Maurycy Borkowski

03.06.2020

SUMA: 14 punktów

zad. 3 (1 punkt)

Możliwe krotności: (4,1,1), (3,2,1), (2,2,2). Razy 3! (jakie wartości własne).
Ostatecznie możliwych postaci jest: $3 * 6 = 18$.

zad. 4 (1 punkt)

I

$$\begin{cases} a^2 + bc = 4 \\ ab + bd = 1 \\ ac + cd = 0 \\ cb + d^2 = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

II

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ma jedną wartość własną 4, krotność 2. Jedna klatka:

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Szukamy bazy jordanowskiej:
Znajdujemy wektor własny $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ więc dalej:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Szukana macierz:

$$M = X \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X^{-1}$$

zad. 5 (1 punkt)

I

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Wartości własne: 3, -1 (krotność 2).
$rankA = 2$ więc będzie jedna klatka rozmiaru 2 odpowiadająca -1. Zatem:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

II

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Wartości własne:1, 2+i, 2-i.
Ta macierz diagonalizuję się nad $\mathbb{C}$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 1 \\ 0 & 0 & 2+i \end{pmatrix}$$

zad. 6 (1 punkt)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wartości własne: 3+2i, 3-2i.
Szukamy wektorów własnych:

$$\begin{pmatrix} 1 \pm 2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zatem:

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+2i & 0 \\ 0 & 3-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

zad. 8 (2 punkty)

I

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Jest jedna wartość własna: -1
Przestrzeń liniowa:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -x \\ 5x - 3y + 3z = -y \\ -x - 2z = -z \end{cases}$$

$$V^{-1} = lin(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\})$$

Przestrzenie pierwiastkowe:

$$ker(A+1)^2 = lin(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\})$$

$$ker(A+1)^3 = \mathbb{R}^3$$

Baza jordanowska (losowy, przemnożony przez A+E, $(A+E)^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Klatka będzie jedna rozmiaru 3: Ostatecznie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

II

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wartości własne: 0 i 2 z krotnościami 2
Przestrzenie liniowe:

$$\begin{cases} -2y + 3z + 2h = 2x \\ x + y - z - h = 2y \\ 2z = 2z \\ x - y + h = 2h \end{cases}$$

$$V^2 = lin(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\})$$

$$\begin{cases} -2y+3z+2h=0 \\ x+y-z-h=0 \\ 2z=0 \\ x-y+h=0 \end{cases}$$

$$V^0 = lin(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\})$$

Przestrzenie pierwiastkowe dla 2:

$$ker(B-2)^2 = lin\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\})$$

Przestrzenie pierwiastkowe dla 0:

$$ker(B)^3 = ker(B)^2 = lin\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\})$$

Baza jordanowska (losowy, przemnożony przez B, losowy , przemnożony B):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Klatki dwie rozmiaru 2: Ostatecznie:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

zad.9 (2 punkty)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & \frac{-4}{3} \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

zad. 11 (2 punkty)

I

$$A^2 = I$$

A jest pierwiastkiem wielomianu $t^2-1 = (t-1)(t+1)$ który jest podzielny przez wielomian minimalny. Więc wielomian minimalny składa się tylko z czynników liniowych, zatem jest diagonalizowalna.

II

$$A^2 = A$$

Jest to warunek rzutu. Skoro to jest rzut to macierz jest diagonalizowalna, więc postać Jordana to będzie macierz diagonalna.

zad. 13 (2 punkty)

Jeżeli $n \geqslant 10000$ teza jest oczywista.

Pokażemy, że stopień nimpotentności ($= 10000$) jest $\leqslant n$.
Jeżeli A jest macierzą nipotntną to jej wielomianem minimalnym jest x^k dla pewnego k. Dalej, wielomian minimalny jest dzielnikiem wielomianu charakterystycznego, którego stopień jest równy n. Z tego $k < n$ czyli $10000 < n$.

zad. 14 (2 punkty)

Dowód. Załóżmy niewprost, że istnieją takie a $(BSO \quad a_0 \neq 0)$
(notacja $v_k = N^k v$):

$$a_0 v_0 + \ldots a_k v_k = 0$$

Mnożąc obustronnie przez N^k korzystamy z $N^j = 0$ dla $j > k$:

$$a_0 N^k v_0 = a_0 v_k = 0$$

Z założeń $v_k = n^k v \neq 0$ otrzymujemy sprzeczność $a_0 = 0$ □