1. Załóżmy nie wprost, że istnieją takie liczby $a, b \in \mathbb{Q}$, że $a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} = 0$ i $b \neq 0$. Wówczas przekształcając otrzymamy równość

$$a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{2} = -\frac{a}{b} \cdot 1,$$

która zajść nie może, bo po lewej stronie jest liczba niewymierna, a po prawej wymierna, zatem $b = 0$. Wobec tego

$$a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} = 0 \Longleftrightarrow a \cdot 1 = 0,$$

zatem $a = 0$, więc dowolna para liczb $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ taka, że $a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} = 0$ to para $(0, 0)$, więc zbiór $\{1, \sqrt{2}\}$ jest lnz w $\mathbf{R}$ traktowanym jako przestrzeń liniowa nad $\mathbf{Q}$.

13. Niech U i V będą przestrzeniami liniowymi nad K, niech $(b_1, \ldots, b_n)$ będzie bazą U i niech $(c_1, \ldots, c_n)$ będzie bazą V.
Zdefiniujmy przekształcenie liniowe $f : U \mapsto V$ w taki sposób, by dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, n\}$ zachodziła równość $f(b_i) = c_i$. Wiemy, że $(b_1, \ldots, b_n)$ jest bazą U, zatem istnieje dokładnie jeden ciąg $(\alpha_i)_{i=1}^n$ elementów ciała K, dla którego $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. Wobec tego, z własności przekształcenia liniowego mamy

$$f(u) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i b_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(b_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i.$$

Udowodnimy, że f jest monomorfizmem. Niech u i u' będą dowolnymi różnymi wektorami w przestrzeni U. Wówczas $u - u'$ jest niezerowym wektorem w U, więc istnieje taki ciąg $(\alpha_i)_{i=1}^n$ nie samych zer, że $u - u' = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. Zauważmy, że zajdą równości

$$f(u) - f(u') = f(u) + f(-u') = f(u - u') = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i b_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(b_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i.$$

Skoro $(c_1, \ldots, c_n)$ jest bazą V i ciąg $(\alpha_i)_{i=1}^n$ nie jest ciągiem samych zer, to powyższa suma nie może być wektorem zerowym w V, zatem dla dowolnych różnych wektorów u, u' zachodzi nierówność $f(u) \neq f(u')$.

Udowodnimy, że f jest epimorfizmem. Niech v będzie dowolnym wektorem w V. Wówczas istnieje dokładnie jeden ciąg $(\alpha_i)_{i=1}^n$ elementów ciała K, dla którego $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i$. Pokażemy, że istnieje taki wektor u w U, że $f(u) = v$. Takim wektorem jest $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$.

Udowodniliśmy, że f jest epimorfizmem i monomorfizmem, zatem jest izomorfizmem.

14. Niech $\dim W = k$ i $\dim V = n$. Niech $(a_1, \ldots, a_k)$ będzie lnz układem wektorów w W. Niech $(b_1, \ldots, b_n)$ będzie bazą V. Niech $c_1, \ldots, c_k$ będą takimi wektorami w U, że dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, k\}$ zachodzi równość $f(a_i) = c_i$.

Z lematu Steinitza o wymianie możemy tak przenumerować elementy $(b_1, \ldots, b_n)$, że układ wektorów $(a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni V.

Zdefiniujmy przekształcenie liniowe $F : V \mapsto U$ w następujący sposób: dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, k\}$ zachodzi równość $f(a_i) = c_i$ oraz dla wszystkich $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ zachodzi równość $f(b_i) = 0$.
Takie przekształcenie jest określone dla wszystkich elementów V, ponieważ jest określone dla bazy V. Ponadto dla dowolnego elementu $w = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i$ przestrzeni W zachodzi równość

$$F(w) = F\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i F(a_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i c_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(a_i) = f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i\right) = f(w),$$

zatem f jest obcięciem F.

Przykładowo, dla $V = \mathbf{R}_2[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_2[X] | P(3) = 0\}$, $U = \mathbf{R}_1[X]$ i $f(P) = \frac{P(X)}{X-3}$ korzystając ze sposobu opisanego w dowodzie dla $(a_i)_{i=1}^2 = (X-3, (X-3)^2)$, $b_3 = 1$ mamy $F(a_2X^2 + a_1X + a_0) = a_2X + (3a_2 + a_1)$.

16. Niech $U = \{P \in \mathbf{R}_1[X] \,|\, P(0) = 0\}, V = \{P \in \mathbf{R}_1[X] \,|\, P(1) = 0\}, W = \{P \in \mathbf{R}_1[X] \,|\, P(2) = 0\}$. Wiemy, że $\dim U = \dim V = \dim W = 1$.
Mamy $U \cap V = V \cap W = W \cap U = U \cap V \cap W = \{0X + 0\}$. Wobec tego

$$\dim(U+V+W) = 2 \neq 3 = \dim U + \dim V + \dim W - \dim(U \cap V) - \dim(V \cap W) - \dim(W \cap U) + \dim(U \cap V \cap W),$$

więc twierdzenie jest fałszywe.

Dla większej liczby przestrzeni oznaczmy je jako $V_1, \ldots, V_n$, $n \geqslant 3$, ich zbiór jako $A = \{V_1, \ldots, V_n\}$ i niech $V_i = \{P \in \mathbf{R}_1[X] \,|\, P(i) = 0\}$. Wówczas $V_1 + \ldots + V_n = \mathbf{R}_1[X]$, więc $\dim(V_1 + \ldots + V_n) = 2$ i dla dowolnych i, j takich, że $i \neq j$ mamy $\dim(V_i \cap V_j) = \dim(\{0X + 0\}) = 0$. Pozwala nam to zapisać nierówność

$$2 = \dim(V_1 + \ldots + V_n) \neq \sum_{S \subseteq A} \dim\left(\bigcap_{V_i \in S} V_i\right) = \sum_{\substack{S \subseteq A \\ |S|=1}} \dim\left(\bigcap_{V_i \in S} V_i\right) + \sum_{\substack{S \subseteq A \\ |S| \neq 1}} \dim\left(\bigcap_{V_i \in S} V_i\right) = n + 0.$$

17. Niech $V = \mathbf{R}[X]$. Wówczas

a) $F(P) = P'$ jest epimorfizmem, bo dla każdego wielomianu istnieje funkcja pierwotna, ale nie jest monomorfizmem, bo dla dowolnego wielomianu P zachodzi równość $F(P+1) = (P+1)' = P' = F(P)$

b) $F(P) = P \cdot X$ jest monomorfizmem, bo dla każdych dwóch wielomianów $P \neq Q$ również $PX \neq QX$, ale nie jest epimorfizmem, bo nie istnieje taki wielomian P, że $PX = 1$, a przecież $1 \in \mathbf{R}[X]$.