PENDEKATAN FUNGSI DAN DATA DENGAN INTERPOLASI

TIYAS ASTUTININGSIH DAN TSABITA AZZAHRA

1. LATAR BELAKANG MASALAH

Interpolasi adalah proses pencarian dan perhitungan nilai fungsi yang grafiknya melewati sekumpulan titik yang diberikan. Tujuan interpolasi adalah menaksir harga-harga tengah antara titik data yang sudah tepat. Interpolasi linear adalah suatu bentuk interpolasi untuk menentukan titik-titik antara dari titik -titik yang di ketahui menggunakan fungsi pendekatan yang berupa fungsi linear dengan interpolasi linear akan di peroleh sejumlah titik antara dua titik $p_1(x_1, y_1)$ dan $p_2(x_2, y_2)$. Interpolasi lagrange adalah suatu bentuk interpolasi dengan fungsi pendekatan berupa fungsi polinomal lagrange. Pada lagrange, fungsi polinomial pangkat n memerlukan $n + 1$ titik. Bila jumlah titiknya dua buah, maka interpolasi lagrange akan menjadi interpolasi linear. Untuk mencari titik (x, y) pada nilai x yang ditentukan dengan diketahui n buah titik $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ menggunakan interpolasi lagrange.

2. PERUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang, dapat dibuat rumusan masalah

(1) bagaimana untuk menentukan penyelesaian pendekatan pada suatu fungsi

(2) bagaimana menerapkan algoritma interpolasi untuk menentukan penyelesaian pendekatan pada suatu fungsi, dan

(3) bagaimana analisis eror pada contoh kasus?

3. TUJUAN

Tujuan dari penulisan artikel ini adalah

(1) mampu untuk menentukan penyelesaian pendekatan fungsi

(2) mampu menerapkan algoritme interpolasi untuk menentukan pendekatan fungsi, dan

(3) mampu menganalisis eror pada contoh kasus

4. PEMBAHASAN

4.1 Penurunan Algoritme. Diberikan $n+1$ buah titik berbeda, yaitu (x_0, y_0), $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$. Tentukan polinomial $P_n(x)$ yang menginterpolasi semua titik-titik tersebut sedimikian sehingga

$$y_i = P_n(x_i) \text{ untuk } i = 0, 1, 2, ..., n$$

Setelah polinom Interpolasi $P_n(x)$ ditemukan, $P_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di $x = a$, yaitu $y = P_n(a)$. Sehingga dapat menginterpolasi data dengan poliniom linier, polinom kuadratik atau polinom dari derajat yang lebih tinggi. Bentuk umum polinomial yaitu $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Jika $n = 1$ diperoleh polinomial berderajat 1, selanjutnya disebut interpolasi linier.

$$P_1(x) = a_0 + a_1x$$

Metode ini digunakan apabila diketahui minimal data pengamatan ada 2 titik.Misal diberikan dua buah titik (x_0, y_0) dan (x_1, y_1).Sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$P_1(x_0) = y_0 = a_0 + a_1x_0$$

$$P_1(x_1) = y_1 = a_0 + a_1x_1$$

Sehingga apabila dieliminasi kedua persamaan tersebut, didapat

$$a_1 = \tfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
$$a_0 = \tfrac{x_1y_0 - x_0y_1}{x_1 - x_0}$$

Maka diperoleh persamaan akhir interpolasi liniear sebagai berikut:

$$P_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) \tag{1}$$

Dari persamaan(1) bisa kita nyatakan dalam bentuk

$$P_1(x_0) = y_0 \tfrac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \tfrac{(x-x_0)}{(x_0-x_1)}$$

atau $P_1(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x)$, yang dalam hal ini

$$a_0 = y_0, L_0(x) = \tfrac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} a_1 = y_1, L_1(x) = \tfrac{(x-x_0)}{(x_0-x_1)}$$

Persamaan ini dinamakan polinom Lagrange derajat 1.Maka bentuk umum polinom Lagrange derajat derajat $\leq n$ untuk $(n+1)$ titik berbeda adalah

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + ... + a_n L_n(x) \qquad (2)$$

dimana $a_i = y_i$ dan $i = 0, 1, 2, ..., n$ dengan

$$L_i(x) = \prod_{j=0 j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_i - 1)(x - x_i + 1)...(x - x_n)}{x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_i - 1)(x_i - x_i + 1)...(x_i - x_n)} \qquad (3)$$

Mudah dibuktikan,bahwa:

$$L_i(x_j) = \{^{1, i=j}_{0, i\neq j}$$

dan polinom interpolasi $P_n(x)$ melalui setiap titik data. Pada interpolasi Lagrange ketika terjadi penambahan atau pengurangan titik data yang diketahui maka bentuk polinomial sebelumnya tidak dapat digunakan lagi. Sehingga kita dapat menggunakan penyelesaian interpolasi Polinom Newton untuk mengatasi kelemahan ini. Perhatikan kembali persamaan (1). Bentuk persamaan (1) dapat ditulis sebagai

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

dimana

$$a_0 = y_0 = f(x_0) \qquad (4)$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (5)$$

bentuk ini disebut selisih-terbagi dan ditulis $a_1 = f[x_1, x_0]$. Setelah polinom linier, polinom kuadratik dapat dinyatakan dalam

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

atau

$$P_2(x) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Persamaan tersebut memperlihatkan bahwa $P_2(x)$ dapat dibentuk dari polinom sebelumnya yaitu $P_1(x)$. Nilai a_2 dapat ditemukan dengan mensubtitusikan $x = x_2$. Sehingga

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \tag{6}$$

Nilai dari a_0 dan nilai a_1 pada persamaan (4) dan (5) dimasukkan ke dalam persamaan (6). Maka diperoleh

$$a_2 = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

sehingga

$$a_2 = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1} = \frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}$$

Demikian seterusnya, sehingga dapat membentuk polinom Newton dengan polinom derajat n dibentuk dari polinom derajat(n-1). Maka bentuk polinom Newton dapat ditulis

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]+$$
$$(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n - 1)f[x_n, x_n - 1, ..., x_1, x_0]$$

dan formula error dari polinomial newton adalah

$$E_n = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)\frac{f^n+1(\xi x)}{(m+1)}$$

5. PENERAPAN ALGORITME

Berikut contoh penerapan algoritme pendekatan fungsi dengan interpolasi.

5.1 Contoh 1. Tentukan polinomial interpolasi Lagrange dari Tabel dan hitung nilai pendekatan f(-3).

x	0	1	-1	2	-2	3
f(x)	-3	-2	5	10	16	-10

Untuk mendapatkan nilai pendekatan f(-3)dari data tersebut, digunakan persamaan 2 dengan menghitung nilai fungsi $L_i(x)$ pada persamaan 3.

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}{(0-1)(0+1)(0-2)(0+2)(0-3)} = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}{12}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}{(1-0)(1+1)(1-2)(1+2)(1-3)} = \frac{x(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}{12}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}{(-1-0)(-1+1)(-1-2)(-1+2)(-1-3)} = \frac{x(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}{24}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}{(2-0)(2+1)(2-2)(2+2)(2-3)} = \frac{x(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}{-24}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}{(-2-0)(-2+1)(-2-2)(-2+2)(-2-3)} = \frac{x(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}{-120}$$

$$L_5(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}{(3-0)(3+1)(3-2)(3+2)(3-3)} = \frac{x(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}{120}$$

Sehingga diperoleh polinomial Lagrange

$$P_4(x) = -3L_0(x) - 2L_1(x) + 5L_2(x) + 10L_3(x) + 16L_4(x) - 10L_5(x)$$

Maka nilai pendekatan $f(-3)$

$$P_4(-3) = -3L_0(-3) - 2L_1(-3) + 5L_2(-3) + 10L_3(-3) + 16L_5(-3) - 10L_6(-3)$$

dengan $L_0 = 20$,$L_1 = 15$,$L_2 = -15$,$L_3 = 6$,$L_4 = 6$,$L_5 = -1$ sehingga $P_4(-3) = -60 + 30 - 75 + 60 + 96 + 10 = 61$

5.2 Contoh 2. Tentukan polinom Newton derajat satu sampai empat dari fungsi $f(x) = cos(x)$ di [0,4]. Tentukan nilai error di x=2,5 dengan menggunakan polinomial Newton derajat 3. Tabel selisih terbagi Newton disajikan dalam Tabel 1.

x	$f(x)$	$Df(x)$	$D^2f(x)$	$D^3f(x)$	$D^4f(x)$
0	1	-0,4597	-0,2484	0,1466	-0,0147
1	0,5403	-0,9564	0,1913	0,088	
2	-0,4161	-0,5739	0,4551		
3	-0,99	0,3363			
4	-0,6536				

Tabel 1: Selisih Terbagi Newton untuk Contoh 2

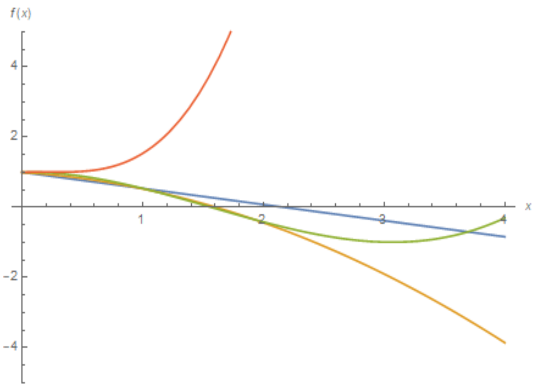
Berdasarkan Tabel 1,dapat dibentuk polinomial Newton berderajat satu sampai empat dengan $x_0 = 0$, yaitu

$$P_1(x) = 1 - 0,4597x$$

$$P_2(x) = 1 - 0,4597x - 0,2484(x-0)(x-1)$$

$$P_3(x) = 1 - 0,4597x - 0,2484(x-0)(x-1) + 0,1466(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$P_4(x) = 1 - 0,4597x - 0,2484(x-0)(x-1) + 0,1466(x-0)(x-1)(x-2) - 0,0147(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)$$



Gambar 4.1.Grafik Polinomial Newton berderajat satu sampai empat

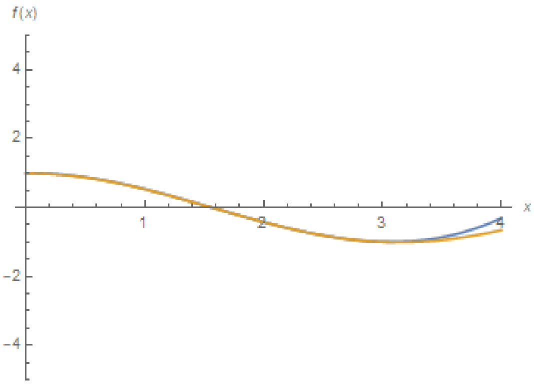
nilai error di $x = 2,5$ dengan menggunakan polinomial Newton derajat 3 yaitu

$E = f(x) - P_3(x)$

=cos(2,5)-1-0,4597(2,5)-0,2484(2,5-0)(2,5-1)+0,1466(2,5-0)(2,5-1)(2,5-2)

=-0,801144 – (-0,8056)

= 0,00473138



Gambar 4.2. Grafik f(x) dan Polinomial Newton berderajat tiga

6. KESIMPULAN

(1) Algoritme polinom Lagrange derajat derajat $\leq n$ untuk $(n+1)$ titik berbeda adalah $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + ... + a_n L_n(x)$ dimana $a_i = y_i$ dan $i = 0, 1, 2, ..., n$ dengan $L_i(x) = \prod_{j=0 j \neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_i-1)(x-x_i+1)...(x-x_n)}{x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_i-1)(x_i-x_i+1)...(x_i-x_n)}$. Karena pada interpolasi Lagrange ketika terjadi penambahan atau pengurangan titik data yang diketahui maka bentuk polinomial sebelumnya tidak dapat digunakan lagi. Sehingga kita dapat menggunakan penyelesaian interpolasi Polinom Newton. Algoritme polinom Newton yaitu $P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_1, x_0] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_2, x_1, x_0] + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n-1)f[x_n, x_n-1, ..., x_1, x_0]$

(2) Polinomial Lagrange dari Contoh 1 yaitu $P_4(x) = -3L_0(x) - 2L_1(x) + 5L_2(x) + 10L_3(x) + 16L_4(x) - 10L_5(x)$, sehingga diperoleh nilai pendekatan $f(-3)$ yaitu $P_4(-3) = -3L_0(-3) - 2L_1(-3) + 5L_2(-3) + 10L_3(-3) + 16L_5(-3) - 10L_6(-3)$ dengan $L_0 = 20$,$L_1 = 15$,$L_2 = -15$,$L_3 = 6$,$L_4 = 6$,$L_5 = -1$. Sedangkan polinomial Newton derajat satu sampai empat dari fungsi $f(x) = cos(x)$ di [0,4] yaitu $P_1(x) = 1 - 0,4597x$

$P_2(x) = 1 - 0,4597x - 0,2484(x-0)(x-1)$

$P_3(x) = 1 - 0,4597x - 0,2484(x-0)(x-1) + 0,1466(x-0)(x-1)(x-2)$

$P_4(x) = 1 - 0,4597x - 0,2484(x-0)(x-1) + 0,1466(x-0)(x-1)(x-2) - 0,0147(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)$

(3) Dengan menggunakan polinomial Newton derajat 3, nilai error di $x = 2,5$ pada contoh 2 yaitu 0,00473138.

DAFTAR RUJUKAN

(1) Atkinson, K. E., *An Introduce of Numerical Analysis*, Royal Melbourne Institude of Technology Ltd., New York, 1978.

(2) Benjamin F. Plybon, *An Introduction to Applied Numerical Analysis*, Arden Shakespeare, New York, 1992.