Zadanie 5

20.01.2021

W zadaniu musimy pokazać, że $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2}$ definiuję submultiplikatywną normę w $\mathbb{R}^{n \times n}$ zgodną z normą wektorową $\|\cdot\|_2$, musimy więc pokazać, że:

1. $\|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_E \cdot \|x\|_2$
2. $\|A\|_E \geqslant 0 \quad \|A\|_E = 0 \iff A = 0$
3. $\|\lambda A\|_E = |\lambda| \cdot \|A\|_E$
4. $\|A + B\|_E \leqslant \|A\|_E + \|B\|_E$
5. $\|A \cdot B\|_E \leqslant \|A\|_E \cdot \|B\|_E$

1

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|A\|_E^2 \cdot \|x\|_2^2$$

wynika to z nierówności Cauchy'ego-Schwarz'a dla każdego i:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \leqslant \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

2

Wynika to z podstawowych własności liczb rzeczywistych. Suma kwadratów jest nieujemna, a więc suma kwadratów jest równa zero wtw. gdy każdy z nich jest zerem.

3

$$\|\lambda A\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (\lambda a_{ij})^2} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2} = |\lambda| \cdot \|A\|_2$$

4

$$\|A+B\|_E^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{ij}+b_{ij})^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2 + 2a_{ij}b_{ij} + b_{ij}^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2 + 2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}b_{ij} + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}^2$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2 + 2\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}^2} + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}^2 = (\|A\|_E + \|B\|_E)^2$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności Cauchy'ego-Schwarz'a.

5

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarz'a:

$$\|A\cdot B\|_E^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{ik}|^2\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n |b_{kj}|^2 = \|A\|_E^2 \cdot \|B\|_E^2$$