Zad.1 $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \lceil \log_2 k \rceil$ teza: $f(n) = n-1 + f(\lceil n/2 \rceil) + f(\lfloor n/2 \rfloor)$

$$f(n) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \lceil \log_2 2k \rceil + \sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \lceil \log_2 (2k-1) \rceil = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \lceil \log k + 1 \rceil + \sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \lceil \log (k-\tfrac{1}{2}) \rceil + 1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \lceil \log k \rceil + \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor + \sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \lceil \log (k-\tfrac{1}{2}) \rceil + \lceil \tfrac{n}{2} \rceil =$$

$$= f(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) + n + \underbrace{\lceil \log (1-\tfrac{1}{2}) \rceil}_{-1} + \sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \lceil \log k \rceil =$$

$$= f(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) + f(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n - 1$$

$k > 1$

$\lceil \log (k-\frac{1}{2}) \rceil = \lceil \log (k) \rceil$

nie mniejszy równości dla ≤ 1 bo odejmowanie $0 - \frac{1}{2}$ zmienia kolej rzęd dwukrotny

Jedyność funkcji wynika z jej wzoru ~~rekurencyjnego~~ jawnego (zad.2)

Zad.2

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \lfloor \log_2 k \rfloor = \cancel{n \lfloor \log_2 n \rfloor - \sum_{k=1}^{n-1} k (\lfloor \log_2 k+1 \rfloor - \lfloor \log_2 k \rfloor)}$$

$N = \lfloor \log_2 n \rfloor$

Dla $2^m \leq i < 2^{m+1}$

$\lfloor \log_2 i \rfloor = m$

więc jest 2^m liczb dla „każdego logarytmu"

$$\cancel{\sum_{k=1}^{n-1} k} = \underbrace{N \cdot (n-2^N+1) +}_{} \sum_{j=0}^{N-1} j 2^j = N(n-2^N+1) + 2 - 2^{N+1} + N2^N =$$

tych może być mniej niż 2^m

ze wzoru książkowego

$$= N(n+1) + 2 - 2^{N+1} = \lfloor \log_2 n \rfloor (n+1) + 2 - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}$$

$f(0)$ trzeba zdefiniować bo $\lfloor \log_2 0 \rfloor$ nie istnieje.

Zad. 4

$$f(x, k, m) = \begin{cases} 1 & , k=0 \\ f(x, \frac{k}{2}, m)^2 & , k \equiv_2 0, k \neq 0 \\ x \cdot f(x, k-1, m) & , \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Wszystkie operacje są w $\mathbb{Z}_m^+$

$f(x, k, m) = x^k$ modulo m

(dla k parzystej)

Liczba mnożeń: $O(\log_2 k)$ bo parzysta operacja zmniejsza k dwukrotnie, a po „nieparzystej" operacji jest zawsze parzysta.

Zad. 5

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

• Wartości wł. A: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(z wielomianu char.)

• wektory własne: $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A^N = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^N & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_4 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_4 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_6 \\ F_5 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ mnożenie z lewej strony A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{N+2} \\ F_{N+1} \end{pmatrix}$$

$F_n = A^{N-1} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}$ ← druga współrzędna wektora

Oszacowanie

2 dnie log $d\Gamma$ co najwyżej $\log N$ które $\log_2 N$ razy pomnożyć + stałą ilość razy na koniec

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \log_2 N \rfloor} \left(2M(2^i) + 6 \cdot \underbrace{2^i}_{\text{STAŁ}}\right) \leq 2M(N) \sum_{i=1}^{\log_2 N} 2^{-i} < 2M(N)2 = \Theta(N)$$

Zad. 12.

LEMAT. 1

$$\gcd(F_{n-1}, F_n) = 1$$

D-d

Załóżmy że $\exists_k \gcd(F_{k-1}, F_k) \neq 1$, weźmy pierwsze takie m to wtedy

$\forall_{n<m} \gcd(F_{n-1}, F_n) = 1$ i $\gcd(F_{m-1}, F_m) = d$ dla pewnego d.

$$\gcd(F_{m-1}, F_m) = d$$

$$\Downarrow$$

$$\gcd(F_{m-1}, F_{m-1} + F_{m-2}) = d$$

$$\Downarrow$$

$d \mid k \cdot F_{m-1} \cdot (2 + F_{m-2})$ $k \in \mathbb{Z}$

$$\gcd(F_{m-1}, F_{m-2}) = d \quad \lightning$$

$\blacksquare$

Lemat 2: $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$

Indukcja po $m+n$

1) $m+n=2 \Rightarrow m=n=1$ $\gcd(F_1, F_1) = F_{\gcd(1)}$ ✓

krok:

2) $F_n = F_m F_{n-m+1} + F_{m-1} F_{n-m}$ ZAŁ. IND. $k < m+n$ działa

dalej: $\gcd(F_m, F_n) = \gcd(F_m, F_m F_{n-m+1} + F_{m-1} F_{n-m}) =$

$= \gcd(F_m, F_{m-1} F_{n-m}) \xrightarrow[F_m \perp F_{m-1}]{L.1} \gcd(F_m, F_{n-m})$

Z zał. ind:

$$\gcd(F_m, F_{n-m}) = F_{\gcd(m, n-m)} = F_{\gcd(m, n)}$$

Wobec ~~powyższego~~ powyższego:

$$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(n,m)}$$

$\blacksquare$

D-d Lematu 2

Indukcja po n:

BAZA

1) $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$ ✓

2) krok Dla $k<n$ działa

$$F_{m+n} = F_{(m+1)+(n-1)} \overset{z\,zał.}{=\!=} F_{m+1} F_n + F_m F_{n-1} =$$

$$= (F_m + F_{m-1}) F_n + F_m F_{n-1} =$$

$$= F_{m-1} F_n + F_m (F_n + F_{n-1}) =$$

$$= F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$$

$\blacksquare$

Zad. 13 zadT $a \perp b$ $a > b$ teza $gcd(a^m - b^m, a^n - b^n) = a^{gcd(m,n)} - b^{gcd(m,n)}$

D-d indukcji po n

1) Baza

$$gcd(a^m - b^m, a - b) = a^{gcd(m,1)} - b^{gcd(m,1)} = a - b \quad \checkmark \ (bo\ a-b \mid a^m - b^m)$$

2) Załóżmy, że dla $n' < n$ zachodzi teza:

$$gcd(a^m - b^m, a^n - b^n) = gcd(a^m - b^m, (a^{m} - b^{m}) a^{k} + (a^{k} - b^{k}) a^{m}) =$$

$$= gcd(a^m - b^m, (a^k - b^k) \cdot a^m) \underset{\text{bo}}{=} gcd(a^m - b^m, a^k - b^k) \overset{\text{zał. ind}}{=} a^{gcd(m,k)} - b^{gcd(m,k)} =$$

$a^m - b^m \perp a^m$ bo $a \perp b$

$$= a^{gcd(m, n-m)} - b^{gcd(m, n-m)} = a^{gcd(m,n)} - b^{gcd(m,n)}$$

Zad. 9 $T(n) \leqslant T(\lceil \frac{n}{5} \rceil) + T(\lceil \frac{7n}{10} \rceil) + cn$

D-d indukcji

1) Podstawa

$T(1) \leqslant 2T(1) + cn$

2) Zał. że dla $n' < n$ $T(n') < c'n'$

$$T(n) \overset{\text{z zał. zadania}}{\leqslant} T(\lceil \tfrac{n}{5} \rceil) + T(\lceil \tfrac{7n}{10} \rceil) + cn \overset{\text{z zał. indukcji}}{\leqslant} c'(\tfrac{n}{5}+1) + c'(\tfrac{n}{7}+1) + cn =$$

$$= c'n(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7}) + 2c' + cn = n[(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7})c' + c] + 2c' = O(n)$$