AiSD L3

Maurycy Borkowski

31.03.2021

zadanie 1

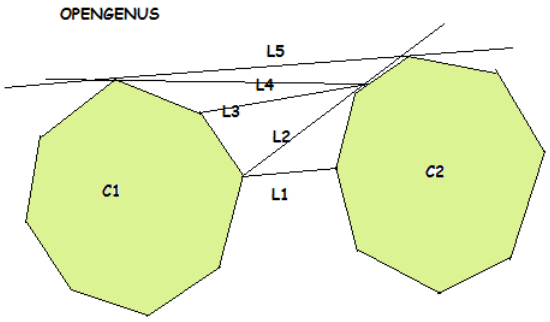
```
def gcd(a,b):
    if b > a:
        swap(a,b)
    if a == b:
        return a
    if min(a,b) == 1:
        return 1

    if a%2 == 0 and b%2 == 0:
        return 2*gcd(a/2,b/2)
    if a%2 == 1 and b%2 == 0:
        return gcd(a,b/2)
    if a%2 == 0 and b%2 == 1:
        return gcd(a/2,b)
    if a%b == 1 and b%2 == 1:
        return gcd((a-b)/2,b)
```

Poprawność algorytmu wynika z poprawności danej własności.

Zauważmy, że z każdym wywołaniem rekurencyjnym conajmniej jedna z liczb maleje dwukrotnie, zatem w pesymistycznym przypadku będziemy mieli $\mathcal{O}(\log a + \log b) = \mathcal{O}(\log ab)$ Tak samo jak alg. Euklidesa

zadanie 3

Będziemy chcieli połączyć dwie pary wierzchołków otoczek C_1, C_2 na *górze* i *dole* tak by powstała otoczka.
Możemy to zrobić łącząc najbliższe (skrajne wewnętrzne) punkty otoczek C_1, C_2 i później *wspinając* się z tym odcinkiem, dopóki nie będziemy mieli otoczki, tj. będą kąty wklęsłe.



DEMONSTRATION OF FINDING UPPER TANGENT OF TWO POLYGONS C1 AND C2

Otrzymujemy algorytm:

```
L = wewnetrzne(C1,C2)
while flag:
    flag = False
    while przecina(L, C1):
        przesun_wyzej(L, C1)
    while przecina(L, C2):
        flag = True
        przesun_wyzej(L, C2)
```

Funkcję $przecina(L, C)$ możemy zaimplementować korzystając z iloczynu wektorowego, dokładnie jego znaku, który określa nam skrętność, używając punktów określających L w obu otoczkach i ich następników.

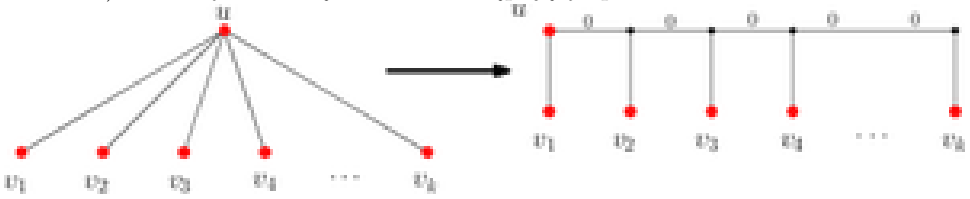
przesun_wyzej przesuwa punkt wyżej w danej otoczce: $v = C[(idx + 1)\%n]$
Analogicznie znajdujemy odcinek na dole otoczek.

Poprawność

Otrzymujemy wielokąt wypukły, odcinki łączące C_1, C_2 nie przecinają ich (dopiero wtedy kończymy pętlę).
C_1, C_2 zawierają wszystkie punkty, więc zbiór w którym obie się one zawierają też zawiera wszystkie punkty.

zadanie 4a

Na początku zmodyfikujmy (liniowo) nasze drzewo tak aby każdy wierzchołek v miał $deg(v) \leqslant 3$. Zrobimy to dodając czarne wierzchołki (czerwone = oryginalne z drzewa) z zerowymi krawędziami w następujący sposób:



każdego nadmiarowego syna podpinamy do nowego czarnego którego łączymy z poprzednim czarnym wierzchołkiem.
Zerowe krawędzie gwarantują nam, że w tak zmodyfikowanym drzewie rozwiązanie się nie zmieni.

Korzystamy z metody *Dziel i Zwyciężaj* dla danego wierzchołka u i jego conajwyżej trzech poddrzew T_1, T_2, T_3 o korzeniach (sąsiadach u) r_1, r_2, r_3, odpowiedź to ścieżki wewnątrz każdego z poddrzew T_i, ścieżki pomiędzy poddrzewami T_i, T_j (i ścieżki pomiędzy T_i a u).
Dla danych i, j $(i < j)$ oznaczmy przez $w = d(u, r_i) + d(u, r_j)$, $A = v, v \in T_i$, $B = w, w \in T_j$. W A, B trzymamy tylko czerwone wierzchołki.
A, B sortujemy po odległościach wierzchołków od korzeni np. A po $d(v, r_i)$.

Teraz szukamy takich par $x, y, x \in A, y \in B$, że $d(x, r_i) + d(y, r_j) = D - w$
Możemy to zrobić w czasie liniowym (po wcześniejszym sortowaniu A, B) idąc od lewej w A i od prawej w B.
Oszacujmy, złożoność takiego algorytmu:

$$T(n) = \mathcal{O}(n \log n) + T(n_1) + T(n_3) + T(n_3)$$

Aby złożoność nam nie wybuchła musimy jeszcze zadbać o to by rozmiary drzew wywołania rekurencyjnych były ograniczone lepiej niż n.
Bo wiemy, że $n_1 + n_2 + n_3 = n - 1$ w przeciwnym przypadku być może wykonamy n wywołań otrzymując złożoność $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.
Możemy to osiągnąć biorąc jako wierzchołek do usunięcia u centroid obecnego drzewa, wtedy $n_i \leqslant \frac{n}{2}$, centroid można wyszukać w czasie $\mathcal{O}(n)$.
Każde wywołanie zmniejsza nam drzewo conajmniej dwukrotnie, więc pełne drzewo będzie

```
def getAns(l1, l2):
    sort(l1)

def solve(G):
    u = centroid(G)
    ans = 0
    red = []
    for r in G[u]:
        G2 = subtree(r)
        red.append(getRed(G2))
        ans += solve(G2)
    for (i,j) in list(combinations(range(3), 2)):
        ans += getAns(red[i],red[j])

dodaj_czarne(G)
```