AiSD L6

Maurycy Borkowski

19.05.2021

zadanie 3.

Chcemy sprowadzić problem z zadania do problemu stwierdzania izomomorfizmu pomiędzy dwoma ukorzenionymi drzewami.

Lemat 1. *Wierzchołek centralny c leży na środku najdłuższej ścieżki.*

Dowód. Załóżmy, niewprost że tak nie jest oznaczmy c' wierzchołek w środku najdłuższej ścieżki $u \leftrightarrow v$. Wtedy odległość $dist(c', u) = dist(c', v) \pm 1$ ale $\max\{dist(c, u), dist(c, v)\} > \max\{dist(c', u), dist(c', v)\}$ stąd c nie jest wierzchołkiem centralnym. Sprzeczność. □

Okazuje się, że możemy ukorzenić drzewa w wierzchołkach centralnych.

Jeżeli istnieje izomomorfizm to wierzchołek centralny musi przechodzić na wierzchołek centralny. Najdłuższa ścieżka przechodzi na najdłuższą ścieżkę, a wierzchołek centralny leży w jej środku.

Szukanie centralnych

Wierzchołek centralny musi(szą) leżeć na pewnej najdłuższej ścieżce (minimalizują one najdłuższą odległość od innych punktów). Stąd możemy po prostu iteracyjnie obrywać drzewo z liści, aż zostaną conajwyżej dwa wierzchołki.

zadanie 4.

Pokolorujmy wierzchołki w drzewie Algorytmu Hoare'a:

- **Czerwony** korzeń i wierzchołki, które mają tablicę rozmiaru co najwyżej $\frac{3}{4}x$ gdzie x to rozmiar tablicy rodzica
- **Niebieski** pozostałe wierzchołki

Czerwone wierzchołki numerujemy od korzenia w dół l.

Rozmiar tablicy w każdym czerwonym wierzchołku jest ograniczony $\leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^l \cdot n$

Prawdopobieństwo posiadania niebieskiego syna ograniczamy przez $\frac{1}{2}$ musimy coś wybrać z pierwszej lub czwartej *kwarty*. Stąd prawdopodobieństwo posiadania k spójnych niebieskich potomków wynosi 2^{-k}.
Wartość oczekiwana niebieskiej lini potomstwa wynosi więc:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot 2^{-k} = 2$$

Każdy wierzchołek wykonuje liniowo operacji na swojej tablicy ($\mathcal{O}(n)$).
Zakładamy, że każdy j-ty czerwony wierzchołek ma dwóch niebieskich synów, ich tablice ograniczamy z góry przez tablice czerwonego przodka $\left(\frac{3}{4}\right)^l \cdot n$. Stąd wykonujemy dla każdego zestawu (cz-n-n):

$$(1+2) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^l \cdot \mathcal{O}(n)$$

W takim razie możemy oszacować oczekiwaną złożoność algorytmu z góry przez:

$$\sum_{l=0}^{\infty}(1+2)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^l\cdot\mathcal{O}(n) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^l\cdot\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n)\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^l = \mathcal{O}(n)\cdot\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = \mathcal{O}(n)$$

zadanie 5.

Lemat 2. *Długość najkrótszej ścieżki od korzenia do liścia wynosi co najwyżej* $\log(m+1)$ *gdzie* m *to liczba wierzchołków w poddrzewie ukorzenionym w* x*.*

Dowód. Długość najkrótszej ścieżki od x do liścia wynosi $h(x)$, stąd patrząc od góry od x mamy **pełne** drzewo binarne o wsysokości $h(x)$. Zatem w tym drzewie mamy conajmniej $2^{h(x)} - 1$ wierzchołków, jest to dolne ograniczenie na liczbę wierzchołków $2^{h(x)} - 1 \leqslant m$ stąd $h(x) \leqslant \log(m+1)$ □

Obserwacja: najkrótsza ścieżka od korzenia do liścia jest w skrajnie prawej ścieżce.
Gdyby tak nie było to gdzieś musiałby być zaburzony niezmiennik.

Merge

Sklejamy dwie skrajnie prawe ścieżki z T_1, T_2 (dwa posortowane ciągi) w jedną z T (jeden posortowany ciąg). Jesteśmy w stanie to zrobić liniowo od długości tych ścieżek, które z lematu są długości conajwyżej logarytmicznej. Następnie naprawiamy T dbając o niezmiennik. Jeżeli nie jest zachowany warunek zmieniamy synów miejscami. $\mathcal{O}(\log|T_1| + \log|T_2|)$

Insert

Tworzymy jedno elemntowe drzewo, łączymy je z drzewem.

Delete min/max

Zastępujemy drzewo, złączeniem prawego i lewego syna korzenia.

```
# min heap
def merge(t1,t2):
  if t1 is NULL:
    return t2
  if t2 is NULL:
    return t1

  if t1.key > t2.key:
    t1,t2 = t2,t1

  t1.right = merge(t1.right, t2)

  if t1.left is NULL:
    t1.left, t1.right = t1.right, t1.left
    t1.h = 1
    return t1

  if t1.right.h > t1.left.h:
    t1.left, t1.right = t1.right, t1.left
  t1.h = t1.right.h + 1
  return t1
```

zadanie 8.

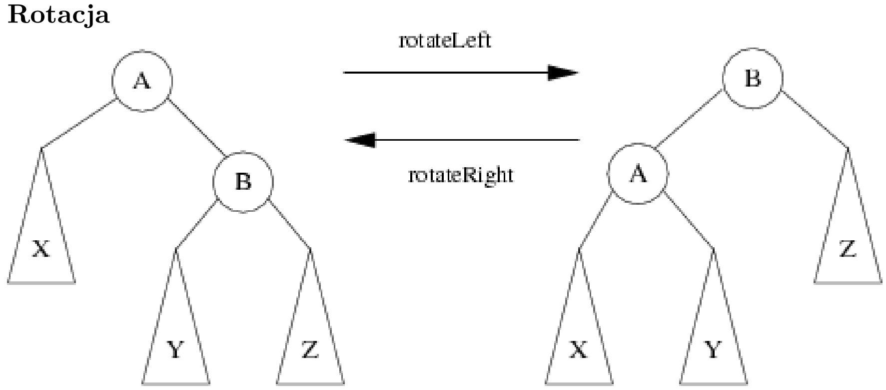
Drzewo AVL, ale trzymamy dodatkowe trzy informacje w wierzchołkach:

- $mindiff$ - wartość $mindiff$ w danym poddrzewie
- min - minimum w poddrzewie
- max - maximum w poddrzewie

$mindiff$ wyznaczamy (uważając na nulle):

$$\begin{aligned} mindiff = \min\{ & mindiff \text{ lewego syna} \\ & mindiff \text{ prawego syna} \\ & v - lewy.max \\ & prawy.min - v\} \end{aligned}$$

Mindiff Zwracamy wartość $mindiff$ korzenia.
Insert/Delete Aktualizujemy tylko wierzchołki na ścieżce od usuwane/dodanego wierzchołka do korzenia. Uaktualniamy $min, max, mindiff$.
Rotacja



rotacja lewa
Najpierw updatujemy min/max a potem na podstawie tego $mindiff$:

$A.max$ zmieniamy na $Y.max$
$B.min$ zmieniamy na $A.min$

rotacja prawa analogicznie

zadanie 9.

Obserwacja
Zauważmy, że nie musimy trzymać wartości o wyważeniu, w wierzchołkach, które mają conajwyżej 1 syna. W liściach, lub z jednym synem mamy odpowiednio wyważenie, albo przeciążenie w stronę jedynaka.

W szczególności *ostatnie piętro* samych liści nie potrzebuje trzymać tej informacji. Możemy więc zepchnąć te wartości o jeden poziom w dół. Każdy wierzchołek trzyma po jednym bicie w każdym swoim z dwóch synów, w ten sposób możemy trzymać informacje z 4 stanami (potrzebujemy 3) w każdym dwuliściowym wierzchołku (inne nie intersują nas z obserwacji).