Rozdzielone zmienne

$$y'(t) = f(t)g(y)$$

dzielimy przez g i całkujemy (rozdzielamy y, t):

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{g(z)} dz = \int_{t_0}^{t} f(s) ds$$

Liniowe I-szego rzędu

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$$

$q(t) = 0$ to jednorodne
mnożymy przez czynnik całkujący $e^{P(t)}$ i zwija się do pochodnej:

$$\left(y(t)e^{P(t)}\right)' = q(t)e^{P(t)} \quad \text{(lub zero)}$$

$$y(t) = e^{-P(t)} \left(\int_{t_0}^{t} q(s)e^{P(s)} ds + y_0 e^{P(t_0)} \right)$$

Równanie zupełne

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0$$

tż. $\frac{\partial}{\partial y} M(t, y) = \frac{\partial}{\partial t} N(t, y)$ można zapisać alternatywnie z $y' = \frac{dy}{dt}$
Szukamy różniczki zupełnej φ:

$$M(t, y) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, y)$$

$$N(t, y) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(t, y)$$

Z jednego całkujemy ($\varphi(t, y) = \int M(t, y)\mathbf{dt}$) zamiast stałej ($h(y)$) i liczymy φ do drugiego podstawiamy, różniczkujemy i mamy stałą ($h(y)$) z N

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \phi(t)$$

Jeżeli powyższe gówno jest zależne tylko od t to $e^{\int \phi(t)}$ jest czynnikiem całkującym (uzupełnia do zupełnego). Jak poniższe gówno od tylko y to $e^{\int \psi(y)}$:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \psi(y)$$

Inne dziwne gówna:

1. Bernoulliego $\frac{dy}{dt} + p(t)y(t) = q(t) + y^m(t)$. Mnożymy przez $(1-m)y^{-m}$ podstawiamy $z(t) = y^{1-m}(t)$ i mamy liniowe niejednorodne
2. Riccatiego $\frac{dy}{dt} + p(t)y(t) + q(t)y^2(t) = f(t)$

1. Malthus: $P'(t) = aP(t) \to P(t) = P_0 e^{a(t-t_0)}$ w chuj
2. Von Foerstera: $P'(t) = aP^2(t) \to P(t) = P_0 \frac{a}{1-aP_0 t}$ w chuj ale w T_{ks}
3. Benjamina Gompertza $P'(t) = \lambda e^{\alpha t} P(t) \to P(t) = P_0 e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(1-e^{\alpha(t-t_0)})}$
4. Verhalust $P(t)' = bP(t)\left(\frac{a}{b} - P(t)\right)$ pochodna zmienia znak jak duzo P
5. Ciało: $T'(t) = k(T(t) - T_o) \wedge T(0) = T_0 \to T(t) = T_o + (T_0 - T_o)e^{-kt}$ liniowe niejednordone, $o \neq 0$

Peano - istnienie

$y' = f(t, y)$ ciągła na prostokącie: $R = \{(t, y); t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a, |y - y_0| \leqslant b\}$
$M = \max_{(t,y)\in R} |f(t, y)| \quad \alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$
istnieje **conajmniej** jedno rozwiąznie na $[t_0, t_0 + \alpha]$

Picard-Lindelof - jedyność

$y' = f(t, y)$ i $\frac{\partial}{\partial y} f(t, y)$ ciągła na prostokącie:
$R = \{(t, y); t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a, |y - y_0| \leqslant b\}$ tak samo M, α
istnieje **dokładnie** jedno rozwiąznie na $[t_0, t_0 + \alpha]$ chcemy mieć, że α to dowolna zmienna, wtedy mamy $[t_0, \infty]$

Iteracja Picarda

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= y_0 \\
y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s)) ds \\
&\vdots \\
y_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s)) ds
\end{aligned}
$$

y_n w granicy to rozwiązanie

Lemat Gronwalla

$U(t)$ nieujemna funkcja:

$$u(t) \leqslant a + b \int_{t_0}^{t} u(s) ds$$

dla $a, b \geqslant 0$, wtedy:

$$u(t) \leqslant a e^{b(t-t_0)}$$