II rzędu

Jednorodne: $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ oraz $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$
Wrońskian $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(y)y_2(t)(= 0)$ wtedy LNZ.
Jak y_1, y_2 są to rozwy to ogólne to kombinacja liniowa.

a,b,c = const

Liczymy wielomian charakterystyczny: $ar^2 + br + c = 0$
$\Delta > 0$ ogólne: $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
$\Delta = 0$ ogólne: $y(t) = C_1 e^{r_0 t} + C_2 t e^{r_0 t}$
$\Delta < 0$ ogólne: $y(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$ gdzie $\alpha = Rer_1, \beta = Imr_1$

f(t) ≠ 0

M. uzmienniania stałej: zakładamy rozwiązanie $y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$
Gdzie y_1, y_2 rozwiązania fundamentalne jednorodnego, z wielomianu itd.
Liczymy: $\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(y) \\ y_1'(t) & y_2'(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$

n rzędu

$r_1, r_2, \ldots, r_n$ pierwiastki wielomianu to rozwiązanie:
$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \ldots + C_n e^{r_n t}$ gdy r_i k-krotny: $e^{r_i t}, \ldots, t^{k-1} e^{r_i t}$
Gdy zespo $z_1 = a + bi$, $z_2 = a - bi$ rozwy: $Re(z_1) = e^{at}$i $Im(z_1) = e^{at}\sin(bt)$

Szeregów potęgowych

Zakładamy funkcje: $y(t) = a_0 + a_1 t + a_t t^2 \ldots$,wtedy $y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ itd.

Transformata Laplace'a

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$, jest liniowa, f-wzrost podwykładniczy $\mathcal{L}\{\sin(\alpha t)\}(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}, \mathcal{L}\{\cos(\alpha t)\}(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}, \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$
Tw1. $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$ oraz $\mathcal{L}\{-tf(t)\}(s) = \frac{d}{ds} F(s)$
Tw2. $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0)$ oraz $\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$ $Y(s)$-transformata, $\mathcal{L}(rownanie) =$ ze wzorów wyż. $= \mathcal{L}(f(t))$ (prawa strona)
Znajdujemy $Y(s)$ i reverse engineering żeby znaleźć co ją zrobiło $(y(t))$

Układy równań liniowych

wektorowo: $x' = Ax$ (n-zmiennych). Tw: dowolne n-rzędu na n-rownań:
dane: $a_n x^{(n)}(t) + \ldots a_1 x = 0$, dalej $y_1(t) = x(t), y_2(t) = x', \ldots y_n(t) = x^{(n-1)}(t)$
mamy: $y_1'(t) = (x'(t) =) y_2(t), \ldots, y_{n-1}'(t) = y_n(t)$, ostatnie liczymy: $y_n'(t) = x^{(n)}(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x^{(n-1)}(t) - \ldots - \frac{a_0}{a_n} x(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_n(t) - \ldots - \frac{a_0}{a_n} y_1(t)$
stąd mamy $x' = Ax$, gdzie A, 1 na przekątnej nad diag, $-\frac{a_i}{a_n}$ w dolnym wierszu.

$x_1, x_2 \ldots, x_n$ są rozwiązaniami i tworzą n-wymiarową przestrzeń liniową
NWSR: $x_1(t), \ldots, x_n(t) \forall t$ LNZ $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ LNZ

Metoda wartości własnych

TW: rozwiązanie $x_j = e^{\lambda_j} v_j$ gdzie λ, v to wart. i wekt. własny
Ogólne: $x(t) = C_j e^{\lambda_j t} v_j$
$z = x + iy$ jest rozwem (to x, y rozwami) $\quad e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$
Rozw $x' = Ax \quad x(0) = x_0$ jest dane: $x(t) = e^{tA} x_0$
$AB = BA \implies e^{A+B} = e^A + e^B$ oraz $e^{\lambda I dt} = e^{\lambda t} v$
Jak ($\geqslant$)dwie wartości własne i jeden wektor własny v_1 to drugi $(A - \lambda_1 Id)v_2 = v_1$
pierwsze klasycznie: $e^{t\lambda_1} v_1$ a drugi $e^{tA} v_2 = e^{t\lambda_1}(v_2 + tv_1)$

Macierz fundamentalna

Kolumnami są rozwiązania $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ wtedy $e^{tA} = X(t)X^{-1}(0)$
$x' = Ax + f(t)$ wtedy rozw $x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{tA} e^{-sA} f(s) ds$