Lista 6

Maurycy Borkowski

22.04.2020

zad. 11 (2 punkty)

I

$$z^2 - z + 1 = 0$$
$$\Delta = 1 - 4 = -3$$
$$z = \frac{1 \pm 3\sqrt{i}}{2}$$

II

$$2z + \overline{z} = 6 - 5i$$

Oznaczmy $a = Re(z) \quad b = Im(z)$:

$$\begin{cases} 2a + a = 6 \\ 2b - b = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases}$$

Więc $z = 2 - 5i$.

zad. 12 (2 punkty)

Dowód. Załóżmy niepwrost, że: $|z_k| < 1$ dla $k \leqslant 200$.
Wiemy, że:

$$\frac{\sum_{k=1}^{200} z_k}{200} = 1$$

Wnioskujemy:

$$\sum_{k=1}^{200} Im(z_k) = 0$$

Zatem:

$$\frac{\sum_{k=1}^{200} Re(z_k)}{200} = 1$$

dalej:

$$\sum_{k=1}^{200} Re(z_k) = 200$$

Ale z założenia otrzymujemy sprzeczność:

$$\sum_{k=1}^{200} Re(z_k) \leqslant \sum_{k=1}^{200} |z_k| < 200 = \sum_{k=1}^{200} Re(z_k)$$

$\square$

zad. 13 (2 punkty)

I

Zauważmy, że:

$$(1+i)^4 = 2i \cdot (2i)^2 = -4$$

Więc

$$(1+i)^{1000} = \left((1+i)^4\right)^{250} = (-4)^{250} = 2^{500}$$

II

$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{129} = \left(\cos\frac{5}{3}\pi - i\sin\frac{5}{3}\pi\right)^{129} =$$

$$(e^{\frac{5}{3}\pi i})^{129} = e^{215\pi i} = (\cos 215\pi - i\sin 215\pi) = (\cos\pi - i\sin\pi) = -1$$

zad. 15 (2 punkty)

I

$$P(z) = z^3 - 2z^2 - 5z + 6$$

Zauważmy, że $P(1) = 0$, skoro $P(-2) = 0$ i wyraz wolny jest równy 6 wnioskujemy, że w rozkładzie na czynniki liniowe będzie $(x-3)$
Więc:

$$P(z) = (z-1)(z+2)(z-3)$$

II

$$P(z) = z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 2$$

Zauważmy $P(1) = 0$. Skoro $P(i) = 0$ to $P(-i) = 0$. Dalej wnioskujemy (wyraz wolny równy 2) $P(2) = 0$

$$P(z) = (z-1)(z-2)(z+i)(z-i) = (z-1)(z-2)(z^2+1)$$

zad. 15 (2 punkty)

Przykładowo:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-(3+i))(x-(3-i)) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20$$

zad. 21 (2 punkty)

Oznaczmy szukane punkty z', w' z geometrii układu:

$$w' = z + (z-w)i$$

$$z' = w + (w-z)i$$

Małe wytłumaczenie: różnica $z - w$ oznacza wektor między punktami jednej krawędzi i teraz mnożąc przez i odpowiednio go rotujemy musimy jeszcze dodać punkt *startowy*

zad. 24 (3 punkty)

Nasz wielokąt foremny możemy traktować jako rozwiązania wyrażenia:

$$z^n - 1 = 0$$

Oznaczmy przez A_1 punkt odpowiadający rozwiązaniu $z_1 = 1$.
Dalej korzystamy ze wzoru:

$$z^n - 1 = (z-1)\left(z^{n-1} + z^{n-2}1 + z^{n-3}1^2 + \cdots + z^2 b^{n-3} + z1^{n-2} + 1^{n-1}\right)$$

Zatem dla dowolnego $k \neq 1$ mamy A_k zeruje drugi czynnik.
Mają te same pierwiastki i ten sam czynnik przy najwyższej potędze, zatem te wielomiany są indentyczne:

$$z^{n-1} + z^{n-2}1 + z^{n-3}1^2 + \cdots + z^2 b^{n-3} + z + 1 = (z - A_2)(z - A_3)\ldots(z - A_n)$$

Gdy $z = A_1$:

$$A_1^{n-1} + A_1^{n-2}1 + A_1^{n-3}1^2 + \cdots + A_1^2 b^{n-3} + A_1 + 1 = (A_1 - A_2)(A_1 - A_3)\ldots(A_1 - A_n)$$

Pamiętając $A_1 = 1$:

$$n = |A_1 - A_2|A_1 - A_3|\ldots|A_1 - A_n|$$