KONWERSATORIUM

Lista 1 Zad 1 (g) $A = \mathbb{N}_{>0}$, $m * n = m^n$.

Mamy sprawdzić: łączność, przemienność i istnienie elementu neutralnego.

ŁĄCZNOŚĆ

Jak zacząć? Co by znaczyła łączność? $m, n, l \in \mathbb{N}_{>0}$

$(m * n) * l = (m^n) * l = (m^n)^l = m^{nl}$

$m * (n * l) = m * (n^l) = m^{n^l}$ Wyszło „coś innego"

i domyślamy się, że $*$ NIE jest łączne.

Aby to udowodnić, musimy podać (kontr)przykład.

Np. $m = 2$, $n = 1$, $l = 2$.

$(2*1)*2 = 2^1 * 2 = 2*2 = 2^2 = 4$

$2*(1*2) = 2 * 1^2 = 2*1 = 2^1 = 2$ ($4 \neq 2$)

Cyli $*$ nie jest łączna.

to jest właściwy dowód!

PRZEMIENNOŚĆ $m * n = m^n$

J.w. przemienność znaczy: $m * n = m^n$, $n * m = n^m$

Domyślamy się, że $*$ NIE jest przemienna

Musimy znaleźć (kontr)przykład, np. $m = 1$, $n = 2$.

$1*2 = 1^2 = 1$

$2*1 = 2^1 = 2$ ($1 \neq 2$)

Cyli $*$ nie jest przemienna.

to jest dowód nieprzemienności $*$

ELEMENT NEUTRALNY

Def: $e \in \mathbb{N}_{>0}$ jest elem. neutralnym $*$ gdy:

$\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ $\underbrace{e * n}_{e^n} = n$ i $\underbrace{n * e}_{n^e} = n$

Dla $e = 1$ mamy $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ $n * 1 = n^1 = n$

ale $1 * n = 1^n = 1$ ← zwykle $\neq n$.

Przeczuwamy, że element neutralny $*$ nie istnieje.

Musimy to udowodnić. Czyli musimy pokazać, że $\forall e \in \mathbb{N}_{>0}$ e NIE jest elem. neutralnym $*$

Czyli że $\forall e \in \mathbb{N}_{>0}$ $\neg(\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ $e^n = n$ i $n^e = n)$

Czyli że $\forall e \in \mathbb{N}_{>0}$ $\exists n \in \mathbb{N}_{>0}$ $e^n \neq n$ lub $n^e \neq n$

Czyli dla każdego $e \in \mathbb{N}_{>0}$ mamy znaleźć „świadka" n na nieneutralność e, czyli

Okazuje się, że np. $n = 2$ jest dobrym świadkiem dla wszystkich e. Czemu?

Weźmy dowolne $e \in \mathbb{N}_{>0}$. Wtedy:

$e * 2 = e^2 \neq 2$, bo nie istnieje liczba naturalna e, taka że $e^2 = 2$.

Stąd $*$ nie ma elementu neutralnego.

(dowolny $e \in \mathbb{N}_{>0}$ nie jest elem. neutralnym $*$, czyli)

Dowód nieistnienia elementu neutralnego $*$