zad 1

Macierz sąsiedztwa A

Macierz sąsiedztwa dopełnienia $-A'$

- $A + A' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ← macierz grafu pełnego

$I = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – jedna jedynka na i-tej pozycji

- $AI = \ldots \; j \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix} \to a_{ij}$ wektor z 1 w sąsiadach i-wierzchołka

- $A^2 I = A(AI) = A(\underbrace{I_1 + I_2 + \ldots + I_k}_{\text{wektory jedynkowe sąsiadów } i}) = AI_1 + AI_2 + \ldots + AI_k =$

$= j \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix} \leftarrow \sum_{l=1}^{k} a_{s_l j}$ ← liczba ścieżek od j i do j (przez sąsiadów i)

s_l - l-ty sąsiad

dł. 2

zad 2

~~Udowodnimy, że graf k-spójny~~.

D-d indukcyjny:

1. $n = 2$

$(0,0) — (0,1)$
$|$ $\quad$ $|$ ✓
$(1,0) — (1,1)$

2. Zał. że dla $n-1$ działa.

$U = (U_1 \ldots U_{n-1})$
$V = (V_1 \ldots V_{n-1})$

Rozpatrzmy przypadki:

1. $U_i = V_i$ dla pewnego i. Oznaczmy Q wierzchołki z kostki o wymiarze n t. i $x_i = U_i = V_i$ natomiast Q' t. i $x_i = 1 - U_i$, $Q + Q'$ tworzą kostkę.

z zał. Q kopia kostki $n-1$ z dodatkowym bitem

Q ma $n-1$ wierzchołkowo rozłącznych ścieżek.

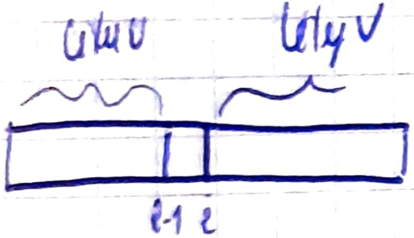
Q'

U', V' – sąsiedzi U, V w Q'

tworzymy n-tą ścieżkę $U - U' - V' - U$.

11. $\forall i \; U_i = 1 - V_i$ definiuję i-tą sieć: $U \rightsquigarrow V$

- Zmień i-ty bit potem $i+1$ .... (cyklicznie), jest k sieci bo k - stałe



Na i-tej sieci są wierzchołki którym nie zgadzają bity od i-tego z V i zgadzają do $i-1$ z U ■

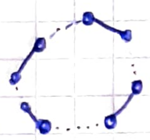
Zad. 4

• Weźmy dowolne u,v t.ż. $\{u,v\} \notin E(G)$. Z zał. $deg(u) \geq n$, $deg(v) \geq n$

Zatem: $deg(u) + deg(v) \geq n+n = 2n = |V(G)|$

z tw. Orego G ma cykl Hamiltona.

• Biorąc co drugą krawędź cyklu Hamiltona otrzymamy pełne skojarzenie ■



Zad. 5

Oznaczmy spójne składowe G: $G_1, \ldots, G_n$

$\chi(G) = \max\{\chi(G_i)\}$

Dla dowolnej spójnej mamy z Tw. Brooksa:

• $\chi(G_i) \leq 3$ chyba że $\underbrace{G_i \text{ klika lub } \cancel{\text{cyklem v nieparzysty dł.}}}_{\text{SPRAWDZAMY DFSem}}$ to 4

Jeżeli nie ma kliki (ani cykli) to sprawdzamy:

• $\chi(G_i) = 1$ wtw gdy $|V(G_i)| = 1$

• $\chi(G_i) = 2$ DFSem na przemian kolorujemy (jak dwudzielne)

• $\chi(G_i) = 3$ pozostały przypadek

zad 6

* Dodajmy $n-k$ „super" chłopców

Z Tw Halla istnieje pełne skojarzenie n dziewczyn w $m+n-k$ chłopców
a zatem k dziewczyn i chłopców wtw gdy dla dowolnych r dziewczyn, zna conajmniej r chłopców

$$r \leq r' + \overbrace{n-k}^{*} \iff \underbrace{r+k-n \leq r'}$$

zwykłych

czyli warunkiem koniecznym i wystarczającym jest: tj. gdy każde r dziewczyn znało conajmniej $r+k-n$ zwykłych chłopców ∎

zad. 7

Dołóżmy 3 dodatkowe wierzchołki chłopców, każdy wierzchołek będzie miał te same znajome (każdy slot na żonę, 4 sloty).

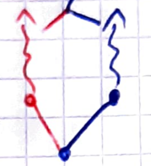
Z Tw. Halla istnieje pełne skojarzenie n dziewczyn w $4\cdot m$ chłopców wtw dla dowolnych k dziewczyn znają one conajmniej k chłopców (w grafie rozszerzonym) więc $\frac{k}{4}$ w grafie podstawowym (gdy zna chłopca to zna jego rozszerzone wierzchołki) ∎

zad8

Weźmy dowolne dwa pełne skojarzenia M, M'.

Rozważmy graf z krawędzi $M \cup M'$ (zawiera on wszystkie wierzchołki), niektóre krawędzie.

Zauważmy, że każda składowa nowopowstałego grafu jest ~~…~~ krawędzią albo cyklem.
^ żadna


ale muszą gdzieś wrócić

Drzewo nie ma cykli, więc jego podgraf ~~…~~ $M \cup M'$ też nie.

udowodniliśmy
M, M' pełne skojarzenia $\Rightarrow M = M'$, więc drzewo ma conajwyżej 1 skojarzenie ■

zad 9

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & & & 1 \\ & 1 & & \end{pmatrix}}_{V_1} \Bigg\} V_2$$

te krawędzie istnieją bo same 1 w A

$1 - \sigma(1)$
$2 - \sigma(2)$
$\vdots$
$n - \sigma(n)$

- Zauważ, że $a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} = 1$ wtw. gdy istnieje skojarzenie
- Każde skojarzenie możemy ~~…~~ w $G(V_1, V_2; E)$ możemy zakodować permutacją n-elementową.

Zatem $perm(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ = liczba różnych skojarzeń w G

zad 3

a) • M_2 – nie ma trójkąta

• zał. że M_k – nie ma trójkątów wtedy tworząc M_{k+1} tworzymy dokładając tylko do v' i w więc jeżeli istniały trójkąt to musi zawierać (innego) w lub v'. • Dowolny wierzchołek v' nie może być w trójkącie bo gdyby był to istniałyby wierzchołki v_1, v_2 t.ż v', $v_1 - v_2$ a v_1 i v_2 nie mogą być połączone bo tworzyłyby trójkąt z v.

• w też nie może tworzyć trójkąta bo dowolne v', v' są niepołączone ∎

b) • M_2 – 2 kolorowy ✓

• zał. że M_k – k kolorowy, kolorujemy w M_{k+1} wierzchołki dodane v' na kolory v możemy to zrobić bo są one połączone z sąsiadami v które mają różne kolory od niego. Wierzchołek w kolorujemy $k+1$-wszym kolorem. ∎

c) • M_2 – nie jest 1 kolorowy

• zał. że M_k nie jest $k-1$ kolorowy.

~~[illegible]~~.

~~Jeżeli M_k nie jest $k-1$ kolorowy to M_k z wierzchołkami v' też nie jest, bo dowolne kolorowanie M_k będzie dało w M_k z $\{v'\}$ kolorowanie wierzchołków v' na odpowiadające im v (tak jak w b))~~

Zał. niewprost, że M_{k+1} jest k kolorowy, BSO $\phi(w) = k$, wszystkie $\phi(v') < k$, niech $S = \{v_i : \phi(v_i) = k\}$. Rozważmy dla każdego $v_i \in S$ że $\phi(v_i) = \phi(v_i')$ jest to dalej poprawne kolorowanie (v' są połączone z w) o sąsiadach). Sprzeczność znaleźliśmy kolorowanie M_k, $k-1$ kolorami ↯ ∎

zad. 10

• Oznaczmy V_1, V_2 rozłączne zbiory wierzchołków t.ż. w nie ma krawędzi wewnątrz ich. V_1, V_2 spełniają zał. HALLA (dowody każdy taki je).

• Weźmy dowolny podzbiór V_1, $U \subseteq V_1$, $N(V_1) \subseteq V_2$, sąsiedzi V_1.

• $E_{V_1}, E_{N(V_1)}$ – liczba krawędzi wychodzących z $V_1, N(V_1)$

Graf d-regularny więc:

$$|E_{V_1}| = d|V_1| \quad , \quad |E_{N(V_1)}| = d|N(V_1)|$$

ale

$$|E_{V_1}| \leqslant |E_{N(V_1)}|$$ bo $E_{N(V_1)}$ liczy już krawędzie z V_1 do $N(V_1)$

zatem:

$$\cancel{d}|V_1| \leqslant \cancel{d}|N(V_1)|$$

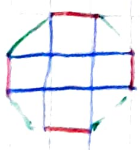
Z tw. Halla istnieje pełne skojarzenie ■

zad. 11

• Z lematu o uściskach dłoni: $\sum \overbrace{\deg v}^{3} = 2|E| \Rightarrow 3|V| = 2|E|$

stąd liczba wierzchołków jest parzysta, więc cykl Hamiltona jest parzystej dł.

• Krawędzie na cyklu kolorujemy naprzemian, pozostałe jednym kolorem



Pozostałe krawędzie każdy wierzchołek jest połączony z dokładnie jednym (matching) więc jeden kolor starczy ■

Zad. 12

a) $\chi'(G) = d$

$deg(v) = d$ $v \neq d$ z tw Vizinga $deg(v) = [0, d-1] \cup \{\cancel{d}\}$ ← bo $\chi'(G) = d$

~~Każdy wierzchołek (oprócz v) jest sąsiedni z wszystkimi kolorami. Niech c oznacza~~ ~~kolor, z którym v nie jest sąsiadem. Wybierz wszystkie krawędzie koloru~~ ~~tworzą pełne skojarzenie (tego w pary).~~ Zauważ, że istnieje d różnych kolorów skojarzeń w ss. $\Longrightarrow \chi'(G) = d$.

↯ Wtedy istnieje d różnych skojarzeń wtedy by $deg(v) \geq d$ co jest niemożliwe, stąd $deg(v) = 0$. Skojarzenie wymaga parzystej liczby wierzchołków stąd $n = |V(G)|$ $n \equiv 1 \mod 2$

b) Załóżmy nie wprost, że G - d-kolorowalny i G d-regularny, więc każdy wierzchołek sąsiaduje z każdym kolorem *

Wtedy $G-v$ dzieli G na conajmniej dwie spójne składowe G_1, G_2.

Niech $u_1 \in G_1, u_2 \in G_2$ t. że $\{vu_1\} \in G$, $\{vu_2\} \in G$.

$\{vu_1\}$ - Biała $\{vu_2\}$ - Czarna (mogą być innego koloru) w kolorowaniu G, d-kolorowaniu

Niech H oznacza podgraf G_1 tylko z białymi i czarnymi krawędziami.

Z * i tego że $\{vu_1\} \notin E(H)$ bo $v \notin H$, to wszystkie wierzchołki poza u_1 mają stopień 2. a u_1 ma stopień 1. ↯ co jest niemożliwe ↯.

Z tw. Vizinga $\Delta(G) = d < \chi'(G) \leq d+1$ stąd $\chi'(G) = d+1$

↑ ·ośr

Zad.13 teza: $\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & n\text{-parzyste} \\ n & n\text{-nieparzyste} \end{cases}$

Rozpatrzmy przypadki:

1° $n \equiv 0 \mod 2$

tworzymy pełne skojarzenie wszystkie krawędzi prostopadłe do

Nałóżmy wierzchołki do n-1 wielokąta foremnego, ostatni do środka.

Dla dowolnej ~~wierzchołka~~ krawędzi → ze środka ~~[illegible]~~

n-1 kolorów, te wszystkie skojarzenia są rozłączne a w sumie tworzą cały graf. Stąd $\chi'(K_n) = \Delta K_n = n-1$

[Na obrazku]

2° $n \equiv 1 \mod 2$

W maksymalnym skojarzeniu jeden wierzchołek zostaje bez pary, i mamy $\frac{n-1}{2}$ krawędzi.

K_n ma $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi, stąd ~~[illegible]~~ musimy n kolorów na każdą klasę.

K_n podgraf K_{n+1} więc $\chi'(K_n) \le \chi'(K_{n+1}) = n$

Zad.14 teza: $\bar{G}$ ma klikę wielkości $|V|-k$ $\iff$ G ma pokrycie wierzchołkowe wielkości k ■

Musimy udowodnić:

PW $\Rightarrow$ K zał. że $V' \subseteq V$ i $|V'| = k$ jest pokryciem wierzchołkowym

Z (kontrapozycji) def. pokrycia wierzchołkowego $u \notin V'$ i $v \notin V' \Rightarrow (u,v) \notin E \Rightarrow (u,v) \in \bar{E}$

Wszystkie wierzchołki z $V-V'$ są połączone w $\bar{G}$ stąd, $V-V'$ jest kliką w $\bar{G}$ wielkości $|V|-|V'| = n-k$

K $\Rightarrow$ PW zał. że $\bar{G}$ ma klikę wielkości $|V'| = |V|-k$, niech $(u,v) \in E$ stąd $(u,v) \notin \bar{E}$ więc $u \notin V'$ lub $v \notin V'$ (V' kliką), u lub v w $V-V'$ stąd $V-V'$ pokrywa ~~[illegible]~~ krawędź (u,v), z dowolnego wyboru krawędzi, każda krawędź jest pokryta przez $V-V'$, stąd $V-V'$ jest pokryciem wierzchołkowym o rozmiarze $|V|-|V'| = |V|-|V|+k = k$ ■

zad.15

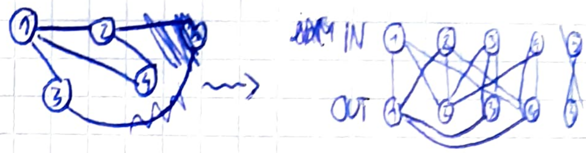
Dodajmy do grafu jeden wierzchołek sąsiedni do wszystkich.

- Jeżeli ten graf jest 4 kolorowalny to podstawowy jest 3 kolorowalny dodatkowy wierzchołek jest innego koloru niż wszystkie.
- Pewnie kolorowanie 4 kolorami wymaga osobny kolor dla niego więc jeżeli ten graf nie jest 4 kolorowy to oryginalny nie jest 3

zad.16

Możemy „rozbić" każdy wierzchołek na $in(v)$ i $out(v)$. Otrzymamy dwa razy więcej wierzchołków. Krawędzie wtedy będą.

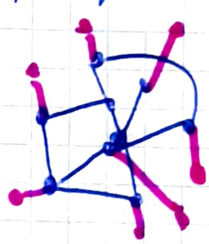
- $\forall_{(u,v)\in E}$ $out(u) \rightarrow in(v)$ (w grafach nieskierowanych jeszcze $in(v) \rightarrow out(u)$)
- $\forall_{v\in V}$ $in(v) \leftrightarrow out(v)$



takie przekształcenie jest jednoznaczne. NP.

zad.17

- Dodajmy do każdego wierzchołka 2019 połączonych tylko z nim sąsiadów.



- W tym grafie jeżeli istnieje drzewo spinające o stopniu ≤ 2021 to znaczy, że w tym drzewie każdy wierzchołek jest połączony z ~~dodatkowe~~ conajmniej dwoma wierzchołkami z grafu oryginalnego a to oznacza (ze spójności drzewa), że tworzą drogę Hamiltona
- Jeżeli nie ma takiego drzewa to conajmniej jeden wierzchołek zawsze musi być sąsiadem conajmniej 3. sąsiadów (z oryginalnego grafu) a więc niemożliwa jest ścieżka Hamiltona λ ■

Zad. 18

z zad. 16 · nieskierowanego

Sprowadzamy transformacją digraf do grafu dwudzielnego. Cykl Hamiltona istnieje wtw gdy istnieje w tamtym grafie.