zadanie 15.

X - zmienna losowa opisująca liczbę głosów *za*.
Oczywiście $X \sim B(n, p)$ gdzie p to rzeczywiste poparcie.

Oznaczmy przez m oczekiwane poparcie. Z rozkładu dwumianowego:

$$m = \mathbb{E}X = np$$
$$\text{oraz}$$
$$\text{Var}[X] = np(1-p)$$

Interesuje nas oszacowanie dla warunku prawdopobieństwa popełnienia błędu względnego większego niż 1% było mniejsze niż 5%:

$$P\left(\frac{|X-m|}{m} \geqslant 0.01\right) \leqslant 00.5 \iff P\left(|X-m| \geqslant 0.01m\right) \leqslant 00.5 \tag{1}$$

Z nierówności Czebyszewa mamy:

$$P\left(|X-m| \geqslant 0.01m\right) \leqslant \frac{np(1-p)}{\left(\frac{np}{100}\right)^2} = 10^4 \cdot \frac{(1-p)}{np}$$

stąd aby warunek (1) był zachowany wystarczy by:

$$10^4 \cdot \frac{(1-p)}{np} \leqslant 0.05$$

co daje dolne ograniczenie na n:

$$n \geqslant 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{1-p}{p}$$

zadanie 17.

Oznaczmy przez X zmienną losową opisującą zysk gracza (= strata kasyna) w 10^6 rozgrywkach, a X_i w tylko i-tej rozgrywce.

Interesuje nas:

$$P(X \geqslant 10^4) \tag{1}$$

Skorzystajmy z nierówności Chernoff'a:

$$P(X \geqslant 10^4) \leqslant \min_{t \geqslant 0} e^{-t10^4} E(e^{tX}) \tag{2}$$

rozpiszmy wyrażenie $E(e^{tX})$:

$$E(e^{tX}) = E\left(e^{t\sum_{i=0}^{10^6} X_i}\right) = \prod_{i=0}^{10^6} E(e^{tX_i}) = \prod_{i=0}^{10^6} \frac{32}{200}e^{2t} + \frac{1}{200}e^{99t} + \frac{167}{200}e^{-t} \tag{3}$$

wobec powyższego

$$\min_{t \geqslant 0} e^{-t10^4} E(e^{tX}) = \min_{t \geqslant 0} \left(e^{-t}\left(\frac{32}{200}e^{2t} + \frac{1}{200}e^{99t} + \frac{167}{200}e^{-t}\right)^{100}\right)^{10^4} \tag{4}$$

wyrażenie do minimalizacji jest nieujemne więc argmin będzie ten sam jak zdejmiemy potęgę:

$$\min_{t \geqslant 0} e^{-t}\left(\frac{32}{200}e^{2t} + \frac{1}{200}e^{99t} + \frac{167}{200}e^{-t}\right)^{100} \tag{5}$$

Za pomocą programu znajdujemy przybliżenie minimum $t_{min} \approx 0.000575$.
Podstawiając argmin do wzoru w nierówności otrzymujemy przybliżenie:

$$P(X \geqslant 10^4) \leqslant \left(e^{-t}\left(\frac{32}{200}e^{2t} + \frac{1}{200}e^{99t} + \frac{167}{200}e^{-t}\right)^{100}\right)^{10^4} \approx (0.9991254742698236)^{10^4} \approx 0.0001586$$