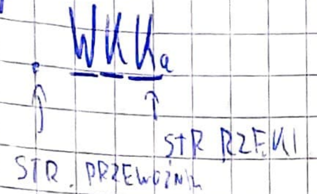
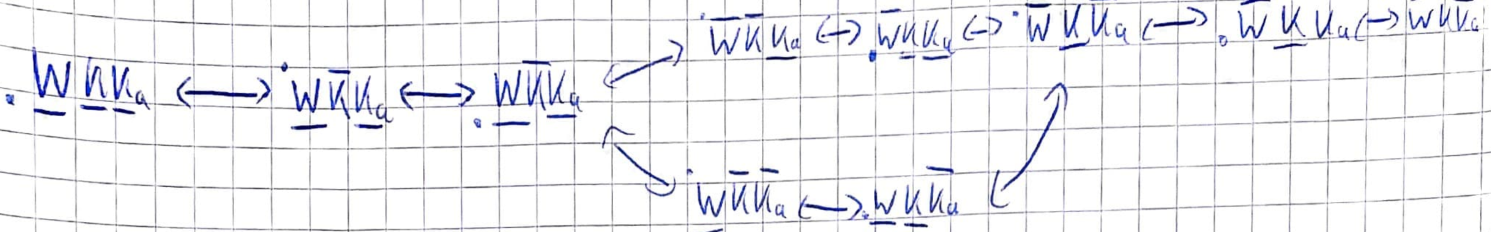
Zad. 1

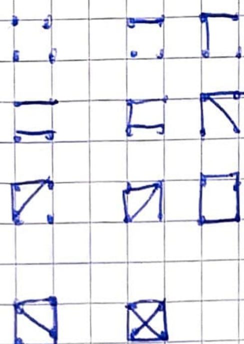




Zad. 4

3.

4.



Zad. 6

$n(Q_k) = 2^k$ – wszystkie ciągi binarne długości k

liczymy dwa razy

$m(Q_k) = n(Q_k) \cdot \deg(v) \cdot \frac{1}{2} = 2^k \cdot k \cdot \frac{1}{2} = k2^{k-1}$

każdy wierzchołek ma tyle samo sąsiadów k bo na k pozycjach mogą się różnić

Weźmy dowolny ~~ciąg~~ cykl ~~który jest~~ ; na każdej pozycji, która jest zmieniana z wartości z $V_0 = V_d$, musimy dokonać zmian parzyście wiele razy żeby w $V_d = V_0$. ~~...~~ Więc w cyklu będzie parzyście wiele (w tym 0) zmian każdego bitu, więc cykl prowadzi przez parzyście wiele wierzchołków, więc dł. cyklu jest parzysta.

Z Tw. graf jest dwudzielny bo wszystkie cykle parzyste.

zad 7. $V = \{1, \dots, n\}$

a) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ← WSZYSTKIE MOŻLIWE KRAWĘDZIE

b) liczba krawędzi $E = \frac{n(n-1)}{2} + n$ ← pętle

$$\bar{C}^m_E = \binom{m+E-1}{m} = \binom{m + \frac{n(n-1)}{2} + n - 1}{m}$$ – kombinacje z powtórzeniami

c) $E = n^2$

$$\bar{C}^m_E = \binom{m + n^2 - 1}{m}$$

Zad. 8 graf dwudzielny $K_{q,p}$ $\quad p+q=n \rightarrow q = n-p$

$$f(p) = |E(K_{p,q})| = q \cdot p = (n-p) \cdot p = np - p^2$$

$$\frac{df}{dp} = n - 2p \qquad f'(p) = 0 \iff p = \frac{n}{2} \text{ więc } q = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

więc max: $p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ $q = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ $|E(K_{p,q})| = \left\lfloor \left(\frac{n}{2}\right)^2 \right\rfloor$

Zad. 9 Chcemy udowodnić G niespójny $\Rightarrow \bar{G}$ spójny

Zał., że G nie jest spójny, weźmy dowolne wierzchołki U, V:

1. $\{U,V\} \notin E(G)$, więc $\{U,V\} \in E(\bar{G})$

2. $\{U,V\} \in E(G)$, więc U,V w jednej składowej, ale z niespójności G istnieje W w innej komponencie więc $\{U,W\}$ i $\{V,W\}$ nie należą do G więc należą do $\bar{G}$. $U \to W \to V$

z 1. i 2. dowolne dwa wierzchołki mają ścieżkę w $\bar{G}$ $\blacksquare$

Zad. 11

(dł. k)

Załóżmy nie wprost, że istnieją dwie ścieżki najdłuższe nie posiadające wspólnego wierzchołka

$P_1 = \langle u_0, u_1 \ldots u_k \rangle$ $P_2 = \langle v_0, v_1 \ldots, v_k \rangle$

Skoro G spójny istnieją $\forall i, j$ t. że $\exists$ jest ścieżka P_3 między u_i, v_j.

$P_3 = \langle w_0, \ldots w_l \rangle$

Wtedy rozważmy $P^* = \langle u_0 \ldots u_i, w_0 \ldots, w_l, v_j \ldots, v_k \rangle$

Długość ścieżki $P^* = k + l > k$ $\Downarrow$ ~~sprz.~~ P_1, P_2 nie są najdłuższe