AiSD L2Z7

Maurycy Borkowski

31.03.2021

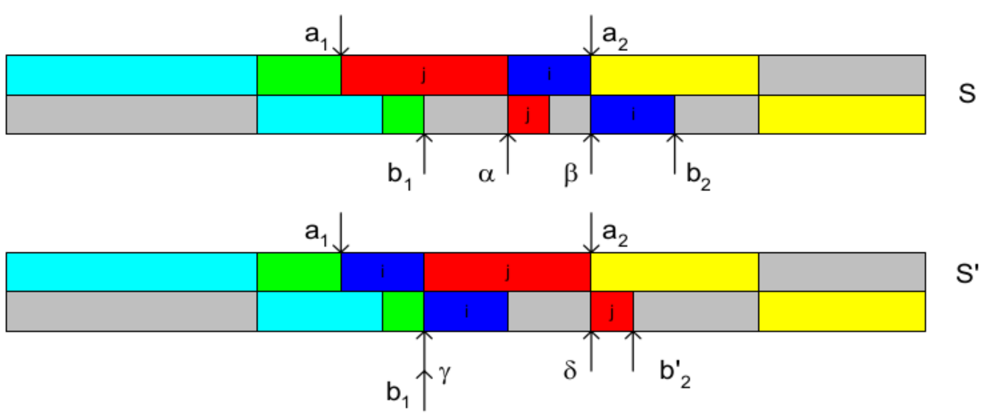
Zadanie 7

Podzielmy zbiór zadań na: $S_1 = \{i : A_i < B_i\}$ i $S_2 = \{i : A_i \geqslant B_i\}$.
Posortujmy S_1 rosnąco po A_i a S_2 malejąco o B_i. Odpowiedź $S_1 \cup S_2$.

Dowód. Weźmy dowolne rozwiązanie optymalne S jeżeli S nie jest *powyższej* postaci to musi być spełniony jeden z przypadków dla dwóch kolejnych zadań i, j w S.
Możemy iterować się po kolei od 1 do $n-1$ i sprawdzać czy każda para kolejnych zadań spełnia warunek konieczny bycia w rozwiązaniu algorytmu (poprawna kolejność w $S_{1,2}$ i poprawna kolejność procesowania najpierw S_1 potem S_2). Taka para nie znajdzie się w tym rozwiązaniu tylko wtedy gdy spełniony jeden z poniższych warunków. Jeżeli nie znajdziemy, żadnej takiej pary dla kolejnych zadań to S jest powyższej postaci.:

1. $j \in S_2 \wedge i \in S_1$
2. $i, j \in S_1 \wedge A_j > A_i$
3. $i, j \in S_2 \wedge B_j < B_i$

Pokażemy, że w każdym z tych przypadków zmiana zadań i, j da nam rozwiązanie niegorsze niż S. Oznaczenia:



S' - S z zamienionymi zadaniami i, j
b_1 - zakończenie poprzedniego (przed i) zadania w S
b_1' - zakończenie poprzedniego (przed j) zadania w S'
b_2 - zakończenie obu zadań w S
b_2' - zakończenie obu zadań w S'

$\alpha = \max(b_1, (A_j + a_1))$ rozpoczęcie pierwszego zadania b w S
$\beta = \max(a_2, (B_j + \alpha))$ rozpoczęcie drugiego zadania b w S
$b_2 = B_i + \beta = \max(a_1 + A_j + A_i + B_i, B_j + B_i + b_1, B_j + B_i + A_j + a_1)$
$\gamma = \max(b_1, (A_i + a_1))$ rozpoczęcie pierwszego zadania b w S'
$\delta = \max(a_2, (B_i + \gamma))$ rozpoczęcie drugiego zadania b w S'
$b_2' = B_j + \delta = \max(a_1 + A_j + A_i + B_j, B_j + B_i + b_1, B_j + B_i + A_i + a_1)$

1. $j \in S_2 \wedge i \in S_1 \implies A_j \geqslant B_j \wedge A_i < B_i$:

$$\overbrace{a_1 + A_j + A_i + B_i}^{1.\ \ w\ \ b_2} \geqslant \underbrace{B_i + B_j + A_i + a_1}_{3.\ \ w\ \ b_2'}$$

$$\overbrace{B_j + B_i + A_j + a_1}^{3.\ \ w\ \ b_2} \geqslant \underbrace{a_1 + A_j + A_i + B_j}_{1.\ \ w\ \ b_2'}$$

2. $i, j \in S_1 \wedge A_j > A_i \implies A_j > A_i \wedge A_i < B_i$

$$\overbrace{B_j + B_i + A_j + a_1}^{3.\ \ w\ \ b_2} > \underbrace{B_i + B_j + A_i + a_1}_{3.\ \ w\ \ b_2'}$$

$$\overbrace{B_j + B_i + A_j + a_1}^{3.\ \ w\ \ b_2} > \underbrace{a_1 + A_j + A_i + B_j}_{1.\ \ w\ \ b_2'}$$

3. $i, j \in S_2 \wedge B_j < B_i \implies A_j \geqslant B_j \wedge B_j < B_i$

$$\overbrace{a_1 + A_j + A_i + B_i}^{1.\ \ w\ \ b_2} \geqslant \underbrace{B_i + B_j + A_i + a_1}_{3.\ \ w\ \ b_2'}$$

$$\overbrace{a_1 + A_j + A_i + B_i}^{1.\ \ w\ \ b_2} > \underbrace{a_1 + A_j + A_i + B_j}_{1.\ \ w\ \ b_2'}$$

W każdym przypadku mamy: $b_2 \geqslant b_2'$. Zmiana nie pogarsza rozwiązania. $\square$

źródło