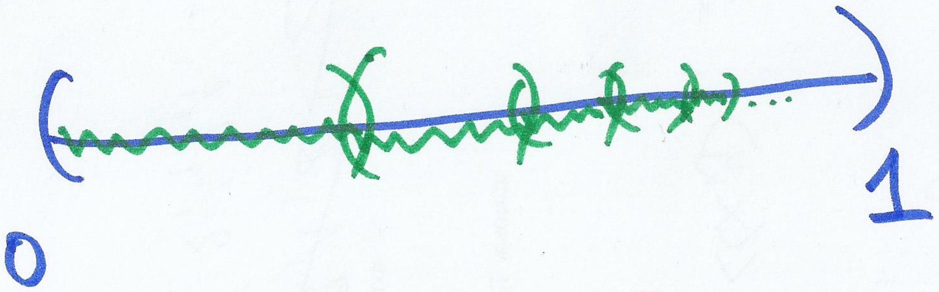
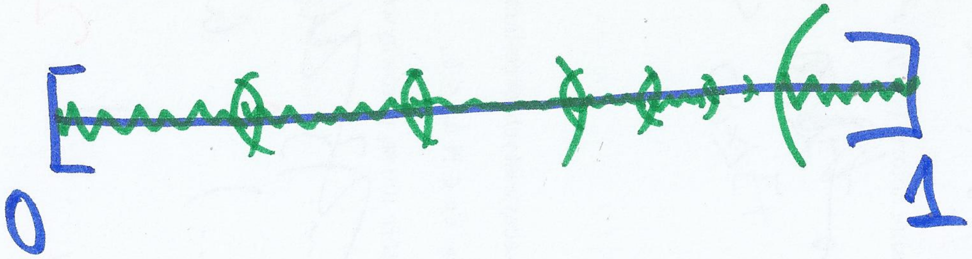
ZWARTOŚĆ

DEF X - p. topologiczna.
Rodzinę zbiorów otwartych $\mathcal{U}$ nazywamy **POKRYCIEM**, jeżeli jej suma zawiera X.

DEF. X - p. zwarta, jeżeli z każdego pokrycia da się wybrać podpokrycie skończone.



ten rysunek przedstawia ideę dowodu, że $(0,1)$ NIE JEST zwarty



ten rysunek pokazuje, że powyższej idei nie da się przenieść na przedział $[0,1]$

Tw. (X,d) - p. metryczna. NWSR

a) X - zwarta

b) z każdego ciągu w X można wybrać podciąg zbieżny

c) każdy zbiór nieskończony $A \subseteq X$ ma punkt skupienia.

[x jest p. skupienia A, jeżeli $\forall U_{otw} \ni x$ $U \cap A$ nieskończony]

PRZYKŁAD zbiory, który nie ma punktów skupienia $\rightarrow$ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

PRZYKŁAD zbioru, którego punkty skupienia to całe $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

b) $\Rightarrow$ c)

A - niesk.

Niech (x_n) - ciąg 1-1, taki, że

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$. Wtedy, z (b)

$\exists (x_{n_k}) \quad x_{n_k} \xrightarrow[k]{} x$.

$\forall U \ni x$ otw. U zawiera prawie wszystkie wyrazy (x_{n_k}), a więc nieskończenie wiele elementów A.

c) $\Rightarrow$ b) (x_n) - ciąg

$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ - niesk.

Niech x - punkt skupienia A.

~~$B_{\frac{1}{k}}(x) \cap A \ni x_{n_k} \ \forall k$~~

$\forall k \ \exists n_k \ \ x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(x) \cap A$

To n_k wybieramy tak, by (n_k) był rosnący (da się, bo $B_{\frac{1}{k}}(x) \cap A$ jest NIESKOŃCZONY)

(x_{n_k}) jest podciągiem i jest zbieżny do x.

a) $\Rightarrow$ c)

A - niesk., przeliczalny

Zał, że A nie ma punktu skupienia.

$$A = \{a_0, a_1, \dots\}$$

$\forall k$ niech $U_k \ni a_k \quad U_k \cap A = \underline{\{a_k\}}$

To się da zrobić, bo a_k nie jest punktem skupienia A (znajdujemy więc najpierw otoczenie ze skończenie wieloma elementami A, a później je wycinamy, poza samym a_k).

A jest domknięty. (bo nie zawiera ciągów zbieżnych)

$\{A^c, U_0, U_1, U_2, \dots\}$ - pokrycie bez podpokrycia skończonego.

"b) ⇒ a)"

$\mathcal{U}$ - pokrycie przeliczalne

\ w ogólności nie możemy tego zakładać. Dlatego " ; "

$\mathcal{U} = \{U_0, U_1, \dots\}$

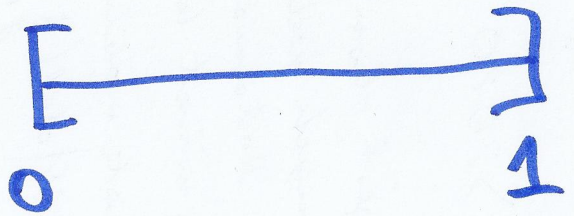
Zał., że $\mathcal{U}$ nie ma podpokrycia sk.

Niech $x_k \notin \bigcup_{i \leq k} U_i$.

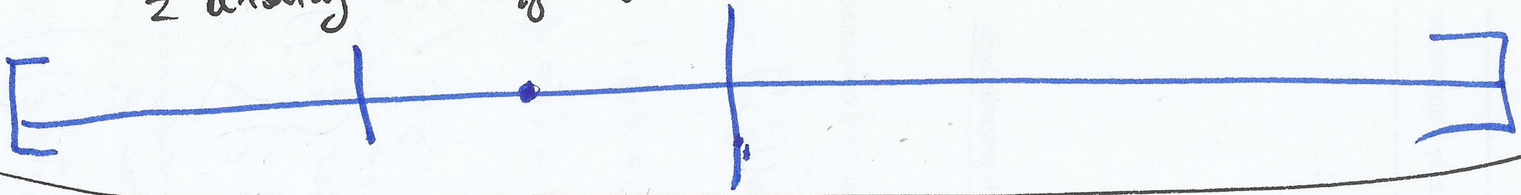
$\exists (x_{n_k}) \quad x_{n_k} \to x$.

~~Niech~~ $\exists i \quad x \in U_i$, bo $\mathcal{U}$ jest pokryciem.

U_i zawiera ∞ wiele wyrazów (x_n). ↯

Tw.  jest ZWARTY.

D-d. tw. Bolzano-Weierstrassa z analizy: ciągi ograniczone mają podciągi zbieżne.



Tw. $X \subseteq \mathbb{R}^n$! NWSR

a) X - zwarty (jako podprzestrzeń $\mathbb{R}^n$)

b) X - domknięty, ograniczony.

a) $\Rightarrow$ b)

PATRZ TEŻ parę kartek dalej (żeby zobaczyć uogólnienia tych faktów)

* X nie jest domknięty w $\mathbb{R}^n$.

$\exists (x_n)$ z X $\quad x_n \longrightarrow y \notin X$

(x_n) nie ma podciągu zbieżnego w $\underline{X}$.

(bo każdy podciąg ciągu zbieżnego zbiega do tej samej granicy).

* X nie jest ograniczony.

$x_0 \in X$

$\exists y \in X \quad d(x_0, y) > 1 \quad x_1 = y$

$\exists y \in X \quad d(x_0, y) > 2 \quad x_2 = y$

$\vdots$

(x_n) nie ma podciągu zbieżnego

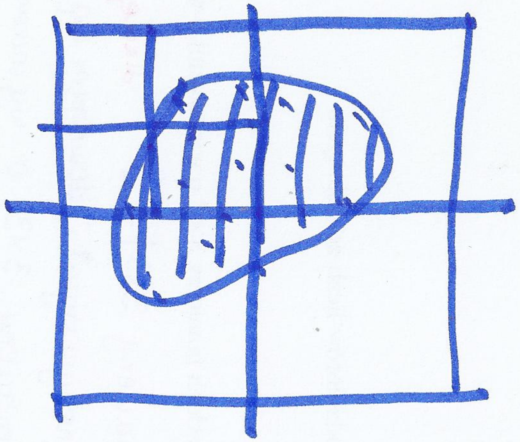
b) $\Rightarrow$ a)

X - dom, ogr.

$\mathbb{R}$ - jak $[0, 1]$

tw. Bolzano-Weierstrassa „po współrzędnych"

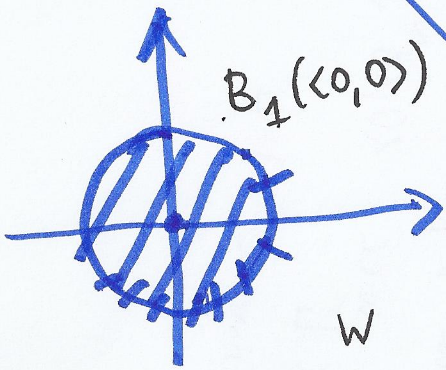
$\mathbb{R}^2$



ETC.

...

KU PRZESTRODZE:



$(\mathbb{R}^2, d_{centrum})$

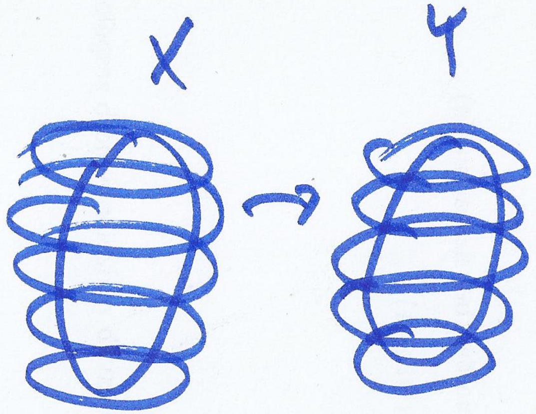
DOMKNIĘTY ✓
OGRANICZONY ✓
ZWARTY ✗

Tw. X - p. zwarta

$$\exists\, f : X \xrightarrow[\text{na}]{\text{ciągła}} Y$$

Wtedy Y - zwarta.

D-d.



$\mathcal{U}$ - pokrycie Y

$\mathcal{V} = \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}\}$ pokrycie

$\exists\, \mathcal{V}_0$ - podpokrycie skończone

$\{U \in \mathcal{U} : f^{-1}[U] \in \mathcal{V}_0\} \subseteq \mathcal{U}$ podpokrycie skończone

$\exists V \in \mathcal{V}_0$ U_0, U_1 - różne $f^{-1}[U_0] = f^{-1}[U_1] = V$.

$\blacksquare$

Wniosek. $[0,1] \not\approx (0,1)$

Oczywiście to tylko przykład. Mamy od razu wiele takich niehomeomorficznych par.

Wniosek. X - zwarta.

$$f: X \xrightarrow{\text{ciągła}} \mathbb{R}$$

Wtedy f jest ograniczona i osiąga swoje kresy.

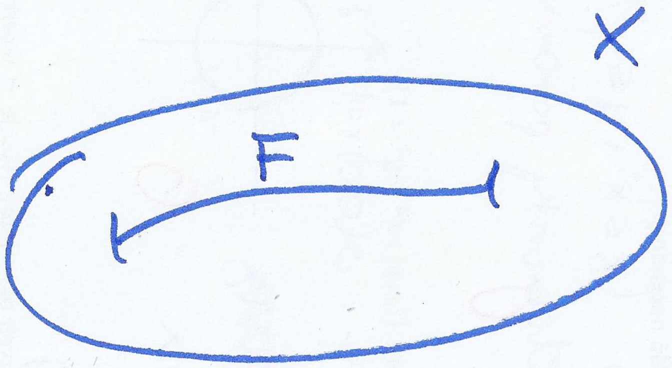
[TUTAJ MIAŁEM DŁUGI MONOLOG O TYM, DLACZEGO TO TAKIE WAŻNE I FAJNE]

W SKRÓCIE: I UPROSZCZENIU:

W PRZESTRZENIACH ZWARTYCH TO, CO LOKALNE, STAJE SIĘ GLOBALNE.

Fakt. X - p. zwarta, $F \subseteq X$ domk., to F - zwarta.

D-d.



Niech $\mathcal{U}$ - rodzina zb. otw. w X, że

$\{\underline{U \cap F} : U \in \mathcal{U}\}$ - pokrycie F.

Każde pokrycie F jest takiej postaci

Wtedy $\mathcal{U} \cup \{F^c\}$ - pokrycie X.

$\Downarrow$

Ze zwartości, istnieje $\mathcal{U}_0$ - podpokrycie sk.

Wtedy $\{U \cap F : U \in \mathcal{U}_0\}$ - podpokrycie skończone F. ∎

FAKT (X,d) - p. metryczna, zwarta jest całkowicie ograniczona.

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists F \subseteq X$ skoń. $\forall x \in X \ \exists y \in F \ d(x,y) < \varepsilon$.

D-d.

Zał, że X nie jest taka dla ε

Niech $x_0 \in X$

$\exists x_1 \ d(x_0, x_1) \geq \varepsilon$

$\exists x_2 \ d(x_2, x_0), d(x_2, x_1) \geq \varepsilon$

$\vdots$ ETC

$(x_n) \ \forall n \neq m \ d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$

więc nie ma podciągu zbieżnego. ∎

Wniosek Każda p. zwarta, metryczna jest ośrodkowa.

FAKT X - p. zwarta, $X \subseteq Y$

Wtedy X jest domknięty w Y.

D-d.

Pokażemy, że $Y \setminus X$ - otwarty.
Niech $y \in Y \setminus X$.
Szukamy otoczenia y, które jest rozłączne z X.

Z war. Hausdorffa $\rightarrow$ $\forall x \in X \quad \exists U_x \ni x \quad \exists V_x \ni y \quad U_x \cap V_x = \emptyset$

Wtedy $\{U_x : x \in X\}$ - pokrycie X

Ze zwartości, istnieje $\{U_{x_0}, U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ - pokrycie X.

Wtedy $\underbrace{\bigcap_{i \le n} V_{x_i} \ni y}_{\text{otw.}}$, no i $\bigcap_{i \le n} V_{x_i} \cap X = \emptyset$ $\blacksquare$

Tw. Zał, że $f: X \xrightarrow[1-1]{\text{ciągłe, na}} Y$, X - zwarta,

Wtedy f jest homeomorfizmem.

D-d. Trzeba tylko sprawdzić, że f^{-1} jest ciągła.

Czyli sprawdzić, że

$\forall F \subseteq X$ domk. $\quad f[F]$ - domk w Y

$$f[F] = (f^{-1})^{-1}[F]$$

F - ~~zwarty~~ domknięty $\Rightarrow$ F - zwarty $\Rightarrow$ $f[F]$ - zwarta

$\Downarrow$

$f[F]$ - domk w Y.

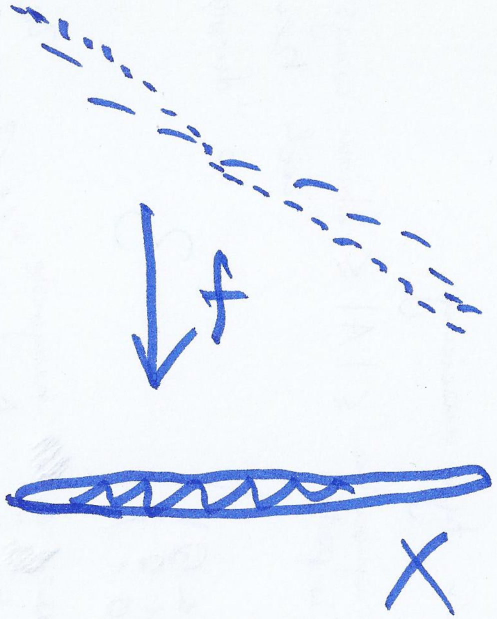
$\blacksquare$

Tw. (X,d) - p. zwarta, metryczna.

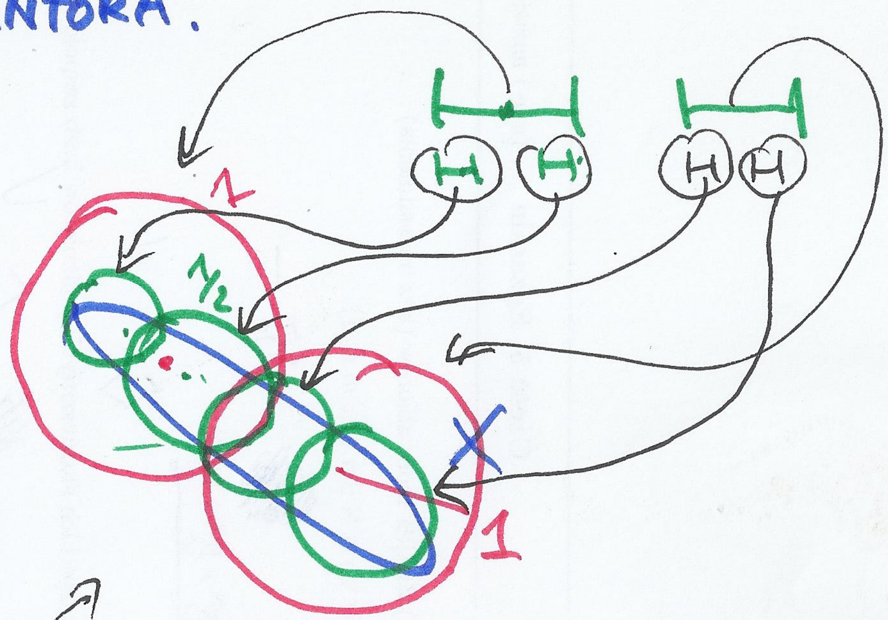
Wtedy $\exists f: C \xrightarrow[\text{na}]{\text{ciągła}} X$.

↑ ZBIÓR CANTORA.

To twierdzenie mówi, że każda przestrzeń zwarta metryczna jest (w pewnym sensie) rzutem zbioru Cantora.



D-d.



MGLISTA IDEA DOWODU.