Maurycy Borkowski

20.04.2020

6 (5 punktów)

Dowdód indukcyjny.
Podstawa indukcji:

$$T_0(x) = 1 \quad bo \quad 1 = \cos 0 = \cos 0 \cdot \theta$$
$$T_1(x) = x \quad bo \quad \cos\theta = \cos 1 \cdot \theta$$

Krok:
Załóżmy, że istnieją wielomiany T_n, T_{n-1} takie, że:

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

$$T_{n-1}(\cos\theta) = \cos(n-1)\theta$$

Z tożsamości trygonometrycznej (suma cosinusów):

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\frac{2n}{2}\theta\cos\frac{2}{2}\theta = 2\cos n\theta\cos\theta$$

Z założenia:

$$\cos(n+1)\theta + T_{n-1} = 2T_n\cos\theta$$

Mamy więc:

$$T_{n+1} = \cos(n+1)\theta = 2T_n\cos\theta - T_{n-1}$$

Na mocy zasady indukcji, dla każdego n istnieje T_n taki, że: $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$
$\square$

$$T_2(x) = 2T_1(x)x - T_0(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 2T_2(x)x - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

7 (5 punktów)

Dowdód indukcyjny.
Podstawa indukcji:

$$U_0(x) = 1 \quad bo \quad 1 = \frac{\sin(0+1)\theta}{\sin\theta}$$
$$U_1(x) = 2x \quad bo \quad 2\cos\theta = \frac{\sin(1+1)\theta}{\sin\theta}$$

Krok:
Załóżmy, że istnieją wielomiany U_n, U_{n-1} takie, że:

$$U_n(\cos n\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

$$U_{n-1}(\cos(n-1)\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

Z tożsamości trygonometrycznej (suma sinusów):

$$\sin{(n-1)\theta} + \sin{(n+1)\theta} = 2\sin n\theta\cos\theta$$

Po podzieleniu przez $\sin\theta$

$$\frac{\sin{(n-1)\theta}}{\sin\theta} + \frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta} = 2\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cos\theta$$

Z założenia:

$$U_{n-1} + \frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta} = 2U_n\cos\theta$$

Mamy więc:

$$U_{n+1} = \frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta} = 2U_n\cos\theta - U_{n-1}$$

Na mocy zasady indukcji, dla każdego n istnieje U_n taki, że:
$U_n(\cos n\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ □

$$U_2(x) = 2U_1(x)x - U_0(x) = 4x^2 - 1$$
$$U_3(x) = 2U_2(x)x - U_1(x) = 8x^3 - 4x$$