Maurycy Borkowski

08.06.2020

SUMA: 51 punktów

L5z9* (10 punktów)

$$\xi(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Szukamy fukcji f tż:

$$f(x) = e^{-\xi(x)}$$

Przy oznaczeniu F jako funkcji pierwotnej f:

$$f(x) = e^{-F(x)}$$

$$F'(x) = e^{-F(x)}$$

$$F'(x)e^{F(x)} = 1$$

Zauważamy:

$$\left(e^{F(x)}\right)' = 1$$

Wnioskujemy $F(x) = \log x$, dalej:

$$F(x)' = \frac{1}{x} = f(x)$$

Możemy sprawdzić:

$$f(x) = \frac{1}{x} = e^{-\log x} = e^{-\int_0^x \frac{1}{t}dt} = e^{-\xi(x)}$$

L5z10* (10 punktów)

Dowód. Zastosujmy tw. o wartości średniej N razy:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c_0) = 0$$

$$\int_a^b xf(x)dx = f(c_1)\int_a^b xdx = 0$$

$$\int_a^b x^2 f(x)dx = f(c_2)\int_a^b x^2 dx = 0$$

$$\vdots$$

$$\int_a^b x^N f(x)dx = f(c_N)\int_a^b x^N dx = 0$$

Wystarczy zatem uzasadnić, że: $c_i \neq c_j$ dla $i \neq j$.
Załóżmy nie wprost, że f ma tylko jedno miejsce zerowe, oznaczmy je jako d, wtedy $f(x) < 0$ dla $x < d$ i $f(x) > 0$ dla $x > d$:

$$\int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = 0$$

$$\int_a^d xf(x)dx + \int_d^b xf(x)dx = 0$$

W obu powyższych sumach BSO lewy składnik jest ujemny, prawy dodatni.
Widać, że dolna równość nie jest prawdziwa dla niezerowej funkcji (dla zerowej teza jest trywialna), funkcja liniowa jest rosnąca i skaluje oba czynniki (bardziej drugi) w tym przypadku suma będzie większa od zera. Można to rozumowanie przeciągnąć indukcyjnie po n przedziałach, w ten sposób udowadniamy, że są one parami różne. □

L5z13* (10 punktów)

$$\int_0^a e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{100}}{100!}\right)dx = 50$$

Rozpoznajemy rozwinięcie e^x w szereg Taylora:

$$\int_0^a e^{-x}\left(e^x - R_{100}(x,0)\right)dx = 50$$

$$f(a) = a - \int_0^a \frac{R_{100}(x,0)}{e^x}dx$$

Zauważmy, że dla $a = 50$ $f(a) < 50$ bo prawy czynnik jest niezerowy.
Dalej:

$$R_{100}(x, 0) = \int_0^x \frac{(x-t)^{100}}{100!} e^t dt$$

$f(100) > 50$ ponieważ: (funkcja podcałkowa jest malejąca)

$$\int_0^{100} \frac{R_{100}(x, 0)}{e^x} dx < 100 \cdot \frac{R_{100}(x, 1)}{e^1} \approx 10^{-3} \ll 50$$

Z skoro $f(50) < 50$ i $f(100) > 50$ to z własności Darboux'a (funkcje ciągłe wszystkie) istnieje rozwiązanie równania z zadania.

L11z13* (10 punktów)

L12z9 (3 punkty)

Korzystając z reguły łańcucha:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\right) \\ \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^{-1} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial y} = (\sin\theta)^{-1} \left(\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta\right) \\ \frac{\partial z}{\partial x} = (-r\sin\theta)^{-1} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{\partial z}{\partial y} r\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (-r\sin\theta)^{-1} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} - (\sin\theta)^{-1} \left(\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta\right) r\cos\theta\right)$$

Po uporządkowaniu mamy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

Analogicznie z powyższych równań otrzymujemy:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

L12z12 (3 punkty)

Dane: $V_x = 30[\frac{km}{h}], V_y = 160[\frac{km}{h}]$ $x_0 = 1[km]$ $y_0 = 2[km]$

Rozwiązanie:

$$S(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Korzystając z reguły łańcucha:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = 30 \cdot 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + 160 \cdot 2y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(30x + 160y)$$

W szukanym punkcie:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(350) = 70\sqrt{5}$$

L13z4* (5 punktów)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1$$

Powyższe równanie (prawdopodobnie) pochodzi od równania opisującej stan gazu doskonałego (Równanie Clapeyrona) $pV = RT$ w bardziej matematycznej formie $\frac{xy}{z} = const$.
Możemy wtedy określić:

$$x = f(y, z) = \frac{C \cdot z}{y}$$

$$y = g(x, z) = \frac{C \cdot z}{x}$$

$$z = h(x, y) = \frac{xy}{C}$$

Wtedy:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{C \cdot z}{x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{x}{C}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{C}{y}$$

mnożąc powyższe pochodne cząstkowe:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = \left(-\frac{C \cdot z}{x^2}\right)\left(\frac{x}{C}\right)\left(\frac{C}{y}\right) = -C\frac{z}{xy}$$

Ale zdefiniowaliśmy $C = \frac{xy}{z}$, zatem:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -C\frac{z}{xy} = -C\frac{1}{C} = -1$$