Maurycy Borkowski

28.05.2020

SUMA: 10 punktów

L9z12* (10 punktów)

Policzmy wartość całki dla parametru $\alpha = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2} \cdot arctgx|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

Policzmy różnicę całek dla dowolnego parametru i zerowego parametru:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2(1+x^2)} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^\infty \frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx =$$

Zróbmy podstawienie:

$$= \int_0^\infty \frac{x^\alpha - 1}{2(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \frac{\operatorname{tg} x^\alpha - 1}{\operatorname{tg} x^\alpha + 1} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} x^\alpha - 1}{\operatorname{tg} x^\alpha + 1}$$

Przeanalizujmy wykres funkcji $\frac{\operatorname{tg} x^\alpha - 1}{\operatorname{tg} x^\alpha + 1}$ na przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Zauważamy $x = \frac{\pi}{4}$ to jest jego miejsce zerowe. Co więcej na tym przedziale:

$$\frac{\operatorname{tg} x^\alpha - 1}{\operatorname{tg} x^\alpha + 1} = -\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha - 1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha + 1}$$

Zatem ta całka jest zerowa. (Dodatnie zbijają ujemne)

Wobec tego, całka różnicy więc i różnica całek (dla $\alpha = 0$ i α dowolnego też jest zerowa) więc ostatecznie wartość całki nie zależy od parametru α ponadto:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \frac{\pi}{4}$$