Maurycy Borkowski

28.05.2020

SUMA: 17 punktów

L9z12* (10 punktów)

Policzmy wartość całki dla parametru $\alpha = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2} \cdot arctgx|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

Policzmy różnicę całek dla dowolnego parametru i zerowego parametru:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2(1+x^2)} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^\infty \frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx =$$

Zróbmy podstawienie:

$$= \int_0^\infty \frac{x^\alpha - 1}{2(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \frac{\operatorname{tg} x^\alpha - 1}{\operatorname{tg} x^\alpha + 1} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} x^\alpha - 1}{\operatorname{tg} x^\alpha + 1}$$

Przeanalizujmy wykres funkcji $\frac{\operatorname{tg} x^\alpha - 1}{\operatorname{tg} x^\alpha + 1}$ na przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Zauważamy $x = \frac{\pi}{4}$ to jest jego miejsce zerowe. Co więcej na tym przedziale:

$$\frac{\operatorname{tg} x^\alpha - 1}{\operatorname{tg} x^\alpha + 1} = -\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha - 1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha + 1}$$

(Nie udowodniałem tego tu, chyba nie o to chodziło w zadaniu, żeby się nad tym pastwić) Zatem ta całka jest zerowa. (Dodatnie zbijają ujemne)

Wobec tego, całka różnicy więc i różnica całek (dla $\alpha = 0$ i α dowolnego też jest zerowa) więc ostatecznie wartość całki nie zależy od parametru α ponadto:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \frac{\pi}{4}$$

L12z3 (4 punkty)

Dowód. Z założeń:

$$\frac{\partial h}{\partial x} > \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| \geqslant 0$$

Dalej z Tw. Lagrange'a, dla pewnych punktów a,b:

$$\frac{h(\pi, e) - h(0, e)}{\pi} = \frac{\partial}{\partial x} h(a, e)$$

$$\frac{h(0, e) - h(0, 0)}{e} = \frac{\partial}{\partial y} h(0, b)$$

Dalej z powyższego:

$$h(\pi, e) - h(0, 0) = \pi \frac{\partial}{\partial x} h(a, e) + e \frac{\partial}{\partial y} h(0, b) = e \frac{\partial}{\partial x} h(a, e) + e \frac{\partial}{\partial y} h(0, b) + (\pi - e) \frac{\partial}{\partial x} h(a, e)$$

Wszystkie składniki po prawej stronie równości są > 0, więc:

$$h(\pi, e) - h(0, 0) > 0$$

□

L12z4 (3 punkty)

Dowód. Z Tw. Lagrange'a, dla pewnych punktów a, b:

$$\frac{s(3, 4) - s(0, 4)}{3} = \frac{\partial}{\partial u} s(a, 4)$$

$$\frac{s(0, 4) - s(0, 0)}{4} = \frac{\partial}{\partial v} s(3, b)$$

Dalej:

$$s(3, 4) - s(0, 4) = 3 \frac{\partial}{\partial u} s(a, 4)$$

$$s(0, 4) - s(0, 0) = 4 \frac{\partial}{\partial v} s(3, b)$$

Zatem dla pewnych a,b zachodzi:

$$s(3, 4) - s(0, 0) = 3 \frac{\partial}{\partial u} s(a, 4) + 4 \frac{\partial}{\partial v} s(3, b)$$

Korzystając z założenia $s(3, 4) = s(0, 0)$, dla pewnych a,b mamy:

$$s(3, 4) - s(0, 0) = 0 = 3 \frac{\partial}{\partial u} s(a, 4) + 4 \frac{\partial}{\partial v} s(3, b)$$

□