Maurycy Borkowski

23.04.2020

L8z9 (4 punkty)

Dowód. Z warunku $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$, dla dowolnego wielomianu $Q(x)$:

$$\int_0^1 Q(x)f(x)dx = 0$$

w szczególności dla wielomianów z Twierdzenia Weierstrassa:

$$0 \leqslant \int_0^1 f(x)f(x)dx = \int_0^1 f(x)f(x)dx - \int_0^1 P_n(x)f(x)dx =$$

$$= \int_0^1 f(x)\left(f(x) - P_n(x)\right)dx \leqslant \int_0^1 f(x)\frac{1}{n}$$

Możemy wybierać n dowolnie duże, więc wtedy wartość $\int_0^1 f(x)f(x)dx$ będzie dowolnie blisko zera.
Skoro całka $\int_0^1 f(x)f(x)dx = 0$ to $f(x) = 0 \quad dla \quad x \in [0,1]$, ponieważ w innym wypadku w pewnym punkcie (i jego otoczeniu, z ciągłości) funkcja przyjmowała by dodatnie wartości, więc całka nie byłaby zerowa. □

L8z8 (5 punktów)

Dowód. Rozważmy funkcję ze wskazówki:

$$g(x) = G(\arccos x) \quad x \in [-1,1]$$

$$G(\theta) = g(\cos\theta) \quad \theta \in [0,\pi]$$

$\arccos x$ jest funkcją ciągłą na $x \in [-1,1]$ więc $g(x)$ ciągła
Niech $P_n(x)$ oznacz ciąg wielomianów przybliżający funkcję $g(x)$.

$$|G(\theta) - P_n(\cos\theta)| = |G(\arccos x) - P_n(x)| = |g(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

$P_n(x)$ można przekształcić do szukanej formy wielomianu korzystając z:

$$\cos^n x = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}}\left[\sum_{r=0}^{2r<n}\binom{n}{2r}\cos\left((n-2r)\theta\right)\right] + \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}} & 2|n \\ \frac{1}{2^{n-1}}\left[\sum_{r=0}^{2r<n}\binom{n}{2r}\cos\left((n-2r)\theta\right)\right] & 2\nmid n \end{cases}$$

□