Maurycy Borkowski

04.05.2020

SUMA: 8 punktów

L10z8 (5 punktów)

$$I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)dx = \int_0^\pi f(r,x)dx$$
$$I'(r) = \frac{d}{dr}\left(\int_0^\pi f(r,x)dx\right) = \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial r}(r,x)dx$$

Obliczmy pochodną cząstkową:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,x) = \frac{d}{dr}(\ln(1 - 2r\cos x + r^2)) = \frac{2(r - \cos x)}{r^2 - 2r\cos x + 1}$$

Z tego:

$$I'(r) = \int_0^\pi \frac{2(r - \cos x)}{r^2 - 2r\cos x + 1}dx$$

Łatwo zauważyć ($|r| < 1$), że funkcja pod całkowa po prawej jest zawsze dodatnia, dalek:

$$\int_0^\pi \frac{2(r - \cos x)}{r^2 - 2r\cos x + 1}dx < \int_0^\pi \frac{2(r - \cos x)}{r^2 - 2r\cos x + \cos x^2}dx = \int_0^\pi \frac{2}{r - \cos x}dx = 0$$

Ostatnia równość wynika z symetrii $\cos x$ na przedziale $[0, \pi]$
Skoro $I(0) = 0$ a pochodna jest zerowa to funkcja jest stała zatem: $I(r) = 0$ dla $|r| < 1$.

L10z4 (3 punkty)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{2000}}{n^{1,00001}}$$

Funkcja sumowana jest dodatnia i malejąca, zatem zbieżność szeregu jest równoważna zbieżności:

$$\int_a^\infty \frac{(\ln x)^{2000}}{x^{1,00001}}dx$$

Punkt osobliwy: ∞

$$\int_a^b \frac{(\ln x)^{2000}}{x^{1,00001}} dx =$$

Korzystamy z:

$$\int \frac{(\ln x)^n \, dx}{x^m} = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1} \int \frac{(\ln x)^{n-1} dx}{x^m}$$

Zbieżność całki jest równoważna zbieżności:

$$\int_a^\infty \frac{\ln x}{x^{1,00001}} dx = \left[-\frac{\ln x}{0,00001 x^{0,00001}} - \frac{1}{(0,00001)^2 x^{0,00001}} \right]_a^\infty \to 0$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{(\ln n)^{2000}}{n^{1,00001}}$ jest zbieżny.