Zad. 9

Z teorii jednej zmiennej:

$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + \tilde{R}_3(y)$ $\qquad \frac{\tilde{R}_3(y)}{y^3} \to 0$

$e^x = 1 + x + \hat{R}_3(x)$ $\qquad \frac{\hat{R}_3(x)}{x^3} \to 0$

Stąd

$$e^x \sin y = y + xy - \frac{y^3}{6} - \frac{xy^3}{6} + \underbrace{\tilde{R}_3(y) + \tilde{R}_3(y)x + \hat{R}_3(x)\tilde{R}_3(y) + \hat{R}_3(x)y - \hat{R}_3(x)\frac{y^3}{6}}_{R_3(x,y)}$$

Żeby skorzystać z tw. TAYLORA MUSIMY pokazać $\frac{R_3(x,y)}{\|(x,y)\|^3} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

$$\frac{\tilde{R}_3(y) + \tilde{R}_3(y)x + \hat{R}_3(x)\tilde{R}_3(y) + \hat{R}_3(x)y - \hat{R}_3(x)\frac{y^3}{6}}{x^3+y^3} \to 0$$

Każdy ze składników z licznika $\to 0$ po podzieleniu przez $x^3 y^3$.