## Trochę nazw:

Def

- **Grupa trywialna** to grupa $G=\{e\}$ składająca się tylko z elementu neutralnego.
- $G$: grupa, to $\underbrace{\{e\}}_{\text{podgrupa trywialna}} \leq G$
- Jeśli $A \subseteq B$ ($A$ to podzbiór zbioru $B$), to podzbiór $A$ jest **właściwy**, gdy $A \neq B$.
- Podobnie, jeśli $H \leq G$ ($H$ to podgrupa $G$), to podgrupa $H$ jest **właściwa**, gdy $H \neq G$.

Ustalmy: grupę $G$ i podgrupę $H \leq G$.

Def.

Niech $a \in G$. Zbiór postaci:

$aH := \{ah \mid h \in H\}$ nazywamy warstwą lewostronną (elementu $a$ (względem)) $H$ w $G$

$Ha := \{ha \mid h \in H\}$ — " — — " — prawostronną — " —

## Przykłady

(1) $G=\mathbb{Z}$, $H=3\mathbb{Z}$, $a=1$. Wtedy addytywny zapis.

$\underbrace{1+3\mathbb{Z}}_{\text{warstwa lewostronna}} = \{1+3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ← elementy $\mathbb{Z}$ dające resztę 1 przy dzieleniu przez 3.

$\underbrace{3\mathbb{Z}+1}_{\text{warstwa prawostronna}} = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = 1+3\mathbb{Z}$

bo $+$ w $\mathbb{Z}$ jest przemienne!

Popatrzmy na inne warstwy $3\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Z}$:

$0+3\mathbb{Z} = \{0+3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$ ← elem. $\mathbb{Z}$ podzielne przez 3

$2+3\mathbb{Z} = \{2+3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ← elem. $\mathbb{Z}$ dające resztę 2 przy dzieleniu przez 3.

Czyli mamy:

| | | |
|---|---|---|
| $0+3\mathbb{Z}$ | $1+3\mathbb{Z}$ | $2+3\mathbb{Z}$ |

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ jest rozłączną sumą warstw $3\mathbb{Z}$!

Zobaczymy później, że nie jest to przypadek.

(2) $G=\mathbb{Z}_{10}$, $H=\langle 2\rangle=\{0,2,4,6,8\}$, $a=1$

$1+_{10} H = \{1,3,5,7,9\}$

$\mathbb{Z}_{10}$

| | |
|---|---|
| $H$ | $1+_{10}H$ |

← rozłączna suma warstw.

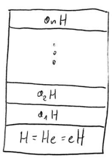
(3) $G=S_3$, $H=\langle(1,2)\rangle=\{id,(1,2)\}$, $a=(1,3)$

$(1,3)\circ H = \{(1,3)id, (1,3)(1,2)\} = \{(1,3),(1,2,3)\}$

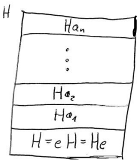
$H\circ(1,3) = \{id(1,3), (1,2)(1,3)\} = \{(1,3),(1,3,2)\}$ !

Tutaj warstwa lewostronna różni się od warstwy prawostronnej!

Intuicja $H \leq G$




$G$ jest (rozłączną) sumą warstw $H$ (lewostronnych lub prawostronnych). Każda warstwa $H$ jest równoliczna z $H$.




Pokażemy, że intuicja ta jest OK.

TW. 1

Dowolne dwie warstwy lewostronne $H$ w $G$ są sobie równe lub są rozłączne. Tak samo dla warstw prawostronnych.

**Dowód** (dla warstw lewostronnych)

Weźmy $a,b \in G$. Mamy pokazać: $aH \cap bH = \emptyset$ lub $aH=bH$.

Załóżmy, że $aH \cap bH \neq \emptyset$. CEL: $aH \stackrel{?}{=} bH$.

$aH \cap bH \neq \emptyset \Rightarrow \exists c \in aH \cap bH$. Tzn. $\exists h_1,h_2 \in H$: $c=ah_1$, $c=bh_2$

Pokażujemy $aH=bH$

($\subseteq$) Weźmy dowolne $g \in aH$. Chcemy pokazać: $g \stackrel{?}{\in} bH$.

Skoro $g \in aH$, więc istnieje $h \in H$, takie że $g=ah$.

Stąd: $g = ah = ah_1h_1^{-1}h = ch_1^{-1}h = bh_2h_1^{-1}h \in bH$, bo: $h_2 \in H$, $h_1 \in H$, $h \in H$ oraz $H \leq G$.

($\supseteq$) Analogicznie (zamieniając rolami $a$ i $b$). ■

Uwaga

Relacja $g \sim g' \stackrel{def}{\iff} gH = g'H$ jest relacją równoważności na $G$, a jej klasy abstrakcji to warstwy lewostronne $H$ w $G$ z czego też wynika TW. 1 oraz poniższy:

Wniosek

$G$ jest sumą rozłączną warstw lewostronnych $H$. Podobnie dla warstw prawostronnych.

**Dowód**

Z TW. 1 warstwy lewostronne $H$ są parami rozłączne. Czyli wystarczy pokazać że $G$ jest sumą lew. warstw $H$. Weźmy dowolny $g \in G$.

Wtedy $g = ge \in gH$, $e \in H$. Czyli każdy element należy do pewnej warstwy. ■