Rozdzielone zmienne

$$y'(t) = f(t)g(y)$$

dzielimy przez g i całkujemy (rozdzielamy y, t):

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{g(z)} dz = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

Liniowe I-szego rzędu

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$$

$q(t) = 0$ to jednorodne
mnożymy przez czynnik całkujący $e^{P(t)}$ i zwija się do pochodnej:

$$\left(y(t)e^{P(t)}\right)' = q(t)e^{P(t)} \quad \text{(lub zero)}$$

$$y(t) = e^{-P(t)} \left(\int_{t_0}^{t} q(s)e^{P(s)}ds + y_0 e^{P(t_0)} \right)$$

Równanie zupełne

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0$$

tż. $\frac{\partial}{\partial y} M(t, y) = \frac{\partial}{\partial t} N(t, y)$ można zapisać alternatywnie z $y' = \frac{dy}{dt}$
Szukamy różniczki zupełnej φ:

$$M(t, y) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, y)$$

$$N(t, y) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(t, y)$$

Z jednego całkujemy ($\varphi(t, y) = \int M(t, y)\mathbf{dt}$) zamiast stałej ($h(y)$) i liczymy φ do drugiego podstawiamy, różniczkujemy i mamy stałą ($h(y)$) z N

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \phi(t)$$

Jeżeli powyższe gówno jest zależne tylko od t to $e^{\int \phi(t)}$ jest czynnikiem całkującym (uzupełnia do zupełnego). Jak poniższe gówno od tylko y to $e^{\int \psi(y)}$:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \psi(y)$$

Inne dziwne gówna:

1. Bernoulliego $\frac{dy}{dt} + p(t)y(t) = q(t) + y^m(t)$. Mnożymy przez $(1 - m)y^{-m}$ podstawiamy $z(t) = y^{1-m}(t)$ i mamy liniowe niejednorodne
2. Riccatiego $\frac{dy}{dt} + p(t)y(t) + q(t)y^2(t) = f(t)$

1. Malthus: $P'(t) = aP(t) \to P(t) = P_0 e^{a(t-t_0)}$ w chuj
2. Von Foerstera: $P'(t) = aP^2(t) \to P(t) = P_0 \frac{a}{1-aP_0 t}$ w chuj ale w T_{ks}
3. Benjamina Gompertza $P'(t) = \lambda e^{\alpha t} P(t) \to P(t) = P_0 e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(1-e^{\alpha(t-t_0)})}$
4. Verhalust $P(t)' = bP(t)\left(\frac{a}{b} - P(t)\right)$ pochodna zmienia znak jak duzo P
5. Ciało: $T'(t) = k(T(t) - T_o) \wedge T(0) = T_0 \to T(t) = T_o + (T_0 - T_o)e^{-kt}$ liniowe niejednordone, $o \neq 0$

Peano - istnienie

$y' = f(t, y)$ ciągła na prostokącie: $R = \{(t, y); t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a, |y - y_0| \leqslant b\}$
$M = \max_{(t,y)\in R} |f(t, y)| \quad \alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$
istnieje **conajmniej** jedno rozwiąznie na $[t_0, t_0 + \alpha]$

Picard-Lindelof - jedyność

$y' = f(t, y)$ i $\frac{\partial}{\partial y} f(t, y)$ ciągła na prostokącie:
$R = \{(t, y); t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a, |y - y_0| \leqslant b\}$ tak samo M, α
istnieje **dokładnie** jedno rozwiąznie na $[t_0, t_0 + \alpha]$ chcemy mieć, że α to dowolna zmienna, wtedy mamy $[t_0, \infty]$

Iteracja Picarda

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= y_0 \\
y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))ds \\
&\vdots \\
y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds
\end{aligned}
$$

y_n w granicy to rozwiązanie

Lemat Gronwalla

$U(t)$ nieujemna funkcja:

$$u(t) \leqslant a + b\int_{t_0}^{t} u(s)ds$$

dla $a, b \geqslant 0$, wtedy:

$$u(t) \leqslant ae^{b(t-t_0)}$$

II rzędu

Jednorodne: $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ oraz $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$
Wrońskian $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(y)y_2(t)(= 0)$ wtedy LNZ.
Jak y_1, y_2 są to rozwy to ogólne to kombinacja liniowa.

a,b,c = const

Liczymy wielomian charakterystyczny: $ar^2 + br + c = 0$
$\Delta > 0$ ogólne: $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
$\Delta = 0$ ogólne: $y(t) = C_1 e^{r_0 t} + C_2 t e^{r_0 t}$
$\Delta < 0$ ogólne: $y(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$ gdzie $\alpha = Re r_1, \beta = Im r_1$

f(t) $\neq$ 0

M. uzmienniania stałej: zakładamy rozwiązanie $y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$
Gdzie y_1, y_2 rozwiązania fundamentalne jednorodnego, z wielomianu itd.
Liczymy: $\begin{pmatrix} y_1(t & y_2(y) \\ y_1'(t) & y_2'(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$

n rzędu

$r_1, r_2, \ldots, r_n$ pierwiastki wielomianu to rozwiązanie:
$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \ldots + C_n e^{r_n t}$ gdy r_i k-krotny: $e^{r_i t}, \ldots, t^{k-1} e^{r_i t}$
Gdy zespo $z_1 = a + bi$, $z_2 = a - bi$ rozwy: $Re(z_1) = e^{at}$i $Im(z_1) = e^{at} \sin(bt)$

Szeregów potęgowych

Zakładamy funkcje: $y(t) = a_0 + a_1 t + a_t t^2 \ldots$,wtedy $y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ itd.

Transformata Laplace'a

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$, jest liniowa, f-wzrost podwykładniczy $\mathcal{L}\{\sin(\alpha t)\}(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}, \mathcal{L}\{\cos(\alpha t)\}(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}, \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$
Tw1. $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$ oraz $\mathcal{L}\{-tf(t)\}(s) = \frac{d}{ds} F(s)$
Tw2. $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0)$ oraz $\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$ $Y(s)$-transformata, $\mathcal{L}(rownanie) =$ ze wzorów wyż. $= \mathcal{L}(f(t))$ (prawa strona)
Znajdujemy $Y(s)$ i reverse engineering żeby znaleźć co ją zrobiło $(y(t))$

Układy równań liniowych

wektorowo: $x' = Ax$ (n-zmiennych). Tw: dowolne n-rzędu na n-rownań:
dane: $a_n x^{(n)}(t) + \ldots a_1 x = 0$, dalej $y_1(t) = x(t), y_2(t) = x', \ldots y_n(t) = x^{(n-1)}(t)$
mamy: $y_1'(t) = (x'(t) =) y_2(t), \ldots, y_{n-1}'(t) = y_n(t)$, ostatnie liczymy: $y_n'(t) = x^{(n)}(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x^{(n-1)}(t) - \ldots - \frac{a_0}{a_n} x(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_n(t) - \ldots - \frac{a_0}{a_n} y_1(t)$
stąd mamy $x' = Ax$, gdzie A, 1 na przekątnej nad diag, $-\frac{a_i}{a_n}$ w dolnym wierszu.

$x_1, x_2 \ldots, x_n$ są rozwiązaniami i tworzą n-wymiarową przestrzeń liniową
NWSR: $x_1(t), \ldots, x_n(t) \forall t$ LNZ $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ LNZ

Metoda wartości własnych

TW: rozwiązanie $x_j = e^{\lambda_j} v_j$ gdzie λ, v to wart. i wekt. własny
Ogólne: $x(t) = C_j e^{\lambda_j t} v_j$
$z = x + iy$ jest rozwem (to x, y rozwami) $\quad e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$
Rozw $x' = Ax \quad x(0) = x_0$ jest dane: $x(t) = e^{tA} x_0$
$AB = BA \implies e^{A+B} = e^A + e^B$ oraz $e^{\lambda I dt} = e^{\lambda t} v$
Jak ($\geqslant$)dwie wartości własne i jeden wektor własny v_1 to drugi $(A - \lambda_1 Id) v_2 = v_1$
pierwsze klasycznie: $e^{t\lambda_1} v_1$ a drugi $e^{tA} v_2 = e^{t\lambda_1}(v_2 + t v_1)$

Macierz fundamentalna

Kolumnami są rozwiązania $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ wtedy $e^{tA} = X(t) X^{-1}(0)$
$x' = Ax + f(t)$ wtedy rozw $x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{tA} e^{-sA} f(s) ds$

Równanie transportu

$a\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + b\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = 0$, $ay - bx = C$ charakterystki, stałe rozwy
$u(x,y) = f(C) = f(ay - bx)$ dla pewnej f się liczy z war. pocz.
Istnienie, czy na wszystkich charakterystykach jest stałe?

$a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = f(u)$,
charakterystyki rozwy: $\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$ szukamy C podstawiamy $f(C) = f(guwno)$ z war. pocz. f

Równanie struny

$u_{tt}(x,t) = c^2 \Delta u(x,t)$ $\quad \Delta$ =suma drugich pochodnych
Wzór d'Alemberta:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy$$

gdzie: $u(x,0) = \phi(x)$ oraz $u_t(x,0) = \psi(x)$