

# コンピュータ・トモグラフィの歴史

## — 数学者は何故ノーベル賞を取り損ねたのか? —

コンピュータ・トモグラフィ、即ち計算機断層撮影法は X 線等の連続照射により人体等の断面図を非破壊的に作成する技術である。難しいことは云わなくても、幸いに(?)自分の脳の CT 像を病院で見る機会を持たれた方は、その美しさに驚嘆された経験がお有りであろう。これは一昔前の断層撮影のほけた映像をご存じの方にはなおさら新鮮な衝撃を与える。

この技術は 1972 年に、ビートルズのレコードで有名なイギリスの会社 EMI の技師 Hounsfield によって発明された。実用的な機械の製作はともかくとして、この原理は非常に数学的であり、一言で云えば、ラドン変換の数値的反転と云うことになる。Hounsfield はこの発明により 1979 年度のノーベル賞(生理・医学賞)を受賞したが、彼とともに、一人の物理学者 Cormack がこの発明に理論的に寄与したとして合わせて受賞した。

しかしながら、この発明で用いられた数学的な原理はすべて数学者により用意されていたものである。うまくやれば数学者がノーベル賞を取れたかもしれないこの希有な機会を、数学者は何故逃してしまったのであろうか? この点を調べておくことは、今後の教訓(?)として大切なことであろう。

ここで簡単に計算機トモグラフィの原理を述べておく。今、有界領域  $D$  で表される物体は、X 線がある割合で吸収する物質からできており、この吸収率  $f(x, y)$  は通常の密度とほぼ対応するので、それが判ればこの物体の内部構造が判るものとする。

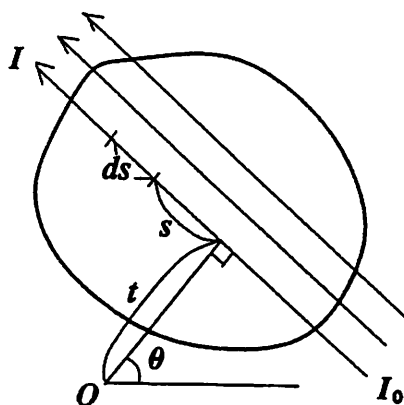


図 1

この物体を貫く直線  $l = \{x \cos \theta + y \sin \theta = t\}$  に沿って光源での強度が  $I_0$  の一本の X 線を当てたとき、Bouger の法則により、この X 線の強度  $I$  は

$$\frac{dI}{I} = -f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

に従って変化する。この簡単な微分方程式は直ちに求積でき、その結果、物体を突き抜けた後に観測される X 線の強度として

$$I = I_0 \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \right\}$$

が得られる。従って、数学的には、線積分

$$Rf(t, \theta) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

を与えて、元の函数  $f(x, y)$  を復元せよという問題に帰着し、これはとうの昔に Radon が解を与えていた。この Radon の論文は CT の前史に関わった技術系の人達にはかなり後まで知られず、単に  $Rf(t, \theta)$  を球面平均したものを用いる、いわゆる “old tomography” の復元公式が何度も再発見されてきた。Radon

の反転公式が知られてからは、その本質を理解するために現場の人たちがにわかに Stieltjes 積分を勉強し始めたという時代も有ったようである。しかし復元アルゴリズムの困難さは、反転公式に含まれた Stieltjes 積分の表現の難しさなどではなく、この復元過程が、一般にコンパクト作用素の逆を求めるときに必ず現れる、いわゆる非適切問題 (ill-posed problem) となっているところにある。

すなわち、数学的には、Radon 変換はすべての  $(t, \theta)$  の値について誤差のないデータとして与えられるとするのに対し、実用的には、使用できる X 線の本数は高々 180 方向  $\times$  180 ステップ  $= 3,0000$  本程度であり、かつ、各線積分は観測誤差を含む。このようなデータから逆作用素を計算すれば、誤差の影響はいくらでも拡大され、計算結果には何の意味も無い、と考えるのが Hadamard 以来の適切 (well-posed) な問題を研究対象とすべしという解析学の伝統的な考え方であった。これに対し、1960 年頃から始まった Tihonov 等による非適切問題の正則化の理論は、正則性が予め判っている解の存在を仮定して、一言で云えば誤差に含まれる不必要な高周波成分をカットすることにより、近似原像を構成しようというものであった。残念ながら Tihonov の理論は、主に微分方程式の制御の問題に応用され、計算機トモグラフィに対する直接的な応用の論文は、物理学者達によって書かれた。

以上の過程では数学者にも物理学者にも運の良い人、悪い人がいろいろ居て、それなりに面白い物語となっている。では数学者はこの問題でうまくやればノーベル賞を取れる可能性が有ったのだろうか？この結論は講演時まで保留し、ここでは話に引用される文献を掲げておくにとどめる。

## 参考文献

- [1] Bracewell R.N. & Riddle A.C.: Inversion of fan-beam scans in radio astronomy, *Astro. Phys. J.*, **150** (1967), 427-434.
- [2] Cormack A. M.: Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications, *J. Appl. Physics* **34** (1963), 2722-2727.
- [3] Cormack A. M.: Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications II, *J. Appl. Physics* **35** (1964), 2908-2912.
- [4] Funk P.: Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, *Math. Ann.*, **74**, (1913), 278-300.
- [5] Groetsch C. W.: *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg, 1993 (邦訳がサイエンス社より出版予定)。
- [6] Herman G.T.: *Image Reconstruction from Projections. The Fundamentals of Computerized Tomography*, Academic Press, 1980.
- [7] Hounsfield G. N.: A method and apparatus for examination of a body by radiation such as X or gamma radiation, *Patent Specification 1283915*, The Patent Office, London, England, 1972.
- [8] Natterer F.: *The Mathematics of Computerized Tomography*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [9] Oldendorf W.H.: Isolated flying-spot detection of radiodensity discontinuities: displaying the internal structural pattern of a complex object, *IRE Trans Bio-Med. Electron. BME*, **8** (1961), 68-72.
- [10] Phillips D. L.: A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, *Journal of the Association for Computing Machinery*, **9** (1962), 84-97.
- [11] Radon J.: Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* (1917), 262-277.
- [12] Shepp L.A. & Kruskal J.B.: Computerized tomography. The new medical X-ray technology, *Amer. Math. Monthly* **85** (1978), 420-439.
- [13] Tuy H. K.: An inversion formula for cone-beam reconstruction, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 546-552.
- [14] 斎藤恒雄: 画像処理アルゴリズム, 近代科学社, 1992.
- [15] 竹中栄一: コンピュータ断層法, 数理科学 1983 年 7 月号, pp.44-54.