zadanie 10.

X - zmienna losowa opisująca liczbę osób *popierających*.
Oczywiście $X \sim B(n, p)$ gdzie p to rzeczywista frakcja.

Z rozkładu dwumianowego:

$$\mathbb{E}X = np$$
$$\text{oraz}$$
$$\text{Var}[X] = np(1-p)$$

Interesuje nas oszacowanie dla warunku prawdopobieństwa popełnienia błędu bezwzględnego oszacowania frakcji poparcia większego niż 0.01 było mniejsze niż 0.05:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant 0.01\right) \leqslant 00.5 \iff P\left(|X - np| \geqslant 0.01n\right) \leqslant 00.5 \tag{1}$$

Z nierówności Czebyszewa mamy:

$$P\left(|X - np| \geqslant 0.01n\right) \leqslant \frac{np(1-p)}{\left(\frac{n}{100}\right)^2} = 10^4 \cdot \frac{p(1-p)}{n}$$

stąd aby warunek (1) był zachowany wystraczy by:

$$10^4 \cdot \frac{p(1-p)}{n} \leqslant 0.05$$

co daje dolne ograniczenie na n:

$$n \geqslant 2 \cdot 10^5 \cdot p(1-p)$$

a)

z uwzględnieniem warunku $0 \leqslant p \leqslant 0.3$ ostatecznie mamy:

$$n \geqslant 2 \cdot 10^5 \cdot 0.21 = 42000$$

b)

bez innych ograniczeń niż $0 \leqslant p \leqslant 1$ otrzymujemy:

$$n \geqslant 2 \cdot 10^5 \cdot 0.25 = 50000$$

zadanie 2.

O - zmienna losowa opisująca liczbę orłów po trzech rzutach
Chcemy policzyć warunkową wartość oczekiwaną $E(X|O \leqslant 1)$, rozpisujemy:

$$E(X|O \leqslant 1) = P(O = 0|O \leqslant 1)E(X|O = 0) + P(O = 1|O \leqslant 1)E(X|O = 1)$$

Z $O \sim B(3, 0.5)$ mamy:
$P(O = 0|O \leqslant 1) = \frac{1}{4}$ $P(O = 1|O \leqslant 1) = \frac{3}{4}$

Z definicji liczymy:

$$E(X|O = 0) = \sum_{x=0}^{3} xP(X = x|O = 0) = 0 + 0 + 0 + 3 = 3$$
$$E(X|O = 1) = \sum_{x=0}^{3} xP(X = x|O = 1) = 0 + 0 + 2 + 0 = 2$$

Ostatecznie:
$$E(X|O \leqslant 1) = \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{9}{4}$$