Sprawozdanie do zadania **P1.11**

Maurycy Borkowski

28.10.2020

Przedstawienie problemu

W zadaniu mamy dane mamy równanie zdefiniowane dla $n \geqslant 2$:

$$\frac{x + x^{-1}}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{n} \tag{1}$$

powyższą równość można zapisać równoważnie za pomocą wielomianu $p_n(x)$:

$$p_n(x) = x^n - nx - nx^{-1} + x^{-n} \tag{2}$$

równanie ma wtedy postać:

$$p_n(x) = 0 \tag{3}$$

Wielomian $p_n(x)$ ma ciekawe właściwości:
Ma dokładnie dwa pierwiastki dodatnie: α oraz β ($\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (1, 3)$),
dodatkowo ciąg: $\{\beta_n\}_{n=2}^{\infty}$ jest monotonicznie malejący, to znaczy:

$$\beta_2 > \beta_3 > \ldots > \beta_n \tag{4}$$

W zadaniu chcemy znaleźć rozwiązania równania (1) czyli równoważnie pierwiastki β_n dla różnych wartości $n \in \{2, 3, \ldots 20\}$

Zauważamy, że znając pierwiastek β_n możemy zawęzić zakres poszukiwań pierwiastka $\beta n + 1$, z (4) $\beta_{n+1} < \beta_n$ zatem:

$$\beta_{n+1} \in (1, \beta_n) \tag{5}$$

Będziemy ich szukać za pomocą poznanych metod numerycznych szukania miejsc zerowych funkcji, dokładniej:

(a) metody bisekcji

(b) meotdy Newtona

(a) Metoda bisekcji

Metoda bisekcji opiera swoje działanie na twierdzeniu z analizy rzeczywistej, Twierdzeniu Darboux. Podstawowym założeniem tego twierdzenia jest ciągłość badanej funkcji na zadanym przedziale.
Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowany (2), wielomian $p_n(x)$ posiada jedyne punkty nieciągłości w $x = 0$. Nie przeszkadza więc nam to w korzystaniu z metody używającej tego twierdzenia, ponieważ ograniczamy się tylko do przedziału występowania pierwiastka β tj. podprzedział $(1, 3)$.
Wiemy, że $\beta \in (1, B) \subset (1, 3)$ oraz jest to pojedyńczy pierwiastek w tym przedziale, zatem:

$$f(1)f(U) < 0 \tag{6}$$

Korzystając z Tw. Darboux, (6) oraz $p_n(x)$ jest klasy C^n na przedziale $(1, 3)$:

$$p_n(\beta_n) = 0 \qquad dla \qquad \beta_n \in (1, 3)$$

Wobec powyższego, możemy zastosować metodę bisekcji do wyznaczenia β_n. Dokładny Algorytm metody bisekcji, z którego będziemy korzystać można odnaleźć w książce Analiza Numeryczna, Kincaid David, Cheney Ward (rozdział 3, strona 68).

Chcemy uzyskać dokładność co najmniej 6 cyfr dziesiętnych tj:

$$\frac{|r - c_n|}{r} \leqslant 10^{-6}$$

dalej (tw. 3.1.2 z Analiza Numeryczna, Kincaid David, Cheney Ward):

$$2^{-(n+1)} \times \frac{2}{1} = 2^{-n} \leqslant 10^{-6}$$

Jest tak dla $n \geqslant 20$, tyle musimy wykonać iteracji.

(b) Metoda Newtona

Głównym pomysłem metody Newtona jest przybliżenie badanej funkcji za pomocą Wzoru Taylora.

$$0 = f(\beta) = f(x + h) = f(x) + hf'(x) + O(h^2) \tag{7}$$

gdzie: $h = \beta - x$ Z (7) zauważamy, że aby móc używać korzystać z metody Newtona, f musi być różniczkowalna, oraz $h \lll 1$.
W naszym przypadku $f = p_n(x)$ więc pierwsza pochodna istnieje i jest poprawnie określona na całym przedziale występowania β.
Przekształcając (7) mamy, jeżeli x_n jest dobrym przybliżeniem pierwiastka β to:

$$x_{n+1} = x_n - \underbrace{\frac{p_n(x_n)}{p_n'(x_n)}}_{h} \tag{8}$$

jest jego lepszym przybliżeniem.

Metoda polega na iterowaniu wzoru (8) i uzyskiwaniu co raz lepszych przybliżeń pierwiastka β. Dokładny algorytm, z którego będziemy korzysteć można odnaleźć w książce Analiza Numeryczna, Kincaid David, Cheney Ward (rozdział 3, strona 72).

Widać, że jedynym problemem tej metody jest wyznaczenie *dobrego* x_0, bez głębszych i mądrych rozważań na temat własności $p_n(x)$ możemy iterować się po kolejnych wartościach z podprzedziału $(1, 3)$ z pewną dokładnością, w ten sposób znajdujemy x_0, dla którego metoda będzie szybko zbieżna.

Liczba iteracji potrzebnych do uzyskania 6 cyfr dziesiętnych dokładności, będzie zależała od wyboru x_0.

Implementacja

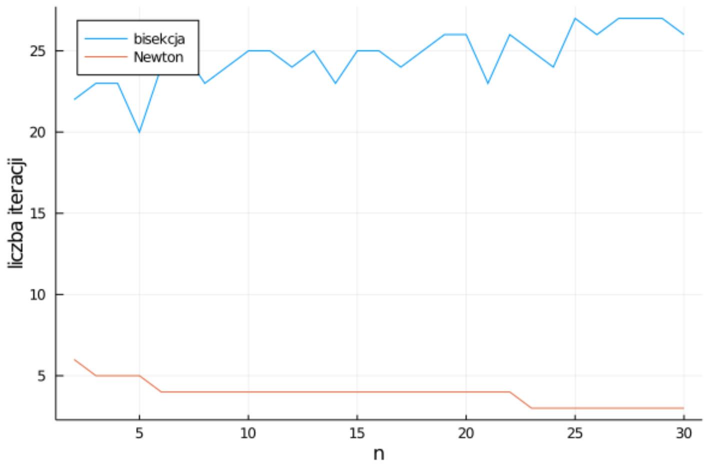
Obie metody będziemy implementowali w języku Julia, używając podwójnej precyzji, Float64. Dla zwiększenia dokładności licząc wartość $p_n(x)$ będziemy używali wzoru (2).

$p_n(x)'$ potrzebną do metody Newtona wyznaczamy korzystając z podstawowych praw rachunku różniczkowego:

$$p_n(x)' = n(x^{n-1} + \frac{1}{x^2} - x^{-n-1} - 1) \tag{9}$$

Wyniki i interpretacja

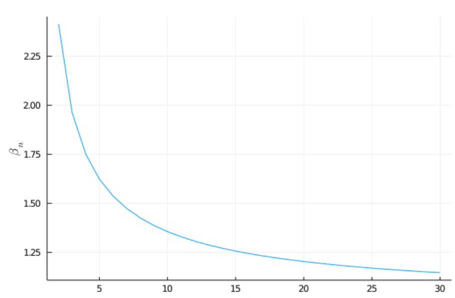
Nie będziemy się skupiać na badaniu skuteczności poszczególnych metod z zadania, gdyż problem tego nie dotyczył. Zbadajmy natomiast liczbę iteracji algorytmów poszczególnych metod:



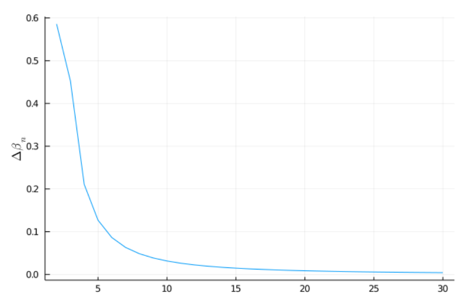
Z powyższego wykresu możemy wywnioskować, że metoda Newtona jest zdecydowanie szybsza dla dowolnych n. Metoda bisekcji, nie zmienia (modulo pewna dokładność), ilości iteracji potrzebnych do wyznaczenia β_n, ponieważ nie powiększamy (a nawet zmniejszamy) zakres poszukiwań.
Ilość iteracji w metodzie Newtona spada (też niezbyt znacząco) z powodu lepszego przybliżenia pierwiastka β_n

Zbadajmy jak zachowują się kolejne wartości β_n wiemy, że maleją (4), ale do czego zbiegają?

Z wykresu odczytujemy, że dla $n > 10$ $\beta_n \approx 1.21$ (dokładnie 1.2127491025240678).

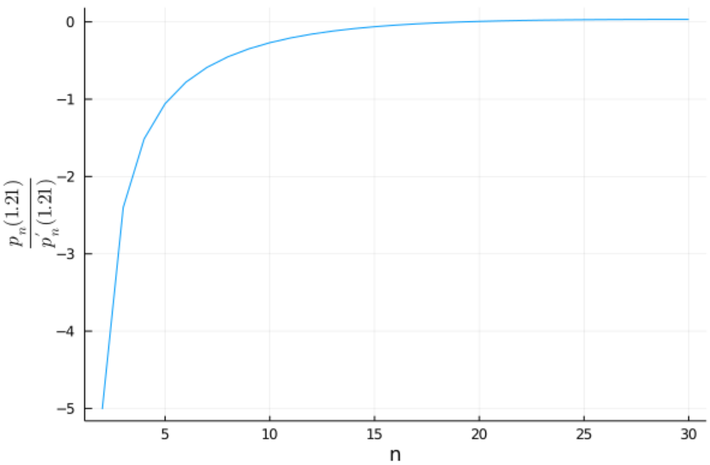


(a) Zależność β_n



(b) Różnice $\Delta\beta_n$

Dla $\pm$ tych wartości β_n korekta z (8) $\frac{p_n(x_n)}{p_n'(x_n)}$ jest bardzo mało znacząca przy wzroście n co widać na poniższym wykresie:



Mimo to metoda Newtona wydaje się być zaskakująco optymalna zestawiona z metodą bisekcji.

Podsumowanie

Do rozwiązywania problemu poszukiwania rozwiązania równania (1) (równoważnie szukania pierwiastka $p_n(x)$) możemy użyć obu metod, obie dają poprawne rezultaty. Z powyższych rozważań wynika, że optymalniejsze będzie korzystanie z metody Newtona.