $r(c_j) < r(c$

Algorytm: Wypisujemy środek najdłuższej ścieżki w grafie.