Maurycy Borkowski

27.04.2020

SUMA: 10 punktów

L9z8 (5 punktów)

a

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ ma dwie osobliwości: $0, \infty$

∞

Z twierdzenia o wartości średniej:

$$\left| \int_{b'}^{b''} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{b'}} \int_{b'}^{\xi} \sin x dx \right| = \left| \frac{\cos b' - \cos \xi}{\sqrt{b'}} \right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{b'}}$$

dla ustalonego ε bierzemy $b_0 = \frac{4}{\varepsilon^2}$ wtedy dla $b_0 < b' < b''$ mamy:
$\left| \int_{b'}^{b''} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \right| < \varepsilon$
Z warunku Cauchyego: całka jest zbieżna w osobliwości w ∞

0

$$\int_0^c \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^c \frac{\sin x}{x} \sqrt{x} dx \leqslant \int_0^c \sqrt{x} dx = C$$

Z kryterium porównawczego całka jest zbieżna (bezwzględnie) w osobliwości 0.

Zatem całka jest zbieżna bezwzględnie.

b

$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}(x+1)} dx$ ma dwie osobliwości: $0, \infty$

∞

Z twierdzenia o wartości średniej:

$$\left|\int_{b'}^{b''}\frac{\cos x}{\sqrt{x}(x+1)}dx\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{b'}(1+b')}\int_{b'}^{\xi}\sin x dx\right|=\left|\frac{\cos b'-\cos\xi}{\sqrt{b'}(1+b')}\right|\leqslant\frac{2}{\sqrt{b'}(1+b')}$$

Analogiczne rozumowanie jak w **a**

Z warunku Cauchyego: całka jest zbieżna w osobliwości w ∞

0

$$\left|\int_0^c\frac{\cos x}{\sqrt{x}(x+1)}dx\right|\leqslant\left|\int_0^c\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx\right|\leqslant\left|\int_0^c\frac{1}{\sqrt{x}}dx\right|=\sqrt{c}$$

Z kryterium porównawczego całka jest zbieżna (bezwzględnie) w osobliwości 0.

Zatem całka jest zbieżna bezwzględnie.

3 przykłady rachunkowe (6 punktów)

I

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin x}\quad punkty\quad osobliwe:\pi,0$$

Dla $x\in[0,\pi]$ $\quad x>\sin x$ z tego: $\frac{1}{\sin x}>\frac{1}{x}$.
Dalej z kryterium porównawczego

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin x}dx>\int_0^{\pi}\frac{1}{x}dx$$

Całka po prawej nierówności nie jest zbieżna bo $\lim_{x\to 0^+}\ln x=\infty$

II

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx\quad punkty\quad osobliwe:0,\infty$$

$$\int_c^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx<\int_c^{\infty}\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x}\mid_c^{\infty}\to\frac{1}{c}$$

Sprawdźmy w 0:

$$\int_0^c\frac{\cos x}{1+x^2}dx<\int_0^c\frac{1}{1+x^2}=-\arctan x\mid_0^c\to=-\arctan c$$

Zatem całka jest zbieżna.

III

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \quad punkty \quad osobliwe : 0$$

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \mid_0^1 = 2$$