LISTA 2

podgrupa

ZAD 3 $(G,\cdot)$ grupa, $A \subseteq G$. Czy $A \leqslant G$?

(d) $G = (\mathbb{Z}_8, +_8)$, $A = \{0,2,4,6\}$

(i) zamkniętość A na działanie $+_8$

Dodając modulo 8 parzyste reszty z $\mathbb{Z}_8$ znowu dostajemy parzystą resztę. Tzn.

$\forall a,b \in \{0,2,4,6\} \quad a +_8 b \in \{0,2,4,6\}$ ok.

(ii) $0 \in \{0,2,4,6\}$ el. neutralny OK

(iii) el. odwrotne $-_8 0 = 0$, $-_8 2 = 6$, $-_8 4 = 4$, $-_8 6 = 2$

należą do $\{0,2,4,6\}$

Czyli $\{0,2,4,6\} < \mathbb{Z}_8$

(e) $G = (\mathbb{Z},+)$, $A = \mathbb{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

(i) $\mathbb{Z}_7$ nie jest zamknięte na $+$ w $\mathbb{Z}$, bo

np. dla $5,6 \in \mathbb{Z}_7$ $\quad 5+6 = 11 \notin \mathbb{Z}_7$.

Czyli $\mathbb{Z}_7 \not< \mathbb{Z}$.

(f) $G = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $A = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \mid z^n = 1\}$

($n>0$ ustalone)

n-te pierwiastki zespolone z 1

(i) Weźmy $a,b \in A \Rightarrow a^n = 1 = b^n$

$(ab)^n = a^n b^n = 1\cdot 1 = 1 \Rightarrow ab \in A$ OK

(ii) 1: el. neutralny $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $1^n = 1 \Rightarrow 1 \in A$ ok

(iii) $a \in A \Rightarrow 1 = a^n \Rightarrow 1 = 1^{-1} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n \Rightarrow a^{-1} \in A$

$A < (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ OK

ZAD 4 $H \leqslant G$ i $N \leqslant G \Rightarrow H \cap N \leqslant G$

(i) $a,b \in H\cap N \Rightarrow a,b \in H$ i $a,b \in N$

$\Downarrow H \leqslant G \qquad \Downarrow N \leqslant G$

$ab \in H$ i $ab \in N$

$\Downarrow$

$ab \in H \cap N$ OK

(ii) $\left.\begin{array}{l} H \leqslant G \Rightarrow e \in H \\ N \leqslant G \Rightarrow e \in N \end{array}\right] \Rightarrow e \in H \cap N$ OK

(iii) $g \in H\cap N \Rightarrow g \in H$ i $g \in N$

$\Downarrow H \leqslant G \qquad \Downarrow N \leqslant G$

$g^{-1} \in H$ i $g^{-1} \in N$

$\Downarrow$

$g^{-1} \in H \cap N$ OK

Stąd $H \cap N \leqslant G$.