Maurycy Borkowski

7.04.2020

5 zadań (po jednym podpunkcie, podobno tyle wystarcza) z L6 po dwa punkty. Suma 10 punktów.

Z1

Sprawdźmy punkty przecięć wykresów:

$$\begin{cases} y^2 = 6x \\ x^2 = 6y \end{cases}$$

$$y^4 = 6^3 y$$

Szukane punkty to: $(0,0), (6,6)$.
Dla $x \in [0,6]$:

$$\sqrt{6x} > \frac{x^2}{6}$$

Pole szukanego obszaru:

$$\int_0^6 \sqrt{6x}dx - \int_0^6 \frac{x^2}{6}dx = \sqrt{6}\int_0^6 \sqrt{x}dx - \frac{1}{6}\int_0^6 x^2 dx =$$

$$6^{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}6^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}\frac{1}{3}6^3 = 24 - 12 = 12$$

Z2

Długość krzywej opisanej parametrycznie:
$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos^3 t)'^2 + (\sin^3 t)'^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)}dt = \int_0^{2\pi} 3|\cos t \sin t|dt =$$

Z własności sin:

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin 2t|dt = 3\int_0^{\pi} |\sin 2t|dt = 3 \cdot 2\int_0^{\pi} |\sin t|dt = 6$$

Z3

Długość krzywej opisanej we współrzędnych biegunowych:
$r = \theta^2, 0 \leqslant \theta \leqslant 4\sqrt{2}$

$$L = \int_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{(\theta^2)'^2 + \theta^4} d\theta = \int_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{4\theta^2 + \theta^4} d\theta = \int_0^{4\sqrt{2}} \theta\sqrt{4+\theta^2} d\theta$$

Całkujemy przez podstawianie:

$$\int_0^{4\sqrt{2}} \theta\sqrt{4+\theta^2} d\theta = \frac{1}{2}\int_4^{36} \sqrt{u} du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}36^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{208}{3}$$

Z4

Pole powierzchni bryły obrotowej:
$f(x) = \frac{1}{3}x^3, x \in [0, \sqrt{2}]$

$$S = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{3}x^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}x^3\right)'^2} dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{1+x^4} dx =$$

Całkujemy przez podstawianie:

$$= \frac{\pi}{6}\int_1^5 \sqrt{u} du = \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}5^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi}{9}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

Z5

Objętość bryły obrotowej:
$f(x) = \frac{-1}{x}, x \in [-3, -2]$

$$V = \pi \int_{-3}^{-2} \left(\frac{-1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_{-3}^{-2} x^{-2} dx = \pi \left[-x^{-1}\right]_{-3}^{-2} = \frac{\pi}{6}$$