Zad. 2

$|V_G| \geq 11$

Zał. niewprost, że G i $\overline{G}$ planarne, wtedy spełnione są nierówności:

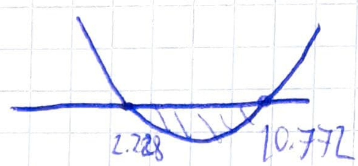
$$\begin{cases} |E_G| \leq 3\cdot|V_G|-6 \\ |E_{\overline{G}}| \leq 3\cdot|V_{\overline{G}}|-6 \end{cases} \rightsquigarrow |E_G|+|E_{\overline{G}}| \leq 3\cdot(|V_G|+|V_{\overline{G}}|)-12$$

ale: $n=|V_G|=|V_{\overline{G}}|$ i $|E_G|+|E_{\overline{G}}| = \frac{n(n-1)}{2}$ mamy więc

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2} \leq 6n-12$$

$$n^2-n \leq 12n-24$$

$$n^2-13n+24 \leq 0$$



$$\Downarrow$$

$$2.228 \leq n \leq 10.772$$

ale $n \geq 11$ ↯

Zad. 3

Zał. niewprost, że: – G planarny, więc $m \leq 3n-6$
– że istnieją <3 wierzchołki o st. ≤ 5

- Z lematu o uściskach dłoni $\sum deg(v) = 2m \leq 6n-12$
- Najmniejsza możliwa suma st. wierzchołków wtedy: $(n-2)\cdot 6+2\cdot 1 = 6n-10$

Zatem:

$$6n-10 \leq \sum deg(v) \leq 6n-12$$

$$\Downarrow$$

$$-10 \leq -12 \quad ↯$$

zad. 4 G, - płaski teza: $n(G)+f(G) = m(G)+k(G)+1$

Oznaczmy składowe G jako: $A_1 \dots A_k$. Teraz tworzymy nowy graf G^* dokładając $k-1$ krawędzi pomiędzy spójnymi. Oczywiście nie dotyczy ściany więc:

$n^* = n$, $m^* = m+k-1$, $f^* = f$, graf jest spójny i planarny więc z tw. Eulera:

$$2 = n^* - m^* + f^* = n - (m+k-1) + f = n - m + f + 1 - k$$

co implikuje

$$n - m + f = k+1 \quad \blacksquare$$

zad. 5 r - dł. najkrótszego cyklu

f-liczba ścian, w każdej ścianie jest conajmniej r (w ścianach są cykle po obwodzie) wierzchołków.

więc, każda krawędź ~~ręczy~~ jest krawędzią ~~ręczy~~ dwóch ścian więc:

- $2m \geq f \cdot r$
- z Tw. Eulera: $n - m + f = 2 \Rightarrow f = 2 - n + m$

Mamy:

$$2m \geq r(2 - n + m)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{2(m-n)} \geq r(2-n)$$

$$m(2-r) \Downarrow$$

$$(r-2)m \leq r(n-2) \quad \blacksquare$$

Równość mamy dla $2m = fr$ $\rightarrow$ ściany to tylko ramy zad 12

- $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$

Pierwszy wierzchołek v_0 możemy pokolorować na k kolorów. Kolejny v_1 sąsiedni do v_0 jest $k-1$ sposobów na kolorowanie v_1. Kolejny wierzchołek v_2 sąsiedni do v_0 oraz v_1 nie może być do ... kolejny ..., mamy znów $k-1$ możliwości, ta procedura ... rekurencyjny, ~~...~~ stąd zadanie wzór

- Baza: $P_{C_3}(k) = k\cdot(k-1)(k-2) = (k-1)^3 + (-1)^3(k-1)$

Krok: zał. że dla n zachodzi: ~~$P(C_n$~~ $P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$

Z zad. 11:

$$P_{C_{n+1}}(k) = \underbrace{P_{C_{n+1}/e}(k)}_{k(k-1)^n} - \underbrace{P_{C_{n+1}\cdot e}(k)}_{\cong C_n:\ (k-1)^n - (-1)^n(k-1)} = k(k-1)^n - (k-1)^n \pm (-1)^n(k-1) =$$

$$= (k-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(k-1)$$

$\blacksquare$

Zad. 11

Pokażmy: $P_{G\setminus e}(k) = P_G(k) + P_{G\cdot e}(k)$

Oznaczmy e jako $u-v$, Weźmy wszystkie kolorowania $G\setminus e$

mamy dwa przypadki:

1. u,v różnych kolorów, w tym przypadku $P_{G\setminus e}(k) = P_G(k)$

   dodane e nie psuje kolorowania

2. u,v tego samego koloru, wtedy $P_{G\setminus e}(k) = P_{G\cdot e}(k)$

~~u,v to~~ u,v nie kolorowania

Ten sam kolor [?] tych samych

sąsiadów u,v

Zad. 13

$$\frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2} \geq n$$

Dla dowolnych dwóch kolorów minimalnego kolorowania mamy conajmniej jedną krawędź łączącą te dwa kolory; w przeciwnym wypadku kolorowanie nie byłoby minimalne, (można by zamienić jeden z kolorów na drugi).

Mamy więc conajmniej krawędzi:

$$\binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G)!}{(\chi(G)-2)!\,2!} = \frac{\chi(G)\cdot(\chi(G)-1)}{2}$$

$\blacksquare$