Zastosowania równań pierwszego rzędu

Zadanie 27. Pewna osoba uczy się pisać na maszynie. Niech N oznacza maksymalną liczbę słów jakie potrafi napisać ona napisać w ciągu minuty. Załóżmy, że prędkość zmian N (tzn. $N'(t)$) jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy N oraz górną granicą 140. Rozsądnym jest założyć, że na początku osoba ta nie potrafiła napisać żadnego słowa (tzn. $N(0) = 0$). Okazało się, że osoba ta potrafi napisać 35 słów na minutę po 10 godzinach uczenia się. a) Ile słów na minutę będzie pisać ta osoba po 20 godzinach uczenia się? b) Jak długo musi ona ćwiczyć, aby napisać 105 słów na minutę?
Zadanie 28. Plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszały tę plotkę oraz liczby osób, które jeszcze nie słyszały tej plotki. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób?
Zadanie 29. *(Inny model rozprzestrzeniania się plotki).* Załóżmy teraz, że plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób według prawa Gompertza:

$$\frac{dy}{dt} = kye^{-(73/520)t},$$

gdzie $y(t)$ jest liczą osób, które słyszały plotkę po t dniach. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób?
Zadanie 30. Epidemia grypy w populacji liczącej 50000 osób rozprzestrzenia się według prawa Gompertza:

$$\frac{dy}{dt} = kye^{-0,03t},$$

gdzie $y(t)$ oznacza liczbę zarażonych grypą po t dniach. Załóżmy, że na początku było 100 chorych, a po 10 dniach – 500. Kiedy połowa populacji będzie zarażona?
Zadanie 31. Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia (prawo Newtona). Zakładamy, że $S(0) = 100^oC$ w temperaturze otoczenia 20^oC. Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosiła 60^oC. Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę 25^oC?
Zadanie 32. Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata. Wynosiła ona $32,6^o$ C. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła $31,4^o$C. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21^oC. Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo – Jan G., twierdzi jednak, że jest nie winny. Ma alibi. Po południu był on w restauracji. O 17:00 miał rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut na piechotę od miejsca morderstwa. Czy alibi to jest niepodważalne?
Zadanie 33. *(Ciąg dalszy zadania poprzedniego).* Obrońca Jana G. zauważył, że zamordowany był u lekarza o 16:00 w dniu śmierci i wtedy jego temperatura wynosiła $38,3^o$C. Załóżmy, że taką temperaturę miał on w chwili śmierci. Czy można dalej podejrzewać, że Jan G. popełnił to morderstwo?
Zadanie 34. Załóżmy, że nowa pojedyncza cząsteczka C tworzy się z pojedynczych cząsteczek składników A i B ($A + B \to C$). Prędkość pojawiania się cząsteczek produktu C jest wprost proporcjonalna do iloczynu składników A i B. Napisz funkcję $C(t)$ jako funkcję t. Załóż, że początkowa koncentracja skałdników A to $a \ \frac{mol}{dm^3}$, składnika B - $b \ \frac{mol}{dm^3}$ i na początku nie ma żadnych czasteczek produktu C. Rozwiąż tak otrzymane zagadnienie. Jeśli $a = b$, to jak wygląda rozwiązanie?

Zadanie 35. Nietypową reakcją jest reakcja: $H_2 + Br_2 \to 2HBr$. Równanie które opisuje prędkość pojawiania się cząsteczek HBr dane jest wzorem

$$\frac{d[HBr]}{dt} = k[H]([Br])^{\frac{1}{2}}.$$

Napisz równanie dla $x(t) = [HBr]$. Załóż, że początkowa koncentracja składników A to $a\ \frac{mol}{dm^3}$, składnika B - $b\ \frac{mol}{dm^3}$ i na początku nie ma żadnych czasteczek HBr. a) dla $a = b$ znajdź rozwiązanie równania. b) znajdź rozwiązanie dla $a > b$ (podpowiedź $u = \sqrt{b - x}$).

Zadanie 36. Do basenu o pojemności N litrów wlewana jest woda z prędkością A litrów na minutę. W basenie znajduje się początkowo x_0 kg pewnej substancji X. Zakładamy, że woda w basenie jest mieszana w sposób idealny, to znaczy stężenie substancji X jest takie same w każdym miejscu basenu. Równocześnie z basenu spuszczana jest woda z prędkością B litrów na minutę. a) udowodnij, że stężenie zawsze maleje; b) zakładając że $A = B$, oblicz po jakim czasie stężenie substancji X spadnie o połowę; c) zakładając że A jest ustalone, wyznacz wartość B tak, żeby stężenie substancji X spadło o połowę po 10 minutach.

Zadanie 37. Załóżmy, że mamy dwie tak samo liczne grupy (po N osób). W pierwszej grupie jest x_0 zarażonych koronawirusem, a w drugiej grupie zarażonych jest y_0 osób. Rozważmy dwa scenariusze: w pierwszym obie grupy są wymieszane, w drugim obie grupy nie kontaktują się ze sobą. Sprawdź, jak ewoluuje liczba zarażonych w obu przypadkach. Zakładamy, że tempo wzrostu liczby zarażonych jest proporcjonalne do iloczynu liczby zarażonych i zdrowych.

Zadanie 38. Jednym z modeli wzrostu nowotworu jest tzw. model Gompertza, tzn. równanie postaci:

$$y'(t) = \alpha y \ln\left(\frac{K}{y}\right).$$

Znajdź rozwiązanie tego równania. Co można powiedzieć o zachowaniu rozwiązania przy czasie dążącym do $+\infty$?

Zadanie 39. Wzrost objętości komórki zależny jest od różnicy między dostarczaną energią, a energią zużywaną na procesy życiowe. Zakładając, że wielkość dostarczanej energii jest proporcjonalna do powierzchni komórki (przez którą odbywa się transport), a zużywana energia jest proporcjonalna do objętości komórki, napisz równanie modelujące wzrost objętości komórki. Wsk. Równanie staje się prostsze do rozwiązania jeśli wprowadzi się nową zamienną, której sześcian jest równy objętości.

Andrzej Raczyński