zad 1

Macierz sąsiedztwa A

Macierz sąsiedztwa dopełnienia − A'

- $A + A' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ← macierz grafu pełnego

$I = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ − jedna jedynka na i-tej pozycji

- $AI = j \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix} \to a_{ij}$ wektor z 1 w sąsiadach i-wierzchołka

wektory wszystkich sąsiadów i

- $A^2 I = A(AI) = A(\overbrace{I_1 + I_2 + \dots + I_k}) = AI_1 + AI_2 + \dots + AI_k =$

$= j \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix} \leftarrow \sum_{l=1}^{k} a_{s_l j}$ ← liczba ścieżek od j do i (przez sąsiadów i) dł. 2

s_l − l-ty sąsiad

zad 2

~~Udowodnimy, że graf k-spójny~~.

D-d indukcyjny:

1. $n = 2$

$(0,0) - (0,1)$
$|$ $\quad$ $|$ ✓
$(1,0) - (1,1)$

2. Zał. że dla n-1 działa.

$U = (U_1 \dots U_{n-1})$

$V = (V_1 \dots V_{n-1})$

Rozpatrzmy przypadki:

1. $U_i = V_i$ dla pewnego i. Oznaczmy Q wierzchołki z kostki o wymiarze n t.ż. $x_i = U_i = V_i$, natomiast Q' t.ż. $x_i = 1 - U_i$, $Q + Q'$ tworzą kostkę n.

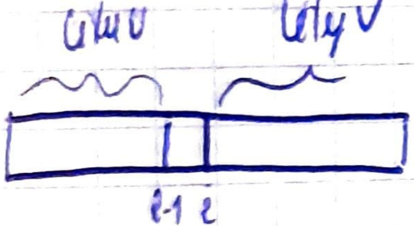
z zał. Q kopią kostki n-1 z dodatkowym bitem → Q ma n-1 wierzchołków rozłącznych ścieżek. (Q')

U', V' − sąsiedzi U, V w Q'

tworzymy n-tą ścieżkę $U - U' - V' - V$.

11. $\forall i \; U_i = 1 - V_i$ definiuję i-tą ścianę: $U \rightsquigarrow V$

- Zmień i-ty bit, potem i+1 .... (cyklicznie), jest k ścian bo k - stałe



Na i-tej ścianie są wierzchołki którym nie zgadzają bity od i-tego z V i zgadzają do i-1 z U ∎

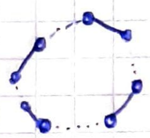
Zad. 4

• Weźmy dowolne u, v t.ż. $\{u,v\} \notin E(G)$. Z zał. $\deg(u) \geq n$
$\deg(v) \geq n$

Zatem.
$$\deg(u) + \deg(v) \geq n+n = 2n = |V(G)|$$

z tw. Orego G ma cykl Hamiltona.

• Biorąc co drugą krawędź cyklu Hamiltona otrzymamy pełne skojarzenie. ■



Zad. 5

Oznaczmy spójne składowe G: $G_1, \dots, G_n$

$$\chi(G) = \max\{\chi(G_i)\}$$

Dla dowolnej spójnej wiemy z Tw. Brooksa:

• $\chi(G_i) \leq 3$ chyba że $\underbrace{G_i \text{ klika lub } \cancel{\text{cyklem v nieparzystej dł.}}}_{\text{SPRAWDZAMY DFSem}}$ to 4

Jeżeli nie ma kliki ani cyklu to sprawdzamy:

• $\chi(G_i) = 1$ wtw gdy $|V(G_i)| = 1$

• $\chi(G_i) = 2$ DFSem na przemian kolorujemy (jak dwudzielne)

• $\chi(G_i) = 3$ <u>pozostały przypadek</u>

zad 6

* Dodajmy n-k „super" chłopców

Z Tw Halla istnieje pełne skojarzenie n dziewczyn w m+n-k chłopców
zatem k dziewczyn i chłopców wtw gdy dla dowolnych r dziewczyn zna conajmniej r chłopców

$$r \leq r' + \overbrace{n - k}^{*} \iff \underbrace{r + k - n \leq r'}$$

r' ↑ zwykłe

czyli war konieczny i wystarczający jest ↓ tj. gdy każde r dziewczyn znało conajmniej r+k-n zwykłych chłopców ∎

zad 7

Dołóżmy 3 dodatkowe wierzchołki chłopców, każdy wierzchołek będzie miał te same znajome (każdy slot na żonę, 4 sloty).

Z Tw. Halla istnieje pełne skojarzenie n dziewczyn w 4·n chłopców wtw dla dowolnych k dziewczyn znają one conajmniej k chłopców (w grafie rozszerzonym) więc $\frac{k}{4}$ w grafie wyjściowym podstawowym (gdy zna chłopca to zna jego rozszerzone wierzchołki) ∎

zad8

Weźmy dowolne dwa pełne skojarzenia M, M'.

Rozważmy graf z kraw. $M \cup M'$ (zawiera on wszystkie wierzchołki), niektóre krawędzie.

Zauważmy, że każda składowa nowopowstałego grafu jest ~~[illegible]~~ krawędzią albo cyklem.
parzystym

Drzewo nie ma cykli, więc jego podgraf ~~[illegible]~~ $M \cup M'$ też nie.

UDOWODNILIŚMY

M, M' pełne skojarzenia $\Longrightarrow M = M'$, więc drzewo ma co najwyżej 1 skojarzenie ■

zad.9

$$A = \begin{array}{c}\overbrace{\hphantom{\quad\quad\quad\quad}}^{V_1}\\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & & & 1 \\ & 1 & & \end{pmatrix}\end{array}\Big\} V_2$$

te krawędzie istnieją bo same 1 w A

$1 - \sigma(1)$
$2 - \sigma(2)$
$\vdots$
$n - \sigma(n)$

- Zauważ, że $a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} = 1$ wtw. gdy istnieje skojarzenie
- Każde skojarzenie możemy ~~[illegible]~~ w $G(V_1, V_2; E)$ możemy zakodować permutacją n-elementową.

Zatem $\mathrm{perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} =$ liczba różnych skojarzeń w G