zadanie 42.

Pokażemy, że język $L = \{w \in \{0,1\}^* : |w|_0 \leqslant |w|_1 \leqslant 2|w|_0\}$ jest bezkontekstowy, tworząc niedeterministyczny automat ze stosem $\mathcal{A}$ rozstrzygający L.

Pomysł:
Chcemy stworzyć automat z licznikiem, będzie on liczył przewagę zer/jedynek. Na jedną jedynkę przypada co najmniej jedno i co najwyżej dwa zera i to chcemy zawrzeć w przejściach. Stan q_2 traktujemy jako możliwość usunięcia "$-$" drugi raz (ϵ-przejściem), co odpowiada przypisania do 1 drugiego 0.

Rozważmy NPDA $\mathcal{A}$: $\langle \{0,1\}, \{q_1, q_2\}, \{+, -, Z\}, Z, \delta \rangle$, akceptujemy słowo gdy po jego przeczytaniu mamy pusty stos w q_1 (występuje tylko Z).
Zdefinujmy relację δ:

$$\delta(q_1, 0, Z, q_1, Z+) \tag{1}$$
$$\delta(q_1, 0, Z, q_1, Z++) \tag{2}$$
$$\delta(q_1, 0, +, q_1, ++) \tag{3}$$
$$\delta(q_1, 0, +, q_1, +++) \tag{4}$$
$$\delta(q_1, 0, -, q_1, \epsilon) \tag{5}$$
$$\delta(q_1, 0, -, q_2, \epsilon) \tag{6}$$
$$\delta(q_1, 1, Z, q_1, Z-) \tag{7}$$
$$\delta(q_1, 1, -, q_1, --) \tag{8}$$
$$\delta(q_1, 1, +, q_1, \epsilon) \tag{9}$$
$$\delta(q_2, 0, Z, q_2, Z+) \tag{10}$$
$$\delta(q_2, 0, Z, q_2, Z++) \tag{11}$$
$$\delta(q_2, 0, +, q_2, ++) \tag{12}$$
$$\delta(q_2, 0, +, q_2, +++) \tag{13}$$
$$\delta(q_2, \epsilon, -, q_1, \epsilon) \tag{14}$$
$$\delta(q_2, 1, Z, q_2, Z-) \tag{15}$$
$$\delta(q_2, 1, +, q_2, +-) \tag{16}$$

Twierdzenie 1. *Automat $\mathcal{A}$ rozstrzyga język L.*

Dowód. Weźmy dowolne słowo $w \in L$ oraz dwa dowolne słowa $w', w'' \notin L$, tż. $|w'|_1 < |w'|_0$ oraz $2|w''|_0 < |w''|_1$.
Pokażemy, że dla w istnieje przejście automatu $\mathcal{A}$ kończące ze stosem pustym, a dla w', w'' nie.

w

Skoro $|w|_0 \leqslant |w|_1 \leqslant 2|w|_0$ to dla każdego zera w słowie jesteśmy w stanie określić czy przypada ono na 1 czy na 2 jedynki. Czytając słowo jedyny niedeterminizm występuje w przypadku czytania zera, wtedy dla zer określonych dla samotnych jedynek używamy przejść 1,3,5,10,12 natomiast dla zer określonych dla par jedynek używamy przejść 2,4,11,13,6+14 (przejście 6 i gdy będzie "$-$" na górze stosu przejście 14). Jedyną wątpliwością może być, czy zawsze będziemy w stanie wrócić z q_2 gdy chcieliśmy usunąć dwa "$-$", możemy rozważać wszystkie zera z samotnymi jedynkami na początku a zera dla par jedynek na końcu, wtedy mamy pewność, że w pewnym momencie w q_2 na stosie będzie "$-$", odpowiada to tym jedynkom, do których przypisane jest *zero dla par* (zera dla samotnych zostały skasowane pierwszymi jedynkami w q_1) i wtedy używamy ϵ-przejścia 14.

w'

Każde wystąpienie jedynki w słowie dodaje na stos "$-$", natomiast każde wystąpienie zera z "$-$" na górze stosu usuwa co najmniej jeden "$-$" (gdy Z lub "+" na górze stosu to go powiększamy kolejnym "+"/"++"), skoro zachodzi $|w'|_1 < |w'|_0$ to nie ma możliwości usunięcia wszystkich "$-$" i skończenia z pustym stosem, zostaną jakieś "+".

w''

Każda jedynka dodaje "$-$", ale jedno wystapienie zera może usunąć co najwyżej dwa "$-$", raz przejściem do q_2 i raz ϵ-przejściem. Skoro $2|w''|_0 < |w''|_1$ to pewne jedynki nie zostaną *usunięte* zerami i skończymy ze niepustym stosem zawierającym "$-$". $\square$