18.11.2020

L6Z7

s - naturalna funkcja sklejana trzeciego stopnia

$f(x_i) = s(x_i)$ dla $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

Dowód. Całkując przez części

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx = \int_a^b s''(x) \cdot s''(x) dx = s''(x) \cdot s'(x) \mid_{[a,b]} - \int_a^b s'(x) \cdot s'''(x) dx$$

Dzielimy przedział całkowania: $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(s''(x) \cdot s'(x) \mid_{[x_i, x_{i+1}]} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} s'(x_k) \cdot s'''(x) dx \right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(s''(a) \cdot s'(a) - s''(b) \cdot s'(b) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} s'(x_k) \cdot s'''(x) dx \right)$$

Z naturalności s oraz z tego, że $s'''(x) = \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}$ dla $x \in x_i, x_{i+1}$ (wzór ten można uzyskać różniczkując wzór (16) z wykładu:

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(- \int_{x_i}^{x_{i+1}} s'(x_k) \cdot s'''(x) dx \right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} \left(- \int_{x_i}^{x_{i+1}} s'(x_k) \cdot dx \right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} - \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} (s(x_{i+1}) - s(x_i))$$

s interpoluje f w punktach x_i:

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}(f(x_i) - f(x_{i+1}))$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} M_{i+1} \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} - M_i \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \sum_{i=0}^{n-1} M_i \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}$$

Z naturalności, oraz upraszczając wyrażenie mamy:

$$= \sum_{i=1}^{n-1} M_i \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - M_i \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}$$

Przekształcamy (rozwijamy i wyciągamy minusa z mianownika):

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})} + \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)} - \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f(x_{i-1})}{(x_{i-1} - x_i)} \right) M_i$$

Zuważamy iloraz różnicowy, otrzymujemy ostatecznie:

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]) M_i$$

$\square$