zad. 8.10

$$w_1^* = ax+b$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} - (ax+b)\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - a$$ funkcja ma tylko jedno max

$\{x_0, x_1, x_2\}$ - alternans

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - a = 0 \iff x = \frac{1}{4a^2}$$ więc tylko jedno rozwiązanie, więc $x_0, x_2$ - końce przedziałów:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{4a^2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Aby $ax+b$ był wielomianem optymalnym o alternansie $\{0, \frac{1}{4a^2}, 1\}$ to:

gdy $\|\sqrt{x} - (ax+b)\| = \varepsilon$

$$\begin{cases} f(x_0) - w(x_0) = -\varepsilon \\ f(x_1) - w(x_1) = \varepsilon \\ f(x_2) - w(x_2) = -\varepsilon \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -b = -\varepsilon \\ \sqrt{x_1} - ax_1 - b = \varepsilon \\ 1 - a - b = -\varepsilon \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2a} - \frac{a}{4a^2} - b = b \to \frac{1}{4} = 2b \\ 1 - a - b = -b \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Ostatecznie $w_1^* = x + \frac{1}{8}$