Z 9.

a).

$$x \in Lin(A \cup B) \Leftrightarrow x = \sum \alpha_i c_i : c_i \in A \cup B$$

$$\Leftrightarrow x = \sum \alpha_i a_i + \sum \alpha_j b_j : a_i \in A, b_i \in B \Leftrightarrow x \in Lin(A) + Lin(B)$$

b).

$$x \in Lin(A \cap B) \Leftrightarrow x = \sum \alpha_i c_i : c_i \in A \cap B \Leftrightarrow$$

$$x = \sum \alpha_i a_i : a_i \in A \wedge x = \sum \alpha_j b_j : b_j \in B \Leftrightarrow x \in Lin(A) \wedge x \in Lin(B)$$

c).

$$x \in Lin(A) \Rightarrow x = \sum \alpha_i a_i : a_i \in A$$

$$(a_i \in A \Rightarrow a_i \in B) \Rightarrow x \in Lin(B)$$

d).

$$x \in Lin(A) \Rightarrow x \in Lin(Lin(A))$$

$$x \in Lin(Lin(A)) \Rightarrow x = \sum_i \alpha_i \sum_j \beta_j a_{(i,j)} : a_{(i,j)} \in A \Rightarrow x = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j a_{(i,j)} \Rightarrow x \in Lin(A)$$

Z 11.

a). (B.S.O.) $v_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i$. Wtedy

$$F(v_1) = F(\sum_{i=2}^n \alpha_i v_i) = \sum_{i=2}^n \alpha_i F(v_i). \square$$

b). Rozważmy $W = V = \mathbb{R}^2$, zbiór {(0,1),(1,1),(2,1)} i p.l. F takie, że F((1,0))=(0,0) i F((0,1))=(0,1), Wtedy {F((0,1)),F((1,1)),F((2,1))}={(0,1)} co jest lnz.

c). Weźmy $W = V = \mathbb{R}$ oraz p.l.$F : W \to V$, takie, że $F(1) = 0$ ({1} jest bazą w $\mathbb{R}$ jako p.l. nad $\mathbb{R}$). Wtedy {1} lnz, a {F(1)} lz.

Z 15.

a). $W + W' \subseteq V$

$$0 \in W \wedge 0 \in W' \Rightarrow 0 \in W + W'$$

$$u \in W + W' \Rightarrow u = w + w' : w \in W, w' \in W'$$

$$\alpha w \in W \wedge \alpha w' \in W' \Rightarrow \alpha u \in W + W'$$

Dla elementów z jednej podprzestrzeni warunek na zamknięcie na sumę wynika z bycia w jednej podprzestrzeni oraz należenia zera do drugiej.
Dla elementów z różnych podprzestrzeni warunek oczywisty z def. "+".

b). z Z9 wiemy, że $Lin(W \cup W') = Lin(W) + Lin(W')$, ale skoro W, W' są podprzestrzeniami V to są przestrzeniami liniowymi, więc są zamknięte na kombinacje liniowe, czyli $Lin(W) = W$ i $Lin(W') = W'$.