Analiza (suma 10 punktów)

Maurycy Borkowski

14.05.2020

zad. 12* (10 punktów)

I

$$F(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx dx$$

Funkcja pod całką jest ciągła na całym przedziale całkowania:

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = \frac{\partial}{\partial b} \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx dx = \int_0^\infty \frac{d}{db} e^{-ax^2} \cos bx dx = \int_0^\infty -e^{-ax^2} \sin bx \cdot x dx$$

Skorzystamy z tożsamości:

$$-2a \int_0^\infty x e^{-ax^2} \sin bx dx = e^{-ax^2} \sin bx|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-ax^2} b \cos bx dx$$

$e^{-ax^2} \sin bx|_0^\infty = 0 - 0 = 0$ dalej otrzymujemy:

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} \sin bx dx = \frac{b}{2a} \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx dx$$

Wobec powyższego:

$$-\frac{b}{2a} \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx dx = -\frac{b}{2a} F(a,b) = \frac{\partial F}{\partial b}(a,b)$$

Korzystamy z faktu $y' = cxy \implies y = y(0) exp(cx^2/2)$ traktując $F(a,b)$ jako funkcję jednej zmiennej b z parametrem a:

$$F(a,b) = F(a,0) \cdot exp(-\frac{b^2}{4a}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \cdot exp(-\frac{b^2}{4a})$$

II

$$F(a,b) = \int_0^\infty xe^{-ax^2} \sin bx dx$$

Zauważmy, że funkcja do policzenia w tym podpunkcie to pochodna cząstkowa (po b) z poprzedniego zadania więc wystarczy, że nałożymy pochodną na wynik:

$$F(a,b) = \frac{\partial}{\partial b} F(a,0) \cdot exp(-\frac{b^2}{4a}) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \frac{1}{2} ab \cdot exp(-\frac{ab^2}{4})$$