

# Sprawozdanie do zadania **P1.11**

Maurycy Borkowski

28.10.2020

## Przedstawienie problemu

W zadaniu mamy dane mamy równanie zdefiniowane dla  $n \geq 2$ :

$$\frac{x + x^{-1}}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{n} \quad (1)$$

powyższą równość można zapisać równoważnie za pomocą wielomianu  $p_n(x)$ :

$$p_n(x) = x^n - nx - nx^{-1} + x^{-n} \quad (2)$$

równanie ma wtedy postać:

$$p_n(x) = 0 \quad (3)$$

Wielomian  $p_n(x)$  ma ciekawe właściwości:

Ma dokładnie dwa pierwiastki dodatnie:  $\alpha$  oraz  $\beta$  ( $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\beta \in (1, 3)$ ), dodatkowo ciąg:  $\{\beta_n\}_{n=2}^{\infty}$  jest monotonicznie malejący, to znaczy:

$$\beta_2 > \beta_3 > \dots > \beta_n \quad (4)$$

W zadaniu chcemy znaleźć rozwiązania równania (1) czyli równoważnie pierwiastki  $\beta_n$  dla różnych wartości  $n \in \{2, 3, \dots, 20\}$

Zauważamy, że znając pierwiastek  $\beta_n$  możemy zawęzić zakres poszukiwań pierwiastka  $\beta_{n+1}$ , z (4)  $\beta_{n+1} < \beta_n$  zatem:

$$\beta_{n+1} \in (1, \beta_n) \quad (5)$$

Będziemy ich szukać za pomocą poznanych metod numerycznych szukania miejsc zerowych funkcji, dokładniej:

- (a) metody bisekcji
- (b) metody Newtona

## (a) Metoda bisekcji

Metoda bisekcji opiera swoje działanie na twierdzeniu z analizy rzeczywistej, Twierdzeniu Darboux. Podstawowym założeniem tego twierdzenia jest ciągłość badanej funkcji na zadanym przedziale.

Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowany (2), wielomian  $p_n(x)$  posiada jedyne punkty nieciągłości w  $x = 0$ . Nie przeszkadza więc nam to w korzystaniu z metody używającej tego twierdzenia, ponieważ ograniczamy się tylko do przedziału występowania pierwiastka  $\beta$  tj. podprzedział  $(1, 3)$ .

Wiemy, że  $\beta \in (1, B) \subset (1, 3)$  oraz jest to pojedynczy pierwiastek w tym przedziale, zatem:

$$f(1)f(U) < 0 \quad (6)$$

Korzystając z Tw. Darboux, (6) oraz  $p_n(x)$  jest klasy  $C^n$  na przedziale  $(1, 3)$ :

$$p_n(\beta_n) = 0 \quad dla \quad \beta_n \in (1, 3)$$

Wobec powyższego, możemy zastosować metodę bisekcji do wyznaczenia  $\beta_n$ . Dokładny Algorytm metody bisekcji, z którego będziemy korzystać można odnaleźć w książce Analiza Numeryczna, Kincaid David, Cheney Ward (rozdział 3, strona 68).

Chcemy uzyskać dokładność co najmniej 6 cyfr dziesiętnych tj:

$$\frac{|r - c_n|}{r} \leq 10^{-6}$$

dalej (tw. 3.1.2 z Analiza Numeryczna, Kincaid David, Cheney Ward):

$$2^{-(n+1)} \times \frac{2}{1} = 2^{-n} \leq 10^{-6}$$

Jest tak dla  $n \geq 20$ , tyle musimy wykonać iteracji.

## (b) Metoda Newtona

Głównym pomysłem metody Newtona jest przybliżenie badanej funkcji za pomocą Wzoru Taylora.

$$0 = f(\beta) = f(x + h) = f(x) + hf'(x) + O(h^2) \quad (7)$$

gdzie:  $h = \beta - x$  Z (7) zauważamy, że aby móc używać korzystać z metody Newtona,  $f$  musi być różniczkowalna, oraz  $h \ll 1$ .

W naszym przypadku  $f = p_n(x)$  więc pierwsza pochodna istnieje i jest powprawnie określona na całym przedziale występowania  $\beta$ .

Przekształcając (7) mamy, jeżeli  $x_n$  jest dobrym przybliżeniem pierwiastka  $\beta$  to:

$$x_{n+1} = x_n - \underbrace{\frac{p_n(x_n)}{p'_n(x_n)}}_h \quad (8)$$

jest jego lepszym przybliżeniem.

Metoda polega na iterowaniu wzoru (8) i uzyskiwaniu co raz lepszych przybliżeń pierwiastka  $\beta$ . Dokładny algorytm, z którego będziemy korzystać można odnaleźć w książce Analiza Numeryczna, Kincaid David, Cheney Ward (rozdział 3, strona 72).

Widać, że jedynym problemem tej metody jest wyznaczenie *dobrego*  $x_0$ , bez głębszych i mądrych rozważań na temat własności  $p_n(x)$  możemy iterować się po kolejnych wartościach z podprzedziału  $(1, 3)$  z pewną dokładnością, w ten sposób znajdujemy  $x_0$ , dla którego metoda będzie szybko zbieżna.

Liczba iteracji potrzebnych do uzyskania 6 cyfr dziesiętnych dokładności, będzie zależała od wyboru  $x_0$ .

## Implementacja

Obie metody będziemy implementowali w języku Julia, używając podwójnej precyzji, Float64. Dla zwiększenia dokładności licząc wartość  $p_n(x)$  będziemy używali wzoru (2).

$p_n(x)'$  potrzebną do metody Newtona wyznaczamy korzystając z podstawowych praw rachunku różniczkowego:

$$p_n(x)' = n(x^{n-1} + \frac{1}{x^2} - x^{-n-1} - 1) \quad (9)$$