zad 8**

$D \subset \mathbb{R}^n$ - zwarty $\qquad x_m$

- $x_m \in D$ to n ciągów $\begin{bmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \\ \vdots \\ x_m^n \end{bmatrix}$, skoro D jest zwarty (ograniczony) to

$\forall i$ x_m^i też jest ograniczony bo $x_m \in D$.

- ~~Skoro x_m~~ Z tw. Bolzano-Weierstrassa dla każdego ciągu x_m^i można znaleźć podciąg x'^i_m który będzie zbieżny do pewnego x^i, z ograniczenia D.

- Definiujemy podciąg $x'_m = \begin{bmatrix} x'^1_m \\ \vdots \\ x'^n_m \end{bmatrix}$ każda współrzędna zbiega do liczby z ograniczenia D ~~ogran.~~

$\forall_i$, więc x'_m jest zbieżny do ~~pewnego~~ $x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \in D$

$\blacksquare$

33**

$$f(x_1,\dots,x_n) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$g(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

<u>D-d</u> indukcyjny: Teza: $g(X) - f(X) \geq 0$ dla dowolnych $X \in \mathbb{R}^n$

Oznaczenie: $X = (x_1,\dots,x_n)$
$X' = (x_1,\dots,x_{n+1})$

I Baza: $n=1$

$$\frac{1}{1}x - (x)^{\frac{1}{1}} = x - x = 0 \quad \checkmark$$

II Krok: Załóżmy, że dla dowolnych $x_i \geq 0$ $g(X) - f(X) \geq 0$, pokażmy, że $g(X') - f(X') \geq 0$

Rozpatrzmy funkcję jednej zmiennej:

$$f(t) = \frac{x_1 + \ldots + x_n + t}{n+1} - (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot t)^{\frac{1}{n+1}}, \quad t > 0$$

Liczymy pochodną:

$$f'(t) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n+1}} \cdot t^{-\frac{n}{n+1}}$$

Punkt krytyczny t_0 (miejsce zerowe $f'(t)$):

$$1 = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n+1}} t_0^{-\frac{n}{n+1}}$$

$$t_0^{\frac{n}{n+1}} = (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$t_0 = (x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

t_0 - jest globalnym minim, bo $\forall_{t>0}\ f''(t) > 0$:

$$f(t_0) = \frac{x_1 + \ldots + x_n + (x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1} - \left(x_1 \cdots x_n \cdot (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n+1} - \frac{n}{n+1}(x_1 \ldots x_n) =$$

$$= \frac{n}{n+1}\left(g(X) - f(X)\right) \geq 0$$

z zał. indukcyjnego

Na mocy zasady indukcji $g(X) \geq f(X)$ ∎