Zad. 4 MAURYCY BORKOWSKI

2a)

a) x_n – przybliżenie szukanego g w n-tej iteracji

g – szukany punkt

$x_n \to g$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-g|}{|x_n-g|^p} = C$$

C – stała

p – wykładnik zbieżności

Zbieżność jest kwadratowa gdy $p=2$ tzn. gdy błąd maleje kwadratowo.

b) Zdefiniujmy: $f(x) = \frac{1}{x} - c$ miejscem zerowym f jest wtedy c^{-1} $f(c^{-1}) = c - c = 0$.

Sprowadziliśmy problem do znalezienia miejsca zerowego $f(x)$.

Korzystając z metody Newtona: $\frac{df}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - c}{-\frac{1}{x_n^2}} = x_n + \left(\frac{1}{x_n} - c\right) x_n^2 = x_n + x_n - c x_n^2 =$$

$$= x_n (2 - c x_n)$$

Sprawdźmy zbieżność, błędy kolejnych przybliżeń:

$$* \; e_{n+1} = \left|x_{n+1} - \frac{1}{c}\right| = \left|x_n(2 - cx_n) - \frac{1}{c}\right| = \left|2x_n - cx_n^2 - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{2x_n}{c} - x_n^2 - \frac{1}{c^2}\right| c =$$

$$= \left|x_n - \frac{1}{c}\right|^2 \cdot c = e_n^2 \cdot c$$

Wobec powyższego:

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } e_0 < \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & \text{dla } e_0 = \frac{1}{c} \\ \infty & \text{dla } e_0 > \frac{1}{c} \end{cases}$$

bo $e_0 < \frac{1}{c}$ $e_1 < \frac{1}{c^2} \cdot c$ ale $e_1 < e_0$ ...

bo $e_0 = \frac{1}{c}$ $e_1 = \frac{1}{c^2} \cdot c = \frac{1}{c}$ ...

bo $e_0 > \frac{1}{c}$ $e_1 > \frac{1}{c^2} \cdot c$ i $e_1 > e_0$ ...

~~Jest~~ Powyższa metoda jest zatem zbieżna dla ~~...~~ gdy $e_0 < \frac{1}{c} \Rightarrow x_0 \in (0, \frac{2}{c})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \frac{1}{c}|}{|x_n - \frac{1}{c}|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_{n}^2} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{e_n^2 \cdot c}{e_n^2} = c$$

Zatem zbieżność jest kwadratowa.