Zad 2

I) Warunkiem koniecznym na izomorfizm między G a $\bar{G}$ jest: $|E_G| = |E_{\bar{G}}|$.

Wiemy, że jeżeli $|V_G| = n$ to $|E_{\bar{G}}| = \frac{n(n-1)}{2} - n$ (w sumie tworzą graf pełny)

Mamy więc $|E_G| = |E_{\bar{G}}| = \frac{n(n-1)}{4}$ widzimy więc, że war. koniecznym jest $n \equiv 0 \mod 4$ lub $n \equiv 1 \mod 4$.

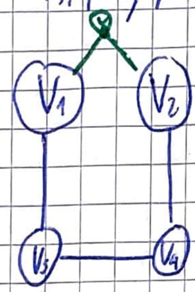
II) Pokażmy teraz konstrukcję grafu samodopełniającego o n wierzchołkach:

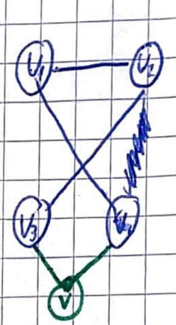
$n \equiv 0 \mod 4$

Dzielimy wierzchołki: V_1, V_2, V_3, V_4:

G: $V_{1,2}$ – g. pełny, $V_{3,4}$ – g. pusty

$\bar{G}$: $V_{1,2}$ – g. pusty, $V_{3,4}$ – g. pełny





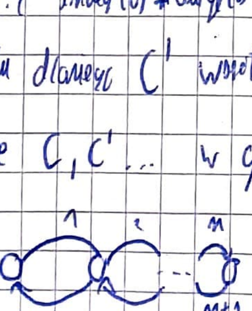
IZOMORFIZM:
$V_1 \leftrightarrow V_4$
$V_2 \leftrightarrow V_3$
$V \leftrightarrow V$

$n \equiv 1 \mod 4$ Dodajemy go do poprzedniej konstrukcji jak na rysunku

Zad 4

$\Rightarrow$ Załóżmy, że G ma cykl Eulera. Jeżeli cykl nie jest prosty (nie powtarza wierzchołków) to musi zawierać cykl prosty (zał. o spójności). Usuwamy cykl prosty, usuwamy krawędzie w tym cyklu i zmniejszamy outdeg, indeg o 1 wierzchołkom na cyklu. Powtarzamy usuwanie cyklu prostego aż do usunięcia wszystkich krawędzi. Za każdym taką operacją zmniejszamy indeg(v) i outdeg(v) równo o 1, na końcu indeg(v) = outdeg(v) = 0 zatem na początku indeg(v) = outdeg(v) ■

$\Leftarrow$ Wybieramy losowy v, z lematu istnieje cykl C zawierający v. W G usuwamy krawędzie C. Ze spójności istnieje u t.ż. indeg(u) = outdeg(u) > 0 w nowym G. Szukamy cyklu dla niego C' wspólnym wierzchołkiem z C. itd. Łączymy cykle $C, C' \dots$ w cykl Eulera ■



LEMAT: $\forall_v$ indeg(v) = outdeg(v), istnieje cykl zawierający v

D-d: Wybieramy krawędź z v, przechodzimy dalej do... Za każdym razem gdy wchodzimy do wierzchołka musi istnieć krawędź wychodząca z założenia o indeg = outdeg. (nie powtarzamy krawędzi). Jedynie w v możemy zakończyć, bo tam jest indeg(v) = outdeg(v)+1. Ze skończoności grafu, na pewno wrócimy do v □

Zad. 5

$\Longrightarrow$ Minimalne cięcie dzieli G na G_1 i G_2.

- Z lematu o uściskach dłoni suma stopni w G_1 jest parzysta
- Z drugiej strony suma st. w G_1 to suma st. wierzchołków z G_1 zestępując z G minus minimalne cięcie, z zał. G eulerowski więc suma ~~minimalne cięcie~~ też parzysta $P = K - P \Longrightarrow K = P$

więc minimalne cięcie ma parzystą ilość kraw.

$\Longleftarrow$ Dla każdego wierzchołka jego stopień jest parzysty. Skoro graf jest spójny a st. jego wierzchołków parzyste to jest eulerowski

↳ wszystkie wierzchołki jako minimalne cięcie

Zad. 8

Oznaczmy wierzchołek o największej liczbie krawędzi wychodzących: V. Załóżmy niewprost, że istnieje U t.ż. nie istnieje droga z V krótsza niż 3. (≤ 2). Stąd wynika, że wszystkie wierzchołki połączone krawędzią wychodzącą z V, są połączone z U krawędzią wychodzącą z U, inaczej byłaby droga dł. 2, ale krawędź $U - V$ jest z U do V, inaczej droga dł. 1.

Otrzymujemy sprzeczność $outdeg(V) < outdeg(V) + 1 \leq outdeg(U)$ ↯

■

Zad. 9

Podstawa ind.:

1 - ✓ •

2 • → • ✓
• ← •

Krok: Zał. że dla danego turnieju o n wierzchołkach istnieje ścieżka Hamiltona:

Weźmy $T / \{V_0\}$ ma ścieżkę Hamiltona $V_1 \dots V_n$ z założenia. ~~Weźmy największe~~ $V_1 \to V_0$

dla $V_i \to V_0 \land V_0 \to V_{i+1}$, jest to możliwe $i \in \{0 \dots n\}$ t.ż. $V_i \to V_0$, istnieje ono ~~Szczególnie~~ bo $V_0 \to V_n$ inaczej ścieżka: $V_1 \dots V_n, V_0$.

Mamy więc ścieżkę Hamiltona: $V_1 \dots V_i V_0 V_{i+1} \dots V_n$ albo $V_1 \dots V_n V_0$ w zależności od stosunku tych V_0, V_n

Zad. 10

a) ROZW:

1	22	13	18	7
14	19	8	23	12
9	2	21	6	17
20	15	4	11	24
3	10	25	16	5

b) Skoczek zmienia kolor pola przy każdym ruchu, i pól jest 25. Po nieparzystej liczbie ruchów ~~(?)~~ (pól odwiedzonych) będzie na polu o przeciwnym kolorze do startowego. Nie może skończyć w tym samym miejscu.

Zad. 12

Weźmy dowolne dwa niepołączone wierzchołki u, v. Jeżeli taka para nie istnieje, mamy trywialny przypadek grafu pełnego. Z pozostałych $n-2$ wierzchołków wybieramy dowolnie jeden, w.

Z ~~[illegible]~~ zatem $\{u,v\}, \{v,w\}, \{w,u\}$, dwie krawędzie istnieją, są to $\{v,w\}$, i $\{u,w\}$ bo v,u niepołączone

Z dowolności wyboru w, $\deg(u) = \deg(v) = n-2$.

Z twierdzenia Orego: $\deg(u)+\deg(v) = 2n-4 \geq n-1$ dla $n \geq 3$ G posiada cykl Hamiltona ■

Zad. 14 Oznaczmy wierzchołki $\{0,1,2,\ldots,2n-1\}$

Kolejne ścieżki: $0, 2n-1, 1, 2n-2 \ldots n$ $\quad \big\} +1 \mod (2n)$

$1, 0, 2, 2n-1, \ldots, n+1$

$\big\}$ mod

$\vdots$

Ze [illegible] w K_{2n} cykle [illegible] dodając jeden wierzchołek idąc [illegible] końcowy.