Lista 5 ZAD 3 K

$Aut(G) \leqslant (S_G, \circ)$.

(i) $f, g \in Aut(G) \overset{1S}{\Longrightarrow} f \circ g \in Aut(G)$ OK

(ii) $f \in Aut(G) \Rightarrow f$: izomorfizm $\overset{2S}{\Longrightarrow} f^{-1}$: izomorfizm $\Rightarrow f^{-1} \in Aut(G)$ OK

(iii) $id_G \in Aut(G)$. Stąd $Aut(G) \leqslant S_G$.

Lista 5 ZAD 4 K

G, H: grupa, $G = \langle a \rangle$: skończona (cykliczna), $b \in H$, $\overset{\text{skończony}}{ord(b)} \mid ord(a)$

(a) Istnieje jedyny homomorfizm $f: G \to H$, taki że $f(a) = b$

$G = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Jedyna potencjalna możliwość na powyższy homomorfizm f to:

$f: G \to H$, $f(a^n) = b^n$. $\quad (ord(b) \mid ord(a))$

Sprawdzamy, że takie f jest OK.

Funkcja f jest dobrze określona

Dla $n, m \in \mathbb{Z}$ załóżmy $a^n = a^m \overset{?}{\underset{\text{CEL}}{\Longrightarrow}} b^n = b^m$

$\Downarrow$

$a^{n-m} = e$

$\Downarrow$ Lista 3 Zad 4 (c)

$ord(b) \mid n-m \xLeftarrow{ord(b) \mid ord(a)} ord(a) \mid n-m$

$\Downarrow$ L3 Zad 4(c)

$b^{n-m} = e \Longrightarrow b^n = b^m$ OK, f: dobrze określona.

f jest homomorfizmem

$f(a^n \cdot a^m) = f(a^{n+m}) = b^{n+m} = b^n b^m = f(a^n) \cdot f(a^m)$ ok

Weźmy dowolne $a^n, a^m \in G$

(b) Każdy endomorfizm $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ jest postaci:

$\varphi_k: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\varphi_k(x) = k \cdot_n x$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$. $ord(1) = n$. Stosujemy (a) dla

$G = \mathbb{Z}_n = H$, $a = 1$, $b = k$.

$ord(k) \mid n = |\mathbb{Z}_n|$ (tw. Lagrange'a)

Czyli założenia z (a) są spełnione.

Czyli dostajemy z (a) jedyny homomorfizm $\varphi_k: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, taki że $\varphi_k(1) = k$.

Pozostaje pokazać, że wtedy $\forall x \in \mathbb{Z}_n \; \varphi_k(x) \overset{?}{=} k \cdot_n x$.

$\varphi_k(x) = \varphi_k(\underbrace{1 +_n \ldots +_n 1}_{x \text{ razy}}) \underset{\varphi_k:\text{ homomorfizm}}{=} \underbrace{\varphi_k(1) +_n \ldots +_n \varphi_k(1)}_{x \text{ razy}} = \underbrace{k +_n \ldots +_n k}_{x \text{ razy}} = r_n(\underbrace{k + \ldots + k}_{x \text{ razy}}) = r_n(kx) = k \cdot_n x$.

Lista 5 ZAD 5 K

$G = \langle a \rangle$: nieskończona, H: grupa, $b \in H$ (dowolny).

(a) Istnieje jedyny homomorfizm $f: G \to H$, taki że $f(a) = b$.

$\langle a \rangle$: nieskończona $\Rightarrow ord(a) = \infty \Rightarrow \forall n \neq m \; a^n \neq a^m$.

Stąd funkcja $f: G \to H$, $f(a^n) = b^n$ jest dobrze określona. (nic nie trzeba sprawdzać)

$(G = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\})$

Podobnie jak w 4(a) powyższa funkcja f jest jedynym homomorfizmem $f: G \to H$, takim że $f(a) = b$.

(b) Każdy endomorfizm $(\mathbb{Z}, +)$ jest postaci:

$\psi_k: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\psi_k(x) = kx$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$

Podobnie jak w ZAD 4K (b) bierzemy $G = \mathbb{Z} = H$, $a = 1$, $b = k$ $\quad (\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ nieskończona$)$

Założenia ZAD 5K (a) są spełnione i dostajemy jedyny homomorfizm $\psi_k: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, taki że $\psi_k(1) = k$

Pozostaje pokazać: $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \psi_k(x) = kx$

1° $x > 0$ $\quad \psi_k(x) = \psi_k(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{x \text{ razy}}) = \underbrace{\psi_k(1) + \ldots + \psi_k(1)}_{x \text{ razy}} =$

$= \underbrace{k + \ldots + k}_{x \text{ razy}} = kx$ ok

2° $x = 0$ $\quad \psi_k(0) = 0 = k0$ OK

3° $x < 0$ $\quad \psi_k(x) = \psi_k(-(-x)) = -\psi_k(-x) \overset{-x>0}{\underset{1°}{=}} -(k(-x)) = kx$

OK.