経路空間上の微積分―― 確率解析とFeynmanの経路積分 ――

池田信行（立命館理工）

1) 世紀に彩りをそえる幾つかの新たな数学の分野が生まれたが、経路空間上の解析もそれらの一つに数えられる。確率過程論との関わりが最も深いが、２階偏微分方程式、ポテンシャル論、微分幾何、数多くの数理科学の問題等多くの分野に密接に関連している。

2)この分野の胎動は世紀の変わり目のころに始る。第一の流れはEinsteinやPerrinによる今世紀初頭のBrown粒子の運動の研究を背景にして、その運動を理想化して考え、１９２０年代にWienerが行ったWiener測度P^Wの構成である。これを方法として支えたのはLebesgue測度論であり、考え方の指針はGibbs等による統計力学による。もう一つの流れは世紀の産声とともに進展した量子力学の理論である。１９２５,６年ころDiracはこの理論の仕上に大きく貢献するが彼が示唆した考えは後年経路空間上の解析に決定的とも言える影響を及ぼす。次の転機は半世紀におよぶ醸成期を経て世紀の半ば１９４２年に現われる。その一つは全国紙上数学談話会誌に掲載された伊藤清：Markoff過程を定める微分方程式であり、もう一つはFeynmanの学位論文Richard Feynman: A priciple of least action in quantum mechanics.である。両者に共通の考えが流れていることを示すエピソードが“さようならファインマンさん”と題する本に紹介されている。Feynmanの指導教官であるWheelerがEinsteinにFeynmanの研究について話した時Einsteinは“私はまだ神がサイコロでかけをするとは信じられない”と答え“だが私はまちがえてもよいという権利を得たかもしれない”と続けたと記されている。ちなみに伊藤清氏は１９１５年９月７日生まれ、Feynmanは１９１８年５月１１日生まれで、これらは共に二人の２０歳代の業績である。

3) Wienerの研究は１世紀におよぶ歴史を背負っている。花粉の中に含まれる微粒子程度の大きさの粒子が水中に浮かぶと,瞬間瞬間方向を変えジグザグな軌跡を持つ運動をする。この運動についてはR. Brownの１８２８年の論文が有名である。１次元で考えれば毎回毎回銅貨を投げて表が出るか裏が出るかで左右に動く酔歩(random walk)になる。各時刻の位置の間を直線でつなぐと運動の軌跡として折線が得られる。従って対応する確率は折線の空間に導入されたものと考えられ、その確率は２階の定差方程式で特徴づけられる。酔歩の軌跡の言葉で述べられるKelvinの鏡像法は確率解析で用いられる思考の原型の例と考えられる。時間と空間の単位をそれぞれ$\triangle t$, $\triangle x$とし$(\triangle x)^2=\triangle t$を保ちながら$\triangle x \to 0$とすれば連続関数の空間$W=C([0,\infty)\to R^n)$（今は$n=1$の場合）の上に酔歩の確率の系列が得られる。WienerはPerrinが強く指摘した理想化したBrown運動の軌跡が微分不可能な連続関数であることに着目し、この確率の族の緊密性に関連する事を示しWiener測度を構成した。この意味でこの仕事はde Moivreの頃から研究され続けた中心極限定理をW上で理解した無限次元版に密接に関連している。この確率は次の熱方程式で特徴づけられる：

(1) $$\partial u/\partial t = \triangle u/2.$$

媒質が一様でない場合の拡散現象は(1)式で△を２階楕円型偏微分作用素Aで置き換えた

(2) $$\partial u/\partial t = Au/2$$

で記述される。対応するW上の確率はKolmogorov等により微分方程式を用いて研究されていた。伊藤清氏の上記の論文は確率微分方程式と呼ばれる新たな型の方程式の概念を導入し、その解を用いW上の写像ϕを定め、求める確率はϕによるP^Wの像測度P_ϕとなる事を示している。リーマン多様体Mの時はϕはR^n上の自由粒子の軌跡である直線とM上の測地線の対応の自然な拡張になる。従って方程式(2)に関係する量はϕから定まるW上の関数を用いWiener測度による積分で表現される。確率微分方程式を解く為に用いられた確率積分およびそれに関する変換公式と共に、この考え方は年月と共にその輝きを増している。

4)一方量子力学で現われる重要な量が古典力学の古典軌道（測地線）、それに対する作用積分、その２階変分から決るJacobi場等により表現される事は早くから知れていた。R^n上の自由粒子の波動関数がこれらの量で完全に記述されることはSchrödinger方程式

(3) $$i\hbar\,\partial u/\partial t = -(\hbar^2/(2m))\triangle u$$

の解である事を用い直接確かめられる。$\hbar$はPlank定数。調和振動子の場合の様に２次のラグランジュアンに対応する場合も事情は同じである。このことは１９２８年にVan Vleckが指摘した。１９３３年Diracは“量子力学におけるラグランジュアン”と題する論文で時刻 t における波動関数を時刻 t+dt におけるものに移す積分核はラグランジュアンをLとすれば$\exp[(i/\hbar)\int_{[t,t+dt]} L(s,x,\dot{x})ds]$に似ていることを指摘した。これだけの歴史を背負ってFeynmanはラグランジュアンから出発する量子力学の新たな定式化に到達し、学位論文でその成果を発表した。そこではLに対応する場合の<u>Schrödinger方程式の基本解</u>が

(4) $$\phi(s,x;t,y) = \int \exp[(i/\hbar)\int_{[s,t]} L(u,x(u),\dot{x}(u))du]\,\delta_{(x,y)}(x(s),x(t))\mathcal{D}(dx)$$

の形の“<u>ある意味での積分表現</u>”を持つことが基礎になっている。ここで積分は総ての可能な滑らかな軌跡についての和を表す形式的な記号である。Wienerの場合はW上の系列の極限を求めるのに、任意の有限個の時点への射影が全測度１の確率であることを用ている。ところが今の場合はその性質が前提に出来ないので(4)は有限個の射影から得られる系列を示す記号として理解する。(4)にならってWiener測度を形式的に書けば次の形になる：

(5) $$P^W(dw) = \exp[-(1/2)\int |\dot{w}(s)|^2 ds]\mathcal{D}(dw).$$

5) $\hbar \to 0$とする<u>準古典近似の研究</u>でFeynmanの経路積分の方法は特に興味深い役割を果たしている。その際極限に現われる量は再び対応する古典力学の考察で得られるもので表現される。それらの結果を示す基本的な道具は有限次元の場合の漸近理論において、積分で表現された考察の対象から背後にひそむ特性量を引き出す時に基礎になる、(a)Laplaceの原理、(b)停留 位相の方法、(c)鞍部点法　等の<u>経路空間における類似</u>である。

6)M. KacはFeynmanの研究の直後に経路積分による成果の類似を(5)の関係を指針にしてWiener空間で数学における厳密さの下で展開することを提起し豊かな成果を得ると共に確率解析に強い影響を与えた。この提起は(1)と(3)の関係から類似と言う以上の意味を持っている。特に経路空間におけるLaplaceの原理や大偏差の原理は体系になる位に発展した。今世紀の後半数学および応用の広い範囲の問題で<u>熱方程式の方法</u>と呼ばれるものが用いられ成果をあげている。そこでは基本解やそのtraceのshort time asymptotics、パラメータに関する漸近展開が中心的な役割を果たしている。そこに出てくる基本的な量は対応する古典力学の考察から得られる。そこではJacobiやMorse達につながる成果が用いられる。これらの解析の背後に潜む本質を解明するためにはKacにならいWiener空間上の積分表現を用いる事がしばしば有益である。しかしその為には越えねばならない幾つかの難題がある。その一つは変分の問題であるが、Brown運動の軌跡が微分不可能になるのと同じ原因により今の場合は通常の変分の理論が適用出来ない。１９７０年代の半ばMalliavinはそれを克服する一つの考えを提出し確率解析に伊藤の仕事以来の飛躍をもたらした。その成果を用いて確立された渡辺信三氏のWiener空間上の超関数論によれば、上記の熱方程式の方法に出て来る基本解等、考察の対象になる量に対してWiener空間上の超関数が対応し、それらの解析、例えば漸近展開、を行えば解析の他の分野の結果の助けなしに目標が達成出来る。

7) 6)で述べた確率解析の方法の応用で基礎になるものの一つは有限次元の停留位相の方法の場合と同様に、W上の２次関数のWiener測度による振動積分に対する等式である。これらは対応する測地線、それに対する作用積分、それにそつたJacobi場で表現される。これはVan Vleckの結果の経路積分を用いたPauliや de Witt-Moretteによる定式化に相当する。
<u>簡単な例：上</u>の視点に立てばEulerの公式およびdouble sine 関数$S_2(x)$に対する微分方程式

(6) $$\Pi_{n\in Z*}(1-(x/n))\exp[x/n] = \sin \pi x/(\pi x), \quad (dS_2(x)/dx)/S_2(x) = \pi x \cot(\pi x)$$

はある量を左辺はBrown運動の固有関数展開を用い、右辺は一様な磁場の場合の古典力学的量の計算で求めたものになる。また（６）式の前半の式はWiener空間の変換の行列式の計算をJacobi場の計算に帰着し有限次元の話に持ち込むことに関連している。この他に熱方程式の方法で示され、漸近式でなく等式であるにも関わらず、その中に古典力学的量が出てくる例としてSelbergの跡公式があるが確率解析の立場からの考察は知られていない。

8)Kacが提起した立場から見れば確率解析の方法には難題が多く残されていて数理物理の人々がFeynmanの経路積分を用いて展開している世界までは道遠しの感が否めない。