Abstract

Short history of large numbers

Suzuki Shinji

This paper primarily aims to depict a history of large numbers in the 20th century through the developmental viewpoint of the theory of computation. In this context, the Ackermann function, Goodstein function, Busy-Beaver function, and Knuth's up-arrow notation are properly positioned. In addition, this paper presents some unique and interesting findings that are listed as follows:

1. The guiding principle of the modern theory of large numbers, "the method of expressing large numbers boils down how to find the fast growing functions, and such functions are constructed by the iteration whose mechanism is regulated by the ordinal numbers," was first given by J.E. Littlewood, who also had the prototype of the fast-growing hierarchy.
2. The scientific notation ($a \times 10^{\pm n}$) was created in 1862 by Ernest Esselbach, who was a well-known 30-year-old electrician. As a result, it had an impact on J.C.Maxwell. I revealed the reason why more than 200 years after the announcement of Cartesian exponential notation the invention of this concise and meaningful notation was needed.
3. According to David Gregory's book "The Elements of Astronomy, Physical and Geometrical," which was translated by E.Halley and published in 1715, "Magnus Annus" has been estimated to be 25,000 or 26,000 years. Although he was a professor of mathematics at the University of Edinburgh, Savilian Professor of Astronomy at the University of Oxford, and a commentator on Isaac Newton's Principia, his estimates were nearly similar to those of the ancient and too small according to the current common sense.
4. There is a possibility that "The Sand Reckoner" by Archimedes had an impact on the Lotus Sutra. (It was reprinted in part from my paper in 2013.)

Moreover, a variety of interesting articles related to the history of large numbers, which are not original researches of the author, are listed in this paper. e.g.

5. In ancient Babylonia, large numbers such as $3^{92}, 9^{11} \cdot 12^{39}$, which are rarely used even now, had been calculated precisely at 60 hexadecimal notation.

Furthermore, the comparison problem of historically famous large numbers (Graham's number, Steinhaus number, Ackermann number, etc.) that cannot be represented with an exponential notation is listed in the Appendix with proofs.

巨大数小史

有限と無限の狭間の揺らぎ

鈴木　真治[1]

目次

---

[1] 2016 年 1 月 30 日投稿　suzuki-zeta.888@gol.com

0 はじめに

巨大数は，無限と同様に，太古から多くの人々を魅了し続けて止まない人気のテーマの一つである．ところが，無限論が，現在においても真っ当な専門書[2]から啓蒙書[3]，果ては哲学書[4]に至るまで幅広く新著が出版され続けているのに対し，巨大数論を主題とした邦書を寡聞にして著者は1冊しか知らない[5]．後はせいぜい，数学者のエッセイ集の1トピック[6]として紹介されているか，比較的小さな記事[7]が，発表されているくらいではなかろうか．このような差が生まれた最大の理由は，無限が，数学の発展において不可欠な概念であり続けて来たと云う歴史的重みと，門外漢からの安易な接近を拒む深淵を内包しながら発展を維持しているのに対し[8]，巨大数の方は，一見，鬼面人を嚇すと云った意外性から歴史的に語り継がれているものがあるにしても，現代数学はそれを必要とせず，将来も必要とされることはないと考えられているからかもしれない．本質論から比較するなら，無限が，多様性を保持しつつも，数学的に明確な定義が与えられるようになったのに対し，巨大数に対しては，精確で有効な定義がないことが致命的な差であろう．このような対象を，大抵の数学者は，研究対象にはしたがらないからである[9]．

一方，グーゴロジスト（巨大数愛好家）と呼ばれる人々が，主にネットの世界[10]で，様々な巨大数を発表し，競争し合うと云う面白い現象が起こっている．彼らの問題意識は，基本的には，具体的な問題から離れて，ひたすら「効率的により巨大な有限の数を体系的に定義する方法を考案する」ことにあり，何となく江戸時代の和算家達を彷彿させるものがある．

---

2 例えば，『巨大基数の集合論』[Kanamori]

3 例えば，『無限を読み解く数学入門』[小島]，『なっとくする無限の話』[玉野]

4 例えば，『無限 その哲学と数学』[Moore]，『無限論の教室』[野矢]

5 一応，『大きな数』[Davis]があるが，原書第一版が1961年であることもあり，当然，クヌースやコンウェイの表記方法は疎か，グラハム数にも言及されていない．日本語訳版の最後にスタインハウスのメガとモーザー数について脚注で触れられている程度であるから，現代的な巨大数論としては，啓蒙書のレベルであっても不十分と言わざるを得ない．

6 例えば，『リトルウッドの数学スクランブル』[Littlewood]，『数のエッセイ』[一松]

7 例えば，『超巨大数への挑戦.』[Crandall]

8 例えば，上記の『巨大基数の集合論』に対し，次のような感想を述べる数学者もいる．「専門家以外には決して読破できないが，現代集合論の最先端の息吹が感じられる」『なっとくする無限の話』[玉野]

9 「大ていの数学者は，論駁の余地なく一刀両断に問題の解決ができそうもないと見てとると論争に入っていかない」『ブルバキ数学史』[Bourbaki]p.38

10 少なくとも，2016年1月27日現在，英語，日本語，フランス語，ドイツ語，オランダ語，中国語版の「巨大数研究 Wiki」がある．

著者は，当初，このような問題意識に対し，どちらかと言えば否定的で，「問題のための問題を解こうとしている」ように捉えていた．しかし，「数と無限の多面的アプローチ」を主たる研究テーマにしている関係上，擬無限としての「巨大数」は，無視できない存在であった．そこで，断続的に巨大数の歴史を調べていたのだが，ここからビジービーバーと云うチューリングの停止問題とも関連のある非常に興味深い関数や第一不完全性定理の具体的な例ともなったグッドステイン数列の終結定理，非原始帰納関数の典型例であるアッカーマン関数，証明論や計算理論に現れる急増加階層(F.G.H)とも密接に関わっていることを知るに及んで見えていた風景が一変した．20 世紀以降の巨大数の歴史は，このような文脈のなかで，計算理論の発展 ― 原始帰納関数から多重帰納関数の発見，一般帰納関数への拡張，計算可能関数との同定，非計算可能関数の発見等 ― を主軸に添えて，様々な表記方法の創出と具体的問題への応用を付記しつつ語られるべきものと考えるようになった．

このような状況を想起するならば，標準的なカッツの数学史でもテーマ別に編集されているオックスフォード数学史でも，巨大数が全く触れられていないと云う過小評価振りには，違和感を持たずにはいられない．世の中には，既に数多の数の歴史本 ― 「無理数の歴史」，「零の発見」，「π の歴史」，「不思議な数 e の物語」「負の数学」，「虚数の歴史」，「小数の歴史」，「指数と対数」，「素数の音楽」… ― があるのだから一つくらい正面から「巨大数の歴史（古代から 20 世紀）」を論じたものがあっても良いのではないか，と感じたことが本論執筆の最大の動機である．

本論を書くにあたって事前に課した制約として，グーゴロジストが最も興味を持つであろう現在の巨大数の状況については触れないことと，逆に，彼らの興味の射程外と思われる理念的なボレルによる到達不能数やヴィドゲンシュタインのパラドックス，ミシェルスキーの巨大定数を含んだ自然数論に言及することであった．前半部分の制約は，著者自身がその分野に不案内であり，かつネット上に既にいくつもの力作[11]が掲示されていること，及びその多くが今世紀に入ってから発表されたものであり，「歴史」として語るには未だ新しすぎる話題だと思われたからである．後半部分は，巨大数を「有限と無限の狭間の揺らぎ」として捉えたい著者の志向性から

---

[11] 例えば，量子コンピュータ複雑性理論学者の Scott Aaronson 氏の HP にある “Who Can Name the Bigger Number?” http://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html や Robert Munafo 氏の HP 上の “Large Numbers” http://www.mrob.com/pub/math/largenum.html にある関連リンクを参照のこと．
日本語では，巨大数研究 Wiki, http://gyafun.jp/ln/が詳しい．
ネット上の巨大数論にも巨大数の歴史は掲示されているが，本論では，これらのネット情報で入手できるものは簡単に触れるに留め，独自の内容に力点を置くように努めた．

は，どうしても触れておきたいテーマであったことによる．

また，本来の数学史からは若干外れるかもしれないが，附録において，ギネス登録されていることから歴史的に有名であり，しばしば巨大数の代名詞として扱われることの多いグラハム数と，出自を全く異にする他の巨大数であるアッカーマン数，スタインハウス数との比較証明を与え，F.G.H による巨大数規模の計量化の初歩を説明しておいた．

一般には，際物扱いにされがちな巨大数の魅力を，どこまで引き出せたかは心もとない限りではあるが，本論を読まれて巨大数史に興味を感じていただけたなら，著者の喜びはこれに勝るものはない．

【読者への注意 1】

本論の主旨は，上述の通りであるが，読者諸子への便宜を考え，本論で扱っている巷説とは異なる歴史的事実や邦書では触れられる機会の少ない話題を中心に，設問形式で列記しておいた．適宜参照・活用されたい．

(1) **アルキメデス**が有名な「砂の計算者」を書く前に，$\mathbf{3^{92}}$や$\mathbf{9^{11} \cdot 12^{39}}$と云う驚く程巨大な数を精確に計算していた人々がいた．それは誰か？

第 1 章第 1 節参照

(2) 紀元前 8 世紀頃，**古代ユダヤ**では **60 万を超える数**が旧約聖書に記されているが，現在の聖書学では，それは誤読によるものであったとする説が有力である．それはどの部分か？

第 1 章第 2 節参照

(3) 巨大な数や微小な数を簡潔に表現出来る**科学的表記（指数表記とも言う：$\boldsymbol{a \times 10^n}$）**は，現在では自然科学のみならず，社会科学やビジネスの世界でも不可欠な表記方法であるが，この表記方法は，いつ，誰が，どのような理由で始めたのか？ 但し，デカルトではない．

第 6 章第 2 節参照

(4) 現在，**数字を 3 桁毎にカンマで区切ること**の表面な理由は，国際度量衡会議での決議によるが，そのような取決めになった根本的な原因は，カエサルがヨーロッパを制圧したことにある．もし，アルクサンダーが先に制圧していたら，4 桁毎にカンマで区切ることになった可能性が高い．（そうなっていれば，日本や中国にとっては好都合だったのだが）

第 4 章第 2 節参照

(5) **永劫回帰**は，古代から語り続けられてきたメジャーな思想の一つであ

るが，具体的に何年後に世界が再スタートするかについては，インドの**劫（カルパ）**のような比喩的なものを除けば，現在の眼から見ると，驚く程小さく見積もられていた．例えば，ハレーが活躍していた時代のオックスフォード大学の天文学教授は，この期間をどの程度と見積もっていたか？

第5章第3節参照

(6) 力学系理論では，ポアンカレの回帰定理に基づく回帰期間を**ポアンカレ周期**と呼んでおり，これを現代版永劫回帰期間と解釈することも出来る．歴史上，初めてポアンカレ周期の具体的な評価式を与えて，物理学の問題に適用したのは誰か？

第5章第3節参照

(7) ディラックは，陽子と電子の間に働くクーロン力と万有引力の比が，宇宙の直径とほぼ同じ程度の大きさであることに注目して，「**巨大数仮説**」を1937年に提唱した．ところで，この不思議な一致を最初に注意したのは誰か？　但し，ディラックではない．

第5章第2節参照

(8) **原始帰納関数**は，デデキントの歴史的名著「数とは何か，そして何であるべきか」(1888年) で初めて定義されたとされることが多いが，実は，二人の先駆者がいた．それは誰か？

第8章参照

(9) 1925年，ヒルベルトは加法，積，冪，超冪…よりも能率よく大きくなるある具体的な関数が，原始帰納関数ではないと予想した．3年後に弟子のアッカーマンが，この関数がいかなる原始帰納関数よりも増加スピードの速い関数，いわゆる**アッカーマン関数**，であることを証明することでヒルベルトの予想を肯定的に解決した．彼の証明は，本質的には対角線論法であったが，彼の証明の50年以上も前に，対角線論法を使って，可算個の増加関数列に対して，そのどれよりも増加スピードの速い関数を構成して見せた数学者がいた．それは誰か？

第8章第1節参照

(10) 19世紀後半，カントールの実無限とは別の意味で「実無限」を標榜し，系統的に研究した数学者がいた．それは誰か？

第8章第5節参照

(11) アッカーマン関数は，2重帰納関数だが，より増加スピードの速い**多重帰納関数**（3重，4重…）を定義し，系統的に研究していた研究者がいた．それは誰か？

第8章第1節参照

(12) $\mathrm{H}_0(a,b) = a+1$ 後者関数(successor)
$\mathrm{H}_1(a,b) = a+b$ 加法関数(addition)
$\mathrm{H}_2(a,b) = a\cdot b$ 乗法関数(multiplication)
$\mathrm{H}_3(a,b) = a^b$ 冪指数関数(exponentation)
$\mathrm{H}_n(a,b) = \mathrm{H}_{n-1}\big(a,\mathrm{H}_n(a,b-1)\big)$ $(n \geq 4,, b \neq 0)$
$= 1$ $(n \geq 4, b = 0)$

によって通常の 2 項演算の拡張を原始帰納関数として定義した数学者は誰か？
また，$n = 4$ の演算に対し **tetration**，$n = 5$ に **pentation**，$n = 6$に **hexation** と名付けた数学者は誰か？

第 8 章参照

(13) **順序数定理**「順序数の減少列は，必ず有限回で終結する」を利用して作られた超高速増加関数がある．これは何という関数か？

第 8 章第 2 節参照

(14) 傑出した解析学者**ラドー**は，晩年，**いかなる計算可能な関数よりも増加スピードの速い計算不能関数**を定義した．その関数はなんと呼ばれているか．

第 8 章第 3 節参照

(15) **ハーディー**が，対角線論法を使って構成した急増加関数の族をなんというか？

第 8 章第 4 節参照

(16) 人間の持つ有限性に起因する「**到達不能な数**」は存在すると主張する数学者がいた．それは誰か？

第 9 章第 5 節参照

(17) **リトルウッド**は，巨大過ぎて表現出来ないような数については，それが本当に必要になれば，数学者は，なんとかして対応することが出来ると考えた．彼がそのように考えた根拠は何か？

第 8 章第 4 節，第 9 章第 5 節参照

(18) 1960 年代に，**『非有限集合』と『無限集合』が区別され得る**ことを注意した日本の基礎論学者がいた．それは誰か？

第 9 章第 5 節参照

(19) クリプキが，「**ヴィドゲンシュタインの背理**」で展開した「クワス算」を彷彿させるような手法で巨大定数を公理として導入した基礎論学者がいる．それは誰か？

第 9 章第 4 節参照

(20) いくつかの有名な巨大数の大小関係

$A(4,4)$＜googol＜アルキメデスの巨大数＜不可説不可説轉＜googolplex＜スキューズ数＜スタインハウスの mega＜$3\uparrow^3 3$（tori-tori）＜$A(5,5)$＜モーザー数＜**アッカーマン数**＜**スタインハウス数**＜**グラハム数**　但し，$A(x,y)$はアッカーマン関数.

附録 3.参照

【読者への注意 2】

本文中に散見する「ボルツマン(52)はツェルメロ(25)の異議申立に反論した.」のような名前の後の括弧数字は，そのときの年齢を指すものとする.

1 古代の巨大数

古代の巨大数と言えば，たいていの場合，アルキメデスの巨大数について語るところから始めるのが常である．実際，アルキメデスのこの分野での業績は傑出していて，彼を抜きにして巨大数史を語ることは不可能とさえ思われる．しかしながら，アルキメデス以前に，巨大数が全くなかったのかと言えばそんなことはない．ここでは，邦書ではあまり目にすることのない二つの巨大数を取り上げておく.

1.1 バビロニアの巨大数

高度な計数能力を持つ書記官たちを多数擁する古代バビロニアでは，3^{92}や$9^{11}\cdot 12^{39}$と云った[12], 現在でも滅多に使用されることのないような巨大数が，精確に 60 進法表記で計算されていた.

次に示す連結粘土板の最初の二つの図は，ヨラン・フライベルグの著書[Friberg:2007,p.457]から引用したものである．この連結粘土板は，後期バビロニア/セレウコス朝(B.C.305-141)に作成されたもので，サックスのLBAT[Sachs]で no.1644 として，1955 年に公開された.

この連結粘土板は，ジョン･ブリットンやヨラン・フライベルグといった研究者の永年の努力により，前世期末になってようやく解読された．そ

[12] [Ossendrijver]によれば「古代で最長(書き下した数の表示の長さのことを意味していると思われる)」の巨大数である．最大としないのは，恐らく，やや理念的に表示されたアルキメデスの巨大数があるからであろう.

れは高度な推理力と計数能力と根気強さが要求されるものであった．詳しくは，彼らの著書や論文を紐解いてもらうとして，ここでは解読結果を下表に簡単にまとめておいた．尚，図中の３種類の下線は，下記のまとめ図との関連性を見やすくするために著者が付したものである．

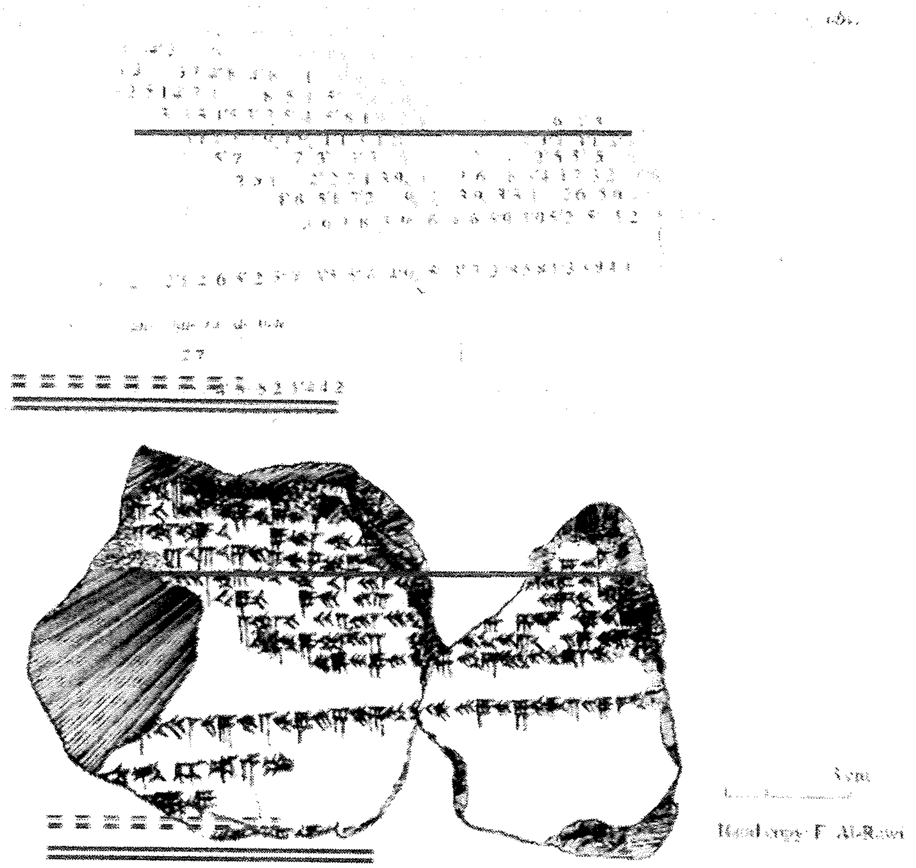


Fig. A9.4. BM 34601. An algorithm for the computation of the square of the square of a 7-place number.

4 04 17 40 45 13 17 45 52 14 42 12 09
×
4 | 16 17 10 43 00 53 11 03 28 58 48 48 36
04 | 16 17 10 43 00 53 11 03 28 58 48 48 36
17 | 1 09 13 00 32 48 46 01 59 48 09 57 26 33
40 | 2 42 51 47 10 08 51 50 34 49 48 08 06 00
45 | 3 03 13 15 33 54 58 19 24 11 01 39 06 45
13 | 52 55 49 49 47 52 50 56 19 11 08 37 57
17 | 1 09 13 00 32 48 46 01 59 48 09 57 26 33
45 | 3 03 13 15 33 54 58 19 24 11 01 39 06 45
52 | 3 31 43 19 19 11 31 23 45 16 44 34 31 48
14 | 57 00 07 30 33 06 08 42 11 25 50 50 06
42 | 2 51 00 22 31 39 18 26 06 34 17 32 30 18
12 | 48 51 32 09 02 39 33 10 26 56 26 25 48
\+ 09 | 36 38 39 06 46 59 39 52 50 12 19 49 21

16 34 39 52 40 21 26 52 57 35 56 49 50 37 38 58 13 38 04 44 57 15 03 37 21

粘土板で判読出来た数値は下線付
その他は推測値

学生が誤って
複写時に飛ばした3行

$16 \times 60^{24} + 34 \times 60^{23} + \cdots + 37 \times 60^{1} + 21 \times 60^{0} = 3^{92}$

······*ta-am-hu-ra-a-tum*
(「平方数」の複数形)

2 01 04 08 03 00 27 ⇨ $2 \times 60^{6} + \cdots + 00 \times 60^{1} + 27 \times 60^{0} = \mathbf{3^{23}}$

4 04 17 40 45 13 17 45 52 14 42 12 09 ⇨ $4 \times 60^{12} + \cdots + 12 \times 60^{1} + 09 \times 60^{0} = \mathbf{3^{46}}$

実は，このような巨大な指数計算が，他の粘土板でも発見され，そこでも同じく3^{92}が計算されていたことが，近年になって確認された．2014年の報告論文[Ossendrijver]の中で，同じ巨大指数が計算されている理由について，両方の粘土板が同じ書記官によって書かれた可能性が大いにある，とコメントされている．更に，別の粘土板では，復元の結果，$9^{11} \cdot 12^{19}$から$9^{11} \cdot 12^{39}$までの計算がされていたことが明らかになった．これは当時の数理的天文学の必要性を大幅に上回るもので，後期バビロニア純粋数学の一つの到達点と言って良かろう．

1.2　ユダヤの巨大数

旧約聖書の出エジプト記や民数記には，当時のイスラエルで兵士になれる成人男性の数が，603,550人であったと記載されている．これは，旧約聖書の中に現れる最大の数なのだが，その数字を額面通り受け取るのは，宗教的信仰心だけを拠り所とするならともかくとして，歴史的には，以下に述べるように，いろいろと問題がある．

民数記[13]はモーゼの五書の一つで，もともとは口承によって受け継がれ，早くても紀元前8世紀頃になってから文字に落とし込まれたものと考えられている．アルキメデスが活躍した紀元前3世紀頃のギリシャでも，せいぜい1万までしか数単位を持っていなかったことを考えれば，当時としては相当大きな数であったものと推察される．もちろん，この当時は，未だアラビア数字は現れていない．彼らがどのような表記方法でこの巨大な数を表現したかは，興味を惹かれる話題であろう．実は，彼らは，バビロニア人ともエジプト人とも違う方式，アルファベットで数を表す方式を採択していた．この方式は，大きな数を表すには恐ろしく不便な方法であったが，なぜかギリシャ人もヘブライ方式を踏襲している．以下に，民数記第1章46節の部分だけを示しておく．ヘブライ文字は，右から左に読む．従って，最初の2文字は「46」を表す．対応をとるため単語毎に訳語の日本語も右から左に書いておいた．参考として下に付記した数表を見るとこれが**מו**(メム ヴァヴ)であることが，見て取れるであろう．

尚，下記のヘブライ語の読み方と文法的注釈は，『ヘブライ語聖書対訳シリーズ7　民数記Ｉ』[ミルトス]による．

---

[13] もともとのヘブライ語ではבמדבר（荒野にて「ベミドゥバル」）であったが，旧約聖書の最古のギリシャ語訳である「七十人訳聖書」でἈριθμοί（数「アリスモイ」）と訳されたことから，このような書名になった．英語ではNumbersと訳されている．

מו וַיִּהְיוּ, כָּל- הַפְּקֻדִים--שֵׁשׁ-מֵאוֹת אֶלֶף, וּשְׁלֹשֶׁת אֲלָפִים ;

ムーィフらア　トッェシろュシウ　フれエ　トッオメ　ュシェシ　ムーィデクベハ　るコ　ーユフイァヴ

千　三と　千　百　六　は達者たれられ入に数　のて全　たっあで～てしそ　六四

男複　連数・接　単男　複女　連数　複男分受・パ・冠　連単男　複男３未・パ・倒

וַחֲמֵשׁ מֵאוֹת , וַחֲמִשִּׁים.

ムーシミはァヴ　トッオメ　ュシッメはァブ

十五と　百　五と

数・接　複女　連数・接

46　その数えられた者は合わせて六十万三千五百五十人であった．

『聖書［口語]』日本聖書協会(1955 年)

1	אアレフ	6	וヴァヴ	20	כカフ	70	עアイン	300	שシン
2	בベート	7	זザイン	30	לラメド	80	פペー	400	תタヴ
3	גギーメル	8	חヘット	40	מメム	90	צツァデイー	500	ק"תタヴクフ
4	דダレット	9	טテット	50	נヌン	100	קコフ	600	ר"תタヴレッシュ
5	הヘー	10	יヨッド	60	סサメフ	200	רレーシュ	700	ש"תタヴシン

実は，この巨大数については聖書学で様々な解釈が，昔から並立しているのだが，素直にその数字をそのまま受け入れようとする研究者は，むしろ少数派であることは注目に値する[14]．参考までに，異なる学説による主な解釈のいくつかを，コリン・ハンプリーズ[Humphreys]に従って，以下にまとめておく：

(1) この数字は精確である．
(2) この数字は精確であるが，だいぶ後の時代，例えばダビデの時代，の人口を表している．
(3) “千”と訳されているヘブライ語の単語('lp)は，誤訳されてきたもので，本来は“族”，“群”または“団”と訳すべきだった．
(4) この数字は，天文暦に基づくものである．

---

14 七十人訳ギリシャ語聖書からの単独翻訳を試みられている宗教学者の秦剛平氏は，603,550 人について，次のような注釈を付している．「この数は，ギリシャ語訳出エジプト記 39-3(ヘ⇒エジプト記 38-26)と一致する．後出 26-51 は，登録された数を 60 万 1730 とする．なお，出エジプト記 12-37 は，女・子供を別にした出エジプトのイスラエルの子らの概数を『約 60 万』とする．いずれも奇想天外で荒唐無稽な数字．」[秦]

(5) この数字は，象徴であり，ゲマトリアに基づいている．つまり，それぞれのヘブライ語のアルファベット文字に，数値が与えられている．
(6) この数字は，全くの創作であり，神学的な目的を果たすためにかなり誇張されている．

(3)が最も信憑性が高いとされている．例えば，フリンダース・ピートリー[15]は，ルーベン族の数が 46,500 人である（民数 1 章 21 節）として翻訳された場合について，正しくは，500 人の成人男性を含む 46 家族である，と翻訳すべきだった，と示唆している．

確かに，数学史の立場からも，この当時のユダヤ人の計数能力が，円周率を 3 であると見なす程度であったことを考慮するならば[16], 60 万以上の数字を正確に数えられたかどうかには，再考の余地があるかもしれない．

2 アルキメデスの 4 つの巨大数

前章でも触れたが，巨大数史でアルキメデスを避けるわけにはいかない．しかし，著者は，本件に関して，とりたてて，目新しい話題を持たないので，主な結果だけを列記するに留めることにする．[17]

2.1 砂の計算者

アルキメデスは，『砂の計算者』と云う論文で，宇宙空間を埋め尽くす砂粒の数を，現代の表記で，8×10^{63} であると試算している．この当時，指数法則は原論にそれとなく潜んではいたが，これを巨大数表現のためのツールとして捉え，

$$(10^{8\times10^8})^{10^8}$$

までの数を定義して見せたのは，アルキメデスの傑出した才能の発露である．これは，日常的な計算技術である「算術（ロギスティケー）」を商人

[15] Sir William Matthew Flinders Petrie(1853.6.3 – 1942.7.28)イギリスにおけるエジプト学の第一人者．

[16] また海を鋳て造った．縁から縁まで十キュビトであって，周囲は円形をなし，高さ五キュビトで，その周囲は綱をもって測ると三十キュビトであった．(列王記上 7−23)
『聖書［口語］』日本聖書協会(1955 年)

[17]『ギリシヤの科学（世界の名著 9)』[田村],『解析入門　アルキメデスからニュートンへ.』[Hahn],『数のエッセイ.』[一松],『解読　アルキメデスの写本』[Netz]

や職人が使う野卑な技芸と見なしたギリシャ数学では，非常に特異なことであり，彼が若い頃にアレクサンドリアに留学して，プラトン主義的数学観とは異なる，実学を下賤なものとして切り捨てない文化に接していたからではないか，[18]と考えられている．

2.2 牛の問題

アルキメデスは，エラトステネス宛ての手紙の中に，エピグラム（寸鉄詩）の様式で，興味深い問題を提示した．現在の方程式に翻訳しておくと，白，黒，斑色，黄の牛の牡の数をそれぞれ W,X,Y,Z,牝の数を w,x,y,z としたとき，次のような不定方程式となる．

$$W = Z + \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right\}X \qquad X = Z + \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right\}Y \qquad Y = Z + \left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right\}Y$$

$$w = \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right\}(X + x) \qquad x = \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right\}(Y + y) \qquad y = \left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right\}(Z + z)$$

$$z = \left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right\}(W + w)$$

$$W + X = 17826996k \quad \text{は完全平方数} \quad Y + Z = 11507447k \quad \text{は三角数}$$

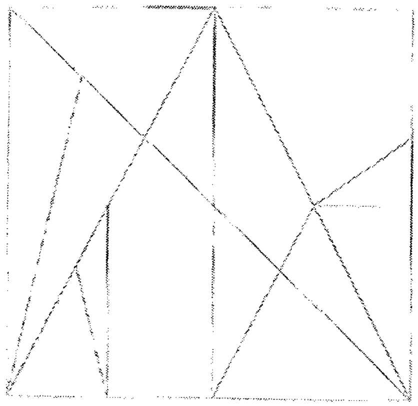
これを解くことは，ペル方程式を解くことに帰着され，連分数による一般的解法も判っているから，理論的には解けることは明らかである．但し，実際に実行するとなると，凄まじい労力を要する．1889 年から A.H.ベル主催のイリノイ数学クラブが，4 年がかりで 206,545 桁の数になることを弾き出した．但し，1895 年の報告論文は，たったの 2 ページであった．

2.3 ストマキオン（アルキメデスの小筥（こばこ））

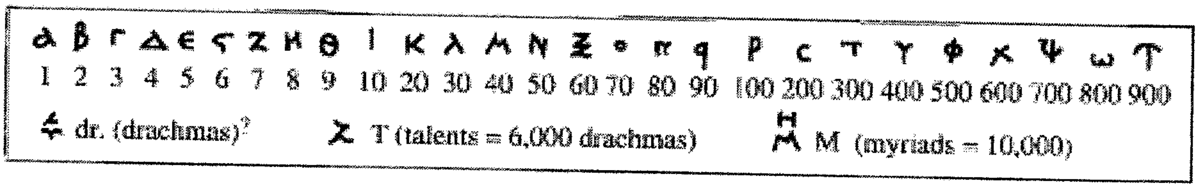
21 世紀に入ってから，ギリシャ数学史の研究者であるリベル・ネッツは，次頁の図とハイベアの解読した不完全な序文から，アルキメデスの真意が「同じピースを使って同じ正方形を作る方法は何通りあるか？」を問

[18] 一説によると，彼はインド数学を学んでいて，それで巨大な数を考察することに他のギリシャ数学者程抵抗がなかったと言われている．後節で触れるサンユッタ・ニカーヤ（阿含経　相応部）にある巨大数表現も紀元前 3 世紀頃のものであり，Archimedes が活躍した頃と大体一致する．

うことであることを突き止めた．



このアルキメデスの遺題に対し，コンピュータが弾き出した答えは，17,152 通りであった．先の二例と比較すると，大して大きくないと思いがちだが，この当時のギリシャ人が，1万を意味するミリヤード(myriad)を超える数を表す用語を持っていなかったことを考えると，十分に巨大数と言って良かろう．そして，これが史上初の本格的な組合せ論の問題であったことも明らかになった．この事実は象徴的である．なぜなら，現在の数学で現れる巨大数の多くは，組合せ理論から生み出されているからである．



Unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics. [Friberg:2005] p.21

2.4 法華経への影響

本章第1節の脚注で，アルキメデスが，インド数学を学んでいた可能性があることについて触れたが，逆に，アルキメデスのこの傑出した論法が，インドでも知られていて，法華経のなかの巨大数表現に影響を与えた可能性があることを拙論[鈴木:2013]で触れた．但し，インド数学へのギリシャ数学，特にアルキメデスの数学，の影響についてのはっきりした定説はなく，叙上の説もあくまでも著者の仮説であることを注意しておく．[19]

[19] ギリシャ自然哲学が，インド自然哲学に与えた影響で，状況証拠はあるものの，確証にまでは至っていない例としては，アリストテレスの元素説とヴァイシェーシカ哲学の元素説の酷似性などがある．　『須弥山と極楽』[定方:1973] pp.94-96

	アリストテレス			ヴァイシェーシカ哲学		
	感覚	運動	触覚	色	業	触
地	触	下降	冷・乾	色味香触	重体	不熱不冷
水	視	中間	冷・湿	色味触	重体	冷
火	嗅	上昇	熱・乾	色触	上昇	熱
風	聴	中間	熱・湿	触	水平	不熱不冷

3 仏教やジャイナ教に現れた巨大数

仏教とジャイナ教は，始まりがほぼ同じ頃であり，教義も類似する点が多い．従って，巨大数の取り扱いについても，しばしば同じ用語を使用している場合がある．ここでは，仏教に現れる様々な巨大数を時間，空間，数，単位の視点から，その一部を紹介し，最後に，現代集合論を彷彿させるジャイナ教の無限階梯に触れておく．

3.1 劫（カルパ）

仏教では，巨大数に独特の比喩による定義付けが，与えられることが多い．例えば，大乗仏教の注釈書である『大智度論』巻第五には，次のような「劫（カルパ）」の定義が，述べられている．気の遠くなるような永い時間を表した，インド式巨大数表現の最高傑作の一つであろう．

> カルパの意味については，仏はこういう喩えを説いておられる． 四千里にわたる石の山に長寿の人がいて，百年を過ぎるごと，細くて軟らかい衣を持って来て，一度これを払い拭う．そのようにしてこの大石山が無くなってしまっても，一カルパの時間にはまだ尽きない[20]．あるいは，四千里もある大きな城の中に芥子の粒を満たし，ならして平らにしないでおく．長寿の人がいて，百年経つと一度来て，一粒の芥子を取って行く．こうして芥子が無くなっても，一カルパはまだ尽きない，と． 『大乗仏典1 大智度論』[梶山] p.113

初期の仏典『サンユッタ・ニカーヤ（『阿含経』相応部）』にも，同様の「劫」の定義が存在している．この経典は，5世紀頃に成立したと言わ

ヴァイシェーシカ哲学だけではなく，仏教にも元素論や原子論があり，やはりギリシャ哲学との強い類似性が見られる．我々になじみの深い「五輪塔」や「卒塔婆」も，上記の四元素に「空」が加わって出来た「五大説」に由来するものと考えられている．

20 多くの本はこの部分が，「天女が3千年に一度天界から舞い降りてきて羽衣で須弥山を一撫でする．これを延々と繰り返して巨大な須弥山が無くなるのにかかる時間が，一劫である．」と云った表現になっている．著者も高校時代にそのように教わった記憶がある．個人的には，こちらの方が艶めかしさも与って，永劫の時間をより良く表しているように感じる．

一方，Littlewood は，この大きく感性に訴える表現を無機的な指数表現に変換して，直観の危うさを次のように指摘している．

「大きさが1立方マイルで，堅さがダイアモンドの100万倍の岩がある．100万年に一度，聖なる人が岩のところに降臨して羽毛で撫でるがごとき一撫でをする．岩は最後には擦り切れてしまうのであるが，それまでに10^{35}年ほどかかる．これほど手間のかかる仕事の割には所要年数は思ったより短く，人口に膾炙している，無限の概念などというものは容易に覆されてしまうものだということが分る．」[Littlewood]

れているが，こちらの方が素朴でより原典に近いと思われる．

> 比丘よ，たとえば縦一ヨージャナ，横一ヨージャナ，高さ一ヨージャナの，割れ目がなく，空洞がない，一塊りの大きな岩の山があるとしよう．それを一人の人が百年を過ぎるごとに，カーシ産の布で一度ずつ撫でるとしよう．比丘よ，この方法によって大きな岩の山は，劫よりも早くなくなり，尽きるであろう．
> 『相応部経典第二巻』[中村]p.377

落語『寿限無』にでてくる「五劫のすり切れ」も，ここに由来する．

3.2 十萬億佛国土

長大な時間の比喩的表現が，極めて感性的なのに対し，巨大な空間の表現は，意外なほど理数的である．五世紀にヴァスバンドゥによって書かれた『倶舎論』から巨大数の一例として，風輪の周囲の長さを挙げてみよう．

先ず，長さの単位としてヨージャナ（由旬《ゆじゅん》）が設定される．これには諸説あるが，だいたい 7 キロメートルとされている．虚空に三重に重なった風輪，水輪，金輪が浮かんでいて，一番下の風輪の周囲が阿僧祇由旬であるとされる．つまり7×10^{56}キロメートルである．巨大な数ではあるが，指数表記で表現してしまうと，それ程でもない，と感じられたのではなかろうか．これは，指数表記が極めて優れているからであって，これを使わずに，千，万，億，兆，・・・，阿僧祇と十倍十倍を実際に繰り返して行った昔の人々は，その大きさに驚倒したものと思われる．

これと似たような例として，阿弥陀経などに現れる「十万億佛国土」がある．経典は，我々の住む娑婆から西方に十万億佛国土離れた処に極楽浄土がある，と言っているのだが，この「十万億」の大きさによって，いかに遠いかを表現しているわけである．「十万億」はサンスクリット語の『無量寿経』によるとśata-sahasra-koti-nayuta の翻訳である．śata は 100，sahasra は 1000 を意味するのでśata-sahasra は十万となる．しかし，koti は 1 千万を意味し，nayuta が 1 千億を意味するので，koti-nayuta は，現在の命数法なら 1 垓となるべきところが，なぜか 1 億になっている．定方晟氏は「おそらく，当時，中国で常用されていた最高の数位名が億であったので（？），「十万億」で最大の数字を意味したのではないだろうか．」[定方:1974]と書かれているが，漢訳が現れた後漢の時代よりかなり前の春秋時代に，既に「億」，「兆」，「経」，「姟」が現れている．「十万姟」とすべきところを誤訳したのではなかろうか．

いずれにせよ，原義に戻って指数表現を与えると10^{26}，万進法であらわ

しても百秄であり，アボガドロ定数の千倍にも満たない大きさであって，それほど巨大な数とは感じられない．

なまじ理数的であるが故に，現在の指数表記による換算が，簡単に出来てしまい，結果として，その巨大性が，それほどでもないことが透けて見えてしまったと言えるだろう．

3.3 恒河沙

永い時間を表していた「劫（カルパ）」に対し，大量の数を表すインド的表現としては，「恒河沙」（ガンジス河の砂）が有名である．平安時代初旬（823年頃）に書かれた『日本霊異記(にほんりょういき)』に，既に次のような使用例（千手経を念誦する修行者を殴打し悪死の報いを得る話）がある．[21]

大神咒[22]は，乾枯れたる樹すら枝柯華菓(えだひこえはなこのみ)を生ずること得．若しこの咒を謗(そし)る者があらば，すなはちそれは九十九億の恒河沙の諸佛を謗(そし)るとなす　　『日本霊異記』[板橋] p.159

恒河沙は，『宇津保物語』(980年頃)をはじめ，本節の最後で紹介する『平家物語（維盛入水より）』（1309年頃）や『今昔物語』（1100年頃），近年では『俊寛』（1921年，芥川龍之介著），『悟浄出世』（1942年，中島敦著）にも使用されており，更に，雑誌，歌集からソフト会社やNPOの名前にに至る迄，様々な分野での引用が散見（2016年現在）される．このように，純粋な数詞として使用は最早ないが，漠然とした無際限性を表す仏教用語として，現代においても死語とならず，社会性を保持し続けている．

厳密な数詞としての恒河沙は，現代の漢字文化圏では 10^{52} を指すとするのが通説である．中国での数の単位としての初出は，元の朱世傑(しゅせいけつ)による数学書『算学啓蒙(さんがくけいもう)』（1299年）[23]であり，日本では吉田光由(よしだみつよし)(29)による和算のベストセラー『塵劫記(じんこうき)』(1627年)である．しかし，インド的巨大数にはそのよ

---

[21] 著者は，この用例を多くの古典作品を検索機能で調査することで見つけたのだが，『日本国語大辞典』でも同じ例文が，「恒河沙」の最初の用例として採用されていた．この辞典の用例の選択の基準から言えば，「もっとも古いと思われるもの」と云うことになろう．但し，この辞典と雖も盲信すべきではない．[鈴木:2013]参照

[22] 千手陀羅尼

[23] 『算学啓蒙』上巻 p.12 に「一十百千萬・・・萬萬極曰恒河沙萬萬恒河沙曰阿僧祇・・・」との記述がある．

うな機能的な指数表現は，似合わない．ジャイナ教の経典『バガヴァティー・スートラ』や大乗仏典の『金剛般若経』には，次のような説明がある．

7つのガンジス河(の砂の数)は一つのマハーガンジス河(の砂の数)に等しい．7つのマハーガンジス河(の砂の数)は1つのサーディーナガンジス河(の砂の数)に等しい．7つのサーディーナガンジス河(の砂の数)は1つのマチュガンジス河(の砂の数)に，7つのマチュガンジス河(の砂の数)は1つのローヒヤガンジス河(の砂の数)に，1つのローヒヤガンジス河(の砂の数)は1つのアーヴァティーガンジス河(の砂の数)に，7つのアーヴァティーガンジス河(の砂の数)は1つのパラマーヴァティーに等しい．したがって，後者(パラマーヴァティー)はガンジス河(の砂の数)の7の7乗倍[24]か又は117,649個のガンジス河(の砂の数)に等しいことになる．百年に一度，その河底から砂粒を一つ取り除いたとして，砂が完全になくなるのにかかる時間が1サーラである．そして30万サーラが1マハーカルパに等しい．

『バガヴァティー・スートラ』[Basham]p.254（拙試訳）

世尊が問われた．
「スプーティよ，どう思うか．大河ガンガーにある砂の数と同じだけ，ガンガー河があるとしよう．それら（すべて）にある砂の数もまた多いと言えるだろうか．」

『金剛般若経』[長尾]第11節

やはり，インド的巨大数は，このような比喩的定義こそが真骨頂である．巨大なガンジス河を微小な砂粒で測ると言う行為は，極大世界を極小元素に還元して理解する方法とも考えられる．インド世界観を見事に反映した計数方法とも言えよう．

最後に巨大数が，文学の世界に美しく溶け込んだ有名な例をあげておく．その姿を光源氏にたとえられた平家の貴公子平維盛の入水シーンである．

無二の懇念をいたして，若しは一返も，若しは十返も唱へ給ふ物ならば，弥陀如来，六十万億那由多恒河沙[25]の御身をつづめ，丈六八尺の御形にて観音・勢至，無数の聖衆，化仏菩薩，百重千重に囲繞し，伎楽歌詠じて，唯今極楽の東門を出でて来迎し給はむずれば，御身こそ蒼海の底に沈むと思召さるとも，紫雲のうへにのぼり給ふべし．

またとない真心をこめて，一度，もしくは十度，念仏をお唱えなされば，阿弥陀如来ははかりしれない大きな御身を縮めて，1丈六尺の御形で，観音・勢至をはじめ無数の仏菩薩や化現の菩薩が百重千重ととり囲み，音楽を奏し詠歌をうたって，ただいまにも極楽の東の門を出，お迎えにこられるでしょうから，御身は青い海の底に沈むとお思いになっても，紫雲の上におのぼりになさるでしょう．

『平家物語』[杉本]「維盛入水」

---

[24] 原文に忠実に訳したのでこのようになったが，実際は「7の6乗倍」とすべきであろう．

[25] ここでは，那由多と恒河沙が合成されているが，恒河沙と劫の合成もいろいろな仏典で散見される．例えば，法華経では3カ所現れており，常不軽菩薩品第二十では，「壽四十萬億那由他恒河沙劫」とある．

3.4 不可説不可説轉あるいは不可説轉轉

仏教では，既に紹介した劫や恒河沙以外にも那由他，阿僧祇などの巨大数が，数多く定義されており，前節で触れた中国の『算学啓蒙』，日本の『塵劫記』にもその影響が見受けられる．

それでは，仏典に現れる最大の巨大数とは何か？ 恐らく，華厳経に現れる不可説不可説轉であろう．現代の指数表現を与えたならば，次のようになる．[26]

$$\text{不可説不可説轉}:10^{7\cdot 2^{122}}$$

$$=10^{37,218,383,881,977,644,441,306,597,687,849,648,128}$$

これは googol[27]を超えるとんでもない巨大数である．

この巨大数の具体的な計算方法は，脚注にある高杉親知氏の HP に丁寧に解説してあるので，これ以上は触れない．ただ，数学者の末綱如一(58)[28]が 1956 年の著書『華厳経の世界』[末綱]で，

$$\text{不可説轉轉}:10^{5\cdot 2^{120}}$$

を計算していることについては，誤解がないように説明を加えておく．

華厳経の漢訳完本としては，次の二種類があるのだが，

『大方廣佛華嚴經』60 巻（六十華厳），旧訳または晋経
『大方廣佛華嚴經』80 巻（八十華厳），新訳または唐経

不可説不可説轉は，唐経の第 45 巻，阿僧祇品第三十にあり，不可説轉轉は晋経の第 29 巻，心王菩薩問阿僧祇品第二十五にある．内容はほぼ同じだが巨大数の名称・定義が微妙に異なっており，その差が上記のような違

---

[26] 高杉親知 (2002) http://www.sf.airnet.ne.jp/~ts/language/largenumber.html
[27] グーゴル(googol)　10 の 100 乗
この奇妙な用語は，米国の数学者 Edward Kasner(42)が，9 歳の甥子 Milton Sirotta と考えたものである．パリセーズの森を散策中に Kasner が 1 の後ろに 0 が 100 個並ぶような巨大な数の名前を尋ねたところ，Milton が「グーゴル(googol)」と答えたのを Kasner が採用し，「数学と想像力」と云う題名の通俗書で紹介した．この単語に子供らしい，素朴で直観的だが，妙にしっくりくる巨大数らしい「とてつもなさ」を感じるのは著者だけではあるまい．そして，今では有名な話だが，Google の名前はこの googol に由来する．
[28] 末綱如一(1898～1970)：日本の解析数論の草分け的存在である．著者の学生時代には，高木貞治の『代数的整数論』と末綱如一の『解析的数論』が本屋に並んでいた．仏教や哲学にも造詣が深く，西田幾多郎，鈴木大拙，田辺元と深い親交があった．本著にも「華厳の数論」と題した章が設けられており，数学者らしい鋭い考察が与えられている．

いとなって表れたのである．どちらかが計算違いをしているわけではない．

百洛叉（らくしゃ=十万）を一倶胝とする．倶胝倶胝を一阿庾多とする．阿庾多阿庾多を一那由他とする．那由他那由他を一頻波羅とする．（中略）不可說轉不可說轉を一不可說不可說とする．此れ又不可說不可說(倍)を一不可說不可說轉とする．　『華厳経』第 45 巻

ところで，仏教ではなぜこのような巨大数を生み出したのであろうか．もちろん，個々の数字に実用的な意味合いがあるわけではなく，「仏菩薩の徳用は広大無辺で，この大数のように大きく，また更に大きい」ことを表したいだけなのであるが，それにしても，これだけの巨大数を紡ぎだす必要が，どこにあったのか．一つ考えられるのは，信者に対し，圧倒的な非日常を提示することで，判断力を麻痺させ，無条件の帰依を引き出すこと，あるいは通常の疑念や論理的追求の意志を挫くことにあったのかもしれない．ジャイナ教の巨大数階梯にも同様の数学的必要性が，あったと考えられる．このような文脈から，アルキメデスの「砂の計算者」を読むと，「世間で簡単に無限と言っているような巨大数があるが，自分はそれを計算してみせたぞ.」と云う彼の数学者としての矜持が感じられるし，リトルウッドが「劫」に指数表現を与えたのも同様であろう．

3.5 ジャイナ教の巨大数階梯

ジャイナ教は，B.C.500 年頃から B.C.400 年頃に，古代インドでマハーヴィーラ（大雄）によって始められ，現在も存続する古い宗教である．マハーヴィーラは，仏教の開祖ゴータマ・シッダルタ（釈迦）とほぼ同時期に同じ地域で活躍し，その教えも双子の宗教と言われるくらい似ている．

ジャイナ教徒は，時間と空間の哲学に関連した巨大な数を扱った．そして，このような巨大数を考えることは，無限の概念を自然に受け入れる素地となったものと推察される．この辺りは，無限を忌避したギリシャ数学とは対称的である．更に言えば，厳密性を追求したギリシャ数学とは異なり，かなり大らかに無限が考察されているが，その方向性は鋭く，19 世紀のカントールの超限数の概念[29]を彷彿させるものであった．ジャイナ数

[29] 林隆夫氏は『インドの数学』[林]p.128 で「その意図するところは，今日の言葉でいえば，自然数全体の個数に等しい「可算無限」（$\aleph_0$）であったかもしれない.」と書かれている．この集合論との類似性は，古くは 1929 年の『ジャイナ派の数学』[Datta]にも見られ，『古代インドの科学思想』[佐藤]p.232，『非ヨーロッパ起源の数学』[Joseph]p.337 にも踏襲されている．興味深い考察であると思うが，著者にはこの構成法から考えて，基数（$\aleph_0$）

学では，最高の不可算数（N）が得られると，次のようなプロセスを経て，無限に達することが，出来るとされている．

上記のクラス分けは，以下の数列によって表現され得ることが,容易に認識されるであろう．

2…N | N+1 { $(N+1)^2-1$ } | $(N+1)^2$…{ $(N+1)^4-1$ } |

$(N+1)^4$ { $(N+1)^8-1$ } | $(N+1)^8$ { $(N+1)^{16}-1$ } |

$(N+1)^{16}$ { $(N+1)^{32}-1$ } | $(N+1)^{32}$

ここでNは，先に定義したように，最高の可算数であるとする．この数列は，その作業の中で記録されたmとして，それぞれのクラスの極限数を含み，異なるクラスは縦線で仕切られている．如上の数たちのクラス分けにおいて，アレフ_0を超える数たちを定義しようとしていることに気付かされるであろう．

『ジャイナ派の数学』[Datta]p.142（拙試訳）

少しカントールの構成方法とは異なるが，かなり似たようなことをやっていたことが，見て取れるであろう．

このようにジャイナ教には，数に関する不思議な予言性があり，他にも現代物理の光年に似た距離の概念も提示していた．[30]

4 命数法と巨大数

巨大数の歴史の中で，避けて通れない話題の一つとして，命数法がある．我々が，日常的に，何億，何兆と云った数を容易に使うことが出来るのは，命数法のお蔭である．この辺りの話は，類書やネットで簡単に拾うことが出来るので，詳しくは紹介しないが，比較的目新しい切り口として，中国と欧米における命数法に関する混乱の奇妙な類似性と，それを回避出来た和算家の卓越性，及び数に名前を付けることの重要性を論じた，ロックのエッセイを紹介しておく．

ではなく超限順序数（ε_0）とした方が，より適切であるように思われる．

[30] ジャイナ教の宇宙観を特徴づけるものに人間の形をとる宇宙「ローカ・プルシャ」があるのだが，その大きさを測るためにラッジュ(rajju)と云うジャイナ教特有の長さの単位が使われる．1ラッジュは，一瞬間に2,057,152ヨージャナ（yojana,由旬(ゆじゅん)）の距離を進む神が6ヶ月の間進み続けて到達する距離である．1瞬間を1秒，1ヨージャナを15km(仏教の場合は，この半分)，6ヶ月を180日と考えれば，その距離は次のようになる．

2,057,152,×15×180×24×60×60＝479,892,418,560,000km ≒50光年

『インド宇宙論大全』[定方:2011]p.348

このような古代インドの長さの決め方を，前近代的と一蹴すべきではない．神が進む速さが距離を本質的に定義している仕組みは，光速を使って長さの基本単位であるメートルを定義する現代の度量衡（1983年以降）と驚く程酷似している．

4.1 中国と日本の命数法

中国では，数の概念は，新石器時代末期に発生し，奴隷時代の初期である商（殷）代(B.C.17 世紀頃－B.C.1046 年)に完成されたと考えられている．この時代に現れた甲骨文の中には，多くの数字が散見され，最大の数を表す字は，「三万」であった．漢数字の前身である甲骨文字には，1 から 10 までの数字はもちろんのこと，「百」，「千」，「万」に相当する文字も既にあった．

また，春秋時代(B.C.770 年－B.C.403 年)には，「億」，「兆」，「経」，「姟」などの数詞が現れているが，インド式記数法のように，十ごとに進位している．南北朝時代(439-589)に成立した孫子算経でも，万万を億としているが，兆，京，垓，秭，穣，溝，澗，正，載はすべて十ごとに進位している．6 世紀も後半に入り，北周の甄鸞（しんらん）は，『数術記遺』[31]の中で，上記の大数進法に上数法，中数法，下数法の三種類を導入している．下数法は，十ごとに進位するインド式記数法であり，上数法は「數窮むれば則ち變ず」とし，万万を億，億億を兆，兆兆を京などと進位させる方法である．両方とも使い勝手が悪く，甄鸞は万万を億，万万億を兆，万万兆を京と進位させる中数法が最も望ましいとした．これはヨーロッパで 15 世紀末にニコラ・シュケやヨハン・アダムが行ったことに相当する．しかし，万万進法としての中数法に対し，唐の時代には現在の記数法である万進法が現れ，両者の不統一による混乱した時期が，永く続くことになる．

良く知られているように，和算史上最高のベストセラーである『塵劫記』は，主に明の程大位の『算法統宗』からヒントを得て書かれたものである．そのせいか，初版(1627 年)では，極以下が下数，恒河沙より上を万万進の中数としており，1631 年の版では極以下が，万進の中数に改められたが，恒河沙より上は万万進のままであったので，未だ万万進と万進の「中数」が混在するなど，中国の命数法の混乱が，そのまま反映しているところが見受けられた．しかし，1634 年の版以降は，すべて万進の中数（現在の命数法）に統一され，中国のような混乱が続くことはなかった．このことは，吉田光由(36)の大きな業績と言えよう．また，余談ではあるが，その後中国では，SI 接頭辞の mega に対しても，その訳語として「兆」を当ててしまったので，更に混乱に拍車が掛かった．

---

[31] 銭宝琮は，『中国数学史』の中で，「《数術記遺》一巻は，巻首に“漢の徐岳撰，北周の漢中郡守，前司隷，臣甄鸞注”と題している．だが，書中，劉洪を”劉会稽“と称し，天目山の隠者が述べた言葉を引きながら，”刹那”,”大千”などの仏教語彙をもちいており，後漢末年の歴史事実とあわない．したがって本書は，断じて徐岳の原著ではない.」としているが，李迪『中国数学通史』で「その真偽については今後の研究を待つしかない」と書いている．

4.2 欧米の命数法

現在，日本も含め世界中に広まっている，3桁毎に区切ることで，数を読み取り易くする方法の直接的な根拠は，第 9 回国際度量衡総会(1948)の決議7と第22回国際度量衡総会(2003)の決議10に依る．しかしながら，それは表面的なことであって，この方法が生まれた本質的な歴史的由来は，カエサルのヨーロッパ制圧に遡る．もしアレクサンダーが，先に制圧していたならば，4桁毎に区切る方式になっていた可能性が高い．

古代ローマ最大の英雄であるカエサルが，ヨーロッパを制圧したことにより，当時蒙昧であったヨーロッパに古代ローマの数体系が齎された．この当時，ギリシャやユダヤは「万」の数詞を有していたが，ラテン語では「千」を意味するmilleまでしか保持しておらず，これよりも大きな数は，「千」の倍数として表すしかなかった．

スミスによると，millionを初めて使ったのは，13世紀，ビザンツ帝国の著名な学者であるマクシムス・プラニュース（Maximus Planudes）であった．[Smith]　ラテン語で「1000」を意味する mille に「大きな」を意味する on を組み合わせることによって million なる数詞が編み出されたとする説[32]には説得力がある．つまり，もともとの意味は，「大きな千」だった訳である．その後，この数詞は，西ヨーロッパでは比較的経済的に発展しつつあったイタリア，フランスで，何人かの学者たちに使われるようになった．milleでは窮屈になったからだと思われる．

1484年頃，ニコラ・シュケ(39)は，イタリアで使われはじめたmillionを基にして，その乗冪を byllion,tryllion,quadrillion,quyllion,sixlion,septyllion,octyllion,nonyllion と表すことで，現代に連なる命数法を確立した．この方法の秀逸さを理解するためには，インド命数法の欠点を思い起こせば良い．カジョリは，このような命数法はシュケが嚆矢であると記しているが，実は9年早くヨハン・アダム(Jehan Adam)が，似たようなことをやっていた．

シュケの手稿の内容は，エティエンヌ・デュ・ラ・ロッシュ(50)のものとして1520年に出版された本に現れた．1549年には，ジャック・ペルチエ(32)もmilliardを"Million de Millions"として定義した．彼らの大数進法は，千千進法(long scale)であった．１７世紀頃から千進法(short scale)が現れたが，殆どは千千進法が使われていた．

１８世紀中頃に，アメリカのイギリス領で千進法が使われるようになっ

---

[32] 似たような例として，ball＋on⇒balloon がある．

てから，千進法が広まっていったが，現在に至っても，両法の統一は完全には果たされていない．それ故，billion には 10 億（主にアメリカ）と 1 兆（主にイギリス）の両方の意味がある．中国や日本と違って，アラビア数字を用いて表現されていたので，呼び方そのものは，それ程深刻には影響を与えなかったのかもしれない[33]．それでは，数の名前などはどうでも良いのかと言えば，もちろんそんなことはあるまい。寧ろ，名前を有することこそが理解することに直結するのである，とまで熱弁する論客がいた．

１７世紀を代表する哲学者ジョン・ロック(58)は，1690 年に出版された随想録のなかで，ネイティブアメリカンは迅速性や合理性においては十分な能力をもっているにも拘わらず，千まで数えることが出来ないことを指摘し，この現象から転じて，彼らが大きな数に対して名前を持っていないことが，その原因である，と結論付けている．

そして，私は，我々自身が通常行うよりも遥かに大きなものを，それらを表すためのある適切な単位を見つけ出すことによって，言葉ではっきりと数え得ることを疑わない．一方で，我々は，ここで百万の百万倍の百万倍，等を，以下のように，それら（我々自身が通常行うよりも遥かに大きなもの）に対して名付けるための例として挙げておく．混乱することなく，（この操作を）18 桁または多くとも 24 桁の 10 進数を超えて行うのは困難である．しかし，はっきりと**異なった名前を示すことは，我々が上手く数え上げたり**，有益な数の**概念**を有することを齎す．次のすべての数字を，一つの数の印として，一つの連続直線内に設定してみよう．例えば

Nonillions.	*Octillions.*	*Septillions.*	*Sextillions.*	*Quintrillions.*
857324	162486	345896	437918	423147
Quatrillions.	*Trillions.*	*Billions.*	*Millions.*	*Units.*
248106	235421	261734	368149	623137

この数の英語での通常の名付け方法は，（もう一つの第 6 桁の単位である）百万の，百万倍の，百万倍の，百万倍の，百万倍の，百万倍の，百万倍の，百万倍の繰り返しである．このような方法では，この数のいかなる識別観念を持つことも非常に困難となるであろう：しかし， 6 桁毎に新しくて順序付けられた単位を与えることによって，おそらく，膨大な次第により大きくなって行く数は，これらが簡単にははっきりと数えることが出来ない可能性があろうとなかろうと，それらの**概念**は我々に対してはより簡単に把握され，かつ他者に対してはより平易に表される，私はそれが考慮されるようにしておく．これは，私が唯一言及するところのもので，私の新しい創案を敢えて導入することなく，特徴のある名前が番号

33 「正直にいえば，名前がないということは，たいして重大なことではない．科学者は，だいたいにおいて，おどろくほど大きな数を必要とする唯一の人びとなのだが，それらの数を 10 進法あるいは指数の形でかき，数の固有の名前によって述べることはしない．」『大きな数』[Davis]p.41

付にどのように必要であるかを示すことである.

『人間理解に関する随想:第16章 数 第6節 数に対する名前の必要性』[Locke](拙試訳)

ロックの考察は,名前に愚直にこだわると,現状にそぐわない.例えば,10^{10000}に対して,ロックの方法で名前を付けることは,現実的ではないし,その名前が数に対して何か有効な情報を与えるとは思えない.しかしながら,「適切な名前」の代わりに「適切な表現形式」と読み替えれば,現在でも通用するなかなかの卓見であり,巨大数に対する現代的なアプローチにも通じると言えよう.

5 自然科学に現れた巨大数

5.1 アボガドロ定数

現代の社会人が,一般常識として記憶しておくべき最大の数は,アボガドロ定数 6.02×10^{23} ではなかろうか.無量大数や googol は,有名ではあるが,高校生の必修学習事項ではない.また,アボガドロ定数なしでは,現代の化学が成り立たないのに対し,後の二者は,クイズ番組に出題されることはあっても,直接的に現代文明を支えている定数ではない.

現在の高校の化学の教科書では,アボガドロ定数の測定方法を紹介しつつ,「1811年,アボガドロ(35)は,気体は原子が結合した分子からなるとする分子説を唱えた.」[34]と云った科学史からのアプローチも明記されている.しかしながら,これは,「デカルトが,直交座標を史上初めて考察した」と同じくらいに歴史的事実としては問題がある.[大野] 学校教育における科学史を科学理論の理解を促進するための補助的手段と割り切るならば,ある程度の歴史の簡易化も致し方ないと思うが,それでも表現方法には気を付けて,「歴史的事実として嘘」にならないようにすべきであろう.

エッセニン・ヴォルピンと云う基礎論学者は,10^{12}のような大きな数の実質的な存在に対して,疑問を投げかけたことがあるとのことだが[35],その考えに従えば,アボガドロ定数は,理念的に表記され得ても,人間が実際には把握することが出来ない数であることになる.彼は,アボガドロ定数をどのように考えていたのだろうか.

---

[34] 高等学校化学 I 第一学習社(平成14年検定済)p.60

[35] 英語版の Wiki 情報なので,いささか出所はあやしい.

5.2 エディントン数とディラックの巨大数仮説

前節では，馴染みの深い巨大数としてアボガドロ定数を紹介したが，物理的な理論面では，この定数は必ずしも適切ではない．なぜなら，この定数は，炭素 12g に含まれる炭素原子の数として定義するのであるが，重さの単位 g に任意性があり，定数の値に恣意性があるからである．もっと判りやすい例を挙げれば，真空中の光速は，相対性理論を知っていれば，一意に決定されるべき物理量であることは当然なのだが，計数単位が，メートル法かポンド・ヤード法かで数値は変わる．つまり，計数単位によって変わり得るような物理量に対して，その値が巨大だと言っても物理的には意味がない．

巨大かどうかは別として，当時の物理学者が，計数単位によらない無次元の物理量に興味を持つことは，自然な態度であろう[36]．このような問題意識から，自然科学屈指の巨大数であるエディントン数やディラックの巨大数仮説 ― それは重力定数(G)が時間と伴に変化すると仮定することで巨大数同志の関係に説明を与える ― が現れたことを確認しておきたい．

クーロン力と万有引力は，前者が排力と引力の両方があり，後者が引力しかないと云う違いはあるにしても，ともに距離の２乗に比例し，物理法則としては似た構造をしている．しかし，その大きさの比は凄まじく，水素原子における陽子と電子の場合で比較すると，下記に示すように，だいたい宇宙の年齢と水素原子核を光が横切る時間の比程度になる．

$$R_c = \frac{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{e^2}{r^2}}{G\cdot\dfrac{m_p m_e}{r^2}} \propto \frac{e^2}{G}$$

$1/4\pi\varepsilon_0 = 9\times10^9$, $\mathrm{e} = 1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$, $\mathrm{G} = 6.67\times10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$,
$m_p = 1836 m_e$, $m_e = 9.1\times10^{-31}\mathrm{kg}$ より $R_c \fallingdotseq 10^{39}$.

$$R_G = \frac{\tau_{cosmos}}{\tau_{nucleus}} = \frac{\tau_{cosmos}}{\dfrac{2R_{nucleus}}{c}} = \frac{c\cdot\tau_{cosmos}}{2R_{nucleus}} = \frac{\text{宇宙の大きさ}}{\text{原子核の大きさ}}$$

上式で原子核の半径として $R_{nucleus} = 1.2\times10^{-15}\mathrm{m}$，宇宙の年齢として $\tau_{cosmos} = 10^9\times365.25\times24\times60\times60\mathrm{sec}$ より $R_G \fallingdotseq 10^{39}$.

ディラック(35)は，上記のような巨大な二つの無次元物理量のオーダーが単なる偶然によって一致することは有り得ないと考え，この一致を説明

[36] 物理学に次元解析の概念を初めて導入したのは Fourier である．[Maxwell:1873]p.3

付ける物理理論として，重力定数Gが原子時間に反比例して小さくなると云う「巨大数仮説」を1937年に提唱した．

実は，この不思議な一致に対し，最初に注意を促したのはヘルマン・ワイル(34)である． アインシュタイン(38)やド・ジッター(45)が，定常宇宙モデルを提唱した僅か2年後の1919年のことであった．

> 電子についてのある無次元数値の大きさが，1から著しく異なるというのは事実である；例えば，電子半径とその質量の重力半径に対する比は，10^{40}のオーダーである；電子半径の世界半径に対する比が，(上記の比と) 同等のスケールである可能性がある．
>
> 『相対性理論の新しい拡張』[Weyl:1919:p.129]（拙試訳）

彼は，「空間・時間・物質」の第5版でも，次のように述べている．

> 大きな渦状星雲までの距離として，新しい仮定にもとづいた光行差による決定法にしたがって，アンドロメダ星雲に対して10^6〜10^7光年と仮定すれば，世界の半径αはだいたい10^9光年となる．ここに概算された宇宙半径と電子半径の比は，10^{40}であるが，これが電子半径と電子の質量の重力半径の比に大体等しいことは，注目に値しよう．
>
> 『空間・時間・物質』(付録Ⅲ)[Weyl:1923]

一方，エディントン(56)は，1938年にケンブリッジ大学のトリニティ・カレッジでの講義(Tarner Lecture) で，宇宙に存在する全陽子の数が

15,747,724,136,275,002,577,605,653,961,181,555,468,044,717,914,527,
116,709,366,231,425,076,185,631,031,296 (80桁)[37]

であり，全電子の数も正確に同数であると発表した．これが世に名高いエディントン数誕生の瞬間であった．彼の目的は，上記の数がおおよそ136×2^{256}であることに基づいて，重要な無次元物理量である微細構造定数($\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}$)の値を説明づける理論を創案することであった．136は，この当時の微細構造定数の実験値の逆数であった．しかし，実験結果が改善されると，1/136ではなく1/137[38]に近いことが明らかになった．エディン

[37] つまり10^{80}に近い数であり，Diracの巨大数のほぼ2乗である．このような宇宙論に現れる巨大数については，“Cosmology” [Harrison] chap23を参照のこと．

[38] この数をEddington数と言うこともある．

トンは，理論を手直しして 137 で成り立つようにしたが，このような後出しジャンケンご都合理論が認められるわけもなく，ディラックからは厳しく批判され，パウリからは数秘術であると揶揄され，後年に至るも，ファインマンに説得力のない物理理論の例として取り上げられている．

1961 年，アメリカの宇宙論学者ディッケ(45)は，この $R_c = R_G$ を証明するために人間原理[39]を提唱した．この原理によれば，人間のような炭素系高等生物が存在し得る為には，宇宙の年齢が 138 億年($\fallingdotseq 10^{10}$)くらいのオーダーであることが必要であり，このことが $R_c = R_G$ を成立させる隠れた要因であるとする．つまり，宇宙の年齢が 100 兆年くらいのオーダーだと $R_c = R_G$ は成立しないが，その時期の宇宙にはそもそも人間が存在し得ないと言うわけである．屁理屈のように聞こえなくもないが[40]，本当なら，この巨大数は，生物としての人間の有限性の産物と言えるであろう．

5.3 永劫回帰時間

物理学で考え得る意味のある最大の数とは何であろうか．前節で紹介したエディントン数が，そうであるように書かれている場合が多いが，著者

$$\text{微細構造定数} = \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{\frac{e^2}{m_e c^2}}{\frac{\hbar}{m_e c}} = \frac{\text{古典的電子半径}}{\text{量子論的電子半径}}$$

量子論的電子半径＝電子のコンプトン波長

余談であるが，この数に因縁浅からぬ物理学者に Pauli がいる．彼は，この素数がなぜ物理法則の中心に現れるのかを生涯にわたって問い続けた．1958 年 12 月 5 日の午後，講義中に激しい腹痛に見舞われた彼は，翌日，チュウリッヒの赤十字病院に搬送された．見舞いに来た Charles Enz に興奮して「病室の番号に気が付いたか.」と訊いた．特に気に留めていなかった Enz に「137 号室だ．私がここから生きて外に出ることは絶対にない.」その言葉通り，彼はこの病室で 12 月 15 日に息を引き取った．[Miller] pp.422-427

[39] Dicke の人間原理は「弱い人間原理」と呼ばれるものの一種で，次のようなテーゼに立脚する．「宇宙における私たちの位置は必然的に，観測者としての私たちの存在と両立する程度に特別である」[三浦] p.153 Dicke による $R_c = R_G$ の証明は『人間原理の宇宙論』[松田]p87-88 に簡単に説明されている．一方，「強い人間原理」のテーゼは「宇宙は，その歴史のどこかにおいて観測者を創りだすことを許すようなものでなければならない」[三浦] p.153

尚，「人間原理 anthropic principle」と云う呼称は，1974 年に宇宙物理学者ブランドン・カーター(Brandon Carter：32)によって与えられたものであり，一方，反対用語としての「宇宙原理 Cosmological Principle：宇宙が等方で一様であると云う仮説」は，イギリスの天文物理学者ミルン(Edward Arthur Milne：37)によって，1933 年に名付けられた．

[40] 「弱い人間原理」は説明に用いられる場合は反証可能であるが，予測に用いると反証不能な形式科学ルールと言える．

はポアンカレの回帰時間ではないかと考える．[41]

ポアンカレ(36)は，1890 年，三体問題に関する懸賞論文において，次のような「回帰定理」を発表した．

> 空間の位置のみに依存する力が作用している一つの質点系において，座標及び速度が無限大には増大しないことが仮定されていれば，最初仮定された配置と速度によって特徴付られる運動状態は，一般に時間の経過に伴って，正確でないにしても，再び任意に接近し，またしばしば任意に再帰しなければならない．
>
> 『三体と運動方程式について』[Poincaré : pp.67-72]（拙試訳）

ポアンカレ自身は，この定理を上述の論文の中で，統計力学への応用を試みるようなことはしていないが，ツェルメロ(25)は，ボルツマンのH定理の証明に対する反証として，この定理を取り上げている．このツェルメロの異議申立に対し，ボルツマン(52)が反論した論文で，彼は，体積が$1\mathrm{cm}^3$の容器に通常密度の空気が入っている場合を想定して，具体的にポアンカレ周期を計算している．[Boltzmann]

現在でも「回帰定理」を現実の宇宙に適用し，そこから宇宙が初期状態にまで戻る時間，つまり永劫回帰時間，を計算した物理学者がいる．もちろん，いくつかの前提条件のもとではあるが，この宇宙が永劫回帰するのにかかる時間は，だいたい $10^{10^{10^{10^{10^{1.1}}}}}$ 年であるらしい．これは現代版「一劫」の定義とも言えるであろう．[42]

とは言え，現在の多くの人にとっては，「永劫回帰」と聞いて先ず思い出すのは，おそらくポアンカレではなくニーチェであろう．ニーチェ(37)自身によれば，1881 年に，病気療養で訪れたスイスのシルス・マリアのシルヴァプラナ湖畔を散策した際，巨大な尖った三角岩のほとりで，「永劫回帰」のアイデアが突然襲来した．

> 無限の時間のうちではあらゆる可能な結合関係がいつかはいちど達成されていたはずである．それのみではない，それらは無限回達成されていたはずである．しかも，あらゆる結

---

[41] 前節で次元付の巨大数は単位系の取り方に依存するから意味がないと注意したが，余りに大きいと単位時間を千年としようがプランク時間としようが殆ど影響されない．

[42] この数値は[Page]に依る．計算の前提条件は，以下の通りである．

「結局，大規模なインフレーションを伴うリンデの確率論的インフレーションモデルの一つ，その大きさはプランク単位長でだいたい$m = 10^{-6}$である，に全宇宙であるかもしれない処の物質を取り、そしてこの（物質の）塊を一つのブラックホールにして適当な一個の箱に入れた場合、

$t_{\text{Poincaré}} \sim \exp\exp\exp(4\pi m^{-2}) \sim 10^{10^{10^{10^{10^{1.1}}}}}$ プランク時間，千年，等といった時間単位の規模のポアンカレ回帰時間が必要となる．」[Page]（拙試訳）

合関係とその直後の回帰との間には総じてなお可能なその他すべての結合関係が経過したにちがいなく，これらの結合関係のいずれもが同一系列のうちで生ずる諸結合関係の全継起を条件づけている・・・

『権力への意志』[Nietszche](p.540)

「永劫回帰」は，いろいろなヴァリエーションがあるとの但し書きのもとではあるが，バビロニア，インド，エジプトの古代思想では多数派に属し，始まりと終わりの存在を主張するヘブライ人の時間の観念の方が寧ろ少数派であった．もちろん，現在の欧米文化圏では，ユダヤ教から時間観念を受け継いだキリスト教が，圧倒的主流派となっているので，この状況は完全に逆転している．バビロニアやエジプトから影響を受けた古代ギリシャにおいても，キリスト教が国教とされる前は，「永劫回帰」は普通に語られていた．例えば，ルクレティウスの『物の本質について』を紐解くと下記のような一節を目にするであろう．

ただ，原子は数が多く，かつあらゆる工夫に変化をうけ，無限のかなたから，打撃をうけて運動を起し，宇宙中を駆りたてられて飛んでいるが故に，あらゆる種類の運動と結合の仕方を試みることによって，ついに現在，物のこのような総和が生まれ成立するに至ったこの配置に，はいるのである．宇宙はまた，多数の『劫年』を経て保存された後，ひとたび適合した運動に投じこまれるやいなや，次のような現象を呈するにいたる．

『物の本質について』[Lucretius](p.56)

また，ストア派ではないがキリスト教最高の教父と位置付けられているアウグスティヌスは，ストア派やエピクロス派の宇宙観としてではあるが，主著で次のように論じている．

宇宙そのものはそれ自身の質料からふたたび生じ，かくしてまた，人類も他の諸々の生命体と同様，その元素からふたたび生じ来たり，それからのちは両親から死すべき者たちの増殖がなされるというのである．

『神の国』[Augustinus]第 12 巻第 12 章

たとえば，哲学者プラトンが，かれの時代にアテナイのまちでアカデミアと呼ばれたあの学園において弟子たちを教えたように，そのときから数えられないほどの以前の時代に，広大な，けれども一定の時間間隔をおいて，同じプラトン，同じまち，同じ学園，同じ弟子たちが存在していたとし，かつまた，これからさきの数えられないほどの時代をおいてくり返されねばならないとすることである．

『神の国』[Augustinus]第 12 巻第 14 章

ストア派では，この宇宙が生誕した当時と全く同じ位置に復帰する期間「劫年(magnus annus)」を見積もっていたらしく，例えば『ヴェルギリウス論評』(J.H.Vossi 1838 年) によれば次のような具体的な期間[43]が与

[43] 『物の本質について』[Lucretius]にある樋口勝彦氏の注釈によると「劫年 magnus annus（大きな年の意）ストアー派では，天体をはじめ万物が移行して，この宇宙の生誕した当時

えられている．現在を生きる我々の感覚からはどれも驚く程小さい．

2,489	世界の年齢	7,777	神秘数	15,000	マクロビウス[44]
3,000	世界の年齢	12,954	キケロ	18,000	ヘラクレイトス

彼らに数学の知識が不足していたから，このような見当違いの見積もりをしたのだろうか．1715 年に出版されたデヴィッド・グレゴリー[45]による著書では次のように見積もられている．

> 劫年，または偉大なる年は，ある固定点からの出発が終わってからの，固定された星々の一つの完全な見かけ上の天体の運行を表していて，それらは，25,000 年か 26,000 年またはその付近なのだが，再び同じ位置に戻ってくる．
>
> 『天文学の物理的，幾何学的原理 』[Gregory]（拙試訳）

本著は，あのハレーが英訳を行っているのだが，この数値に対して，殊更，異議を与えることもしていない．時代の限界かとも考えたが，そもそも劫年(magnus annus)の意味が変わってきていると見なした方がもっともらしい[46]．

5.4 猿の無限定理

ランダムに文字を与え続ければ，十分ながい時間があれば殆ど確実にどのような文字列も実現されるであろう．直観的には受け入れ易い定理だが，ここで言う「十分長い時間」が，驚くべき巨大数を生み出すことになる．

例えば，猿が休みなくタイプライターでキーを叩き続けた結果，偶然にもコナン・ドイルの「バスカーヴィル家の犬」となるには，大体$10^{3,000,000}$年程度の時間がかかる．宇宙の年齢が約10^{10}年くらいであることを考え合わせれば，べらぼうに大きいことが分るであろう．この手の計算は，ありそ

と全く同じ位置に復帰する「劫年」なる期間を考えていた．太陽年の幾年に当たるか，その数は 2,489, 3,000, 7,777, 12,954, 15,000, 18,000 など区々である．」

44 Macrobius Ambrosius Theodosius は 400 年頃のローマの文筆家で，『スキピオの夢についての注釈』の第 2 巻第 11 章にこの年数は出てくる．ちなみに，本著は中世プラトン主義の重要な出所であるとされている．

45 彼は傑出した数学者である James Gregory の甥で，オックスフォード大学の天文学教授であった．

46 「偉大な年」と云う用語の難しさは，その曖昧さにある．殆ど全ての期間に対し，いろいろな時期のいろいろな場所で，この名前が授けられているのを見出だせる．
[Neugebauer] p.618

うもない現象が起こり得る確率として，いろいろな例に対して取り上げられており，例えばリトルウッドは，セルロイド製のネズミが灼熱地獄（絶対温度 2.8×10^{12}K と設定）で 1 週間生き延びることの賭け率を$10^{10^{46.1}}$:1 と見積もったことがある．[47]

このような起こり得る可能性の極端に小さい事象を巨大数で表現する手法は，進化論への反論や人類が地球で生存していることがいかに奇跡的なことであるかを論証するためによく使われた．これは，ある意味で，仏教やジャイナ教において，巨大数が信徒の帰依を促すために使用されたのと，酷似した使われ方であることに注意すべきである．グレゴリ・チャイティンは，『ダーウィンを数学で証明する』[Chaitin]において，ある種の生物進化の数学的モデルを設定し，DNA の変異の仕方が無作為的であるなら時間(変異回数)2^Nで適応度 BB(N)に達するが，神の御業とも思しき最適仕様であるならば時間(変異回数)N で同じ適用度 BB(N)に達し，現実の進化のモデルとしてチャイティンが提唱している「累積的な進化」では時間(変異回数)N^2からN^3で適用度 BB(N)に達すると見積もって見せた．ここで BB(N)とは，後述するビジービーバー関数BBの非負整数Nでの値を表し，長さ N ビット以下のすべてのプログラムの適用度の最大値を意味する[48]．チャイティンの主張の骨子は，「このような精緻で複雑な構造を持つ生命体をDNAの無作為な変異で構成することは宇宙の年齢を遥かに上回る時間が必要になる．しかし，現実には我々の周りには我々を含めて驚く程多種多様な生命体が厳然として存在する．この現状を理解する最も合理的な説明は生命体のデザイナー（神）を想定するである．」を**ダーウィンの進化論を使って論破すること**にある．彼の動機と手法は，既に例示したアルキメデスやリトルウッドに類似しており，巨大数の眩惑に屈しない強い理性への信奉と自負が感じられる．

もっと正当な科学的な裏付けへの適用例としては，統計力学の基礎付けが有名である．ボルツマンは，熱力学の第二法則を分子論的に導出するために，エントロピーが不可逆に増加することを示す H 定理を証明するのだが，これについて，ツェルメロはポアンカレの回帰定理から，力学的状態は初期状態にいくらでも近づくはずであり，不可逆の増加は有り得ないのではないか，と批判した．これに対するボルツマンの反論は，1 ㎤の気

---

47 『リトルウッド　数学スクランブル』[Littlewood] § 12

48 Rado の原論文による定義とは異なる．(8.3 参照) Chaitin によれば，「本来の BB 関数をより洗練させたものである．」この理論の正当性の判断は著者には出来ない．進化の数学理論としては「集団遺伝学」の方がオーソドックスであるし，そこそこの巨大数も現れるのだが，さすがに BB 関数までは使われていない．Chaitin の理論は，純粋数学でも応用されることが多いとは思えない BB 関数を「進化論の正当化」に応用しており，「法螺」だとしても凄い話である．巨大数の関連テーマとしては興味深いのでこちらの方を紹介しておいた．

体の系についての回帰時間を具体的に計算し，それが途方もなく大きくて我々の現実的な時間の中では観測されることはない，と云う趣旨のものであった．ボルツマンは前節のような宇宙全体の永劫回帰時間（ポアンカレサイクル）を計算したわけではないし，現在の宇宙論による宇宙の年齢なども当然知らなかったが，これらを使って彼の言いたいことを表現するなら，高々10^{10}年程度のオーダーの世界の法則を論じているのに$10^{10^{10^{10^{10^{1.1}}}}}$年のオーダーで初めて観測されるかもしれない話をしても意味がないではないか，と云うことであろう．[49]

ここでの論法は，そのまま量子力学の確率的なゆらぎに対する弁明にも使われる．ざらざらな表面をした平らな机の上に固定された缶ビールが，量子のゆらぎによって突然倒れてしまう現象が生じるには$10^{10^{33}}$年程度かかる．従って，机の缶ビールが突然倒れたとしても，それは誰かが机にぶつかったのではないかと疑うべきであって，努々(ゆめゆめ)量子的ゆらぎを引っ張り出すべきではない．

6 巨大数の表記法

人間が，現実的になしえる表記を前提とした最大の数と云うものは，与えられるのだろうか？これは，表記方法，もっと具体的に言えば使える関数記号，によって大きく変わってくる．例えば，最も原始的な表現方法である一進法表記[50]，これは1を並べた個数で表示するものであるが，であれば，100くらいは表現出来るだろうが，1000では現実問題としてはお手上げであろう．まして，10^{100}に至っては，書き記す1の数が，宇宙の素粒子の数を超えているのだから，書きようがない．

[49] この論文の本論の最後は，次のように結ばれている．「それ故，この力学的自然観に対するすべての反論は，無意味でありかつ誤りに基づいている．しかし，この困難を，それは気体理論の原理の発見を明晰に提供するものなのだが，克服することが出来ない者は，実際にツェルメロ氏の忠告に従って，すべてのことを諦める決心をすべきである．」（拙試訳）

[50] レボンボ獣骨やイシャンゴ獣骨の刻みも1進表記であると言えよう．(附録2参照) 漢字，ローマ字をはじめ多くの言語の中でも遺跡のようにその片鱗が残っている．現代においても「正」の字を書いて数えたりしているのはこの一変形と考えられる．Kronecker は自然数の本質を最も体現した表示方法として考えていたようであるし，現代においても，この表記方法に数の本質を求める基礎論学者がいる．ちなみに，Kronecker(63)の有名な言葉「神は自然数を作られた，他はすべて人間が作った．」は1886年9月21日の講演での発言である．

6.1　10 進法表記

一般的な 10 進法表記の歴史は，既に様々なところで詳細に論じられている[51]ので，ここでは巨大数表記との関連に焦点を絞ることにする．

現代人には判りにくいことであるが，10 進法と云うものは当たり前ではない．しばしば，人間の指が 10 本であることから必然的に 10 進法が生まれたように書いてある書物を目にするが，史上最初に現れた系統的な数体系は，古代メソポタミア文明で発達した 60 進法であったし[52]，現代においても，我々は，彼らの単位系を踏襲し，1 時間を 60 分，1 分を 60 秒と数えている．10 進法と指の数との因果関係は否定出来ないにしても，数体系をすべて 10 の冪によって統一的に表記するアイデアは，かなり卓越したものであったことは押さえておかねばならない．一方で，巨大数の表現能力においては，10 進法表記が 60 進法表記よりも優れているわけではない．実際，60 進法で3^{92}を計算して表現している楔形文字の遺跡があることは，既に紹介したとおりである．

古代の 60 進法の欠陥は，0 記号を持たなかったことであろう．しかし，各冪に対して名前を付けておけば厳密に巨大数を表現することが出来る．実際，インドでは，各冪に個別の名前を付ける方式を取っていたが，この場合，その名前を憶えるが大変であった．このような欠点を補う命名法として，中国や日本では 4 桁毎に，欧米では 3 桁毎に新しい冪数の名前を，多少の歴史的残滓を残しながらも，設定していることは既述の通りである．

さて，10 進法表記と云うテーマを数学史の立場から論ずるとき，シモン・ステヴィン(37)の著書『十分の一法』(1585) を外すことはできない．先ず，注意しておかなければならないのは，ステヴィンが，ライデン大学付設の技術学校で授業を行う地位にありながらも，本質的には伝統的なアカデミズムの徒ではなく，技術者であった，という事実である．それ故，彼は，本著を学者ではなく技術者のために書いた．彼の目的は，明らかに実社会の改善であって，アカデミズムでの認知ではなかった．それは，彼が本著を当時の学術公用語であるラテン語ではなくフランス語と母国語であるオランダ語で書いたこと及び序文にある次の文章から，読み取ることが出来る．

> 天文家，測量士，絨毯計測士，ワイン計量官，体積を測る専門家一般，造幣長官，そしてすべての商人にシモン・ステヴィンは幸運を祈る．　　　　『十分の一法』(山本義隆　訳)

---

[51] 新しいところでは，例えば，『小数と対数の発見』[山本].

[52] 正確には，10 進法と 60 進法の混合体系であった．

有態に言えば，彼は本著を通じて，度量衡の標準化を目指していたのである．[53]ステヴィンがこの本を執筆していた頃は，彼が居たホラント州を含む北部ネーデルランド諸国はスペイン領南ネーデルランドから事実上分離し，一つの国家を形成しようとしていた．このような変革期だからこそ，彼は本著を書いたのであろう．つまり，そのような時期でなければ度量衡の変更は困難であることを彼は熟知していたと思われる．もっとも，彼は早すぎた預言者であり，彼の理想が達成されるのは 200 年後のフランス革命の銃砲の響きを待たねばならなかった．

この当時の度量衡がどれほど複雑なものであったかを窺わせる資料として，1556 年に出版された，ドイツの鉱山業・冶金業・試金業全般について詳述した『デ・レ・メタリカ（金属について)』の一部を『小数と対数の発見』[山本]から引用しておく．

分銅のシステムは，常衡と金衡の二種類があり，常衡では，Z を Zentner，P を Pfund，S を Sicilicus として
1D=100P，1/2D，1/4D，4/25D，2/25D，1/25D，1/50D，
1/100D=1P，1/2P，1/4P，1/8P，1/16P，1/32P，1/64P=1S.

『小数と対数の発見』[山本]　数学文化．第 22 号.p77

『十分の一法』は，時代の要請を満たしていたのだろう．様々な言語に翻訳された．1608 年に出版された英訳には，60 進法の小数を 10 進法の小数に変換するための表が追記されている．この時代には，未だ 60 進法の数字が，しばしば利用されていたことに，我々は思いを致さなければならない．

6.2　科学的表記（指数表記）

概念としての指数を生み出し，それまで扱えなかったような巨大数の捕捉に成功したのは，アルキメデスであることは既説の通りである．しかし，彼の天才をしても，時代的な制約から，言葉による表現にとどまらざるを得なかった．ここでは，具体的な表記方法について，その発明と影響の歴

---

[53] そしてステヴィンは，『十分の一法』の末尾の「補遺」で，十分の一法のいくつかの分野での応用を，分野ごとに具体的に説明したうえで，度量衡単位系の 10 進化，つまり度量衡に関するそれまでの複雑で無秩序な単位系をすべて 10 進法に整理統合すべきことを主張している．

『小数と対数の発見』[山本] 数学文化．第22 号．p.88

史について言及する．

よく知られていることではあるが，現在の右肩に小さく指数を表記する方法を初めて世に知らしめたのはデカルト(41)で，1637 年に出版された『幾何学』に初出を見ることが出来る．この指数の表記方法が与えられれば巨大数，微小数を表現するのに有用な科学的表記(scientific notation : a $\times 10^{\pm n}$)に辿り着くことは，現在の我々の感覚から言えば，造作もないことと感じるでろう．しかし，この僅かと思われた進展に，人類はなんと 200 年以上の年数を要している．

前章では，見慣れた巨大数としてアボガドロ定数 6.02×10^{23}を引き合いに出したが，実際にはこのような巨大な数を 10 や 100 と同じ水準で把握しているわけではあるまい．我々はアボガドロ定数の場合，6.02 と云う 3 桁の数と 10 の指数 23 の組合せだけでその大きさを把握していると言ってよかろう．つまり，宇宙が誕生した瞬間から，倦まず休まず数え続けたとしても未だ辿り着けない[54]ような巨大数を日常的に利用できるのは，科学的表記と云う非常に便利な表現ツールのおかげなのである．また，この表記方法が，掛け算や割り算において，指数法則の有効性を最も遺憾なく発揮させられる形態であることも論を待たない．

現代社会においては不可欠ともなったこの表記方法であるが，その歴史的由来となった文献を見つけることは，存外難しかった．管見の及ぶ限りではあるが，以下に引用する 1862 年の「英国科学振興協会の標準電気抵抗委員会報告」が初出であろう．更に，具体的に言うと，この委員会から意見を求められた若き電気技師アーネスト・エッセルバッハ[55](30)が書いた手紙のなかで，それは何気なく，しかし，明確な意図をもって導入された．ここでは報告書本文の方ではなく，エッセルバッハ自身の手紙の一部を引用しておく．

---

[54] 一秒間に 1 回ずつ数え続けるとしたら，Robert Hooke の計算値(9.1 参照)と地球の年齢を掛けてみると次のようになる．　31,557,600(回/年)$\times$138(億年)$\fallingdotseq 4 \times 10^{17}$(回)

[55] Ernst Esselbach (1832 年 9 月 12 日-1864 年 2 月 6 日)は，ドイツのシュレスヴィヒ生まれの物理学者，技術者で，1855 年には，Helmholtz の助手を務め，1857 年に Kiel 大学で学位を取得する．地中海の Malta(英領)と Alexandria(アフリカ)を接続する海底ケーブルの敷設計画に参画しており，この委員会報告のなかでは，「エッセルバッハ博士は，マルタとアレクサンドリアケーブルの冠水時に電気的試験を担当していた，著明な電気技師である」と紹介されている．彼が参加したときは，この計画は，技術が未熟であったため失敗したが，そこから得た様々な教訓を"On Electric Cables, with reference to Observations on the Malta-Alexandria Telegraph.（1862）"に書き残している．彼は責任ある立場で海底ケーブルの技術的な改善に携わっていたが，31 歳の若さで，パキスタンのクワダル港から西に 180 マイル行った沖合で溺死した．彼の死の 2 年後，1866 年，大西洋横断海底ケーブルは，万雷の拍手に包まれながら完成し，William Thomson はこの功績でナイトに叙せられた．

ウェーバーの絶対単位の実用化に対する二つの異議が，以下の通り十分に指摘されて来た．
1. その細かさ；そして
2. ガルバーニ電池の起電力に変動の余地がなくて（電流，電圧，及び抵抗の強さがそうであるように），自然界においてそれらが固定されるように，いくつかの定数を受け入れなければならないこと．
絶対単位に平易な掛け算が採用された場合は，絶対単位の基準は信頼性で引けを取らないであろうことを，私は当然のこととして考えている．フランス式の 1 メートル自体が，唯一の地球の四分円の長さである自然単位の$\frac{1}{10{,}000{,}000}$の約数であることを指摘する必要はない．私が実用的な使用のために提案する電磁気の自然単位の倍数は10^{10}である．したがって，非常に単純である（それは殆どなんの重要性もない）；それが実際に使用されるこれらの基準に我々を導く倍数（掛ける数）である．
・・・・・・・・

1862 年 9 月 18 日，ロンドンにて
『附録 F. ｴｯｾﾙﾊﾞｯﾊ博士からｳｨﾘｱﾑｿﾝ教授への手紙の抜粋』[Esselbach]（拙試訳）

この委員会が目指したものは，その当時の様々な電気測定における単位系を整理統合することであり，単位系の変換公式を簡潔に表現するために科学的表記が生み出されたことは記憶に値する．また，この報告は当時としても，かなり重要なものとして捉えられており，翌年(1863)に発表された『1862 年の重要な出来事の年次百科と記録一覧』の“Electricity(電気)”に関する記事には次のような一節がある．

その目的は、この[電気抵抗の]標準単位を 1 秒当たり 1 メートルの商によって与えられる値の 10,000,000,000 倍に等しい電流力，すなわちそれは10^{10}メートル/秒であるのだが，に対応をさせることにある．[56]

『1862 年の重要な出来事の年次百科と記録一覧』（拙試訳）

この委員会の主要メンバーの一人であった J.C.マクスウェル(29)は，1860 年の論文[Maxwell:1860]では全く科学的表記を使用していないが，同じ主題であるにも関わらず，1866 年の論文[Maxwell:1866]では10^{10}を使用している．明らかに 1862 年報告の影響であろう．しかし，この表記方法が即座に科学者の間に広まったわけではない．慣れ親しんだ表記方法をやめて新しいものに移行するには，それなりに時間がかかるものである．例え

[56] この科学的表記の使用例は，“The Story Of Mathematics” [Rooney]にも引用されている．元々は OED2 にある初出例なのだが，先に紹介した標準電気抵抗委員会報告にある Esselbach の手紙の方が早いし，より根源的である．

ば，アヴォガドロ定数を初めて実験的に測定したロシュミットの 1865 年の論文でも指数表記は使われず，未だに次のような表記がされている．

> この基礎に基づいて，最終的に，空気分子の直径は
>
> s=8×0.000866×0.000140=0.000000969mm
>
> または概算で，百万分の一ミリメートルとなる．
>
> 『空気分子の大きさについて』[Loschmidt]（拙試訳）

ところで，デカルトによる指数記号の発明からエッセルバッハの科学的表記の応用的創案に，200 年以上もの時間を要した理由はなんであろうか．著者が考えるに，メートル法以前の度量衡の殆どが 10 進法基準となっておらず，17 世紀から 18 世紀にかけてはそれが考え出される状況ではなかった．それはポンド・ヤード法や前節で挙げた昔の度量衡の例を参照すれば明らかである．ステヴィンが提言した 10 進法による度量衡は，フランス革命政府と云う尋常ならざる為政者の出現を待って，初めてメートル法として結実するのだが，そのメートル法にしても普及度合いについては，1867 年のパリ万博の一大キャンペーンまでは遅々たるものであった．

また，電磁気学と云う比較的新しい領域における単位系に対して考案されたのも，単なる偶然ではなかろう．たとえ 10 進法基準になっていても質量や長さなどは伝統の桎梏が強く，そうそう簡単には変えられたとは考え難いからである．更に，エッセルバッハが若く，余計な先入観を持っていなかったであろうことも有利に働いたのではなかろうか．いささか後付けのように見えるかもしれないが，大きくは外れていないと思料する．

余談として，“scientific notation” と云う用語がいつ世に出たかについても簡単に説明しておこう．オンライン版の OED によると，この用語は，1824 年には，既に出版物の中に現れてはいるが，その定義は現在のものとは異なっており，現在の定義での使用例は，かなり遅くて，1915 年とある[57]．それは下記のようなものであった．

> 対数に関する作業は，科学的な研究においてとても一般的な2.417×10^{-8},等の表記法を使用することで，始められる．これは，それ自体が便利であり，しかも対数の指標の取扱を明確化する上でも有益である．学生が，すべての数をこの「科学表記(**scientific notation**)」で表現可能であると考えるようになったならば，対数指標のための規則は必要ではない．
>
> 『新入生のための数学に関連する新機軸』[Griffin]（拙試訳）

[57] Duke University の Mark Huber は，この用語がコンピューターユーザーにより 1940 年代から 50 年代に創設されたのではないかと推測していたが，1915 年の使用例が発見されてしまったので，彼の説はお蔵入りとなった．

著者は，ここで紹介した1915年が，初出年であると確信している訳ではない．1862年の使用時には，特に名前は付けられていなかったにせよ，半世紀以上もその状態が続いていたとは考えにくいからである．

しかしながら，数学教育に情熱を燃やす数学者グリフィンが，高等数学教育の一環として "scientific notation" を導入しようとしたことは示唆的である．この用例が初出でなかったとしても，20 世紀初頭のペリー，ムーア，クラインの教育改革運動に触発された人物が，この用語を導入した可能性は十分あると考えられるからである．

ただ当時は，"scientific notation" は未だ確定した用語として市民権を得ていなかったことは注意しておく必要があろう．例えば，1902 年のエール大学の心理学研究所の紀要にある Phonetic notation（音声表記）と云う論文の中で，この用語が，現在の定義とは全く異なる意味で使われている[58].

6.3 クヌースの矢印表記とコンウェイの鎖状矢印表記

現在，指数表記で収まりきらない巨大数を表示する場合に使用される表記方法としては，クヌース(38)が 1976 年に発表[Knuth]した矢印表記が有名である．実際にはこの表記についての説明は，論文全体の 1/10 くらいしか割かれておらず，クヌース自身がこの表記方法をモーザー数(6.4 参照)やグラハム数(7.3 参照)のような具体的巨大数の表記問題に適用することを意識して考案したようには見受けられない[59]．彼の論文の冒頭には，次のような一節がある．これを見る限りは具体的な問題意識と云うよりも，いささか漠然とした巨大数表記に対する興味に由来するように思われる．

> この論文では、大きな量に対して，我々が，ここでどのくらい上手く対処することが出来るかを議論することにより，我々が、どのくらい遠くに来ているかの評価を試みる積りである．我々は確かに 3 と無限大との間のギャップを狭めてきたのだけれど、最近の結果は、我々が，実際のところ，案外とても遠くには行くことが出来ないことを示唆している．私の目的は，これらの発展に照らして，有限と無限の間の関係を探ることである．
>
> 『数学と計算機科学』[Knuth]（拙試訳）

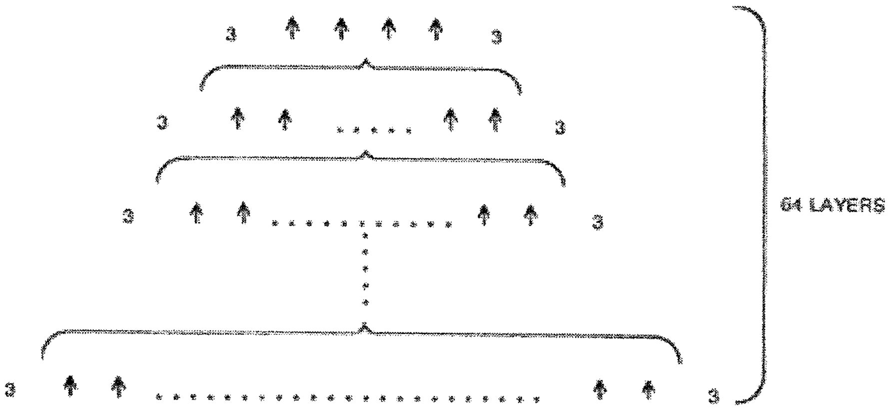
この表記方法を具体的な問題について見事に使ってみせたのは，マルチ

---

[58] Stud. Yale Psychol. Lab. 10 102　A **scientific notation** should be so constructed so as to be capable of providing a suitable transcription for any speech sound.

[59] 少なくとも，具体的な巨大数についての例示はされていない．

ン・ガードナー(63)で，1977 年の論説でグラハム数を次のように明示した．



Graham's upper bound for the solution to a Euclidean Ramsey problem

現在ならばより簡潔に，$G(x) = 3 \uparrow^{x} 3 = 3\underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{x}3$　を使って，$G^{64}(4)$と定義されるべきところであろうが，彼の論文を見れば分るように，クヌース自身は$3 \uparrow^{x} 3$と云う表記方法を定義していない．

【定義】クヌースの矢印表記

$$x \uparrow y = x^{y}$$
$$x \uparrow\uparrow y = x \uparrow (x \uparrow\uparrow (y-1))$$
$$x \uparrow\uparrow\uparrow y = x \uparrow\uparrow (x \uparrow\uparrow\uparrow (y-1))$$
$$x \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow y = x \uparrow\uparrow\uparrow (x \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow (y-1))$$

$$x \uparrow^{n} y = x(n\text{個の}\uparrow)y$$

クヌースの矢印表記の登場は，巨大数の表現方法として，指数表記からの決定的な離脱を意味した．もちろん，アッカーマン関数のように，既に指数表記では追いつかないものが現れ始めていたが，それらは多重関数表記で表わされることで済まされていた．これは指数表記 $f(x,y) = x^{y}$ を加法と乗法を使って定義するようなもので，大変まどろっこしい．

その点，クヌースの矢印表記は，簡潔に巨大数を表現出来る画期的なものであった．しかし，時代の流れは，加速度的に進んでおり，1995 年には，コンウェイ(58)によってクヌースを超える新しい表記方法が提案された．ここでは，コンウェイ自身の言葉を引用することで，彼の鎖状矢印表記の定義を与えておく．

ここで，私たち独自の「矢印の鎖」による表記法を使って，巨大な数を表してみましょう．その表記法では，$a \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow b$（矢印はc個）を

$$a \to b \to c$$

と書きます．

$$a \to b \to \cdots \to x \to y \to 1$$

は $a \to b \to \cdots \to x \to y$ のことを表すものとして，

$$a \ldots \to x \to y \to (z+1)$$

を次のように定義します．

$$\begin{array}{ll} a \ldots x & y = 1\text{のとき，} \\ a \ldots x \to (a \ldots x) \to z & y = 2\text{のとき，} \\ a \ldots x \to (a \ldots x \to (a \ldots x) \to z) \to z & y = 3\text{のとき，} \end{array}$$

以下，同様です．ただし，括弧は，その中の数が完全に評価された後で消去するものとします．

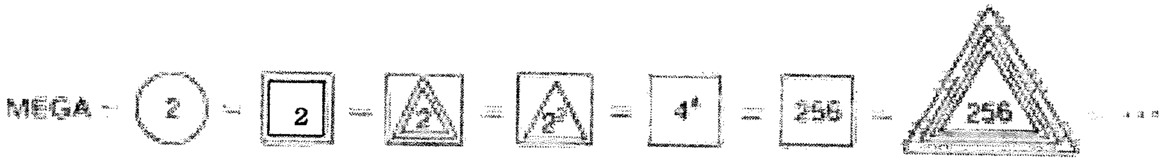
『数の本』[Conway]p.71

クヌースと違って，コンウェイは，既存の巨大数への応用を明確に意識しており，本論でも後述するアッカーマン数，スキューズ数，グラハム数と云った巨大数についても触れている．尚，クヌースの矢印記号の諸性質を少し掘り下げたものとして，Blakley と Borosh の研究論文[Blakley]がある．本論の附録 3 も参考になろう．

6.4 スタインハウス・モーザーの多角形表記

ポーランド出身の傑出した数学者スタインハウス(63)は，一般向けの数学啓蒙書，『数学スナップショット』[Steinhaus]，のなかで，次のような巨大数“Mega”の表示方法を紹介している．

非常に大きな数を書き下すことは簡単なことである．もし我々がn^n と書く代わりに $\triangle n$ と書き，「n個の三角形のなかのn」の代わりに$\boxed{n}$と書き，「n個の四角形のなかのn」の代わりにⓝと書くならばそのような巨大数は簡単に定義することが出来る．そこで数'Mega'=②は次のようになり，既に(30)は大きすぎていかなる物理的な意味付けを持たない．



30

そして我々が通常の数表記を諦めた理由も明らかである.（読者は⑩で与えられる'Megiston'を説明することを試みるのも良いであろう.）

『数学スナップショット』[Steinhaus][60]pp.28-29

カナダの数学者レオ・モーザーは，スタインハウスが，五角形となるべきところを円で表示して多角形表記を終結させてしまっていたものを，一般 n 角形表記にまで定義を自然に拡張した．そして Mega 角形の中に 2 が入って定義される巨大数（Moser 数と呼ばれる）を定義した．[61]

7 数学に現れた巨大数

数学の歴史を紐解くと，数学者が，なんらかの具体的な問題を解こうとしたとき，巨大数に巡り合ってしまうことがある．アルキメデスの巨大数などは，その最も有名な例であろう．ただ，彼の場合は，具体的な計算を行う前から，その答えが，相当な巨大数になることは判っていたが，中には，期せずして巨大数を発掘してしまう場合もある．本章では，このような数学者の発見した巨大数の例を集めてみた．

7.1 スキューズ数

数論の世界では，素数定理と云う美しい定理がある．その内容は極めてシンプルで，次のように簡潔に書き表すことが出来る．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{Li(x)}=1$$

但し，

[60] (30)の ' MEGA ' の隣の隣にある二重四角の中の数は原著では 4 であった．誤植であろう．また，編集の都合で原文の a をすべて訳文では n に換えた．
[61]『大きな数』[Davis]による．

$$\pi(x) = x\text{以下の素数の個数}$$

$$Li(x) = \int_2^x 1/(\log x)\,dx$$

nが数千万以下と云う小さい数のときは，この近似は過大評価となる．つまり，次のような不等式が成り立つ．

$$\pi(x) < Li(x)$$

リーマンは，有名なリーマン仮説を提唱した論文[62]の中で，この不等式が恒常的に成り立つような所見を述べている[63]．しかし，nがもっと大きくなっていくと，この近似は，過大と過少の間を無限回行ったり来たりすることが，J.E.リトルウッド(29)によって 1914 年に示された．これを受けてリトルウッドの弟子だったスキューズ(34)は，1933 年に，リーマン仮説を認めれば，n が

$$10^{10^{10^{34}}}$$

になる前に，最初の入れ替わり起こることを示した．更に，1955 年には，リーマン仮説抜きで，nが下記の数以下で入れ替わりが起こることを証明した．

$$10^{10^{10^{964}}}$$

$10^{10^{10^{34}}}$のことを第一スキューズ数，$10^{10^{10^{964}}}$を第二スキューズ数と言い，後に紹介するグラハム数が現れるまでは，その存在に自明でない証明を要する最大の数であると言われていた[64]．

---

62 『与えられた数より小さい素数の個数について』(ベルリン学士院月報 1895 年 11 月) Riemann は，素数定理を証明する積りでこの論文の研究を始めたと言われている．しかし，Riemann 予想の解決が想定外に困難であったため，この論文の続編は書かれないままとなった．現在の立場から言えば，Riemann は素数定理の攻略について戦略ミスをしたと思われる．つまり，素数定理を証明するだけなら Riemann 予想までは必要なく，ゼータ関数の自明でない零点の実部は決して 1 でないことを示せば十分だったからである．こちらは Riemann 予想よりも遥かに易しい．しかし，Riemann の視線の先は，素数定理を超えて遥か先に向かっており，現在も，最もチャレンジングな問題として，多くの数学者から注目されている．

63 「実際，Gauss と Goldschmidt によって$x = 3{,}000{,}000$までなされた，xより小さい素数の個数と$Li(x)$の比較によれば，この個数の方が最初の 100,000 番目まで常に$Li(x)$より小さいことが判明しているし，しかも$Li(x)$とこの個数の差は変動をともないながらxとともに次第に増大している．」(平井幹人　訳)[鹿野]p.28

64 Littlewood 自身のエッセイ集[Littlewood]の中の「大きな数」で Skewes 数は紹介され

2000年のベイズとハドソンの論文によると，スキューズの定理はかなり改良され，リーマン予想を仮定しなくても，1.397×10^{316}未満のあるxに対して，$\pi(x) > Li(x)$となることが判っている．従って，今となっては，スキューズ数には歴史的興味しか残っていない．

7.2 モンスター群

群Gは，一般的に，群G自身と単位元からなる単位群{1}を正規部分群として持つ．このような正規部分群を自明な正規部分群と呼び，自明な正規部分群の他には正規部分群を持たない群を単純群という．群Gの持つ群論的に重要な性質は，群Gの正規部分群NとG/Nに受け継がれるので，群Gの群論の問題は，Gよりも小さな群NとG/Nの対応する問題に帰着する．従って，すべての単純群が分類でき，その各々の単純群についての情報が詳らかになれば，すべての群の性質も本質的には解明されたことになる．このような指導原理により，100年を超える長い時間と多くの数学者の努力の結果，1981年に，有限単純群の分類が完成した．その中で，26個の散在型単純群で位数最大の群であるモンスターが，この名前はコンウェイ(36)が付けたのだが，1973年に，発見された．その大きさは，以下のように約$8\cdot 10^{53}$という巨大なものであった．

$$
\begin{aligned}
&2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71\\
&=808017424794512875886459904961710757005754368000000000\\
&\approx 8\cdot 10^{53}
\end{aligned}
$$

数学でその存在に自明でない証明を要する巨大数としては，既に紹介したスキューズ数や次に紹介するグラハム数の方が遥かに大きいが，これらは，求める数の存在する上限値であって，求める数そのものではない．従って，将来的には，証明の評価式が改善されて小さくなっていく可能性があり，実際，当初のものに比べてかなり小さくなっている．その点モンス

ている．また，Ian Stewartは『数学の魔法と宝箱』[Stewart]の中でSkewes数について説明した後，「1969年の（自分の）博士論文の中で，整数nによって決まるある性質をリー代数がすべて，nを5plexplexplex…plex(plexがn個)に置き換えたもっと都合のいいもう一つの性質をもっていることを証明した.」と書いている．ここから，Skewes数をあっさり超える巨大数が作れているのだが，あまり有名ではない．きっと，他にも，巨大数を使った命題や証明が，知られていないだけで，あちこちに潜んでいることだろう．

ターの位数は，未来永劫変わることはない．ただ，コンウェイ(59)は「既にもっとよい候補者によって追い抜かれているはず」と 1996 年時点で言っている．

7.3 ラムゼイ理論とグラハム数

現在，「ラムゼイ理論」と呼ばれる離散数学の一分野がある．これは，「集合 X が十分大きければ，ある種の等質性をもった大きな部分集合 Y が生起する（ラムゼイ性）」と云う現象についての研究を指すものとされている．例えば，「n個の引き出しに$n+1$個のボールをしまいこめば，少なくとも一つの引き出しには 2 個以上のボールが入っている（部屋割り論法）」や「6 人以上の人がパーティーに参加すると，その内お互いが全て知り合いであるメンバーが 3 人以上いるか，さもなくばお互いが全く知り合いでないメンバーが 3 人以上いるかのいずれかが成立つ（パーティー問題）[65]」なども簡単なラムゼイ性の例となっている．

通説では，1928 年，ラムゼイ(25)が書いた形式論理学の 8 ページの論文が，彼の死後 1930 年に発表されたものなのだが，この理論の嚆矢であるとされている．但し，多くの独創的理論と同様，この理論にもいくつかの先駆的研究があった．アレキサンダー・ソイファは，そのようなものの例として，1892 年のヒルベルトの立体補題，1916 年のシューアの定理，1927 年のボーデット・シューア・ファンデルヴェルデンの定理及び 1928 年の一般化されたシューアの定理を挙げている[Soifer]．[66]

ラムゼイが歴史的論文を書いてから 40 年後の 1968 年に，ロナルド・グラハム(33)は，エルデスとハジナルによって提唱されたラムゼイ理論の次のような未解決問題の，上手い解法を発見した[67]．

> **(エルデスとハジナルの問題)**　6 頂点完全グラフK_6を部分グラフとして含まないグラフ G で単三内在のものはあるか．

---

[65] この問題自身の証明は簡単であるが，「必ず 4 人以上がお互いに知り合いであるか，5 人以上がお互いに知らない者どうしであるメンバーがいるためには何人以上をパーティーに呼べば良いか」と云う問題で「25 人」と答えるためには膨大な計算が必要で，110 台のコンピュータを同時作動させて，やっとのことで答えに辿り着いた．ここの 4 人を 5 人にするだけでもう正確な答えは判っていないし，この人数をもう少し増やすだけで，コンピュータによる解決が，絶望的になるほど計算量が膨れ上がってしまう．

[66] 個人的には，Dirichlet の鳩ノ巣論法も含めたいところである．

[67] 実際には，J.H.van Lint によって最初に解決されたのだが，それは出版されていない．

更に，1970 年，彼は，次の定理に関連して，どの程度 n が大きければこの定理が確実に成り立つか，と云う解の上限値を考察することにより，現在，グラハム数と呼ばれる巨大数を導き出した．

（グラハムの定理） n 次元超立方体の2^n個の頂点のそれぞれを互いに全て線分で結ぶ．次に２つの色を用いて連結した線分をいずれかの色に塗り分ける．

このとき n が十分大きければ，どんな塗り方をしても，ある平面とその平面上にある 4 点が存在して，それら 4 点間を結ぶ 6 本全ての線分が同一の色である．

実際には，グラハムは，論文ではこの巨大数を発表しておらず，1977 年，マルチン・ガードナーが，「グラハム数」と云う名前を付してサイエンティフィック・アメリカン誌に掲載[Gardner]したことで一挙に有名になった．当時としては，「数学的証明のなかで使われたことのある最大の数」であるとみなされ，ギネスにも認定されていた．[68] 既に述べた通り，ガードナーは，クヌースの矢印記号を使ってこの巨大数を表現した．

グラハム自身は，ロートシルトと共著で書いた 1971 年の論文[Graham]で，現在小グラハム数と呼ばれる，より小さな，つまりより精度の高い解の上限値を与えている．この時点では，クヌースの便利な矢印記号は，未だ世に出ていなかったので，グラハムは，次のような回りくどい表現にせざるを得なかった．

$$
\begin{aligned}
F(1,n) &= 2^n, F(m,2) = 4, \qquad m \geqq 1, n \geqq 2,\\
F(m,n) &= F(m-1, F(m,n-1)), m \geqq 2, n \geqq 3.\\
\mathrm{N}^* &\leqq F(F(F(F(F(F(F(12,3),3),3),3),3),3),3).
\end{aligned}
$$

一方，クヌースの矢印記号を使えば，下記のように簡潔に書ける．

$$G(x) = 2 \uparrow^x 3 \quad \text{と置いたとき} \quad G^7(12)$$

また，コンウェイは，1996 年に，次のような不等式評価を与えている．

$$3 \to 3 \to 64 \to 2 < \ G^7(12)\ < 3 \to 3 \to 65 \to 2$$

---

[68] 確かに，1980 年発行の"Guinness book of World Records"には記録されているが，このような記録はしばしば塗り替えられるので，最新の情報にはこだわっていないことを先に明言しておきたい．実際，Graham 数よりも大きな，数学的証明のなかで使用された数は，既に，現れているらしい．個人的には，Graham 数や Skewes 数のような評価式の上限に現れるような数ではなく，位数最大の単純群であるモンスターのように，未来永劫変わらない数で競う方が意味深いと思う．7.2 で触れた Conway の予想が当たっているかどうかについては，著者は知らない．

7.4　定理の名前に現れた巨大数

これまでは，問題の答えが巨大数である例を取り上げてきたが，中には，定理の名前に巨大数を見出すことのできると云う面白い例もある．

大数の法則(law of large numbers)の大数(large numbers)は，巨大数(large numbers)と元の名前が同じであり，慣習を無視すれば，「巨大数の法則」と訳せないこともない．

しかしながら，この定理が示唆する大数は，通常の解析学の$\varepsilon - n$論法における n と本質的に変わりはなく，本来は殊更「巨大数」性を強調する必要はない．

この定理は，収束のスピードが，nの大きさによって評価されることが一般社会にまで認識されている珍しい例である．ギャンブルや保険といった人間臭い営みの中で根付いた概念だからであろう．

大数の法則は，経験則として古くから知られていたが，証明が与えられたのはヤコブ・ベルヌイの『推論術(Ars Conjectandi)』(1713) が初めてである，と言われている．但し，そこでは「大数の法則」とは呼ばれておらず，この印象的な命名は，悪名高い『確率計算の一般規則に先行する，刑事及び民事事件での判決における確率』(1837)においてポアソン(56)が書いた"la loi des grands nombres"に由来するとされている．

面白いことに，ポアソン分布に由来する「少数の法則」は，ポアソン自身が名付けたものではなく，統計学者 Ladislaus Bortkiewicz が 1898 年に書いた本の題名『少数の法則(Das Gesetz der kleinen Zahlen) 』が，初出らしい．

7.5　巨大数と意識されない巨大数

本章の最後に，スキューズ数やグラハム数のように具体的に問題に対する解として顕現するのではないために，それ自身は極めて巨大な数であるにもかかわらず，巨大数として扱われることの少ない二つの例を挙げておこう．

・ゲーデル数
・チューリングの記述数

この二つの数の凄味は，プログラムが見慣れた風景となり，情報の自然数によるコード化を当然のこととして受け入れられている現在では，逆に

判りにくいかもしれない．例えばMicrosoftのWord2003の実行ファイルWinWord.exeのサイズは，12,047,560バイトなので，10進数に換算すると$10^{29,000,000}$くらいの数に相当する．無量大数よりもエディントン数よりもgoogolよりも遥かに大きい．しかし，現在の我々はプログラムのサイズとして見ている限り，この巨大数をそれほど巨大であるとは感じられないであろう．ゲーデル数もチューリングの記述数も，端折っていえばこのようにソフトウェアのサイズを数で表現したようなものである．

【ゲーデル数】　ゲーデル数が，不完全性定理の発表された1931年の論文[69]の中に現れたことは，人口に膾炙する歴史的事実である．ゲーデル(25)は，この論文において，下表のように定記号や型nの変項を素数冪に対応させることで，原始記号の有限列　$a = a_1 a_2 \ldots a_k$　から自然数への巧妙な写像$\Phi(a)$と定義した．

ここで，a_iを原始記号とすれば，aは原始記号または原始記号の有限列となる．上記の表に従って各a_iに自然数n_iを対応させ，大きさの順に並べた素数列p_iの指数としてこのn_iを与えた${p_i}^{n_i}$を掛け合わせた自然数を$\Phi(a)$と書く．すなわち，次のように書ける．

$$\Phi(a) = 2^{n_1} \times 3^{n_2} \times \ldots \times {p_k}^{n_k}$$

定記号	説明	対応自然数（奇数）	型nの変項（$n \geq 1$）	対応自然数（13超の素数）^{n}
0	ゼロ	1	x_n	17^n
f	後者関数	3	y_n	19^n
$\sim$	否定	5	z_n	23^n
$\vee$	または	7	・・・・・・・・	・・・・・
Π	すべての	9		
(	左括弧	11		
)	右括弧	13		

今日では，この$\Phi(a)$をaのゲーデル数と呼ぶ．ゲーデル自身は，ゲーデル数が論理式と１：１に対応する自然数であることは注意していても，それがかなり巨大な数になることには全く触れていない．

---

69 「プリンキピア・マテマティカ」及びその関連体系における形式的に決定不可能な命題について

【チューリングの記述数】　チューリング(24)が記述数を定義するのは，有名なチューリングマシンを世に問うた論文「計算可能数とその決定問題への応用」（1936年）においてであった．チューリングマシンの定義や計算可能性との関連は，現在では，情報学科で必須テーマとして扱われているので，ここでは詳しく論じないが，記述数の定義に関連するところは，原論文に沿って紹介しておく．

チューリングは，計算可能数を「小数表現が有限の手段で計算できる実数である」と冒頭で簡単な定義を与えている．ここで現れる「有限の手段」の正当性の根拠として「人間の記憶は必然的に有限である」と云う事実に根拠を見出せると明言しており，彼がチューリングマシンを人間の計算者をモデルとしていることが窺われる．チューリングマシンは，人間の脳にあたる制御部と目と手に対応するヘッダー，計算用紙，記録用紙にあたるテープからなる．マシンの「制御部」の記憶内容は現在では「状態」と名付けられているのだが，彼の論文では，「実数の計算をする人間を，『m 配置』と呼ぶ有限個の状態$q_1, q_2, \dots, q_R$だけをとれる機械になぞらえることができる.」と「m 配置」（m は machine を表す）なる用語を使っている．彼が計算者の筆算における心の状態を機械の制御部の内部状態で模写しようとしたことが，見て取れる．このような模写は，更に続き「この機械には（計算用紙に相当する）「テープ」が供給される.」

チューリングは，チューリングマシンで計算可能な数を計算させるだけではなく，チューリングマシンそのものを記述数と云う自然数によって表現してみせた．チューリング自身が論文の中で取り上げた例として，「数 1/3 を計算するチューリングマシン」がある．彼はそれを愚直に計算し，次のような巨大数を算出してみせる．

31332531173113353111731113322531111731111335317

ここでは，数 1/3 を計算するチューリングマシンだったので，上記のような比較的小さな，と言っても 47 桁もあるが，記述数で済んでいるが，これが，πを計算するチューリングマシンであれば，記述数の桁数が，もっと跳ね上がることは，容易に推察出来る[70]．余談ではあるが，π計算の記述数が，どれほど巨大であったとしても，それは有限であり，πの無限の

[70] チューリングのオリジナルとは異なる定義なので単純な比較は出来ないが，R.Penrose は万能チューリングマシンの記述数を計算して，それが 1653 桁であることを示して見せた．

小数展開の情報が，その有限の数の中に完全に組み込まれていると云う認識は深淵である．巨大数による無限表現とも言い得るであろう．更に，チューリングは，このようにしてチューリングマシンで計算出来る数を計算可能数として定義した後，それらの記述数が可算であるが故に，計算可能数は可算であり，よって，殆どの実数は計算不可能であることを証明した．

8 増加関数の視点による巨大数

ここまでは，巨大数を静的(static)なものとして扱ってきたが，その発展の歴史を俯瞰した目で見るならば，巨大数は，新しい数表記が現れたときに，劇的に大きくなってきたことが分るであろう．最初の革命は，アルキメデスによる指数の発明であった．実際のところ，現在でも，指数表記があれば，大抵の数学の問題では事足りているように見える．後で紹介するアッカーマン関数やモーザー数，グラハム数は，その珍しい例外に属し，指数表記では収まりきらなかった．これらの巨大数を適切に表現するために，クヌースの矢印表記，更にコンウェイのチェーン表記などが発案[71]され，そのたびに表現出来る巨大数は爆発的に膨らんでいった．このような歴史的変遷を瞥見すると，その背後にあるのは，より急激に増加する関数をいかに構成するか，と云う dynamic な問題意識であるように見えるかもしれないが，それは，現代を生きる我々の視点である．実際の増加関数の歴史は，どのような問題意識の上に則って進んで行ったのであろうか．

関数概念が精密化するのは，19 世紀における，概念と証明の厳密化運動の一環であるが，ディリクレの与えた超越的な対応関係による定式化とは別に，再帰的な定義付けもこの時代に現れた．ロッド・アダムスの『再帰関数と計算可能性の初期の歴史：ゲーデルからチューリング』[Adams] によると，1861 年に，グラスマン(52)により，1881 年には，パース(72) により，自然数の加法や乗法を定義する際に，再帰的定義が使われた．しかし，二人の先駆的な業績は，彼等の社会的地位や地理的環境からか，殆ど世間に注目されることはなかった．今日，再帰関数の鼻祖は，デデキントであり，1888 年の歴史的名著「数とは何か，そして何であるべきか」において，加法や乗法，指数を厳密に定義する必要に迫られ，これらを完

[71] Knuth が，これらの問題を意識して矢印記号を発案したと云う明白な証拠はないが，巨大な数を表現するために考え出したことは明記されている．一方，Conway は，少なくとも Ackermann 関数については，それも意識した上でチェーン表記を考えたことが窺える．

全帰納法により定義したことが，再帰関数の始まりとするのが通説[72]である．彼は，このアイデアの自然な拡張として，帰納的に定義され得る原始帰納関数を定義した．しかし，本格的な研究は，1923 年のスコーレム(36)を待つことになる．

さて，巨大数史の視点から原始帰納関数を論じるとき，1925 年に発表されたヒルベルト(63)の論文「無限について」が，少なくとも二つの意味で重要な役割を果たしている．一つは，加法，乗法，冪を拡張するn階超冪指数関数[73]$\varphi_n(a,b)$を，現在の用語で言うところのハイパーn演算子$\mathrm{H}_n(a,b)$を意味するのだが，a,bを変数とする原始帰納関数として定義し，その定義出来るための条件まで言及していることである．今一つは，「$\varphi_n(a,b)$はa,bを変数とすれば原始帰納関数であるが，nを変数とした場合は，原始帰納関数とはなり得ない」と云う予想を提起したことであろう．この予想が，非原始帰納関数であるアッカーマン関数を定義する呼び水となったのである．これについては，次節で詳しく論じることとする．ここでは，この演算子の現在の定義を明示した後で，ヒルベルトの論文の該当部分を紹介し，そこでヒルベルトが注意している内容が，原始帰納関数の定義にどのように対応するかを見ることにする[74]．

【現在の定義】

$$\mathrm{H}_n(a,b)=\begin{cases} a+1 & (n=0) \\ a & (n=1, b=0) \\ 0 & (n=2, b=0) \\ 1 & (n\geq 3, b=0) \\ \mathrm{H}_{n-1}\big(a,\mathrm{H}_n(a,b-1)\big) & (\text{other}) \end{cases}$$

上記のように，帰納的に定義された$\mathrm{H}_n(a,b)$は，下記のような演算を定義していることが，容易に確かめられる．

$\mathrm{H}_0(a,b)=a+1$　後者関数(successor)

$\mathrm{H}_1(a,b)=a+b$　加法関数(addition)

$\mathrm{H}_2(a,b)=a\cdot b$　乗法関数(multiplication)

$\mathrm{H}_3(a,b)=a^b=a\uparrow b$　冪指数関数(exponentation)

---

72 例えば，"From Frege to Godel" [Heijenoort]では，そのように扱われている．

73 これに対応する定番の日本語訳を著者は知らないが，このくらいの訳語が適当と考えた．

74 原始帰納関数自体の歴史についてならば，Gödel が不完全性定理を証明する際に，形式的体系の算術化を目的として導入したことに触れない訳にはいかないが，本論の主題から外れるので割愛する．

$$
\left.\begin{aligned}
\mathrm{H}_4(a,b) &= a \uparrow^2 b \\
\mathrm{H}_5(a,b) &= a \uparrow^3 b \\
\mathrm{H}_6(a,b) &= a \uparrow^4 b
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&\text{tetration}^{75} \\
&\text{pentation} \\
&\text{hexation}
\end{aligned}
$$

・・・・・・・・・・

$$\mathrm{H}_n(a,b) = a \uparrow^{n-2} b \qquad (n \geq 3)$$

【ヒルベルトの定義】

関数$a+b$について考察してみよう;この関数からn重の繰り返しを行うことで次の等式を得る.

$$a+a+\cdots+a = a\cdot n.$$

同様にして,$a\cdot b$から次式につながり,

$$a\cdot a\cdot \ldots \cdot a = a^n,$$

そして,更に,a^bから次式へとつながる.

$$a^{(a^a)}, a^{\left(a^{(a^a)}\right)}, \ldots$$

$\varphi_4(a,b)$は次の数列のb番目である.

$$a, a^a, a^{(a^a)}, a^{\left(a^{(a^a)}\right)}, \ldots$$

これと対応する方法で,我々は$\varphi_5(a,b)$, $\varphi_6(a,b)$,等に達する.

確かに,代入と帰納によって変数nに対して$\varphi_n(a,b)$をここで定義することが出来たのだが,これらの帰納は通常の逐次帰納[76]ではない;むしろ,我々は多様な同時再帰法に導かれるであろう.それは,即ち,異なる変数上の再帰法であり,その解は通常の逐次帰納再帰法に帰着する.それは関数変数の概念が使える場合のみ可能である;関数$\varphi_a(a,a)$は数論的変数aの関数の例であり,<u>もし我々が数論的変数だけを認めたならば,それは代入と通常の逐次帰納法だけでは定義され得ない[77].</u> どのように我々が$\varphi_n(a,b)$を関数変数を使って定義するかは下記の公式によって示されている:

$\iota(f,a,1) = a$

$\iota(f,a,n+1) = f\big(a,\iota(f,a,n)\big);$

$\varphi_1(a,b) = a+b,$

$\varphi_{n+1}(a,b) = \iota(\varphi_n,a,b).$

ここでιは特別な 3 変数の関数を表し,第 1 変数は,それ自体が,二つの通常の数論的変数の関数である.

『無限について』(1925) [Hilbert] (拙試訳)

現在の定義が,ヒルベルトのオリジナルの定義に比べて簡潔で,しかも explicit な表現が与えられているのは,クヌースの矢印表記に依るところが大きいことを留意しておく必要がある.また,ヒルベルトが強調してい

75 tetration, pentation, hexation は Goodstein(35)の命名による.[Goodstein: 1947]p.129

76 原始帰納法のことを意味すると考えられる.その定義は次頁参照.

77 この主張は,後節で紹介する 1928 年の Ackermann の論文で,証明されることになる.

る代入と帰納法によって定義される関数とは，現在の言葉で言えば，原始帰納関数[78]であろう．

8.1 アッカーマン関数と多重帰納関数

アルキメデスが編み出した指数概念では表現しきれない具体的な有限数が現れたのは，管見の限りではあるが，アッカーマン関数が，初めてではなかろうか．ここでは，アッカーマンが，どのような問題意識からこのような巨大数を生成する急激な増加関数を考えたのかについて考察する．

前節で触れた1925年の論文で，ヒルベルトは，カントールの連続体問題を解こうとしていた．結局は，この目的を果たすことは出来なかったが，それに関連して，加法，乗法，冪，超冪，…を原始帰納関数$\varphi_n(a,b)$として構成しながらも，nを変数とした場合は，原始帰納関数とはなり得ないであろうことを証明抜きで述べている．（ヒルベルト予想）

この予想に対し，ヒルベルトの弟子であるアッカーマン(32)は，1928年に，現在，アッカーマン関数と呼ばれる関数を定義することで，肯定的に解決した．アッカーマンの証明の骨子は，ヒルベルトが与えた$\varphi_n(a,b)$を少し変形して，次のような$\phi(a,b,n)$を定義し[79]，$\phi(a,a,a)$がいかなる原始帰納関数よりも急激に増加すること[80]を示すことで，$\phi(a,b,n)$は原始帰納関数ではなく，従って，$\varphi_n(a,b)$もnの関数として見れば原始帰納関数ではない，ことを示すことであった．

---

78 【原始帰納関数の現在の定義】
原始帰納関数とは，定義域と値域が非負整数である非負整数個の引数をとる関数で，引数に対し，
1. ゼロ関数: $f(x_1,\dots,x_n) = 0$
2. 後者関数: $f(x) = x + 1$
3. 射影関数: 複数の引数を持つ関数から，i 番目の引数を返す関数
$f(x_1,\dots,x_n) = x_i$
4. 合成作用素: f と g の合成関数 h
$h(x_1,\dots,x_n) = f(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_k(x_1,\dots,x_n))$
5. 原始帰納作用素: f と g の原始帰納関数 h
$h(0,x_1,\dots,x_k) = f(x_1,\dots,x_k)$;
$h(n+1,x_1,\dots,x_k) = g(h(n,x_1,\dots,x_k),n,x_1,\dots,x_k)$
以上の3つの関数と2つの作用素（操作）を有限回適用した関数である．

79 現在の Ackermann 関数と$\phi(a,b,n)$の関係は
$A(x,y) = \phi(2,y+3,x) - 3 \quad for\, x \geq 3$ である．

80 任意な原始帰納関数に対し，十分大きな定数 c を取れば，その先ではその原始帰納関数よりも大きくなる．

【オリジナルのアッカーマン関数】

$\phi(a,b,0) = a + b$
$\phi(a,0,1) = 0$
$\phi(a,0,2) = 1$
$\phi(a,0,n) = a \quad n \geq 3$
$\phi(a,b+1,n+1) = \phi(a,\phi(a,b,n),n)$

現在の標準的なアッカーマン関数は，1935 年に，ハンガリー出身の女流数学者ローザ・ペータ(30)によって定義された下記のような２変数関数である．彼女はまた，その論文のなかでアッカーマン関数の上記の特異性の本質が，対角線論法に由来することも明らかにした．

$A(0,y) = y + 1$
$A(x + 1,0) = A(x,1)$
$A(x + 1,y + 1) = A(x,A(x + 1,y))$

竹内外史氏(46)は，1972 年に，上述のヒルベルト予想に関連させて，下記の問題を学習上の問題意識喚起のために紹介している．これは，巨大数の創生が，関数階層の考えに基づいて，急激に増加する関数の構成に依存すると云う現代の巨大数論の基本的な問題意識に繋がっている．

原始帰納関数によっていくらでも能率よく大きくなる関数が作れるか？[竹内]

ちなみに，アッカーマン関数で定義される巨大数を少し紹介しておこう．3 の指数で表わされる 1 番目から 3 番目までのアッカーマン関数値 A(1,3)=5,A(2,3)=9,A(3,3)=61 は緩やかな増加であるが，4 番目のアッカーマン数 A(4,3)は，$2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}$ −3であり，5 番目のアッカーマン数 A(5,3)に至っては，巨大すぎて，たとえその数字を A(4,3)のように指数表記を使って略記し、かつ宇宙サイズの紙上に書き記そうとしたとしても書ききれない．

さて，1936 年，R.ペーター(31)は，多重帰納関数を定義することで，アッカーマン関数よりも「能率よく大きくなる関数」を系統的に見つけることに成功した[Péter:1936]．彼女の定義によれば，原始帰納関数は，１重帰納関数であり，アッカーマン関数は，２重帰納関数に位置付けられる．ここでは，彼女の主著『再帰関数』[Péter:1967]より，多重帰納関数を定義している箇所を紹介しておく．

単純入れ子型の再帰関数を簡略化するのに用いられる手法で，初期値を正規化することに

よって，一般 k 重入れ子型再帰関数は，次のような「正規型」に導かれる：

$$\varphi(n_1,\cdots,n_k)=0\ ,\ n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_k=0 \text{ のとき}$$
$$\varphi(n_1+1,\cdots,n_k+1)=\beta(n_1,\cdots,n_k,\varphi_1,\cdots,\varphi_k)\ ,$$

ここで $i=1,2,\cdots,k$ に対して，

$$\varphi_i=\varphi\Big(n_1+1,\cdots,n_{i-1}+1,n_i,\gamma_1^{(i)}(n_1,\cdots,n_k,\varphi(n_1+1,\cdots,n_{k-1}+1,n_k,)),$$
$$\cdots,\gamma_{k-i}^{(i)}(n_1,\cdots,n_k,\varphi(n_1+1,\cdots,n_{k-1}+1,n_k))\Big)$$

ここでの関数 β と $\gamma_j^{(i)}$ は$i=1,2,\cdots,k-1;j=1,2,\cdots,k-i$ に対し，原始帰納と代入によって最初の定義で使われていた関数から構築され得る；それらは**既知関数での原始帰納**であると呼ばれる．

この構成で唯一の入れ子が発生する．

k >1 に対して高々k変数の関数がk未満の変数上の再帰によって定義されるならば，それはまた正規型のk重再帰と代入によっても定義され得る．もし，例えば，次の繰り返しが関数$\varphi(n_1)$を生じさせるとするならば

$$\varphi(0)=0,$$
$$\varphi(n_1+1)=\beta(\varphi(n_1))$$

次式を設定することにより

$$\beta(n_1,\cdots,n_k,a_1,\cdots,a_k)=\beta(a_1),$$

$i=1,2,\cdots,k-1;j=1,2,\cdots,k-i$ に対し，$\gamma_j^{(i)}(n_1,\cdots,n_k,a_1)=n_1$

我々はk重再帰関数の正規型の特別な場合を次のように書き下すことが出来る．

$$n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_k=0 \quad \text{の場合}\quad \varphi(n_1,\cdots,n_k)=0$$
$$\varphi(n_1+1,\cdots,n_k+1)=\beta(\varphi(n_1,\cdots,n_k))$$

それ故，$\varphi(n_1)$は次式の代入によって生じる．

$$\varphi(n_1)=\varphi(n_1,\cdots,n_k)$$

と言うのは，$n_1=0$の場合に対しこれは確かに正しくて，その定義からこの性質がn_1からn_1+1に移ることが容易に示されるからである．

0 とn_1+1から有限回の代入と多重再帰によって構築され得る関数は多重再帰関数と言う；高々k重再帰がその構築に採択されている場合，それらの関数はk-再帰であると言われる．（これにより，原始帰納的関数は 1-再帰であるとも言うことが出来る）上記の命題（§14 でその証明のために戻るであろう）はまた以下の方法で定式化され得る：すべてのk-再帰関数は原始帰納関数から代入とk–重再帰により正規型に構築され得る．しかしながら，すべての原始帰納的関数を一つの基底として捉える必要はまったくない．なぜなら§17 の No.17 によれば，すべての原始帰納関数は関数$n+1$，平方数剰余(n)と$a+n$から代入と一変数関数の（0 点における）繰り返しによって構築され得るからである；しかしながら，最後の種類の定義は，すべてのkに対し，正規型のk重再帰と代入に変えられる．**そういうわけで，すべてのk-再帰関数は初期関数$n+1$，平方数剰余(n)[81]と$a+n$から，有限回の代入と正規型でのk重再帰によって得ることができる．**

『再帰関数：§10. 7』[Péter:1967](拙試訳)

---

81 元々の定義は$quadres(n)=n\dot{-}(\sqrt{n})^2$で，$n$と$n$に最も近い平方数との差を意味する．

このようにして，k重帰納関数が定義され，アッカーマン関数を超える急増加関数列もまた，$k \geq 3$なるk重帰納関数によって定義され得ることが明らかになった．しからば，いかなる計算可能な関数も，適当なkに対するk重帰納関数として定義出来るのであろうか．実は，どんなk重帰納関数をも凌駕する急増加な計算可能関数が，存在することが証明されている．しかも，それは，抽象的な存在証明ではなく，次節で扱うグッドステイン数列やヒドラゲームにより具体的に与えられている．

8.2 グッドステイン数列とヒドラゲーム

1944 年，イギリスの数学者グッドステイン(32)は，現在，グッドステイン数列と呼ばれる不思議な数列を提唱した[82]．この数列は，任意の自然数から出発して，順に生成されていくのもので，途中で猛烈な勢いで増加することがあるが，それでも必ず有限番目には 0 となることが，集合論で有名な「順序数定理：順序数の減少列は必ず（有限回で）終結する」を巧妙に使うことで証明された．40 年近く後の 1982 年になって，カービーとパリスは，この数列の「有限番目には 0 となる」性質が，ペアノ算術では肯定も否定も証明出来ないことを示した．それ故，現在の基礎論の教科書では，この命題は，ゲーデルの第一不完全性定理の自然な例として特筆されている．しかし，巨大数論の立場からは，与えられた自然数nから生成されたグッドステイン数列が 0 になるまでの，グッドステイン関数$G(n)$[83]と呼ばれる，項の数の増加具合を評価する方に興味がある．ただ，その前に，グッドステインは，何を意図してこの論文を書いたのかを知る必要があろう．彼が，巨大数を生成する急増加関数を作りたかったはずもなく，不完全性定理の例を紡ぎだすことを目論んでいたとも思えないからだ．

---

[82] 【定義】Goodstein 数列（オリジナルの表記方法は複雑なので簡略な表現に換えた）
Step1: 自然数の対$(n, 2)$に対し，$G_1(n) = n$とおき，nを 2 進数で表示し，その指数部も 2 進数で表示し，更に指数部の指数部も 2 進数で表示し，以下同様に繰り返し，すべての指数部が 2 進数で表示されるようにする．
Step2: その基底 2 をすべて 2+1 にする．
Step3: 上記の数から 1 を引いたものをn'とし，$(n', 2+1)$を確定させ，$G_2(n) = n'$とおく．
以下，上記のプロセスを繰り返すことによって得られる自然数列，$G_1(n), G_2(n), G_3(n) \ldots$を Goodstein 数列と呼ぶ．

[83] 【定義】Goodstein 関数
「順序数の下降列は有限列である」ことにより，ある自然数mに対して，$G_m(n) = 0$でなければならないことが示され，$G(n) = m$で定義される関数を Goodstein 関数と呼ぶ．

そもそも，グッドステインの論文の題名は「制限された順序数定理」であり，彼が「順序数定理」と呼んでいる命題は，前述の「順序数の減少列は必ず（有限回で）終結する」である．そして，「制限された」とは，対象とする順序数を$\alpha < \varepsilon_0$に制限することを意味する．題名の意義を知った上で，序文を瞥見すると，彼の論文の趣旨は明確になる．

順序数の減少列は必ず（有限回で）終結する，と云う命題には，新たな，そしておそらく予期されなかった重要性が付与されたことがある．それはゲンツェンによる「自然数論」の無矛盾性の証明の中で担う役割である．ゲーデルが，証明も反証も出来ない命題を構成したこと，及び無矛盾性の証明が不可能であることを確立したことにより，ある種の形式的システムの枠組みの中で，無矛盾性の証明は，その公理と形式的システムのプロセスを超越する場合にだけで発見され得ることが示された．減少過程の或る数列が，ε（$\varepsilon = \omega^{\varepsilon}$を満たす最初の順序数）未満の順序数による枚挙で，有限であることを証明するのに，ゲンツェンは**超限帰納法**を利用することによって成功した．仮に，**制限された順序数定理**，つまりε未満の降順の順序数はゲンツェンの「自然数論」の中で有限であること，を証明することが出来たとするならば，その数システムは矛盾していると結論付けることが可能である．[84]ゲンツェンは，彼の論文の中で，彼が必要とする超限帰納法の定理を，直感的な論拠によって，証明している．ヒルベルトとベルナイスによって与えられた数論の原則に，ε未満の順序数に対しては，超限帰納法へと帰着させる方法もあるし，アッカーマンによる同様の方法もある．超限帰納法を使ったこれらの証明は，いずれも**有限の立場**ではない．

制限された順序数定理は，これまで受け入れられていた有限の立場でのプロセスの領域からの最小限の逸脱であることが，示唆されているので，この定理が，一般に有限の立場の要件をどの程度まで満たしているかを調べることが，非常に重要となる．この目的のためには，無限のクラスについてのカントール理論をまったくと前提しなくて，実際には，ゲンツェンの論文に記載されている，順序数記号の説明を与える必要がある．しかし，我々の目的にとっては，ゲンツェンとは異なる順序数記号の構築を提示する方が，より簡便である．

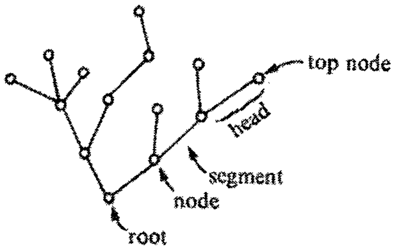
『制限された順序数定理』[Goodstein: 1947]（拙試訳）

前述のカービーとパリスは，この論文 [Kirby]のなかで「ヒドラとヘラクレスの戦い」と云う興味深い数学ゲームを提示し，その中でのヒドラの頭の数の変化が，グッドステイン数列と本質に酷似していることを示した．

一つの**ヒドラ**は有限木であり，それは真直ぐな線分(segment)とそれぞれの線分の連結部分である二つの節(node)からなる有限集合で，すべての節は一意的な線分の道によって**根(root)**と呼ばれる一つの固定された節に連結されている，とみなせるかもしれない．例え

[84] Gentzen の無矛盾性の証明は Gödel の不完全性定理に対するぎりぎりのせめぎ合いであることが，『コンピュータは数学者になれるか』[照井]pp.184-188 で熱く語られている．

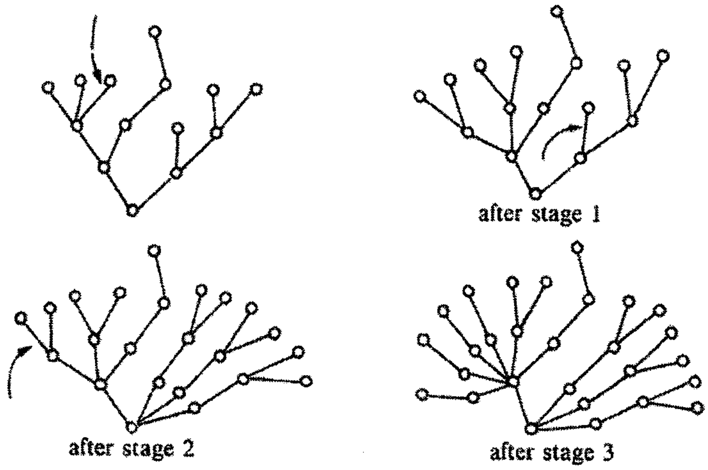
ば：



ヒドラの最上位の節とは，唯一の線分の節であり，根ではない.ヒドラの頭(head)とは，最上端節(top node)とそれにくっ付いた線分のことである．

ヘラクレスと与えられたヒドラとの間で繰り広げられる戦いは，以下のように進展する：第$n(n \geq 1)$段階(stage)において，ヘラクレスはヒドラから一つの頭を切り離す．ヒドラはその後，次のようにしてn個の「新しい頭」を生やしてくる：丁度今，切り落とされた頭にくっ付いていた節から，一つの線分を超えて根に向かって次の節に到達するまで横断する．この節から，（首切り後の）ヒドラの身体の一部のn個の複製が，生えてくる．その一部とは，丁度今横断したばかりの線分の"上方にある"部分で，すなわち，根に到達するために，この線分が横断されなければならない処から（上部）のそれらの節と線分である．もし切り落とされた頭が，その節たちの一つとして根を有していたならば，新しい頭が生えることはない．

したがって，戦いは例えばこのように開始するかもしれない，それぞれの段階において，ヘラクレスが切り落すと決めた頭に矢印でマークしたと仮定する：



もしある有限番目の段階のあと，ヒドラがその根以外は何も残っていないならば，ヘラクレスの勝利である．戦略は，任意な戦いの各段階でヘラクレスがどの頭を切り落とすかを決定する関数である．適度に高速必勝法（すなわち，ヘラクレスが任意なヒドラに対して勝つことを保証する戦略）を見つけるのは難しいことではない．もっと驚くべきことは，（戦略によらず）ヘラクレスは必ず勝利することである．

『ペアノ算術に対する到達可能な[85]独立結果』[Kirby&Paris]（拙試訳）

[85] 標準的な訳語が見つからなかったので，ACCESSIBLEを「到達可能」と訳しておいた

与えられたヒドラの木表現を有する順序数をαとし，ヘラクレスがヒドラ$\alpha+n$に何回の攻撃で勝つか，その最小値を関数$H_\alpha(n)$で表わす．

$G(n)$と$H_\alpha(n)$は，後述のハーディー階層$h_{\varepsilon_0}(n)$とほぼ同じ階層にあることが示される．つまり，任意な順序数$\alpha<\varepsilon_0$に対し，$h_\alpha(n)\ll G(n)$であり，かつ　$G(n)\ll h_{\varepsilon_0}(n)$である．$H_\alpha(n)$についても同様である．

この２例が示すように，多重帰納関数と一般帰納関数の間には大きなギャップがあり，計算可能性を多重帰納性から定義することが不可能であることを示しているとも言えよう．巨大数生成の立場からは，多重帰納関数の範疇を超える一般帰納関数の中でより急増加な関数を探索すべきなのだろうか．驚いたことに，如何なる一般帰納関数よりも急増加な関数が具体的に定義されている．それは次節に紹介するビジービーバー関数であり，計算不能関数の一種である．

8.3 ビジービーバー関数

T.ラドー[86]は，J.ダグラス[87]とプラトー問題で第１回フィールズ賞を競ったこともある，傑出した解析学者である．晩年，彼は興味の軸足をコンピュータサイエンスに移し，1962 年に，いかなる計算可能関数よりも大きな数を弾き出す，計算不能な関数であるビジービーバー（Busy beaver function)BB（N）を定義した．

ここでは，ラドーの論文に沿って，この関数がどのように定義されるかを見ていくことにしよう．冒頭にこの論文の本質を突く言葉が現れている．

> 本論で用いられる計算不能関数の構成は，非負整数からなる有限な空でない集合は最大値を（その中に）有しているという原理に基づいている．
>
> 『計算不能関数について』［Rado］（拙試訳）

彼の議論をまとめるならば，次のようになろう．

が，数学用語としては，accessible であるとは任意な下降列が必ず有限回で終結する性質を指す．一方で，それまでの独立命題が普通の数学からみるといささか基礎論的なものが多かったのに対し，この論文で扱われている独立命題は，基礎論臭が少ないので「身近な」と云う一般的な語義も，この表題に託して表現しようとしたのではなかろうか．

86 Tibor Rado(1895-1965)

87 Jesse Douglas(1897-1965)

(1)　n個の内部状態を持つバイナリーチューリングマシン[88]を設定する．
(2)　白地のテープ上で(1)のマシンを起動させ，テープ上に 1 を印字させる．
(3)　(1)のマシンの台数$N(n)$は$N(n) = [4(n+1)]^{2n}$しかない．[89]
(4)　(1)のどのマシンが停止するかを判定するアルゴリズムは存在しない．
(5)　(1)のマシンで少なくとも 1 つは停止することは判っている．
(6)　(1)のなかで停止するそれぞれのマシンがテープ上に印字する 1 のスコアの集合をσとおくと，σは非負整数からなる有限な空でない集合である．
(7)　冒頭の原理によりσは最大値を有する．これを$\Sigma(n)$と表記する．
これだけの準備をした上で，主定理（本論文では唯一の定理）が示される．

定理.すべての計算可能関数（すなわち，一般再帰的）$f(n)$に対し，$\Sigma(n) > -f(n)^1$である．従って，$\Sigma(n)$は計算可能ではない．

即ち，模式的には，次のような位置づけにあることが分る．但し，アッカーマン関数の構成が，本質的に対角線論法であるのとは異なり，ビジービーバー関数の構成には対角線論法は使われていない．

計算可能関数：ビジービーバー関数＝原始帰納関数：アッカーマン関数

また，逆説的に聞こえるかもしれないが，ビジービーバー関数は，計算不能関数でありながら，nが十分小さければ計算出来てしまう．実際，ラドーの論文では$\Sigma(1) = 1$，$\Sigma(2) = 4$，$\Sigma(3) \geq 6$について触れられており，その後の研究で，$\Sigma(3) = 6$，$\Sigma(4) = 13$が示されている．

ラドーは，ユーモアセンスに富んだ人だったようで，この論文の主題となっている計算不能関数にビジービーバー[90]と云った面白いネーミングを与えただけではなく，論文の端々にも，ユーモアに富んだ表現や比喩を見つけることが出来る．参考までに，この論文の最後に付された概要を訳出しておこう．ここでラドーが与えた比喩は，計算不能関数の構成についての絶妙な比喩となっていることが見て取れるであろう．

---

[88] 原論文では，「n 枚カード付バイナリーチューリングマシン」とある．Rado は「内部状態」と云う用語が初心者に理解されにくので，敢えてこの用語を採用したと言っている．
[89] なぜなら，それぞれの非停止状態に対し，読まれる記号に 2 つの可能性があるので 2 つの遷移が存在する，それで全部で$2n$個の遷移が存在し，それぞれの遷移は書かれる記号に 2 つの可能性，移動する方向―左か右か―に 2 つの可能性を有し，停止状態も含めてどの状態に行くかで$(n+1)$個の可能性を有するからである．
[90] 「大変忙しい仕事人間」を意味するイディオムで，日本語訳を付けるとしたら「猛烈社員」が適切であろうか．

前述の（計算不能関数の）提示について精査することで，（計算不能関数の）構成において，「最大要素の原則：E が非負整数の空でない有限集合である場合，E は最大要素を有する.」だけが使用されていることが示される．この原理は数学のあらゆる分野において，当然のこととして，常用されている．

上記に挙げた我々の例によると，この原理は，たとえ非常に明確に定義された集合 E に対してのみ適用されたとしても，構成的な数学の領域を超えて，我々を連れて行ってしまう可能性があることを示している．もちろん，一般的な日常経験を使って，この種の現象を説明することが出来る．例えば，著者は自動車旅行で，ある高速道路を見つけることを望んでいたときに，工事作業員の現場監督から次のような指示を受けた：「この道を直進しなさい；あなたはいくつかの鋼橋を渡るでしょう；あなたが最後の鋼橋を渡った後，次の交差点で左折してください.」幸いなことに，このアドバイスによって暗示された解けない問題は，工事作業員のメンバーの一人が自発的に提供してくれた情報「あなたが最後の鋼橋を渡った後に，130 マイル離れたリッチモンドに到達するまで，他の鋼橋がありません.」によって解決した．読者が，クリーネの優れた書籍（参考文献）[91]を詳細に研究することによって，この小さな物語が示すことを，具体的な方法で，計算関数の理論におけるいくつかの本当に基本的な点を検証することは面白いかもしれない．

『計算不能関数について』 [Rado]（拙試訳）

8.4 急増加階層

本章では，加法，乗法，冪，超冪，…と云った原始帰納関数として構成される増加関数とそれらを超えるスピードで増加する二重帰納関数の典型例としてのアッカーマン関数を紹介した後，更なる高次の多重帰納関数，そしていかなる多重帰納関数をも超えて増加する一般帰納関数の具体例としてのグッドステイン関数，更に，いかなる計算可能関数（一般帰納関数と同定される）をも凌駕する計算不能関数の具体例としてのビジービーバー関数についても触れた．本節では，様々なこれらの増加関数を急増加階層(Fast-Growing-Hierarchy)と云う順序数を添数とする標準的増加関数族を与えることで，増加状況が，微分とは違った意味で，計数化される様子を見るであろう．標語的に言うならば「巨大な有限数を無限概念によって統制する」ことになる．これは現代巨大数論の歴史において，個別の数からそれを生み出す増加関数に視点をシフトさせたことと並んで画期的なことであると考えられる．

---

[91] Kleene,S.C.,Introduction to Metamathematics,Nostrand Co.,Princeton,N.J.,1952.

しかしながら，急増加階層の現代数学における重要性は，巨大数の計数的分類に由来するものではなく，証明論や計算可能性理論，計算複雑性理論で本質的な役割を果たしていること依る．そして，この概念の前身と目され，現在も使用されることのある類似の概念として，ハーディー階層がある．これは２０世紀前半に，多大な業績を残したイギリスを代表する解析学者 G.H.ハーディー(27)の 1904 年の論文 [Hardy:1904]を初出とするものである[Schwichtenberg]．もっとも，ハーディー自身はそのような増加数列が証明論に応用されることなど夢想だにしなかったであろう．その論文で，彼はカントールの定理($2^\alpha > \alpha$)を精密化($2^{\alpha_\beta} \geq \alpha_{\beta+1}$)しようとしただけであった[92]．そのためか，ハーディーのオリジナルの定義と現在の定義には，見掛け上かなりの差異がある．特に，オリジナル論文の枢軸に位置する構成的な対角線論法は，現在の定義では表面上は消し去られており，逆に古い定義によって極限順序数に対する興味深い解釈を再発見することが出来る．

【ハーディー階層の現代の定義】

順序数を添字とする関数族　$h_\alpha : N \to N$　で次の３つの条件を満たすものをハーディー階層と言う．

$h_0(x) = x$

$h_{\alpha+1}(x) = h_\alpha(x+1)$

$h_\alpha(x) = h_{\alpha[x]}(x+1)$ （α が極限順序数の場合)

但し，順序数αに対する基本列$\{\alpha[x] : x < \omega\}$は次のように定義する：

(1) $\alpha = 0$ のとき $\alpha[x] = 0$

(2) $\alpha = \beta + 1$ のとき $\alpha[x] = \beta$

(3) $\alpha = \beta + \omega^{\gamma+1}$ のとき $\alpha[x] = \beta + \omega^\gamma \cdot x$

(4) $\alpha = \beta + \omega^\delta$ でδが極限数のとき $\alpha[x] = \beta + \omega^{\delta[x]}$

【ハーディー階層のハーディー自身による定義】

§3. 私はここでカーディナル数がα_1のある点集合の実際の構成を思いついた．私はそのような集合が以前に構成されたことがあるとは，もし $2^{\alpha_0} = \alpha_1$ が実際に成り立つならばべつだが，考えていない．なぜならすべての知られている集合はそれらのカーディナル数として α_0 または 2^{α_0}を持つからである．

整数列から始めると，

(1)　　　1, 2, 3, 4, 5,⋯

---

92 「私の知る限り，その定理は，今だかつて精確に述べられたことはない．」[Hardy:1904]（拙試訳）

我々は(1)の最初の項を削除することにより次の新しい数列を構成する,

(2)　　　2, 3, 4, 5, 6,…

そしてこの手順を継続することで，我々は次々と新しい数列を構成する.

(3)　　　3, 4, 5, 6, 7,…

(4)　　　4, 5, 6, 7, 8,…

(5)　　　5, 6, 7, 8, 9,…

・・・・・・・・・・・・・・・・・

我々はここで，数列の無限の配列上を対角線上に横断することにより，新しい数列を構成する.

(ω)　　　1, 3, 5, 7, 9,…

その後，我々は次のように構成して行く.

(ω+1)　　3, 5, 7, 9,11,…

(ω+2)　　5, 7, 9,11,13,…

(ω+3)　　7, 9,11,13,15,…

(ω+4)　　9,11,13,15,17,…

・・・・・・・・・・・・・・・・・

(ω・2)　　1, 5, 9,13,17,…

(ω・2+1)　5, 9,13,17,21,…

(ω・2+2)　9,13,17,21,25,…

(ω・2+3)　13,17,21,25,29,…

・・・・・・・・・・・・・・・・・

(ω・3)　　1, 9,17,25,33,…

・・・・・・・・・・・・・・・・・

そういう訳で我々は次の全ての数に対応する数列を構成する.

$\omega\mu+\nu$

ここでμとνは有限である.　　　　『無限基数に関する定理』[Hardy:1904]（拙試訳）

さて，急増加階層の歴史的初出として，しばしば1953年のグルツェゴルスチク(31)の論文が挙げられているのを見かけるが[93]，彼のオリジナルの定義は，現行のものからはかなりかけ離れており，これをもって初出とすることに，著者は，疑問を感じている．一方，論文ではないが，同じく1953年に出版されたリトルウッド(68)の『数学雑談』に収載されている「大きな数」にある定義は，現行のものにかなり近い．しかも，「急増加階層」を導入する目的が，グルツェゴルスチクの場合は，理論的には計算可能な原始帰納関数から更に現実的に計算可能な関数族を抜き出すこと

[93] 急増加階層で，特に，ωまでの部分は，Grzegorczyk階層と呼ばれている.

にあったのに対し，リトルウッドは，ある種の数学の問題でその存在が証明されているが大きすぎて通常の表現が出来ない数があった場合，これを表現するためのツールとすることにあった．そういう訳で，**急増加階層の歴史的初出は，少なくとも巨大数論の立場からは，リトルウッドの数学エッセイ「大きな数」であると言って良かろう．**

彼はまた現代巨大数論の二つの基本テーゼ「大きな数を得るには，いかにして能率よく急激に大きくなる関数 f を見つけるか？に帰着する」と「急増加な関数はイテレーションによって構成され，そのメカニズムは順序数によって統制される」を歴史的に初めて言及した人物としても記録されるべきであろう．

本節の結びにあたり，参考までに，急増加階層の現在の定義とリトルウッドの定義を併記しておく．

【急増加階層の現代の定義】

μを基本列（その上限が極限順序数であるような狭義増加順序数列）がμよりも小さなすべての極限順序数に割り当てられるような大きな可算順序数[94]とする． $\alpha < \mu$に対する関数族 $F_\alpha : N \to N$ の急増加階層は，以下のように定義される[95]：

$F_0(x) = x + 1$
$F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^x(x)$
$F_\lambda(x) = F_{\lambda[x]}(x)$ 　λは極限順序数

【急増加階層のリトルウッドによる定義】

存在は証明されたけれども，***X*として可能な値は大きすぎて述べることができない**と云う場合があり得るか？　数学者の解答は「否」である．が，我々はかくて，スタート地点のどのくらい大きい数を言い表せるかという問題に戻るのである．求めたいものはじつは可能な限り早く増加する関数$F(n)$である．最終的にnに何を代入しようと―2 であれ，u であれ，$N_u(n)$であれ―差異は生じない（どこかでFの構成を止めなければいけないが，止めたところからもう一歩，たとえば，$F(F(n))$に至れば，それで何を代入するかによる差異は打ち消されるのである）．

---

94 急増加階層で，特に，$\alpha \leq \varepsilon_0$ までの部分は，Wainer 階層と呼ばれており，これを超える階層についての定義もある．例えば，Veblen 関数(1908)による Feferman-Schütte 順序数Γ_0までの拡張がある．

95 急増加階層の最初の方は，Knuth の矢印記号で簡単に評価出来るので，参考までに載せておく．詳しくは，附録 3. Proposition8.参照のこと． 　$2 \uparrow^{n-1} x < F_n(x) < 2 \uparrow^n x$

狭義増加正値函数$f_0(n)$から構成を始める．$\psi^k(n)$で$\psi(n)$のk-回の反復$\psi(\psi(\ldots\psi(n)))$を表せば，明瞭にするため右辺の指数では0を省いて，

$$f_1(n)=f_1(n,f_0)=f^{f(n)}(n) \qquad \text{(たとえば指数}f_0(n)\text{まで)}$$

が定義できる．

これによって添数が0から1に増加する．同様にf_2も（記号で$f_2(n)=f_1(n,f_1)$）f_1から作り，以下同様に進めていく．ここで**超限順序数の記法**からヒントを得て

$$f_{f_{f(n)}}(n)$$

を（たとえば$f_{f(n)}(n)$まで）構成する．今や，我々は次のような主張ができる．今ある定義を集めて足場にする．そしてこの足場を$f_1(n)$と定義して，上に述べたような操作を続ける．再びそこで定義を集めて同様に進むが，ここで止めるとする．いったん止めれば$f_0(n)=n^2$かあるいは$f_0(n)=n+1$にとれる($f_0(n)>n$)でありさえすれば，$f_0(n)$として何をとろうと問題ではない)．

『大きな数』[Littlewood]

8.5 デュ・ボワ・レイモンの定理

本章の最後にあたり，増加関数列についてのデュ・ボワ・レイモンの傑出した先駆的業績について触れておく．

1875年，デュ・ボワ・レイモン(44)は『無限近似と方程式の無限解の漸近値について』と云う表題の論文で，カントールに先立って，史上初の対角線論法を披露するのだが，そこではいかなる可算個の単調増加関数よりも増加の仕方が大きいあるいは小さい関数が，対角線論法によって構成され得ることを示している．これは，アッカーマンが如何なる原始帰納関数よりも急激に増大する関数　―いわゆるアッカーマン関数―　を暗に対角線論法を使って構成した50年以上も前に発表された結果であった．但し，アッカーマンの論文にはこの論文の引用は見当たらないので，直接的な影響はなかったものと推察される．（そもそも対角線論法を使っているという自覚もなかったのではなかろうか)

しかしながら，彼がこの定理を知っていた可能性は少なくない．なぜなら，管見の許す限りではあるが，少なくとも1960年代頃までは，この定理は非常に有名なものとして扱われていたからである．例えば，1910年（第2版1954）には，H. ハーディー(33)が『無限の順序』と云う題名のモノグラフを出版しているが，副題は「ポール・デュ・ボワ・レイモンの無限計算」であり，正にこの定理を主題としたものであった．また，ボレル(80)が1951年に出版した『到達不能数』[Borel]ではこの定理は「ポール・デュ・ボワ・レイモンの有名な定理」と評されて，詳しく考察されている．

また，そのような専門書でなくても，高校生向けの副読本として企画されたSMSG新数学双書の一つである『大きな数』[Davis]でも，この定理は紹介されている．恐らく，この当時（20 世紀前半）の数学者にとっては基本的な素養であったのだろう．[96]

ところで，デュ・ボワ・レイモンは，そもそもなぜこのような問題を考えようとしたのであろうか？彼の比較的初期の論文を見ると，既に，ベルトラン級数（アーベル級数とも呼ばれる）に基づいて，収束と発散の間を埋める理想的な級数の階梯を作ろうとしていたように思われる．[Du Bois-Reymond:1873] 数学の厳密化運動が活発化していたこの当時，一様収束をはじめ，デリケートな収束性の問題は，解析学における重要なテーマの一つであった．そのような潮流の中で，彼の論文を眺めるならば，極限評価の基本である「無限小，無限大の位数」の概念の分析からその問題意識が発していた，と言ったとしても大きく外れることはなかろう．

この「無限位数」の歴史は古く，微積分の黎明期，既にフェルマーの著作のなかにも暗然と現れており，ニュートン，ライプニッツにおいては「高階差分」の理論としてはっきりと意識されるようになる．[Bourbaki] フォントネルやヨハン・ベルヌイは，非常に素朴な形で無限大の位数を導入するのだが，コーシーの著作に至っては現代の微積分に近い形にまで洗練されて提示されている．より高位な無限大を考察して行けば，何処かで，それを統制する位数列そのものの動的状勢に目が行くことは自然な発想である．そして，どのように急増加する位数列を作ろうとしても，それを凌駕する位数列が作れてしまうことに気付いたとき，この種の不可能性を証明しようと試みることは，歴史的な難問の不可能性が次々と証明されていった 19 世紀にあっては，極めて自然な発想だったのかもしれない．[Keele]

9 有限者の限界としての巨大数

直観主義にせよ有限の立場にせよ，無限と有限の違いについては峻別するが，具体的な表示可能性については，考慮しているようには見えない．チューリングは，チューリングマシンの停止性判定問題を有限時間内で解くアルゴリズムが，存在しないことを示したが，たとえアルゴリズムが存

---

96 我が国において、『解析概論』と並んで微積分学の古典的名著と言われている『微分積分學　第一巻』（藤原松三郎著: 1941）には，この定理について，歴史的背景まで含めて，§ 1.45 でかなり詳しく論じられている．しかし，何故か，この定理が対角線論法であることについては一切触れられていない．

在しても，人類が生存している時間内で解けるかどうかと言った「計算複雑度」を考慮する問題までは，踏み込んで考えていなかった．

しかしながら，現実の数学は，確実にそのような限界を内包しながら発展してきている．羽を持たない人類が，飛行機やロケットによって未踏の地に辿り着けたように，コンピュータの発明は，生身の人間の限界を計算能力のみならず，検証能力についても大きく引き上げた．とはいえ，やはり限界は，存在するであろう．モンスター群の位数が，$8 \cdot 10^{53}$程度だったから有限群の単純群の分類定理は完成したが，これが，もしグラハム数レベルのオーダーであったなら，精確な位数の特定ができたかどうかは大いに疑問がある．実際，スキューズ数は，オーダーを評価しているだけで，特定は出来ていない．我々の周りには，そのような問題で溢れている．晩年，ボレル(81)は，人が有限者であるが故に定義不可能な限界を「到達不能数」と名付け，これを主題にした小冊子を上梓した．

このように巨大数は，有限者たる人の限界としても位置付けられるのだが，その限界そのものの定義や認識に対する統一的な見解はなく，極めて多義的かつ流動的であることに留意しておく必要があろう．

9.1 頭で考えられる異なる考えの数

17 世紀に活躍した物理学者ロバート・フックは，表題の数を計算した結果，3,155,760,000 を弾き出した．彼の計算根拠は，100 年間の秒数であった．確かに，一人の人間が，生まれてから死ぬまで毎秒違うことを考え続けたとしても，これ以上の数の考えを想起することは出来そうにない．

しかしながら，別人であれば当然もっと別の考えが想起され得るわけだし，同じ人物であったとしても，可能性としての思考想起数は，フックの出した数よりも遥かに大きそうである．

100 億個の神経細胞が，それぞれ 1000 個程の軸索で，他の神経細胞と繋がるネットワークの連結パターンで「脳が抱き得る思考の数を推計する」と云うマイク・ホルダネスの方法に依ると，$10^{70,000,000,000,000}$ つまり 10 の 70 兆乗なるとてつもない巨大数が，導き出される．全宇宙の陽子の数と思しき10^{80}が，なんと可愛らしく見えることか．ラムゼーやパスカルは，案外このような質的な差を直観的に感じ取っていたのかもしれない．

私が私の友人の幾人かと違っているように思われる点は，私自身が物理的な大きさというものには殆ど重きを置かないという点である．私は天空の広大さを目の前にしても，なんら

自らの卑小さを感じることはない．星はたしかに巨大であるかもしれないが，考えたり愛したりすることができない．そして私にとって感動を与えるのは，大きさではなくてこうした性質である．私自身，ほぼ 17 ストーン(107 キロ)の体重があることを，自分の名誉であるとは思っていない．
『ラムジー哲学論文集』(Xエピローグ)[Ramsey]p.366

人間は自然のうちで最も弱いひとくきの葦にすぎない．しかしそれは考える葦である．これをおしつぶすのに，宇宙全体は何も武装する必要はない．風のひと吹き，水のひとしずくも，これを殺すに十分である．しかし，宇宙がこれをおしつぶすときにも，人間は，人間を殺すものよりもいっそう高貴であろう．なぜなら，人間は，自分が死ぬことを知っており，宇宙が人間の上に優越することを知っているからである．宇宙はそれについて何も知らない．
『パンセ』[Pascal]（200）

巨大数からは若干外れるが，このテーマに関して，二人の天才の興味深い対立があるので少し紹介しておく．既に，触れたようにチューリングは，有名なチューリングマシンのアイデアを，人間が計算する様子を抽象・モデル化することで着想した．彼の論文では，計算者の「考慮すべき精神状態の数は有限であると仮定する．」と明記されており，これが，チューリングマシンの制御部の「m-配置」の数は有限である，と云う制限に直結している．これに対し，1972 年，ゲーデル(66)は「チューリングの仕事の哲学的誤り」とラベルを付けている．ゲーデルは「精神活動は静的ではなく，発展し続けるものである．したがって，精神の発展の各段階において可能な（区別可能な）状態は有限だが，発展していくうちに無限に収束しない理由はどこにもない．」とコメントし，精神状態の数は，有限ではないとした．この二人の対立は，心と云うものを脳の機械的な機能に帰着され得ると考える人々[97]と，人の心にはそれらを超越する働きがあると信じる人々[98]の，根源的な哲学の対立を代表するものと言えるかもしれない．

9.2 ＲＳＡ暗号

巨大数史を主題とする本論において，ＲＳＡ暗号について言及する理由は，その理論の本質が，巨大な数の素因数を見つけることが，たとえコン

[97] Turing は，究極的には，機械と人間の知性の差はなくなると考えていた．そして，それを判定するために Turing test を考案した．

[98] Gödel は，人間の理解力の可能性は無限であると考えていた．母親の「来世を信じるか．」と云う質問に肯定的に答え，死後の世界では，重要なことがすべて $2\times2=4$ と同程度の確実性をもって知覚される永遠の知的楽園であると期待される，と書いている．

ピュータを使ったとしても，極めて困難であることに依っているところにある．つまり有限者としての人間の限界こそが，この理論及びシステムの有効性を保証しているのであり，そこに人々の日々の営みの中における巨大数の役割の一つがある．

ところで，これに類似した問題として，与えられた巨大な数が，素数であるかどうかを判別することが挙げられる．この問題についてオイラーのような大数学者が，何篇もの論文を書いていたことは留意に値する[99]．

9.3　4色問題とケプラー予想

巨大数は，人の有限性に起因するが，その有限性は一意的に定まるものではない．どのような文脈におけるどのような有限性に依存したものであるかを明確にしておかないと混乱が生じる．例えば，計数概念を持たない状態の人間でも，直観的に把握できる数はあり，その限界は，個人差はあるが，大体 4，5 個であることが実験的に示されている．(附録 2 参照)　計数手法を学んだ人間ならば，その表現可能な数は飛躍的に跳ね上がるが，その限界は，学んだ計数手法に依存する．例えば，1 進法か 10 進法か，指数表現まで適用するかによって劇的に異なる．

寿命と計数能力の制約による人の有限性は，コンピュータの出現によって大きく緩和された．このことを象徴する事例として，アッペルとハーケンによる 4 色問題の解決が有名であるが，証明ではなく計算ならばこれ以前にも沢山の結果が出ていた．例えば，「アルキメデスの巨大数」で触れた「牛の問題」の答えが，A.H.ベルたちの 4 年がかりの計算により，206,545 桁の数であることが突き止められたことは，既述の通りであるが，彼らは，その解の最初の 32 桁と最後の 12 桁しか求めていなかった．1965 年，IBM7040 は，僅か 7 時間 49 分で，完全な解をリストアウトした．

4 色問題以降，コンピュータを使った証明で最も有名なものは，1998

[99] Euler が，大きな数の素数性判別問題に興味を持っていたことは，高瀬正仁氏に教えて頂いた．また，氏によると，Gauss は，Euler 程には巨大数に興味を持っていなかったらしい．

・Fermat の定理とそのほかの注目すべき諸定理に関するさまざまな観察（1738 年）
・非常に大きな素数について（1764 年）
・非常に大きな数が素数か否かということは，どんなふうにして探知しなければならないのであろうか．(1769 年)
・数 1000009 が素数か否かが吟味される．(1797 年)
・100 万まで，および 100 万を超えて続いていく素数表．あらゆる非素数の最小の約数を併記する．(1775 年)

年のヘールズ(40)によるケプラー予想（ヒルベルト第 18 問題）の解決ではなかろうか．ヘイルズの論文は，12 人の査読者によって 4 年がかりで検証されたが，その検証結果報告は，「99%の確信があるもののそれでも完全に正しいと言い切ることが出来ない」であった．12 人の査読者の献身的な努力にも拘わらず，その証明の正しさを確認することが出来なかったと云う事実は，この辺に生身の人間の検証能力の限界があることを示唆しているとも言えよう．2003 年，ヘイルズは，ケプラー予想の完全な形式的証明を作成するフライスペック計画を立ち上げた．つまり，証明の中身にコンピュータを使うだけではなく，その正しさの検証にもコンピュータを使おう（「証明支援システムの使用」）というのである．計画開始から 11 年後，ヘイルズはついにコンピュータ上で完全にチェックされた形式的証明を獲得した．[100]

ヘイルズのこの歴史的快挙は，人手に余る巨大な証明に対し，その厳密性をコンピュータによって担保する方法として，彼の手法が認知される日を，予感させるものとも言えよう．

9.4 ミシェスルキーの巨大定数

本章のこれまでの事例において，巨大数は，なんらかの具体的な意味で，人間の有限性に起因する限界として位置づけられるものであった．このような限界性は，通常の数学理論には馴染みにくいものと考えられるが，意外にも，この限界性を公理化してしまおうとする数学者もいる．

J. ミシェスルキーは，“Analysis without actual infinity.”（1981）で，ペアノの自然数論に 2 のべき関数2^xと巨大定数$\omega_r (r \in Q)$を加えた理論を構築してみせた．彼の理論では大小関係として，次のような通常の自然数論とは異なるものが，与えられている．

大小関係 $x < y$ を x が後者$S(x)$ と異なり，かつ，$x + S(z) = y$ となる z が存在することとして定義する．

この定義から，$S(\alpha) = \alpha$ となる α が存在すれば，それは最大数であることが分る．更に，次のような奇妙な公理（巨大性公理）を$\omega_s (s \geq r)$ を含まない定数項 t ごとに与えている．

$$t < \omega_r.$$

100 4 色問題についても，2005 年に，Georges Gonthier(ジョルジュ・ゴンティエ)により証明支援システム Coq で検証されている．

この公理の意味するところは，ω_rより質的に小さい数をどのように使って新しい数を作ってもω_r より小さい，である．

ミシェスルキーが，どのような動機からこのような奇矯な有限概念を取り込もうとしたのかは判らないが，それを予言するような哲学的な問題提起は，既に，ヴィトゲンシュタインの『哲学探究』でなされ，クリプキに受け継がれていた．正統的解釈では，クリプキの問題の捉え方は，ヴィトゲンシュタインの本来の意図とは異なるとのことであり，著者が上述した「予言」も全く両者（ヴィトゲンシュタインとクリプキ）の意向を無視したものであることは理解しているが，巨大数の一面を浮き上がらせる興味深い話題なので簡単に触れておく．

先ず，クリプキによる有名なヴィドゲンシュタインのパラドックスを思い出していただきたい．彼は，「例えば，『68＋57』は，私がかつて全く行なったことのない計算である」と仮定した上で，「私はこの計算をし，そして勿論，『125』」と云う当然の答えを得て，それが算術的な意味でもメタ言語的な意味でも正しいと確信するであろうことを認める．ところがこの後，彼は奇怪な懐疑論者が登場させ，「68＋57」は「5」であると主張させる．この懐疑論者の論理は完璧で次のように「私」を畳み込んでくる．

過去においては，私自身，その関数で計算した具体的事例をただ有限個与えているのみである．私が考えた事例の全ては，57 より小さい数の間の加法なのである．それゆえたぶん，私は過去において「プラス」と「＋」を，私が「クワス」と呼び，「⊕」によって記号的に表わそうと思う関数を表わすために用いていたのかもしれないのである．その関数は，

$$\begin{array}{ll} \text{もし} x, y < 57 \text{ ならば} & x \oplus y = x + y \\ \text{そうでなければ} & x \oplus y = 5 \end{array}$$

によって定義される．誰が一体，これは私が以前に「＋」によって意味していた関数ではない，と言うのだろうか．

『ウィトゲンシュタインのパラドックス』[Kripke]pp.13-14

クリプキの懐疑論者が，「私の有限回の具体的計算経験」がすべて「57」より小さい数の間の加法であったことを，突いてきているのは興味深い．なぜなら，上記において「57」と「5」を「巨大数」に置き換えるだけで，数学的に無矛盾な理論を構築することが出来るからである．

9.5 到達不能数

既に述べたように，リトルウッドは，巨大過ぎて表現出来ないような数については，それが本当に必要になれば数学者はなんとかして対応することが出来る，と云う比較的楽観的な考えを有する数学者であった．

リトルウッドは，スキューズ数のような，当時としては驚く程巨大な数を弟子のスキューズが創出することで，解析数論の具体的な問題に対して見事な評価式が与えられたことに依り，巨大数に対する数学者の対応能力に自信を持っていたのであろう．更に，本質的に急増加階層と同等な概念を知っていたようなので，この概念を使えば，個々の数学者が取り扱う問題で直面する巨大数は，評価出来るはずだと確信していたのかも知れない．

一方，ボレルは，より哲学的な見地から，人間の持つ有限性に起因する「相対的に到達不能な数」が存在すると主張する．

> 我々の結論は到達不能な数が存在することである．すなわち，どの人も到達できないような数が存在し，しかも定義そのものにより，それらの到達不能な数を知ることはできず，その先にある数は到達不能であるような境界となる数を示すこともできない，というのは，この境界数もまた到達不能だからである．
>
> したがって，我々はこの到達不能性を相対的なものと考えなければならない，というのは，それは，宇宙の寿命と人間の能力についての仮定に依存するからである．
>
> 『到達不能数』[Borel]pp.5-6

ボレルは，フランス経験主義を代表する数学者であるが，おそらく，その思想的背景を支えるコントの哲学に影響されていた思われる．[鈴木:2014] それ故，「成熟した思想は人間の有限性を意識して絶対性を追及すべきではない．」と考えて，彼が，このような本を書いたとするならば極めて合点がいく話である．

また，彼は，人や宇宙の寿命に依らない「絶対的に到達不能な数」を次のように定義している．

> 0と1の間の無理数の中で，到達可能なものは可算集合をなすので，到達不能な数は可測集合で測度が 1 である，ということが以上によりわかった．したがって，絶対に到達不能な数は，到達可能な数や相対的に到達不能な数に比べると無限に多く存在すると考えるべきである．
>
> 『到達不能数』[Borel]p.20

定義は違うが，ボレルの「到達可能数」は，チューリングの歴史的論文

において定義されている「計算可能数」と方向性は似ている．しかし，本書にチューリングの名前は見当たらない．チューリングの論文が出た1936年に，既に65歳になっていたこともあり，読んでいなかったのかもしれないが，1927年のエッセイでは，チューリングに先んじる先駆的アイデアを出していた．

ボレルの「到達不能な数」，特に「相対的に到達不能な数」は数学的に明晰に定式化することは難しいと思われる．具体的な表現を与えられない巨大数の定義の難しさが，ここにある．

しかしながら，1934年には，既に，超越的な方法で無限大を導入するように，いかなる自然数よりも大きな超準元が定義される超準自然数モデルが扱われており（スコーレム），1966年当時，この超準元を「到達不能な自然数」と解釈する基礎論学者，近藤基吉(60)，もいた．

> 今日の集合論では,無限集合を有限集合に対立させて考えている．これは有限集合と無限集合との間に截然とした差異のあることを前提としているからである．しかし,実際は意外に複雑な関係を持っている．集合論ZFにおいては,$\alpha < \omega$ を満足する順序数α が『自然数』である．しかし,『自然数』の中に,
>
> D_1 到達可能な自然数:有限的な方法で定義せられnumeralに対応する自然数で,『標準の自然数』と云われる．
>
> D_2 到達不可能な自然数:『非標準の自然数(nonstandard natural number)』とも云われ,すべての到達可能な自然数よりも大なる自然数
>
> の区別されるような集合論ZFの模型が知られている(T.Skolem[30])．従って,『有限集合』の中にも,到達可能な自然数によって計られる『標準の有限集合』とそうでない『非標準の有限集合』とが区別されることになる．
>
> 『P.J. Cohenの方法とその数学的意義』[近藤]p.179

このように，巨大数を「到達不能数」として捉えようとしたとき，その定義をどのように与えるかによって，規定される世界がまるで異なることが見て取れよう．

我々は，本論において，歴史を主軸にしながら，巨大数と云う存在の有り様を軽くなぞったに過ぎない．それでも，巨大数に，その内なる豊饒さの片鱗を感じていただけたならば，本論の目的は充分果たせたものと考える．巨大数は無限に比すれば，未だ殆ど本格的な研究には，手が付けられて来なかったのが現状である．従って，その最も刺激的な変革を今後に期待したい．

あとがきと謝辞

正直に言うと，このあとがきを書きながらも，本論の表題を「巨大数小史」としたことが果たして良かったどうか，確信が持てないでいる．このような表題にすると，どうしても通史としての性格が色濃く出てしまい，結果として，二次文献からの引用が増え，度が過ぎると，「論文」ではなく，「無節操な軽評論」か「雑学の開陳」に堕してしまう危険性が高いからである．もっと贅肉をそぎ落とし，「科学的表記」や「増加関数の視点による巨大数」などのテーマに絞り込んで，オリジナルな部分の占める割合の高い，筋肉質な論文を目指すべきだったのかもしれない．しかし，「はじめに」でも述べたように，この分野には参照すべき通史がなく，この状況を少しでも緩和したいと云う目標も本論にはあったので，たとえ内心忸怩たる思いであろうとも，二次文献をまとめただけの節も作らざるを得なかった．中には殆ど項目に触れているだけの節，例えば「RSA 暗号」など，があるが，それは巨大数との関連性だけでも明示したかったからである．一般的な用語解説は，現在のネット環境を利用すれば簡単に補充出来ると考え，敢えて載せなかった．更に，二次文献からの引用にしても，出来得る限り切り口を目新しくするように努めた積りであり，単なる類書からの引き写し，垂れ流しだけは避けられたと信ずる．それ故，本論は，一般教養書のように気軽に近づくことが出来て，不案内な部分をネットで補充しつつ読めば，多様な視点からの巨大数の捕捉を可能たらしめるものと自負するが，一方で，いささか散漫になり過ぎた嫌いも否定出来ない．

このように，本論には至らぬ点が多々あるのだが，それでも，ケルヴィン卿の栄光の陰に隠れて，歴史の忘却の海に深く沈んでいた悲運の青年電気技師アーネスト・エッセルバッハに新たな光を当て，「科学的表記の創案者」としての再評価を与えられたこと，及び現代巨大数の基本理念を提唱していた人物が，あのリトルウッドであったと特定できたことを以て，数学史の論文としての，ささやかな存在意義を主張出来るのではないか，と愚見を開陳して批評を仰ぐことと致したい．

この論文の附録にある「グラハム数とスタインハウス数，アッカーマン数の比較問題」の面倒な検証に付き合って下さった『日本数学協会神奈川支部勉強会』の皆様方に，この場を借りて深く御礼申し上げます。

最後になりましたが、このような論文を発表する場を与えてくださいました津田塾大学数学・計算機科学研究所の三宅克也氏と立教大学、津田塾大学数学・計算機科学研究所佐藤文広氏、津田塾大学数学科長岡一昭氏に深く感謝致します。

引用文献

1 **Ackermann,Wilhelm**: Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. Mathematische Annalen vol 99, (1927)

2 **Adams , Rod**: An Early History of Recursive Functions and Computability from Godel to Turing. Docent Press, (2011)

3 **Alexander ,Soifer**: Ramsey Theory: Yesterday, Today, and Tomorrow. Springer Science & Business Media, (2010)

4 **Atkinson, Janette; Campbell, Fergus W ; Francis, Marcus R** : The magic number 4±0: A new look at visual numerosity judgements. // Perception, V. 5, (1976), pp. 327-334

5 **Augustinus ,Aurelius**; 服部英次郎(訳): 神の国.岩波書店, (1983)

6 **Basham ,A.L** : History and Doctrines of the ĀJĪVIKAS. Luzac & Company LTD,(1951)

7 **Bernoulli ,Jacob**: Ars Conjectandi. Impensis Thurnisiorum, fratrum, (1713)

8 **Blakley, George Robert ; Borosh, Itshak**:Knuth's Iterated Powers. Advances In Mathematics 34, (1979), pp.109-136

9 **Boltzmann,Ludwig**: Entgegnung auf die wärmetheoreti schen Betrachtungen des Hrn.E. Zermelo. Wiedemann Annalen 57, (1896), pp.773-784
ボルツマン,ルートヴィッヒ;物理学史研究刊行会(編纂) :"ツェルメロ氏の熱理論的考察への反論".物理学古典論文叢書 5 気体分子運動論. 東海大学出版会, (1971)

10 **Borel , Émile**: Les nombre inaccessible .Gauthier-Villiars, Paris, (1952)
ボレル,エミール; 辻下徹(訳): 到達不能数　和訳 Ver0.81

11 **Bourbaki, Nicolas**; 村田全(訳); 清水達雄(訳): ブルバキ数学史. 東京図書, (1970)

12 **Chaitin, Gregory**;水谷 淳(訳): ダーウィンを数学で証明する. 早川書房, (2014)

13 **Conway ,John H; Guy, Richard** : The Book of Numbers. Springer, (1996)
コンウェイ,ジョン H; ガイ, リチャード;根上 生也(訳): 数の本. 丸善出版, (2012)

14 **Cook ,William John**; 松浦俊輔(訳): 驚きの数学　巡回セールスマン問題. 青土社, (2013)

15 **Crandall ,Richard E**: 超巨大数への挑戦. 日経サイエンス 1997 年 5 月号

16 **Datta; Bibhuti Bhushan** : The Jaina School of mathematics, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society 21 , (1929), pp.115-145.

17 **Dawson ,John W.Jr.** : Logical Dilemmas AK Peters,Ltd, (2005)
ドーソン,ジョン W. Jr,村上裕子(訳),塩谷賢(訳),ロジカル・ディレンマ. 新曜社, (2006)

18 **Davis ,Philip J**: The lore of large numbers,Random House, Inc,1961
デービス,フィリップ J; 田島一郎(訳), 加藤勝(訳): 大きな数. 河出書房新社, (1970)

19 **Dedekind , Richard**: Was sind und was sollen die Zahlen? , (1887)
デデキント,リヒャルト; 渕野昌(訳): 数とは何か, 何であるべきか？筑摩書房, (2013)

20 **Devlin ,Keith**: 数学する遺伝子: あなたが数を使いこなし, 論理的に考えられるわけ. 早川書房, (2007)

21 **Du Bois-Reymond, Paul**: Ueber asymptotische Werte, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösungen von Gleichungen. Mathematische Annalen. Volume 8, (1875)

22 **Du Bois-Reymond, Paul** :Eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen etc. Anhang, Borch. Journ. Bd. 76, (1873) pp.61-91.

23 **Dunnington ,Guy Waldo**; 銀林浩(訳); 田中勇(訳); 小島穀男(訳): ガウスの生涯. 東京図書, (1992)

24 **Esselbach ,Ernest**: Extracts from a Letter addressed to Professer Williamson by Dr. Esselbach. Appendix F from the Report of the thirty-second meeting of the British Association for the Advancement of Science held at Cambridge. (October 1862)

25 **Fisher, Gordon**: The Infinite and Infinitesimal Quantities of du Bois-Reymond and their Reception. Archive for history of Exact Sciences 24, (1981) pp.101-63

26 **Frege ,Friedrich Ludwig Gottlob**: Die Grundlagen der Arithmetik, (1884)
フレーゲ,ゴットローブ ; 野本和幸(編) ; 土屋俊(編) : 算術の基礎. 勁草書房, (2001)

27 **Frei , Günther ; Stammbach ,Urs** : Hermann Weyl und die Mathematik an der ETH Zürich, 1913–1930, Springer-Verlag, (2013)

28 **Friberg, Jöran**: Unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics. World Scientific Publishing Company (2005), p.21

29 **Friberg, Jöran**: A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts. Springer Science & Business Media, (2007), p.457

30 **Gamow ,George;** 崎川 範行(訳)：1,2,3…無限大. 白揚社, (2004)

31 **Gardner ,Martin**: In which joining sets of points leads into diverse (and diverting) paths. Scientific American, (November 1977)

32 **Goodstein , Reuben Louis** : On the Restricted Ordinal Theorem. The Journal of Symbolic Logic, Vol. 9, No. 2, (1944), pp.33-41.

33 **Goodstein , Reuben Louis** :Transfinite ordinals in recursive number theory. Journal of Symbolic Logic 12 (4), (1947), pp.123–129.

34 **Graham , Ronald Lewis ; Rothschild, Bruce Lee**: Ramsey's theorem for n-parameter sets.Trans. Amer. Math. Soc., Vol.159, (1971), pp.257-292

35 **Gregory ,David; Halley ,Edmond**: The Elements of Astronomy, Physical and Geometrical Vol1,J. Nicholson and sold, (1715)

36 **Griffin ,F. L.**: An Experiment in Correlating Freshman Mathematics. The American thematical Monthly Vol. 22, No. 10, (1915), pp.325-330

37 **Hahn ,Alexander J;** 市村宗武(訳); 狩野秀子(訳); 狩野覚(訳): 解析入門　アルキメデスからニュートンへ. シュプリンガー・フェアラーク東京, (2001)

38 **Halpern ,Paul;** 江里口良治(訳),水島信子(訳): 輪廻する宇宙. 丸善, (1997)

39 **Hardy , Godfrey Harold**: A theorem concerning the infinite cardinal numbers, Quarterly Journal of Mathematics vol 35, (1904), pp. 87–94

40 **Hardy , Godfrey Harold**: Orders of Infinity. Cambridge University Press, (1910)

41 **Harrison , Edward Robert**: Cosmology: the Science of the Universe. Cambridge University Press, (2000)

42 **Hilbert ,David**: Über das Unendliche Mathematische Annalen 30, (1925), pp.161-190

43 **Humphreys ,Colin J.** :The Number of People in the Exodus From Egypt: Decoding Mathematically the Very Large Numbers in Numbers I and XVI," VT48, (1998), pp.196-213

44 **Ifrah, Georges;** 弥永 みち代(訳), 後平 隆(訳): 数字の歴史―人類は数をどのようにかぞえてきたか. 平凡社, (1988)

45 **Jean van Heijenoort**: From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Harvard University Press, (1967)

46 **Jevons, William Stanley** : The power of numerical discrimination. // Nature, V. 3, (1871), pp.281-282

47 **Joseph ,George Gheverghese;** 垣田高夫(訳); 大町比佐栄(訳): 非ヨーロッパ起源の数学. 講談社, (1996)

48 **Kanamori , A., 渕野 昌(訳)**： 巨大基数の集合論. シュプリンガー・フェアラーク東京, (1998)

49 **Katz ,Victor J.**: A History of Mathematics. Addison-Wesley , (1998)

50 **Keele ,Lisa**: Theories of Continuity and Infinitesimals: Four Philosophers of the Nineteenth Century,Indiana University. Philosophy ,ProQuest, (2008)

51 **Keynes ,John Maynard**: ケインズ全集１０巻　人物評伝. 東洋経済, (1980)

52 **Kirby, Laurie; Paris, Jeff**: Accessible Independence Results for Peano Arithmetic. Bull. London Math.Soc.14 (4), (1982), pp.285-293

53 **Knuth ,Donald Ervin**: Mathematics and Computer Science:Coping with Finiteness. Stanford University, Stanford, California 94305 "Science", 17 December 1976, vol. 194, n. 4271, pp.1235-1242.

54 **Kripke, Saul;** 黒崎宏(訳): ウィトゲンシュタインのパラドックス - 規則・私的言語・他人の心 - , 産業図書, (1983)

55 **Littlewood, John Edensor; Bollobás, Béla** (編);金光滋(訳): "大きな数". リトルウッドの数学スクランブル. 近代科学社, (1990)

56 **Locke, John** : An Essay Concerning Human Understanding : Chap.16 Number§6 Names necessary to Numbers, (1690)

57 **Loschmidt , Johann Josef** : Zur Grösse der Luftmolecüle. Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien 52 (2), (1865), pp.395–413

58 **Lucretius ,** 樋口勝彦(訳): 物の本質について. 岩波書店, (1961)

59 **Mycielski ,Jan**: Analysis without actual infinity. The Journal of Symbolic Logic Vol. 46, No. 3, (Sep., 1981), pp.625-633

60 **Maxwell , James Clerk**: On the Dynamical Theory of Gases.Philosophical Magazine for January and July,(1860)

61 **Maxwell , James Clerk**: Illustrtions of the Dynamical Theory of Gases. Philosophical Transactions Vol. CLVII, (1866)

62 **Maxwell , James Clerk**: A treatise on electricity and magnetism. Oxford, (1873)
63 **Miller,I,Arthur**; 阪本芳久(訳) :137　物理学者パウリの錬金術・ユング心理学をめるぐ生涯.草思社, (2010)
64 **Moore ,Adrian William**;石村多門 (訳): 無限 その哲学と数学.　講談社, (2012)
65 **Netz,Reviel ; Noel,William** : 吉田晋治(監訳), 解読! アルキメデス写本. 光文社, (2008)
66 **Neugebauer, Otto** :A History of Ancient Mathematical Astronomy. Springer-Verlag ,(1975:Springer Science & Business Media 2004) , p.618
67 **Nietszche ,Friedrich**;原 佑(訳): 権力への意志. 筑摩書房(下), (1993)
68 **Ossendrijver ,Mathieu**: THE POWERS OF 9 AND RELATED MATHEMATICAL TABLES FROM BABYLON. Journal of Cuneiform Studies 66 ,(2014), pp.149-165
69 **Oyama Tadasu; Kikuchi Tadashi; Ichihara Shigeru** : Span of attention, backward masking and reaction time. // Perception and Psychophisics, V. 29 (2) , (1981), pp.106-112
70 **Page, Donald Nelson**: "Information Loss in Black Holes and/or Conscious Beings?". In Fulling, S.A. Heat Kernel Techniques and Quantum Gravity. Discourses in Mathematics and its Applications (4). Texas A&M University. (1995), p.461.
71 **Parikh , Rohit**: Existence and feasibility in arithmetic. Journal of Symbolic Logic,36, (1971), pp.494–508
72 **Parikh , Rohit**: Some results on the lengths of proofs. Transactions of the American Mathematical Society, 177, (1973), pp.29–36
73 **Pascal ,Blaise** ; 松浪信三郎(訳・注): パンセ. 講談社(上), (1971)
74 **Péter ,Rózsa**: Über die mehrfache Rekursion Mathematische Annalen vol 113,(1936),§10,7
75 **Péter ,Rózsa**: Recursive Functions. Academic Press, (1967)
76 **Petzold ,Charles**: The Annotated Turing. Wiley, (2008)
チャールズ・ペゾルド, 井田哲雄(訳), 鈴木大郎(訳), 奥井哲(訳), 浜名誠(訳), 山田俊行(訳): チューリングを読む.日経 BP 社, (2012)
77 **Poincaré,Henri**: Sur le Problème des Trois Corps et les Équations de la Dynamique, Acta Mathematica 13, (1890) pp.1-270;
78 **Poisson ,Siméon Denis**: Probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilities. Bachelier, (1837), p.7
79 **Pólya ,George**: Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem. Mathematische Zeitschrift, vol 8, Issue 3, (1920), pp.171-181
80 **Rado, Tibor** : On non-computable functions, Bell System Technical Journal, Vol. 41, No. 3 (May 1962), pp. 877-884.
81 **Ramsey ,Frank Plumpton**; D. H. Mellor (編),伊藤邦武(訳),橋本康二(訳):"Xエピローグ". ラムジー哲学論文集. 勁草書房, (1996)
82 **Rooney ,Ann**, The Story Of Mathematics. Arcturus Pub, (2012)
83 **Sawamura Hiromasa; Shima Keisetsu; Tanji Jun.**: Numerical representation for action in the parietal cortex of the monkey. // Nature, V. 415, (2002), pp.918-922
84 **Sachs, Abraham Joseph; Strassmaier, Johann Nipomuk** : Late Babylonian astronomical and related texts. Copied by T.G.Pinches and J.N.Strassmaier. Providence, (1955)
85 **Schwichtenberg ,Helmut; Wainer ,Stanley**:Proofs and Computations, Helmut Schwichtenberg, Cambridge University Press, (2011) ,p.161
86 **Soifer ,Alexander**: Ramsey Theory. Yesterday, Today, and Tomorrow. Springer Science & Business Media, (2010)
87 **Smith, David Eugene**: History of Mathematics vol2. Ginn And Company, (1925), pp.80-86
88 **Stanislas Dehaene**: The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics. Oxford University Press, (2011)
89 **Steinhaus ,Hugo**: Mathmatical Snapshots. Oxford University Press, (1950)
スタインハウス,H ; 遠山 啓(訳): 数学スナップ・ショット. 紀伊國屋書店, (1976)
90 **Stewart ,Ian**; 水谷 淳(訳): 数学の魔法の宝箱. ソフトバンククリエイティブ, (2010)
91 **Turing ,Alan Mathison**: Systems of Logic Based on Ordinals Proc. London Math. Soc. s2-45 (1) , (1939), pp.161-228
92 **Veblen ,Oswald**: Continuous Increasing Functions of Finite and Transfinite Ordinals, Transactions of the American Mathematical Society 9 (3) , (1908), pp.280–292
93 **Vossii ,Johannis Henrici**:　Johannis Henrici Vossii Commentarii Virgiliani. apud Brockhaus et Avenarius. (1838)
94 **Weyl ,Herman**: Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie. Annalen der Physik 59, (1919), p.129

95 **Weyl, Hermann;** 内山龍雄(訳): 空間・時間・物質（下）. 筑摩書房, (2007)
96 **Wilson,Robin;** 茂木健一郎(訳): 四色問題. 新潮社, (2004)
97 **足立暁生; 笠井琢美;** 広瀬健(編): "計算機科学への応用". 数学基礎論の応用. 日本評論社, (1981),p.125
98 **泉井久之助:** 印欧語における数の現象. 大修館書店, (1978)
99 **板橋倫行(校注):**日本霊異記. 角川書店, (1957), p.159
100 **井上幸義:** 数詞≪4≫と≪5≫の境界に横たわるものはなにか? 上智大学外国語学部紀要. 41 号,(2007), pp.217-241
101 **内林政夫:** 数の民族誌. 八坂書房, (1999)
102 **大野 誠:** "第 8 章分子論の新たな展開のために". 原子論・分子論の原典 3. 学会出版センター, (1993)
103 **大山 正:** ひと目で何個のものが見えるか.別冊サイエンス イメージの科学（特集視覚の心理）.日経サイエンス社, (1982), pp.31－41
104 **鹿野 健(編著):** リーマン予想.日本評論社, (1991)
105 **梶山雄一(訳), 赤松明彦(訳):** 大乗仏典 1 大智度論
106 華厳経: SAT 大正新脩大藏經テキストデータベース
107 高等学校化学 I 第一学習社（平成 14 年検定済）
108 **小島寛之:** 無限を読み解く数学入門. 角川学芸出版, (2009)
109 **近藤基吉:** P.J. Cohen の方法とその数学的意義. 科学基礎論研究 Vol. 7,No4, (1966,3 月),p179
110 **斎藤 憲:** アルキメデス『方法』の謎を解く. 岩波書店, (2014)
111 **定方 晟:** 須弥山と極楽. 講談社, (1973)
112 **定方 晟:** インド宇宙論大全. 春秋社, (2011)
113 **佐藤 任:** 古代インドの科学思想. 東京書籍, (1988)
114 **末綱恕一:** 華厳経の世界. 春秋社, (1957)
115 **杉本圭三郎(全訳注):** 平家物語(十).講談社, (1988)
116 **鈴木真治:** 指数はなぜ指数と云うのか. 第 24 回数学史シンポジウム, (2013)
117 **鈴木真治:** カントールによらない実数に非可算性の証明. 第 25 回数学史シンポジウム, (2014)
118 **朱世傑:** 算学啓蒙, (1299)[101]
119 **徐岳(撰); 甄鸞(注):** 数術記遺[102]
120 **銭宝琮;** 川原秀城(訳): 中国数学史 .みすず書房, (1990)
121 **高木貞治:** 新式算術講義. (1904: 筑摩書房 2008)

[101] http://www.wasan.earth.linkclub.com/sangakukeimo/sangaku.html 上巻 p.12
[102] http://www.wul.waseda.ac.jp/kotenseki/html/ni05/ni05_00865/index.html p.144,pp.150-151

122 **高木貞治:** 数学雑談.共立出版, (1935)
123 **竹内外史:** 数学基礎論の世界. 日本評論社, (1972)
124 **竹内敬人:** 人物で語る化学入門. 岩波書店, (2010)
125 **伊達宗行:** 「数」の日本史. 日本経済新聞出版社, (2007)
126 **田中一之; 角田法也; 鹿島亮; 菊池誠:** 数学基礎論講義. 日本評論社, (1997)
127 **田中一之:** ゲーデルに挑む. 東大出版会, (2012)
128 **玉野研一:** なっとくする無限の話. 講談社, (2004)
129 **田村松平(編):** ギリシャの科学. 中央公論社, (1980)
130 **辻下 徹:** 「複雑系叢書 7 複雑さへの関心」. 共立出版, (2006), pp.55－108
131 **程大位:** 新編直指算法統宗. 文盛堂, (1593)
132 **寺澤 順:** 現代集合論の探求. 日本評論社, (2013)
133 **照井一成:** コンピュータは数学者になれるのか? 青土社, (2015)
134 **長尾雅人(訳):** 金剛般若経(世界の名著 2 大乗仏典), 中央公論社, (1967)
135 **中村元(監修);前田專學 :** 相応部経典第二巻. 春秋社, (2012)
136 **野矢茂樹:** 無限論の教室. 講談社, (1998)
137 **秦 剛平(訳):** 民数記 七十人訳ギリシャ語聖書IV. 河出書房新社, (2003)
138 **林 隆夫:** インドの数学. 中央公論社, (1993)
139 **原田耕一郎:** モンスター 群のひろがり. 岩波書店, (1999)
140 **一松 信:** 数のエッセイ. 筑摩書房, (2007)
141 **松田卓也:** 人間原理の宇宙論. 培風館, (1990)
142 **松田卓也:** 巨大数の謎と宇宙の調和.天文月報, (8 月号 1984 年), pp.203-206
143 **三浦俊彦:** 論理学入門. 日本放送出版協会, (2000)
144 **宮本正尊(編):** 大乗仏教の成立史的研究. 三省堂出版, (1954)
145 **ミルトス・ヘブライ文化研究所(編)**: 民数記 I ヘブライ語聖書対訳シリーズ 7. ミルトス, (2013)
146 **吉田敦彦:** ＜数＞の比較神話学. エピステーメー, 朝日出版社, (11 月号 1976)
147 **吉田光由 ;** 大矢 真一(編): 塵劫記.(初版 1627, 岩波書店 1977)
148 **矢野道夫,** 伊東俊太郎(編),村上陽一郎(編): "ヘレニズム科学のインド化". 比較科学史の地平(講座科学史). 培風館, (1989)
149 **山本義隆:** 小数と対数の発見. 数学文化. 第 21 号～第 24 号(連載中). 日本評論社
150 **李迪;** 大竹茂雄(訳);陸人瑞(訳): 中国の数学通史. 森北出版, (2002)

附録

1. 巨大数関連略年表（～1995）

年	事項	巨大数
3万7千年前	イシャンゴ獣骨	21
2万5千年前	レボンボ獣骨	29
B.C.1440年	旧約聖書の出エジプト記, 民数記が現れる． （文字として書き下されたのはB.C.950-B.C.550頃）	603,550
殷（商）代 B.C.17世紀–1046	甲骨文字に「百」，「千」，「万」のもとの漢数字が現れる．	三万
春秋時代 B.C.770－403	「億」，「兆」，「経」，「姟」などの数詞が現れる	
B.C.7－8世紀頃	ニネヴェ定数(Nineveh Constant)	195兆9552億
B.C.450－100頃	後期バビロニアの巨大数	3^{92}, $9^{11}\cdot 12^{39}$
B.C.287－212頃	アルキメデスの「砂の計算者」， 「牛の問題」， 「ストマッキオン」	10^{63}, $10^{8\times10^{16}}$ 10^{206545} 17,152
B.C.1世紀頃	ジャイナ教の経典アヌオーガッダラスートラで巨大数の階梯	**超限順序数ε_0の構成に酷似**
1世紀頃	**法華経にアルキメデスの「砂の計算者」の影響？**	
南北朝時代 439－589	「孫子算経」　万万を億，兆，京，垓，秭，穣，溝，澗，正，載	
1－7世紀	華厳経成立 晋経：不可説轉轉 唐経：不可説不可説轉	 $10^{5\cdot2^{120}}$ $10^{7\cdot2^{122}}$
13世紀	マクシムス・プラニュースによるmillionの発明	million= mille+on
1299年	朱世傑　「算学啓蒙」載の後の極，恒河沙，阿僧祇，那由他，不可思議，無量数	
1475年	ヨハン・アダムが巨大数体系を創案	million,billions, trillions
1484年	ニコラ・シュケが巨大数体系を創案	million, billion, trillions
1520年	エティエンヌ・デュ・ラ・ロッシュがシュケの体系の発表	
1549年	ジャック・ペルチエ	milliards,billiards
1631年	吉田光由が「塵劫記」で数体系を発表	無量大数＝10^{68}
1634年	「塵劫記」の数体系が万進型中数法に統一される	
17世紀	ロバート・フックの頭で考えられる異なる考えの数	3,155,760,000
1690年	**ジョン・ロック『人間理解に関する随想：第１６章 数　第６節　数に対する名前の必要性』**	Units Millions Billions Trillions Quintrillions Sextillions Septillions Octillions Nonillions
1715年	**デヴィッド・グレゴリーのmagnus annus（劫年）計算**	25,000年或いは26,000年
1811年	アボガドロの法則提唱	
1837年	ポアソン　定理名に「大数の法則」を採用	
1861年	グラスマン　加法と乗法の帰納的定義	
1862年	**科学的表記が生まれる（アーネスト・エッセルバッハ）**	$a\times10^{b}$
1865年	アボガドロ定数の最初の測定	6.02×10^{23} （現在の値）
1871年	デュ・ボワ・レイモンによる初めての対角線論法	
1881年	パースが加法と乗法の帰納的定義	
1888年	デデキントが原始帰納関数を定義	
1890年	ポアンカレ回帰定理	
1895年	A. H. ベル　牛の問題の解の桁数を特定する	
1896年	ボルツマン　ポアンカレ周期を計算する	$10^{10^{10}}$
1903年	ハーディー階層	
1908年	ヴェブレン階層	
1915年	**用語“Scientific notation”が数学教育の論文で初出(F. L.グリフィン)**	
1925年	ヒルベルトが一般超冪演算を定義	
1928年	アッカーマン関数	
1930年	ラムゼーの定理	
1931年	ゲーデル数	

1933年	第1スキューズ数	$10^{10^{10^{34}}}$
1934年	スコーレムの超準自然数	超準元
1936年	R. ペータが多重再帰関数を定義	
1936年	チューリングの記述数	
1937年	ディラックの巨大数仮説	10^{40}
1938年	エディントン数	1.57×10^{79}
1938年	グーゴルが命名される	10^{100}
1944年	グッドステイン数列	
1947年	グッドステインがテトレーション，ペンテーション，ヘキセーションを命名（演算そのものは1925年にヒルベルトが既に定義済）	
1950年	ボレル　到達不能数	
1950年	スタインハウス　Megaを定義 多角形表記	
1953年	**リトルウッドがF.G.Hに近いアイデアを巨大数に適用することを示唆(現代巨大数論の基本思想)**	
1953年	グルツェゴルスチクがF. G. Hに近い概念を発表	
1955年	第2スキューズ数が発表される	$10^{10^{10^{963}}}$
1962年	ラドーのビジービーバー関数	
1965年	牛の問題がコンピュータを使って完全解決	
1960年代	モーザー数　多角形表記の拡張	
1971年	小グラハム数	
1976年	クヌースの矢印表記	$a \uparrow^c b$
1976年	4色問題がコンピュータを使って解決	
1977年	マルチン・ガードナーがクヌースの矢印表記を使ってグラハム数を紹介する	
1977年	RSA暗号	
1979年	ブレーカリー、ボロシュによるクヌースの矢印表記の研究	
1981年	コンウェイ　モンスター群の位数を特定	$\fallingdotseq 8 \times 10^{53}$
1981年	ミシェスルキーの巨大性公理	
1982年	カービーとパリスのヒドラゲーム	
1994年	リンデの確率論的インフレーション宇宙のポアンカレ回帰期間	$10^{10^{10^{10^{10^{1.1}}}}}$
1995年	コンウェイのチェーン表記	$a \rightarrow b \rightarrow c$

2. 原始の巨大数

太古の昔，未だ人類が共通概念，あるいは言葉として「数」を持つ以前から，我々の祖先は，個数の多寡についての素朴な認識能力を有していたと考えられている．レボンボ獣骨（2 万 5 千年前）やイシャンゴ獣骨（3 万 7 千年前）はこの仮説を裏付けるもので，何らかの数現象，例えば日数，の記録ではないかと推察されている．このような視点に立てば，当時の記録手段で表現出来ないほど大きな数を原始の巨大数と呼んでも良いのかもしれないが，一方で，すべての原始の民が，このような計数記録方法を持っていたとも考えにくい．コイサンマン[103]のように「ひとつ，ふたつ，みっつ，たくさん」と云う数え方で済ませていた部族が，少なからず居たであろう．この場合，「たくさん」を巨大数とみなすことの方が，自然であるように思われる．次に，彼らはどういった理由からこの「みっつ」以下と「たくさん」を分ったのであろうか．すべての原因を疑義なく特定することは難しいが，我々人類に先天的に与えられていた個数の瞬間把握能力が，少なからず影響していることは間違いあるまい．そこで有史以前の巨大数を個数の瞬間把握能力の限界と見なす観点から分析しておくことにする．

この問題の歴史は意外に古く，考えようによっては古代ギリシャの詩人シモーニデース[104]の「記憶宮殿」にまで遡ることもできよう．しかし，実験的な裏付けに基づいた論説は，1871 年，雑誌 Nature に掲載されたイギリスの経済学者，論理学者ジェヴァンズ（W.S.Jevons）（36 歳）による論文「数的な判別力」[105]が，初めてであると言われている．彼自身はその論文の中で，ハミルトン卿がこの問題を実験的に考察することを提案していることに触れ，「この主題はよりシステマティックに研究される価値が

---

103 いわゆる，ブッシュマン(元々の意味は「藪の中を移動して暮らす原始的な人」)のこと．この呼び名は，現在では差別用語とされている．

104 Simonides(B.C.556- B.C.468)　この時代を代表する詩人であり，母音の長短に区別を与えたり，王を仲裁して戦争を回避させたりすることも出来た人物である．また，お金が大好きだったことでも有名である．「記憶宮殿」とは，彼の編み出した一種の記憶術であり，そのきっかけについては，次のようなエピソードがある．パトロンのスコパスが戦車競走で勝利した祝宴で，シモーニデースは勝利を祝う頌歌を歌ったが，双子の神（カストルとポリュデウケス）の讃美に多くが割かれていたので，スコパスは怒って，詩作の代金を一部しか払わず，残りは双子の神に請求しろと言った．そのすぐ後，二人の若い男がシモーニデースに会いに来たと聞かされて，シモーニデースが宴会の部屋を出た途端，天井が崩れ落ちて，スコパスと客たちはその下敷きとなった．瓦礫を掘り返している間，シモーニデースは死んだ客たちの身元を調べるよう頼まれたのだが，部屋を出る前に人々がテーブルのどこにいたか，その座席の記憶から，身元を特定することができた．

105 "The Power of Numerical Discrimination," in Naturevolume III, 1871

あるように私には思えた」と記している.

この種の研究の現状を簡単にまとめたものとしては，ドゥアンヌの著書『The Number Sense [106]（数の感覚）』が出色である. キース・デブリンはドゥアンヌの説に従い，我々の数認識能力は 4 以上から計数的把握（カウンティング）に移るので，いくつかの言語における数詞の規則性は 4 以上から変わると次のように説明をしている.

対象物の数が 3 つを超えると，急にふるまいが変わるという事実は，脳が二つのメカニズムを使っている可能性を示唆している. 3 つ以下の集合については，ほとんど瞬時に，カウンティングなしに数が認識される. しかし，4 つ以上の集合については，カウンティングによって答がでていると考えるのが妥当ではないかと思われる.・・・ドゥアンヌが著書『The Number Sense（数の感覚）』に書いているパリ在住のある女性患者は，脳の損傷によって，ものをかぞえる能力がそこなわれ，一つずつチェックしていくことさえできなくなった. しかしコンピュータの画面上に三つ以下のドットをぱっと表示されると，即座に正しい数を言うことができた.・・・

『数学する遺伝子』[Devlin] pp.61-63

[107]この仮説は大変興味深いが，鵜呑みにすることは出来ない. 実際，4 から規則性が変わる数詞ばかりではなく，5 番目から変わる例も多々あり，これを受けて「数 4 と 5 の間に谷間」があると主張する論者もいるからだ.

例えば，内林政夫氏は『数の民族誌』[内林]pp.110-120 で，薬学の専門家らしく有機化学の最初に習う「メタン，エタン，プロパン，ブタン，ペンタン，ヘキサン，・・・」で，4 番目のブタンまでは固有の名がついているのに 5 番目のペンタン以降は数詞で呼ばれる[108]ようになったのはなぜか，と云う素朴な疑問に対して言語学の蘊蓄を駆使して分析されている. 著者の見るところ，氏がこの現象の根本的な原因とされているものは，この著書に引用されている次の L.Gerschel の言葉に尽きるように思われる.

目の前にならんでいるものを見て，直接の数感覚だけに頼り――つまり，あらかじめそれらを数えることなしに――その数をいいあてるとしたら，1, 2, 3, そして 4 まではいとも簡単. だが具体的数量を識別するわれわれの能力は，一般に 4 で行き止まる. 実際に 5 から先はすべて混沌となる. 数進行は 4 で止まる.

106 「数覚」と云う訳語は，小平邦彦氏が提唱され，数学業界で既に市民権を得ている別の意味を有する造語と被るので，出来れば「数の感覚」か，いっそ「ナンバーセンス」とでも訳してもらえたらと感じた.

107 ガモフが有名な著書の題名を“One Two …infinity”や“One Two Tree Four…infinity”ではなく『One Two Three…infinity』にしたのも同じ理由からだろう. 著者がそう推測する理由は本書の「第 1 章大きな数」の冒頭に現れる大きな数を言い合う笑い話にある.

108 ギリシャ語の数詞
mono(1),di(2),tri(3),tetra(4),penta(5),hexa(6),hepta(7),octa(8),nona(9),deca(10)

同様に，吉田敦彦氏は『<数>の比較神話学』の中でこのような現象，4 と 5 の谷間，が数詞の世界にも色濃く現れていることを次のように明言されている.

・・・ところがギリシャ語でこのような変化をするのは一から四までの数詞だけで，五から上の数詞はそれぞれ単一の形しかもたぬ無変化語である. この事情はインド・イラン語をはじめ，アルメニア語，バルト語，スラヴ語，ケルト語などでも同様であり，祖語に遡ることが確実と思われる. つまりインド・ヨーロッパ語族は，一から四までの数詞だけを，他の数詞と違って，名詞に合わせ性と格を変化させねばならぬ形容詞としてとり扱っていたのである.・・・このように一から四までの数を一眼で判別できる基本的数として，それ以上の一瞥によっては『多数』としか認知されぬ数と区別した意識は，近年提唱されるようになった有力な語源説によれば，インド・ヨーロッパ語の『五』の数詞にも反映している可能性があると思われる.

『<数>の比較神話学』[吉田]pp.40-41

更に，井上幸義氏は『数詞《4》と《5》の境界に横たわるものはなにか?』で，ロシア語の数詞の形態上及び統語上の著しい変化を 5 以上は受けなかったことから，「人間が数詞《4》と《5》によってそれぞれ規定される数量を認識する場合，根本的な相違があると仮定することができる.」とされ，この相違が何に起因されるのかを言語学的分析のみならず視覚心理学や脳神経学の実験結果まで考慮して詳しく研究されている.

イフラーは，生涯を懸けた大著『数字の歴史』[Ifrah]pp.110-113 の中で世界の古代文明の 17 民族 22 の記数法を紹介している. これによると，<<1>>, <<2>>については 100%が一，二やⅠ，Ⅱのように自然数と記号の線の本数が 1：1 対応しており，<<3>>については 96%，<<4>>については 58%が 1：1 対応している. しかし，<<5>>に至ると僅か 9%だけが 1：1 対応しており，その他の記数法はⅤのようにグループ分けされている. この 1：1 対応の適用率から<<3>>と<<4>>及び<<4>>と<<5>>の間に明らかな変り目が見える.

私見では，瞬間把握と計数把握の変わり目が厳密に決定されるかどうかは疑問である. しかし，これまでの考察から<<4>>,<<5>>あたりにその変わり目があると考えても問題はあるまい. そして，これが本節で定義した「原始の巨大数」に当たると云うことになろう.

余談であるが，数の瞬間把握と計数把握の区別は昔から数学者も認めて

おり，例えば高木貞治(29)は『新式算術講義』の中で次のように書いている．

> 吾人の者を数ふるや，一々心の裡に斯くの如き複雑なる作用を反復するまでもなく，一見して直ちに其数の三たり，又は五たるを知り得べきこと固より是あり.こは三個五個等少数の物にありては，之を数ふる作用は吾人の屢々反復せる所にして，三個の物，五個の物の与ふる全体の印象は，吾人の記憶の銘せられ，此記憶に扶けられて吾人は殆んど我心に数ふる作用をなすを知覚せずして直ちに其数を知ることを得るなり.此故に少数の物と雖も其物の排列，動静等が其数を知るの難易に関係すること甚だ多し，正しく列びて静止せるときは十個以下の物の数を一目して知ること難からざるべけれども，此等の物が運動せるとき，又は不規則に排列せられたる時は，必ずしも然らず．
>
> 『新式算術講義』[高木:1904] pp.13-14

数学書にしては，かなりつっこんだ認知心理学的[109]な数認識の有様を分析している．しかし，「十個以下の物の数を一目して知ること難からざるべけれ」は，実験結果から少し乖離している．高木自身の瞬間把握能力が，優れていたのかもしれない．

[109] Frege(36)は『算術の基礎』(1884)において「心理的なものを論理的なものから，主観的なものを客観的なものから，明確に分離すること.」(X)と云う第一原則を立てている．これは彼が数概念の探究を数学と論理学の共通課題と見なし，更に，当時の論理学や数の基礎理論に侵入している心理学的考察法・心理主義がこの共同作業にとって大きな妨げになっていると考えたからであろう．逆に見れば，当時の論理学や数の基礎理論において心理主義は当然のものとして蔓延っていた.高木のこの言説はその頃の数学書の影響ではないかと思われる．では，いつ頃，数学から心理主義は放逐されたのか．これに対する厳密な解答を著者は持たないが，少なくとも高木は，数の基礎を解説した『数学雑談』[高木:1935]では，上述のような心理主義的叙述を行っていない．

但し，これをもって，Frege の思想が 1935 年までに浸透したと結論付けるつもりはない．確かに，高木自身の対外的な，数学表現への影響はある程度あったかもしれないし，それをもって，数学理論からの心理学的考察法・心理主義の除去が進んだと言えなくもないが，一方で，数学者が数学を行うと云う根源的な活動の場における心理主義的側面を完全に否定する訳にはいかないからである．

3. グラハム数とスタインハウス数，アッカーマン数の比較問題

現代の巨大数論の魅力の一つは，指数表記では統制出来ないほど巨大な数同士の比較を行うところにあるのだが，その際，どうしても新しい表記方法が必要となる[110]．ここでは，古典的なクヌースの矢印表記を使って，巨大数としては比較的小さいが，指数表記では統制出来ない数同士の比較例として「$A(4,4) < Mega < ToriTori < A(5,5)$」を示す[111]．その際，アッカーマン関数$A(x,y)$にクヌースの矢印表記を使った明示的な表現式を与えておく．この表示式は簡便で，例えば，$A(x,y)$が二重帰納関数であることや$A(x,x)$が$x \geq 4$についてすべて 13 を因数に持つことを自明にする．

その後，歴史的に有名なグラハム数とモーザー数を比較して，「モーザー数＜グラハム数」を示した上で，この考察を精密化することにより，「多重アッカーマン数$A^{64}(3)$＜スタインハウス数＜グラハム数＜多重アッカーマン数$A^{65}(3)$」の証明を与えた．最後に現代巨大数論の基本アイテムとなった F.G.H を紹介し，クヌースの矢印表記を使って有限順序数に対応する F.G.H を明解な不等式で評価する．この評価式は上述の巨大数たちで，その生成増加関数が同じ階層の F.G.H に属しているもとのそうでないものを識別することを簡単にする．

出自の異なる指数では表現しきれない巨大数同士の比較としては細やかな評価が必要とされる生成関数が同じ F.G.H の階層に属している場合と異なる階層に属している場合を並説することで，F.G.H による計量化の有効性が見えるので，巨大数の魅力を伝えるには適切な例であると考えた．

巨大数の歴史からは若干離れるかもしれないが，まとまった書物も論文も殆どなく，散在的なネット情報だけに頼らざるを得ない巨大数論の現状を鑑みれば，この附録程度の概説でも興味を持たれた方には参考になるであろう．

Definition1 (クヌースの矢印表記)：

$x \uparrow y = x^y \quad for\, x,y \geq 1$

$x \uparrow\uparrow y = x \uparrow (x \uparrow\uparrow (y-1)) \quad for\, x \geq 1, y \geq 2$

$x \uparrow\uparrow\uparrow y = x \uparrow\uparrow (x \uparrow\uparrow\uparrow (y-1)) \quad for\, x \geq 1, y \geq 2$

. . . .

$x \uparrow^n y = x(n\text{個の}\uparrow)y \quad for\, x,n \geq 1, y \geq 2$

$x \uparrow^n 1 = x \quad for\, x,n \geq 1$

[110] Conway は次のような評価式を与えている.『数の本』[Conway]p.72
$(3 \to 3 \to 64 \to 2) = f^{64}(1) < f^{64}(4) = \text{グラハム数} < f^{64}(27) = (3 \to 3 \to 65 \to 2)$

[111] [Knuth]は実質的には定義を与えただけであり，この矢印表記の具体的な研究は 3 年後に Blakley と Borosh によって発表された[Blakley& Borosh]に持ち越された．しかし，彼等も矢印表記を具体的な巨大数の比較問題に応用することはしていない.ここでは応用を主眼として self-contained に叙述するが，主定理とは別に，参考として，[Blakley& Borosh]からいくつか有用な定理も証明抜きで紹介しておくので，興味を持たれた方は直接原論文に当たられたい．

Definition2 (スタインハウス・モーザーの多角形表記)：[112]

$m(1,y) = y^y$

$m(2,y) = \underbrace{m(1, m(1, \dots m}_{y\text{個の}m}(1,y) \dots)$

・・・・・・・・・・・・

$m(x,y) = \underbrace{m(x-1, m(x-1, \dots m}_{y\text{個の}m}(x-1,y) \dots)$

Definition3 (アッカーマン関数)：

$A: N \times N \to N$　は次のように帰納的に定義される関数とする．

i) $A(0,y) = y+1$　ⅱ) $A(x+1,0) = A(x,1)$　ⅲ) $A(x+1,y+1) = A(x, A(x+1,y))$

Definition4(いくつかの巨大数):

スタインハウスの$mega := m(3,2)$

トリトリ[113]$:= 3 \uparrow^3 3$

グラハム数　$G := f^{64}(4)$　但し，$f(x) = 3 \uparrow^x 3$

スタインハウス数[114]　$S := \mu^{64}(3)$　但し，$\mu(x) = m(x,2)$

特に，モーザー数は　$M := m(mega,2) = m(m(3,2),2) = \mu^2(3)$

アッカーマン数[115]は　$A^{64}(3) := A^{64}(3,3)$　によって定義する．

Proposition 1: トリトリは$mega$より大きい．すなわち，$\mu(3) = m(3,2) < 3 \uparrow^3 3 = f(3)$.

特に，$u(x) = x^x$ とおくと$m(3,2) = u^{258}(2)$，$v(x) = 3^x$ とおくと$3 \uparrow^3 3 = v^{3^{27}-1}(3)$である．

(proof)

$m(3,2) = m(2, m(2,2))$

$= \underbrace{m(1, m(1, \dots m}_{256\text{個の}m}(1, m(1, m(1,2))) \dots)$　　$m(1, m(1,2)) = m(1, 2^2) = 4^4 = 256$ より

$= \underbrace{m(1, m(1, \dots m}_{258\text{個の}m}(1,2) \dots)$

$u(x) = x^x$ とおくと

$m(3,2) = u^{258}(2)$

一方，

$3 \uparrow^3 3 = 3 \uparrow^2 (3 \uparrow^2 3)$

$= \underbrace{3 \uparrow (3 \uparrow (3 \uparrow \cdots (3 \uparrow 3)}_{3^{27}\text{個の}3} \dots)$

$= 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\Big\} 3^{27}$ 個の 3

$v(x) = 3^x$ とおくと

$3 \uparrow^3 3 = v^{3^{27}-1}(3)$

さて，

$u(x) = x^x < (3^x)^x = 3^{x^2} < 3^{3^x} = v^2(x)$　$for\ x \geq 2$.

これより

$m(3,2) = u^{258}(2) < v^{2\times258}(2) < v^{2\times258}(3) < v^{3^{27}-1}(3) = 3 \uparrow^3 3 = f(3)$.

Q.E.D.

急激に増加する関数としてはアッカーマン関数が有名であるが，その増加状況を理解する上で次の表現は有用である．

Proposition 2:

$$A(x,y) = \begin{cases} 2+y & for\ x=1,\ y \geq 1 \\ 2y+3 & for\ x=2,\ y \geq 1 \\ (2 \uparrow^{x-2} (y+3)) - 3 & for\ x \geq 3,\ y \geq 1 \end{cases}$$

(proof)

$A(1,y) = A(0, A(1,y-1))$　Definition3・ⅲ)

$= A(1,y-1)+1$　Definition3・i)

$= A(0, A(1,y-2))+1$　Definition3・ⅲ)

$= A(1,y-2)+2$　Definition3・i)

・・・・・・・・・・・・・・

$= A(1,0)+y$　Definition3・i)

$= A(0,1)+y$　Definition3・ⅱ)

$= 2+y$　Definition3・i)

$A(2,y) = A(1, A(2,(y-1))$　Definition3・ⅲ)

$= A(1, A(1, A(2,y-2)))$　Definition3・ⅲ)

・・・・・・・・・・・・・・

$= \underbrace{A(1, A(1, \dots A(1, A}_{y+1\text{個の}A}(2,0)) \dots)$　Definition3・ⅲ)

$= A(1, A(1, \dots A(1, A(1,1)) \dots)$　Definition3・ⅱ)

$= \underbrace{A(1, A(1, \dots, A}_{y\text{個の}A}(1,3)) \dots)$　$A(1,y) = 2+y$

---

[112] オリジナルの Steinhaus の多角数とは少し定義が異なるが本質的な部分は踏襲している．

[113] アメリカのグーゴロジスト，Jonathan Bowers の命名で，現在では，多くのグーゴロジストに親しまれている．

[114] Steinhaus がこのような定義をしたわけではない．しかし，彼の多角数の定義から自然に定義出来るものであるので彼の名前を冠した．もちろん，64 回のイテレーションは Graham 数との比較を意識しており，同じイテレーションで比較することに意味があると考えたからである．

[115] 一般的に認知された定義ではないが，定義の意味するところは明解であろう．

$$= \underbrace{A(1, A(1, \dots, A}_{y-1\text{個の}A}(1, 2+3)) \dots) \qquad A(1,y) = 2+y$$

$$= \underbrace{A(1, A(1, \dots, A}_{y-2\text{個の}A}(1, 2+2+3)) \dots) \qquad A(1,y) = 2+y$$

. . . .

$$= 2y + 3 \qquad A(1,y) = 2+y$$

$x \geq 3$ については x についての帰納法によって証明する.

$x = 3$のとき

$$A(3,y) = A(2, A(3, (y-1)) \qquad \text{Definition3・iii)}$$

. . . .

$$= \underbrace{A(2, A(2, \dots, A}_{y+1\text{個の}A}(3,0) \dots)) \qquad \text{Definition3・iii)}$$

$$= \underbrace{A(2, A(2, \dots, A}_{y+1\text{個の}A}(2,1) \dots)) \qquad \text{Definition3・ii)}$$

$$= \underbrace{A(2, A(2, \dots, A}_{y\text{個の}A}(2, 2 \cdot 1 + 3) \dots)) \qquad A(2,y) = 2y+3$$

$$= \underbrace{A(2, A(2, \dots, A}_{y-1\text{個の}A}(2, 2(2 \cdot 1 + 3) + 3) \dots)) \qquad A(2,y) = 2y+3$$

$$= \underbrace{A(2, A(2, \dots, A}_{y-2\text{個の}A}(2, 2(2(2 \cdot 1 + 3) + 3) + 3)) \dots) \qquad A(2,y) = 2y+3$$

. . . .

$$= \underbrace{2(\dots(2(2}_{y+1\text{個の}2} \cdot 1 + \underbrace{3) + 3) + 3) \dots) + 3}_{y+1\text{個の}3}$$

$$= 2^{y+1} + 3(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^y)$$

$$= 2^{y+3} - 3$$

$$= 2 \uparrow (y+3) - 3 \qquad \text{Definition1}$$

xのとき　$A(x,y) = (2 \uparrow^{x-2} (y+3)) - 3 \quad for\, x \geq 3,\ y \geq 1$　が成立すると仮定する.

$x+1$のとき

$$A(x+1, y) = \underbrace{A(x, A}_{2\text{個の}A}(x+1, y-1)) \qquad \text{Definition3・iii)}$$

$$= \underbrace{A(x, A(x, A}_{3\text{個の}A}(x+1, y-2))) \qquad \text{Definition3・iii)}$$

$$= \underbrace{A(x, A(x, A(x, A}_{4\text{個の}A}(x+1, y-3)))) \qquad \text{Definition3・iii)}$$

. . . .

$$= \underbrace{A(x, A(x, A(x, \dots A(x, A}_{y+1\text{個の}A}(x+1, 0)) \dots))) \qquad \text{Definition3・iii)}$$

$$= \underbrace{A(x, A(x, A(x, \dots A(x, A}_{y+1\text{個の}A}(x, 1)) \dots))) \qquad \text{Definition3・ii)}$$

$$= \underbrace{A(x, A(x, A(x, \dots A}_{y\text{個の}A}\underbrace{(x, (2 \uparrow^{x-2} 4) - 3)}_{1\text{個の}\uparrow^{x-2}} \dots))) \qquad \text{帰納法の仮定より}$$

$$= \underbrace{A(x, A(x, A(x, \dots,}_{y-1\text{個の}A}\underbrace{(2 \uparrow^{x-2} (2 \uparrow^{x-2} 4) - 3)}_{2\text{個の}\uparrow^{x-2}} \dots))) \qquad \text{帰納法の仮定より}$$

. . . .

$$= \underbrace{2 \uparrow^{x-2} 2 \uparrow^{x-2} \dots 2 \uparrow^{x-2}}_{y+1\text{個の}\uparrow^{x-2}} 4 - 3 \qquad \text{帰納法の仮定より}$$

$$= \underbrace{2 \uparrow^{x-2} 2 \uparrow^{x-2} \dots 2 \uparrow^{x-2} 2}_{y+2\text{個の}\uparrow^{x-2} = y+3\text{個の}2} - 3 \qquad 4 = 2 \uparrow 2 = 2 \uparrow^{x-2} 2 \text{ より}$$

$$= 2 \uparrow^{x-1} (y+3) - 3$$

Q.E.D.

Corollary: $A(x) = \begin{cases} 3 & for\, x = 1 \\ 7 & for\, x = 2 \\ (2 \uparrow^{x-2} (x+3)) - 3 & for\, x \geq 3 \end{cases}$

Remark: $\uparrow$ 記号の指数が変数であることは，この関数が二重帰納関数であることを表している．また，このクヌースの記号があるので上記のように簡潔に表現できるが，指数だけを使って表記すると$A(4) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{7\text{個}} - 3$　まではなんとか表せるが，$A(5)$では難しくなる．ちなみに，$A(1) = 3, A(2) = 7, A(3) = 61$ は素数だがそれ以外の$A(n)$はすべて 13 を約数として含むので素数ではない．その証明は本論から少し外れるが，簡単であるし，この表記の秀逸性を示す例にもなっているので紹介しておく．

$$\boldsymbol{A(n) \equiv 0 \ \ mod(13) \ \ for\, n \geq 4}$$

次の命題が示せれば上記の命題はその系として導かれる．

$$\boldsymbol{2^{2^{2^{2^f}}} \equiv 3 \ \ mod(13) \ \ for \ \ f \geq 0} \qquad \textbf{但し，} \boldsymbol{f \in N}$$

(proof)

$f \geq 0$　ならば　$g \in N$が存在して $2^f = g + 1$　となる．

$$2^{2^{2^f}} = 2^{2^{g+1}} = 2^{2^g \times 2} = 2^{2 \times 2^g} = (2^2)^{2^g} = 4^{2^g}$$

$$2^{2^{2^{2^f}}} = 2^{4^{2^g}} = 2^{4^{2^g} - 4} \cdot 2^4 = 2^{4 \cdot (4^{2^g - 1} - 1)} \cdot 16$$

$4^{2^g-1} \equiv 1 \;\; mod(3)$ なのである$k \in N$が存在して，$4^{2^g-1} - 1 = 3k$

$$2^{2^{2^{2^f}}} = 2^{4\cdot 3k} \cdot 16 = 2^{12\cdot k} \cdot 16 = (2^{12})^k \cdot 16 \qquad (*)$$

$2^{12} \equiv 1 \;\; mod(13)$　フェルマーの小定理より

$$2^{2^{2^{2^f}}} = (2^{12})^k \cdot 16 \equiv 1^k \cdot 3 = 3 \quad mod(13)$$

Q.E.D.

Lemma1 : $logb \cdot b > 1 \;\; for\, b \geq 2.$
(proof)　容易に証明出来る．　Q.E.D.

Lemma2 : $b \cdot c \leq b^c \; (= b \uparrow c) \quad for\, b, c \geq 2.$
(proof)　Lemma1 を使って，容易に証明出来る．　Q.E.D.

Lemma3: $b \uparrow^x c \leq b \uparrow^{x+1} c \;\; for\;\, b, c \geq 2, x \geq 1.$
(proof)　Lemma2 を使って，x についての帰納法によって証明する．　Q.E.D.

Lemma4[116]:
$$(a \uparrow^x b) \uparrow^x c \leq a \uparrow^x (b \cdot c) \leq a \uparrow^x (b \uparrow c) \leq a \uparrow^x (b \uparrow^2 c) \leq \cdots \leq a \uparrow^x (b \uparrow^{x-1} c)$$
$$\leq a \uparrow^x (b \uparrow^x c) \qquad for\, a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2, x \geq 1$$
(proof)　Lemma2，Lemma3 を使って，x についての帰納法によって証明する．　Q.E.D.

Lemma5 : $m(n,3) < m(n+1,2) \;\; for\, n \geq 2.$
(proof)　n についての帰納法によって証明する．　Q.E.D.

Proposition 3:　(Case1)　$3 \uparrow^n y \leq m(n,y) \;\; for \;\; y \geq 3.$　　等号成立は$n = 1, y = 3$
(Case2)　$3 \uparrow^n 2 \leq m(n,2) \;\; for \;\; y = 2, n \geq 2.$
(proof)　n についての帰納法によって Case1 と Case2 をそれぞれ証明する．Case2 の証明には Case1 と Lemma5 を使う．　Q.E.D.

Lemma4 と Proposition3 の不等式を使うと，Proposition 1 を簡単に拡張出来る．
Corollary : $A(4) < mega < tori \cdot tori < A(5)$
(proof)
中央の不等式は Proposition 1 で証明済．
左側の不等式は Proposition 2 の Corollary と Proposition 3 の Case1 を使って証明する．
右側の不等式は Proposition 2 の Corollary と Lemma4 を使って証明する．　Q.E.D.

Proposition 4:　　$m(n,x) < x \uparrow^{2n} 3 \;\; for \;\; x \geq 3.$
(proof) Lemma4 を使って，n についての帰納法によって証明する．　Q.E.D.

Corollary: $3 \uparrow^n x < x \uparrow^{2n} 3 \quad for \;\, n \geq 1, x \geq 3.$
Propsition 3 の Case1 と Proposition4 より証明する．

Lemma6: $2x + 1 \leq 3 \uparrow^n x \;\; for\, n \geq 1, x \geq 1.$
(proof)　nについての帰納法により証明する．　Q.E.D.

Lemma7: $2 \cdot (3 \uparrow^n 3) + 1 \leq 3 \uparrow^{n+1} 3 \;\; for\, n \geq 1.$
(proof)　Lemma6 を使って証明する．　Q.E.D.

Lemma8:
$$\overbrace{3 \uparrow^{2\times\left(3\uparrow^{\cdot^{\cdot^{2\times(3\uparrow^3 3)}}} 3\right)+1} 3}^{n+1\text{個の}\uparrow} \leq \underbrace{3 \uparrow^{\left(3\uparrow^{\cdot^{\cdot^{(3\uparrow^4 3)}}} 3\right)} 3}_{n+1\text{個の}\uparrow}$$
(proof)　Lemma7 を使って証明する．　Q.E.D.

Proposition 5: グラハム数はモーザー数より大きい．
すなわち，$M = m(m(3,2),2) < f^{64}(4) = G$ ．
(proof)　Proposition 4 と Lemma7 を使って証明する．　Q.E.D.

これでグラハム数がモーザー数より大きいことが示されたわけであるが，証明を見れば分るようにグラハム数が圧倒的に大きすぎて不等式としての面白みに欠ける．もっと，僅差での評価が決定される例を与えておく．

Proposition 6: $\mu^n(3) < f^n(4)$.
(proof)　Proposition 1，Proposition 4 と Lemma8 を使って証明する．　Q.E.D.

Corollary: グラハム数はスタインハウス数よりも大きい．$S = \mu^{64}(3) < f^{64}(4) = G$

Lemma9: $x + 3 < 3 \uparrow^{x-2} 3 \quad for\, x \geq 3$.
(proof)　xについての帰納法により証明する．　Q.E.D.

---

116 この命題をより精密化した不等式がある．(Proposition 9)

Lemma10: $A(x) = (2 \uparrow^{x-2} (x+3)) - 3 < 3 \uparrow^{x} 2 \quad for\ x \geq 3$.

(proof)　Proposition 2 の Corollary と Lemma9 を使って証明する.　　Q.E.D.

Proposition 7: $A^n(3) < \mu^n(3) < f^n(4) < A^{n+1}(3)$.

(proof)　第 2 不等式は既に Proposition6 で証明済なので，第 1 不等式を Lemma10 と Proposition 1，Proposition 3 の Case2，Lemma9，Proposition 2 の Corollary を使い，第 3 不等式を Lemma4 とProposition 2 の Corollaryを使って，nについての帰納法により証明する.　　Q.E.D.

Corollary:スタインハウス数はアッカーマン数より大きく，グラハム数より小さい.

つまり，$A^{64}(3) < \mu^{64}(3) < f^{64}(4)$

Definition5:　(急増加階層[F.G.H])[117]

μを基本列（その上限が極限順序数であるような狭義増加順序数列）がμよりも小さなすべての極限順序数に割り当てられるような大きな可算順序数とする.

$\alpha < \mu$に対する関数族　$F_\alpha: N \to N$　の急増加階層は以下のように定義される：

$F_0(x) = x + 1$

$F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^x(x)$

$F_\alpha(x) = F_{\alpha[x]}(x)$　　αは極限順序数

但し，順序数αに対する基本列$\{\alpha[x]: x < \omega\}$は次のように定義する.

(1) $\alpha = 0$ のとき $\alpha[x] = 0$

(2) $\alpha = \beta + 1$ のとき $\alpha[x] = \beta$

(3) $\alpha = \beta + \omega^{\gamma+1}$ のとき $\alpha[x] = \beta + \omega^{\gamma} \cdot x$ [118]

(4) $\alpha = \beta + \omega^{\delta}$ でδが極限数のとき $\alpha[x] = \beta + \omega^{\delta[x]}$

Lemma11:　$x \leq 2 \uparrow^{n+1} (x-2) \qquad for\ n \geq 1, x \geq 4$

(Proof)　Lemma3 を使って，nについての帰納法により証明する.　　Q.E.D.

---

[117] 急増加階層の証明論での有名な応用例の一つに次のクライゼルの定理がある. これを使って，「グッドステイン数列が必ず 0 に終結する」ことが PA（ペアノ算術）では証明出来ないことが示される. 『数学基礎論講義』[田中:1997]

Theorem $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \phi(x_1, \cdots, x_n, y)$ (ϕはΣ_1)が PA で証明出来るとすれば

$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y < F_\alpha(max\{x_1, \cdots, x_n\} + 1)\ (\phi(x_1, \cdots, x_n, y))$

が真となるような急増加関数F_α ($\alpha < \varepsilon_0$)が存在する.

[118] $\alpha[x] = \beta + \omega^{\gamma}(x+1)$と定義している本もある. (例えば,『数学基礎論講義』[田中:1997])

Proposition 8:

$x < F_0(x) \leq 2x \quad for\ x \geq 1$　(等号成立は$x = 1$の場合)

$2x \leq F_1(x) < 2 \uparrow x \quad for\ x \geq 3$

$2 \uparrow^{n-1} x < F_n(x) < 2 \uparrow^{n-1} (2 \uparrow^{n-1} x) < 2 \uparrow^{n} x \quad for\ x \geq 4$

(Proof)

$n = 0$の場合　　$x < x + 1 \leq 2x \quad for\ x \geq 1$

$n = 1$の場合　　$2x \leq 2x < 2^x = 2 \uparrow x \quad for\ x \geq 3$

$n \geq 2$の場合は　$2 \uparrow^{n-1} x < F_n(x) < 2 \uparrow^{n} x \quad for\ x \geq 4$　を n についての帰納法で示す.

先ず，右の不等式を示す.

$n = 2$の場合

$F_2(x) = F_1^x(x)$

$\leq (2 \uparrow x) \cdot x$

$< (2 \uparrow x) \uparrow x$　　Lemma2　$2 \uparrow x, x \geq 2$ より，但し，$x \geq 4$なので等号は成立せず.

$\leq 2 \uparrow x^2$　　Lemma4　$2, x \geq 2$ より

$\leq 2 \uparrow 2^x$　　Lemma2　$2, x \geq 2$ より

$\leq 2 \uparrow (2 \uparrow \underbrace{(\cdots (2 \uparrow 2) \cdots)}_{x-2\text{ 個の }2}) \quad for\ x \geq 4$　　Lemma11 より

$= 2 \uparrow^2 x$

nの場合 $F_n(x) < 2 \uparrow^{n-1} (2 \uparrow^{n-1} x) < 2 \uparrow^{n} x$ が成立すると仮定する.

$n + 1$の場合

$F_{n+1}(x) = F_n^x(x)$　　Definition5 より

$\leq \underbrace{2 \uparrow^{n-1} (2 \uparrow^{n-1} (\cdots (2}_{2x\text{個の }2} \uparrow^{n-1} x) \cdots))$　　帰納法の仮定より

$= \underbrace{2 \uparrow^{n-1} (2 \uparrow^{n-1} (\cdots (2}_{2x-1\text{ 個の }2} \uparrow^{n-1} \underbrace{(2 \uparrow^{n-2} (2 \cdots \uparrow^{n-2} (2 \uparrow^{n-2} 2}_{x\text{個の }2}) \cdots))) \cdots))$

$< \underbrace{2 \uparrow^{n-1} (2 \uparrow^{n-1} (\cdots (2 \uparrow^{n-1} 2}_{3x-1\text{ 個の }2}) \cdots))$　　Lemma3 より

$< 2 \uparrow^{n} 3x$

$< 2 \uparrow^{n} 2^x$　　　$x \geq 4$　なので

$\leq 2 \uparrow^{n} (2 \uparrow^{n} x)$　　　$for\ x \geq 4$　Lemma3 より

$\leq 2 \uparrow^{n} \left(2 \uparrow^{n} (2 \uparrow^{n+1} (x-2))\right) \quad for\ x \geq 4$　Lemma11 より

$= 2 \uparrow^{n} (2 \uparrow^{n} \underbrace{(2 \uparrow^{n} (\cdots (2 \uparrow^{n} 2) \cdots))}_{x-2\text{ 個の }2})$　　Definition1 より

$= 2 \uparrow^{n+1} x$　　Definition1 より

最後に，左の不等式　$2 \uparrow^{n-1} x < F_n(x)$　を n についての帰納法で示す.

$n = 2$の場合

$2 \uparrow x = 2^x < 2^x \cdot x \leq \mathrm{F}_2(x) = 2^x \cdot x$　なので成立している．

nの場合 $2 \uparrow^{n-1} x < \mathrm{F}_n(x)$ が成立していると仮定する．

$n+1$の場合

$$
\begin{aligned}
2 \uparrow^n x &< 2 \uparrow^n (x+1) \\
&= \underbrace{2 \uparrow^{n-1} (2 \uparrow^{n-1} (\cdots (2 \uparrow^{n-1} 2}_{x+1\text{個の}2}) \cdots)) \\
&< \underbrace{2 \uparrow^{n-1} (2 \uparrow^{n-1} (\cdots (2 \uparrow^{n-1}}_{x\text{個の}2} x) \cdots)) \quad x \geq 4 \text{ より} \\
&< \mathrm{F}_n^x(x) \quad \text{帰納法の仮定より} \\
&= \mathrm{F}_{n+1}(x) \quad \text{Definition5 より}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Corollary:

1)　$2 \uparrow^{x-1} x < \mathrm{F}_\omega(x) < 2 \uparrow^{x-1} (2 \uparrow^{x-1} x) < 2 \uparrow^x x \quad for\ x \geq 4$

2)　$\mathrm{F}_\omega(x-2) < A(x) < \mathrm{F}_\omega(x+3) \quad for\ x \geq 4$

(Proof)

$\mathrm{F}_\omega(x) = \mathrm{F}_x(x)$　　　Definition5 より

従って，Proposition 8 から直ちに 1)は導かれる．

また，この 1)と Proposition 2 Corollary から 2)が導かれる．　Q.E.D.

Remark：$\alpha < \omega$　に対する F.G.H は Grzegorczyk 階層と呼ばれており，任意な原始帰納関数はこの階層のどこかに所属しているし，任意な$\alpha < \omega$に対する$\mathrm{F}_\alpha(x)$は原始帰納関数である．2)よりアッカーマン関数$A(x)$が Grzegorczyk 階層に属していないことが分るが，これはアッカーマン関数が原始帰納関数ではないことと整合的である．

Lemma12: $a \uparrow^n (x-1) + 1 < a \uparrow^n x \quad a \geq 2, x \geq 2$

$a \uparrow^n (x-1) + 2 \leq a \uparrow^n x$

(Proof)　Lemma2, Lemma3 を使って，nについての帰納法により証明する．　Q.E.D.

Lemma13: $\underbrace{a \uparrow^n (a \uparrow^n (\ldots (a \uparrow^n (a \uparrow^n (a+1)}_{b\text{個の}a} + 1) + 1) \ldots) + 1) + 1 < a \uparrow^{n+1} (b+1) \quad a \geq 2$

(Proof)　Lemma12 を使って，nについての帰納法により証明する．　Q.E.D.

Lemma14: $2 \cdot a \uparrow^{n+1} b < a \uparrow^n (a \uparrow^{n+1} (b-1) + 1) \quad for\ a \geq 2$

(Proof)　Lemma12 を使って，nについての帰納法により証明する．　Q.E.D.

Lemma15:（分配不等式）　$a \uparrow^n b + a \uparrow^n c \leq a \uparrow^n (b+c) \quad for\ a \geq 2$

(Proof)　nについての帰納法により証明する．　Q.E.D.

Proposition 9: $a \uparrow^n (b+c-1) \leq (a \uparrow^n b) \uparrow^n c < a \uparrow^n (b+c) \quad for\ \ n \geq 2, a \geq 2$

[Blakley& Borosh]による．証明は省略する．

Proposition10:　不等式のまとめ

(1) 2 項間の大小

$$
\begin{aligned}
a + b &\leq a \cdot b && for\ a,b \geq 2 \\
&\leq a^b\ (= a \uparrow b) && for\ a,b \geq 2 && \text{Lemma2 より} \\
&\leq a \uparrow^n b \quad \leq a \uparrow^{n+1} b && for\ a,b \geq 2, n \geq 1 && \text{Lemma3 より}
\end{aligned}
$$

$a = b = 2$　の場合だけすべての等号が成立する

(2) 計算の順序による大小

$$
\begin{aligned}
a \uparrow^n (b+c-1) < (a \uparrow^n b) \uparrow^n c &< a \uparrow^n (b+c) && for\ \ n \geq 2, a \geq 2 && \text{Proposition9 より} \\
&< a \uparrow^n (b \cdot c) && for\ b,c \geq 2 && \text{(1)の第 1 不等式より} \\
&< a \uparrow^n (b \uparrow^m c) && for\ b,c \geq 2, m \geq 1 && \text{(1)の第 2 不等式より}
\end{aligned}
$$

(3) 演算要素の影響差

$$
\begin{aligned}
a \uparrow^n b &< a \uparrow^n b + 1 \\
&\leq (a+1) \uparrow^n b && for\ \ n \geq 1, a \geq 2, b \geq 1 \\
&< a \uparrow^n (b+1) && for\ \ n \geq 2, a \geq 3 \\
&\leq a \uparrow^n 2b && for\ \ n \geq 1, a \geq 1, b \geq 1 \\
&< a \uparrow^{n+1} b && for\ \ n \geq 1, a \geq 3, b \geq 3
\end{aligned}
$$

(Proof)

(3)の第 2 不等式の証明　nについての帰納法により証明する．　Q.E.D.

(3)の第 3 不等式の証明

$n = 2$の場合

$$\underbrace{(a+1)^{\cdot^{\cdot^{(a+1)}}}}_{b\text{個}} < \underbrace{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}_{b+1\text{個}} \quad for\ a \geq 3$$

を示すために，敢えて次式を証明する．

$$\underbrace{(a+1)^{\cdot^{\cdot^{(a+1)}}}}_{b\text{個}} < \underbrace{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}_{b+1\text{個}} \times a^{-1} \quad for\ a \geq 3$$

nの場合，次式が成立すると仮定する．

$(a+1) \uparrow^n b < a \uparrow^n (b+1) \qquad for\ \ n \geq 2, a \geq 3$

両辺が自然数値でなければならないことを考慮すると，この仮定は次のように言いかえることが出来る．

$(a+1)\uparrow^n b \le a\uparrow^n (b+1)-1 \qquad for\ \ n\ge 2, a\ge 3$

$n+1$の場合を証明する．

Q.E.D.

Remark：$n=1$の場合，この不等式は一般的には示せない．実際，

$(a+1)^b < a^{b+1}$　が成立するとすると，$(1+\frac{1}{a})^b < a$　であるが

$1+\frac{b}{a} < (1+\frac{1}{a})^b$　なので　$b \ge a(a-1)$ に取れば

$a = 1+\frac{a(a-1)}{a} < (1+\frac{1}{a})^{a(a-1)} \le (1+\frac{1}{a})^b < a$ となって矛盾する．

$n=2$の場合についても，$3\uparrow^2 2 = 3^3 > 2^{2^2} = 2\uparrow^2 3$　なのでこの不等式は一般には成立せず，

$a\ge 3$　の条件は必要なのである．

(3)の第５不等式の証明

$b=3$の場合

$a\uparrow^n (2\cdot 3) = a\uparrow^n 6$

$\quad < a\uparrow^n (a\uparrow^n a) \qquad a\ge 3$　より　$6 < a\uparrow^n a$

$\quad = a\uparrow^{n+1} 3$

bの場合，次式が成立すると仮定する．

$a\uparrow^n (2b) < a\uparrow^{n+1} b$

$b+1$の場合

$a\uparrow^n 2(b+1) = \underbrace{a\uparrow^{n-1} \dots \uparrow^{n-1} a}_{2b+2\text{ 個の}a}$　Definition1 より

$\quad < a\uparrow^{n-1} a\uparrow^{n-1} (a\uparrow^{n+1} b)$　帰納法の仮定より

$\quad < a\uparrow^n (a\uparrow^{n+1} b)$　Lemma12 より

$\quad < a\uparrow^{n+1} (b+1)$

Q.E.D.

以下の定理は[Blakley& Borosh]による．証明は省略する．

Proposition11:　$a\uparrow^n b = c\uparrow^n d \quad n\ge 2$　ならば　$a=c$ かつ $b=d$．

Corollary1: $a\uparrow^n b = c\uparrow^{n+1} d \quad n\ge 2$　ならば　$a=c$ かつ $b = c\ \uparrow^{n+1}(d-1)$.

Corollary2：$a\uparrow^n b = c\uparrow^m d \quad n\ge 2$　ならば　$a=c$．

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

353

FLUID DYNAMICS AND HEAT THEORY BY POISSON
POISSON の流体力学と熱理論

流体数理古典理論研究所 増田 茂
SHIGERU MASUDA
RESEARCH WORKSHOP ON CLASSICAL FLUID DYNAMICS,
EX. LONG-TERM RESEARCHER, INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES, KYOTO UNIV.

ABSTRACT.

We discuss the fluid dynamics and the heat theory by Poisson. These two theories or themes are studied in the arrival of continuum.

The hydrodynamists like Navier, Poisson and Cauchy propose at first the wave equations in the elasticity and next, the fluid equations in incompressibility since Euler and Lagrange succeeded. Poisson and Navier discuss the activity of molecules in regard to the attraction and repulsion in rivalry to each other. Navier depends on the Fourier's idea comes from the theory on heat analysis. Fourier and Poisson propose the heat theories in rivalry to each other, from the viewpoint of mathematical physics on the continuum. These all are, the mathimatical physicians, but we think, Poisson is an acuter and severer observer on the physics than others. From here, the both theories and deductive method of heat theory are different, however, the results are the same one. Although regretably, Poisson misses the historical priority in the fluid dynamics and the heat theory, however, contributes to reform the preceding theories.

Our motivation in this paper is to consider the Poisson's singularity from the mathematical viewpoints.

Mathematics Subject Classification 2010 : 01Axx, 76A02, 76Mxx, 76-02, 76-03, 33A15, 35Qxx 35-xx, 35J10.
Key words. The Navier-Stokes equations, fluid dynamics, fluid mechanics, hydrostatics, hydrodynamics, hydromechanics, thermodynamics, heat difusion equations, wave equations, Kepler problems, Schrödinger equations, microscopically-descriptive equations, mathematical history, physico-mathematics, trigonometric series, Fourier series, quantum mechanics.

CONTENTS

Date: 2016/01/13.

1. Introdiction

[1,2,3]

1.1. What is the wave, the heat and the fluid ?

Kepler (1571-1630) 1634 [34] proposes the laws on motions of planets in reserving many analytical open problems. Huygens (1629-95) proposes and Fresnel (1788-1827) corrects the wave principles. Euler 1748 [16] proposes the wave motion of string. Navier [52] and Poisson [73] propose the fluid equations, successively after the erastic wave equations of Navier's [51] and Poisson's [73] respectively. After Fourier 1822 [22] completes the heat theory, Fourier 1833 [28] combines his communication theory with the Euler equation 1755 [17] and puts the heat equation of motion in fluid, in which he expresses the molecular motion with communication and transportation of molecules before Boltzmann's modeling with collision and transportation.

How does the wave occur ? Newton 1686 [55] shows his principle on the wave motion in the water pressure.

> The pressure doesn't propagate by the fluid of the secondary linear strait, except for the particle of adjacent fluid. If the adjacent particles a, b, c, d, e

[1]Translation from Latin/French/German into English mine, except for Boltzmann.

[2]To establish a time line of these contributor, we list for easy reference the year of their birth and death: Newton (1643-1727), Euler (1707-83), d'Alembert (1717-83), Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Fourier (1768-1830), Navier (1785-1836), Poisson (1781-1840), Cauchy (1789-1857), Dirichlet (1805-59), Riemann (1826-66), Boltzmann (1844-1906), Hilbert (1862-1943), Schrödinger (1887-1961).

[3]We use ($\Downarrow$) means our remark not original, when we want to avoid the confusions between our opinion and sic. ($\Leftarrow$) means our translation in citing the origin.

propagate in the straight line, press from a to e ; the particle e progresses separately into the oblique points f and g, and without sustained pressure, and moreover, to the particles h and k ; m as it is fixed in another direction, it presses for the particle into propping up ; the unsustained pressure goes separately into the particles l and m, and as this way, it follows successively and limitlessly. thus it will occur so many time, inaccurately, to the particle in the indirect adjacency. Q.E.D. [55, pp.354-5] (trans. from Latin, mine.)

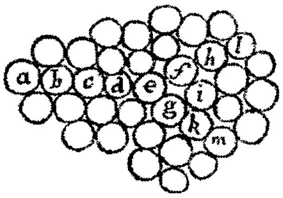


fig.1 The wave pushed with particle by Newton's hypothesis in 1686

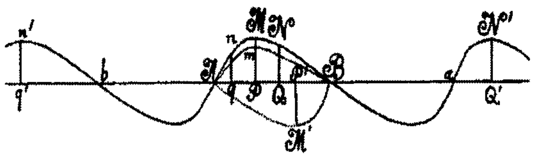


fig.2 The wave of a cord by Euler in 1748

What is the fluid ? According to today's diffinition, it is called the fluid is a *limitlessly free continuum.* Where does *continuum* come from in the historical view ?

1.2. General remark. Fluid Dynamics and Heat Theory by Poisson.

1. We discuss historical development of classical fluid dynamics and heat theory from the viewpoint of mathematical history, in particular, of Poisson.
2. These situations owe to the arrival of *continuum*, on which we summarize the trail-blazers of the trigonometric series such as Euler, Lagrange, Laplace, et al.
3. Poisson issues his last work [77] in 1835 in rivalry to Fourier and Navier, in which he discusses the essential theories for the expression between fluid motion and heat motion, emphasizing the hypothesis of molecular radiation with the mathematical points such as complete integral.
4. Prévost's work [81] on heat communication, which precedes Fourier, and whose initial scholar work and after it.
5. Sturm and Liouville refer Poisson's tools such as particular value and particular function, entire function, to solve the differential problems.
6. Comparing these books and papers, we show the connection between the hydrodynamics, wave and heat dynamics, and the process of new mathematics putting forth in applied or physical mathematics.

1.3. Poisson's paradigm and singularity.

Poisson publishes the last books consist of three elements : [74, 75, 76, 77]. ([75, 76] are the same title and are divided into two volumes.) These are his paradigm of the mathematical physics through all his academic life, entitled a study of mathematical phisics. (*Un Traité de Physique Mathématique.*) In the rivalry to Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Navier, et al., we think, he struggles to make his paradigm. On the other hand, as its proofs, there are some singular but important sugestions such as :

- rigorous sum instead of integral,
- critics to easy applying the rule comes from real to transcendental function,
- conjecture on the defect of the proof in the eternity of exact differential,
- contribution to the fluid dynamics, especially, to the Navier-Stokes equations,
- deduction of another heat equation from the basically molecular analysis.

We discuss these topics in the following papers.

2. The heat and fluid theories in the 19th century

2.1. The theory of heat communication in the Prévost's essay.

Prévost [81] discuss the communication of heat between two corps in earlier than Fourier, who corresponds with Prévost, according to Grattan-Guiness [33, p.23].
His principles are as follows : all the corps radiate the heat without relation to the temperature. The heat equilibrium is induced with the equal quantity of heat by the heat communication. These principles become shared with Fourier successively. (cf. Table 3.)

2.2. The outline of the situations surrounding Fourier and Poisson.

About the situations around Fourier, we can summarize as follows :
1. Fourier's manuscript 1807, which had been unknown for us until 1972, I. Grattan-Guinness [33] discovered it. Fourier's paper 1812 based on the manuscript was prized by the academy of France. We consider that Fourier, in his life work of the heat theory, begins with the communication theory, and he devoted in establishing this theme as the priority.
2. Owing to the arrival of continuum theory, many mathematical physical works are introduced, such as that Fourier and Poisson struggle to deduce the trigonometric series in the heat theory and heat diffusion equations. In the curent of formularizing process of the fluid dynamics, Navier, Poisson, Cauchy and Stokes struggle to deduce the wave equations and the Navier-Stokes equations. Of cource, there are many proceding researches before these topics, however, for lack of space, we must pick up at least, the essentials such as following contents :
3. Fourier [28] combines heat theory with the Euler's equations of incompressible fluid dynamics and proposes the equation of heat motion in fluid in 1820, however, this paper was published in 1833 after 13 years, it was after 3 years since Fourier passed away. Fourier seems to have been doutful to publish it in life.
4. After Fourier's commnunication theory, the gas theorists like Maxwell, Kirchhoff, Boltzmann [4] study the transport equations with the concept of collision and transport of the molecules in mass. In both principles, we see almost same relation between the Fourier's communication and transport of heat molecules and the Boltzmann's collision and transport of gas molecules.
5. Since 1811, Poisson issued many papers on the definite integral, containing transcendental, and remarked on the necessity of careful handling to the diversion from real to imaginary, especially, to Fourier explicitly. To Euler and Laplace, Poisson owes many knowledge, and builds up his principle of integral, consulting Lagrange, Lacroix, Legendre, etc. On the other hand, Poisson feels incompatibility with Laplace's 'passage', on which Laplace had issued a paper in 1809, entitled : On the 'reciprocal' passage of results between real and imaginary. in 1782-3.
6. To these passages, Poisson proposed the direct, double integral in 1811, 13, 15, 20 and 23. The one analytic method of Poisson 1811 is using the round braket, contrary to the Euler's integral 1781. The multiple integral itself was discussed and practical by Laplace in 1782, about 20 years before, when Poisson applied it to his analysis in 1806.
7. As a contemporary, Fourier is made a victim by Poisson. To Fourier's main work :

The analytical theory of heat in 1822, and to the relating papers, Poisson points the diversion applying the what-Poisson-called-it 'algebraic' theorem of De Gua or the method of cascades by Roll, to transcendental equation. Moreover, about their contrarieties, Darboux, the editor of *Œuvres de Fourier*, evaluates on the correctness of Poisson's reasonings in 1888. Drichlet also mentions about Fourier's method as a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinite.

2.3. The preliminary discources on Fourier from the Nota to I.Grattan-Guinness.

2.3.1. *The Fourier's Oeuvres edited by G. Darboux.*

The preliminary discource by Fourier, edited by G. Barboux, says in 1820 :

> G. Darboux says in his first edition in 1888 : The works relating to the heat theory by Fourier appear in the late 18th century. It has been submitted to the Academy of Science, in Dec. 21, 1807. his first publication is unknown for us : we don't know except for an extract of 4 pages of BSP in 1808 ; It was read by the Committee, however, may be withdrawn by Fourier during 1810. The Committee of Academy, held in 1811, decided the following judgment : "Make clear the mathematical theory on the propagation of heat, and compare this theory with the exact result of experiments." (trans. mine.) [4]

2.3.2. *The Fourier 1822 by A. Freeman and The Fourier 1807 edited by I. Grattan-Guinness.*

In 1878, A. Freeman published the first English translated Fourier's second version, of which the preliminary is completely the same as G. Darboux 1888, ten years later than A. Freeman. In 1972, I. Grattan-Guinness discovered the manuscript 1807. He pays attentions to the Avertissment in the second edition by G. Darboux as above we mention. We are thankful to Grattan-Guinness for the showing one of the paragraph of ¶.136 (Des températures finales et de la courbe qui les présente.), and its belonging figure[5] of the Fourier's Manuscript 1807, *Théorie de la propagation de la chaleur*, edited and commented by Grattan-Guinness [33, p.371-2].

---

[4] (⇓) About the extract, same as above footnote. Lagrange was a member of the Committee of judgement and poses against Fourier's paper 1807. cf [83]. G.Darboux lists as follows : Lagrange, Laplace, Malus, Haüe and Legendre. [10, p.vii].

[5] This figure is the Fourier's original. [33, p.370]. In this figure, on the x axis, there are the numbers 1, 2, 3, 4

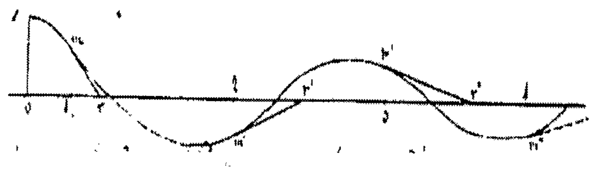


fig.3 An exponential decay of diffusion in Fourier's Manuscript 1807

3. The theoretical contrarieties to Fourier

3.1. Lagrange, Fourier and Poisson on the trigonometric series.

Riemann studies the history of research on Fourier series up to then (*Geschichte der Frage über die Darstellbarkeit einer willkührlich gegebenen Function durch eine trigonometrische Reihe*, [83, pp.4-17].) We cite one paragraph of his interesting description from the view of mathematical history as follows :

> ($\Leftarrow$) When Fourier submitted his first work to the Academy française[6] (21, Dec., 1807) on the heat, representing a completely arbitrary (graphically), given functions with the trigonometric series, at first, gray-haired Lagrange[7] irritates so much, however, refuses flatly. The paper is called now being belonged to the Arcive of the Parisian Academy française. (id. According to Mr. Professor Dirichlet's oral presentation.) Therefore, after Poisson inspects carefully through the paper,[8] promptly argues that in the paper of Lagrange, there is a paragraph on the vibration of string, where Fourier may have discovered the descriptive method.[9] To refuse this defect of the statement telling clearly on the rivalry relation between Fourier and Poisson, we would like to back to the Lagrange's papers, so we can reach the event in the Academy nothing have been clear yet. [83, p.10] (trans. mine.)

Riemann cites exactly the French original as follows :

($\Leftarrow$) In fact, a paragraph cited by Poisson is the expression :

$$y = 2\int Y \sin X\pi dX \ \sin x\pi + 2\int Y \sin 2X\pi dX \ \sin 2x\pi + \cdots + 2\int Y \sin nX\pi dX \ \sin nx\pi, \quad (1)$$

So, If $x = X$, then $y = Y$, and Y is the ordinate confronting to the abscissa X. This formula doesn't coincide with the Fourier's series[10] ; there is sufficiently the capability of some mistake; however, it is only a simple outlook, because Lagrange uses $\int dx$ as the integral symbol. Today, it is to be used by $\sum \Delta X$. When we inspect through his papers, it is beyond believable that he expresses a completely arbitrary function by series expansion with infinite sins. [83, pp.10-11] (trans. mine.)

Lagrange had stated (1) in his paper of the motion of sound in 1762-65. [45, p.553]

6($\Downarrow$) i.e. French Academy.

7($\Downarrow$) Lagrange was then seventy-one years old.

8id.

9id.

10($\Downarrow$) This means two interpretations : one means the series by Fourier, the other today's conventionally used nomenclature : 'the Fourier series'. Judging from Riemann's young days, in 1867, this may mean the former. In generally, the trigonometric series is used then.

3.2. The trials to seek the mathematical rigours on heat theories.

Poisson [64] traces Fourier's work of heat theory, from the another point of view. Poisson emphasizes, in the head paragraph of his paper [64], that although he totally takes the different approaches to formulate the heat differential equations or to solove the various problems or to deduce the solutions from them, the results by Poisson are coincident with Fourier's. Poisson says as follows in the top page of [64] :

> The question, which I propose to research, have been the subject of the prize proposed by the first class of the Institute, and won by Fourier at the beginning of 1812. The piece prized is reserved at the secretariat, where, it is permitted to look through : I will take care of, through this Memoire, to cite the principle result which Mr. Fourier have obtained before me ; and I dare to say at first, in all the particular problems which we have taken the one and the another for examples, and which being naturally indicated in this material, the formulae of my Memoire coincides with that this piece includes. However, *just only that there is common between our two oeuvres* ; because, it were to formulate the differential equations of the motion of the heat, or it were to solve them and deduce the definitive solution of each problem, *I am using the entirely different methods from that Mr. Fourier is tracing.* [64, pp.1-2] (trans. and italics mine.)

Poisson [64] considers the proving on the convergence of series of periodic quantities by Lagrange and Fourier as the manner lacking the exactitude and vigorousness, and wants to make up to it. Poisson proposes the different and complex type of heat equation with Fourier's. For example, we assume that interior ray extends to sensible distance, which forces of heat may affect the phenomena, the terms of series between before and after should be differente.

We remark that Fourier's integral problems are handled in the scope on the infinite solid in Fourier 1822 [22]. We must pay attention to that these considerations have been capable on the continuum theory.

3.3. Trigonometric series.

Poisson shows his trigonometric series as the rivalry to Fourier as follows :

$$(14)_{PS7} \qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\ \alpha\ (x-x')\ f(x')\ d\alpha\ dx', \tag{2}$$

Poisson says : of which Fourier enhanced the Analysis, or, at least, that he gave at the first time for the cases where we have $f(x)=f(-x)$ or $f(x)=-f(-x)$, and of which he has been easy to deduce the general formula. We show an example of Fourier's trigonometric series as follows :

$$(p) \qquad r\ f(x) = \frac{1}{2}\int F(x)dx$$
$$+ \quad \cos\ x\int F(x)\ \cos\ x\ dx + \cos\ 2x\int F(x)\ \cos\ 2x\ dx + \cdots$$
$$+ \quad \sin\ x\int F(x)\ \sin\ x\ dx + \sin\ 2x\int F(x)\ \sin\ 2x\ dx + \cdots$$

[22, §233, p.230] or [23, §233, p.256].

Poincaré 1895 [78] proves the existence of the function satisfying the Dirichlet condition :

Thèoréme. - Si une fonction $f(x)$ satisfait à la condition de Dirichlet dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, elle pourra être représentée dans ce même intervalle par une sêrie de Fourier, c'est-à-dire que l'on aura :

$$\pi f(x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx + \sum \cos mx \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\ dx + \sum \sin mx \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\ dx$$

[78, p.57, §38] (cf. Table 3.)

4. Confusions and unify on continuum theory

The hysico-mathematicians are must construct at first the physical structure, then allpies the mathematical concept on it. The former is necessary to fit with the actual phenomena. Arago 1829 [1] seeks to separate these items to Navier 1829 [53] in the current of dispute with Poisson and Arago. This is comes from the word what-Navier-called *l'une sur l'autre*, he fails to explain exactly it, and since then, his theories and the equations are neglected up to the top of the 20th century. We consider that the confusions and unify are as follows :

- Poisson and Fourier discuss on the handling of the De Gua's theorem into the transcendental equations. Without clear explanation, Fourier passed away in 1830. cf. (fig.4)
- On the attraction and replusion of molecule, Navier depends on Fourier's principle of heat molecule. The then hysico-mathematicians had little evaluated Navier until the top of the 20th century. For formulation of heat motion in the fluid, Fourier cites not Navier's fluid equations, but Euler's fluid equations.
- The hydrodynamists like Navier, Poisson, Cauchy are propose the wave equations in the elasticity, and the last two hydrodynamists proposes the total equations in unity on the continuum.
- On the formulation of heat motion in the fluid, Fourier had submitted this paper, however, until his death, he has not published it, in which he seems to aim the unity of hydro- and thermodynamics, however, he has given up it.

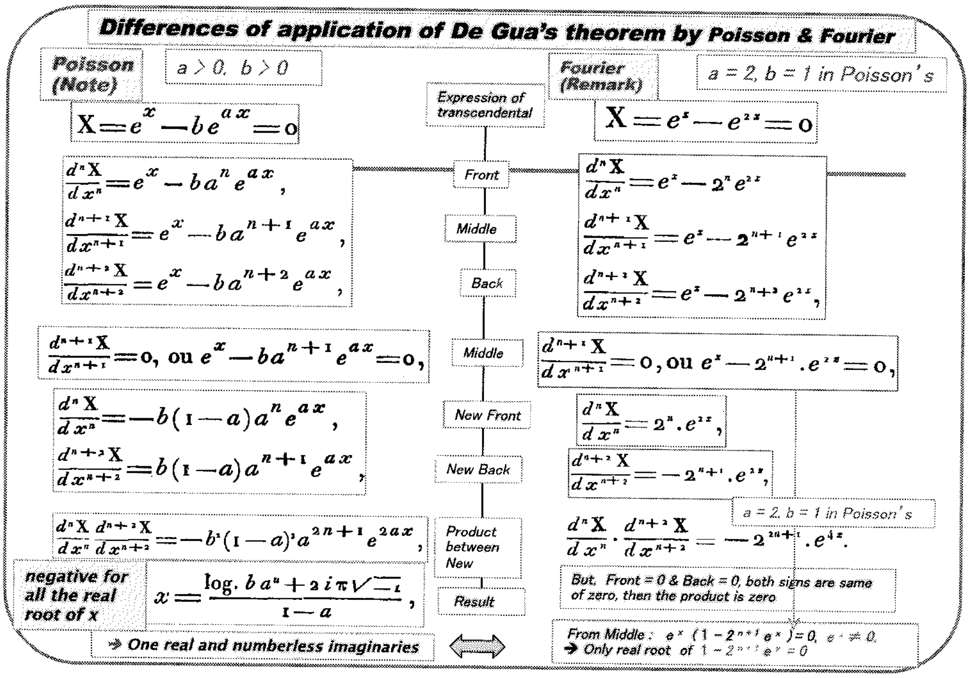


fig.4 Difference of applying the De Gua's theorem into the transcendental between Poisson and Fourier

4.1. A comment on continuum by Duhamel.

Duhamel 1829 [15] points out the theory of continuum from the viewpoint of scientific history, citing from the Poisson's paper in the argument with Navier on the nonsense of Navier's null action in nature.

> ($\Leftarrow$) Up to now, the reserchers have considered the corps of the nature as continue, it makes illusion to this regards, however, partly because this hypothesis simplify the calcul, and partly because they think that it gives a sufficient approximation. Mr. Poisson think that this hypothesis isn't never admissible, and justify his opinion with following considerations.
>
>> When a corps, say, is in its natural state, namely, when it isn't compressed with any force, when it is placed in the vacume, and when we make abstract of its weight, not only any molecule is in equilibrium in the interior and its surface, but also, we see more over, in this Memoire, the resultant of molecular actions is separately zero of two opposite sides od each small part of the corps. In this state, the distance which separate the molecules must be such that this condition were replaced, in having regard to their mutual attraction and the caloric repulsion which we take also among the molecular actions. However the corps is hard or something solid, the

> force which opposes the separation of their parties is zero or doesn't exist in the state of which we discuss. It doesn't begin the existence that when we seek to effectuate this separation, and when we change only a few distance of the molecules. Namely, if we explain this force with a integral, it gets to as its value being zero in the natural state of corps, this will be so even if after the variation of the molecular distances, so that, the corps will opposite any resistance to the separatiopn of its parties ; this is what will be nonsense. It results from here, that the sum which explain the total action of a series of disjoint molecules can't convert the sum instead of the definite integral ; this is what holds in the nature of the *function of distances* which represent the action of each molecule. The molecular force, of which we will find the expression in the §1 of this Memoire, is calculated according to this principle, and reduced at least in the simplest form of which it were susceptible.

We explain afterward how he do with Mr. Poisson obtain the same equation with Navier has made known in 1821, with talking the molecular actions, and in considering the corps as continue. This method inspecting the molecular actions is originally due to Laplace, who has deduced from this a nice theory of capillary action. Mr. Navier has obtained afterward the nice idea to deduce the theory of elastic solid ; however, both of the mathematicians have supposed the molecules of adjacent corps, and Poisson is the first of coincidence with calculations with the physical structures. In addition to, although the hypotheses of continuum theory have been actually so inexact, however, have played big roles in the science, In the roles, have played, the theories by Mr. Laplace have welcomed by the researchers. This observation on the molecular activities, in the bulk of special problems, above all, in theory of the elastic bodies, it has the very countless merits to have to sweep out the all special hypotheses. Mr. Poisson emphasizes the merit of this method ; we will reproduce textually this passage from his Mmoire. [15, pp.98-99] (trans. and italics mine.)

Poisson explains the function $f(r)$ of distance between the two molecules. If using the integral, then as follows :

$$K = \frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6} f(r)dr, \quad k = \frac{2\pi}{15}\int_0^\infty \frac{r^5}{\alpha^6} d.\frac{1}{r}f(r), \tag{3}$$

en multipliant sous les signes $\sum$ par $\frac{dr}{\alpha}$, et remplaçant ces signes par ceux de l'intégration. Or, si l'on intègre par partie, et si l'on fait attention que $f(r)$ est nulle aux deux limites, il en résultera

$$k = -\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6} f(r)dr = -K \tag{4}$$

ce qui montre que la quantité K étant nulle, on aurait aussi $k = 0$. [72, pp.398-399, §14]

($\Leftarrow$) This equation becomes the cause of important remark. The sums $\sum$ in the no. 6 expressed by K and k, which we can't transform into the integral, while the variable r increases in each of them with very small differences equal to α. Therefore, if this transformation would be capable, k and K become zero syncronously. From here, it would result

- that after changing of the form of corps, the forces P, Q, R would be the same zeros as before,
- and that the given forces operating on the corps could not make equilibrium.

These are inadmissible. [72, pp.398-399, §14] (trans. mine.)

We show Poisson's logic as follows : Poisson proposes the two constants must be with the sum :

$$\frac{2\pi}{3}\sum \frac{r^3}{\alpha^5} f(r) \equiv K, \quad \frac{2\pi}{15}\sum \frac{r^5}{\alpha^5}\frac{d.\frac{1}{r}f(r)}{dr} \equiv k.$$

When begining to perform the integral instead of the sum with k,

$$d\Big(\frac{1}{r}f(r)\Big) = \frac{1}{r}f'(r)dr - f(r)\Big(\frac{1}{r^2}\Big)dr$$

$$k = \frac{2\pi}{15}\int_0^\infty \frac{r^5}{\alpha^6} d\Big(\frac{1}{rf(r)}\Big) = \frac{2\pi}{15}\int_0^\infty \frac{r^4}{\alpha^6}f'(r)dr - \frac{2\pi}{15}\int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6}f(r)dr \equiv I - \frac{1}{5}K.$$

Now, if we take the integral by part, and if we pay attention that $f(r)$ is zero at the two limits, then we get the next

$$I = -\frac{8\pi}{15}\int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6}f(r)dr = -\frac{4}{5}K \quad \Rightarrow \quad k = -K.$$

Navier points out Poisson's assumption that if $f(r)$ is zero at the two limits. There are many functions which don't take such values. Poisson pays attention to all the case in probability.

4.2. **Attraction and repulsion.**

Here, we show one of Fourier's contexts which Navier depends on and esteems as the authority of hysico-mathematicians.

> ($\Leftarrow$) ¶54. The equilibre which keeps in the interior of a solid mass between the *repulsive force* due to heat and the molecular *attraction* is stable ; namely, which restablish by iiself, when it troubles by an accidental cause. If the molecules are places in the distance which is convenient to the equilibre, and if an exterior force make this distance without the temperature changes by the heat, the effect of *attraction* begins surpass it and makes the molecules at the initial position, after a multitude of oscilation which becomes more and more insensible. A resemble effect operates when a mechanic cause shortens the initial distance of the molecules ; this is the origin of sonic or flexible vibration of corps and of all the effect of elasticity. [22, pp.31-2] (trans. mine.)

TABLE 1. The kinetic equations of the hydrodynamics until the "Navier-Stokes equations" were fixed. (HD : hydrodynamics, N : non-linear, g.d : grad.div, C : $\frac{\Delta}{gr.dv}$ in elastic or fluid. Δ : tensor coefficient of the main axis in Laplacian.)

no	name/ prob	the kinetic equations	Δ	g.d	C
1 N	Euler (1752 -55)[17] fluid	$\begin{cases} X - \frac{1}{h}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}, \\ Y - \frac{1}{h}\frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}, \\ Z - \frac{1}{h}\frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}, \end{cases}$ $\quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$			
2	Lagrange (1782)[46] fluid	$\begin{cases} \Delta\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)\frac{\partial z}{\partial a}\right] - \frac{\partial\lambda}{\partial a} = 0, \\ \Delta\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)\frac{\partial z}{\partial b}\right] - \frac{\partial\lambda}{\partial b} = 0, \\ \Delta\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)\frac{\partial z}{\partial c}\right] - \frac{\partial\lambda}{\partial c} = 0 \end{cases}$ where, $\mathbf{a} = (a, b, c)$: position on $t = 0$, $\mathbf{X} = (x,\ y,\ z)$: position on $t = t$, $\mathbf{X} = (X,\ Y,\ Z)$: outer force, Δ : density, λ : pressure. Today, these are described as follows : $\rho\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial x_j}{\partial a_i}\left(\frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2} - K_j\right) = -\frac{\partial p}{\partial a_i},\ (i = 1, 2, 3),$			
3	Navier (1827) [51] elastic sol.	$(6\text{-}1)_{N^e}\quad \begin{cases} \frac{\Pi}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon\left(3\frac{d^2x}{da^2} + \frac{d^2x}{db^2} + \frac{d^2x}{dc^2} + 2\frac{d^2y}{dbda} + 2\frac{d^2z}{dcda}\right), \\ \frac{\Pi}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\left(\frac{d^2y}{da^2} + 3\frac{d^2y}{db^2} + \frac{d^2y}{dc^2} + 2\frac{d^2x}{dadb} + 2\frac{d^2z}{dcdb}\right), \\ \frac{\Pi}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\left(\frac{d^2z}{da^2} + \frac{d^2z}{db^2} + 3\frac{d^2z}{dc^2} + 2\frac{d^2x}{dadc} + 2\frac{d^2y}{dbdc}\right) \end{cases}$ where Π is density of the solid, g is acceleration of gravity.	ε	2ε	$\frac{1}{2}$
4	Navier (1827) [52] fluid	$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X + \varepsilon\left(3\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + 2\frac{d^2v}{dxdy} + 2\frac{d^2w}{dxdz}\right) \\ \qquad -\frac{du}{dt} - \frac{du}{dx}\cdot u - \frac{du}{dy}\cdot v - \frac{du}{dz}\cdot w \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y + \varepsilon\left(\frac{d^2v}{dx^2} + 3\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} + 2\frac{d^2u}{dxdy} + 2\frac{d^2w}{dydz}\right) \\ \qquad -\frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dx}\cdot u - \frac{dv}{dy}\cdot v - \frac{dv}{dz}\cdot w \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z + \varepsilon\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + 3\frac{d^2w}{dz^2} + 2\frac{d^2u}{dxdz} + 2\frac{d^2v}{dydz}\right) \\ \qquad -\frac{dw}{dt} - \frac{dw}{dx}\cdot u - \frac{dw}{dy}\cdot v - \frac{dw}{dz}\cdot w \end{cases}$	ε	2ε	$\frac{1}{2}$
5	Poisson ('31)[73] elastic in gen.	$\begin{cases} X - \frac{d^2u}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2v}{dydx} + \frac{2}{3}\frac{d^2w}{dzdx} + \frac{1}{3}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2u}{dz^2}\right) = \frac{\Pi}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2}, \\ Y - \frac{d^2v}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{2}{3}\frac{d^2w}{dzdy} + \frac{1}{3}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2v}{dz^2}\right) = \frac{\Pi}{\rho}\frac{d^2v}{dy^2}, \\ Z - \frac{d^2w}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2u}{dxdz} + \frac{2}{3}\frac{d^2v}{dydz} + \frac{1}{3}\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2w}{dy^2}\right) = \frac{\Pi}{\rho}\frac{d^2w}{dz^2}, \end{cases}$	$\frac{a^2}{3}$	$\frac{2a^2}{3}$	$\frac{1}{2}$
6	Poisson ('31) [73] fluid in general eq.	$\begin{cases} \rho(\frac{Du}{Dt} - X) + \frac{dp}{dx} + \alpha(K+k)\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) \\ \quad +\frac{\alpha}{3}(K+k)\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0 \\ \rho(\frac{Dv}{Dt} - Y) + \frac{dp}{dy} + \alpha(K+k)\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right) \\ \quad +\frac{\alpha}{3}(K+k)\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0 \\ \rho(\frac{Dw}{Dt} - Z) + \frac{dp}{dz} + \alpha(K+k)\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right) \\ \quad +\frac{\alpha}{3}(K+k)\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \rho(X - \frac{d^2x}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dx} + \beta(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}), \\ \rho(Y - \frac{d^2y}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dy} + \beta(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}), \\ \rho(Z - \frac{d^2z}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dz} + \beta(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}) \end{cases} \quad \begin{cases} \text{where ,} \\ \varpi \equiv p - \alpha\frac{d\psi t}{dt} - \frac{\beta+\beta'}{\chi t}\frac{d\chi t}{dt}, \\ \beta \equiv \alpha(K+k) \end{cases}$	β	$\frac{\beta}{3}$	3

TABLE 2. (Continued from Table 1.) The kinetic equations of the hydrodynamics until the "Navier-Stokes equations" were fixed.

no	name/ prob	the kinetic equations	Δ	g.d	C
7	Stokes ('49)[87] fluid	$(12)_S$ $\begin{cases} \rho(\frac{Du}{Dt} - X) + \frac{dp}{dx} - \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dv}{Dt} - Y) + \frac{dp}{dy} - \mu\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dw}{Dt} - Z) + \frac{dp}{dz} - \mu\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0. \end{cases}$	μ	$\frac{\mu}{3}$	3
8 N	Prandtl (1905) [79], HD	$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) + \nabla(V+p) = k\nabla^2 v, \quad \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0$	k		
9 N	Prandtl (1934) [80], HD	$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$ $= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$ for incompressible, it is simplified as follows : $\mathrm{div}\ \mathbf{w} = 0, \quad \frac{D\mathbf{w}}{dt} = g - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\ p + \nu\Delta\mathbf{w}$	ν	$\frac{\nu}{3}$	3
10	Saint-Venant [84]	('43) fluid. He didn't describe the equations in [84]. , however his tensor is in Table ?? (entry no.4)	ε	$\frac{\varepsilon}{3}$	3
11	Stokes ('49)[87] fluid	$(12)_S$ $\begin{cases} \rho(\frac{Du}{Dt} - X) + \frac{dp}{dx} - \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dv}{Dt} - Y) + \frac{dp}{dy} - \mu\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dw}{Dt} - Z) + \frac{dp}{dz} - \mu\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0. \end{cases}$	μ	$\frac{\mu}{3}$	3
12	Maxwell ('65-66) [50] HD	$\begin{cases} \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dp}{dx} - C_M\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)\right] = \rho X, \\ \rho\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{dp}{dy} - C_M\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)\right] = \rho Y, \\ \rho\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{dp}{dz} - C_M\left[\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)\right] = \rho Z \end{cases}$ where, $C_M \equiv \frac{pM}{6k\rho\Theta_2}$	C_M	$\frac{C}{3}$	3
13	Kirchhoff ('76)[37] HD	$\begin{cases} \mu\frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} - C_K\left[\Delta u + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] = \mu X, \\ \mu\frac{dv}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} - C_K\left[\Delta v + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] = \mu Y, \\ \mu\frac{dw}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} - C_K\left[\Delta z + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] = \mu Z, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \text{where, } C_K \equiv \frac{1}{3\kappa}\frac{p}{\mu} \end{cases}$	C_K	$\frac{\Delta}{3}$	3
14 N	Rayleigh ('83)[82] HD	$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -\frac{du}{dt} + \nu\nabla^2 u - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = -\frac{dv}{dt} + \nu\nabla^2 v - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} \end{cases}, \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$	ν		
15	Boltzmann ('95)[4] HD	$(221)_B$ $\begin{cases} \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \mathcal{R}\left[\Delta u + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] = \rho X, \\ \rho\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} - \mathcal{R}\left[\Delta v + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] = \rho Y, \\ \rho\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - \mathcal{R}\left[\Delta w + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] = \rho Z \end{cases}$	$\mathcal{R}$	$\frac{\mathcal{R}}{3}$	3
16 N	Prandtl (1905) [79], HD	$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) + \nabla(V+p) = k\nabla^2 v, \quad \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0$	k		
17 N	Prandtl (1934) [80], HD	$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$ $= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$ for incompressible, it is simplified as follows : $\mathrm{div}\ \mathbf{w} = 0, \quad \frac{D\mathbf{w}}{dt} = g - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\ p + \nu\Delta\mathbf{w}$	ν	$\frac{\nu}{3}$	3

5. Fourier's heat equation of motion in fluid

Fourier explains the motion of the heat in the interior of solid. The difference is that determines its increment of the temperature during an instant with only the transfer of heat quantity, which is the most different method with Poisson's method :

$$\begin{aligned} & Kdydz\ d\Big(\frac{dv}{dx}\Big)dt + Kdxdz\ d\Big(\frac{dv}{dy}\Big)dt + Kdxdy\ d\Big(\frac{dv}{dz}\Big)dt \\ & \qquad \Rightarrow \quad Kdxdydz\Big(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\Big)dt \end{aligned}$$

then finally he gets :

$$(d)_{F2.5} \qquad \frac{du}{dt} = \frac{K}{C.D}\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right) \tag{5}$$

where, K internal conductibility, C capacity, D density of the substance. [22, p.102] We think that Fourier's deductive method is very diffuse style and simpler than Poisson's inductive method described over 10 pages in original [77], we show his point below in § 6.1. Fourier doesn't show the pricise deduction of the heat equation (5), while Poisson takes 9 pages to descrive it from §44 to §50. We think Poisson's contribution on the physical mathematics such as the fluid dynamics and the heat theory including the trigonometric series is great.

Fourier esteems Euler's fluid dynamic equations, saying in the preface of "The analysis of the heat motion in the fluid." We cite Fourier's English translated paper as follows :

> To solve this, we must consider, a given space interior of mass, for example, by the volume of a rectangular prism composed of six sides, of which the position is given. We investigate all the successive alterations which the quality of heat contained in the space of prism obeys. This quantity alternates instantly and constantly, and becomes very different by the two things. One is the property, the molecules of fluid have, to communicate their heat with sufficiently near molecules, when the temperatures are not equal.
>
> The question is reduced into to calculate separately : the heat receiving from the space of prism due to the communication and the heat receiving from the space due to the motion of molecules.
>
> We know the analytic expression of communicated heat, and the first point of the question is plainly cleared. The rest is the calculation of transported heat : it depend on only the velocity of molecules and the direction which they take in their motion. [28, pp.507-514.]. (trans. mine.)

Fourier combines heat theory with the Euler's equation of incompressible fluid dynamics and proposes the equation of heat motion in fluid in 1820, however, this paper was published in 1833 after 13 years, it was after 3 years since Fourier passed away. Fourier seems to have been doutful to publish it in life. Here, ε is the variable density and θ is the variable temperature of the molecule respectively. K : proper conductance of mass, C : the constant of specific heat, h : the constant determining dilatation, e : density at

$\theta = 0$.

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\frac{dp}{dx} + \frac{d\alpha}{dt} + \alpha\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\alpha}{dy} + \gamma\frac{d\alpha}{dz} - X = 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{dp}{dy} + \frac{d\beta}{dt} + \alpha\frac{d\beta}{dx} + \beta\frac{d\beta}{dy} + \gamma\frac{d\beta}{dz} - Y = 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{dp}{dz} + \frac{d\gamma}{dt} + \alpha\frac{d\gamma}{dx} + \beta\frac{d\gamma}{dy} + \gamma\frac{d\gamma}{dz} - Z = 0. \\ \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d}{dx}(\varepsilon\alpha) + \frac{d}{dy}(\varepsilon\beta) + \frac{d}{dz}(\varepsilon\gamma) = 0, \quad \varepsilon = e(1 + h\theta). \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{C}\left(\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{d^2\theta}{dz^2}\right) - \left[\frac{d}{dx}(\alpha\theta) + \frac{d}{dy}(\beta\theta) + \frac{d}{dz}(\gamma\theta)\right]. \end{cases}$$

where, α, β, γ, p, ε, θ are the function of x, y, z, t. X, Y, Z are the outer forces. We think, Fourier seems to feel an inferiority complex to the fluid dynamics by Euler and he divers the Euler equation as the transport equation from Euler 1755 [17]. (cf. Table 1.)

6. Poisson's paradigm of universal truth on the definite integral

Poisson mentions the universality of the method to solve the differential equations. Poisson attacks the definite integral by Euler and Laplace, and Fourier's analytical theory of heat, and manages to construct universal truth in the paradigms.

One of the paradigms is made by Euler and Laplace. Laplace succeeds to Euler and states the passage from real to imaginary or reciprocal passage between two, which we mention in below.

The other contradictory problem is Fourier's application of De Gua. The diversion is Fourier's essential tool for the analytical theory of heat.

Dirichlet calls these passages a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinite. cf. Chapter 1. We think that Poisson's strategy is to destruct both paradigms and make his own paradigm to establish the univarsal truth between mathematics and physics.

6.1. **The deduction of heat equations by Poisson.**

Poisson deduces his heat equations of the motion in interior of solid corps or liquid, from only §44-50. These are more precise than Fourier's, though their result is the same. Poisson's method is based on the hypothesis of molecular radiation. It may come from the fluid dynamics. For Poisson, the common method between the fluid dynamics and the heat analysis is molecular analysis. While in the fluid dynamics, the function of the distance is $f(r)$, in the heat theory, the corresponding function is the function of the distance, both the temperatures and both the coordinates, which is the expression (8) introduced in **§45**. We introduce the gist of the Poisson's molecular analysis on heat from **§44** to **§50**, which are the Poisson's sales point in rivalry to Fourier as follows :

§44.

There is always the heat in motion in all the corps, even when of all their points is invariable,

- were each point would have a particular temperature,
- were its would have all a same temperature.

However, the expression *motion of the heat* is taken here, in the another sense ; it signifies the variation of temperature which holds from an instant to the other in a corps which is heated or is cooled ; and the velocity of this motion, in each point of the corps, is the primary differential coefficient of the temperature with respect to the time.

I will call A the corps solid or liquid, homogeneous or heterogeneous, in which we are going to consider the motion of the heat. Let

- M a certain point of A,
- and m a particle of this corps, of insensible magnitude (no. 7),
- and take the point M.

At the end of a certain time t,

- designate with $x,\ y,\ z$, the three rectangular coordinates of M,
- with v the volume of m,
- and with ρ its density,

so that we have $m = v\rho$. Let also, at the same instant, u the temperature and $\mho$ [11] the velocity of motion of the heat which responds to the point M.

The quantity u will be a function of $t,\ x,\ y,\ z$, dependent on an equation in the partial differences with respect to these four variables, which it is the problem to form. If A is a corps solid, and which we make neglect its small dilations, positive or negative, products with the variations of u relative to time, the coordinates $x,\ y,\ z$, according to independent of t, and we will have simply, $\mho = \frac{du}{dt}$.

- If in contrast, we have regard to small displacement of the point M caused from these dilations,
- or also, if A is a fluid in which the integrality of temperature, or all other cause, hold to the motions of its molecules,

then the coordinates $x,\ y,\ z$, will be the function of t ; and then we will have with the known rules of the differentiation of functions made of functions,[12]

$$(1)_{PS4} \qquad \mho = \frac{du}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dt}\frac{du}{dy} + \frac{dz}{dt}\frac{du}{dz}\ ; \tag{6}$$

where, expression in which $\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}$, will be the components of the velocities at the point M, parallel to the axes $x,\ y,\ z$.

The unknown u will be the only that it will need to determine, for recognition completely of the calorific state of the corps A at a certain instant. Suppose that we divide this corps into two parts B and B', with a certain surface, traced in its interior. Let ω an element of this surface (no. 9) containing the point M, there will be continuously, crosswise ω, a *flux of heat* sensible to that of the radiating heat which holds crosswise the element of the surface of A, and that I will represent with $\Gamma\ \omega\ dt$ during the instant dt, of manner which this product, positive or negative, were the excess of the heat which traverses the ω in passing from B in B', during this instant, on that which traverse in the same time, in passing from B' into the B. The coefficient Γ, or the flux of heat relative to the units of time and of surface. will depend on the material and of the temperature of A at the point M, and of the direction of ω ; it will be important to determine it, in function of $t,\ x,\ y,\ z$, for each direction given with ω. Hence, u and Γ will be the two unknown of the problem of which we will have to us occupy in this chapter. When the corps A is obey to the influence of foci constants of heat all its parts arrive generally, after a certain time, to the variable temperatures of a point to another, however, independent of the time. In this stationary state of A, the velocity $\mho$ is zero in all the point ; however, the flux of heat

[11]($\Downarrow$) We use $\mho$, because, in origin, Poisson uses the vertical type of $\propto$ like the opened shape in upper of the numerical letter 8, however, this exact type isn't in our LaTex font system.

[12]($\Downarrow$) sic. The function is repeated.

Γ exists still, and merely its value is independent of t, like that of u.

§45.

Let M' a second point of A very near to M, and m' a particle of A of insensible magnitude, like m which will contain M'. At the end of time t, we call x', y', z', the coordinates of M' in relating to same axes with x, y, z, and designate with u' the temperature of m' ; also let r the distance MM'.

According to the general hypothesis on which the mathematical theory of the heat (no. 7) is based, there will be a continuous exchange of heat between m and m'. I will represent with δ the augmentation of heat which will result then for m during the instant dt, namely, the excess positive or negative, during this instant,

- of the heat emitted from m' and absorbed with m,
- over the heat emitted from m and absorbed with m'.

It will be able to suppose this excess proportional to product $m\ m'\ dt$, or to $v\ v'\ \rho\ \rho' dt$, in calling v' and ρ' the volume and the density of m', so that we would have $m' = v'\ \rho'$, as we have already $m = v\ \rho$. It will be zero in the case of $u' = u$, and same sign with the difference $u' - u$, when it won't be zero ; in the vacuum, it will come in the reverse ratio of the square of r ; and generally its value will be the form

$$(2)_{PS4} \qquad \delta = \frac{v\ v'}{r^2}\ R\ (u' - u)\ dt, \tag{7}$$

where, in designating with R a positive coefficient, in which we contain the factor $\rho\ \rho'$, which will decrease very rapidly for the values increasing with r, which will be also able to depend on materials and the temperatures of m and m', and will vary with the direction of MM', when the absorption of the heat won't be the same in all direction around of M.

In the supposition the most general, R will be hence a function of r, u, u', and the coordinates of M and M' ; so that we will have

$$R = \Phi\ (r,\ u,\ u',\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'). \tag{8}$$

However, if we call δ' the dimension of heat of m' during the instant dt, causing the exchange between m and m', we will have evidently $\delta' = -\delta$; in addition, the value of δ' will come to be deduced from that of δ with the permutation of quantities relative to the one of the points M and M', and the analogous quantities which respond to the other ; in consequence, it will need that the function Φ were symmetric with respect to u and u', x and x', y and y', z and z'.

The corps A being a solid or a liquid, this function Φ will vary very rapidly with r and will be insensible or zero, as long as r will have arrived at a very small magnitude. I will designate this limit with l, so that this function Φ were zero, as long as we will have $r > l$ or merely $r = l$. This segment l will be hence very small, however, of the sensible magnitude and measurable (no. 41), and in consequence, extremely greater with relation to the dimensions of m and m'.

§46.

The total augmentation of heat of m during the instant dt will be the sum of values of δ, extended to all the point M' of which the distance at the point M is smaller than l. I will indicate a such sum with the characteristic Σ. The factor $v\ dt$ being common to all the value of δ, their sum will be

$$v\ dt \sum \frac{R}{r^2}\ (u' - u)\ v'. \tag{9}$$

However, during the instance dt, the temperature of m augments with $\mho\ dt$; if hence, we call c its specific heat, $c\ v\ \mho\ dt$ will be also its augmentation of heat during this instant ; hence in suppressing the common factor $v\ dt$, we will have

$$(3)_{PS4} \qquad c\,\mho = \sum \frac{R}{r^2}\ (u' - u)\ v'. \tag{10}$$

for the equation of motion of the heat equally applicable to a corps solid and to a liquid, in substituting the convenient expression with $\mho$.

The sum $\sum$ contained in this equation, doesn't depend in effect, merely on the calorific state of m and of the particles surrounding with A, which exists at the end of the time t, and in any manner of change which would be able to hold the next instant ; so that it wouldn't be necessary to the heat, like the mathematicians[a] have considered, a particular equation for the motion of the heat in the liquids[b], distinct from one which responds to corps solids heterogeneous, and which had been given since long ago.

[a]($\Downarrow$) F. geometricians. Now, it means mathematician.
[b]($\Downarrow$) Poisson may cite as the mathematician Fourier [28].

The value of a sum $\sum$ relative to the particles of insensible magnitude, such that the preceding, can be explained with a series of which the primary term is a integral taken between the same limits which this sum, and of which the other preceding terms following the dimensions of these particles, raised to the increasing power. These dimensions being insensible with hypothesis, it is followed that the series is, in general, extremely convergent, and may be reduced to its primary term. Hence, in designating with $d\ v'$ the differential element of the volume of A, which responds to the point M', we will have, without appreciative error,

$$\sum \frac{R}{r^2}\ (u' - u)\ v' = \int \frac{R}{r^2}\ (u' - u)\ dv'\ ;$$

The integral is extending to all the element dv', of which the distance r at the point M is smaller than l.

In effect, I remarked in other occasions which the reduction of a sum to a integral is no more permitted in a certain case which is presented, for instance, in the calculation of molecular forces ; however, for that this exception would hold, it needs that the function of which we are going to sum the values, varies very rapidly and change the sign between the limits of this sum ; hence, here the coefficient R vary well in effect very rapidly with the variable r, however, without never change of sign ; and for this reason, the exception of which it is important isn't to be afraid. In all the calculation of quantities of heat which result of exchange between the particles of a corps, of insensible magnitude, we will be able to decompose immediately its volume in elements infinitely smaller, and replace the sum with the integrals, as if this corps being would be formed of a material, contained and not of the disjoint molecules, separated with the pores or vacant space.

§47.

Of the point M as center and a radius equal to the linear unit, we describe a spherical surface ; were ds the differential element of this surface, to which gets, the radius of which the direction is that of MM', we will have

$$dv' = r^2 \ dr \ ds \ ;$$

and according to the value of the sum $\sum$, the equation (10) will turn out

$$(4)_{PS4} \qquad c \ \frac{du}{dt} = \iint R \ (u' - u) \ dr \ ds \ ; \tag{11}$$

We put here, for abridgement, $\frac{du}{dt}$, instead of $\mho$; however, we will remember that this differential coefficient needs to be taken with relation to t and to all this that depend ; so that it needs to replace $\frac{du}{dt}$ with the formula (6), when the coordinates $x, \ y, \ z$, of the point M will vary with the time.

The limit relative to r of the integral contains in this equation (11) won't be the same, according to the distance of the point M to the surface of A will surpass l or will be shorter than this small segment. In this chapter we will suppose that this were the primary case which holds ; the integral relative to r will come to be hence taken from $r = 0$ to $r = l$, in all the direction around M ; we will be able hence to describe the equation (11) under the form

$$(5)_{PS4} \qquad c \ \frac{du}{dt} = \int_0^l \Big[\int R \ (u' - u) \ ds \Big] \ dr \ ; \tag{12}$$

where, the integral in respecting to ds will come to be extended to all the element ds from the spherical surface, and with the reduction in series, we will obtain easily the approximate value.

§48.

For these things, I designate with $\alpha, \ \beta, \ \gamma$, the angles which the segment MM' makes with the parallels to the axes $x, \ y, \ z$, traced through the point M. Because of $MM' = r$, then it will result

$$x' - x = r \ \cos \ \alpha, \qquad y' - y = r \ \cos \ \beta, \qquad z' - z = r \ \cos \ \gamma \ ;$$

and, according to the theory of Taylor, we will have

$$\begin{aligned} u' - u = \ & \frac{du}{dx} \ r \ \cos \ \alpha + \frac{du}{dy} \ r \ \cos \ \beta + \frac{du}{dz} \ r \ \cos \ \gamma \\ + \ & \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dx^2} \ r^2 \ \cos^2 \ \alpha + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dy^2} \ r^2 \ \cos^2 \ \beta + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dz^2} \ r^2 \ \cos^2 \ \gamma \\ + \ & \frac{d^2u}{dx \ dy} \ r^2 \ \cos \ \alpha \ \cos \ \beta + \frac{d^2u}{dx \ dz} \ r^2 \ \cos \ \alpha \ \cos \ \gamma + \frac{d^2u}{dy \ dz} \ r^2 \ \cos \ \beta \ \cos \ \gamma \\ \cdots & . \end{aligned}$$

If we develop similarly R in accordance with the power and the products of $u' - u, \ x' - x, \ y' - y, \ z' - z$, we will have also

$$R = V + \left(\frac{dR}{du'}\right) (u' - u) + \left(\frac{dR}{dx'}\right) (x' - x) + \left(\frac{dR}{dy'}\right) (y' - y) + \left(\frac{dR}{dz'}\right) (z' - z) + \cdots \ ;$$

where, the parentheses indicating here that it needs to put $u' = u$, $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ according to the differentiation which supposes r invariable, and V designating this which comes at the same time from the function Φ of the (no. 45), so that we have

$$V = \Phi\ (r,\ u,\ u,\ x,\ y,\ z,\ x,\ y,\ z). \tag{13}$$

By means of these developments of R and of $u' - u$, this one of product $\int R\ (u' - u)$ will be composed of terms of this form

$$H\ r^n\ \cos^i\ \alpha\ \cos^{i'}\ \beta\ \cos^{i''}\ \gamma\ ;$$

where, H designating a coefficient independent of α, β, γ, and the exponential i, i', i'', being the number entire and positive which won't be zeros all the three to the times, and of which the exponent n is the sum $i + i' + i''$. Hence in having regard to the limits of the integral relative to ds, we will have

$$\int \cos^i\ \alpha\ \cos^{i'}\ \beta\ \cos^{i''}\ \gamma\ ds = 0,$$

here all times which the one of the three numbers i, i', i'', will be odd ; for then this integral will be composed of the elements which will be equal two by two and the contrary sign. When any of number i, i', i'', won't be odd, the integral won't be zero ; the ordinary rules give the exact values, whatever these three number ; and with this manner, we will have

$$(6)_{PS4} \qquad R\ (u' - u) = H_2\ r^2 + H_4\ r^4 + H_6\ r^6 + \cdots\ ; \tag{14}$$

where, H_2, H_4, H_6, $\cdots$, being the differential function of known form, in any of which the partial differences [13] of u will be taken with respect to x, y, z, and are raised to the order marked with its inferior index.

For a temperature u which would vary very rapidly, so that it would have the values very different in the extent of interior radiation, the coefficients H_2, H_4, H_6, $\cdots$, would form a series very rapidly increasing, by reason of partial differences [14] of u on which they depend. The series (14) would cease hence to be converged, though the smallness of r^2 ; however, this case doesn't hold in a point M sufficiently separated, as we suppose it, of the surface of A ; and we will be able, in consequence, to regard the series (14) as extremely convergent.

In stopping at its nth term, the equation in the partial differences [15] of the motion of the heat will be the order $2n$; however, its complete integral will include certain parties which will vary very rapidly, and that we be will be able to suppress for this reason, in the value of u, as a layperson to the question ; this one which will reduce always this value at the same degree of generality, whatever its degree of approximation, dependent on the terms of the series (14) which we will have conserved.

[13]($\Downarrow$) id. This mean the partial differentials.
[14]($\Downarrow$) id.
[15]($\Downarrow$) id.

This is here which we see successively, on a particular example, in which we will show also the influence which can have the sensible extent of the interior radiation on the value of u. However, to reduce the general equation of the motion of the heat to the simplest form, namely, to the form of an equation in the partial differences [a] of second order, also which we make ordinarily, we restrict the approximation to the primary term of the series (14) ; this is here which return to consider as insensible the extent of the radiation in the interior of corps solid and of liquid.

[a]($\Downarrow$) id.

§49. (General equation of the motion of heat) [16]

In this hypothesis, we will stop the development of R at the terms dependent on the square of r exclusively. By reason of the system of R in respect to u and u', x and x', y and y', z and z', and of this one which V represents, we have evidently

$$\left(\frac{dR}{du'}\right)=\frac{1}{2}\frac{dV}{du},\quad \left(\frac{dR}{dx'}\right)=\frac{1}{2}\frac{dV}{dx},\quad \left(\frac{dR}{dy'}\right)=\frac{1}{2}\frac{dV}{dy},\quad \left(\frac{dR}{dz'}\right)=\frac{1}{2}\frac{dV}{dz}\ ;$$

then, it will result hence

$$R=V+\frac{1}{2}\frac{dV}{du}\,(u'-u)+\frac{1}{2}\frac{dV}{dx}\,(x'-x)+\frac{1}{2}\frac{dV}{dy}\,(y'-y)+\frac{1}{2}\frac{dV}{dz}\,(z'-z)\ ;$$

and of this value jointed to that of $u'-u$, we will conclude

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2}\Big[V\frac{d^2u}{dx^2}+\Big(\frac{dV}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dV}{dx}\Big)\frac{du}{dx}\Big]\int\cos^2\alpha\ ds+\frac{1}{2}\Big[V\frac{d^2u}{dy^2}+\Big(\frac{dV}{du}\frac{du}{dy}+\frac{dV}{dy}\Big)\frac{du}{dy}\Big]\int\cos^2\beta\ ds\\ &+ \frac{1}{2}\Big[V\frac{d^2u}{dz^2}+\Big(\frac{dV}{du}\frac{du}{dz}+\frac{dV}{dz}\Big)\frac{du}{dz}\Big]\int\cos^2\gamma\ ds, \end{aligned}$$

or more simply

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2}\Big[V\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{dV}{dx}\frac{du}{dx}\Big]\int\cos^2\alpha\ ds+\frac{1}{2}\Big[V\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{dV}{dy}\frac{du}{dy}\Big]\int\cos^2\beta\ ds\\ &+ \frac{1}{2}\Big[V\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{dV}{dz}\frac{du}{dz}\Big]\int\cos^2\gamma\ ds\ ; \end{aligned}$$

the partial differences [17] of V with respect to $x,\ y,\ z$, being taken in considering u as a function of these three coordinates, and without varying r.

We have additionally

$$\int\cos^2\alpha\ ds=\int\cos^2\beta\ ds=\int\cos^2\gamma\ ds.$$

Moreover, if we call ψ the angle which makes the plane of the segment MM' and of a parallel to the axis of x traced through the point M, with a fixed plane traced through this parallel, we will have

$$ds=\sin\ \alpha\ d\alpha\ d\psi\ ;$$

[16]($\Downarrow$) This article is the most frequently referred from other article, such as 52, 58, 64, 68, 70, **76**, 85, 89, 117, 119, 120, 137, **162**. (These are the article numbers, referred to the no. 49, and in the bold numbers, the another equations are expressed.)

[17]($\Downarrow$) id.

and the integral relative to ds will come to be extended to all the spherical surface, to which this element belongs, then it will result

$$\int \cos^2 \alpha \; ds = \int_0^{\pi} \cos^2 \alpha \; \sin \; \alpha \; d\alpha \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{4\pi}{3}.$$

[18] Hence, in reducing the value of $\int R \; (u' - u)$ at the primary term $H_2 \; r^2$ of the series (14), the equation (12) will come to be

$$\begin{aligned} c\frac{du}{dt} &= \frac{2\pi}{3}\Big(\frac{d^2u}{dx^2}\int_0^l V \; r^2 \; dr + \frac{du}{dx}\int_0^l \frac{dV}{dx} \; r^2 \; dr\Big) + \frac{2\pi}{3}\Big(\frac{d^2u}{dy^2}\int_0^l V \; r^2 \; dr + \frac{du}{dy}\int_0^l \frac{dV}{dy} \; r^2 \; dr\Big) \\ &+ \frac{2\pi}{3}\Big(\frac{d^2u}{dz^2}\int_0^l V \; r^2 \; dr + \frac{du}{dz}\int_0^l \frac{dV}{dz} \; r^2 \; dr\Big). \end{aligned} \tag{15}$$

The function V being zero for all the value of r longer than l, we will be able to now extend the integral relative to r beyond this limit, and if we want to be until $r = \infty$. If we put also

$$\frac{2\pi}{3}\int_0^{\infty} Vr^2 \; dr \equiv k, \tag{16}$$

where, k will be a function of $u, \; x, \; y, \; z,$ and we will have

$$\frac{2\pi}{3}\int_0^{\infty} \frac{dV}{dx} \; r^2 \; dr = \frac{dk}{dx}, \quad \frac{2\pi}{3}\int_0^{\infty} \frac{dV}{dy} \; r^2 \; dr = \frac{dk}{dy}, \quad \frac{2\pi}{3}\int_0^{\infty} \frac{dV}{dz} \; r^2 \; dr = \frac{dk}{dz} \; ;$$

in consequence, the general equation of the motion of the heat will come to be finally

$$(7)_{PS4} \qquad c\frac{du}{dt} = \frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy} + \frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz}. \tag{17}$$

When all the point of A gets to a stationary state, we will have $\frac{du}{dt} = 0$, and then it will result

$$\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy} + \frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz} = 0,$$

for the equation relative to this stationary state.

[19]

§50.

The equation (17) coincides with that which I found in years ago for the case of a heterogeneous corps [20], however, in never supposing hence that the quantity k depended

---

[18]($\Downarrow$) According to [56, p.41, no.277],

$$\int \cos^m x \; \sin x dx = -\frac{\cos^{m+1} x}{m+1}.$$

[19]($\Downarrow$) The expression (15) is reduced into

$$c\frac{du}{dt} = \Big(\frac{d^2u}{dx^2}k + \frac{du}{dx}\frac{dk}{dx}\Big) + \Big(\frac{d^2u}{dy^2}k + \frac{du}{dy}\frac{dk}{dy}\Big) + \Big(\frac{d^2u}{dz^2}k + \frac{du}{dz}\frac{dk}{dz}\Big) \tag{18}$$

[20]sic. *Journal de l'École Polytechnique*, 19^e cahier, page 87. ($\Downarrow$) Poisson [64], [76, p. 677].

on the temperature u.

If A is a corps heterogeneous,

- k will depend only on u,
- and the equation (17) will be changed as follows :

$$(8)_{PS4} \qquad c\frac{du}{dt} = k\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \frac{dk}{du}\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right). \tag{19}$$

[21] In supposing that this quantity k were independent of u, we could have the equation

$$(9)_{PS4} \qquad c\frac{du}{dt} = k\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right), \tag{20}$$

[22] which we give it ordinarily, and which is reduced, in the case of the stationary state, to an equation independent of two quantities c and k, viz.,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0. \tag{21}$$

[23]

After obtained the equation (20), in considering c and k as the constant quantities, we could suppose

- that it will conserve the same form when these quantities will variable,
- that it will suffice to put here for $\frac{k}{c}$ a function given with u,
- and that the equation relative to the stationary state doesn't receive any change.

However, it is seen that these suppositions are never admissible ; the equation (20) and here one which is deduced in the case of $\frac{du}{dt} = 0$, were never, in the same case of a homogeneous corps, the exact equation of the motion of the heat and that of the stationary state ; and the formula (19) shows that the independence of partial differences [a] of u of the second order in respect to x, y, z, the true equations need also to contain the square of its partial differences [b] of the primary order.

[a]($\Downarrow$) id.
[b]($\Downarrow$) id.

To have regard to displacement of points of A, products with the dilations and condensations due to variation of the temperature, or from another cause, we will replace, as we mentioned above, $\frac{du}{dt}$ with the formula (7), and the equation (17) will come to be

$$(10)_{PS4} \qquad c\left(\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy} + \frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz}. \tag{22}$$

[21]($\Downarrow$) Because of $k = k(u)$, from each second terms in the right hand-side of the expression (18) is reduced into

$$\left(\frac{du}{dx}\frac{dk}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\frac{dk}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dz}\frac{dk}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\frac{du}{dx}\frac{dk}{du}\right) + \left(\frac{du}{dy}\frac{du}{dy}\frac{dk}{du}\right) + \left(\frac{du}{dz}\frac{du}{dz}\frac{dk}{du}\right) = \frac{dk}{du}\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right)$$

[22]($\Downarrow$) The equation (20) means $c\frac{du}{dt} = k\Delta u$, where Δ meaning the Laplacian.

[23]($\Downarrow$) This function u satisfying the equation (21) is called harmonic function. Poisson doesn't mention the harmonic function, however, Poincaré [78, p.237] calls it so. cf. Table. 1.

Here is this equation (22) which we will come to joint, for instance, to the ordinary equations of the motion of liquids, to accomplish it, hence that I proposed already in my *Study of Mechanics*[24] and in a preceding memoir. [25]

Poisson puts also the another heat equations [26] and in a preceding memoir. [27]

7. Part 2. The derivative productions of classical heat analyses

7.1. Detail items. the derivative productions of classical heat analyses.

1. We discuss historical development of the particular value in the wave analysis, including Prévost 1792 [81], Physico-Mechanical Researches of the Heat, Fourier 1822 [22], Analytic Theory of the Heat, and Poisson 1835 [77], Mathematical Theory of the Heat and finally Poincaré 1895 [78] Analytic Theory of Propagation of Heat. 2. In this 18-19 century, the conception of continuum is introduced at first by Laplace, many mathematician challenge the physico-mathematical problems. One in Prévost's essay on heat is the communication theory of heat, which becomes Fourier's main and initial motif in his scholar life. 3. After Laplace, Fourier and Navier, et al. participate in these studies, and Fourier puts forth the trigonometric series in the process of building the heat theory, including communication theory and the theory of heat motion in fluid. 4. In the rivalry with Fourier, Poisson puts forth his personality independent of Fourier, the digressions on the mathematics : these are his characteristic, namely, on the mathematical analysis of the integral, the partial equations, and the trigonometric series. Poisson traces many historical facts of the origins of the wave equations including the trigonometric series by the trailblazers such as Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, etc. 5. Poincaré puts forth many conceptions of pure analysis to solve the flux of heat from the viewpoint of up-to-date mathematical physics such as theory of Dirichret, theorem of Abel, theorem of Cauchy, theory of asymptotic value, theory of singular points, theory of holomorphic function, meromorphic function, etc. 6. We talk about the derivative productions of classical heat analyses such as particular value and eigenvalue, trigonometric series and its convergence, linear integral equation, meromorphic function, terrestrial system, or meteorology, etc. from the widely comparative viewpoint in the history of mathematics or mathematical physics.

---

[24]($\Downarrow$) *Traité de Mécanique*, op. cit. cf. Poisson [59], [75] and [76].

[25]($\Downarrow$) Poisson puts also the another heat equations such as in Chapter 6. entitled : Digression on the integral of the partial differential equations. §76. [77, p.146], or Chapter 11. entitled : Distribution of the heat in certain corps, and specially in a homogeneous sphere primitively heated with a certain manner. §162. [77, p.347] :

$$(1)_{PS11} \qquad \frac{du}{dt} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right), \qquad \frac{k}{c} = a^2, \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = a^2\Delta u. \tag{23}$$

where, u is the heat, k and c are the conductibility and the specific heat of the material. Δ is the Laplacian.

[26]($\Downarrow$) *Traité de Mécanique*, op. cit. cf. Poisson [75, 76],

[27]($\Downarrow$) Poisson puts also the another heat equations such as in Chapter 6. entitled : Digression on the integral of the partial differential equations. §76. [77, p.146], or Chapter 11. entitled : Distribution of the heat in certain corps, and specially in a homogeneous sphere primitively heated with a certain manner. §162. [77, p.347] :

$$(1)_{PS11} \qquad \frac{du}{dt} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right), \qquad \frac{k}{c} = a^2, \tag{24}$$

where, u is the heat, k and c are the conductibility and the specific heat of the material.

TABLE 3. The five books and one paper on physico-mathematical theories of heat

	Name	Prévost 1792 [81] (1751-1839)	Laplace 1818 (1749-1827)	Fourier 1822 [22] (1768-1830)	Poisson 1835 [77] (1781-1840)	Dirichlet 1837 [14] (1806-59)	Poincaré 1895 [78] (1854-1912)
1	title	*Recherches physico-mécaniques sur la chaleur*	*Traité de mécanique céleste*	*Théorie analytique de la chaleur*	*Théorie mathé-matique de la chaleur*	*Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinus-reihen*	*Théorie analytique de la propagation de la chaleur*
2	total page	232		[22] 541 except for contents [23] 641	[77] 552	[14] 26	314
3	point/ merit	communi-cation theory · only quantity of heat depends on the heat communi-cation, not with temperature	many mathematical concepts	· heat theory · trigonometric series	· check on Fourier's method mathemati-cally with another method · proving convergence of series	· theorem of Dirichlet · proof of convergence of the series	introduction of · Dirichlet principle, · harmonic function · the methods by Fourier, Laplace, Cauchy, Riemann · analogous equations with heat such as the equation of cord vibration, telegraph
4	contri-butions	to Fourier's communi-cation theory	continuum theory to the hydrodynamics & heat dynamics like Fourier, Navier, Poisson, Poincaré	· trigonometric series after followers until now · molecular theory to Navier	to Sturm and Liouville	to Poincaré · Dirichlet principle	introduction of various conceptions like : · integral equ. · harmonic func. · holomorphic func. · meromorphic func. · spherical func. · spherical trigonometry · spherical polynomial
5	other relative papers		· *Mémoire du flux et du reflux*, 1790 · *Connaisances des Tems*, 1823	1805 [18], 1808 [10], 1816 [19], 1824 [24], 1826 [25], 1827 [26], 1829 [27], 1835 [28], 1890 [11],	1808 [58], 1823 [67], 1823 [68], 1823 [69], 1824 [70]	1829 [12] 1830 [13]	
6	remark	Poisson [77] introduces [81] as an essay			Poincaré 1895 doesn't mention this at all	check on Fourier's proving	Fredholm [29] refers on Poincaré's harmonic function

TABLE 4. The function, theory, law and introduction of preceding work of heat

	Name	Prévost 1792 [81] (1751-1839)	Laplace 1818 (1749-1827)	Fourier 1822 [22] (1768-1830)	Poisson 1835 [77] (1781-1840)	Dirichlet 1837 [14] (1806-59)	Poincaré 1895 [78] (1854-1912)
1	title	*Recherches physico-mécaniques sur la chaleur*	*Traité de mécanique céleste*	*Théorie analytique de la chaleur*	*Théorie mathématique de la chaleur*	*Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinus-reihen*	*Théorie analytique de la propagation de la chaleur*
2	Theory/ theorem			Lagrange Laplace	Lagrange Laplace Fourier		theorem of Fourier theprem of Cauchy Bessel theorem of Dirichlet Dirichlet condition theorem of Abel
3	law(l)/ formula/ notation(n)		Laplacian, Laplace equ.	Lagrange Laplace	Taylor Lagrange Laplace Fourier Poisson equ. Poisson brachet (n)Legendre		(l)Newton Taylor Laplace Fourier Green (n)Halphen
4	introduction of preceding work of heat			Biot Laplace Poisson	Biot Jakob Bernoulli Prévost 1792 [81] Laplace Fourier		Laplace Fourier Cauchy Abel
5	math-ematical consider-ation	Heat transfer independly of the temperature		trigono-metric series	three digressions · ¶71-91. · ¶92-104. · ¶105-115. cf. Remark in the out of Table ??.	1829 [12] 1830 [13] 1837 [14]	¶43-4 theorem of Abel and its application ¶ 57 Integral of Fourier ¶ 62 $\int_0^\infty \varphi_1(y) \frac{\sin\ \alpha\ y}{y}\, dy$ ¶ 127 uniqueness of development ¶ 136 $\iiint RU_i d\tau = 0, \quad \forall\, i \leq n$ ¶ 157 condition of Dirichlet
6	numerical calculation or experiment				inequality of temperature in day/year/place		
7	newness	Quantity of heat is only concerned in the transfer of heat. Temperature isn't concern-ed in it.	· continuum · molecular action	· trigono-metric series · heat equation · heat diffusion equation	· molecular radiation · terrestrial heat including sterate heat atmospheric heat solar hear · mereorology	proving of Fourier's unproved	· electric wave · telegraph equ. · pure mathematics such as · holomorphy, · meromorphy, · etc.

8. The origin of eigenvalue problem

Euler 1748 [16] says the height of the vibrating cord is calculated by the linear, first-ordered expression as follows :

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots \tag{25}$$

Lagrange 1759 [44] descrives as the introductional expression of the trigonometric series by P_ν and Q_ν as follows :

$$P_\nu \equiv Y_1 \sin \frac{\nu \varpi}{2m} + Y_2 \sin \frac{2\nu \varpi}{2m} + Y_3 \sin \frac{3\nu \varpi}{2m} + \cdots + Y_{m-1} \sin \frac{(m-1)\nu \varpi}{2m} \tag{26}$$

where, Q_ν has the same linear, first-ordered combination with coefficients $V_1,\ V_2,\ \cdots$ instead of $Y_1,\ Y_2,\ \cdots$. The indicies of P and Q show simply the *valeur particulières* (eigenvalues) of ν which (the *valeur particulières*) belong to them (P_ν and Q_ν, respectively). [44, pp.79-80] (trans. mine.) Remark. Lagrange's ϖ is equal to π. In (25), we can see in case we assume $a = 2m$ and $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots$ are equal to $Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ \cdots$, then $x = \nu$ in Lagrange's P_ν in (26) or Q_ν reffering to *valeur particulière* (eigenvalue), namely (25) = (26).

9. The derivative productions of classical heat analyses

9.1. *La valeur particulière* and the eigenvalue.

We confirm the identity of *valeur particulière* with the eigenvalue. We would pay attention to the historical fact that it has been developed for the linear differential equation on the heat deffusion, or the trigonometric serirs and eigenvalue problem in the analysis including string or sonic oscillation, the rapidly changing (decreasing/increasing) function,[28] and the process redefined of the eigenvalue by Hilbert in 1904.

- We think the eigenvalue is translated from *la valeur particulière* into German word *der Eigenwert* by the Hilbert 1904 and is expatiated by Courant-Hilbert 1924 [9]. The word *eigenfunction* is combined corresponding to the word : *eigenvalue.*
- In the bibliographies of the earlier centuries, for example, Lagrange 1759, Fourier 1822, Poisson 1823, 1835, Cauchy 1823, Sturm 1836, Liouville 1836, Poincaré 1895, et al. use la *valeur particulière.* Sturm and Liouville owe to Poisson's preceding works of now so-called Sturm-Liouville type differential equation of the second order.
- In the first English translation of Fourier's main work [22], Freeman 1878 [30] uses 'the particular value' to all the over 43 original words in this book.
- Wilkinson 1952 uses *eigenvalue* without using the other English word : *proper value* or particular value in recognition of its nomenclature of eigenvalue.
- Today's French word : *la valeur propre*, used by Chatelin 1988, et al., may be reimported from German *Eigenwert* after Wilkinson's English word *eigenvalue.*
- The then French usage of *la fonction particulière / le espace particulière* corresponding to the eigenfunction / eigenspace / eigenvector aren't distinct in these days, however, the correspondency between the eigenvalue and the function is visible, for example, such as the expression in Poisson [77] or Sturm [89] or the

[28] cf. We cite the rapidly changing function in §48 of 6.1.

expression in Liouville [47], in spite of the fact that its usage aren't so distinct as after Hilbert.

- On the other hand, the word *valeur caractèristique* aren't used as the eigenvalue.
- At last, we can recognize Euler 1748 on the cord vibration as one of the origin of eigenvalue problem. It is because the two equations (25) and (26) are the same.

10. The carried-over to the next century unifying the legacies in the 19th c.

In 1878, ten years earlier than G. Darboux, A. Freeman [30] published the first English translated Fourier's second version 1822. To this work, Lord Kelvin (William Thomson) contributes to import the Fourier's theory into the England academic society. [29] The microscopical description of hydromechanics equations are followed by the description of equations of gas theory by Maxwell, Kirchhoff and Boltzmann. Above all, in 1872, Boltzmann formulated the Boltzmann equations. After Stokes' linear equations, the equations of gas theories were deduced by Maxwell in 1865, Kirchhoff in 1868 and Boltzmann in 1872. They contributed to formulate the fluid equations and to fix the Navier-Stokes equations, when Prandtl stated the today's formulation in using the nomenclature as the "so-called Navier-Stokes equations" in 1905 , in which Prandtl included the three terms of nonlinear and two linear terms with the ratio of two coefficients as 3 : 1, which arose from Poisson in 1831, Saint-Venant in 1843, and Stokes in 1845. From Fourier's equation of heat, Boltzmann's gas transport equation is deduced. (cf. Table 1, 2).

11. Poisson's contributions

Poisson contributes in making his paradigm to the fluid dynamics and heat theory are as follows :

- He presents the 'two constant theory', which we assert,[30] as visible in the Navier-Stokes equations in 1831. After this, Stokes follows Poisson's equation in 1849, and Prandtl deciears these equations as the 'Navier-Stokes equations' in the top of the twenty century.
- He proposes the alternative method of the definite integral, [31] instead of making the universal method of it, since by Euler, Lagrange and Laplace.
- He evaluates the trigonometric series by Lagrange as the original and analytical series and which is enhanced and succeeded to the Fourier's series.
- He shows the heat equation by deducing precisely, although Fourier's series is the first, however, its introduction isn't deducing such as Poisson's or without demonstration.
- Although his approach dues to the rivarly to the Fourier's theory, it brings up the derivative productions of the another solutions or thinking in making many breakthroughs to Fourier's method.

12. General Conclusions

1. We consider our problem as the totality among the definite integral, the trigonometric series, etc., for Poisson's objection to Fourier is relating the universal and

[29] A.Freeman puts the name of W. Thomson in his acknoledgement. cf. [30, errata].

[30] (⇓) cf. Section 10, and Table 1, 2.

[31] (⇓) cf. [60], [76, pp.347-368] and [77, pp.129-182].

TABLE 5. The family of eigenvalue/eigenfunction. Rem. $(\cdot)$: frequency used. $n+$: more than n. B2 : fonction harmonique by Poincaré. e.v.: eigenvalue, e.f.: eigenfunction, e.s.: eigenspace, Ew : Eigenwert, Ef : Eigenfunction, Er : Eigenraum, numberless A and B : using implicitly.

no	English	(A)proper value (B)proper function/ space	particular value	indole value indole function	e.v. e.f./e.s.	remark
	French	valeur propre, function propre	valeur particulière, function particulière /espace particulière	valeur characteristique function charactèristique		(B2) fonction harmonique
	Latin			value indole function indole		
	German				Ew,Ef/Er	
1	Lagrange		1760-61, [39] (A:1+)			
2	Laplace		1782, 85 [40] (A:5+)			
3	Lacroix		1800 [38] (A:4)			
4	Fourier		1822 [22] (A:43+, B)			
5	Poisson		1808 [58] (A:3), 1823 [68] (A:18), 1831 [74] (A:7+), 1835 [77] (A:45, B:1)			
6	Cauchy		1815 [5] (A:1) 1823 [6] (A:5) 1823 [7] (A:6)			
7	Gauss			1830 [31] cf. [48]		
8	Sturm		1836 [88] (A:6), 1836 [89] (A:3, B)			
9	Liouville		1836 [47] (A, B)			
10	Freeman (translation of Fourier[22])		1878 [30] (A:43+) (translation of Fourier [22])			
11	Poincaré		1895 [78] (A:1)			1895 [78] (B2:5)
12	Hilbert				1904 [35], [36]	
13	Courant-Hilbert				1924 [9]	
14	Schrödinger				1926 [85, 86]	
15	Gerschgolin				1931 [32]	
16	Wilkinson				1952 [91]	
17	Chatelin	1988 [8]				

fundamental problem of analytics, as we show Poisson's analytical/mathematical thought or sight in the Chapter 6, etc. In fact, Poisson's work-span covers them.

2. Fourier doesn't show the pricise deduction of the heat equation (5), while Poisson takes 9 pages to descrive it from §44 to §50. The diffefrence between Fourier

and Poisson is the common kernel function of molecular distance, which Poisson manipulates in both fluid motion and heat motion.

3. Boltzmann's concept of collision and transport with entropy and probability are treated as the classical quantum mechanics. In this sense, Fourier's communication theory and the equation of motion in the fluid stand on the communication point between the classical mechanics and new quantum mechanics by Schrödinger.
4. Owing to the arrival of continuum, we are able to discuss the solution of the problem on the continuous space of mathematics. As Duhamel [15] says, at first, Poisson performs it with the concept of mathematically infinite continuity. This allows us to discuss, without depending on the microscopic-description, by the vectorially description, like Saint-Venant, Stokes.
5. Although the confusion of knowledges on continuum, the unity in the mathematics are gained, however, the applicabilities of the unite or general equations are then not yet defined, which comes from the misunderstandings interphysico-mathematics, such as the identity of fluid and elasticity, or, fluid and heat.
6. Sturm-Liouville type differential equations of heat diffusion problems [47, 88] are redefined by Hilbert [36] using the second order differential operator $\mathcal{L}$ and as the *EigenWert* problem translating from the traditionally used nomenclature *la valeur particulière.*
7. About the describability of the trigonometric series of an arbitrary function, nobody succeeds in it including Fourier, himself. Up to the middle of or after the 20th century, these collaborations are continued, finally in 1966, by Carleson proved in L^2, and in 1968, by Hunt in L^p.

13. Epilogue

Poisson [77, pp.411-415] expects the earth warming before the Industorial Revolution [32] up to 17 years after. According to his speculation, in using this average rate of the increment per a year is $0.22°C$, then we can estimate with this increment rate up to this year 2015, just at the COP21, the temperature rises between 198 years, $2.447°C$ as follows :

$$\frac{11.950 - 11.730}{17\frac{7}{12}} \times 198 = \frac{0.22}{17.58333} \times 198 = 2.477°C.$$

This is what is called the reason of the consensus about the increment of the earth warming in the world.

References

[1] D.F.J. Arago, *Note du Rédacteur*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 107-110. (This is following with Navier[53], 99-107).

[2] D.H. Arnold, *The mécanique physique of Siméon Denis Poisson : The evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800-1840) I,II,III,IV, V, VI, VII, VIII,IX,X*, Arch. Hist. Exact Sci. **28-3**(1983) I:243-266, II:267-287, III:289-297, IV:299-320, V:321-342, VI:343-367, **29-1**(1983) VII:37-51, VIII:53-72, IX: 73-94, **29-4**(1984) X:287-307.

[3] J. K. Beatty, A. Chaikin, *The New Solar System*, third edition, 1981, Cambridge University Press.

[4] L. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie, von Dr. Ludwig Boltzmann Professor der Theoretischen Physik an der Universität Wien.* Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1895, 1923. *Lectures on gas theory*, 1895, translated by Stephen G.Brush, Dover, 1964.

[32]($\Downarrow$) As we know, the Industorial Revolution was occurred at about in 1830 in England.

[5] A.L. Cauchy, *Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des intéqrales défines et sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales de cette espèce.*
Remark. We can refer the following 4 sources : (1) Mémoires de l'Académie royale des Siences, 2 jan. 1815, (2) vol. 1 of *Exercices*, (3) J. École Royale Polytech., Cahier **28**, **17**(1844), (4) *Œubres complétes d'Augustin Cauchy*, ser. 2, t. 1, pp.467-567. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90193x

[6] A.L. Cauchy, *Mémoire sur espèce particulière de mouvement des fluides*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 206-216. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[7] A.L. Cauchy, *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficiences constans*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 510-92. (Lu : 16/sep/1822.) (Remark : this paper is the same as in *Cauchy, Augustin Louis Oeuvres complètes*, **13**(1882-1974), serie (2), t. 1, pp.275-357. At first, in 1821, next, MAS (pp.510-92) in 1822, at last, JEP (pp.275-357) in 1823.) (JEP) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90193x (MAS) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[8] F. Chatelin, *Valeurs propres de matrices*, Masson, 1988.

[9] R. Courant, D. Hilbert, *Methoden Mathematischen Physik*, Band 1, 2, Springer, 1924.
→ http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/toc/?PPN=PPN3RCauchy8067226X
(We can see, also *Methods of Mathematical Physics, first English edition Translated and Revised from the German Original*, Vol. 1, 2. Wiley Classics Edition, 1989.)

[10] G. Darboux, *Œuvres de Fourier. Publiées par les soins de M.Gaston Darboux*, Tome Premier, Paris, 1888, Tome Second, Paris, 1890.

[11] G. Darboux, *Œuvres de Fourier. Publiées par les soins de M.Gaston Darboux*, Tome Second, Paris, 1890. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33707

[12] M.G.Lejeune Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limits données*, Crelle J. für die reine und angewandte Mathematik, **4**(1829), 157-169. ⇒ Lejeune Dirichlet,G *Werke* Tome **1**, herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenscaften von Kronecker ; forgesetzt von L.Fuchs, Berlin, 1889-1897, 119-132. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99435r/f132

[13] M.G.L. Dirichlet, *Solution d'une question relative à le théorie mathématiques de la chaleur*, Crelle J. für die reine und angewandte Mathematik, **5**(1830), 287-295. ⇒ Lejeune Dirichlet, G *Werke* Tome **1**, herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenscaften von Kronecker ; forgesetzt von L.Fuchs, Berlin, 1889-1897, 161-172. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99435r/f132

[14] M.G.L. Dirichlet, *Über die darstellung ganz willkürlicher functionen durch sinus- und cosinusreihen*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, 1837, 146-174. ⇒ Lejeune Dirichlet,G *Werke* Tome **1**, herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenscaften von Kronecker ; forgesetzt von L.Fuchs, Berlin, 1889-1897, 135-160 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99435r/f146

[15] J.M.C. Duhamel, (Book review) *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques ; par M.Poisson*, Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **11**(1829), 98-111. (The title number : No.35.)

[16] L.Euler, *Sur la vibration des cordes*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, **4**(1748), 69-85. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Series II, vol.10, 63-77. → The Euler Archives, berlin-brandenburgische ACADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, Berlin

[17] L.Euler, *Sectio secunda de principiia motus fluidorum*, E.396. (1752-1755), Acta Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitensis, **6**(1756-1757), 271-311(1761). Leonhardi Euleri Opera Omnia. Edited by C.Truesdell III : Commentationes Mechanicae. Volumen posterius, **2-13**(1955) 1-72, 73-153. (Latin)

[18] J.-B.-J. Fourier, *FR22,525*, 1805. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b9061926m

[19] J.-B.-J. Fourier, *Théorie de la chaleur*, Annales de chimie et de physique, **3**(1816), 350-375. (Not found, however, Poisson [68] cites this one.)

[20] J.-B.-J. Fourier, *Question d'Analyse algébraique*, Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris, 1820, 61-67. → [11], 243-256.

[21] J.-B.-J. Fourier, *Sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des mimits des racines*, Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris, 1820, 156-165 and 181-7. → [11], 291-309. (Followed by the comment of G.Darboux, 310-314.)

[22] J.-B.-J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur. Deuxième Édition*, Paris, 1822. (This is available by G.Darboux [10] [Tome Premier] with comments).

[23] J.-B.-J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur.*, Paris, 1822. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1045508v (Remark. This is the original book version of BnF : *Bibliothèque Nationale France*, namely, it seems the original book of [22] edited by G.Darboux. After p.32, there are 4 pages of pp.23-26, however, p.33ff are followed after p.26. Total pages are 639 plus the 2 pages of figures, while the book [22] is consisted of 563 pages.)

[24] J.-B.-J. Fourier, *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*, I^{re} Partie, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **4**(1819-20), 1824, 185-555. (This is the prize paper no.1, this paper is not in [11], however appears only in its index. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3291v/f26)

[25] J.-B.-J. Fourier, *Suite de Mémoire intitulé : Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*, II^{e} Partie, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **5**(1821-22), 1826, 153-246. → [11], 3-94. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3220m/f7 (This is the prize paper no.2.)

[26] J.-B.-J. Fourier, *Mémoire sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application des théorèmes d'analyse algébrique aux équations transcendentes qui dépendent de la théorie de la chaleur*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **7**(1827), 605-624. → [11], 127-144. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227

[27] J.-B.-J. Fourier, *Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **8**(1829), 581-622. (referred : [13, p.287]) → [11], 145-181. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j

[28] J.-B.-J. Fourier, *Mémoire d'Analyse sur le mouvement de la chaleur dans les Fluides*, pp.507-514, *Extrait des notes manuscrites conservées par l'auteur*, pp.515-530 Mémoires de l'Académie royale des Siences, **12**(1833), 507-530. (Lu : 4/sept/1820.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3227s/f620 (Darboux 2[11], pp.593-614)

[29] I. Fredholm, *Les équations intégrales linéaires*, Compte Rendu du Congrès des mathématiciens tenu à Stockholm 22-25 Septembre 1909. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k994510

[30] A. Freeman, *The analytical theory of heat by Joseph Fourier*, (Translated in English, with Notes), Cambridge Univ. Press, 1878.

[31] C. F. Gauss, *Principia generalia theoriae figurae fluidrum in statu aequilibrii*, Gottingae, 1830, *Carl Friedrich Gauss Werke V*, Göttingen, 1867. (We can see today in : "*Carl Friedrich Gauss Werke V*", Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York, 1973, 29-77. Also, *Anzeigen eigner Abhandlungen, Götingische gelehrt Anzeigen*, 1829, as above in "*Werke V*", 287–293.) (Latin)

[32] S. Gerschgolin, *Über die Abgrenzung der Eigenvwerte einer Matrix*, Izv., Akad. Nauk, SSSR, Ser. fiz-mat. Nauk **6**(1931), 749-54.

[33] I. Grattan-Guinness, *Joseph Fourier 1768-1830*, MIT., 1972.

[34] J. Kepler, *Ioh. Keppleri Mathematici Olim Imperatorii Sominius seu Opus Posthumum de Astronomia Lunari*, Divulgatum à M. Ludovico Kepplero Filio, Medicinx Candidato, Impressum partim Sagani Silesiorum, absolutum Francojurti, sumptibus baredum authoris. 1634. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k82384s

[35] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgeminen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig und Berlin, Druck und Verlag von B.G.Teubner, 1912. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k995549

[36] D. Hilbert, *David Hilbert Gesammelte Abhandlungen*, Band I (Zahlentheorie), II (Algebra, Invariantentheorie, Geometrie), III (Analysis, Grundlagen der Mathematik Physik, Verschiedenes Lebensgeschichte). (Zwite Auflage), Springer-Verlag, 1970. (Band I)→ http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k264885 (Band II))→ http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k26489h (Band III) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k26490q

[37] G.Kirchhoff, *Vorlesungen über Mathematische Physik. Erster Band. Vorlesungen über Mechanik*, Leipzig, Teubner, 1876, 1876, 1883. Vierte Auflage : 1897.

[38] S.F. Lacroix, *Traité des Différences et des séries*, Paris, 1800. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k92731h

[39] J.L. Lagrange, *Nouvelles Recherches sur la Nature et la Propagation du Son*, Miscellanea Taurinensia, **2**(1760-61), 151-318. *Oeuvres de Lagrange* **1**(1867-92), 151-318 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2155691/f201

[40] P.S.Laplace, *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grandes nombres (Suit)*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, 1783, 1786. Œuvres de Laplace, **10**(1894), 209-294, *Suit*, 295-337, 235-238, espacially. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k775981/f218

[41] P.S. Laplace, *Mémoire sur divers points d'analyse*, J. École Polytech., Cahier **15**, **8**(1809), 229-265. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb34378280v

[42] P.S. Laplace, *Traité de mécanique céleste./* •§4 *On the equilibrium of fluids./* •§5 *General principles of motion of a system of bodies./* •§6 *On the laws of the motion of a system of bodies, in all the relations mathematically possible between the force and velocity./* •§7 *Of the motions of a solid body of any figure whatever./* •§8 *On the motion of fluids*, translated by N. Bowditch, Vol. I §4-8, pp. 90-95, 96-136, 137-143, 144-193, 194-238, New York, 1966.

(The inside cover of this book reads : the present work is a reprint, in four volumes, of Nathaniel Bowditch's English translation of volumes I,II,III and IV of the French-language treaties *Traité de Mécanique Céleste*, by P.S. Laplace. The translation was originally published in Boston in 1829, 1832, 1834 and 1839, under the French title, *"Mécanique Céleste"*, which has now been changed to its English-language form, *"Celestial Mechanics."*)

[43] J. Liouville, *Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second order contenant un paramétre variable*, J. Math. Pures Appl., **1**(1836). 253-265. (Lu : 30/nov/1835.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k16380x/f259

[44] J.L. Lagrange, *Recherches sur la Nature et la Propagation du Son*, Miscellanea Taurinensia, **1**(1759), 39-148. *Oeuvres de Lagrange* **1**(1867-92), 39-150 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2155691/f89

[45] J.L. Lagrange, *Solution de différents problèmes de calcul intégral*, Miscellanea Taurinensia III, **1**(1762-65). *Oeuvres de Lagrange* **1**(1867-92), 471-668 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2155691/f89

[46] J.L.Lagrange, *Mécanique analitique*, Paris, 1788. (Quatrième édition d'après la Troisième édition de 1833 publièe par M. Bertrand, *Joseph Louis de Lagrange, Oeuvres*, publièes par les soins de J.-A. Serret et Gaston Darboux, **11/12**, (Vol.**11** : 1888, Vol.**12** : 1889), Georg Olms Verlag, Hildesheim·New York, 1973.) (J.Bertarnd remarks the differences between the editions.)

[47] J. Liouville, *Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second order contenant un paramétre variable*, J. Math. Pures Appl., **1**(1836). 253-265. (Lu : 30/nov/1835.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k16380x/f259

[48] S. Masuda, *Historical development of classical fluid dynamics*, Scholars' Press, 2014.

[49] S. Masuda, *Historical development of classical physico-mathematics*, Scholars' Press, 2014.

[50] J. C. Maxwell, *Drafts of 'On the dynamical theory of gases', The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell edited by P.L.Herman*, I(1846-62), II(1862-73). Cambridge University Press. (This paper is included in II, (**259**), 1995, 254-266.)

[51] C.L.M.H. Navier, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Académie des Sience de l'Institute de France, **7**(1827), 375-393. (Lu: 14/mai/1821.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227, 375-393.

[52] C.L.M.H. Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Académie desSience de l'Institute de France, **6**(1827), 389-440. (Lu: 18/mar/1822.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x, 389-440.

[53] C.L.M.H. Navier, *Lettre de M.Navier à M.Arago*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 99-107. (This is followed by *Note du Rédacteur*, 107-110.)

[54] C.L.M.H. Navier, *Note relative à la question de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **11**(1829), 249-253. (The title number : No.142.)

[55] Sir I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London, 1687 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3363w

[56] B. O. Peirce, *A Short Table of Integrals, 4th ed.*, Brain Publishing, 1956. (Jap.)

[57] S.D. Poisson, *Mémoire sur les Équations aux Différences mêlées*, (Lu à l'Institut le 21 Prairéal, an **13**), J. École Polytech., Cahier **13**, **6**(1806), 126-147. (referred : Laplace [41, p.238]) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433669p/f127

[58] S.D. Poisson, *Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps Solides*, Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris, t.I, 112-116, no.6, mars 1808. Paris. (Lu : 21/déc/1807) (Remark. The author of paper is named as Fourier, for the report of Fourier's undefined version, however, the signature in the last page is 'P' meant Poisson.) → [10] vol.2, 215-221. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33707

[59] S.D. Poisson, *Traité de Mécanique*, vol 1-2, Chez M^{me} veuve Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathematiques, Paris. 1811. (Company of widow Courcier, for printing and publishing for the mathematics.) (vol.1) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k903370 (vol.2) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90338b

[60] S.D. Poisson, *Mémoire sur les intégrales définies*, (1813), J. École Polytech., Cahier **16**, **9**(1813), 215-246. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k4336720/f220

[61] S.D. Poisson, *Suite du Mémoire sur les intégrales définies, imprimé dans le volume précédent de ce Journal*, J. École Polytech., Cahier **17**, **10**(1815), 612-631. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433673r/f614 (followed from [60].)

[62] S.D. Poisson, *Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **13**(1818), 121-176. (Lu : 19/juillet/1819.) (referred : [64, p.139])

[63] S.D. Poisson, *Suite du Mémoire sur les Intégrales définies, Inséré dans les duex précédens volumes de ce Journal*, J. École Polytech., Cahier **18**, **11**(1820), 295-341. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k4336744/f300 (followed from [60] and [61].)

[64] S.D. Poisson, *Mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 1-144. (Lu : 31/déc/1821.) (Remark. In this top page, Poisson addes the following footnote : Ce Mémoire a été lu à l'institut, le 29 mai 1815 ; le mois suivant, j'en ai donné des extraits dans le Journal de Physique et dans le Bulletin de la Société philomatique ; mais depuis cette époque, j'ai eu l'occation de reprendre mon travail sur le même sujet, et d'y ajouter plusiers parties qui en ont presque doublé l'étendue : c'est pourquoi je ne donnerai à mon Mémoire d'autre date que celle de sa publication.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[65] S.D. Poisson, *Addition Au Mémoire sur précédent, et au Mémoire sur la manière d'exprimer les Fonctions par des Séries de Quantités périodiques*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 145-162. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[66] S.D. Poisson, *Mémoire sur l'Intégration des équations linéaires aux différences partielles*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 215-248. (Lu : 31/déc/1821.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[67] S.D. Poisson, *Second Mémoire sur la Distribution de la chaleur dans les corps solides*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 249-403. (Lu : 31/déc/1821.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[68] S.D. Poisson, *Suite du Mémoire sur les Intégrales définies et sur la Sommation des Séries*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12** (1823), 404-509. (followed from [60], [61] and [63].) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[69] S.D. Poisson, *Extrait d'un Mémoire sur la Propagation du mouvement dans les fluides élastiques*, Annales de chimie et de physique, 2^e Ser., **22**(1823), 250-269. (Lu : 24/mar/1823.)

[70] S.D. Poisson, *Sur la chaleur rayonnante*, Annales de chimie et de physique, **26**(1824), 225-45, 442-44.

[71] S.D. Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Annales de chimie et de physique, **37**(1828), 337-355. (Lu : 14/apr/1828. This is an extract from [72])

[72] S.D. Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **8**(1829), 357-570. (Lu : 14/apr/1828.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j

[73] S.D. Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. École Royale Polytech., **13**(1831), 1-174. (Lu : 12/oct/1829.)

[74] S.D. Poisson, *Nouvelle théorie de l'Action capillaire*, Bachelier Pére et Fils, Paris, 1831. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1103201

[75] S.D. Poisson, *Traité de Méchanique*, second edition, (1), Bachelier, Imprimeur-Libraire, Paris, 1833. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k9605452x

[76] S.D. Poisson, *Traité de Méchanique*, second edition, (2), Bachelier, Imprimeur-Libraire, Paris, 1833. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k9605438n

[77] S.D. Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur*, Bachelier Pére et Fils, Paris, 1835. → http://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-16666

[78] E. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur. Leçons professées pendant le premier sementre 1893-1894*, Georges Carré, Paris. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5500702f

[79] L.Prandtl, *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, in III. Internationaler Mathematiker-Kongress in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. *Verhundlungen*, A. Krazer (ed.) 184-91, Leibzig, 1905. Also : Ludwig Prandtl, *Gesammelte Abhundlungen zur Mecchanik, Hydro-und Aerodynamik*, vols **3**(1961), Göttingen. vol **2**, 575-584. (read 1904.)

[80] L. Prandtl, *Fundamentals of hydro-and aeromechanics*, McGrawhill, 1934. (Based on lectures of L.Prandtl (1929) by O.G.Tietjens, translated to English by L.Rosenhead. 1934.)

[81] P. Prévost, *Recherches physico-mécaniques sur la cheleur*, Paris, 1792. → http://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-4785

[82] Lord Rayleigh (William Strutt), *On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on the some allied acustical problems*, Royal Society of London, *Philosophical transactions*, also in Lord Rayleigh,

[83] B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Göttingen State-Univ. 1867. 1-47.

[84] A.J.C.B.de Saint-Venant, *Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides. (Extrait.)*, Académie des Sciences, *Comptes-rendus hebdomadaires des séances*, **17**(1843), 1240-1243. (Lu : 14/apr/1834.)

[85] E. Schrödinger, *Quantisierung als Eigenwertproblem*, 1-4, Analen der Physik. **79**(1926), 361-376. **79**(1926), 489-527. **80**(1926), 437-490. **81**(1926), 109-139.

[86] E. Schrödinger, *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen*, Analen der Physik. **79**(1926), 734-756.

[87] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, 1849*, (read 1845), (From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, New York and London, 1966.

[88] C. Sturm, *Mémoire sur les Équations différentielles linéaires du scond ordre*, J. Math. Pures Appl., **1**(1836). 106-186.(Lu : 28/sep/1833.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k16380x/f112

[89] C. Sturm, *Mémoire sur une class d'Équations à differences partielles*, J. Math. Pures Appl., **1**(1836). 373-458. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k16380x/f381

[90] C. Sturm, J. Liouville, *Extrait d'un Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second order contenant un paramétre variable*, J. Math. Pures Appl., **2**(1837). 220-223. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k163818/f228

[91] J.H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford, 1952.

Remark. Lu : accepted date, (ex. Lu : 12/oct/1829, in the bibliographies of French Mémoire.)