Lista 5

Maurycy Borkowski

8.04.2020

zad. 2 (1 punkt)

I

Łatwo zauważyć, że z tej postaci można dojść do macierzy diagonalnej (też górnotrójkątnej) stosując operacje elementarne. Dodajemy kolejne wiersze przemnożone przez odpowieni skalar od góry do dołu, idąc od wiersza n do wiersza 1.
Z wniosku z wykładu, wiemy że wyznacznik macierzy górnotrójkątnej to iloczyn wyrazów na jej głównej przekątnej:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$$

II

Najpierw używamy $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ operacji zmian wierszy aż dojdziemy do macierzy górnotrójkątnej. Później z wniosku z wykładu liczymy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot a_{n1} \dots a_{2,n-1} \cdot a_{1n}$$

zad. 3 (1 punkt)

Korzystając z rozwinięcia Laplace'a:

I

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = dc \begin{vmatrix} a & 3 \\ 0 & b \end{vmatrix} = dc \cdot (ab - 3 \cdot 0) = abcd$$

II

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 4 & 5 \end{vmatrix} = dc \begin{vmatrix} 2 & a \\ b & 0 \end{vmatrix} == dc \cdot (2 \cdot 0 - ab) = -abcd$$

zad. 4 (1 punkt)

Najpierw stosujemy operacje elementarne dodawania wierszy pomnożonych przez odpowiedni skalar, a później stosujemy rozwinięcie Laplace'a.

I

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} -3 & -5 & 13 \\ 1 & 10 & 4 \\ -2 & -8 & 25 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -3 & 2 & 13 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 9 & 25 \end{vmatrix} = 301$$

II

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 & -6 \\ 1 & -6 & -2 & 0 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 & -6 \\ 1 & -6 & -2 & 0 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 & -6 \\ 1 & -6 & -2 & 0 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-7) \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & -6 \\ 1 & -6 & -2 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & -6 \\ 1 & -6 & -2 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 7(-1)6 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 12 \\ 7 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} + 7(-1)(-6) \begin{vmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 42(161-115) = 1932$$

zad. 6 (1 punkt)

a)
Wiemy: $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$ więc wyznacznik zmieni się na przeciwny gdy n będzie nieparzyste.

b)

c)
Możemy zamieniać kolejnie kolumny, zmian będzie potrzeba $n-1$ więc wyznacznik będzie trzeba pomnożyć przez $(-1)^{n-1}$.

d)
Podobnie jak w zad. 2 więc wyznacznik będzie trzeba pomnożyć przez $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

zad. 7 (2 punkty)

I

Dodajmy pierwszy wiersz do każdego wiersza:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

II

Odejmijmy od wszystkich wierszy pierwszy wiersz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 0 & 0 & \dots & -(n+1) & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -(n+1) & \dots & 0 & n+1 \\ -(n+1) & 0 & \dots & 0 & n+1 \end{vmatrix} =$$

Dodajemy do ostatniego pierwszy wiersz pomnożony przez $n+1$:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 0 & 0 & \dots & -(n+1) & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -(n+1) & \dots & 0 & n+1 \\ 0 & n+1 & \dots & n+1 & -(n+1)(n-1) \end{vmatrix} =$$

Zamieniamy wiersze w środku kolejnością:

$$= (-1)^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 0 & -(n+1) & \dots & 0 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -(n+1) & n+1 \\ 0 & n+1 & \dots & n+1 & -(n+1)(n-1) \end{vmatrix} =$$

Odejmujemy od ostatniego wiersza każdy oprócz pierwszego wiersz i ostatecznie otrzymujemy:

$$= (-1)^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 0 & -(n+1) & \dots & 0 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -(n+1) & n+1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -(n+1) \end{vmatrix} = (-1)^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}(-1)^{n-1}(n+1)^{n-1}$$

zad. 8 (2 punkty)

I

Z rozwinięcia Laplace'a pierwszej kolumny:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ x & 0 & 0 & \dots & 0 & y \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & y \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y \end{vmatrix} + (-1)^n x \begin{vmatrix} y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & y \end{vmatrix} =$$

$$= x^{n-2} + (-1)^{n+1} + x \cdot y^{n-1}$$

II

Odejmujemy od każdego wiersza pierwszy:

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n + x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x & 0 & \dots & x \end{vmatrix} =$$

Skorzystamy z rozwinięcia Laplace'a względem pierwszej kolumny:

$$(a_1 + x)x^{n-1} + (-x)a_2x^{n-2} + a_2 \cdot 0 \dots = a_1x^{n-1} + x^n - a_2x^{n-2}$$

zad. 13 (2 punkty)

Pamiętając wzór:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \dots a_{n,\sigma_n}$$

Skoro wszystkie wyrazy A są całkowite to dodowolna suma sum ich też jest całkowita.
Mamy: $det(A) \in \mathbb{Z}$
podobnie: $det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$ Z multyplikatywności wyznacznika:

$$1 = det(E) = det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1})$$

iloczyn dwóch liczb całkowitych jest równy jeden wtw. gdy te liczby to ± 1.

$$det(A) \in \{-1, 1\}$$

zad. 13 (2 punkty)

Dowód. Pamiętając wzór:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \dots a_{n,\sigma_n}$$

Sumujemy po wszystkich permutacjach więc napewno wystąpi czynnik:

$$\varepsilon_\sigma a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$$

Wyznacznik konkretnie macierzy $A - xE$ zawiera więc składnik:

$$\pm(a_{1,1} - x)(a_{2,2} - x) \dots (a_{n,n} - x)$$

zatem:

$$det(A - xE) = \pm x^n + Q(x)$$

□