

Zad. 3  $\text{card} \cdot u! / (s \cdot (s+1) \cdot \dots \cdot (s+u-1))$

$$\frac{s \cdot (s+1) \cdot \dots \cdot (s+u-1)}{u!} = \frac{\cancel{s \cdot (s+1) \cdot \dots \cdot (s+u-1)}}{u!} = \frac{(s+u-1)!}{(s-1)!} \cdot \frac{1}{u!} = \binom{s-1}{u} \in \mathbb{Z}$$

Zad. 5

Rozwiniemy sumy:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$\vdots$

$$s_m = \sum_{i=1}^m a_i$$

Rozważmy dwa przypadki:

1.  $\exists_k m | s_k$  wtedy  $i=1, j=k$

2.  $\forall_k m \nmid s_k$  tj.  $\forall_k m | s_k \equiv 0$  więc możemy pójść:  $\underbrace{1, 2, \dots, m-1}_{m-1}$

Z zasady szufladkowej Dirichleta  $\exists s_i, s_j$  t.j.  $s_i \equiv s_j \pmod{m}$  (B.S.O.  $i < j$ )

Wtedy  $s_j - s_i \equiv 0 \pmod{m}$  Zauważmy  $a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j \equiv 0 \pmod{m}$

Zad. 6

Maksymalna suma:  $99 + 98 + \dots + 90 = 945$ , czyli  $\leq 945$  możliwych sum  $\star$  (mówi się też 1000 - 55 = 945)

Możliwych podzbiórów podzielników jest  $2^{10} = 1024$ , z zasady szufladkowej Dirichleta możemy znaleźć dwa podzbiory będące równe sumie.

Zad. 7

m-szufladkowy



Zad. 2  $\sum_{d: d|m} \phi(d) = m$

Oznaczmy  $A(d) = \{k \in \{1, \dots, m\} : \gcd(k, m) = d\}$

zauważmy, że:

$$|A(d)| = \phi(m/d)$$

$A(d)$  są parami rozłączne oraz  $\bigcup_{d: d|m} A(d) = \{1, 2, \dots, m\}$

dla każdego  $m, m \leq n$  istnieją t.j.

$$\frac{n}{m} \in \bigcup_{d: d|m} A(d)$$

Zatem:

$$m = \sum_{d: d|m} |A(d)| = \sum_{d: d|m} \phi(m/d) = \sum_{d: d|m} \phi(d)$$

też możemy rozważyć  
dróbką



Zad. 12

$$a) \binom{m+n}{n} = \sum_{s=0}^n \binom{m}{s} \binom{n}{n-s}$$

Dla dowolnego podzbioru S zbioru R : mamy:

$$S \subseteq R \quad S \subseteq M \Leftrightarrow S' \subseteq N$$

$$b) \binom{m}{k} \binom{n}{m-k} = \binom{m}{m} \binom{m-m}{m-k} = \binom{m}{m} \binom{m-m}{k-m} = \frac{(m-m)!}{(m-k)!(k-m)!} = \frac{(m-m)!}{(k-m)!(m-k)!}$$

$$N \supseteq K \supseteq M \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq M \\ N \setminus M \supseteq N \setminus K \\ M \setminus M \supseteq K \setminus M \end{cases}$$

Zad. 13

$$a) \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-k-1+1)! \cdot (k-1)! \cdot k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

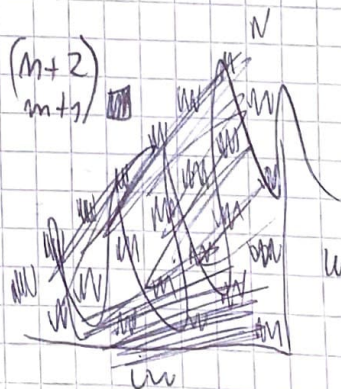
$$b) \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m$$

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{m-k} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m$$

D-d iudly po m  $\binom{m}{m} = 1 = \binom{1}{m}$

Zauważ:  $\sum_{k=0}^m \binom{k}{m} = \binom{m+1}{m+1}$

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{k}{m} + \binom{m+1}{m} \stackrel{\text{Zauw. 1.}}{=} \binom{m+1}{m+1} + \binom{m+1}{m} = \binom{m+2}{m+1}$$



\* REGUŁA PASCALA RACHUNKOWY D-d

Zad. 13