Część Pierwsza Kursu

1 Deterministyczne Automaty Skończone

Zadanie 1. Rozważmy język $L = \{w0s : |s| = 9\}$, złożony z tych słów nad alfabetem $\{0, 1\}$ których dziesiąty symbol od końca to 0. Udowodnij, że DFA rozpoznający ten język ma co najmniej 1024 stany.

Zadanie 2. Jaką minimalną liczbę stanów musi mieć deterministyczny automat skończony rozpoznający zbiór tych wszystkich słów nad alfabetem $\{a, b, c\}$, które wśród ostatnich trzech znaków mają po jednym wystąpieniu każdej z liter alfabetu?

Zadanie 3. Udowodnij, że język $L = \{a^n b^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ nie jest regularny.

Zadanie 4. (za 2 punkty) Dla danego języka $L \subseteq \Sigma^*$ przez L^* rozumiemy najmniejszy język spełniający następujące warunki:
(i) $\varepsilon \in L^*$;
(ii) $\forall x, y \ \ [x \in L^* \wedge y \in L] \Rightarrow xy \in L^*$.

Gdzie ε oznacza, jak zawsze, słowo puste.

Niech L będzie dowolnym podzbiorem $\{0\}^*$. Udowodnij, że L^* jest językiem regularnym.

Zadanie 5. Udowodnij, że język L tych słów nad alfabetem $\{0, 1\}$, które są zapisem binarnym liczby pierwszej, nie jest regularny.

Definicja. Dla danego słowa w, nad pewnym ustalonym alfabetem, niech w^R oznacza "w czytane od końca", tzn. $\varepsilon^R = \varepsilon$ i $(aw)^R = w^R a$ jeśli a należy do alfabetu, zaś w jest dowolnym słowem.

Zadanie 6. Czy język $L = \{ww^R x : w, x \in \{0, 1\}^* \text{ i } w, x \neq \varepsilon\}$ jest regularny? Czy język $L = \{xwx : w, x \in \{0, 1\}^* \text{ i } x \neq \varepsilon\}$ jest regularny?

2 Twierdzenie o indeksie

Zadanie 7. (**Twierdzenie o indeksie**, za 2 punkty) Niech $L \subseteq \mathcal{A}^*$. Relację $\sim_L \subseteq \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^*$ definiujemy w następujący sposób: $w \sim_L w'$ w.t.w gdy $\forall v \in \mathcal{A}^* \ (wv \in L \Leftrightarrow w'v \in L)$. Udowodnij następujące *twierdzenie o indeksie*: L jest regularny wtedy i tylko wtedy gdy liczba klas abstrakcji relacji $\sim_L$ jest skończona. Minimalna liczba stanów DFA rozpoznającego L jest wtedy równa liczbie tych klas abstrakcji.

Niech Σ będzie skończonym alfabetem i niech $L \subseteq \Sigma^*$. Jak pamiętamy, relacja $\sim_L$ z *Twierdzenia o indeksie* zdefiniowana jest, na zbiorze Σ^* jako: $w \sim_L v$ wtedy i tylko wtedy gdy $\forall x \in \Sigma^* \ (wx \in L \Leftrightarrow vx \in L)$. Podobnie możemy zdefiniować relację równoważności $\sim_L^{inf}$. Mianowicie $w \sim_L^{inf} v$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\forall x, y \in \Sigma^* \ (xwy \in L \Leftrightarrow xvy \in L)$.

Niech i_L (od słowa *indeks*) będzie równe $|\Sigma^* / \sim_L|$ (czyli i_L to liczba klas abstrakcji na jakie $\sim_L$ dzieli Σ^*). Podobnie, niech $i_L^{inf} = |\Sigma^* / \sim_L^{inf}|$.

Kolejne trzy zadania dotyczą wzajemnych relacji między liczbami i_L i i_L^{inf}.

Zadanie 8. Udowodnij, że jeśli jedna z liczb i_L, i_L^{inf} jest skończona, to obie są skończone (z Twierdzenia o Indeksie wiemy, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy gdy L jest regularny). Dokładniej mówiąc:

a. udowodnij, że $i_L \leqslant i_L^{inf}$;

b. udowodnij, że $i_L^{inf} \leqslant i_L^{i_L}$.

Deklaracje na SKOS, zamknięcie 1 godzinę przed zajęciami

Zadanie 1. Rozważmy język $L = \{w0s : |s| = 9\}$, złożony z tych słów nad alfabetem $\{0,1\}$ których dziesiąty symbol od końca to 0. Udowodnij, że DFA rozpoznający ten język ma co najmniej 1024 stany.

Nie wprost

DFA $|Q| < 1024$

$w_0 = 0 \dots 0$

$\vdots$

$w_i = i_2$

$\vdots$

$w_{1023} = \underbrace{1 \dots 1}_{10}$

$\hat{\delta}(q_0, w_i) = \hat{\delta}(q_0, w_j)$

$w_i[k] \neq w_j[k]$ (k numeruje od 0)

$t_0 = w_i 0^k$

$t_1 = w_j 0^k$

BSO $t_0[-10] = 0$ $\quad t_1[-10] = 1$

$t_0 \in L$ $\quad t_1 \notin L$

Ale $\hat{\delta}(q_0, t_0) = \hat{\delta}(q_0, t_1)$ $\lightning$

Zadanie 2. Jaką minimalną liczbę stanów musi mieć deterministyczny automat skończony rozpoznający zbiór tych wszystkich słów nad alfabetem $\{a, b, c\}$, które wśród ostatnich trzech znaków mają po jednym wystąpieniu każdej z liter alfabetu?

$S = \{ \varepsilon, a, b, c, ab, bc, \dots, abc \}$ słowa do 3 liter bez powtórzeń

zał. a.c. $|Q| < 16$

$u, w \in S \quad u \neq w$

$\hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, w)$

1° $|u| < |w|$

Niech w' najkrótsze t.że $\hat{\delta}(q_0, ww') \in F$ $\quad |ww'| = 3, \; |uw'| < 3$

$\hat{\delta}(q_0, uw') \notin F$

2° $|u| = |w|$

$|u| = 3$

$|u| = 2$

$|u| = 1$

Zadanie 3. Udowodnij, że język $L = \{a^n b^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ nie jest regularny.

Zał. a.c. L jest regularny

n - stała z Lop

Niech $w = a^n b^{2n}$

Wtedy $w = xyz$

$|xy| \leq n, \quad y \neq \varepsilon$

$x = a^i, \; y = a^j$

Zadanie 4. (za 2 punkty) Dla danego języka $L \subseteq \Sigma^*$ przez L^* rozumiemy najmniejszy język spełniający następujące warunki:
(i) $\varepsilon \in L^*$;
(ii) $\forall x, y\ [x \in L^* \wedge y \in L] \Rightarrow xy \in L^*$.

Gdzie ε oznacza, jak zawsze, słowo puste.

Niech L będzie dowolnym podzbiorem $\{0\}^*$. Udowodnij, że L^* jest językiem regularnym.

$L \subseteq 0^*$

L^* jest regularne

$w \in L^*$ $w = 0^i$

$u, v \in L^*$

$u = 0^i$

$v = 0^j$

$uv = 0^{i+j}$

$K = \{ x : \exists w \in L \ |w| = x \}$

$w \in L^* \iff w = 0^j \wedge j = \sum_i l_i x_i \quad x_i \in K, l_i \in \mathbb{N}$

$g = \gcd(K)$

$w \in L^* \Rightarrow g | i$

$w = 0^i$

Lemat

istnieje y t. że $\forall_{j > y} \wedge g | j \Rightarrow 0^j \Rightarrow 0^j \in L^*$

d-d

$G \subseteq K$ $\gcd(G) = g \wedge G$ jest skończony

$G = \{ d_1, d_2, \ldots, d_n \}$

$g = \sum_{i=1}^{n} b_i d_i \quad b_i \in \mathbb{Z}$

$NWW(G) \cdot g = \Sigma$

$$b_i' = b_i + \frac{NWW(G)}{d_i} \cdot k \geqslant 0$$

$$g' = \sum b_i' d_i \equiv g \mod NWW(G)$$

Zadanie 5. Udowodnij, że język L tych słów nad alfabetem $\{0, 1\}$, które są zapisem binarnym liczby pierwszej, nie jest regularny.

$w \in \{0,1\}^*$

$dec(w)$ – zapis dziesiętny w

Zał. nie wprost

n – stała z LoP

$|w| \geqslant n$

$w = xyz$

$|xy| \leqslant n, \quad y \neq \varepsilon$

Wtedy $\forall_k \; xy^kz \in L$

$dec(w) = p$

$$p = dec(z) + 2^{|z|} dec(y) + 2^{|z|+|y|} dec(x)$$

Chcemy pokazać, że $\exists_k \; dec(xy^kz) \equiv 0 \pmod p$

sprowadzamy $dec(xy^kz) \equiv p \pmod p$

$$dec(xy^kz) = dec(z) + 2^{|z|}\left(1 + 2^{|y|} + 2^{2|y|} + \ldots + 2^{(k-1)|y|}\right) dec(y) + 2^{|z|+k|y|} dec(x)$$

Ustalmy $k = p$

Wtedy $a^p \equiv a \pmod{p}$

$a^{p+s} \equiv a^{s+1} \pmod{p}$

Chcemy $2^{k|y|+z} \equiv 2^{|y|+|z|} \pmod{p}$

$(1+2^{|y|}+\ldots+2^{(k-1)|y|}) \equiv 1 \pmod{p}$

$b = 2^{|y|}$

$$\frac{b^p-1}{b-1} \equiv \frac{b-1}{b-1} \pmod{p}$$

Chcemy $b-1 \not\equiv 0 \bmod p$

$|y| \geq 1$ $\quad 2^{|y|}-1 \not\equiv 0 \bmod p$

$\quad \wedge$

$\quad p$

Zadanie 7. (**Twierdzenie o indeksie**, za 2 punkty) Niech $L \subseteq \mathcal{A}^*$. Relację $\sim_L \subseteq \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^*$ definiujemy w następujący sposób: $w \sim_L w'$ w.t.w gdy $\forall v \in \mathcal{A}^*$ $(wv \in L \Leftrightarrow w'v \in L)$. Udowodnij następujące *twierdzenie o indeksie*: L jest regularny wtedy i tylko wtedy gdy liczba klas abstrakcji relacji $\sim_L$ jest skończona. Minimalna liczba stanów DFA rozpoznającego L jest wtedy równa liczbie tych klas abstrakcji.

$(\Leftarrow)$

$\delta([w]_{\sim_L}, a) = [wa]_{\sim_L}$