zadanie 15

Oznaczmy $Y = F_X(X)$ (oczywiście $0 \leqslant Y \leqslant 1$). Wtedy:

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(F_X(X) \leqslant x) = P(F_X(X) \leqslant F_X(F_X^{-1}(x)))$$

F_X jest ciągła i ściśle rosnąca więc $a \leqslant b \iff F_X(a) \leqslant F_X(b)$

$$F_Y(x) = P(X \leqslant F_X^{-1}(x)) = F_X(F_X^{-1}(x)) = x$$

Z wykładu wiemy, że dystrybuanta z $U[0,1]$ to $F_U(x) = x$.
Stąd na $x \in [0,1]$ mamy $F_U(x) = F_Y(x)$.
Dystrybuanta wyznacza rozkład jednoznacznie stąd $F_X(X) = Y \sim U[0,1]$.

Teraz chcemy zrobić *odwrotnie* tj. z $U[0,1]$ dostać np. *exp*
Generujemy $U \sim Unif[0,1]$. Dystrybuanta rozkładu wykładniczego:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Liczymy funkcję odwrotną dystrybuanty:

$$F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$$

Dalej, weźmy zmienną losową $T = F_X^{-1}(U)$ Jej dystrybuanta:

$$F_T(x) = P(T \leqslant x) = P(F_X^{-1}(U) \leqslant x) = P(U \leqslant F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x)$$

zadanie 17

Promień $R \sim U[0,2]$, zmienna losowa będąca polem koła $Y = A(R) = \pi R^2$

Mamy od razu: $A^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}}$
Stąd dystrybuanta pola:

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(A(Y) \leqslant x)$$

dla $x \geqslant 0$ mamy (A ściśle rosnąca, ciągła):

$$F_Y(x) = P(A(R) \leqslant x) = P(R \leqslant A^{-1}(x)) = F_R(A^{-1}(x))$$

Dalej:

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx}F_Y(x) = \frac{d}{dx}\left(F_R(A^{-1}(x))\right) = F_R'(A^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx}A^{-1}(x)$$

Z jednostajnego rozkładu R mamy dla $x \in [0, 4\pi]$:

$$F_R'(A^{-1}(x)) = f_R(A^{-1}(x)) = \frac{1}{2}$$

Obliczamy pochodną ($x \geqslant 0$):

$$\frac{d}{dx}A^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{x\pi}}$$

Ostatecznie mamy więc dla $x \in [0, 4\pi]$:

$$f_Y(x) = \frac{1}{4\sqrt{x\pi}}$$