関とガウスの正十七角形（上）

杉本敏夫

まえおき

今年が関孝和の没後三百年に当たるので、表記の報告の準備を始めた。しかし、関だけでもかなりの分量になるので、ガウスの分は次回にまわすことにした。

関は[1]『全集』の中の論考『角術』において、正三角形から正二十角形まで、外接円の半径 y と一辺 a の間に成立する方程式を導き、$a=1$ と仮定したときの半径 y の値を精密に求めた。ガウスのような「虚平面上の単位円周の等分」という考え方はない。和算特有の論法で、線分と線分の間に成立する関係を組み合わせて方程式を導いた。関とガウスが扱った正多角形について、私は $n=5$，7，13，17，19 の場合が共通であると考えていて（根拠は次回）、関について、$n=7$ の場合を見本として示した後、$n=17$ の場合を詳細に述べようと思う。

この数学史シンポジウムには西洋数学史の研究者が多いことを考慮して、和算流の論法を、ユークリッド幾何に近づけて解説する。なお、[2] 拙著『検証・関孝和』（論文集）の第３号，４号論文には、和算流の表現によって詳述してある。その和算流の漢文による表現の一例を正五角形の例題で紹介した。さて本文は、なるべく論理的な順序に展開しようとした。その結果、難易度にむらが生じた。そこで難しい内容の部分は読み飛ばせるように、節の番号に* を付した。

§１．基本図形

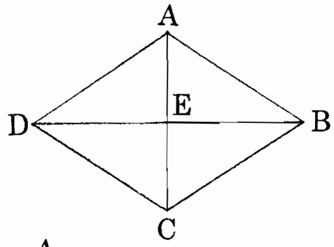
和算はユークリッド幾何に比べて厳密性に欠ける、という批判がある。しかしそれは誤解であって、和算には固有のかなり厳密な推論方法がある、と私は考える。ユークリッド幾何の「一般の図形に成立する定理を先に証明してから、特殊な図形に適用する」という行き方（後述の《補足》を参照）に対して、和算では「最初に正方形、菱形（「梭（ひ）」と呼ぶ）の如き整った図形の性質を掲げておき、それをあたかも公理であるかのように扱い、他の一般の図形の幾何的関係を導く」という行き方をとっている。

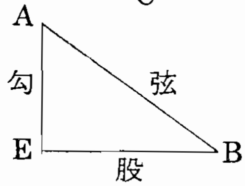
次の図の菱形においては、四辺が等しいことから二つの対角線ＡＣ，ＤＢは点Ｅにお

いて直交し、互いに他を二等分するという性質をもつ。△ADB，△BACは二等辺三角形であり、和算では△BACを「圭」と呼ぶ。私は簡潔のために、平たい「半梭」△ADBも同じく圭と呼ぶことにしたい。圭は高さが底辺を垂直二等分し、△AEBは直角三角形である(和算では「勾股」と呼ぶ）。これらは菱形の性質に由来する。勾股においては、三平方の定理

$$AB^2=AE^2+EB^2$$

が成立する。





§2．公式群

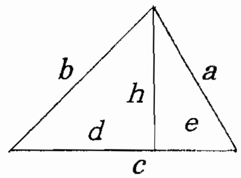
公式k群　勾股の相似による。正七角形の図を参照。辺aを「面」と呼ぶ。正七角形では三つの三角形が相似である。△OFL≡△ABQ≡△OPN であり、これから種々の関係式が出る。添え字の1は略すのが普通である。

(k$_1$)　　$ya_2=2ax$

(k$_2$)　　$ya_4\ [=ya_3]=2a_2b_2$

(k$_3$)　　$ya_8[=ya=2a_3b_3]=2a_4b_4$

(k$_4$)　　$ya_{16}=2a_8b_8$



双股弦の術

添え字の4や8は法7の場合、[　]内のように還元した。(k$_4$) は正十七角形で用いる。

「双股弦の術」　$e=(b^2-a^2+c^2)/2c$,

これは「第二余弦定理」に相当し、

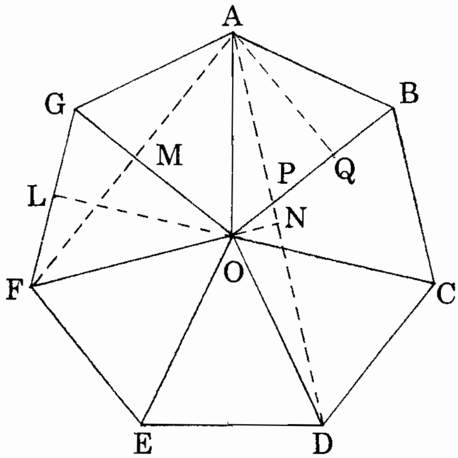
$b^2-e^2=h^2=a^2-d^2$　と$d=c-e$

から、直ちに出る。その系題として、『角術』では　$b=c=y$, $e=b_2$ なる特別の場合

公式ℓ群

(ℓ$_1$)　　$2y^2-a^2=2yb_2$

が用いられる。さらに正n角形の場合、辺数に応じて、右図と§7の図のように添え字をつけて各線分を命名すれば、次が導ける。



(ℓ$_2$)　　$2y^2-a_2^2=2yb_4$

(ℓ$_3$)　　$2y^2-a_3^2=2yb_6$

(ℓ$_4$)　　$2y^2-a_4^2=2yb_8$

OL=x(平中径), OD=y(角中径), CD=a(面), OM=b_2(子), ON=b_3(丑), AF=a_2, AD=a_3 OP=c_3(寅).

公式m群　「双股弦の術」と「勾股」による。これはk群と同じ仮定のもとに成立する。

(m$_1$)　$y^2-a^2=yc_3$　　(m$_3$)　$3y^2-a^2=2ye_3$

(m$_2$)　$2y^2-a^2=2yb_2$　　(m$_4$)　$4y^2-a^2=4x^2$

(m$_3$)のe_3は次の(n$_3$)を見よ。特に(m$_4$)は周知の基本関係である。

公式n群　(「旗の補題」と呼び、証明は§5と§6)

(n$_3$)　$e_3=y+c_3/2$　　(n$_5$)　$e_5=b_4+e_3$

§3. 式の組み立て

関はxとaの方程式を「平径式」、yとaのそれを「角径式」と呼ぶ。xとyの間には(m$_4$)の関係が成立するから、一方を求めれば他は(m$_4$)の代入で求まる筈なのに、関は丁寧に別々に求める。私はこれを《局所完結の傾向》と呼ぶ(付説に詳述)。

次回のガウスと比較のために、本稿では、「角径式」を扱う。正五角形(§11)は関係式が簡単すぎるので、手始めに例題として正七角形を取り上げよう。　各線分の長さは、前節の図の下に添えた。OMが「子(ね)」、ONが「丑(うし)」、OPが「寅(とら)」のように十二支の名を付しているが、煩わしいので以下では略す。式の組み立ては、どの角形の場合も同じ段階を踏む。まず公式(k$_1$), (k$_2$), (k$_3$)を組み合わせて、辺々を掛け合わせて、

$$y^3a_2a_3a=2^3xaa_2a_3b_2b_3,$$

を作る。ここで辺々のaa_2a_3を簡約して、

(A)　$y^3=8xb_2b_3$

を得る。辺の比　$c_3:b_3=y:x$　を用い、(m$_1$)すなわち(B)の右辺を書き直し、

(B)　$y^2-a^2=yc_3=y^2b_3/x$

(C)　$2y^2-a^2=2yb_2$　………(m$_2$)

(D)　$4y^2-a^2=4x^2$　………(m$_4$)

を掛け合わせて

(E)　$(B)\cdot(C)\cdot(D)=(y^2b_3/x)(2yb_2)(4x^2)=8y^3xb_2b_3$

$$=(y^2-a^2)(2y^2-a^2)(4y^2-a^2)$$

$$=8y^6-14y^4a^2+7y^2a^4-a^6$$

(F)　$y^3\cdot(A)=y^6=8y^3xb_2b_3$

(E)と(F)を辺々相引いて、yの方程式(角径式)(G)を得る。

(G)　$7y^6-14y^4a^2+7y^2a^4-a^6=0$

この様な分解を間違いなく遂行するため、私は電卓を用いて各段階で左辺と右辺を数値で確認した。ソロバンの名人であった関も、恐らく途中の段階で検算したであろう。

§4．数値解法

(G) を7で割って $a=1$ と置き $f(y)$ とし、さらにそれから微分式 $f'(y)$ も作り、

$$f(y)=y^6-2y^4+y^2-1/7=0, \qquad f'(y)=6y^5-8y^3+2y$$

を得る。ホーナー法とニュートン法で、$y'=y-f(y)/f'(y)$ によって次の近似根 y' を求める。いま仮の根 1.3 から始めれば、1.209, 1.164, 1.153, 1.152384, から 1.15238 24355 1 などの値を経て, 1.15238 2435<u>4 812</u> に達する。関は常に普通の端数処理（奇零表現と言う）の「四捨五入」を精密化した「零捨九入」とも言うべき

0＝整 ＜ 微強 ≦ 0.1 ＜ 強 ＜ 0.5＝半 ＜ 弱 ＜ 0.9 ≦ 微弱 ＜ 0＝整

を用いる（和算で一般に用いられる)。『角術』では、殊更に精密化した、煩瑣な

0＝整 ＜ 微強 ≦ 0.1 ＜ 少弱 ＜ 0.25 ≦ 少強 ＜ 0.4 ≦ 半弱 ＜ 0.5＝半

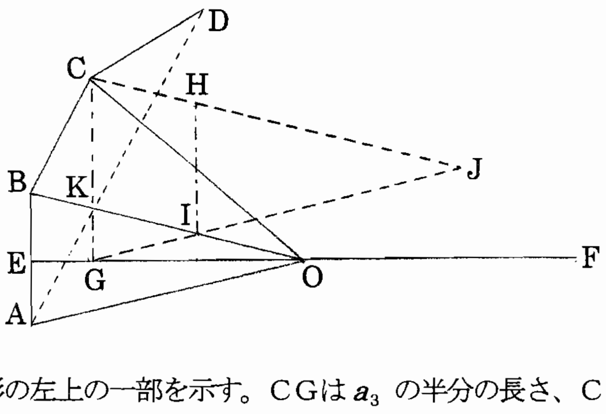
0.5＝半 ＜ 半強 ＜ 0.6 ≦ 太弱 ＜ 0.75 ≦ 太強 ＜0.9 ≦ 微弱 ＜ 0＝整

を用いる。関は上例を、1.15238 2435 半弱 と述べたから、彼の計算は正しかった。

§5．旗の補題

これは、正十一角形以後用いられる。関の図中に「旗」の如き図があり、従来は「これには説明がないので、図を見ただけでは了解に苦しむ」([3] 藤原、『明治前』第2巻、175 頁）とか「幾何学的意味が明らかでない」([4] 加藤、『算聖 関』、368 頁）などと放置されてきた。私が始めてその意味を明らかにした（[2]論文集 85-89, 791-793 頁)。

ここでは、[1]『全集』の正十三角形の図で説明するが、線分相互の関係なので、他の正 n 角形にも当てはまる。正十九角形では「第二、旗の補題」(§6) も用いられる。



図は正十三角形の左上の一部を示す。ＣＧは a_3 の半分の長さ、ＣＧ上にＢＡに等しくＣＫをとれば◇ＣＢＡＫは菱形になり、ＣＫ＝ＢＡ＝a．△ＢＯＡの竿ＢＡを竿ＣＫに移したと考えれば、ＫＯ＝c_3 である。いまＣＧを竿として、△ＢＯＡと相似なる旗

△ＣＪＧを描く。ＧＪとKOの交点をＩとすれば、△ＩGOが平たい圭となるから、斜辺ＧＩ＝ＩＯ＝$c_3/2$となる。ＣＪ上にＣＨ＝ＧＩなる点Hをとり、ＨＩを竿とする旗△ＨＪＩを考えれば、△ＢＯＡと合同になる。ＨＩ＝ＣＫ＝ＢＡ＝a とＣＨ＝ＫＩ＝$c_3/2$ とは明らかであり、ＣＪ＝e_3＝ＣＨ＋ＨＪとなり、次の関係が得られる。

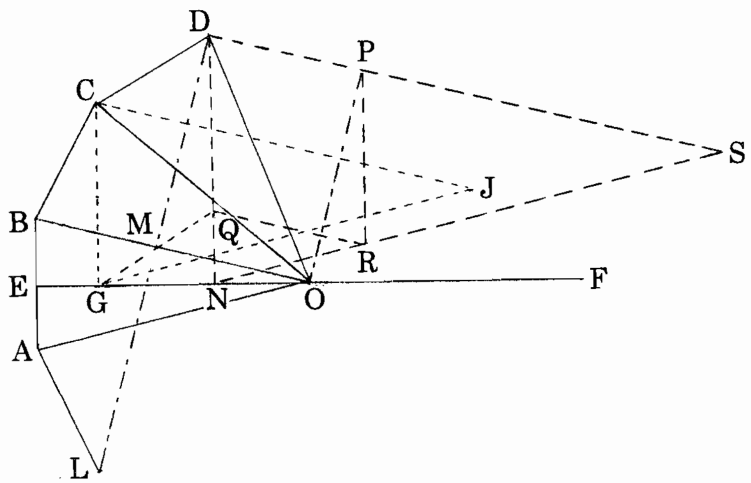
（n_3）　　$e_3=y+c_3/2$

また△ＢＯＡ∽△ＣＪＧから、ＢＡ：ＣＧ＝ＢＯ：ＣＪ　の関係を線分の長さに翻訳すれば、$a:a_3/2=y:e_3$ となり、次の関係式が得られる。

（q）　　$a_3y=2ae_3$.

§６*.　第二、旗の補題

§５の図を少し変更して、新たに旗ＤＳＮを作った。



前図のＨＩを消し、ＤＮをa_5の半分の長さ$a_5/2$, ＤＮ上にＣＧに等しくＤＱをとれば、◇ＣＤＱＧは平行四辺形、ＤＱ＝ＣＧ＝$a_3/2$ となり、旗ＣＪＧは竿ＤＱの旗に移せる。ＤＬとＢＯの交点Mにより、DM＝$a_4/2$, MO= b_4 となる。旗△ＣＪＧに相似でＤＮを竿とする大きな旗△ＤＳＮを描く。ＤＳ上にDP＝MO= b_4 なる点Ｐと NS 上に NR＝DP=b_4なる点Ｒを取れば、△QRNが再び小旗(小圭)となり、PR＝DQ＝CG＝$a_3/2$ となる。△PSR≡△CJG, DS＝e_5, PS＝CJ＝e_3, よって「第二、旗の補題」を得る。

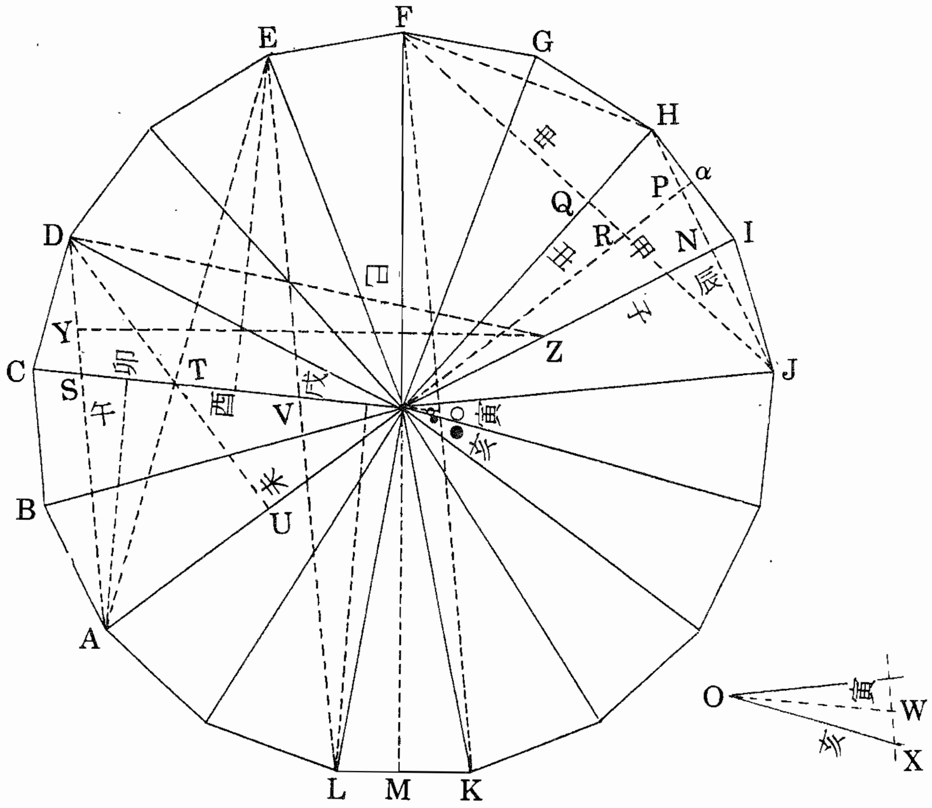
（n_5）　　$e_5=b_4+e_3$

§７．正十七角形

今回の報告における<u>最大の眼目</u>であり、次回にはガウスと比較・対照される。

[1]『関全集』に再録された図は、原本である写本「穴沢本」で、校訂者松永良弼が補入した文字が一部誤記入されている。私は、図は『関全集』の図を元に、記号は「穴沢本」の子や巳に戻し、ＯＰを新たに甲と名付けた。寅と亥は、図の一部を拡大して右下に併記した。和算では線分上に文字を記入して区別するが、時に両端があいまいな場合があるので、ユークリッド幾何に倣って点の記号を記入して、線分の両端を明瞭化した。また線分の長さの名は十二支では分かりにくいので、イタリク体に下添えして示した。△ＨＯＩと中心ＯとＨＩの中点αを結ぶ線分Ｏαが基本図形であり、辺ＨＩ（関の「面」）を a，Ｏαを「平中径」 $x=b_1$，ＯＨ＝ＯＩを「角中径」 $y=c_1$ と置く。

方程式が組み上がると $a=1$ と置き、「角径式」の場合は y を、「平径式」の場合は x を数値で求める。本稿は次回にガウスとの比較を目指すので、y のみを求める。



AB=BC=HI=a（面），AO=BO=y(角中径)，αO=x(平中径)，HJ=a_2(辰)，AD=a_3(午)，FJ=a_4(申)，AE=a_5，OQ=b_4(丑)，OU=b_6(未)，OW=b_8(寅)，OP=c_2(甲)，OS=c_3(卯)，OR=c_4，OT=c_5(酉)，OV=c_7(戌)，OX=c_8(亥)，DZ=e_3(巳)

関は初めに§２の四つの（k）を掛け合わせて、変形し、

$$y^4 a_2 a_4 a_8 a_{16} = 2^4 a a_2 a_4 a_8 x b_2 b_4 b_8$$

とし、$a = a_{16}$ も用いて両辺を約せば

$$y^4 = 2^4 b_2 b_4 b_8 x$$

を得る。両辺に y^{12} を掛け、$b_8 : c_8 = x : y$ から $b_8 = x c_8 / y$ を代入して、

$$\text{(A)} \quad y^{16} = 2^4 y^{11} b_2 b_4 c_8 x^2 = y^7 c_8 \cdot 2y^3 b_4 \cdot 2y b_2 \cdot 4x^2$$

となる。これが正十七角形の基本公式である。

§8．正十七角形（続）

式（A）の右辺第四項は（m_4）$4x^2 = 4y^2 - a^2$ によって書き直す。

右辺第三項は（ℓ_1）$2y b_2 = 2y^2 - a^2$ によって書き直す。

右辺第二項はまず（ℓ_2）$2y b_4 = 2y^2 - a_2^2$ の両辺に y^2 を掛けて、$2y^3 b_4 = 2y^4 - a_2^2 y^2$ とする。（k_1）$y a_2 = 2ax$ の両辺の自乗 $y^2 a_2^2 = 4a^2 x^2$ を代入し、（m_4）$4x^2 = 4y^2 - a^2$ の両辺に a^2 を掛けた $4a^2 x^2 = 4y^2 a^2 - a^4$ を代入し、最後に $2y^3 b_4 = 2y^4 - 4y^2 a^2 + a^4$ にまで変形する。

右辺第一項の変形は甚だ難しい。詳細は次節に譲る。結果は次のようになる。

$$\text{(B)} \quad y^7 c_8 = -y^7 c_9 = -y^8 + 10y^6 a^2 - 15y^4 a^4 + 7y^2 a^6 - a^8$$

まとめて、式（A）は次の如く、四項の積にまで変形される。

$$\text{(C)} \quad y^{16} = (-y^8 + 10y^6 a^2 - 15y^4 a^4 + 7y^2 a^6 - a^8) \times (2y^4 - 4y^2 a^2 + a^4)(2y^2 - a^2)(4y^2 - a^2)$$

右辺の各項を掛け合わせて展開すれば、まず

$$\text{(D)} \quad y^{16} = -16y^{16} + 204y^{14} a^2 - 714y^{12} a^4 + 1122y^{10} a^6 - 935y^8 a^8 + 442y^6 a^{10} - 119y^4 a^{12} + 17y^2 a^{14} - a^{16}$$

が得られ、これと同値な

$$\text{(A)} \quad y^{16} = y^7 c_8 \cdot 2y^3 b_4 \cdot 2y b_2 \cdot 4x^2$$

を（D）と辺々相引けば、a を係数とする y についての方程式

$$\text{(E)} \quad -17y^{16} + 204y^{14} a^2 - 714y^{12} a^4 + 1122y^{10} a^6 - 935y^8 a^8 + 442y^6 a^{10} - 119y^4 a^{12} + 17y^2 a^{14} - a^{16} = 0$$

を得る。この方程式（E）は、次回にガウスの場合と相互比較を行なう予定である。

関は方程式（E）で、$a = 1$ と置いて数値的に解いて、$y = 2.72109\ 5575$ 太強 を得た。じつは $y = 1/(2\sin(\pi/17)) = 2.72109\ 55758\ 759$ である。§4で、太強とは $0.75 \leqq y$ の端数 < 0.9 であった。端数が 0.8759 だから、関の計算は正しい。

ところで一方で、関孝和はこれよりも詳しい円周率の値を与えた。関の研究はこのよ

うな詳しい値を目標としたらしい。関の円周率については、今年８月、京都大学数理研で開かれた「数学史の研究」集会で報告した。「考究録」に印刷される予定。

$a=1$ と置く理由：関の目的は正 n 角形の面積を平中径 x を用いて、面積 $= n\,a\,x/2$ を求めることであり、$a=1$ ならば 面積 $= n\,x/2$ と簡易化されるからであろう。

§９*.　正十七角形（続々）

正十七角形の式（A）の右辺第一項の展開式

$$\text{(B)}\qquad y^7 c_8 = -y^7 c_9 = -y^8 + 10y^6 a^2 - 15y^4 a^4 + 7y^2 a^6 - a^8$$

はどのようにして得られたか？　我々は関の計算結果を知っているから、いとも簡単に（B）のように書き下すのであるが、最初に得られたのは§７の

$$\text{(A)}\qquad y^{16} = y^7 c_8 \cdot 2y^3 b_4 \cdot 2y\,b_2 \cdot 4\,x^2$$

である。右辺第一項 $y^7 c_8$ を見ただけでは、どう変形すればよいか見当もつかない。

関の『角術』には、下から積み上げて（A）の右辺第一項に到る経過が克明に記された。ここでは邪道だが、（B）を既知として、関が辿ったのとは逆の方向に分解してみよう。それによって、「関が $y^7 c_8$ をどのように分解したか？」が復元される。その際§５の「旗の補題」の公式（q）も用いられる。

式の変形に用いられる公式をまとめて置く。

(p_7)	$2b_8 = c_7 - c_9,$	(p_6)	$2b_7 = c_6 + c_8,$
(p_5)	$2b_6 = c_5 + c_7,$	(p_4)	$2b_5 = c_4 + c_6,$
(p_3)	$2b_4 = c_3 + c_5,$	(p_2)	$2b_3 = c_2 + c_4,$
(p_1)	$2b_2 = y + c_3,$	(q)	$a_3 y = 2\,a\,e_3.$

（p_7）の c_9 の符号が負なる理由を考えよう。対角線 FK が図の右半分に所属すると考えれば、OX は c_8 である。FK が左半分に所属すると考えれば左側９つの辺 a に対応し、しかも OX は中心 O の反対側にあると考えられるから $-c_9$ と見做す。

では、逆方向の分解を実行してみよう。

（p_7）を移項して　$c_9 = c_7 - 2b_8$　と置いて y^7 を掛ければ、

$$\begin{aligned}\text{(F)}\qquad c_9 y^7 &= -y^8 + 10y^6 a^2 - 15y^4 a^4 + 7y^2 a^6 - a^8\\ &= c_7 y^7 - 2b_8 y^7 = \text{(G)} - \text{(H)}\end{aligned}$$

$$\text{(G)}\qquad c_7 y^7 = y^8 - 6y^6 a^2 + 5y^4 a^4 - y^2 a^6$$

$$\text{(H)}\qquad 2b_8 y^7 = 2y^8 - 16y^6 a^2 + 20y^4 a^4 - 8y^2 a^6 + a^8$$

と置いて、それぞれの分解を考える。

（p_5）を移項して　$c_7 = 2b_6 - c_5$　として y^7 を掛ければ、

(G)　$c_7 y^7 = y^8 - 6y^6a^2 + 5y^4a^4 - y^2a^6$

$= 2b_6 y^7 - c_5 y^7 =$ (I) － (J),

(I)　$2b_6 y^7 = 2y^8 - 9y^6a^2 + 6y^4a^4 - y^2a^6$

(J)　$c_5 y^7 = y^8 - 3y^6a^2 + y^4a^4$

となる。先ず(I)は、(ℓ_3) $2yb_6 = 2y^2 - a_3{}^2$の両辺にy^6を掛けて、
$2y^7b_6 = 2y^8 - y^2 \cdot a_3{}^2y^4$とし、(q)の両辺の自乗$a_3{}^2y^2 = 4a^2e_3{}^2$に$y^2$を掛けた $a_3{}^2y^4 = 4a^2e_3{}^2y^2$ を代入し$2y^7b_6 = 2y^8 - y^2a^2 \cdot 4y^2e_3{}^2$とする。

さらに(m_3) $2ye_3 = 3y^2 - a^2$の両辺の自乗を代入して、

(I) $2b_6y^7 = 2y^8 - y^2a^2(3y^2 - a^2)^2 = 2y^8 - 9y^6a^2 + 6y^4a^4 - y^2a^6$

が得られた。次に(J)は(p_3) $c_5 = 2b_4 - c_3$ の両辺にy^7を掛けて

(J) $y^7c_5 = 2y^7b_4 - y^7c_3 =$ (K) － (L) とする。

(K)は(ℓ_2)$2yb_4 = 2y^2 - a_2{}^2$ の両辺にy^6を掛け$2y^7b_4 = 2y^8 - y^6a_2{}^2$とし、($k_1$)の自乗に($m_4$) を組み合わせた$y^2a_2{}^2 = 4a^2x^2 = 4y^2a^2 - a^4$ にy^4を掛けた$y^6a_2{}^2 = 4y^6a^2 - y^4a^4$を代入し、$2y^7b_4 = 2y^8 - 4y^6a^2 + y^4a^4$　とする。

(L)は(m_1)$yc_3 = y^2 - a^2$ の両辺にy^6を掛け(L) $y^7c_3 = y^8 - y^6a^2$とし、

(J) ＝ (K) － (L) $= y^8 - 3y^6a^2 + y^4a^4$ が得られた。まとめて(F)の前半

(G) ＝ (I) － (J) $= y^8 - 6y^6a^2 + 5y^4a^4 - y^2a^6$　が得られた。

次に(F)の後半(H)は、(ℓ_4) $2yb_8 = 2y^2 - a_4{}^2$の両辺にy^6を掛けて、
$2y^7b_8 = 2y^8 - y^6a_4{}^2 = 2y^8 - y^4 \cdot y^2a_4{}^2$ とする。

$y^2a_4{}^2$は、(k_2) $ya_4 = 2a_2b_2$ の両辺の自乗　$y^2a_4{}^2 = 4a_2{}^2b_2{}^2$ を用い、両辺にy^4 を掛けて、$y^4 \cdot y^2a_4{}^2 = y^2a_2{}^2 \cdot 4y^2b_2{}^2 =$ (M)・(N) とする。

(M)は(k_2)$ya_2 = 2ax$ の両辺の自乗 $y^2a_2{}^2 = 4a^2x^2 = 4y^2a^2 - a^4$ とし、

(N)は(ℓ_1)$2yb_2 = 2y^2 - a^2$ の両辺の自乗 $4y^2b_2{}^2 = 4y^4 - 4y^2a^2 + a^4$ とし、両者の積 (M)・(N) $= (4y^2a^2 - a^4) \cdot (4y^4 - 4y^2a^2 + a^4)$

$= 16y^6a^2 - 20y^4a^4 + 8y^2a^4 - a^8$

が得られた。まとめて後半の

(H) $= 2y^7b_8 = 2y^8 - y^4 \cdot y^2a_4{}^2 = 2y^8 -$ (M)・(N)

$= 2y^8 - 16y^6a^2 + 20y^4a^4 - 8y^2a^4 + a^8$

が得られた。最後に(G)から(H)を引けば、目標の(F)が求まる。

このように(B)即ち $-y^7c_9$ の凡ての因数分解を辿ったのであるが、これは関が辿ったのとは、丁度逆の方向に確認したのに過ぎない。関の計算力に感嘆の他はない。

§１０*.　正五角形

良い機会なので、漢文で書かれた関の原文が、どのように書かれているか紹介しよう。まず関の原文を「読み下し文」に改め、［　］内にその現代訳を記す。　さて、関は、法5で $a_4=a_1=a$ を用いて

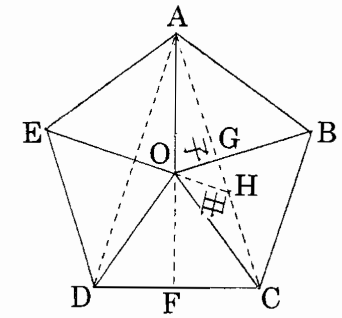
(k$_1$)　　$y a_2=2ax$,

(k$_2$)　　$y a_4=y a=2 a_2 b_2$

を掛け合わせて、両辺から積 $a a_2$ を除き、

(A)　　$y^2=4 x b_2$

を得た。ここまでは、私の推定である。原文はいきなり、次のように始まる。



AB=a(面),　AO=y(角中径),
OF=x(平中径),　AC=AD=a_2,
OG=b_2(子),　OH=c_2(丑).

《角中径ヲ求ムル術ニ曰(イハ)ク。天元ノ一ヲ立テ、角中径ト為(ス)[変数 y を角中径と見做す]。コレヲ自シ[y を自乗し]、平中径[x]ニ因(ヨ)ル四箇ノ子(シ)ト為(シ)[y^2自乗を xの4 b_2倍、即ち 4 $x b_2$に等値し]、甲位ニ寄ス[（A）に取り置く。すぐ上の式を見よ]。》

§9の、対角線 AC の右または左半分への所属の技巧を用い、$c_2=-c_3$ を導いておき、$a^2-y^2=y(-c_3)=y c_2$ とし、辺の比 $c_2 : b_2=y : x$ を用いて書き直し、

(B)　　$a^2-y^2=y c_2=y^2 b_2/x$

を得る。関はこのような式の変形を説明せず、原文はいきなり結果を述べる。

《角中径ヲ列シ、コレヲ自シ[y を自乗し]、以ッテ面冪[a^2]ヨリ減ジ、余リヲ角中径ニ因(ヨ)ル丑ト為(シ)[y^2を a^2から引いて、余りを yの c_2倍に等しいと置き]、乙位ニ寄ス[(B)に取り置く。すぐ上の式（B）を見よ]。》

（B）を（m$_4$）即ち

(C)　　$4y^2-a^2=4x^2$

と掛け合わせれば、$(y^2 b_2/x)(4x^2)=4xy^2 b_2$, すなわち（D）を得る。

(D)　　$4xy^2 b_2=(a^2-y^2)\cdot(4y^2-a^2)=-4y^4+5a^2y^2-a^4$.

原文は、

《角中径ヲ列シ、コレヲ自シ[y を自乗し]、四因シ、内面冪ヲ減ジ[4 y^2 から a^2 を引き]、余リ[$4y^2-a^2$]ヲ四段ノ平中径冪ト為(シ)[（C）$4y^2-a^2=4x^2$ として]、乙位ニ寄セタルヲ以ッテ之ニ相乗ジ[これに（B）に取り置いた $y^2-a^2=y^2 b_2/x$ を掛け合わせて]、角中径冪ニ因(ヨ)リ、平中径ニ因(ヨ)ル四箇ノ子(シ)ト為(ナ)ス[y^2 に x と b_2とを掛けて4倍した値とする、結局、積4 $xy^2 b_2$を作る]。左ニ寄ス[それを
（D）$4xy^2 b_2=-4y^4+5a^2y^2-a^4$ として取り置く]。》

角中径の自乗 y^2 に、前の（A） $y^2=4xb_2$を掛け合わせた

（E） $y^4=4xy^2b_2$

を（D）から引くと、目標の正五角形の方程式

（F） $-5y^4+5a^2y^2-a^4=0$

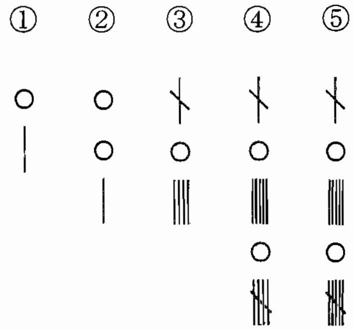
を得る。原文は、いとも簡潔に左（D）と差し引きし、次の結論（F）を述べる。

《左ニ寄セタルト相消シテ、開方式 （F）$-5y^4+5a^2y^2-a^4=0$ ヲ得ル。》

$a=1$ と仮定して、この方程式（F）を数値として解けば $y=$ 0.85065 08083 520 を得る。この答えは方程式（F）を満たす。関はもちろん三角法を知らないが、我々は $y=1/(2\sin(\pi/5))$ を知っている。原文は次のようになっている。

《三乗方（カタ）翻法ニ之ヲ開キ、角中径 0.85065 0808 少強ヲ得テ、問ヒニ合フ。》

「三乗方翻法ニ之ヲ開ク」とは「4次方程式を解いて根を求める」の意味。「少強」とは、§4で説明したように、0.25 ≦ 少強 ＜ 0.4 を意味したから、端数の 0.3520 はこれに該当し、関の計算が正しかったことが分かる。



数式の表現について簡単に補足する。右の①は、《角中径ヲ列シ》に対応する。それは $1y+0$ を意味する。和算では最上位が定数を表し、二番目が変数 y を表し、三番目が y^2 を表し、等々。従って、①は、この表現になる。 ②は $1y^2+0y+0$ を表す。③は $4y^2+0y-a^2$ を表すのであるが、計算上は $a=1$ と仮定するので、$4y^2+0y-1^2$ を表す。負の数は算木で表した数の上に斜線を引く。④は（D）$-4y^4+0y^3+5y^2+0y-1^4$ を表し、ここでも $a=1$ と仮定したので、④の表現はこれでよい。⑤は$-5y^4+0y^3+5y^2+0y-1^4$ を表す。

さて⑤は単なる数式ではなく、式（F）のような方程式であり、右辺に $=0$ が伴うのであるが、算木の式では表現できない。和算では、前後の関係からそれを知る。

和算の原文は一見して《遠い世界の文章》のように見えるが、内実は西洋流とほぼ同じ内容を表現していることに注目して頂きたい。和算の文章は中国流の《中算》に起源を持ち、《中算》と酷似した文章である。しかし数学の内容を主張するためには、根底において《洋算》と同じ論理を辿らざるを得ない。それが関孝和の数学である。このことをご理解頂きたい。明治以降《洋算》が主流になり、つい 300 年昔の祖先が《どう数学的思考を進めていたか》が不明になりつつあるので、敢えて紹介の労をとった。

§11*. 正十三角形

次に正十三角形を取り上げる。(図は正十七角形の図を簡単にしたものである。採録を省略する。) 途中の変形は、一々公式に当たれば式を変形できるので、簡略に示す。

法13で $a_{12}=a_1=a$, $a_{16}=a_3$, $a_8=a_5$ を用いて,

(k_1), (k_2), (k_3), (k_4), (k_5), (k_6) を掛け合わせて、両辺から $a_1=a$ 及び $a_2a_4a_8a_3a_6$ を除き、

(A) $y^6=64\,x\,b_2b_3b_4b_5b_6$

を得る。辺の比 $c_3:b_3=y:x=c_6:b_6$ を用いて書き直せば

(B) $y^6=64\,b_2b_4b_5c_3c_6x^3/y^2$

となる。ここに (k_1), (k_2), (k_3), (k_4) を掛け合わせた

$8b_2b_4b_5/y^2=y^2a_3/2ax$ 及び (q) $a_3/2a=e_3/y$ を代入すれば、

(C) $y^6=8\,y\,c_3c_6e_3x^2$

を得る。両辺に y^6 を掛けて、最終的に次の正十三角形の基本公式の形に直す。

(D) $y^{12}=y^5c_6\cdot 4x^2\cdot 2ye_3\cdot yc_3$

さて (D) の右辺の y^5c_6 の変形には正十七角形のときと同様な技巧を凝らす。

(p_5) $2b_6=c_5+c_7$ の $+c_7$ を§9に述べた対角線の技巧により $-c_6$ に読み替えて $2b_6=c_5-c_6$ とし、$c_6=c_5-2b_6$ と書き換える。この両辺に y^5 を掛け、

(E) $y^5c_6=c_5y^5-2b_6y^5=$(F)$-$(G), (F)$=c_5y^5$, (G)$=2b_6y^5$と置く。

先ず (F) には (p_3), (p_2) を施して、(F) $=2y^5b_4-y^5c_3$ とし、また (ℓ_2), (m_1) を施して、(F) $=3y^6-2y^5b_2-y^4a_2^2$ として、最後に (ℓ_1), (k_1) を施して、(F) $=y^6-3y^4a^2+y^2a^4$ にまで変形する。次に(G) には (ℓ_3) を施して (G) $=-y^4a_3^2+2y^6$ とし、最後に (q) と (m_3) を施して、

(G) $=2y^6-9y^4a^2+6y^2a^4-a^6$ まで変形し、(F) から (G) を引いて

(E) $y^5c_6=-y^6+6y^4a^2-5y^2a^4+a^6$

を得る。(D) の右辺の残りの項も、次の (H), (I), (J) のように表され、(D) の右辺はの各項は、結局次の (E) ～ (J) にまで変形された。[実は§9に述べた正十七角形の変形は、それに先行する、この正十三角形の変形を下敷きにしたと言える。]

(E) $y^5c_6=-y^6+6y^4a^2-5y^2a^4+a^6$

(H) $4x^2=4y^2-a^2$ ………… (m_4)

(I) $2ye_3=3y^2-a^2$ ………… (m_3)

(J) $yc_3=y^2-a^2$ ………… (m_1)

を代入して、(D) の右辺の積は

(K)　　(E)・(H)・(I)・(J)

$=(-y^6+6y^4a^2-5y^2a^4+a^6)\cdot(4y^2-a^2)\cdot(3y^2-a^2)\cdot(y^2-a^2)$

となる。(K) の右辺の括弧を外して展開すれば、

(K)　　$y^{12}=-12y^{12}+91y^{10}a^2-182y^8a^4+156y^6a^6$
$-65y^4a^8+13y^2a^{10}-a^{12}$

を得る。(K) から (D)　$y^{12}=y^5c_6\cdot4x^2\cdot2ye_3\cdot yc_3$ を引いて、最後に

(M)　　$-13y^{12}+91y^{10}a^2-182y^8a^4+156y^6a^6$
$-65y^4a^8+13y^2a^{10}-a^{12}=0$

なる方程式に到る。繰り返しになるが、関の数式操作の腕前には感服のほかはない。

この方程式 (M) を解き　$y=$ 2.08929 07344 301　を得、関は 2.08929 0734 半弱 とした。§4のように、0.4 ≦ 端数 < 0.5 のとき半弱としたから、端数 0.4301 はこれに該当し、関の計算は正しい。実は y は $1/(2\sin(\pi/13))$ に等しい。

§12*.　正十九角形

上と同様に丁寧に紹介する余裕がない。§6「第二、旗の補題」の e_5 の値が有効に用いられる。ここには結果のみ記す。(k_i) の各項を掛け合わせて

(A)　　$y^{18}=y^7c_9\cdot y^3e_5\cdot y^3c_5\cdot4x^2$

を作る。これまでの例と同様に変形して、(A) の各項を数式に直せば次を得る。

(B)　$y^{18}=(y^8-10y^6a^2+15y^4a^4-7y^2a^6+a^8)$
$\cdot(y^4-3y^2a^2+a^4)\cdot(5y^4-5y^2a^2+a^4)\cdot(4y^2-a^2)$

右辺の括弧を外して掛け合わせ

(C)　$y^{18}=20y^{18}-285y^{16}a^2+1254y^{14}a^4-2508y^{12}a^6+2717y^{10}a^8$
$-1729y^8a^{10}+665y^6a^{12}-152y^4a^{14}+19y^2a^{16}-a^{18}$

これから (A)　$y^{18}=y^5c_9\cdot y^3e_5\cdot y^3c_3\cdot4x^2$　を引いて、方程式

(D) $19y^{18}-285y^{16}a^2+1254y^{14}a^4-2508y^{12}a^6+2717y^{10}a^8$
$-1729y^8a^{10}+665y^6a^{12}-152y^4a^{14}+19y^2a^{16}-a^{18}=0$

を得る。これを解いて、関は $y=$3.03776 691 微強 を得た。微強の意味は§4に述べた。実は $y=1/(2\sin(\pi/19))$ = 3.03776 69104 871　だから、関の計算は正しい。

〔付説〕　関における《局所完結》の傾向

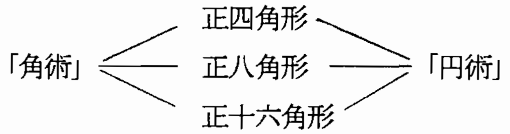
§3．において、関は x と a の方程式「平径式」、y と a の方程式「角径式」を、別々に求めた、と述べた。x と y の間には、(m_4)　$4y^2-a^2=4x^2$　が成立するから、

「平径式」か「角径式」のどちらか一方を求めれば、他は直ちに導けるではないか、と私たちは考える。しかし関は、そのような捷径を歩もうとはせず、大変な労力を払って、別々に計算した。関には《局所完結》とも呼べる傾向が著しい！

これを指摘した私の[2]『解読・関孝和』の第 29 号論文の要点を再録しよう。関には「求円周率術」（簡単に「円術」と呼ぶ）と「求弧背術」（簡単に「弧術」と呼ぶ）がある。前者でπの精密な値を求めたから、後者の正六角形の弧長はπを３で割って用いればよいのに、角術は全く別の領域であるかのように考えている。

「円術」の$\pi=3.14159\cdots$ ⟵‖⟶ 「弧術」の$\pi/3=1.04719\cdots$

また「弧術」では、$2\arcsin 0.6$ と $2\arcsin 0.8$ に相当する弧長は、和がπになることに気付かず、それぞれ別々に苦労して元から計算している。「角術」と「円術」に共通な正八角形と正十六角形を別々に計算し、しかも相互に比較検討しようとはしない。



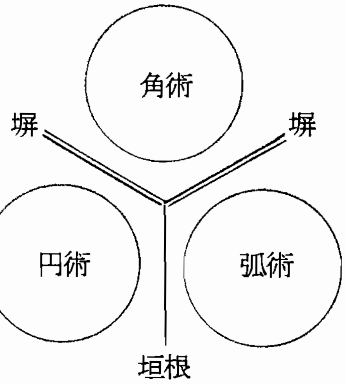
関は「角術」と「弧術」と「円術」を相互に比較せず、あたかも三つの領域は独立であり、領域相互の間には垣根や塀があるかのごとく行き来をしない（次の左図）。

これと比べて、西洋流の代表者はオイラーであろう。有名なオイラーの公式

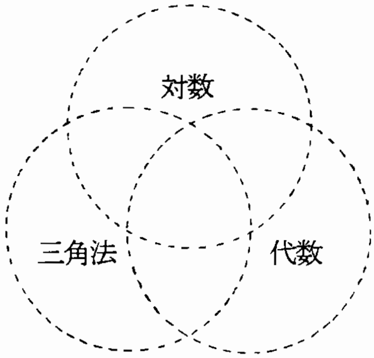
$$e^{\sqrt{-1}x}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$$

は、対数（指数関数の逆関数）と三角法と代数方程式　$x^2+1=0$ の根 $\sqrt{-1}$ の三つが、一つの式の中にまとまっている。このように、オイラーは全く異質の領域の間に《何等か関連性がないか》と、絶えず「鵜の目、鷹の目」で探していた（次の右図）。

関　孝　和



オ　イ　ラ　ー



補足　斎藤憲氏の近著[6]によると、ユークリッドの『原論』の最初の 12 個の命題は、正三角形の存在から始まり、一般の三角形になされる基本的な作図の可能性を確立するために置かれた、と言う。§１に述べた私の考え方（ユークリッドに関する部分）は、修正すべきであろう。関孝和に関する私の主張は保存する。

文　献

[1] 平山諦・下平和夫・広瀬秀雄 編：関孝和全集、大阪教育図書、1974.

[2] 杉本敏夫：解読・関孝和―天才の思考過程（論文集)、海鳴社、2008.

[3] 藤原松三郎（日本学士院編)：明治前日本数学史、全５巻、岩波書店、1954～1960.

[4] 加藤平左エ門：算聖　関孝和の業績（解説)、槙書店、1972.

[[5] 杉本敏夫：関孝和の円周率の微増と限界、京都大学数理解析研究所考究録（2008 年８月５日発表)

[6] 斎藤憲：ユークリッドの『原論』とは何か、岩波書店、2008.

訂　正

[2] 拙著「解読・関孝和」122 頁に掲げた式 (G_{17}) の内、

$(2R^4-R^2a^2+a^4)$ を $(2R^4-4R^2a^2+a^4)$ に訂正する。

[2] 拙著「解読・関孝和」139 頁の正誤表を全面的に次のように改定する。同所の r は本稿の x に相当し、R は本稿の y に相当し、さらに面積として S を追加する。

	関の原文「穴沢本」	松永・藤田の訂正	杉本の訂正とその根拠	
三 r	0.288675134 強半	半強に訂す。	0.288615134 594···	
三 S	0.433013701 太強	3 を 2 に訂す。	0.433012701 892···	
四 R	0.707106781 少強	少強を少弱に訂す。	0.707106781 186···	
五 r	0.68819096 少弱	少弱を微強に訂す。	0.688190960 235···	
五 S	1.7204774____	空所に微強を補う。	1.720477400 588···	
七 R	1.152382435 半強	半強を半弱に訂す。	1.152382435 481···	
七 S	3.633912444 少弱	少弱を微強に訂す。	3.633912444 015···	
八 S	4.828427124 太弱	平山は太弱を太強に訂した。	4.828427124 746···	太弱が正しい。
十 S	7.694208842 太弱	〔指摘なし〕	7.694208842 938···	8843 微弱に訂す。

十一R	1.714732766	半弱	平山は1を7に訂した。	1.774732766 442…	平山の訂正を支持。
十一S	9.365639906	太強	〔指摘なし〕	9.365639906 945…	9907 微弱に訂す。
十三R	2.0892490734	半弱	途中の4を削る。戸谷は末位に4を補い、半弱を支持した。	2.089290734 430…	0734 半弱を支持。戸谷の4補は削る。
十四R	2.246979603	太強	太強を太弱に訂す。	2.246979603 717…	
十六r	2.513669746	少強	少強を微強に訂す。	2.513669746 062…	
十九r	2.996335729	少弱	少弱を少強に訂す。	2.996335729 261…	
十九S	28.465189427	少強	少強を太強に訂す。	28.465189427 986…	9428 微弱に訂す。
二十R	3.19622661	少強	少強を微強に訂す。	3.196226610 749…	
二十S	31.568757573	半弱	〔指摘なし〕	31.568757573 375…	7573 少強に訂す。

（2008年10月11日）