Maurycy Borkowski

19.03.2020

3/14 (5 punktów)

Musimy policzyć:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}\binom{n}{k} \tag{1}$$

Korzystając z jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego oraz rozwinięcia dwumianu:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k\int_0^1 x^{2k}dx = \tag{2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1\left(\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{2k+1}$$

Z (1) i (2) wystarczy policzyć $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ i przejść do granicy.

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)^n\sin\theta d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{2n+1}d\theta \tag{3}$$

Zauważmy, że jest to element ciągu funkcyjnego z dowodu Twierdzenia Wallisa, korzystając z tego:

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{2n+1}d\theta = -\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} \tag{4}$$

Zadanie sprowadza się do policzenia granicy (z Twierdzenia Wallisa):

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} = -\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{2n+1} = -\lim_{n\to\infty}\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{n}}{2n+1} = 0 \tag{5}$$

3/11 (10 punktów)

Dowód. Korzystając z rozwinięcia e^x w szereg:

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x\log x} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x\log x)^n}{n!} dx = \tag{6}$$

Z jednostajnej zbieżności szeregu na przedziale $[0,1]$:

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-x\log x)^n}{n!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 (x\log x)^n dx \tag{7}$$

Obliczmy teraz $\int_0^1 (x\log x)^n dx$ całkując przez części n razy:

$$\int_0^1 (x\log x)^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\log x)^n \bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1} n (x\log x)^{n-1} \frac{1}{x} dx =$$

$$= 0 - \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^n (\log x)^{n-1} = \frac{n}{n+1} \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\log x)^{n-1} \bigg|_0^1 + (-1)^2 \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \int_0^1 x^n (\log x)^{n-2} dx =$$

$$\cdots = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^n} \int_0^1 x^n (\log x)^{n-n} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^n} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \bigg|_0^1 = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Wstawiając to do (2) otrzymujemy:

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n} \qquad \square$$