津田塾大学 数学・計算機科学研究所報
16

第8回
数学史シンポジウム
（1997）

1998

津田塾大学 数学・計算機科学研究所

まえがき

津田塾大学 数学·計算機科学研究所主催の「数学史シンポジウム」も回を重ね、第8回が1997年10月25日、26日の両日、津田塾大学5号館で開催された。この研究所報16号はその報告である。
講演しこの号の原稿を書いて下さった方々に厚く御礼申し上げます。また、発行が遅くなったことをおわびいたします。

1998年8月20日

津田塾大学 数学・計算機科学研究所
杉浦 光夫

目次

数学ビッグバン

「数学から数理科学へ」という流れ

山下純一

最近，日本における数学シーンの中で，数理科学という言葉をよく耳にするようになった．国立大学を中心にして，従来の理学部数学科が姿を消し，数理科学，数理学，多元数理科学などといった名前の新しい「学科」が生まれつつある．制度的にも人的にも疲労して沈滞ぎみの数学科をアメリカ的なものに改造しようという感じだから，これはまぁ，「数学ビッグバン」のようなものなのかもしれない．そもそも，「数学から数理科学へ」という流れはどのようにして発生したのだろう？

数理科学とは

数理科学というのは，いうまでもなく数理的な科学のはずだ．もともと英語の「Mathematical Sciences」，フランス語の「Sciences mathématiques」，ドイツ語の「mathematische Wissenschaften」の訳語として選定されたものらしいので，数学的諸科学でもよさそうだが，「諸」はカットし「数学的」のかわりに「数理」として，わざわざ数理科学と訳されている．

そういえば，数理解析研究所の数理解析も英語では「Mathematical Sciences」だからわけがわからなくなりそうだが，これには理由がある．すぐあとで見るように，数理解析研究所はもともと数理科学研究所となるはずだったのが，既得権の確保というか守備範囲を気にした統計数理研究所サイドからのクレームに対する「玉虫色」の解決策として，英語の「Mathematical Sciences」はそのままにして，日本語だけを数理解析としたことから生じた事態にすぎないのだ．したがって「数理科学＝Mathematical Sciences」としていいはずだ．

ところで，明治時代に数学という訳語が生まれるときに数理学という用

語が提案されていたことからすれば，数理科学の数理（学)というのは数学と同じ意味だと考えてもいいだろう．「Mathematical Sciences」の訳語として，数学科学や数学的科学ではなく，数理科学という用語が定着したことは事実だ．とすると，数理科学＝数理物理学＋数理化学＋数理生物学＋数理心理学＋数理経済学＋…　という感じだろうか？少なくとも常識的にはそうなのだが，たとえば，東京大学大学院数理科学研究科の数理科学は，その構成メンバーの専門分野からすると，どう見ても純粋数学が中核とされており，話がややこしくなる．数理科学の本体は純粋数学なんだろうか？もっと穏やかに，数理科学には純粋数学も含まれているのだろうか？

数理科学と応用数学

数理科学という用語にはどこか応用数学に似た香りもある.応用数学は「応用可能な数学」のことだという説もあるが，常識的には，「応用のための数学」ということだろう．いずれにしても，応用数学は数学の一部という感じだが，数理科学は科学の一部という感じが強い．とすると，「数学から数理科学へ」という変化は，数学が科学と一体であることの宣言なのかもしれない．しかし，よく考えてみれば，数学は科学ではない気もする．数学は科学の言葉なのだという立場からすると応用数学という用語が重みを増し，数学はそれ自身で独自の価値体系をもつ文化的活動なのだという立場からすると数学のための数学ともいうべき純粋数学が重みを増してくる．

かつては，数学＝純粋数学＋応用数学（混合数学)と考えられていた．数学そのものは純粋数学が推進し，科学や技術とのインターフェースは応用数学が担うというおよその構図が存在していたのだ．そして，数学の内部では応用に対する純粋の優位が圧倒的でさえあった．

純粋数学とアカウンタビリティ

和算のように個人が趣味で研究を進めるということなら，純粋数学であろ

うが応用数学であろうが個人の自由なのだが，公的な資金を使って研究を進めるということであれば，アカウンタビリティが問題となり，他の学問と同じように公的なチェックを受けるのは当然だろう．

理由はともかくとして，数学それ自身が十分な「威信」をもち，その「重要性」なり「有用性」なりが社会で暗黙のうちに，というか盲目的に承認されていれば，たとえ純粋数学の研究であってもそれが公的に容認されることはありうる．しかし，社会全体が学問研究のありかたに対して批判的になり研究予算の配分方法が「監視」されるようになると，社会的な有用性の見えない純粋数学の研究への無条件の資金投下には問題があると判断され，研究費の削減もやむおえないということになってしまう．

もともと戦後の日本には不思議な平均意識と均一意識が存在していて，何をやっているかとは無関係にドンブリ勘定で予算が配分されてしまう傾向が強かった．そうした文部省による「護送船団方式」のおかげで，純粋数学の研究にも機械的に予算が配分されていたようだ．

数学は科学の基礎で，科学技術の発展のために不可欠だというような「素朴な信仰」が生きている時代はそれでもよかったのだが，コンピュータがどんどん発達して，もともと社会が数学に対して抱いていたポジティブなイメージがコンピュータ科学（情報科学）へのイメージとダブるようになってくると，平穏な日常と既得権を脅かすコンピュータ科学のような新しい分野の台頭に怯える昔ながらの数学は，生き残りをかけた戦いを強いられるようになる．

応用数学から数理科学へ

話を進める前にコンピュータが勢力を拡大する直前の1950年代から1960年代にかけての日本の数学界の動向を，数理科学という用語の出現とのかかわりで，観察しておこう．

東京大学理学部数学科の教授で日本の数学の近代化に貢献しつつあった弥永昌吉は

「1952年湯川氏のノーベル賞受賞を記念して作られた湯川記念館が翌年基礎物理学研究所となり，さらに物性研もできるのをみて，私は数学

関係でも当然国立の研究所が設立されるべきであると思った」（『数理科学』特別別冊号, 1992)

と書いている．数学に近い分野には戦時中に設立された統計数理研究所しかなかったのである．

「民主的な世の中になって，国立研究所の設立などを実現するには，だれにもそのことを納得してもらわねばならない」

と考えた弥永は，一般の人びとどころか学術会議の数学関係以外のメンバーたちにとっても理解してもらいにくい数学の重要性をアピールし，学術会議の総会で数学の研究所設立を決議してもらえるような作戦を考える必要があった．そこで弥永は，ヴェイユやシュヴァレーなどの若い数学者を集めて，日本ではじめての数学の国際会議（テーマは数論を軸とする純粋数学で，日本からは谷山豊や志村五郎も出席し，「谷山・志村・ヴェイユ予想」が出現した事件現場としても有名）を1955年に開催し，数学の「国際性」を印象づけたうえで，翌1956年に

「工学関係の人たちとも連絡し'応用数学小委員会'というのを，学術会議の数学研究連絡委員会(数研連)内の小委員会として設け，そこで研究所のプランを練っていただくことにした」

のである．ところが，次第に応用数学という名前に不満が聞かれるようになる．というのも，新しい研究所は

「応用数学だけを扱うのではなく，純粋数学をも扱うべきで，むしろそちらを主とすべきではないか」

という意見もあったし，応用数学という言葉は当時，微分方程式などの物理学や工学への応用分野をさすことが普通だったが，経済学などへの応用やコンピュータ方面とのかかわりについても考えたいということで，純粋数学も含んだ新しい用語を探そうということになったという．ドイツの『数理科学百科全書』やフランスの数学シリーズ「数理科学の記念碑」の数理科学という用語がいずれも「純粋数学を主体とし，そのあらゆる方面への応用をも考慮に入れたものであった」ことから新しい研究所の名前は数理科学研究所とすることにしたという．委員会も数理科学小委員会と改称された．

数理科学から数理解析へ

こうして，1958年に学術会議総会で「数理科学研究所設立要望案」が可決された．ところがその直後に統計数理研究所サイドから異議が出され，「統計数理」と「数理科学」のテリトリーの明確化と計算センター的業務の割合の縮小を盛り込んで設立案を作りなおすことになり，「数理解析研究所」と名前も変更して，初期の構想はデフォルメされることになった．これは非常に面白い「事件」に違いない．数学者サイドにしてみれば,「数理科学」という玉虫色の用語の威力を活用して実質的には純粋数学の研究所を作ろうと思っていたのに，「数理科学」の非純粋数学部分に近い筋から「こっちに近づきすぎるな」と牽制されたのだから混乱したことだろう．日本的なセンスからすれば「そんな心配はいりませんよ」とあらかじめ根回ししておくべきだったのに何故かそれがうまくいかなかったようだ．弥永の海外出張を受けて委員長となった秋月康夫は

「統計数理研究所が病院なら数理科学研究所は基礎医学にあたる」

などと語っている．数学者サイドの思惑としては，設立要望案の段階ではできるかぎり「応用」色を強調して幅広い支持を取りつけるが，設立後にジワジワと「純粋」色を増していけばいいという感じだったのかもしれない．実際，日本の国立大学の数学科では，応用関係の新設講座が純粋数学に占領されることが珍しくなくなったといわれる．名称を「数理科学」から「数理解析」に変更したとはいっても，それはあくまで国内向けの話で，「数理解析」の英訳は「Mathematical Sciences」したがって「数理科学」のままである．

数理科学研究所の設立

1958年5月30日付の文書「数理科学研究所の設立について」には，この研究所の「任務」についてつぎのような「立派なこと」が書かれている．

　数理科学研究所は，全国共同利用の研究所として，つぎの任務を遂行することにより，わが国の学問の水準を高め，科学技術の発展に貢献するこ

とを任務とする．

(1) 数学の自然科学・産業技術諸部面への応用に関する研究を，総合的組織的に行ない，またその研究者を養成すること．

(2) 高速度計算施設をおき，大規模の数値計算を可能ならしめるとともに，各種計算機構ならびにそれによる計算法を研究し，またその技術者を養成すること．

(3) 大学・研究所等の求めに応じ，数学的諸問題の解決に協力すること．

数学の「産業技術諸部面への応用」まで「総合的組織的」に行なうとか，研究所などの求めに応じて「数学的諸問題の解決に協力」するとまで書かれていたのには驚いた．実際，組織(案)によると研究組織は7部門

(1) 基礎数学　(2) 位相解析　(3) 函数方程式　(4) 応用解析学

(5) 応用確率論　(6) 計画数学　(7) 計算数学

からなるはずだった．統計数理研究所との折衝で重複を除くことになり，名前も解析を強調して数理解析研究所となったとはいえ，大枠での「設立趣旨」は変わっていない．それにしても，現実の数理解析研究所は国際的な純粋数学研究センターのような印象が強く，とても「産業技術諸部面への応用に関する研究を，総合的組織的に行な」っているようには見えない．それでもどこからも文句は出ないのだから不思議といえば不思議な話だが，まぁ，そういうものなのかもしれない．

数理科学の不思議

ところで，弥永昌吉による「数理科学研究所」作りの過程で，それと関連して創刊された雑誌『数理科学』にも興味深い変化が見られる．この雑誌の歴史を振り返ってみると，いわゆる数理科学らしいテーマはどんどん減少して，最近では理論物理の雑誌のようになってしまっている．この変化は，編集顧問などの影響によるものなのか，市場原理にまかせて「売れる分野」を探っていて自然に起きたものなのかはわからないが，もし後者だとすると，「数理科学」に関心をもつ読者の多くが実は数理科学全体には

あまり興味がないらしいということになりそうで興味深い．

数理科学研究所（＝数理解析研究所）や雑誌『数理科学』の出現によって，数学界の流れが「数理科学」に傾いたかというと，そんなことはなかった．1960年代には日本は高度成長期を迎えて，順調に経済的な発展を続けており，理工系ブームも数学に幸いして，数学は「わが世の春」を謳歌することができた．とにかく，数学は科学技術の基礎で次第に重要性を増しつつあるコンピュータとも親戚だから大切らしいと，社会全体が何となく考えていたことも数学にとっての「追い風」となった．これが「数学＝数の学問＝計算の学問＝コンピュータ」というわけのわからない誤解や出世のためには受験数学が大切だという世間の空気を生み出し，これが数学者たちを思い上がらせてしまったようだ．無理もない．コンピュータからの脅威はまだまだ実感がなかったし，数学の繁栄を脅かすものなどありえないと考えていたのかもしれない．アメリカなどでは，数学への軍事研究費の流入問題を気にする人もいなくはなかったが，日本では数学者は軍事研究費に依存する必要などなく，「軍事研究費と数学」などという問題は無視していればよかった．一部の数学者がベトナム戦争に反対して署名運動やデモを行なってはいるが，これはまぁ，市民レベルの運動にすぎず，日本では，数学が軍事に対して他人事のような顔をしていられたことを証明している．しかし，アメリカでは，1950年代末から1970年代にかけての幸せな科学技術ブームの時代は，冷戦の本格化やベトナム戦争などの深刻な問題と同居した時代でもあった．アメリカでは月に人間を送るのに成功しベトナムからの撤退が決まると「反省の時代」が訪れる．たころから「地上の問題」＝「国内問題」を訴える人びとが増えはじめている．それでも数学界全体としては60年代の科学技術ブームの余韻というか惰性で70年代はどうにか乗り越えたように見える．

純粋数学の増殖パワー

数学にとってコンピュータの台頭は脅威となる可能性があったはずだ．数学関係の予算がコンピュータ科学に浸食されるかもしれないためである．日本の場合，最初は大学の数学科の中にコンピュータ科学や応用数学方面

の講座を増設することでコンピュータ関連の研究教育予算（少なくともその一部）が数学の内部に組み込まれた．今思えば，文部省も奇妙な楽観に支配されていたものだが，こうすれば数学を内部から情報科学的なものに「改造」できるとでも考えたのだろうか？

いずれにせよ，そんな望みは甘すぎた．数学科内部における癌細胞並みの純粋数学の自己増殖パワーによって，コンピュータ関連の講座のポストが純粋数学に乗っ取られてしまうという事態が目立ちはじめたようだ．計算数学とか情報数学などという名前の講座が，コンピュータには何の興味も能力もない純粋数学の専門家によって占拠され，社会が求めていたはずのコンピュータ科学や応用数学方面の教育研究者の保護育成にはほとんど役立たないことが次第に明らかになっていった．（この問題を解くには，本質的に政治音痴であるはずの数学者たちの陰謀論などではなく，純粋数学のもつ不思議な魔力について考察を加えることこそ必要であるが，それはまた別の機会にしよう．）

公然と「無用の用」を誇る「趣味としての数学」ともいうべき和算を育んだ精神風土と無関係ではないのだろうが，日本では，放置しておくと，数学科内部で応用数学が駆逐され純粋数学が増殖する傾向がとくに強いようだ．そこで，文部省は数学科とは独立した情報科学科を新設して別枠で予算を確保する作戦をとりはじめた．これは意外に成功したようで，東京大学でも理学部に情報科学科が設置された．文部省サイドの構想としては，理学部の基礎科目としてコンピュータ科学を置き，純粋数学にはちょっと遠慮してもらおうということになりはじめたのかもしれない．また，文部省は，数学内の既存のマンパワーの大半を研究よりも科学のための基礎教育に振り向けようとしているのかもしれない．数学が教育への貢献を忘れて趣味的でさえある純粋数学に埋没しすぎることを嫌ったわけだ．

純粋数学の危機

アメリカでは，1980年代の後半あたりから，数学界へ風当たりが厳しくなっている．かつて数学が担っていると信じられていた「科学の基礎」とでもいうべき役割がコンピュータの発達によって動揺しはじめたことや冷

戦の終結で軍事に関連する科学関係の予算が削減されはじめたことが「数学の危機」を招いたようだ．それだけではない．アメリカでも，数学者全体が純粋数学方面に傾斜しすぎて，社会のいわば数学的なインフラ・ストラクチャーの整備育成を無視していたせいで，数学の裾野が崩壊しはじめ「数学教育の危機」が急に叫ばれ出したようだ．

日本の場合には，高校教育における数学の受験科目としての数学の存在が大学における数学の存在を皮肉なかたちで支えていたような側面もあった．生徒の学力低下の原因が，コンピュータ時代にふさわしい数学教育の欠如にあるのではないかなどというもっともな問題提起もあって，数学はここでもコンピュータからの攻撃にさらされることになった．もちろん，「コンピュータも重要だが，その土台には数学が必要なのだ」といったパターンでの抵抗も試みられたが，高度に抽象的な純粋数学の教育研究が社会的に必要だということの説明としてはあまり説得力がない．アポロニオスの円錐曲線論がケプラーやニュートンの仕事で威力を発揮したとか，リーマン幾何学が相対性理論の建設に貢献したとか，ファイバー・バンドルの研究がゲージ理論に深い影響を及ぼしたとか，有限体上の代数幾何が暗号理論に応用されたとか，純粋数学が科学や実社会で役に立つこともあるのだが，だからといって現状のままの人員配置が適切だということの説明としてはかなり苦しい．現代社会がそれよりもはるかに緊急だと信じている環境問題や高齢化問題や医療問題などの解決のために限りある人的資源をもっと有効に活用すべきではないかというある種の危機意識や有用性を武器にした攻撃への反撃は難しい．

純粋数学と混合数学

ところで，純粋数学と数理科学という言葉はいつごろから使われはじめたのか？世界初の本格的数学史書とされるモンチュクラ(1725-1799)の『数学史』(Histoire des Mathématiques, 1799-1802)には純粋数学という言葉はあるが，応用数学とか数理科学という用語はないようだ．モンチュクラは，数学を純粋数学と混合数学(mathématiques mixtes)に分割していた．これはモンチュクラ独自のアイデアというわけではない．たとえば，フランシ

ス・ベーコンがすでに数学を純粋数学と混合数学(mixed mathematics)に分けている．そうした背景をも意識しながら，モンチュクラの『数学史』(第2版)の目次を見てみよう．

第1巻

Ⅰ 数学の誕生からギリシアの滅亡まで

Ⅱ アラビア，ペルシア，ユダヤ，インド，中国

Ⅲ ラテン，西洋，16世紀まで

第2巻（Ⅳ 17世紀）

[1] 古典的手法による純粋数学，幾何

[2] デカルトの方法による幾何と解析(＝代数)

[3] 力学(17世紀中頃まで)

[4] 光学(17世紀中頃まで)

[5] 天文学(17世紀中頃まで)

[6] 微分積分学の誕生

[7] 力学(17世紀末)

[8] 光学(17世紀末)

[9] 天文学(17世紀末)

第3巻（Ⅴ 18世紀）

[1] 幾何と解析(＝代数)(18世紀前半)

[2] 光学(18世紀)

[3] 力学，解析力学，物理学

[4] 機械学(工業)

第4巻（Ⅵ 18世紀）

[5] 天文学(惑星，恒星，食)

[6] 物質天文学

[7] 天文表，カレンダー，暦，器具，観測，占星術

[8] 航海術(建造と操縦)

[9] 航海術(船の位置，進路)

これによると，18世紀から19世紀にかけての時代では，数学という分野の広がりはものすごいもので，力学，光学，天文学はもちろん，物理学，機械学，天文表，カレンダー，暦，器具，観測，占星術，航海術までも含んでいた．それは，たとえば，オイラーの仕事の広がりを見てもわかる．モンチュクラはギリシア以来の知的伝統を踏まえつつ，このうちの幾何，代数，解析を純粋数学，残りを混合数学と呼んでいる．混合数学という表現がやがて応用数学という表現に変化していったということだろう．

数理科学の出現

数理科学＝数学的科学に注意すると，数理科学という用語の起源は古代ギリシアにまでもどれそうだ．たとえば，アリストテレスは『形而上学』において，理論科学＝理論的認識を自然学，数学，神学（いわゆる形而上学）に分類し，数学的科学＝数学的認識つまり数理科学にあたる用語も登場させている．とはいえ，もう少し現代的な用語としての数理科学は，モンチュクラのいう数学＝純粋数学＋混合数学に科学というニュアンスを増大させたものとして出現したようだ．パリ学士院の院長だった天文学者ドランブルが1800年前後の数学とこれに関連する科学分野の状況を報告した Rapport historique sur le progrès des sciences mathématiques depuis 1789 et sur leur état actuel (1810)の中で，数理科学という用語が使われている．この中でドランブルは非常な困難に遭遇して数理科学が進歩が難しい段階にさしかかったと書いている．おもしろいのは，数理科学が全体として危なくなったと考えられている点で，現在のように純粋数学はヤバイかもしれないが，数理科学という枠組みで見れば前途は明るいと考えられている状況とはかなり状況が違っている．リブリの『イタリアにおける数理科学史』(1837-1841)でも数理科学という用語が使われているがこれもそうした背景があってのことかもしれない．

いずれにせよ，数学が難しくなりすぎたという認識は，当時の大数学者ラグランジュの気分とも一致していたようで，かれはダランベールへの手紙(1781)の中で，数学がまもなくアラビア語学のようなものに没落する

だろうと予想し，今後は，科学としては物理学や化学が発展することになるだろうとも書いている．しかし，フランス革命の闘士でもあったコンドルセはかなり楽天的な見解をもっていた．コンドルセは数学によって，当時のいわゆる数理科学のみならず，あらゆる科学を統一しようという野望を抱いていた．コンドルセは，ジロンド派が没落したために追われる身となり，逃亡生活中に『人間精神進歩の歴史』を執筆した．これは楽観的な「進歩主義」を賛美した作品で，戦時中の日本で「生産数学」を絶賛した数学者のようなナイーブな側面もあって「軽薄」といえばいえるのだが，まもなく逮捕され，17年後にガロアが生まれることになる場所の斜め向かいの建物で殺される(自殺説もある)ことになるコンドルセのはかない夢であったと思えば，何となく興味が深いなるから不思議なものだ．

コンドルセは，ラグランジュが行き詰まりを感じた純粋数学や力学などの応用数学ではなく，モンジュが提唱する新しい「実用数学」に希望を託していたのである．その後の数学の流れを見ると，ラグランジュやドランブルなどの暗い予感は当たらず，コンドルセの明るい予感のほうが当たっていたようだ．ただし，モンジュの「実用数学」もそれなりに貢献したようだが，むしろそれとは敵対ぎみのラプラス，フーリエ，ルジャンドルらによる新しい数理科学の登場もあって，数学はますます発展することになる．この発展を可能にしたのは，ナポレオンによる数学を基礎に置いた科学振興政策であった．

これは，冷戦下における核兵器や宇宙開発競争がアメリカの科学技術政策をパワフルなものにし，やがて1960年代の純粋数学の大発展を可能にした状況とどこか似ている．近代ヨーロッパの台頭以降，純粋数学というのは産軍協調時代に科学技術の上に狂い咲く「美しい花」のようになってしまったのかもしれない．

純粋による応用の駆逐

応用数学という用語は，ジェルゴンヌの雑誌『純粋および応用数学の年報』(Annales de mathématiques pures et appliquées, 1810-1831)に出現している．この雑誌は新しい時代への突破口となった．ここでも，応用数学という用

語で読者層の拡大を狙いながらも，執筆陣は純粋数学に傾斜していくという皮肉な現象が観察できるようだ．純粋による応用の駆逐という現象は，ジェルゴンヌの雑誌をまねてドイツのクレレによって創刊された『純粋および応用数学の雑誌』において，もっと鮮明に観察される．それにしても，「応用」を標榜して広い大衆にアピールし，実体は「純粋」に染まっているという構図はこの時代のドイツあたりで本格化したものらしい．

18世紀後半のモンチュクラに対応する19世紀後半の数学史家モーリッツ・カントル(1829-1920)は，1877年から数学史の雑誌『数理科学史論文集』(Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften)の編集にあたっていたが，有名な『数学史講義』(Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1880,1892,1898)では純粋数学のみを論じており，ニュートン，ライプニッツ，オイラーによる微分積分学の発展過程が大きく取り上げられている．ドイツ的な純粋数学のイメージ作りに代数と幾何だけではなく解析が貢献したことを思えばなるほどという気がしてくる．

ついでながら，ページの関係なのか，カントルの『数学史講義』には数理科学全体への配慮はない．明治以後の日本では，和算的なメンタリティの上にこうしたドイツ的な数学観を移植してアカデミズムを形成してしまったせいで，純粋数学への偏愛が生まれた．ベルリン流の数学ではなく，ゲッチンゲン流の数学をまともに学んでいればこうした数学観がかなり修正できたはずなのに，日本ではガウス，リーマンの理解もかなり純粋方面に傾斜してしまっている．この点については，クラインの『19世紀数学史講義』を参考にしながら，結果的には数理科学的な側面を軽視してしまった高木貞治の「功罪」が論じられねばならないだろう．

その前に，クラインの『19世紀数学史講義』とは違い，今ではすっかり忘れ去られた感のある巨大な作品『数理科学百科全書』(Encyklopädie der mathematischen Wissenschften)の目次の概要を眺めておこう．これを見ればゲッチンゲン流の数学＝数理科学のイメージがわかるはずだ．ガウスにしろリーマンにしろこうした壮大な数理科学観（の原形）を共有していたに違いない．「純粋による応用の駆逐」とはいっても，純粋数学の起源として数理科学的な世界が重要だという認識があればまだ救われるのだ．

数理科学百科全書・目次

日本における数理科学の先駆者

さて，高木貞治の「功罪」などといっても，それはかれが純粋数学だけを賛美したから許せないなどという単純なことではない．純粋数学の起源としての数理科学的な世界に対する数学者の無関心が，かえって，純粋数学の迫力に対する認識を弱め，数学の安易な有用性信仰に共鳴さえしてしまいかねないという事実が問題だといいたいのだ．これもまた高木貞治と数理科学（応用数学）を巡る興味深い話題に違いない．

もっとも，高木貞治の一番弟子とされる弥永昌吉は，高木のそうした問題点をよく理解していたようだ．そもそも日本において数理科学という用語を普及させ，いわば数理科学の先駆者となったのが，この弥永昌吉だったことも記憶しておく必要がある．弥永は純粋と応用の境界に位置するウィナーのサイバネティクスやトムのカタストロフ理論などにもかなり注目していた．問題は，こうした「配慮」が数学の外部へのキャンペーンにとどまり，内部における純粋数学の増殖パワーを制御できず，内部では「方便」とのみ考えられていたし，それがどうにもならなかったという点にあるのだ．

そういえば，広中平祐も数理科学の先駆者としての役割を担ったことがある．バブルの時代，広中は若い数学者の育成（優秀な人を発見してハーバード大学などに留学させる計画）を目標にして，資金確保のために実業界に近づき，数学の外部に向かって純粋数学ではなく数理科学の重要性をアピールしたのである．当時，広中が注目したのは，たとえば，マンデルブロのフラクタル幾何学であった．

弥永や広中の場合には，もともと純粋数学への「帰依」がしっかりしていたから，たとえカタストロフ理論やフラクタル幾何を取り上げても，数学の「有用性」を安易に宣伝するなどといったことにはなりえなかったし，純粋数学の可能性を探るという意味では大切な発想でもあったのだが，なかにはそうでない過激な傾向をもつ人もいた．純粋数学の母体となるかどうかなどとは切り離して，「有用性」のゆえにそれ自体を賛美しようという人たちである．そうした人たちは，たとえば，「カタストロフ理論はニ

ュートン以来の革命的理論だ」などとさかんにアピールしていたようだ.

安易な有用性信仰

現在でも，驚くほどの安易さで数学の有用性を説き，直接的な有用性追及の渦中に数学を引きずり込もうという人たちがいる．もちろん，カテゴリー論をコンピュータ科学に活用するとか，微分幾何学を制御理論に応用するとか，結び目理論をDNA研究に適用するとか，カオス理論を環境問題の理論化に使うとか，複雑性理論を数理経済学の基礎に据えるとかいうことならまだ理解できる．ところが，もっと強引に「身近かな問題」の中に数学を探り，それによって「身近かな問題」の解決をめざそうというような発想をもつ人たちがいる．

そのこと自体がまずいというわけではないが，数学の有用性についての極端かつ安易な信仰は数学のイメージを不必要に混乱させ数学全体を矮小化する可能性がある点が気にかかるのだ．「有用性信仰」も数学自身を活性化させるためのファクターとして機能しているだけなら問題がないのだが，「有用性信仰」が信仰にすぎないことを忘れて「これこそが真の数学だ」などという発言が聞かれるようになるとますます危ない雰囲気が漂ってくる．

もっとも，純粋数学への過度の「信仰心」も十分に危ないし，「無用の用こそが数学の真髄だ」などという居直り的発言だって逆の意味でピンチな面があるわけだが，ここでは，とりあえず安易な「有用性信仰」の危なさについて思い出しておこう．

雑誌『高数研究』と生産戦

東京帝国大学の高木貞治や河田敬義といった数学者たちの協力のもとで発行されていた雑誌『高数研究』第7巻第8号(1943年)の巻頭言「大東亜戦争完遂のための数学」には

「今や技術は既製の数学を使ふのではなく，新しい数学を作ることを要請するのであって，こゝに大東亜戦完遂のための数学の進むべき道が示

されるのである」

と元気なことが書かれている．それにしてもどういう数学を作って大東亜戦争を完遂しようというのだろう？『高数研究』第7巻第9号には

「数学の応用性を狭く局限して考へることの危険なるは勿論であるが，されぱといって徒に科学の基礎なる美名に隠れて単に自己満足に過ぎぬかの如き研究に専念することがあってはなるまい．場合によっては自己の専攻を変更してでも生産戦の真只中へ飛込んで行く位の気概ある数学者があってもよいのではなからうか．真に優秀なる数学者が技術とガッチリ四つに組んで生み出す数学――それは純粋数学としても必ずや立派な数学であることを確信して疑はないのである」

と書かれていることからすると，純粋数学に関心のある若い人たちを「生産戦」の現場に引きずり込めば，魔法のようにパッと事態が好転して戦争にも勝利できるのではないかという「素朴な信仰」が土台になっているようだ．これはもう，数学に対する異常なまでの「有用性信仰」に違いない．この文章からは，戦時中でさえ日本の数学界には純粋数学を尊重する空気が漂っていたらしいことも読み取れそうだが，あるいはこれは，有力な数学者たちを説得するためのリップサービスにすぎないのかもしれない．

いずれにしても，数学者たちが「科学の基礎なる美名に隠れて」いられた時代が懐かしく感じられる．現在の純粋数学の危機はそうした「美名」がすっかり形骸化・無力化したことに起因しているだけに戦時中よりも厳しい状況にあるのかもしれない．

「戦力の根源たる数学」

それどころか，雑誌『高数研究』第7巻第10号にはいきなり不可解なことが書かれている．

「新兵器，新戦術と並んで新数学が生まれ出たのであるが，先生も生徒もその新奇さに目をみはり，巷には論議が氾濫してゐる．然もこの新しき数学も，今一・二年後には吾々が従来の代数や幾何を見るのと同じ様な気持で受取られる様になるであらう．その時に始めて新数学はその本来の面目を発揮して，先生も生徒も数学に親しみなじみつつ，愉快に戦

力の根源たる数学の学習にいそしむことが出来るやうになるであらう」というのだ．どんな「新数学」が生まれたというのだろう？などと思っている間もなく，次の第7巻第11号になるといきなり

「数学の決戦体制は既に論議の時期を過ぎ実行に移りつつある」

と飛躍し

「先ず数学者が大量に養成されなければならぬ」

となっている．ドサクサに紛れて数学の勢力を拡大しようという「賢い陰謀」だとしてもこれはちょっといただけないが，話だけはますます「過激」になっていく．

「現在我が国が持っているる数学力を以て勇敢に生産の中核に切込んでゆかなければならぬ」

と戦争への協力の意思を「鮮明」にしつつ，

「少数の数学者が自ら進んで各部門に入り込み，課題を数学の問題に移し現在の数学者が参与し得べき生産数学の体制を樹立しなければならぬ．之また論議の問題に非ずして実行の問題である」

と勇ましい．

ところで，この号には「歯車の数理」「透視図の解析」「マトリックスへの敵前上陸」などというかにも「生産数学」を思わせる実践的なテーマが論じられているが，一方では「生産数学」からはほど遠い小平邦彦の「リーマン面の理論」が載っていたりして微笑ましい．

政治的な側面では，『高数研究』を支援する高木貞治などの数学者たちが協力して創設した日本数学練成所というちょっと怪しげな組織もある．ここが主催して数学者大量養成講習会が開催されていた．これは，ある意味では，数学者たちの時流に迎合しようとする安易な態度の現われかもしれないが，明るい面を見れば「高等数学の大衆化」をめざす具体的な活動でもあった．そのデビューを飾る数学者大量養成懇談会が大東亜会館で開かれたのは1943年3月だった．この懇談会には高木のほかにも時局がら科学動員協会理事長多田礼吉中将なども参加して「生産増強のため応用数学の必要を力説」したという．高木は

「別に提灯持をする訳でもありませんが」

といいつつ「講義の科目選択とか，講師の推薦など」を行なっている．講

習科目を見ると，「微分方程式練成」「函数論練成」「確率，統計及実用計算学」などのほかに「国防数学」という珍しい科目も含まれていた．どういう内容だったんだろう!?

数学の戦時研究班

大東亜戦争中の1943年から翌年にかけて，現在の日本学術会議の前身にあたる学術研究会議の中に，軍部の要請に応える戦時研究班が組織された．数学者たちも当然のようにこうした戦時研究に動員されたわけだが，その資料が敗戦によって廃棄されたこともあり，また，隠蔽される傾向が強かったせいで，それがどういうものであったのかは不明のままだが，最近のレポート(永野宏，佐納康治「学術研究会議第1部の戦時研究班」科学史研究36, 1997, p. 162-168)によって，ある程度の推定が可能になった．

これによると，敗戦間近かの1945年，学術研究会議第1部(数学，物理学，天文学，地球物理学)には45個の研究班があり科研費の総額は1129000円だったという．このうち数学には9個の研究班があり科研費は合計126000円であった．

研究主任名前(その所属)とテーマそして科研費の額を詳しく見ると次のようになる．(用語などはコンプトン調査報告からの和訳だとのこと．)

・辻正次(東京帝国大学)「等角写像」
(飛行機の珍しい形の研究) 11000円
・中野秀五郎(東京帝国大学)「航空方程式の再考察」10000円
・園正造(京都帝国大学)「特殊な代数解析」
(暗号法などの研究) 6000円
・園正造(京都帝国大学)「家庭経済の数学的研究」19000円
・清水辰次郎(大阪帝国大学)「特殊な微分方程式」
(振動と電波回折の現象についての研究) 16000円
・窪田忠彦(東北帝国大学)「特殊な機械と道具の幾何学的研究」
(伝動輪その他の幾何学的研究) 9000円
・窪田忠彦(東北帝国大学)「視覚」

(武装機械その他の幾何学的研究) 11000円

・北川敏男 (九州帝国大学)「統計数学」
(保存と配給の数学的計画，軍使用の見積もり，など) 29000円

・河田龍夫 (統計数理研究所)「特殊な統計学」
(陸軍により要求される特殊課題の統計学的研究) 15000円

オリジナルな数学を創造して戦局を有利に展開するという遠大かつ無謀な夢はともかくとしても，帝国大学の数学科が科研費を得て取り組んでいたのがこのようなテーマにすぎなかったというのはいささか情けない．敵がすぐそこまで迫っているという状況下で，数学者を動員して兵器の開発の基礎研究などに取り組んでも明らかにムダだと思うのに，どういうことなんだろう？

それにしても時期が遅すぎる．数学者たちがもっと早い時期から組織的かつ集中的に取り組んでいれば，新兵器の開発はまぁ無理にしても，弾道計算や暗号解読の分野でならそれなりの成果があげられたかもしれない．原爆開発や弾道計算に関するアメリカの数学者たちの貢献，そして，ドイツの暗号「エニグマ」の解読やオペレーションズ・リサーチ的手法の開発を巡るイギリスの数学者たちの奮闘を耳にすると，ますますそう思えてくる．

もちろん，京都帝国大学の園正造の「特殊な代数解析」研究だけではなく，東京帝国大学の数学者たちも，陸軍の研究所に協力して高射砲の弾道計算 (2階の微分方程式の数値解法) を手伝ったり，参謀本部に協力して暗号解読を手伝ってはいたようなのだが，対応が遅すぎたし，規模も小さかったようだ (弥永昌吉「私の戦後50年」数学セミナー1996年3月号)．日本の場合は軍部が大学へのコミットが少な過ぎたのも問題だったようだ．敗色が決定的でもうどうしようもなくなってから大学に協力を求めてきても遅すぎる．（このあたりはバブルの崩壊で慌てた産業界がそれまでほとんど無視していた大学に突然協力を求めはじめるという状況とソックリで興味深い．）

数学者サイドにしても，勇ましいだけで非現実的な「新数学＝生産数学」とやらの創造キャンペーンに酔っていないで，冷静に自分たちの「有効性」

を発揮できる場面を探る必要だあったのかもしれない．もっともこれはあくまで数学の戦争協力を肯定するとすれば，という前提での話にすぎないが．

コンピュータの出現

ここで話をもとにもどして，もっと大きな枠組の中で数学の変化を眺めてみよう．20世紀の後半になって（これもアメリカにおける弾道計算やイギリスにおける暗号解読の動きが突破口となったのだが）数学の計算的な側面のみを機械的に拡大したコンピュータが出現すると，数学全体に少しずつ動揺を与えはじめる．社会におけるコンピュータのプレゼンスが増大するにつれ，抽象数学の出現以来，物理学とは絶縁しすっかり自立したはずの純粋数学が理論物理の最先端と奇妙に共鳴し始め，同時に応用数学はコンピュータとの連帯を求めるようになる．そうして，数学は新しい意味の数理科学へと変身を余儀なくされる．

アメリカの科学技術政策の原点はマンハッタン計画にあったとされる．戦後になっても国防総省が科学技術をコントロールするという体制は変わらなかったが，これではイカンということで，数学を含む基礎科学分野の研究者たちが戦争中のように安定的に研究費を確保しようとして生まれたのがアメリカの国立科学財団(NSF)だったという．

よくいわれるように，1957年のスプートニク・ショックがアメリカの目をソ連との科学技術開発競争へと向けさせ，1960年代になると核兵器開発や宇宙開発がメインテーマになっていった．科学技術にそそがれた豊かな資金のおかげで，数学もまた「幸せ」な時代を向かえていたようだ．その後，数学の「幸せ」を脅かしたのは，核兵器開発や宇宙開発で不可欠の道具とされたコンピュータの予想外の発達であった．現代の純粋数学にとってコンピュータは「危ない親戚」のように考えられているのかもしれないが，コンピュータが出現してまもなくのころには，単なる計算機械としてのコンピュータなど問題ではないという姿勢の数学者が多かったようだ．

数学とコンピュータ

それでも，1960年代になるとアメリカを中心にしてコンピュータの台頭は数学にとって無視できないのではないかという空気も生まれはじめたようだ．このとき，コンピュータを数学の「子分」のように考えて新しい数学のイメージを構築しようという動きが出現している．アメリカの数理科学研究支援会議(COSRIMS)がまとめたレポート『数理科学』(1964，1969)などがそれにあたる(このレポートは1972年に『数理科学の世界』として日本語にも翻訳されている)．このレポートでは

数理科学＝純粋数学＋[コンピュータ]

と考えられている．ただし，ここで[コンピュータ]というのはコンピュータにかかわる応用数学というような感じである．その意味では

数理科学＝純粋数学＋応用数学

と考えられているわけだ．具体的に見ると，純粋数学としては組合せ論，トポロジー，微分トポロジー，複素解析，微分幾何，関数解析，無限次元空間，抽象代数，基礎論が選ばれ，「コンピュータ」としては言語学，素粒子論，分子のトポロジー，生物医学，社会科学，経済学，数値解析，統計的推論，コンピュータ科学が選ばれて数学的な思考の意義が論じられている．ここでの数理科学観は，1960年代のアメリカを支配した景気のよさを反映しており，なかなか元気がいい．

バブルの崩壊と純粋数学

アポロ計画が成功裡に終わって1970年代になると，アメリカで純粋数学の社会的な存在意義を問う外部からのさまざまな刺激が形成されるようになる．こうした動きに応じて指導的な数学者たちが社会への反応を開始した．1980年代になると，数学から純粋数学のイメージをなるべく隠そうという動きさえ見られるようになる．1986年のバークレーでの国際数学者会議(ICM)のころには，当時話題になりつつあったストリング理論と先端的な純粋数学との深いかかわりなどを強調して数学の「有用性」をアピールしようとしはじめている．1990年の京都での国際数学者会議では，

組織委員会の意向を反映したためだろうか，こうした「数学の物理化」傾向がある意味でピークに達したようだ．しかし，理論物理の一部を数学に取り込んで純粋数学の世界を拡大し，それによって数学の必要性をアピールしようという作戦はまもなく動揺を余儀なくされてしまう．というのは，社会は実証が絶望的なストリング理論そのものを純粋数学と同じように「無用」なものだと感じはじめたからだ．冷戦とのかかわりで重視されていた核兵器や宇宙兵器の開発と深く結びついていた高エネルギー物理学の前途も，冷戦の終結とSSCの建設中止の決定で暗転し，物理学との連携作戦だけでは共倒れになる状況が生まれてしまったのである．

ICM90への苦情

それだけではない．数学の内部でも，理論物理への傾斜に反対する人びとが公然と反旗を翻しはじめている．シュプリンガー書店の雑誌『ザ・マセマティカル・インテリジェンサー』(13巻2号)に掲載されたレポート「ICM90」でも，京都での国際数学者会議でのメインイベントともいうべき15個の招待講演について「多くの否定的な意見が聞かれたのはまさにここであった．15個の講演はいずれもすばらしく，トップランクの数学者によるもので，それには疑問の余地がない．不満は，内容が数理物理に偏りすぎていて，結果として他の多くの重要な話題が無視されてしまったことに向けられていた．15個の講演のうち約10個がストリング理論，ゲージ場，これらに関連する低次元トポロジー，そして，量子群，量子群，量子群 …」「しかも，これら10個の講演はどれも(10個のうちの)他のものに向けられたもののようで互いに関連していた」などと書かれている．それどころか「4年前のバークレーでは，こうした問題点は少なかった」とか「バークレーでは真の多様性が見られた」とまで述べ，「1994年のチューリヒでの会議ではそうしたハイ・スタンダードにもどらんことを！」という文章で締めくくられている．これは，近年の純粋数学化した理論物理が数学に「侵略」してきたかのような印象を与え，数理物理的マインドをもたない大半の数学者たちに「嫌悪感」を抱かせたということかもしれないが，「純粋数学＋理論物理(ストリング理論の周辺)」のプレゼンスが数

学内の応用数学を軸とする勢力(日本では少数派だが世界的に見るとそうでもない)に危機感を与えたものとも解釈できる．実際，4年後の国際数学者会議では，フランスを中心とする応用数学派が「巻き返し」に成功する．そのことはフィールズ賞受賞者リストを見てもわかる．

純粋数学から数理科学へ

1990年代になって，欧米から日本の貿易黒字の原因が基礎研究への「ただ乗り」にあるという批判が出はじめ，特許権の侵害問題などにも直面するようになって，日本企業は基礎研究の必要性を痛感するようになる．とくに21世紀の戦略分野ともいうべきコンピュータ科学，生命科学，脳科学における日本の「後進性」は切実で，企業の危機感もハンパなものではなかった．もともと日本では大学というよりもむしろ企業自身が独自の研究所をもちそこで産業化のための研究を推進していたのだが，バブルの崩壊によって研究費の増大が困難になったことで，企業は政府に働きかけて大学を活性化して産業界のための基礎研究の砦にしようと動きはじめたらしい．

この動きは，冷戦の終結で軍事予算の削減が可能になった欧米が，科学技術の再評価，科学技術のためのインフラストラクチャーの整備，そして，重点分野への研究投資の集中投下を試みはじめたことに刺激されて，ますます加速していった．アメリカの大学のみならず，フランスやドイツの大学，そして，化石のように見えたオックスフォード大学やケンブリッジ大学までが「応用数学重視」の傾向をチラつかせつつある．こうした状況の下では，数学者たちも，純粋数学はもちろん，有用性という点では純粋数学と大差のないストリング理論（M-理論)や量子代数といった理論物理とのかかわりだけを強調していたのでは「待遇」の改善などは望めない．

1990年代になって，日本でも数学にかわって数理科学という分野名が急浮上してきた裏にはこのような事情もあったのだろう．これは，バブルの崩壊以後急速に日本経済が低迷し，アメリカの経済的成功が日本を動揺させたことと無関係ではなく，成功者アメリカの「数学から数理科学へ」というの動きが日本にも波及したということでもあろう．アメリカ流のメ

リット・システムの導入も始まっている．とすると，最近の日本における「数学から数理科学へ」という流れは「数学ビッグバン」のようなものらしいという印象が強くなってくる．

(980406)

２つの固定中心による引力の問題の歴史
Jacobi の解法をめぐって

中根美知代

1. はじめに

空間内に２つの固定された重力中心と運動する質点がある．質点の質量は，重力中心に較べて十分小さいとし，重力中心から影響を受けるが，それらに影響は与えないとする．また，２つの重量中心の間には相互作用がないとする．このような条件のもとで質点はどのように運動するか．これを考察するのが，「２つの固定中心力による引力の問題」と呼ばれるものである．

こうした条件をみたす運動は，もちろん自然界に存在しない．おそらくは，３体の運動を解析するためのとりかかりとして考えられたもので，自然現象を近似的に解析するというよりも，数学的な関心からとりあげられた問題であろう．1760 年頃，Euler が提示したといわれている．いわゆる「条件付き３体問題」のなかには，Lagrange の３角形の解のように，18 世紀中に解決されたものもあったが，この問題は 1840 年代，Jacobi によるまで，完全に解かれることはなかった．問題の解決にあたって，Jacobi がいわゆる Hamilton-Jacobi の偏微分方程式を活用していることから，彼らの理論の有効性が発揮される問題として，力学の教科書にも紹介されている（Arnold [1980])(注1)．

ところが，この問題が数学史のなかで登場するのは，ここだけではない．楕円積分論・楕円関数論との関連のなかで，重要な役割を果たすことが，Houzel により指摘されている（Houzel[1985]）．彼によれば，Lagrange は，この問題から楕円積分へ導かれたし，Legendre (Legendre [1825-28]) もまた，楕円積分の応用として，この問題を扱っている．Jacobi が Abel の定理の新しい証明を与えたときも，この問題の考え方を用いたとされている．そうだとすれば，この問題の歴史的意味を，Hamilton-Jacobi 理論の強力さを例示したものとして片づけるのでは不十分だろう．

18 世紀半ばから 19 世紀はじめにかけて，楕円関数論や楕円積分論が力学の問題への応用を意図して発展してきたことは，何度となく指摘されている．ところが，両者がどう結びつくかを実際に示した例は，ほとんどない．楕円関数論で数多くの業績をあげた Jacobi が，Hamilton-Jacobi 理論によって，２つの固定中心による引力の問題を扱うとき，それらの関係の一側面が明らかになるのではないか．このような期待をもって，Jacobi による２つの固定中心による引力の問題を解決する手続きを考察していきたい．

2 Euler・Lagrange の寄与

Euler は 1760 年のベルリンアカデミーの紀要で，この問題を扱い，ペテルスブルグでの論集で，引き続いて扱っている（Euler[1764-66][1766-67]）．ただしこの報告では Euler の結果には立ち入らず，彼が，質点と２つの中心が同一平面上にある場合のみを扱い，この問題を解くことが２次曲線の求長と関係することを指摘したことを言及するにとどめる．

Lagrange もまた，Euler の影響を受けてこの問題を取り上げ，1766 年から 69 年にかけて，２つのパートからなる論文を発表した（Lagrange [1766-69]）．後半の部分は Euler の論文以降に発表されたものであるが， Lagrange は，Euler の 67 年の論文とは独立に自分の結果を導いたと記している．

Lagrange は第１部で，Euler の問題を３次元に拡張して検討していく．(x,y,z) を質点の位置，P (a,b,c), Q (α,β,γ) を２つの中心の位置とし，

$$u=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

$$\nu=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2},$$

$$f=\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}$$

と定義する．A，B を適当な定数係数ととることにより，P，Q 方向に作用する力をそれぞれ $\dfrac{A}{u^2},\dfrac{B}{\nu^2}$ で表す．$u+\nu=p, u-\nu=q, A+B=M, A-B=N$ とおくことにより，Lagrange はつぎの方程式を得た．

$$\frac{dp}{\sqrt{Cp^4+Mp^3+Dp^2-Mf^2p+E}}=\frac{dq}{\sqrt{Cq^4+Nq^3+Dq^2-Nf^2q+E}}, \tag{2-1}$$

$(C,D,E$は任意定数$)$

$$dt=\frac{p^2dp}{4\sqrt{Cp^4+Mp^3+Dp^2-Mf^2p+E}}-\frac{q^2dq}{4\sqrt{Cq^4+Nq^3+Dq^2-Nf^2q+E}}, \tag{2-2}$$

$$d\varphi=\frac{fKdp}{(p^2-f^2)\sqrt{Cp^4+Mp^3+Dp^2-Mf^2p+E}}-\frac{fKdq}{(q^2-f^2)\sqrt{Cq^4+Nq^3+Dq^2-Nf^2q+E}}, \tag{2-3}$$

(φ は PQ を通る軸まわりの角度，$K^2=-Cf^4-Df^2-E$)

これらの方程式を積分することにより，２つの固定中心による引力の問題が解かれることになる．Lagrange は，これらの積分は円錐曲線の求長問題，任意の３次曲線の求長に関係すると記した．Houzel は，Lagrange が (2-1) 式に達したことを指して，楕円積分に導かれたとしている．ここで Lagrange が実際に積分を求めることが出来たのは，以下の場合に限られていた．

ひとつは，$B=0, M=N$ のとき，すなわち，１つの引力中心にむかう１つの力に引かれる状況で,「２つの固定中心による引力」とは言い難い場合である．つぎに，適当な α，β，γ，λ，μ，ν が存在して
$\sqrt{Cp^4+Mp^3+Dp^2-Mf^2p+E}=(p-\alpha)\sqrt{Cp^2+\beta p+\gamma}$
かつ $\sqrt{Cq^4+Nq^3+Dq^2-Nf^2q+E}=(q-\lambda)\sqrt{Cq^2+\mu q+\nu}$
となる場合である．根号内が積分出来るようにするための数学的要請から付された仮定であり，力学的な意味のあるものではない．３つめは $f=\infty, \nu=\infty$ となる場合，すなわち力の引力中心が無限に遠ざかった場合である．

第２論文で Lagrange は，質点が，引力中心 P, Q 方向に，

$$\text{P から}: 2\alpha p+\frac{\beta f^3}{p^2}, \qquad \text{Q から}: 2\alpha q+\frac{\gamma f^3}{q^2},$$

の力を受ける場合について考察した．ここでは

$$p=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}, \quad q=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2},$$

とする．またα,β,γ は適当な定数係数である．Lagrange は２つの力の$2\alpha p$と$2\alpha q$の部分は，２つの中心の中央に向かう，大きさ$4\alpha r$のひとつの力に帰着できることを指摘し,「２つの固定中心P, Q からは距離の２乗に反比例する力を受け，P, Q を結ぶ線分の中央からは，その点と質点間の距離に比例する力をうける場合」として論じている（注2）．Lagrange はこの問題に対しても，$(2-1)$,$(2-2)$, $(2-3)$ に相当する方程式を導き，条件をつけてこれらを解いている．

第２論文で取り上げた問題もまた，自然にある力学現象を解析するためというよりも，距離の２乗に反比例する力に距離に比例する力の項を付け加えてみると，方程式とその積分はどのようになるかといった，問題を数学的に一般化しようとする動機から考察されたものであろう．

Lagrange は,『解析力学』(Lagrange [1788]）で，宇宙の体系を論じるような問題にはどうしても適用できないが，解析学上は興味深く，詳細に論じるに値するとして，上の２つの論文の結果を整理して紹介している．

Lagrange によって，２つの固定中心力による引力の問題が，３次元に拡張され，より一般的な状況まで含めて考察されるようにはなった．また，この問題を契機として，彼は楕円積分論へと導かれていった．しかし，Lagrange は，

きわめて限定された場合に対してしか，方程式を積分できていない．Lagrange は，この問題自体の解決からはまだ遠い地点にあった（注3）．

3. Hamilton-Jacobi の理論

Jacobi による２つの固定中心による引力の問題の解法を検討するに先だって，この問題の解決に有用な方法とされている Hamilton-Jacobi の理論について概観しておこう．

Hamilton-Jacobi の理論には多様な側面があるが，ここでは，常微分方程式系の積分を求めることを，特殊なタイプの１階の非線形偏微分方程式の積分に帰着する方法と規定しておく．具体的には，偏微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\Big(t, q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\Big) = 0 \qquad (3-1)$$

に対して，その完全積分

$$V = V(t, q_1, \cdots, q_n : \alpha_1, \cdots, \alpha_n) + a$$

が知られたならば，$2n$ 個の任意定数α_iとβ_iを持った方程式

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

から正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (3-2)$$

の解が得られる，というものである．なお，偏微分方程式（3-1）は求める関数V自体を含んでいない．このような１階非線形偏微分方程式を Hamilton-Jacobi 方程式と呼んでいる．ここに示したような定式化は，Jacobi が『力学講義』第20 講(Jacobi[1866]) で提示したものである．

ニュートンの運動方程式が，Hを全エネルギーとした(3-2) 式に変形できることを示したのは William Rowan Hamilton である．そして，運動方程式の解は，上のようなタイプの偏微分方程式を解くことにより得られることを示したのも彼である（Hamilton [1834],[1835]）．ただし Hamilton は，Hを全エネルギー，Vは力学の作用積分というように，あくまで力学に限定し，力学の概念を用いて理論構成している．Hamilton のアイデアを整備・拡張し，力学を離れた１階偏

微分方程式の理論としたのが Jacobi であった．この理論を，Hamilton-Jacobi 理論と称するのはこのためである．

Jacobi は一度は，上に見るような理論を作り上げた後，関数Hがtを陽に含んでいない場合について論じている．新しい変数αとWを

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha,$$

$$W = V - (t-\tau)\frac{\partial V}{\partial t} = V - (t-\tau)\alpha \qquad (\tau\text{は任意定数})$$

として導入することにより，偏微分方程式(3-1)は

$$\alpha + H\Big(t, q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\Big) = 0 \qquad (3-3)$$

に置きかわる．この場合は

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \cdots, \frac{\partial W}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t,$$

$$\frac{\partial W}{q_1} = p_1, \cdots, \frac{\partial W}{q_n} = p_n,$$

が正準方程式の解を与える．

このように一般論を整備した後，Jacobi は力学への応用を考える．力学の方程式を解こうとする場合，正準方程式に現れるHは全エネルギーである．保存系では，Hは時間tを陽に含まないから，偏微分方程式(3-3)が使える．また Jacobi は，Tを運動エネルギーとしたとき，関係式$p_i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial W}{\partial q_i}$が成り立つことも指摘している．

では，この方法は実際にどのように使えばいいのだろうか．Jacobi 自身が提示している例を見てみよう．

太陽のまわり運動する質量1の質点を考える．太陽は座標の原点に静止しているものとし，質点の座標を(x, y, z)とする．当時のポテンシャル関数は，今日のものと符号が逆になっているため，

$$U = \frac{k^2}{r},$$

で表現されている．ここでkは太陽の引力に関する係数，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$である．この場合の Hamilton-Jacobi 方程式は

$$T = \frac{1}{2}\Big\{\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial z}\Big)^2\Big\} = \frac{k^2}{r} - \alpha, \qquad (3-4)$$

となる．この方程式を極座標

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi\cos\psi,\quad z = r\sin\varphi\sin\psi,$$

で書きかえる．・を時間微分すると

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\sin^2\varphi\dot{\psi}^2),$$

となる．なお本論文では，時間微分はこの記号で表すことにする．関係式

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}(= \frac{\partial W}{\partial r}) = \dot{r},\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}(= \frac{\partial W}{\partial \varphi}) = r^2\dot{\varphi},\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}(= \frac{\partial W}{\partial \psi}) = r^2\sin^2\varphi\dot{\psi}$$

に注意すると，偏微分方程式(3-4)は，

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\} = \frac{k^2}{r} - \alpha. \qquad (3-5)$$

となる．方程式(3-5)は以下のように分解される．

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 = \frac{k^2}{r} - \alpha - \frac{\beta}{r^2}, \qquad (3-6)$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\} = \beta, \qquad (3-7)$$

ここでβは新しい任意定数である．方程式 (3-6) はrのみの関数であり，方程式 (3-7) はrを含まず，φとψの関数である. 方程式 (3-6) を積分すると

$$W = \int\sqrt{\frac{2k^2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}}\cdot dr + F(\varphi,\psi)$$

となる．これを (3-7) に代入すると，

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^2\right\} = \beta$$

で，これは

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 = \beta - \frac{\gamma}{\sin^2\varphi},\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^2 = \gamma$$

と分解できる．ここで γ は新しい任意定数である．第１式はφのみの関数，第２式はψのみの関数であるから，積分は

$$F(\varphi,\psi) = \int\sqrt{2\beta - \frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}\cdot d\varphi + f(\psi),\quad f(\psi) = \sqrt{2\gamma}\cdot\psi$$

となる．これらを組み合わせると，求める偏微分方程式の完全解

$$W=\int\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}dr+\int\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}d\varphi+\sqrt{2\gamma}\cdot\psi$$

が得られる．新しい任意定数α'，β'，γ' を導入し

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha}=\alpha'-t,\quad \frac{\partial W}{\partial\beta}=\beta',\quad \frac{\partial W}{\partial\gamma}=\gamma'$$

とおくことにより，運動方程式の解

$$\begin{cases} t-\alpha'=\displaystyle\int\frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2k^2}{r}-2\alpha-\dfrac{2\beta}{r^2}}}, \\ \beta'=-\displaystyle\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\dfrac{2k^2}{r}-2\alpha-\dfrac{2\beta}{r^2}}}+\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\beta-\dfrac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}}, \\ \gamma'=-\displaystyle\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{2\beta-\dfrac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}}+\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\psi \end{cases}$$

が求まる．

この問題自体は，Hamilton-Jacobi 理論を持ち出さなくても解くことが出来るので，この理論を有効に使った例とは言い難い．しかし，この例で Jacobi が主張したかったことは，変数が完全に分離する場合には，偏微分方程式が容易に解けること，すなわち運動方程式をはじめとする常微分方程式系を直接解くより，これを偏微分方程式に帰着させて解いた方が容易な場合があるということなのである．18 世紀末から 19 世紀前半にかけて偏微分方程式を研究してきた Lagrange，Pfaff，Cauchy らはいずれも，偏微分方程式をいかにして常微分方程式系に帰着するかを論じてきた．Jacobi の方針は彼らとまったく反対の方向をとるものなのであった．

4. Hamilton-Jacobi 理論と楕円座標

Jacobi の方法をとるにあたってもっとも重要なことは，上手に座標変換をおこなって偏微分方程式を変数が完全に分離する形にすることであろう．解こうとしている偏微分方程式に対してどのような変換を施すかが，この方法を有効

に使えるかどうかの分かれ道となる．しかしJacobiは，個々の方程式に対して適当な変換を見いだすのは実際には難しいという．そして「逆のやり方をしなくてはならない．注目すべき変換とその変換を幸運にも使うことが出来る問題を広い範囲から拾い集めねばならない」として，Hamilton-Jacobi理論と楕円座標を組み合わせた成果を，『力学講義』第26講から第30講で発表した．2つの固定中心による引力の問題も，この枠のなかで論じられている．以下，Jacobiの成果を検討していこう．

4-1．第26講　楕円座標

Jacobiは，天下りにλについてのn次方程式

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}=1, \quad (a_1<a_2<\cdots<a_n) \qquad (4-1-1)$$

を取り上げることから，議論をはじめている．この方程式のn個の解を大きい順に$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$と記号づけた後，Jacobiは関係式

$$4(dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_n^2)=M_1d\lambda_1^2+M_2d\lambda_2^2+\cdots+M_nd\lambda_n^2 \qquad (4-1-2)$$

を証明する．ここで

$$M_i=\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+n})\cdots(\lambda_i-\lambda_n)}{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\cdots(a_n+\lambda_i)}$$

$$(i=1,\cdots,n)$$

である．

Jacobiはここで，質量1の質点の活力Tの概念をn次元に拡張すると(4-1-2)式より

$$8T=4(\dot{x}_1^2+\cdots+\dot{x}_n^2)=M_1\dot{\lambda}_1^2+M_2\dot{\lambda}_2^2+\cdots+M_n\dot{\lambda}_n^2$$

となることを指摘する．そこで，ある関数Wが存在して，

$$8T=4(\dot{x}_1^2+\cdots+\dot{x}_n^2)=4\Big(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_1}\Big)^2+\cdots+\Big(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_n}\Big)^2=4\Big(\frac{\partial W}{\partial x_1}\Big)^2+\cdots+\Big(\frac{\partial W}{\partial x_n}\Big)^2$$

となることが示される．一方，

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\lambda}_i}=\frac{1}{4}M_i\dot{\lambda}_i, \qquad \frac{\partial T}{\partial\dot{\lambda}_i}=\frac{\partial W}{\partial\lambda_i} \qquad (4-1-3)$$

となるから

$$\dot{\lambda}_i=\frac{4}{M_i}\frac{\partial W}{\partial\lambda_i}$$

となる．これより，

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial W}{\partial x_i}\Big)^2 = 4\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{M_i}\Big(\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\Big)^2 \qquad (4-1-4)$$

が得られる．以上が Jacobi の手続きである．

なぜこのような計算が提示されているのか，第26講では明確にされていない．以下の講義を先取りして説明しておこう．$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$は楕円座標と呼ばれる，1組の座標となっている．(4-1-4)式は，デカルト座標$x_1, \cdots, x_n$でかかれたWの方程式が$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$座標においてどのように変換されるかを示したものになっている．Jacobi はこの関係式を積極的に使い，いくつかの問題を解いていくのである．

また，Tはそもそもは運動エネルギーであったけれども，Jacobi のこの手続きではTは物理的な意味を持っている必要はない．Jacobi が要請したのは，それが，$\dot{x}_i$の２次形式となっていることだけである．すなわち，Tが２次形式でありさえすれば，(4-1-3)式，(4-1-4)式が成り立つのである．Hamilton-Jacobi の理論が力学にとどまらず，純粋数学の諸問題へ応用される可能性が，ここで示唆されたのだった．

4-2. 第27講　楕円座標の幾何学的意味

Jacobi はここで 方程式(4-1-1) が幾何学的にどのような意味を持つか，説明する．$n=2$の場合を考える．

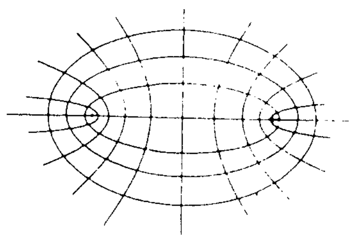
$$\mathrm{E}: \frac{x_1^2}{a_1+\lambda_1} + \frac{x_2^2}{a_2+\lambda_1} = 1 \quad (a_1 < \lambda_1 < +\infty)$$

は楕円を

$$\mathrm{H}: \frac{x_1^2}{a_1+\lambda_2} + \frac{x_2^2}{a_2+\lambda_2} = 1 \quad (-a_2 < \lambda_2 < -a_1)$$

が双曲線を表していることがわかる．

a_1, a_2 を一定にし，λ_1, λ_2を変化させると，これは共通焦点の楕円の族と双曲線の族を表す．同じ族の曲線どうしは交わることはなく，ある族の任意の曲線は他の族のすべての曲線と直交するので，これらは通常の座標系と同じ性質を持っている．



焦点を共有する楕円と双曲線

そこで(x_1, x_2) にかえて，(λ_1, λ_2) を座標系として扱うことができる．これらは，楕円座標と呼ばれ，アイデア自体は Lamé （Lamé[1837]）が導入したものであるが，このように定式化したのが Jacobi であることから，Jacobi の楕円座標

とも呼ばれている．

Jacobi は方程式

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_i}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_i}+\frac{x_3^2}{a_3+\lambda_i}=1 \qquad (i=1,2,3)$$

が$-a_1<\lambda_i<\infty$のとき楕円面を，$-a_2<\lambda_i<-a_1$のとき１葉双曲面を，$-a_3<\lambda_i<-a_2$のとき２葉双曲面を表すことを指摘し，この３つの面を組み合わせることにより，３次元の楕円座標 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ を構成している．この座標で楕円体は$\lambda_1=const.$として表される．(4-1-2) 式で$n=3$とおくことにより，楕円体上の曲線要素は，

$$\frac{1}{2}d\lambda_2\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}},\qquad \frac{1}{2}d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}$$

となることが示せる．Jacobi はこの性質を用いて，楕円体上の最短曲線について考察を進めていく．

4-3. 第28講　３軸楕円体上の最短曲線

３軸楕円体上の最短曲線を求める問題については，Jacobi は 1839 年(Jacobi [1839]) にすでに結果を発表しているが，ここでは別の手法による解法を提示している．Jacobi は，楕円体上の最短曲線とは，楕円体上にとどまることが強制されている，ポテンシャル関数を持たない質点の運動の軌跡と捉える．このような質点の運動を規定する Hamilton-Jacobi 方程式を楕円座標でかくと

$$T=2\frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\Big(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\Big)^2+2\frac{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\Big(\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}\Big)^2=h$$

となる．ただし，hは全エネルギーに対応する定数である．この方程式は変数λ_2,λ_3が完全に分離するので，Wを容易に求めることができ，

$$W=\sqrt{\frac{1}{2}h}\{\int d\lambda_2\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\beta)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}+\int d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3+\beta)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\}$$

を得る．ここで β は任意定数である．

$$t-\tau=\frac{1}{2h}W,\qquad ds=\sqrt{2h}dt$$

に注意すると，最短曲線の長さsは

$$s=\frac{1}{2}\{\int d\lambda_2\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\beta)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}+\int d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3+\beta)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\}$$

となる．ここでτ, βは任意定数である．

4-4. 第29講　２つの固定中心に向かう引力

Jacobi は，２つの固定中心による引力の問題にとりかかる．まず，運動が (x_1, x_2) 平面上でなされていると仮定し，質量 m, m_1 の２つの引力中心が $(0, -\sqrt{a_2 - a_1}), (0, \sqrt{a_2 - a_1})$ の位置に固定されているとする．質量１の質点の位置を (x_1, x_2) とする．この運動に対する Hamilton-Jacobi の方程式

$$\Big(\frac{\partial W}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial x_2}\Big)^2 = 2U + 2h$$

を楕円座標でかくと

$$\frac{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\Big(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\Big)^2 + \frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\Big)^2 = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}h \quad (4-4-1)$$

となる．ここで h は全エネルギーを表す定数である．ポテンシャルエネルギー Uは，楕円座標で

$$U = \frac{(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} - (m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

と表せる．これより方程式(4-4-1)は変数が完全に分離する形になり，

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} + \beta}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}} + \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2} + \beta}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}}$$

が容易に得られ，これから運動方程式の解が求まる．ここで，α，β は任意定数である．これまで，一平面上の運動ですら完全な解が求まらなかったこの問題は，Hamilton-Jacobi の理論で鮮やかに解かれたのであった．

続いて Jacobi は，Lagrange の第２論文を拡張した場合，すなわち，質点が２つの固定中心とその２点を結ぶ直線上の任意の個数の点から引かれる場合にも，ポテンシャル関数の取り方を工夫すれば，この方法が適用されることを指摘した．ここで扱われているのは質点が空間内を運動する場合であるが，質点と引力中心を結ぶ軸で定められる面の上での２次元的な運動と，この面がその軸のまわりに回転しているとの条件を組み合わせて論じられており，まったく一般の場合が考察されているわけではない．

最終的にJacobi は，質点が空間内で運動する場合の，２つの固定中心による引力の問題をとりあげる．この場合 Hamilton-Jacobi 方程式は

$$\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial z}\Big)^2 = 2U + 2h$$

となる．ここで円柱座標系を導入し

$$y = r\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi$$

とおくと，方程式は

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 = 2U + 2h$$

となる．ここでUにおいてφが現れないならば，

$$W = W_1 + \alpha\varphi$$

とおくことができる（注4）．U は中心力場のポテンシャル関数であるから，この仮定は自然であろう．

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W_1}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W_1}{\partial r}, \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \alpha$$

となるから，W_1に関する偏微分方程式は

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 = 2U - \frac{\alpha^2}{r^2} + 2h \qquad (4-4-2)$$

となる．こうして，３次元の問題を２次元に帰着することができた．Jacobi は (x, r) 座標が，(x_2, x_1) 座標に相当すると述べたうえで，

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{r^2} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{x_1^2} = \frac{1}{2}\alpha^2\frac{a_2 - a_1}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)} = \frac{1}{2}\alpha^2\frac{a_2-a_1}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{\frac{1}{a_1+\lambda_1} - \frac{1}{a_1+\lambda_2}\right\}$$

を求め，(4-4-2) 式の右辺に代入し方程式を導いた．これもまた変数が完全に分離する形になり，この解は

$$W_1 = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2 \frac{1}{a_1+\lambda_1} + \beta}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}}$$
$$+ \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2} - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2 \frac{1}{a_1+\lambda_2} + \beta}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}}$$

となる．ここで $f = a_2 - a_1$である．新しい任意定数 β'，α'，τ を導入し

$$\beta' = \frac{\partial W}{\partial \beta} = \frac{\partial W_1}{\partial \beta}, \quad \alpha' = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} + \varphi, \quad t - \tau = \frac{\partial W}{\partial h}$$

とおくことにより，２つの固定中心による引力の問題の解が，３次元の場合も得られた．こうして Jacobi は，Euler 以来未解決だった難問を解いた数学者として，歴史上に位置づけられることになった．確かにここで用いられているのは，Euler も Lagrange も知り得なかった Hamilton-Jacobi の理論である．ただし，この解決を Hamilton-Jacobi 理論の成果と呼ぶことの是非については，終章で検討したい．

4-5. 第30講　Abel の定理

この報告の目標であった，２つの固定中心による引力の問題は第 39 講で一応解決した．しかし『力学講義』には同様の手法，すなわち Hamilton-Jacobi 方程式と楕円座標の組み合わせによって解決出来る問題がもう一問提示されている．超楕円積分の場合の Abel の定理の証明である．Jacobi は『力学講義』に先だって，この定理の証明を与えているが，ここでなされているのは，Hamilton-Jacobi 方程式

$$\Big(\frac{\partial V}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial V}{\partial x_2}\Big)^2+\cdots+\Big(\frac{\partial V}{\partial x_n}\Big)^2=2h$$

を楕円座標を使って表し，その積分を求めることにより得られた証明である．Jacobi は，Lagrange は２つの固定中心による引力の問題を考察することにより，Abel の定理の証明の特別な場合に達したと述べているが，この報告では深く立ち入らないことにする．

5. おわりに

Hamolton-Jacobi の理論とは，常微分方程式を非線形１階偏微分方程式に帰着して解く方法と一般的には考えられている．２つの固定中心力の問題の解決にあたって，Hamilton-Jacobi 理論が決定的な威力を発揮したことは間違いない．しかし，非線形１階偏微分方程式が容易に解けるためには，それを変数が完全に分離する形に帰着せしめる変数変換が不可欠である．逆に言うと，そのような変数変換が見つからない以上，Hamilton-Jacobi 理論は，有効性を発揮できないのである．Jacobi の功績は，このことを自覚的に捉えたことであろう．この問題の解決にあたっては，Hamilton-Jacobi 理論とともに，Jacobi の楕円座標の導入が決定的な役割を与えている．Jacobi がこの問題の解けた要因は，この２つであった．

楕円座標を積極的に活用するアイデアは，力学だけから出てきたとするより，

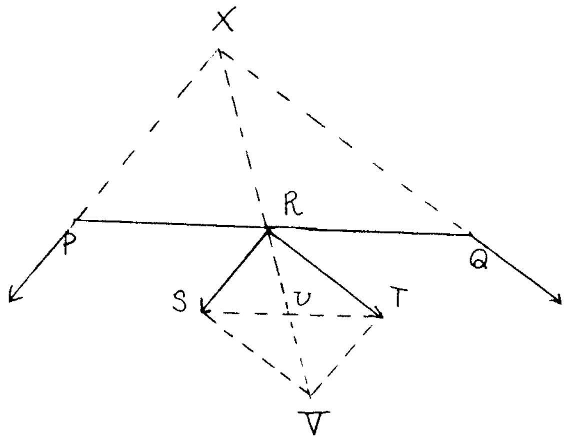
楕円関数論・楕円積分論といった数論的な考察をするうちにJacobiが思いついたとする方が自然である．２つの固定中心による引力の問題という力学の課題の解決に数論から持ち込まれた楕円座標が不可欠ならば，力学と数論とを結びつけうるひとつの視点がこの問題で示されたことになる．

第26講から第30講からうかがわれるように，Jacobiの関心は，Hamilton-Jacobi理論で力学の問題を解くことから離れて，この２つの組み合わせが使える問題に向いていた．ただし，Hamilton-Jacobiの理論自体，力学から生まれたものであるから，方程式を導くにあたってはTを運動エネルギーとする関係式$p_i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial W}{\partial q_i}$が不可欠のものとして使われている．Jacobiは運動エネルギーに相当する項を２次形式とみなしてもこの関係が成り立つことに気づき，Hamilton-Jacobi方程式から力学的な描像をぬぐい去った．Tに相当するものを純に粋数学的な２次形式と扱うことにより，Hamilton-Jacobi方程式で記述できる問題が，力学の課題にとどまらず，数論的な課題，幾何学上の課題というように拡張されたのである．これらの問題を楕円座標による変換と組み合わせて解くというのが，Jacobiの問題関心であった．このなかのひとつとして，２つの固定中心力による引力の問題が例示されているにすぎない．

Jacobiの力学研究において，彼独自の新しい概念が持ち込まれたというところはほとんどない．Jacobiの寄与はHamiltonの力学形式の整備に終始している．この整備がどういう意味を持って行われたかを考察するのが，Jacobiの力学を研究するうえでの論点となる．Jacobi個人の問題関心からすれば，それは，力学を離れた問題，おそらく数論にまで関連してくることだろう．『力学講義』のこの部分は，Jacobiの視点を集約している箇所なのかもしれない．

注

(注1) Whittaker[1977] には，別の方法による証明が与えられている．
(注2) 右の図において，P，Q を 2つの引力中心，Rをその中点，Xを質点の位置とする．
$|XP| = p, |XQ| = q, |XR| = r$ とおく．
XがP方向に引きつけられる力を平行移動したものの大きさを $|RS| = 2\alpha p$，Q 方向に引きつけられる力の大きさを $|RT| = 2\alpha q$ とする．$\triangle XPS$ と $\triangle RST$は相似であるから，UをSTの中点とすると $RU = 2\alpha r$となる．RSとRTを合成した力を RVとすると，これは平行四辺形$RSVT$の対角線となる．
したがって $|RV| = 2|RU| = 4\alpha r$ となる．



(注3) Cayley が，1766 年の問題に対して，角運動量保存則に相当する積分をつけ加えることにより，見通しのよい結果を提示した．(Cayley[1858])
(注4) このようにおけることを Jacobi は『力学講義』第20講で証明している．

文献

Arnold, V.I.,
[1980] 『古典力学の数学的方法』（1980）岩波書店．
Cayley, A.,
[1858] "On Lagrange's Solution of the Problem of Two Fixed Centres, " *Quarterly Mathematical Journal*, **2** (1858), pp.76-83.
Euler, L.,
[1764-1766] "De motu corporis ad duo centra virium fixa atracti," *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* **10**, (1764 publ.1766), pp. 207-241; and **11** (1765 publ.1767), p.152,p.184; Opera Omnia(2) **6**, pp.209-246 and pp.247-273.
[1766-1767] "De motu corporis ad duo centra virium fixa atracti," *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* **11**, (1764 publ.1766) 152-184; Opera Omnia(2) **6**, pp.209-246 and pp.247-273.
Hamilton,W.R.,
[1834] "On a General Method in Dynamics," *Phil. Trans.*, Part 2, (1834), pp.247-

308. = in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.103-1-161.
[1835] "Second Essay on a General Method in Dynamics," *Phil. Trans.* Part 1,(1835), pp.95-144. = in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.162 -211.
Houzel, C.,
[1985] "楕円関数と Abel 積分, " デュドネ編『数学史』第８章（1985）, 岩波書店, pp.457-581.
Jacobi, C. G. J.,
[1837] "Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen," *Journ. Reine Angew Math.*, **17**, (1837), pp.97-162.=in *Werke* **4**, pp.57-127.
[1839] "Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den veschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution," *Journ. Reine Angew Math.* **19** (1839), 309-313; Werke **2**, pp.59-63.
[1866] *Vorlesungen über Dynamik*, (1866), Berlin, Clebsch ed. reprinted by Chelsea in 1969.
Lagrange, J. L.,
[1766-69] "Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes, *Miscellanea Taurinensia* **4** (1766-1769): Oeuvres **2**, pp.65-121.
[1788] *Mécanique Analytique*, 2 vols. 1788 Paris = Œuvres **11, 12**.
Lamé, G.,
[1837] "Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température, *Mem. Savants Etrangers. Acad. Sci. Paris, Sci. Math. Phys.* (2) **5**, pp.147-183.
Legendre, A. M.,
[1825-1828] *Traité des fonctions elliptiques*, Paris, **1**(1825), **2**(1826), **3**(1828).
Whittaker, E.T.,
[1977] 『解析力学（上）』(1977) 講談社.

初期ギリシア数学史の再検討

斎藤　憲*

1　ギリシア数学の創始者をめぐって

ギリシア数学の初期の歴史を語る際に必ずあがる名前がタレス(盛年は585BC頃)とピュタゴラス(572頃–494頃)です．この二人が東方の数学的知識を，ギリシア的な学問に変えたという記述はこれまでの多くの概説書，研究書に見られます．そしてピュタゴラスからその弟子たちに受け継がれた数学がプラトンのアカデメイア(前4世紀前半)で花開いたとされます．

ところで，ギリシアで数学に何らかの貢献をした人物の中で前500年以前に生きたのはタレスとピュタゴラスだけで，それ以降の人々と大きな年代的な隔たりがあります．これは非常に奇妙なことです．もし，タレスやピュタゴラスがすでにギリシア的な論証数学を始めていたのであったなら，それ以降ほぼ一世紀にわたる空白 —— ピュタゴラスの盛年は前530年頃であり，最初の『原論』を編纂したとされるキオスのヒッポクラテスの盛年は前430年頃です —— はどのように説明されるのでしょうか．

クロノロジーにこれほど明らかな困難があるにもかかわらず，伝統的な歴史記述は長い間維持されてきました．この伝統的な記述の起源を訪ねれば，それはプロクロス(AD410頃–485)の『原論第I巻への注釈』に含まれる数学史的記述，いわゆる「数学者列伝」に遡ることがわかります．

> タレスはエジプトに旅し，幾何学をヘラスの地に初めて伝えた．彼は自分で多くの発見をし，またその他の多くの事柄

*大阪府立大学総合科学部, http://wwwhs.cias.osakafu-u.ac.jp/~ksaito/

について，後継者たちにその原理に至る道を示した．彼は問題を，あるときはより一般的な仕方で扱い，またあるときはより具体的な仕方で扱った．(中略)

ピュタゴラスは(中略)，この学問を一個の自由学芸の形に変貌させた．すなわちピュタゴラスはこの学問をいくつかの第一原理から検討し，種々の命題を，具体的な表現を使わず純論理的な施行によって研究しようと努めた．(訳文はヴァン・デル・ウァルデン著，村田全，佐藤勝造訳『数学の黎明』109頁による)

この記述は恐らくアリストテレスの弟子エウデモスの散逸した著作『幾何学史』に基づくものであり，そこにプロクロス自身による取捨選択や追加があったのではないかという問題提起はあっても，エウデモスに遡る内容は基本的に信頼できるものとされてきました．アリストテレスの直弟子の権威がクロノロジー上の困難より優先されてきたのです．

しかし今日，ギリシア数学 —— エウクレイデスに代表される論証的特徴を持つものとしてのギリシア数学 —— の起源がタレスやピュタゴラスにあると主張する研究者は少数です．

2　タレスは数学者でなかった

タレスの再評価については，D. R. Dicks の 1959 年の論文 “Thales” (*Classical Quaterly*, NS 9:294–300) が今でも一読の価値があります．Dicks はタレスに関する伝承をアリストテレスまたはそれ以前の比較的古いものと，それ以降のものに分け，前者では実用的知識を持った「賢人」としてタレスが描かれているのに対し，後者の資料に幾何学などのギリシア的学問と結び付いたタレス像が描かれていることを指摘しました．たとえば日食を予言したというヘロドトス『歴史』I, 74 の記述や (この日食の日付 585BC がタレスに関して知られる唯一の具体的な年代であり，これが彼の盛年とされています)，オリーヴの豊作を予測してオリーヴ圧搾工場の使用権をわずかな手付け金で買い占めて大儲けをしたというアリストテレス『政治学』1259a の記述が前者に属します．これに対してたとえば，舟の

距離を測るのに『原論』第I巻命題26(二角夾辺の合同条件) を用いたというエウデモスの記述 (プロクロス『原論第I巻への注釈』でのこの命題への注釈) が後者に属します.

この二種類の資料の相違を Dicks は次のように説明します. エウデモスのような後代の学者は, タレスの事蹟が単なる経験的知識に基づくものでなく論証的数学の裏付けをもつと仮定して, タレスの数学的知識を再構成した. したがってタレスが論証的数学の創始者であると伝承はエウデモス等の時代の創作であり, 信頼に値しない.

この解釈はエウデモスの記述がクロノロジー上の困難をもたらすという問題を解決し, 非常に説得力があります[1]. ヴァン・デル・ウァルデンはタレスが数学者であったという立場をとりましたが (『数学の黎明』pp.102–108), その議論はきわめて素朴で, 文献学的考察に基づく Dicks や Vitrac の議論と比べてはっきり見劣りします. また, ヴァン・デル・ウァルデンの主張の心理的根拠は, バビロニアの代数学がギリシアの「幾何学的代数」の原型であるという彼の主張にとって, 東方の数学を取り入れたタレスという存在が好都合であったということもありましょう. この点でも「幾何学的代数」のテーゼが疑問視されている現在, 彼の主張の説得力は失われています[2]. タレスを数学者であったと考えるのは相当に困難であると言えましょう.

3 ピュタゴラスとピュタゴラス派

ピュタゴラスとその弟子たちの作った団体は学問的集団というよりは, どちらかと言えば宗教的結社であり, この団体への帰属の核をなすものは「輪廻転生の教説を信じ, ピュタゴラスの教える正しい生 (ビオス) のあり方を守る」ことであったことが知られています. ピュタゴラス本人に数学的関心や数学的業績を帰することは困難であり, ピュタゴラス派

[1]最近この主張をさらにおしすすめた論文として Bernard Vitrac, "Mythes (et réalités?) dans l'histoire des mathématiques grecques anciennes," in Catherine Goldsteini, Jeremy Gray, Jim Ritter eds., *L'Europe mathématique*, Paris: Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1996. pp. 33–51 があります.

[2]幾何学的代数のテーゼとそれに対する批判については拙著『エウクレイデス『原論』の成立』東京大学出版会, 1997. 第3章を参照

の数学における活動はマテーマティコイと呼ばれる一分派の活動であるという意見が近年では有力です[3].

これに関しては拙著『エウクレイデス『原論』の成立』第4章でかなり詳細に扱ったので，ここではそこに盛り込めなかったことに触れたいと思います.

ヒッパソスに始まるとされる分派マテーマティコイについても詳しいことは分かっていないのですが，その中で最も重要な人物の一人はソクラテスとほぼ同年輩のクロトンのピロラオス (470 頃 BC 生) であり，彼に帰される断片全体の詳細な研究が最近出版されました[4]. これによってピロラオスの研究は，決定的な結論にはまだ遠いにしても，大きく前進したと言えます. Huffman の描くピロラオスは，認識論的問題を真剣に取り扱った哲学者であり，数学における独自の貢献はないものの，その思想には当時の数学の発展が大きく影響した，というものです. もしこの見方が定着すれば，ピュタゴラス派の最大の思想家ピロラオスに影響を与えるような数学の発展が前5世紀の後半にあったことになり，そのような発展を担った人物がピュタゴラス派の内部にいたと断言することはできませんから，ピュタゴラス派が論証数学を発展させた，という伝統的な見解自体も見直される必要があるかもしれません[5]. ともかく，ギリシアの論証的数学の成立へのピュタゴラス派の貢献がどの程度認められるかは今後の研究に俟つところが大きいと言えます.

ところで，なぜピュタゴラスやピュタゴラス派に数学的業績を帰することが最近になって疑問視されているかということも説明する必要があるでしょう. プラトン自身がピュタゴラス派の思想を影響を受けたことはよく知られますが，彼が創始した学園アカデメイアの門人たちの間でピュタゴラス (派) 崇拝はさらに進み，自分たちが発展させた教説をピュ

---

[3]この見解を提示した W. Burkert, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, Trans. by E. L. Minar, Jr. Cambridge, Mass.: Harvad University Press, 1972 は20世紀のピュタゴラス主義に関する最も重要な研究です.

[4]Carl A. Huffman, *Philolaus of Croton: Pythagorean and Presocratic,* Cambridge: Cabridge University Press, 1993. なお *Mathematical Review*, 95j:01005 の Luis Vega による適切な書評がある.

[5]前注で言及した書評中で Luis Vega はピロラオスが論証的数学の影響を受けたということ自体が疑問視されうる余地があることを指摘していて，この場合，ピュタゴラス派と論証数学の結び付きはさらに弱められることになります.

タゴラス派に起源をもつものである，という学説の混同ないしは捏造が行なわれるに至りました．アリストテレスがその著作の中でピュタゴラス派 (アリストテレス自身の表現によれば「ピュタゴラス派と呼ばれる者ども」) の学説とプラトンの学説を詳細に比較検討して批判している動機の一つは，他ならぬこの種の学説の混同にあったと考えられます．

したがって，プラトンの弟子より後の時代のピュタゴラス派に関する資料は「それ自体で疑わしい」ものなのです．もちろん，これらの資料が全て無価値だというわけではありません．しかしそれらの記述を鵜呑みにすることはできません．これらの資料はその文脈の検討，類似した記述を持つ他の資料との比較などによって，その価値を一つづつ確定する作業が必要であり，その作業は今も続いています．

数学史においてピュタゴラス派に何か具体的な数学的業績を帰する資料はすべてこの「それ自体で疑わしい」部類のものです．プロクロスのソースであったエウデモスはすでに見たように必ずしも信頼がおけません．我々の知識の一部は『原論』の古注 (*scholia*) によるものですが —— たとえば正多角形を扱う『原論』第4巻がピュタゴラス派によるという記述がそれです[6] —— 古注とは著者不明の写本の欄外の書き込みであり，その少なくとも一部は『原論第I巻への注釈』の著者のプロクロスによるものとも考えられます．いずれにせよ，これらがピュタゴラス (派) 崇拝の汚染を免れているという証拠はないのです．

一方，たとえば『形而上学』でアリストテレスが「ピュタゴラス派と呼ばれる者ども」の数学的学問について語るときに出てくる例はたとえば，10が完全数であるから，天体の数も10個でなくてはならないと考えて彼らが対地星なる星を追加した，といったものです．そこには彼らに具体的な数学上の重要な業績を帰する記述は現われません．

こうして見るとギリシア数学の創始，発展においてピュタゴラス派の果たした役割が実際にどの程度のものであったのか，再検討が必要なことは明らかであると思われます．

[6]拙著『エウクレイデス『原論』の成立』p.78 参照．

4　論証数学のはじまり

それでは誰がいつ論証数学を作ったのか，という問いが当然出てくることになります．現時点では「それは分からない」と答えざるを得ません．

ただ，論証数学の成立の下限を定めることは比較的容易でしょう．プラトンの壮年期まで下がらなくとも，彼の対話篇『テアイテトス』はソクラテスの裁判のあった前 399 年を舞台としています．登場人物の中には幾何学者テオドロスがいて，不確実な言論と確実な幾何学的議論とを対比させた表現がなされます (162e, 165a)．さらにテオドロスとほぼ同年代で，前 430 年頃に活躍したとされるキオスのヒッポクラテスによる月形の求積の議論はエウデモス，シンプリキオスという二人の仲介によって現代に伝えられていますが，そこに論証数学の原型を見ることは可能です．

前 5 世紀半ばから後半にギリシアの論証数学が成立したと考えるのは色々な状況から，まあ妥当な想定ではないかと思われます．それはソフィストが活躍し，ソクラテスが若者を相手に議論をした時代でもあります．自明なことでも証明を試み，細かいことまで議論を尽くすギリシア的な数学が，超人的な師に心酔する弟子たちの集団においてではなく，時には詭弁も交えた自由な議論が展開したギリシアの社会の中で成立したと考えることはそれほど的外れでないように思います．

中国の古典数学から

大阪国際大學

竹之内　脩

1　中国の古典数学

ここで、私が中国の古典数学というのは、中国の数学が日本にもたらされて、和算の基礎になった 16, 17 世紀くらいまでの数学をいう。

中国では、何時から、数学が研究されるようになったのかわからないが、紀元前からあったようである。最も古い書物は周髀算経であるが、これは算書というより天文の著書である。算書で最も古いのは、九章算術である。

唐の時代には、算経十書といわれるものがあった。その中でも、祖冲之の「綴術」は著名であるが、現存しない。

13 世紀には、異常なまでの発展をし、数多くの数学者がでた。中でも、秦九韶、李冶、楊輝、朱世傑は傑出している。

李冶　「測圓海鏡」
秦九韶　「数書九章」
楊輝　「楊輝算法」
朱世傑　「算学啓蒙」、「四元玉鑑」

和算の形成のもとになった書物としては、次のものがあげられている。

劉徽　「九章算術」
朱世傑　「算学啓蒙」
程大位　「算法統宗」

がある。

朱世傑が算学啓蒙とともに著した「四元玉鑑」は、中国数学の最高峰といわれている。これは、和算の形成期に日本にあったとはいわれていないのであるが、私は、大きな影響があったのではないかと考えている。このことについて、まず述べよう。

2　四元玉鑑

四元玉鑑は、3 巻 24 章から成る。問題集の体をしており、それぞれの章はいくつかの問題から成る。各問題は、問題文、答、術から成っている。術は、単に、最終的な答えを得るための式の記述を与えているに過ぎず、そこに至る過程は示されていない。書物の最初に、假令四艸と称して、四題、例題として問題が与えられ、そこに、艸と称する術に至るやり方を述べたものがついているだけである。

大部分が、天元術の問題で、最後の巻に至って、二元術、三元術、四元術が扱われている。また、巻中から巻下に至る 2 章で級数の総和問題が扱われ、これは素晴らしい内容のものである。

四元玉鑑については、江戸時代、日本にあったかどうか。これが問題である。現在までの定説では、なかった、ということになっている。それは、それが存在した、という記録がない、ということからで、幕府の書庫であった紅葉山文庫にも、その書物があった、という記録はないとのことである。しかし、私は、それが日本にあった。そして、それが、関孝和らによる和算の建設に非常に重要な役割をした、と思って

いる。そのことについて、少し述べてみる。

(1) 算学啓蒙が日本にあったことは、建部賢弘が諺解を書いているので確かなことである。その算学啓蒙がどのようにして日本にもたらされたかというと、秀吉の朝鮮出兵の際に彼の地から略奪してきたものであろうといわれている。さて、算学啓蒙が、朝鮮戦役で、朝鮮から略奪してきたものだとすれば、同じ著者の四元玉鑑が同時にもたらされた、と考えるのは、自然なことである。中国では、この両著とも、長い間失われていて、19 世紀になってから、発見されたものである。

(2) 関孝和の重要な成果の一つとして、發微算法という書物がある。(小川 [2]) この書物と四元玉鑑を比較してみる。(右欄)

この両者を見ると、非常に文体が似ていると思われるであろう。関孝和の文は、日本でこのようなものを出版したものの最初のものであった。そして、それを書くにあたって、文体はおそらく中国のものをまねたことであろう。ところで、私が今まで目にした中国の古典では、上のような書き方は、四元玉鑑だけである。他のものは、これとは随分感じの違う書き方になっている。多分、関孝和は、四元玉鑑の向こうを張るつもりで、この四元玉鑑の文体を採用したのではないだろうか。

(3) 發微算法の問題そのものは、澤口一之という人が書いた古今算法記という書物に附属して書かれた問題である。ところで、發微算法と四元玉鑑の共通点のもう一つは、問題に登場する量が、とんでもないものだということである。

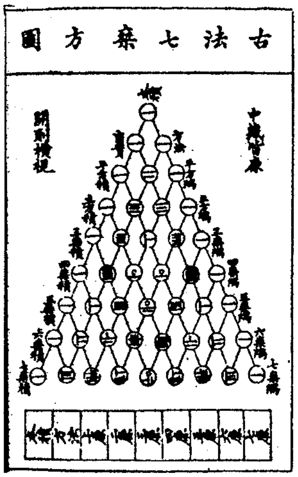
上にあげた發微算法のは、一応おかしくはないが、四元玉鑑の方は、面積から周の長さを引く、というようなことをやっている。

(發微算法)	(四元玉鑑)
今有平円内如図平円空三箇外余寸平積百二十歩	今有方圓田各一段方田積内減圓田周圓田積内減方田面餘二数併得一百九十九歩一十一分歩之一尺
只云従中円径寸而小円径寸者短五寸	只云圓周冪減方面餘一千二百八十四歩
問大中小円径幾何	問方面圓周各幾何
答日依左図得円径	答日圓周三十六歩 方面一十二歩
術日立天元一為小円径 ···	術日立天元一為圓周 ···

發微算法のほうも、ほかの問題では、長さの平方根や立方根をとって加えたり、というようなことをやる。中国の古典数学では、具体的な面積や長さを求めることが要求されていて、このように数だけを扱って、それでどうということはそれまではしていない。比較のできないものを比較するというようなことは、それまでやっていないのである。四元玉鑑に至って、はじめて登場する事柄なのである。發微算法でも、そのように具体的な意味をもたない問題が扱われているということは、澤口一之も関孝和も四元玉鑑に馴染んでいたからではないだろうか。

(4) 四元玉鑑の一番はじめのページには、パスカルの三角形の図が載っている。(次ページ図) 関孝和もパスカルの三角形を使って、重要な研究をしている。その研究は、朱世傑の四元玉鑑にあるもの、を発展させたものと考えられるのである。

(5) 関孝和全集 ([3]) 二七ページには、関孝和が、奈良の都で誰が読んでもわからない中国の算書を写し取ってから学力が上達した、と書いてあり、そしてその書物は、楊輝算法だった



ろう、とある。しかし、これが私には、不可解に思われる。関孝和が写したという楊輝算法の写本があるので、そのようなことをしたことは、確かであるが、楊輝算法は易しい本で、関孝和のような天才なら、ちょっと読んだだけで、自分で作っていけるような類いのものである。関孝和が本腰を入れて取り組んだ、というからには、それは四元玉鑑であることは間違いないと思われる。四元玉鑑はたいへん難しい本で、およそ普通の人には、手の出ないようなものであるから。

(6) 四元玉鑑の四元というのは、四つの未知数ということである。、朱世傑は天元術を発展させて、未知数 4 個の代数方程式を扱った。関孝和もこれにはてこずったのではないだろうか。関孝和の創始した数学の方法に、傍書法と呼ばれているものがある、これは、関孝和が四元玉鑑の方法があまり厄介なので、自分で方法を作り出したのではないかと思う。

以上、いろいろな観点から、私は、関孝和は四元玉鑑を読んで、研究していた、と思う。それでは、建部賢弘は、算学啓蒙諺解を作っているのに、どうして四元玉鑑にはそれを作らなかったのだろう、という疑問もでてくるが、これについては、次のように考える。

すなわち、算学啓蒙には、教育的意味を認めたので、解説書を作った。しかし、四元玉鑑は、普通の人には難しすぎて、教科書には向いていない。それに四元玉鑑の中味のことは、関先生がいろいろな方法を作り出して、それを勉強すればよいのだ。そのようなことであったのではないだろうか。

ともかく、決定的な証拠はないのだから、このような議論は、もっと続けられるべきであろう。

3　九章算術から

九章算術は、紀元前 3 ～ 2 世紀頃からだんだん作られていったようであるが、完全な姿とし今日伝えられているのは、3 世紀に劉徽がまとめたもので、晉劉徽注として書かれている。

九章算術とあるように、九章から成り立っている。

方田、　粟田、　衰分、　少広、　商功、
均輸、　盈不足、　方程、　句股

注目すべきことはいろいろあるのであるが、ここでは、興味あることとして、次のことを取り上げよう。

巻第七 盈不足　20 問

盈というのは、満ちること、あふれること。ここでは 2 元 1 次方程式の解を扱っている。

「いま、共同で鶏を買う。各人が 9 銭出すと 11 銭余り、各人が 6 銭出すと、16 銭不足する。

問う。人数と鶏の価格はいくらか。」

答　9 人、鶏の価 70 銭」

これは、過不足算で、算術の問題として、よ

く知られているところである。もちろんこれは

$$(11+16)\div(9-6)=9$$

として、簡単に解が求められている。この種の問題がまず 8 問ある。そして、そのあとにある問題が興味がある。

「いま、醇酒 1 斗は 50 銭、行酒 1 斗は 10 銭である。いま、30 銭で、醇酒、行酒あわせて 2 斗の酒を買いたい。

問う。醇酒、行酒、それぞれいくら買うことにすればよいか。

答　醇酒　2 升半　　行酒　1 斗 7 升半

術　仮に醇酒 5 升、行酒 1 斗 5 升とすれば、10 銭不足し、醇酒 2 升、行酒 1 斗 8 升とすれば、2 銭不足余る。盈不足術をもって、解を求める。」

醇酒とか行酒とかあるが、要するに 2 種類の酒。銘柄の差にしては値段が違いすぎる。醇酒というのは濃い酒、行酒というのは薄い酒とあるから、ウィスキーとビールの違いのようなものであろうか。

この術として述べられている盈不足術というのが、興味のあるところである。これは、次のようなものである。

それぞれの値の下に余り数、不足数を置く。そして、それらを斜めに掛け合わせて加え (これを維乗という)、実とする。また余り数と不足数を加えて法とする。実を法で割って答を得る。

この問題の場合についてやると、次のようになる。

醇酒	5	2
行酒	15	18
盈不足	-10	2

として、

醇酒　$(5\times 2+2\times 10)\div(2+10) = 2.5$

行酒　$(15\times 2+18\times 10)\div(2+10) = 17.5$

というのである。

これは、$2+10$ を分母にして、$\frac{2}{12}$、$\frac{10}{12}$ の比に分けるということである。このことは、上の表で盈不足の欄を

$30-10$　　$30+2$

として、

$$(30-10)\times\frac{2}{12}+(30+2)\times\frac{10}{12}=30$$

としてみると、意味がわかる。つまり、二つの列を $\frac{2}{12}$、$\frac{10}{12}$ の比で按分しようということである。

鶴亀算の手法によれば、醇酒 5 升、行酒 15 升の場合 10 銭不足。ところで、1 升につき、醇酒 5 銭、行酒 1 銭で、その差 4 銭であるから、$10\div 4=2.5$ ということで、醇酒の量を $5-2.5=2.5$ とするとよい、ということになる。

これによって、上にあげた盈不足術は、これとは全く違う独特のものであることがわかる。これは、巻第六の按分比例の考えの適用だと思われる。しかし、劉徽は、このようには注釈していないし、また、いままで見た書物の中で、このように解説してあるものはない。どういうことなのであろうか。ただ一つ、朱世傑の四元玉鑑 (1303) の中に、次のような問題が載っている。これは、この書物の或(わく)問歌彖(たん)という章にある。この章は、この書物の中でも独特な章で、全体が詩のスタイルで書かれているので、そのように訳してみた。

店で前にこんな話を聞いたんだけどさ
新酒ができて、醇酒と璃酒とあるんだ
醇酒は 1 升で 3 人酔っぱらう
璃酒は 3 升で 1 人酔うんだって
わいわい大勢でやって来て
12 斗の酒を平らげて
50 人酔いつぶれちゃったんだってさ
計算に達者な先生方

醇酒、璃酒、どれだけ飲んだんだろうね

答　醇酒3升7合半　　　　酔客$11\frac{1}{4}$人

璃酒1石1斗6升2合半　酔客$38\frac{3}{4}$人

朱世傑は、九章算術の面白さに惹かれてこんな問題を作ったのだと思われる。そして、その解答に書かれている式を見ると、まさにここに述べた盈不足術を使っているように思われる。

4　海島算経　9問

九章算術の原序に、次のようにある。

> "重差術"の例題と注釈を作り、古人の考察を究め、『九章算術』句股章の末尾に付け加えた。その術は、高さをはかる場合は2本の表(目印の棒)を用い、深さを測る場合は2個の矩(さしがね)を用いる。また測量対象が基準線よりずれる場合は、三たび望み、対象がずれ、しかも広く、調べる場合は四たび望む。このように類例に触れて発展させれば、どんなにかすむほど遠くとも、あやしく深くとも、使用できない所などはないのである。

この句股章末尾に付け加えたという部分が切り離されて、海島算経になっているのである。

九章算術では、2地点の距離、木の高さ、井戸の深さ、町の大きさなどを、これらに直接関係のある長さを測って、それらをもとに、それらを計算している。これに対し海島算經では、間接的なデータから、城の大きさ、城までの距離などを求めることを論じていて、これこそが、測量の主テーマとなるところのものである。

今日ならば、これらは三角測量で計算されるものである。しかし、中国の古典数学では、角の概念は登場せず、従って、三角比などの概念もない。相似、比例によって、計算するのである。

海島算經の測量問題は、それより後の中国の算書において、そのままの形でうけつがれて、これを基礎として、発展させている。

海島算経には、9題の問題が扱われている。

各問は、問題文が与えられ、次に答、そのあとに術として、その答を得る計算の方法が示されている。しかし、その答を得るための思考の過程については示されていないのである。

これについて、13世紀、楊輝は、次のように述べている。

> 唐代以降、劉徽の立法の根拠を解する人はいなかった。唐の時代の李淳風は、劉徽の九章算術、海島算経に注をつけ、それが今日に伝わっているのだが、方法は伝えたけれども、理論的根拠は伝えていない。

現在までに、多くの研究がされて、文献も多々あるのであるが、それらは、1問ずつを取り上げて、個々に論じている。ここでは、私が最も基本となると考える問題、第3問、をとりあげて、これによって9問全体を、統一的な観点のもとに扱うことができることを論ずる。

> 正方形の形をした村が南にある。その大きさを知りたい。そのために、2個の表を東西に6丈隔てて立て、目の高さに索(つな)を張り、東の表と村の東南隅と東北隅の三者が一直線になるようにする。ここで東の表から北に5歩退いた所で、はるかに村の西北隅を望むと、索の東端から2丈2尺6寸半行ったところに見える。また、東の表から北に13歩2尺下がって、はるかに村の西北隅を望むと、西の表と一直線に見

える。

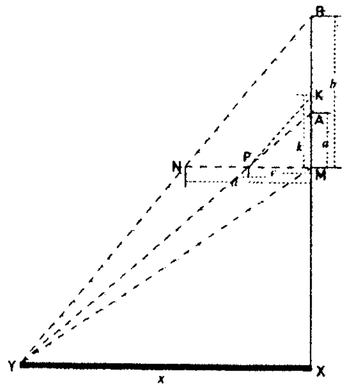
この村の 1 辺の長さ、および表からの距離は、いくらか。

答　1 辺の長さ　3 里 43 $\frac{3}{4}$ 歩
　　　距離　　　4 里 45 歩

術　はじめに見たときの索の東端からの長さを 2 回目に表から下がって見た距離に掛け、表の隔たりを **景差** とする。この値からはじめに表から下がった歩数を引き、余りを「法」とする。2 回目に表から下がった歩数を引き、余りを索の東端からの歩数に掛け、「実」とする。実を法で割ると、方邑の 1 辺の長さである。

表からの遠近を求めるには、2 回目に表から下がった歩数を置き、この値から景差を引き、余りをはじめに表から下がった歩数に掛け、「実」とする。実を法で割ると、邑と表の隔たりである。

ここで、劉徽は、景差という概念をもちだしている。これは、一つの直線に平行な直線を引いて、あとは、相似の関係を巧みに使うものである。



$$景差 = \frac{bc}{d}$$

$$k = 景差 - a$$

$$x = \frac{(b-a)c}{k}$$

この簡単な手法によって、9 問すべて、うまく取り扱うことができる。従来の研究では、1 問 1 問、別々に考えられていたのであるが、私は、劉徽の考えは、まさにここにあったのだと考えている。

5　算法統宗

中国の古典数学では、13 世紀までと、15 世紀以降との間に、大きな断絶がある。

15 世紀以降の数学を語る重要な書物は、

程大位　「算法統宗」

であるが、その内容は、まるで九章算術に戻ったようなものである。13 世紀に大発展をした天元術はすっかり影をひそめてしまっている。

和算では、たしかにこの算法統宗の影響は大きく感じられる。そして、天元術は、関孝和、沢口一之により、やっと扱われるようになったものである。

この間の事情の解明。それは興味ある課題のように思われる。

参考文献

[1] 任繼愈主編、中国科学技術典籍通彙 全 5 巻、河南教育出版社

[2] 靖玉樹編勘、中国歴代算學集成 全 3 巻、山東人民出版社

[3] 小川束、関孝和「發微算法」–現代語訳と解説、大空社

[4] 川原秀城、劉徽注九章算術、中国天文学・数学集、科学の名著 2、朝日出版社

[5] 川原秀城、海島算經、中国天文学・数学集、科学の名著 2、朝日出版社

[6] Frank J. Swetz: The Sea Island Mathematical Manual: Surveying and Mathematics in Ancient China, The Pennsylvania State University Press, 1992

第８回数学史シンポジウム

１９９７年１０月２５、２６日

ゆらぎ　と　情報

飛田　武幸
名城大学　理工学部

「ゆらぎ」や「ノイズ」が情報理論の中に取り入れられてきて、数学においても重要な地位を占めるようになった。

ゆらぐ現象は時間とともに変化する。時には時刻と空間の点とをパラメータとする偶然現象として認識されることもある。それらの数学的モデルはそれぞれ時系列とか確率過程、あるいは確率場と呼ばれるものである。その性質や構造の解明は確率論の基本的な課題である。

このような課題の情報理論への橋渡しは近年いろいろと試みられてきた。そこでの極めて強力な手法は innovation （新生過程）の利用ということができる。この概念を通して「ゆらぎ」と「情報」とを結びつけよう。

１。「ゆらぎ」はどこにあるか？

科学の対象とする自然界は”ゆらぐ複雑系”である。

ゆらぎの例

炎（ほむら）、陽炎、ローソクの火；

お天気（気温など）、太陽の黒点、台風の進路；

硬貨投げ、測定の誤差、水中にある花粉のブラウン運動；

拡散現象、不確定性原理、熱雑音、天体からのＸ線；

生物の進化、細胞の働き、生命現象、集団遺伝学的現象；

これらはすべて「ゆらぎ」を含むランダムな現象である。「ゆらぎ」はこのように、いたる所に見出される。

2。「ゆらぎ」小史

T.C. Lucretius (Roma, BC 98 - 54)

On the nature of things, transl. by H. A. J. Munro, 1952

すでに自然界のゆらぐ現象に着目していた。

cf. 寺田寅彦　随筆集　第二巻 ルクレチウスと科学　207-262

物質元子の無秩序運動

Carl F. Gauss

誤差論、　円錐曲線で太陽のまわりを回る天体の運動理論、1809

Gauss Werke III. より。

そこで、天体の観測や測量などにおいて、介在する偶然量の正しい認識を得て、偶然量のしたがうガウス分布の特徴づけを行う。すなわち、どんな大きさの任意標本についても平均の最尤推定値が標本の算術平均ならば、その分布はガウス型でなければならない。

Robert Brown

ブラウン運動の発見。水中の花粉の不規則運動を見て（1827年）。それは科学者の眼によって発見された。

Albert Einstein

ブラウン運動の数学的な定式化と展開(1905年)をして、拡散方程式を理論的に導いた。

ゆらぎの最も基本的なものとしてのブラウン運動の認識がえられた。

Paul Lévy,

ブラウン運動の理論を数学の中に大きく位置づけた。

ランダムな量（ゆらぎ）の素子としてブラウン運動を認識した。

関数解析学と結びつけた。

ゆらぐ確率場の変分による扱いを指向した。

3。情報

確定した定義をするのはまだ時期尚早である。当面いろいろな内容が考えられるが、その整理は今後の発展にまつことになる。

現時点では次のような大まかな分類が考えられよう。

（１）。Artificial Information　系統的、工学的なもの。

文字、電子メディアなどの入力信号。

この分野は歴史も古く、豊富な研究成果がえられている。さらに通信工学などの面で応用も広い。

（２）。Natural Information　ゆらぎの情報、自然情報：

自然界、生物の中等に見出される。一般に入力は知られず出力のみが観測されるような場合である。

例としては、宇宙からの信号、spontaneous なゆらぎによる生物の行動、医師による患者の診断など。今後の研究課題が多い。

（３）。遺伝情報

それ自身のプログラムを持つ。前二者とは異質である。

4。情報理論的展開

以下のような段階がある。数学的な展開が主となる。

（１）ゆらぎ の持つ不確実さの確率論的なアプローチ、

（２）偶然に起こった結果の処理、

（３）それを基に未知であった情報を獲得し、それを利用する。

その歩みを駆け足で見てみよう。

N. Wiener

時系列、情報および通信の理論に貢献した（文献 [7]）。

情報の最も簡単で基本的な形の一つは硬貨投げ.

誤差の例で情報量の定義に $-p \log p$ の出てくる説明を与えている。

randomness が消えて情報が得られるとする情報の認識。。

定常時系列について、効率のよい情報伝達を論じている（変分の立場から文献 [8] 参照）。

ブラウン運動の役割を強調した理論の展開（[9] など）。

frequency and amplitude modulation による信号の処理。

chaos expansion ——> Itô's multiple Wiener integral.

フーリエ解析より harmonic analysis へ。

innovation の考えによる coding, decoding の方法を提唱している。

（ whitening を含む ）。

これらの 卓越したアイデイアは現在の科学の多くの場面に活かされていることに注目したい。

C.Shannon,

文献 [6]は通信の数学的理論（情報理論）の古典であり、また基本的な文献となって現在に生きている。

基本的な情報量としてのエントロピーの導入とそれを用いた通信理論を確立した。

情報伝達におけるノイズの役割が明らかになった。

Dimension rate など、その後注目されるようになった概念が芽生えている。

A.N.Kolmogoroff

文献 [2] は現在においても、情報理論や計算の理論に重要な指針を与えている。

5。<u>情報理論的立場からの「ゆらぎ」の解析、すなわちホワイトノイズ解析</u>

この解析は、絶えず情報理論と密接な関係を保ちながら発展している。

それには次ぎのような著しい特徴がある。

（1）「真に無限次元」的である。無限個の確率変数があり、分布は無限次元空

間上の測度となる。この分布は時間と動きとともに変動する。解析はそのような空間の上で実現される。

（2）有限次元のものでは近似できない事象があり、それが重要である。

（3）「ゆらぎ」（randomness）の「素子」としての「ホワイトノイズ」が数学的理論へのキーとなる。それはブラウン運動の微分として実現できる。

確率過程に対しては innovation となることを期待する。

（4）素子を変数とするの妥当な関数のクラスが定まる。それは超汎関数の空間 $(S)^*$ で、超汎関数の characterization theorem がある。

（5）「動き」-パラメータである時間や空間の点の動きによる「ゆらぎ」の変化は変換群で記述される。。

特に、無限次元回転群（ H. Yoshizawa ）が重要な役割をはたす。

さらに、無限次元調和解析につながる。

（6）古典関数解析からの発展。

特に P.Lévy の関数解析--->ホワイトノイズ解析につながる。

--->ゆらぎの解析。

（7）変分法によるアプローチ。

確率場にたいして innovation の構成にたいし有効である。

6。課題を提供している諸分野

分子生物学　微生物の運動。：大沢文夫。Oosawa equation。

高分子の行動：木方行郎。アミノ酸配列の統計解析。

neuron, nonlinear interaction : Sejnowski他。

（ causality に注目したい。）

宇宙理学　X線バースター：小田稔。　Gamma-Ray Bursts.

Binasry systems, Nova: Argonne National Laboratoryの情報

そこでは 情報源、ノイズが明らかでない。観測した output からそれを innovation として推測することになる。

ランダム性の特徴の活用、役割の認識が重要である。

場の量子論　朝永方程式など

確率変分方程式。

[文献]

[1] T.C.Lucretius, 前掲書　William Benton Publisher, 1952

[2] A.N.Kolmogoroff, Three approaches to the quantitative definition of information. П.П.И. vol.1,no.1(1965),3 - 11.

[3] P.Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, 1937.

[4] P.Lévy, Procerssus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars, 1948.

[5] P.Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle.Gauthier-Villars, 1951.

[6] C.Shannon, Mathematical theory of communication. Univ. of Illinois Press. 1949.

[7] N.Wiener, Cybernetics, John Wiley & Sons Inc.1947.

[8] N.Wiener, Extrapolation,interpolation and smoothing of stationary time series. MIT Press, 1949.

[9] N.Wiener, Nonlinear problems in random theory. MIT Press, 1958.

[10] T.Hida ed. Advanced Mathematical Approach to Biology. White Noise Analysis with Special Emphasis on the Application to Biology. World Scientific Pub. 1997.

[11] ２０世紀数学シンポジウム、　津田塾大学、1995.
ゆらぎの解析　今昔

[12] 吉田　民人、（哲学）、知の情報論的転回 - 秩序生成機構とその進化 -、1993, IIAS Notes.

確率概念について

釜江哲朗（大阪市立大学）

＝１０月２６日津田塾大学，数学史シンポジュムでの講演＝

今日，コンピュータによって，確率微分方程式を数値的に解くといった複雑な確率現象のシミュレーションが行こなわれるようになっている．そこで用いられる乱数の多くは，線形合同法，M 系列，加算生成法等に代表される数値乱数で，これらのシミュレーションで要求される高度の独立性を満たすかどうか疑問視される．例えば，高嶋恵三氏が行っている Arcsin Law，First Passage Time 等にもとずく検定では，従来良い乱数とされてきた数値乱数の多くのものが棄却される [3]．

Kolmogorov によって確立された今日の確率論は，確率を全測度 1 のルベーク測度としてとらえるもので，標本点の集合が確率 1 をもつという論拠によって，確率現象が標本点にどう反映されるかといった議論が可能となる．例えば，ベルヌイ試行において，1 回の試行の確率が標本点である数列の頻度として実現される．すなわち，頻度条件を満たす標本点の全体は確率 1 をもつのである．しかしながら，個々の標本点は確率 0 をもち，個々の標本点を集合に加減しても，集合の測度が 1 であるという性質は変わらない．すなわち，今日の確率論は，個々の数列がランダムかどうかといった議論には無力である．

他方，乱数の概念として知られているものは，von Mises による Kollektiv で，数列およびその部分列の頻度の安定性を表現したものである．すなわち，0 と 1 の列 $x_1x_2\cdots x_n\cdots$ が2進一様 Kollektivであるとは，任意の計算可能 (recursive) な関数 $f:\bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ に対して，もし

$$\{k_1<k_2<\cdots\}:=\{n+1; f(x_1x_2\cdots x_n)=1\}$$

が正の upper density をもつならば

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{k_i}=\frac{1}{2}$$

が成立することをいう．

しかしながら，この定義では，一定のアルゴリスムによって生成される計算可能な数列は乱数とは認められない．生成速度と品質管理上の理由から，今日用いられる乱数はほとんどが数値乱数であり，上記の定義から排除されるものである．いかに理想化された概念とはいえ，現実の対応物のない乱数概念は空虚である．**このような観点から，現実に即しながら理論展開も十分可能な程度に理想化された乱数概念が求められる．**

E.Borel は，任意の長さのブロックに対して大数の強法則を実現する列として正規数列なる概念を導入した．例えば，2進一様正規数列とは，0 と 1 の列 $x_1x_2\cdots x_n\cdots$ であって，任意の $k=1,2,\cdots$ と長さ k の 0 と 1 の列 $\xi_1\xi_2\cdots\xi_k$ に対して

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}1_{x_{n+1}\cdots x_{n+k}=\xi_1\cdots\xi_k}=2^{-k}$$

が成立するものをいう．このような列で計算可能なものは存在する．実際，Champernowne Number として知られている以下の 0 と 1 の列は 2 進一様正規数列である．

$$\underbrace{\underbrace{0}\,\underbrace{1}}_{\text{長さ1の列}}\ \underbrace{\underbrace{00}\,\underbrace{01}\,\underbrace{10}\,\underbrace{11}}_{\text{長さ2の列}}\ \underbrace{\underbrace{000}\,\underbrace{001}\,\underbrace{010}\,\underbrace{011}}_{\text{長さ3の列}}\cdots\cdots$$

どのような部分列の取り方が2進一様正規数列の頻度を保つであろうか．これについて以下の事実が知られている [1]．すなわち，正の upper density をもつ自然数の部分集合 $K=\{k_1<k_2<\cdots\}$ が，任意の2進一様正規数列 $x_1x_2\cdots$ に対して

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{k_i}=\frac{1}{2}$$

を満たすための必要十分条件は，Kが以下の意味で決定可能なときである．すなわち，各 $n=1,2,\cdots$ に対して，関数 $f_n:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ が存在して，$n\to\infty$ のとき

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}1_{f_n(1_K(i+1),\cdots,1_K(i+n))=1_K(i+n+1)}$$

が1に収束することである．

乱数の概念を拡げるにしても，正規数列の範囲内には留まらなければならない．なぜなら，それは大数の強法則からの自然な要求だからである．

Kollektiv の概念よりやや強い乱数概念が Kolmogorov-Chaitin によって導入された Complexity を用いて与えられる．

計算可能な関数 $A:\bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n\to\bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n$ と $\xi\in\bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n$ が与えられたとき，A によるξのプログラムの長さ$K_A(\xi)$ を以下のように定義する．

$$K_A(\xi):=\begin{cases}\min\{n;A(\eta_1\eta_2\cdots\eta_n)=\xi\} & A(\eta)=\xi\text{となる}\\ & \eta\text{が存在するとき}\\ \infty & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

上記の A が漸近的に最良であるとは，任意の計算可能な関数 $B:\bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n\to\bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n$ に対して，定数 Cが存在して，

$$K_A(\xi)\le K_B(\xi)+C$$

が任意の$\xi\in\bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n$ に対して成立することをいう．漸近的に最良な A の存在は知られている．また，そのような A,Bに対しては，定数 Cが存在して

$$|K_A(\xi)-K_B(\xi)|\le C$$

が任意の$\xi\in\bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n$ に対して成立する．この意味で最良の A に対する K_Aは定数差を除いて一意に定まる．これを単に Kと記し，Kolmogorov-Chaitin の Complexity Functionと呼ぶ．

0と1の列 $x_1x_2\cdots x_n\cdots$ が2進最大 Complexity 列であるとは，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{n}K(x_1x_2\cdots x_n)=1$$

が成立することをいう．2進最大 Complexity 列が2進一様 Kollektiv であることは容易にわかる．それ故，2進最大 Complexity 列を乱数列の定義として採用することは，上にのべた意味で不適当である．さらに，この Complexity Function Kは計算可能でないことも知られている．Kのもつ確率論的に重要な性質を保ちつつ，これを一般化した Complexity Function を用いて，より広い2進最大 Complexity 列を定義することが可能であろう．Complexity Function のこのような拡張は村松純氏と金谷 文夫氏によって，Universal Coding の観点からなされている [2]．

Complexity Function をどのように一般化し，一般化されたもののうちどれを新たに Kとして採用し，乱数概念としてこの Kにもとずく2進最大 Complexity 列を定義するのが適切かは今後の課題である．

参考文献

[1] Teturo Kamae, Subsequences of normal sequences, Israel J. Math. 16-2 (1973) pp.121-149.

[2] 村松 純, 金谷 文夫, "歪みを許した時の複雑度とレート歪み関数," 京都大学数理解析研究講究録, vol.975, pp.28–42, 1996.

[3] Keizo Takashima, Sojourn time test for maximum-length linearly recurring sequences with characteristic primitive trinomials, J. Jap.Soc.Comp.Stat. vol.7 (1994) 77 -87.

1900-1920 年代のトポロジー

松本幸夫（東大数理）

杉浦光夫先生から，数学史のシンポジュームのお話をうかがったとき，今にして思えば無謀な考えで御引受してしまいました．それは，１９００年から１９２０年代のトポロジーの発展を追ってみようと考えたのです．１９００年前後に，有名なポアンカレの大論文「 Analysis situs 」が現れ，トポロジーという学問が本格的に始まるのですが，私がトポロジーを勉強してきた過程で親しんできたのは，せいぜい３０年代以降の論文でしたので，ポアンカレの論文から２０年代までは，トポロジーはどんな風に発展していたのだろうという興味が半分と，もう一つは，２０年代までならそんなに沢山の論文は無いだろうという甘い期待からでした．そこで，この間に書かれたトポロジー関係の論文リストを作ってみようというところから始めたのですが，始めてみて，自分の甘さを後悔しました．かなり沢山の論文があって，片手間に概観できるようなものではないことがわかりましたので（すみません，今ごろ，そんなことを言うのは認識不足も甚だしいかも知れないのですが），今回は論文リストを作ることだけで御勘弁願うことに致しました．

以下は，その論文リストですが，著者の生年月日の順に並べました．生年月日が同じときは，長く生きたほうを後にしました． また，参考のために，前世紀までの論文もいくつか入れました．はじめの１－２ページがそれです．ただし，Gauss や Riemann の論文は書いてありません．あまりに恐れ多いためです．
それから，このリストには，数学に関係ない人名も入っていますが，これはそのころの時代の雰囲気を少しでも理解する個人的手掛かりを得ようとしたためです．
当然，このリストは不完全で，トポロジー関係でも見落としてしまった論文が沢山あるはずです．間違いもあるかもしれませんのでお気付きの点は御指摘いただければ幸いです．
どうぞよろしくお願い致します．

Gauss, Carl Friedrich (1777-1855)
[1] Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkugen, (1833), Werke Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1877, vol 5, p.605.

Bolzano, Bernhard (1781-1848)
連続関数の厳密な定義，至る所微分できない連続関数（後年の高木と同じアイデア）< K.Menger, “Reminiscences”, p.19.

Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm (1815-97)
至る所微分できない連続関数　<　数学辞典 333-B.

Betti, Enrico (1823-92)
[1] Sopra gli spazi un numero qualunque di dimensioni, Ann.Mat.Pura Appl., (2),4 (1871),140-158.

Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826-66)

Tait, Peter Guthrie (1833-1901)
[1] On knots,(1877-1855), Scientific Ppers, I. (Cambridge University Press, 1989, London), 272-347.

Little, C.N.（生没年不詳）
[1] Alternate ± knots of order 11, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 36 (1890), 253-255.
[2] Non-alternate ± knots, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 39 (1900),771-778.

Brunn, H（生没年不詳）
[1] Topologische Betrachtungen, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 37 (1892 106-116.

福沢諭吉 (1835-1901)

Jordan, Camille (1838-1922)
[1] Cours d'analyse, 第２版。「Jordan の曲線定理」(1893)

Lie, Marius Sophus (1842-99)
連続群（Lie 変換群芽）

Darboux, Jean Gaston (1842-1917)
動座標系の方法

Clifford, William Kingdon (1845-79)
[1] On the canonical form and dessection of a Riemann's surface, Proc. London Math. Soc., 8 (1877),292-304.

Cantor, Georg (1845-1918)
[1] Über ein Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, Crelles J., 77 (1874), 258-262.
[2] Ein Beiträge zur Mannigfaltigkeit, Crelles J., 84 (1878), 242-258.
[3] Über unendliche lineare Punktmenge, Math. Ann., (1879), (1880), (1883), (1884). 「総計１０７ページ...」< 志賀浩二 "集合"、数学のたのしみ、創刊号. (1997).

Klein, Felix (1849-1925)

Schoenflies, Arthur Moritz (1853-1928)
[0] (1906)「Schoenflies の定理」の証明。後に Brouwer により誤りが訂正された。(1910) < 数学辞典９４－G
[1] Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II, Jahresb. der D.M.V. Ergänz. II. Leipzig (1908).
[2] Bemerkungen zu dem vorstehenden Aufsatz des Herrn L.E.J.Brouwer, Math. Ann., 68 (1910), 435-444.

Poincaré, Henri (1854-1912)

[1] Analysis situs, Journal de l'Ec. Polyt. (2) 1 (1895), 1-123.
[2] Complément à l'analysis situs, Palermo Rendic., 13 (1899), 285-343.
[3] Deuxième complément à l'analysis situs, Proc London M.S., 32 (1900),277-308.
[4] Sur certaines surfaces algébriques. Troisième complément à l'analysis situs, Bull. Soc. M. de F. 30 (1902), 49-70.
[5] Sur les cycles des surfaces algébriques. Quatrième complément à l'analysis situs, Journal de Math., (5) 8 (1902), 169-214.
[6] Cinquième complément à l'analysis situs, Palermo Rendic., 18 (1904), 45-110.
[7] Sur un théoreme de géométrie, Palermo Rendic., 33 (1912), 375-407.

Hilbert, David (1962-1943)
[1] ペアノ曲線の改良版, Math.Ann,,36 (1890), 38 (1891).
数学の諸問題 (1900) パリ国際数学者会議 < 杉浦光夫「ヒルベルト２３の問題」, 日本評論社 (1997).

Castelnuovo, Guido (1865-1952)
[1] (With F.Enriques) Sopra alcune questioni fondamental nella teoria delle superficie algebriche, Annali de Math., Ser., 6 (1901), 165-225. ("blow down"等)

夏目漱石 (1867-1916)
イギリス留学 (1900), 我輩は猫である,「ホトトギス」(1905-06).

Hausdorff, Felix (1868-1942) 明治元年生まれ
[1] Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914. （近傍の公理の導入< G.Hirsch）

Cartan, Élie (1869-1951)
接続の概念
[1] Sur les nombre de Betti des espaces de groupes clos, Comptes R., 187 (1928), 196-198. (一種のドラームコホモロジー)
[2] Sur les invariants intégraux de certaines espaces homogènes clos et les propriétes topologiques de ces espaces, Ann. S. polonaise Math., 8 (1929), 181-225.

Steinitz, Ernst (1871-1928)
[1] Beiträge zur Analysis situs, Sitzungs. der Berliner Math. Gesell., 7 (1908), 29-49. (基本予想 < L.C.Siebenmann, "Topological manifolds", ICM, Nice, 1970.

Enriques, Federigo (1971-1946)
[1] see Castelnuovo.

Heegaard, Poul (1871-1948)
[1] Sur l'Analysis Situs, Bull. Soc. M. de F. 44 (1916), 161-242. Translated from Forstudier til en topologisk Teori for de algebraiske Fladers Sammenhang. Diss. Kopenhagen (1898).

Carathéodory, Constantin (1873-1950)

[1] Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann., 73 (1913), 323-370.
[2] Vorlesungen über reelle Funktionen, 2nd edit. Leipzig, (1927).

Takagi, Teiji 高木貞治 (1875-1960)
[1] A simple example of the continuous function without derivative, Proc. Physico Math. Soc. Japan, Ser.II, 1 (1903), 176-177. (至る所微分できない関数)
類体論 (1920)

Yoneyama Kunizô 米山國蔵 (1877-1968)
[1] The conception of a curve, a surface and a solid, J.Coll. Sci. Tech. Kyoto Imp. Univ., 5 (1912-13), 261-270.
[2] On two systems of Cartesian geometry, Tôhoku Math. J., 4 (1913-14), 161-177.
[3] Theory of continuous set of points. I, Tôhoku Math. J., 12 (1917), 43-158. II, 13 (1918), 3 3-157. III, 18 (1920), 134-186.
[4] On a certain class of geometrical figures, Tôhoku Math. J., 16 (1919), 236-263.

Dehn, Max (1878-1952)
[1] Über die Topologie des drei-dimensionalen Raumes, Math. Ann., 69 (1910), 137-168. (Dehn 手術, Dehn の補題)
[2] Über unendliche diskontinuierliche Gruppen, Math. Ann., 71 (1911), 116-144.
[3] Transformationen der Kurven auf zweiseitigen Flächen, Math. Ann.,71 (1912), 413-421.
[4] Die beiden Kleeblattschlingen, Math. Ann., 75 (1914), 402-413.
[5] (with Heegaard) Analysis Situs, Encykl. der M. W. III 1^1 AB 3, 153-220.

Fréchet, René Maurice (1878-1973)
[1] Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo, 22 (1906), 距離空間の概念 < 数学辞典, K.Menger の本. ユークリッド空間を離れた抽象空間 < G.Hirsh.

Einstein, Albert (1879-1955)
特殊相対性理論 (1905).
一般相対性理論 (1913).

Severi, Francesco (1879-1961)
[1] Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie, Torino Mem., 54 (1903).
[2] Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica, Math. Ann., 62 (1906).
[3] Sul principio della conservazione del numero, Palermo Rendic., 33 (1912), 313-327.
[4] Sui fundamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche,

Veneto Atti, 75 (1916), 1121-1162.

Veblen, Oswald (1980-1960)
[1] Theory of plane curves in non-metrical analysis situs, Trans. Am. Math. Soc., 6 (1905), 83-98.
[2] Decomposition of n-space by a polyhedron, Trans. Am. Mat. Soc., 14 (1913), 65-72. 15 (1914), 506.
[3] An applications of modular equations i n analysis situs, Ann. of Math., (2) 14 (1913), 86-94.
[4] On the deformation of an n-cell, Proc. Nat. Acad. 3 (1917), 654-656.
[5] Analysis Situs, The Cambridge Colloquium, Part II. New York (1922).
[6] The intersection numbers, Trans. Amer. Math. Soc.,25 (1923), 540-550.
[7] Invariance of the Poincaré numbers of a discrete group, Bull. Am. Math. Soc., 30 (1924), 405-406.
[8] See Alexander. (1913)

Tietze, Heinrich (1880-1964)
[1] Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Monatshefte für Math. Phys., 19 (1908), 1-118.
[2] Einige Bemerkungen über das Problem des Kartenfärbens auf einseitigen Flächen, Jahresb. der D.M.V., 19 (1910), 155-159.
[3] Sur les réprésentations continues des surfaces sur elles-mêmes, Comptes Rendus 157 (1913), 509-512.
[4] Über stetige Abbildungen einer Quadratfläche auf selbst, Palermo Rendic., 38 (1914), 247-304.
第1次世界大戦 (1914-18)
[5] Über den Richtungssinn und seine Verallgemeinerung, Jahresb. der D.M.V., 29 (1920), 95-123.
[6] Über Analysis Situs, Hamburger Mat. Einzelschr., 32 (1928), 8.
[7] Zur Topologie berandeter Mannigfaltigkeiten, Monatsh. f. Math. u. Phys., 33 (1923), 15-17.
[8] Beiträge zur allgemeinen Topologie. I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs, Math.Ann., 88 (1923), 290-312. II. Über die Einführung uneigentlicher Elemente, Math. Ann., 91 (1924), 210-224. III. Über die Komponenten offener Mengen, Monatsh. f. Math. u. Phys., 33 (1923), 15-17.
[9] Zur Topologie berandeter Mannigfaltigkeiten, Monatsh. f. Math. u. Phys., 35 (1928), 25-44.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1881-1966)
[1] On continuous vector distributions on surfaces, Amsterdam Proc., 11 (1909), 850-858, 12 (1910), 716-738, 13 (1910), 171-186.
[2] On continuous one-to-one transformations of surfaces into themselves, Amsterdam Proc., 11 (1909), 788-798, 12 (1909), 286-297, 13 (1911), 767-777, 14 (1911), 300-310, 15 (1912), 352-360, 22 (1920), 811-814, 23 (1920), 232-234.
[3] Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Ax-

iomen von Lie, Math. Ann., 67 (1909), 246-267.
[4] Zur Analysis Situs, Math. Ann., 68 (1910), 422-434.
[5] Beweis des Jordanschen Kurvensats, Math. Ann., 69 (1910), 169-175. (不動点定理)
[6] Beweis der Invarianz der Dimensionszahl, Math. Ann., 70 (1911), 161-165.
[7] Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 71 (1912), 97-115.
[8] Beweis der Invarianz des n-dimensionalen G ebiets, Math. Ann., 71 (1912), 305-313.
[9] Beweis des Jordanschen Satzes für n-dimensionalen Raum, Math. Ann., 71 (1912), 314-319.
[10] Über Jordancshen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 71 (1912), 320-327, 598.(不動点定理)
[11] Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebietes, Math. Ann., 72 (1912), 55-56.
[12] Beweis des ebenen Translationssatzes, Math. Ann., 72 (1912), 37-54.
[13] Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve, Math. Ann., 72 (1912), 422-425.
[14] Sur la notion de "class" de transformations d'une multiplicité, Proc. 5th Intern. Math. Congr. 2 (1912), 9-10.
[15] On looping coefficients, Amsterdam Proc., 15 (1912), 113-122.
[16] Über den natürlichen Dimensionsbegriff, J ahrb. für Math., 142 (1913), 146-152.
第1次世界大戦 (1914-18)
[17] Über topologische Involutionen, Amsterdam Proc., 21 (1919), 1143-1145.
[18] Aufzählung der periodischen Transformationen des Torus, Amsterdam Proc., 21 (1919), 1352-1356.
[19] Enumération des surfaces de Riemann régulières de genre un, Comptes Rendus 168 (1919), 677-678.
[20] Enumération des groupes finis de trandformations topologiques du tore, Comptes Rendus, 168 (1919), 845-848.
[21] Sur les points invariants des transformations topologiques des surfaces, Comptes Rendus, 168 (1919), 1042-1044.
[22] Enumération des classes de représentations du plan projectif, Comptes Rendus, 170 (1920), 834-835.
[23] Über die periodischen Transformationen der Kugel, Math. Ann., 80 (1921), 39-41.
[24] Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Klassen von eindeutigen stetigen Transformationen der Ringflächen, MAth. Ann., 82 (1921), 94-96.
[25] Aufzählung der Abbildungsklassen endlichfach zusammenhängender Flächen, Math. Ann., 82 (1921), 280-286.
[26] Über den natürlichen Dimensionsbegriff, Amsterdam Proc.,26 (1923), 795-800.
[27] Zum natülichen Dimensionsbegriff, Math. Zeitsch., 21 (1924), 312-314.
[28] On the n-dimensional simplex-star in R_n, Amsterdam Proc., 27 (1924), 778-780.

[29] Intuitionistischer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes, Amsterdam Proc., 28 (1925), 503-508.
[30] Intuitionistische Einführung des Dimensionsbegriff, Amsterdam Proc., 29 (1926), 855-863.
[31] On transformations of projective spaces, Amsterdam Proc., 29 (1926), 864-865.

Picasso, Pablo Ruiz (1881-1973)
「アヴィニョンの女たち」(1906-07). ブラックとともにキュビズムを創始 (1908).

Noether, Amalie Emmy (1882-1935)
位相幾何学における代数構造の役割の重要性は、1925年頃にEmmy Noetherによって強調され、その影響下で、Heinz Hopfが1928年に(Nachr.Akad.Wiss.Göttingen Math. Phys.K1. 127-193, 1928)を出版する。 < G.Hirsh, 位相幾何学、デュドネ編「数学史 III」、上野健爾他訳、1985. p.707.
環のイデアル論 (1921)
20 世紀初めの知識人は皆、抽象という概念に夢中になった。< S.B.McGrayne,「お母さん、ノーベル賞をもらう」、中村桂子・友子訳 (1996), p.98.
ネーターは、1924 年から 25 年にかけての冬をモスクワの寄宿舎に住み、モスクワ大学や地方の研究所で講義を行った。モスクワ数学協会の会長であったアレクサンドロフは、ネーターの示唆に従って、組み合わせ位相幾何学に群論を取り入れ、代数的位相幾何学を生み出すきっかけを作ったのである。< S.B.McGrayne, p.112.

Sierpiński, Waclaw (1882-1969)
Fundamenta Mathematicae, 1 (1920) < 志賀浩二「無限からの光ぼう」
[1] Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de tout courbe donnee, C.R. Acad. Paris 162 (1916),629-632.
[2] Sur les ensembles connexes et non connexes, Fun. Math., 2 (1921), 81-95.

Moore, Robert Lee (1882-1974)
[1] Report on continuous curves from the viewpoint of analysis situs, Bull. Am. M.S., 29 (1923), 289-302.

Birkhoff, George David (1884-1944)
[1] Proof of Poincaré's geometric theorem, Trans. Am. M.S., 14 (1913), 14-22.
[2] Dynamical systems with two degrees of freedom, Trams. Am. M.S., 18 (1917), 199-300.
[3] An extension of Poincarés last geometric theorem, Acta Mat. 47 (1926), 279-311.
[4] Dynamical Systems, Amer.Math.Soc.Colloquim Publications IX. New York(19
[5] (With Kellogg, O.D.) Invariant points in function space, Trans. Am. M.S., 23 (1922), 96-115.
[6] (With Smith, P.A) Structure analysis of surface transformations, Journal de Math. (9) 7 (1928), 345-379.

Lefschetz, Solomon (1884-1972)
[1] Algebraic surfaces, their cycles and integrals, Ann. of Math., (2) 21 (1920), 225-258. 23 (1922), 33.
[2] On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to Abelian varieties, Trans. Am. Math. S., 22 (1921), 327-482.
[3] Report on curves traced on algebraic surfaces, Bull. Am. M.S., 29 (1923), 242-258.
[4] Continuous transformations of manifolds, Proc. Nat. Acad.,9 (1923), 90-93.
[5] L'analysis situs et géometrie algébrique, Paris, Gauthiers-Villars (1924).
[6] Intersections of complexes on manifolds, Proc. Nat. Acad., 11 (1925), 287-289.
[7] Continuous transformations of manifolds, Proc. Nat. Acad., 11 (1925), 290-292.
[8] Intersections and transformations of complexes and manifolds, Trans. Am. M.S., 28 (1926), 1-29.(Lefschetz の不動点定理)
[9] Transformations of manifolds with a boundary, Proc. Nat. Acad., 12 (1926), 737-739.
[10] Correspomdences between algebraic curves, Ann. of Math.,(2) 28 (1927), 342-354.
[11] Manifolds with a boundary and their transformations, Trans. Am. M.S., 29 (1927), 429-462.
[12] The residual set of a complex on a manifold and related questions, Proc. Nat. Acad., 13 (1927), 614-622, 805-807.
[13] (With National Research Committee on Rational Transformations) Selected topics in algebraic geometry, Chs. 15, 16, 17. Washington (1928).
[14] Closed point-sets on a manifold, Ann. of Math., (2) 29 (1928), 232-254.
[15] Duality relations in toplogy, Proc. Nat. Acad., 15 (1929), 367-369.
[16] Géometrie sur les surfaces et les variétés algébriques, Mémorial des Sc. Math., 40 Paris, Gauthier-Villars, (1929).
[17] Les transformations continues des ensembles fermés et leur points fixes, Conptes Rundes. 190 (1930), 99-100.
[18] On transformations of closed sets, Ann. of Math., (2) 32 (1930), 271-280.

Weyl, Claus Hugo Hermann (1885-1955)
[1] Strenge Begründung der Characteristikentheorie auf zweiseitige Flächen, Jahle der D.M.V. 25 (1916), 265-278.
[2] Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig (1923). Second Edition.
[3] Analysis situs combinatorio, Revista Mat. 5 (1923), 209-218, 241-249, 273-279.

Antoine, Louis August (1888-1971)
[1] Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages, Journal de Math. (8) 4 (1921), 221-325.
[2] Sur les ensembles parfaits partout dicontinus, Comptes Rendus 173 (1921), 284-285.

Alexander, James Waddell (1888-1971)
[1] Sur les cycles des surfaces algébriques et sur une définition topologique de l'invariant de Zeuthen-Segre, Rendic., dei Lincei (2) 23 (1914), 55-62.
[2] A proof of the invariance of certain constants of analysis situs, Trans. Am. Math. Soc., 16 (1915), 148-154.
[3] Normal forms for one- and two-sided surfaces, Ann. of Math. (2) 16 (1915), 158-161.
[4] Note on two three-dimensional manifolds with the same group, Trans. Am. M. S. , 20 (1919), 339-342.
[5] Note on Riemann spaces, Bull. Am. M.S., 26 (1920), 370-372.
[6] On transformations with invariant points, Trans. Am. M.S., 23 (1922), 89-95.
[7] A proof of Jordan's theorem about a simple closed curve, Ann. of Math., (2) 21 (1919), 180-184.
[8] A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem, Trans. Am. M.S.,23 (1922), 333-349.
[9] Invariant points of a surface transformation of a given class, Trans. Am. M.S., 25 (1923), 173-184.
[10] A lemma on a system of knotted curves, Proc. Nat.Acad., 9 (1923), 93-95.
[11] On the deformation of an n-cell, Proc. Nat. Acad.,9 (1923), 406-407.
[12] On the subdivision of three-space by a polyhedron, Proc. Nat. Acad., 10 (1924), 6-8.
[13] An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected, Proc. Nat. Acad.,10 (1924), 8-10.
[14] Remarks on a point set constructed by Antoine, Proc. Nat. Acad., 10 (1924), 10-12.
[15] New topological invariants expressible as tensors, Proc. Nat. Acad., 10 (1924 99-101.
[16] On certain new topological invariants of a manifold, Proc. Nat. Acad., 10 (1924), 101-103.
[17] Topological invariants of a manifold, Proc. Nat. Acad., 10 (1924), 493-494.
([12] から [17] まで同一誌の同一巻!)
[18] On the intersection invariats of a manifold, Proc. Nat. Acad., 11 (1925), 143-146.
[19] Note on a theorem of H.Kneser, Proc. Nat. Acad., 11 (1925),250-251.
[20] Combinatorial analysis situs, I. Trans. Am. M.S., 28 (1926), 301-329. ホモロジー群の不変性.
[21] Topological invariants of knots and links, Trans. Am. M.S., 30 (1928), 275-306.
[22] The combinatorial theory of complexes, Ann. of Math., (2) 31 (1930), 294-322.
[23] (With Veblen) Manifolds of n dimensions, Ann. of Math., (2) 14 (1913), 163-178. (mod 2 の Betti 数を定義して、Poincarë 双対性や Euler-Poincarë の公式を証明している。)
第 1 次世界大戦 (1914-18)

[24] (With Briggs, G.B.) On types of knotted curves, Ann. of Math.,(2) 28 (1927), 562-586.

Wittgenstein, Ludwig (1889-1951)
[1] Logische-philosophische Abhandlung, (1921), English Translation; Tractatus Logico-Philosophicus, (1922), ウィーン学団への影響.

Nielsen, Jacob (1890-1959) (曲面のトポロジーへの双曲幾何の応用)
[1] Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden, Math. Ann., 78 (1918), 385-398.
[2] Über fixpunktfreie topologische Abbildungen gesclossener Flächen, Math. Ann., 81 (1920), 94-96.
[3] Über minimalzahl der Fixpunkte bei den Abbildungstypen der Rinflächen, Math. Ann., 82 (1920-21), 83-93.
[4] Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen, Hamburger Abhand., 3 (1924), 246-260.
[5] Zur Topologie der geschlossenen Flächen, Vorträge 6. skand. Math. Kong., Kopenhagen (1925).
[6] Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, Acta Mat.,; I. 50 (1927), 189-358. II. 53 (1929), 1-76. III. 58 (1932), 87-167.

Vietoris, Leopold (1891-)
[1] Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, Mth. Ann., 97 (1927), 454-472.
[2] Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe, Monatsh. f. Math. u. Phys., 37 (1930), 159-162.

W.Mayer (生没年不詳)
[1] Über abstrakte Topologie, Monatsh. f.M.u. Ph., 36(1929), 1-42, 219-258.

Künneth, Hermann (1892-1975)
[1] Zur topologischen Untersuchung geometrischer Gebilde, Sitzb. der Bayer. Akad. d. Wiss. (1922), 213-220.
[2] Zur Bestimmung der Fundamentalgruppe einer Produktmannigfaltigkeit, Sitzb der Phys.-Med. Soz. in Erlangen 54, 55 (1922-23), 190-196.
[3] Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit, Math. Ann., 90 (1923), 65-85.
[4] Über die Torsionszahlen von Produktmannigfaltigkeiten, Math. Ann., 91 (192 125-134.

Morse, Harold Marston (1892-1977)
[1] Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, Trans. Am. M.S., 22 (1921), 84-100.
[2] A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one, Trans. Am. M.S., 26 (1924), 25-60.

[3] Relations between the critical points of a real analytic function of n independent variables, Trans. Am. M.S., 27 (1925), 345-396.
[4] The analysis and analysis situs of regular n-spreads in $(n+r)$-space, Proc. Nat. Acad., 13 (1927), 813-817.
[5] Singular points of vector fields under general boundary conditions, American J., 51 (1929), 165-18.
[6] The foundations of a theory in the calculus of variations in the large, Trans. Am. M.S., 30 (1928), 213-274.
[7] The critical points of functions and the calculus of variations in the large, Bull. Am. M.S., 35 (1929), 38-54.
[8] The foundations of the calculus of variations in the large in m-space (first paper), Trans. Am. M.S., 31 (19299, 379-404.

Reidemeister, Kurt Werner Friedrich (1893-1971)
[1] Knoten und Gruppen, Hamburger Abhand., 5 (1926), 7-22.
[2] Elementare Begründung der Knotentheorie, Hamburger Abhand., 5 (1926), 24-32.
[3] Über unendliche diskrete Gruppen, Hamburger Abhand., 5 (1926), 33-39.
[4] Fundamentalgruppe und Überlagerungsräume, Göttinger Nachr., (1928), 69-76.
[5] Über Knotengruppen, Hamburger Abhand., 6 (1928), 56-64.
[6] Knoten und Verkettungen, Math. Zeitsc., 27 (1928), 713-729.
[7] Knotentheorie, Ergebn. Math. Grenzgeb., Bd 1, Springer-Verlag, (1932).

Knaster, Bronislaw (1893-1980)
[1] Un continu dont tout sous-continu est indécomposable, Fund. Math., 3 (1922), 247-286. (分解不可能な連続体の例＜数学辞典４４１－D）

Hopf, Heinz (1894-1971)
[1] Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, Math. Ann., 95 (1925), 313-339.
[2] Die Curvatura integra Clifford-Kleinscher Raumformen, Göttinger Nachr., (1925), 131-141.
[3] Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen, Math. Ann., 95 (1925) 340-367.
[4] Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 96 (1926 209-224.
[5] Vectorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 96 (1926), 225-250.
[6] Über Mindestzahlen von Fixpunkten, Math. Zeitsch., 26 (1927), 762-774.
[7] A new proof of the Lefschetz formula on invariant points, Proc. Nat. Acad., 14 (1928), 149-153.
[8] On some properties of one-valued transformations of manifolds, Proc. Nat. Acad., 14 (1928), 206-214.
[9] Ein Verallgemeinerung der Euler-Poncaréschen Formel, Göttinger Nachr.,

(1928), 127-136.
[10] Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann.; I. Neue Darstellung der Theorie des Abbildungsgrades für topologische Mannigfaltigkeiten, 100 (1928), 579-608. II. Klasseninvarianten von Abbildungen, 102 (1 562-623.
[11] Überdie algebraische Anzahl von Fixpunten, Math. Zeitsch. 29 (1929), 493-525.

Radó, Tibor (1895-1965)
[1] Über den Begriff der Riemann'schen Fläche, Acta Litt. ac. Scient., 2 (1925), 101-121.

Alexandroff, Pavel Sergeevich (1896-1982)
[1] Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie, Math. Ann., 94 (1925), 296-308.

Uryson, Pavel Samuilovich (1898-1924)
Uryson の補題，距離化定理，次元の定義 (1921-2) ¡ K.Menger, "Reminiscences", p.9.

v. Kerékjártó, Szerkeszti Béla (1898-1946)
[1] Beweis des Jordanschen Kurvensatzes, Math. Naturw. Ber. d. Ungarischen Akad. d. Wiss., 38 (1919), 194-198.
[2] Über Transformationen des ebenen Kreisringes, Amsterdam Akad. Versl., 28 (1919),.
[3] Über die Brouwerschen Fixpunktsätze, Math. Ann., 80 (1919), 29-32.
[4] Über Transformationen des ebenen Kreisringes, Math. Ann., 80 (1919), 33-35.
[5] Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche, Math. Ann., 80 (1919), 36-38.
[6] Zur Theorie der mehrdeutigen stetigen Abbildungen, Math. Zeitsch., 8 (1920), 310-319.
[7] Zur Gebietsinvarianz, Math. Nat. Ber. d. Ung. Akad. d. Wiss., 39 (1921), 220-221.
[8] Kurvenscharen auf Flächen, Gött. Nachr., (1922), 71-79.
[9] Zur Topologie von Kurven und Kurvenscharen, Math. Nat. Ber. d. Ung. Akad. d. Wiss., 39 (1922), 306-313.
[10] Vorlesungen über Topologie. I. Flächentopologie. Berlin, Springer (1923).
[11] Hauptsatz der Flächentopologie bei unendlich hohem Zusammenhang, Jahres der D.M¿V., 31 (1923), 98-99.
[12] The plane translation theorem of Poincaré, Acta Litt. ac. Scient., 4 (1928), 86-102.
[13] Démonstation élémentaire du théorème de Jordan sur les courbes simples, Szeged Acta 5 (1930), 56-59.

Artin, Emil (1898-1962)
[1] Theorie der Zöpfe, Hamburger Abhand., 4 (1925), 47-72.
[2] Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen in R_4, Abh. MAth. Sem.Univ.Hambur 4 (1925), 174-177.

Kneser, Hellmuth (1898-1973)
[1] Kurvenscharen auf geschlossenen Flächen, Jahresb. der D.M.V., 30 (1921), 83-85.
[2] Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, Math. Ann., 91 (1924), 135-154.
[3] Die Topologie der Mannigfaltigkeiten, Jahresb. der D.M.V., 34 (1925),1-14.
[4] Ein Bemerkung über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, Göttinger Nachr., (1925), 128-130.
[5] Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen, Math. Zeitsc 25 (1926), 362-372.
[6] Glättung von Flächenabbildungen, Math. Ann., 100 (1928), 609-617.
[7] Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen, Math. Ann., 103 (1930), 347-358.

Schreier, Otto (1901-29) ２０世紀生まれ
[1] Über die Gruppen $A^a B^b = 1$, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität, Hamburg, 3 (1923),167-169.

Oka, Kiyoshi 岡 潔 (1901-78)
多変数解析関数論

Baer, Reinhold(1902-79)
[1] Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen, Jour. für Math., 159 (1928), 101-116.

Menger, Karl (1902-)
[1] Dimensionstheorie, Leipzig und Berlin (1928).

Gödel, Kurt (1906-1978)
不完全性定理 (1931)

van Kampen, Egbertos R. (1908-42)
[1] Eine Verallgemeinerung des Alexanderschen Dualitätssatzes, Amsterdam Proc 31 (1928), 899-905.
[2] ZurIsotopie zweidimensionaler Flächen in R_4, Hamburger Abhand.,6 (1928), 216.
[3] Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze, The Hague (1929). (Leyden thesis).

(1998年2月10日)

ハンバーガーの味わい方
–関数等式の歴史から–

佐藤文広（立教大学理学部）

Hamburger の定理は, Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

をその関数等式

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

（と正則性の条件）で特徴づけるものである（[H, '21-i]）[1].

Hamburger の結果は発表するやいなや多大な関心を呼んだ. そのことは, 当代きっての整数論の大物 C. L. Siegel と E. Hecke が Hamburger の定理 ([H, '21-i, Satz 1]) の別証明や証明の簡易化を発表している（[Si, '22], [He, '23]）ことが示している.

とくに Hecke は [He, '23] の冒頭で, Hamburger の結果を「驚くべき定理」と呼んでいる. さらに, Hecke は 1938 年の Michigan と Princeton での講義（[He, '38]）において, [He, '36] に始まる一連の研究の成果（関数等式を満たす Dirichlet 級数の空間と保型形式の空間の対応を述べたいわゆる Hecke 対応, Hecke の作用素, Theta 級数を通じた二次形式論への応用）を解説するにあたり, まず, Riemann ゼータ関数の関数等式と Hamburger の定理から話を始めている.

> 「$\zeta(s)$ の関数等式は, 正則性に関するある仮定の下でそれが $\zeta(s)$ を一意的に決定するがゆえに, きわめて重要である」

として, Hamburger [H, '21-i] による証明のアイディアを簡単に紹介する. ついで,

> 「しかし, その議論は（簡単であるが）満足すべきものではない. 我々は関数等式が存在する真の理由を理解しない; Riemann による s を $\frac{s}{2}$ で置き換える方法[2]は単なる証明, 孤立した結果を導き出す工夫にすぎない. また, 正則性と関数等式という仮定が, 解の一意性を導き出せるほど強力であるという理由も分からない. だが, 実際にはこの定理はずっと一般化でき, そうするとき, より明快な理解ができるのである. 」

[1]たとえば, [H, '21-i] は H (= Hamburger) の '21 (=1921) 年の第 i (=1) 番目の論文を意味する.
[2]Jacobi の Theta 級数の変換公式に基づく, いわゆる Riemann の第 2 証明.

と, 彼の研究の問題意識を述べるのである. Hecke は Hamburger の定理の意味を考えることを大きな動機として, 彼の保型形式の理論に到達したと言ってよいだろう.

かくして今日, 「ハンバーガー」は, Hecke 理論（保型形式・保型表現をそれに付随する L 関数の関数等式で特徴づける）に発展する流れの源として賞味されることとなった. これは「ハンバーガー」のまったく正統的な味わい方で, 由緒正しい立派なレストランの味と言えよう.

ところで私は, この定理の証明者である H. Hamburger 自身は彼の定理をどう理解したのか, いわば, 素朴なドイツ家庭料理としての「ハンバーガー」の元々の味わいはどんなものだったのか, ということが気になる.

こうした疑問を持つ一つの理由として, 文献表に見るように, Hamburger にはゼータ関数の関数等式に関して（少なくとも）4 つの論文（[H, '21-i], [H, '21-ii], [H, '22-i], [H, '22-ii]）があるのだが, 通常, 第 1 論文 [H, '21-i] のみが引用されるにすぎないということがある.

もう一つの理由としては, 私自身, [EK, '82], [Y, '86] という論文に触発されて [Sa, '89] を書いてみたときに, 「ハンバーガー」には Hecke 理論とは異なる（もちろん, まったく関係ないわけではないが）風味の利かせ方があって, しかもあまり宣伝が行き届いていないので, 何度か再発見されているように見えることに気づいた, ということもある. その料理法は, 実は, Hamburger 自身のあまり引用されない論文 [H, '22-ii] に書かれている方法を発展させたもののようなのである.

繰り返すが, やはり Hecke 理論として味わうのが「ハンバーガー」の正しい味わい方であろう. しかし, 人間, ときにはいつもと違う味を求めたい気持ちもあり, Hamburger の仕事とそれから派生した仕事（Hecke 理論からはみ出た部分の）を調べてみた. まだ, 調査が十分でなく歴史叙述としては不完全であり, またおそらく拙速による誤解もあると思われるが, 中間報告としてご理解いただきたい. （特に §5 はもっと詳しい議論をするつもりであったが, 時間的余裕が無かった. また, Theta 変換公式を一般化された Poisson 和公式と見る Weil 表現的な見方 [W, '64] や, その見方を楕円モジュラー形式に拡張した [Su, '80] なども紹介すべきであったが, 省略せざるを得なかった. ）

1 Hamburger の 3 部作

既に述べたように, Hamburger には [H, '21-i] – [H, '22-ii] の 4 つの論文がある. 第 1 論文が Riemann ゼータ関数の関数等式による特徴づけを示した最もよく引用されるもので, 第 2, 第 3 論文はその直接の延長である. したがって, 本節ではこの 3 つの論文をまず一括して紹介し, 次節で第 4 論文を扱おう. また, 証明については第 4 論文の項で簡単に触れる.

Hamburger の第 1 論文 [H, '21-i] の結果は次のようなものである.

Theorem 1.1 ([H, '21-i], Satz 1) $f(s)$ を $\mathbb{C}$ 上の有理型関数で条件

(1) 極は高々有限個,

(2) ある正数 r, γ に対し, $|s| \geq r$ 上で $f(s)$ は正則で $|f(s)| \leq e^{|s|^\gamma}$ が成り立つ,

(3) $\sigma := \Re(s) > 1$ で

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

と収束する *Dirichlet* 級数に展開される,

を満たすものとする. このとき, さらに関数等式

$$f(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2} = f(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{(s-1)/2} \tag{4}$$

が成り立てば, $f(s)$ は *Riemann* ゼータ関数 $\zeta(s)$ の定数倍である.

Hamburger は主定理を上のように定式化した後に, 関数等式 (4) を

$$f(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2} = g(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{(s-1)/2}, \tag{5}$$

ここで $g(s)$ は

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}, \quad \sigma > {}^{\exists}\alpha$$

と展開できる関数である, と弱めても同様の結論

$$f(s) = g(s) = a\zeta(s)$$

が導かれることを注意し, この強い形で $\zeta(s)$ の特徴付けを証明している.

第 2 論文 [H, '21-ii] では, まず, $g(s)$ の Dirichlet 級数展開に関する条件をさらに弱めて, $g(s)$ は

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{l_n^s}, \quad 0 < l_1 < l_2 < \cdots \to \infty, \quad \sigma > {}^{\exists}\alpha \tag{6}$$

という形に展開されることを仮定するならば, $f(s)$, $g(s)$ はどのようなものとなるかを考察している. さて,

$$0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_{k-1} < l_k = 1$$

となる k をとる.[3] このとき, 彼の結果は, 次の通りである.

Theorem 1.2 $f(s)$, $g(s)$ が条件 (1), (2), (3), (5) を満たすならば,

$$l_{k-i} = 1 - l_i, \quad b_{k-i} = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

であり,

$$g(s) = \sum_{i=1}^{k} b_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+l_i)^s}$$

が成り立つ.

---

[3] $l_k = 1$ となる k がないときは, $b_k = 0$ と解釈してもよいし, $f(s)$, $g(s)$ に Riemann ゼータ関数を加えてやってもよい.

これから，とくに $l_n \geq 1$ $(\forall n \geq 0)$ ならば，$g(s)$ を (6) と条件をゆるめても，(1), (2), (3), (5) を満たす $f(s)$, $g(s)$ は Riemann ゼータ関数（の定数倍）に限ることがわかる．一方，l_n に条件をつけなければ，関数等式を満たす Dirichlet 級数のなすベクトル空間は無限次元になってしまうことが分かる．[H, '21-ii] ではまた，

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)f(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)g(1-s)$$

の形の関数等式に対して，定理 1.2 の類似も証明している．

第 3 論文 [H, '22-i] では，Dirichlet の L 関数の関数等式に示唆されて

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)f(s) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)f(1-s)$$

の形の関数等式を考察した．彼は，$k \in \mathbb{N}$, $\lambda = \pm 1$ が必要であることを示した後，この関数等式を満たす Dirichlet 級数の空間の次元の決定，基底の構成を行っている．これは，

$$g(s) = \frac{1}{\lambda}k^{-s+1/2}f(s)$$

とおいてやれば，容易に [H, '21-ii] の結果に帰着するのである．

2　Hamburger の第 4 論文と Siegel, Hecke による別証明

さて，序で述べたように Siegel, Hecke は Hamburger の定理が発表されるや，別証明・簡易化を考案し論文を書いている（[Si, '22], [He, '23]）．だが，Hamburger 自身も，その一部として彼らの議論と実質的に同じ内容を含む結果に，ほぼ同時に到達していた.[4]　それが彼の第 4 論文 [H, '22-ii] である．この論文は，自分の得た結果が何を意味しているのかを反省してみたとき，Hamburuger が到達した地点を示すものだと言ってよかろう．さて，Hamburger は 2 つの Dirichlet 級数

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{{\lambda_n}^s}, \qquad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{{l_n}^s}$$

を考え，これらに

(6) $f(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり，$s=1$ において 1 位の極を持つほか至るところ正則で，$(s-1)f(s)$ は位数有限の整関数である，

(7) $f(s)$, $g(s)$ は $\sigma = \Re(s) > 1$ で絶対収束する，

という仮定を課した．そして，このとき，Riemann 型の関数等式を含む次の主張はみな同値であることを発見したのである．

(a) $\pi^{-s/2}\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)f(s) = \pi^{(s-1)/2}\Gamma\left(\dfrac{1-s}{2}\right)g(1-s)$,　　　　（関数等式）

[4][He, '23] の脚注 2, [H, '22-ii] の脚注 1 参照．

(b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-\pi\lambda_n^2\tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-\pi l_n^2/\tau}$, (Theta relation)

(c) $\displaystyle a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi\lambda_n z} = \frac{b_0}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^2 + l_n^2}$, (部分分数展開)

(d) $\displaystyle\sum_{l_n<y} b_n(y - l_n) = \frac{a_0 y^2 - b_0 y}{2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2}(\cos 2\pi\lambda_n y - 1)$, (Riesz 和)

(e) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Phi(i\lambda_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi l_n i y}\Phi(iy)\,dy.$ (Poisson 型和公式)

ここで, $a_{-n} = a_n$, $b_{-n} = b_n$, $a_0 = -f(0)/2$, $b_0 = \mathrm{Res}_{s=1} f(s)$ とおいた.

この結果に基づくと, Siegel, Hecke の別証明は説明しやすい. ただし, 上では, $f(s)$ は $s = 1$ においてのみ極を持ちその位数は 1 であるという, もともとの Hamburger の定理の仮定より強い条件が課せられているので, [H, '21-i, Satz 1] を回復するには上の結果をもう少し拡張しなくてはいけないのだが, そのことを modulo とすると, Siegel, Hecke による別証明の基本的なアイディアは, 次のように説明できる.

Siegel の証明の場合: 関数等式 (a) から逆 Mellin 変換により (b) を導き, (b) の $\tau = iy$ への制限に $e^{-\pi z^2 y}$ をかけて $(0,\infty)$ 上で積分することにより, (c) を導く. (c) において, $\lambda_n = n$ ならば, 左辺の周期性から右辺において b_n が n によらない定数であることが従う (Riemann ゼータ関数に関する Titchmarsh の有名な教科書 [T, '51] で紹介されているのは, この証明である),

Hecke の証明の場合: (a) の両辺を $s(s+1)\Gamma\left(\frac{1-s}{1}\right)$ で割ってから, 逆 Mellin 変換することで (d) を導く. (d) の左辺を $B(y)$ とおくとき, $B(y+1) - B(y)$ の具体的な表示と $\lambda_n = n$ から得られる (d) の右辺の主要部分の周期性を考え合わせることにより, b_n が n によらない定数であることが従う,[5]

Hamburger ([H, '21-i]) のもともとの証明も (d) を根拠とするものであったが, Hecke の証明は (d) を導く過程が [H, '21-i] に比べて大いに見通しのよいものになっている. [H, '22-ii] では, Siegel と同じ方法で (c) を示し, (c) から (d) を導く簡単な方法を与えられている.

次節以降では, 以上に列挙した (a) - (e) のタイプの等式の間にある相互関連を問題としたその後の研究を紹介していくが, まずは, Dirichlet 級数と Poisson 型の和公式の関係は, Hamburger の定理以前に, 若干異なる文脈からすでに立ち現れてきていたことを説明することから始めよう.

[5]Hecke は, Voronoi, Hardy 等によってこの種の公式が約数関数 $d(n)$ に対して知られており, この方法がさらに多くの例に適用され数論的応用を持つことを指摘して, $\zeta(s)^2$ に加えて, 実 2 次体・虚 2 次体のゼータ関数に関連する Riesz 和の例も与えている.

3 Voronoi 和公式と Dirichlet 級数

今世紀のはじめ Voronoi ([V, '04-i], [V, '04-ii]) は次のような問題を考えた.[6]

"$\tau(n)$ $(n \geq 1)$ を数論的関数とし, $f(x)$ を区間 $a < x < b$ で高々有限個の極値をもつ連続関数とする. このとき, τ のみに依存し f によらない関数 $\alpha(x)$, $\delta(x)$ で

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n\leq b}\tau(n)f(n)+\frac{1}{2}\sum_{n\geq a}^{n<b}\tau(n)f(n)\\&\quad=\int_a^b f(x)\delta(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\int_a^b f(x)\alpha(nx)\,dx\end{aligned}$$

を満たすものを求めよ."

すなわち, 勝手な数論的関数 $\tau(n)$ に対して, それを係数として Poisson 型の和公式が成り立つような積分変換が見つけられるか, ということを問題にしたのである.

Voronoi は [V, '04-i] で約数関数

$$\tau(n)=d(n)=n \text{ の約数の個数}, \quad \zeta(s)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^s}$$

の場合を詳しく研究し,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}d(n)f(n) &= 4\sum_{n=1}^{\infty}d(n)\int_0^{\infty}f(x)\{K_0(4\pi\sqrt{nx})-(\pi/2)Y_0(4\pi\sqrt{nx})\}\,dx\\&\quad+\int_0^{\infty}(\log x+2\gamma)f(x)\,dx+\frac{1}{4}f(0)\end{aligned}$$

を見いだした (γ は Euler の定数, K_0, Y_0 は (modified) Bessel 関数). これが, いわゆる Voronoi 和公式である. また, Voronoi は [V, '04-ii] において, $\tau(n)$ が整係数正定値 2 元 2 次形式 $ax^2+2bxy+cy^2$ を用いて

$$\tau(n)=\sharp\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \;\middle|\; ax^2+2bxy+cy^2=n\right\}$$

と与えられる場合を調べている.

Voronoi 和公式については Hardy, Landau をはじめとして多くの研究が行われたが, 上記のタイプの和公式と $\tau(n)$ に付随する Dirichlet 級数

$$\psi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}$$

の関係を一般的に定式化したのは, Ferrar [F, '34], [F, '36], とくに [F, '36] である.[7]

[6] おそらく, $\sum_{n<x}\tau(n)$ の評価という数論の問題からの興味であろう. また, Voronoi は, これを定理として述べているが, 予想と考えるべきである.

[7] Voronoi [V, '04-i] もその議論の基礎に $\zeta(s)^2$ の関数等式を据えているので, ことのはじめから和公式とゼータ関数の関係というのは表面に現れていた, とは言える.

彼の議論を解析的な厳密さは無視して, 簡単にスケッチしてみよう.

まず, 関数 $f(x)$ が Mellin 変換の形で

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=\sigma} \phi(s)x^{-s}\,ds$$

と与えられているとする. このとき,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)f(n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=\sigma\gg 0}\tau(n)\phi(s)n^{-s}\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=\sigma}\psi(s)\phi(s)\,ds \\
&= (R) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=-b\ll 0}A(s)\psi(1-s)\phi(s)\,ds
\end{aligned}$$

と変形できる. ここで, (R) は積分路を移動したことから出てくる $\psi(s)$ の極における留数からなる項であり, また $A(s)=\psi(s)/\psi(1-s)$ とおいている. このとき, 積分路 $\Re(s)=-b\ll 0$ の上で Dirichlet 級数

$$\psi(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^{1-s}}$$

が絶対収束するとすると, さらに

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=-b}A(s)\psi(1-s)\phi(s)\,ds &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{2\pi i}\int_{\Re(s)=-b}A(s)\phi(s)n^{s-1}\,ds \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left\{-\Theta_n + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=\sigma'\gg 0}A(s)\phi(s)n^{s-1}\,ds\right\}
\end{aligned}$$

となる. ここで, Θ_n は積分路の移動にともなって現れる $A(s)$ の極における留数からなる項である. $\phi(s)$ が $f(x)$ の Mellin 変換であることを利用して, 最後の積分は

$$\begin{aligned}
\int_{\Re(s)=\sigma'}A(s)\phi(s)n^{s-1}\,ds &= \int_{\Re(s)=\sigma'}A(s)n^{s-1}\,ds\int_0^{\infty}f(x)x^{s-1}\,dx \\
&= \int_0^{\infty}f(x)\,dx\int_{\Re(s)=\sigma'}A(s)(nx)^{s-1}\,ds
\end{aligned}$$

と変形できる. そこで,

$$\beta(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=\sigma'}A(s)y^{s-1}\,ds$$

とおけば,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)f(n) - (R) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left\{-\Theta_n + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}f(x)\beta(nx)\,dx\right\}$$

の形の和公式が得られるのである. したがって, Dirichlet 級数の解析的性質がよく分かるならば, この形式的な変形を正当化し, さらに留数項 $(R), \Theta_n$ や積分変換の核関数 $\beta(x)$ を決定して明示的な和公式に到達することもできるであろう. そのためには, とくに $s\mapsto 1-s$ の関数等式が重要であることも分かる. すなわち, 関数等式は

- $A(s) = \psi(s)/\psi(1-s)$ の極の留数から Θ_n の項が現れてくるが, $\psi(1-s)$ の非自明な零点の寄与が無くなる（Dirichlet 級数 $\psi(s)$ の極における留数から来る項は, 問題が少ない. (R) もそうである.）,

- $A(s)$ が指数関数, およびガンマ関数で記述され, $\beta(x)$ を具体的に計算することが可能になる,

などの効果を発揮する.

たとえば, $\tau(n) = 1$ $(\forall n)$, すなわち $\psi(s)$ が Riemann ゼータ関数となる場合には, もともとの Poisson の和公式が得られるのである.[8] この場合, $\beta(y)$ の計算結果は

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)} x^{s-1}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\pi^{s-1/2}\zeta(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} x^{s-1}\,ds = 2\cos 2\pi x$$

となる.

Ferrar は, さらに [He, '36] を引用して, $\psi(s) = \sum \tau(n) n^{-s}$ が Hecke 型の関数等式

$$R(s) = \gamma R(k-s), \quad R(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\psi(s)$$

を満たすとき, 上記の議論を適当に修正して対応する和公式が得られることにも注意している.[9]

この段階で Poisson 型和公式と Dirichlet 級数の関数等式の関係はかなり明瞭になった. すなわち, Dirichlet 級数の解析接続がある程度なされれば, 和公式の存在を主張することはできるが, もう一歩踏み込むと

$\boxed{\text{美しい和公式の存在は関数等式と結びついている}}$

と標語的に言うことができる.

---

[8]Ferrar は Hamburger の仕事 [H, '22-ii] を引用してはいない.

[9]Hejhal [Hej, '79] には $SL(2,\mathbb{Z})$ に関する重さ $4k$ の楕円モヂュラ形式

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}$$

に対応する和公式の具体形

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a(n) f(n) &= \frac{(2\pi)^{4k}}{(4k-1)!} a(0) \int_0^{\infty} f(x) x^{4k-1}\,dx \\ &\quad + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^{2k-1}} \int_0^{\infty} f(x) x^{2k-1} J_{4k-1}(4\pi\sqrt{nx})\,dx\end{aligned}$$

が与えられているが, Ferrar がすでに気がついていることは指摘されていない. だが, Hejhal が [F, '36] を知らなかったとは考えにくい. また, 次章で説明する Bochner の仕事にも触れていない.

4 Hamburger の後継者としての Bochner

Hamburger の論文 [H, '22-ii] をまっこうから取り上げて, 一般化をはかった論文が S. Bochner の [B, '51] である. §2 で列挙した等式の記号を用いて説明すると, (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (e) $\Longrightarrow$ (d) という関係が, ここで一般化されている.

4.1 関数等式とテータ関係式の同値性

Mellin 変換で与えられる 2 つの関数

$$\chi_1(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\Phi(x)\,dx, \quad \chi_2(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\Psi(x)\,dx$$

を考える. この積分は, ともに, $\Re(s) \geq \sigma_0$ で絶対収束しているとする.

定義 1. χ_1, χ_2 が

(1) $\mathbb{C}$ のある有界閉集合 S の外部 D で正則な関数 $\chi(s)$ が存在して,

$$\chi(s) = \begin{cases} \chi_1(s) & \text{if } \Re(s) \gg 0, \\ \chi_2(\delta - s) & \text{if } \Re(s) \ll 0, \end{cases}$$

(2) 任意の有界帯領域 $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ において一様に

$$\lim_{|t|\to\infty} \chi(\sigma + it) = 0$$

の 2 条件を満たすとき, χ_1, χ_2 は関数等式

$$\chi_1(s) = \chi_2(\delta - s)$$

を満たすという.

定義 2. 関数 $P(x)$ は次の条件を満たすとき, **剰余関数** といわれる：

(1) $0 < x < +\infty$ 上の可微分関数で, ある $\gamma > 0$ に対し

$$P(x) = \begin{cases} O(x^{-\gamma}) & \text{as } x \to 0, \\ O(x^{\gamma}) & \text{as } x \to +\infty. \end{cases}$$

(2) 関数 $\chi_r(s)$, $\chi_l(s)$ を

$$\begin{aligned} \chi_r(s) &:= \int_0^1 P(x)x^{s-1}\,dx \quad (\Re(s) > \gamma) \\ \chi_l(s) &:= -\int_1^\infty P(x)x^{s-1}\,dx \quad (\Re(s) < -\gamma) \end{aligned}$$

によって定義すると, これらは定義 1 で考えられていた領域 D 上に同一の関数として解析接続され, 任意の有界帯領域 $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ において一様に

$$\lim_{|t|\to\infty} \chi_r(\sigma + it) = 0$$

を満たす.

Theorem 4.1 $\chi_1(s)$, $\chi_2(s)$ が関数等式 $\chi_1(s) = \chi_2(\delta - s)$ $(=: \chi(s))$ を満たすとき, S を囲む D 内の曲線 C に対して

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \chi(\zeta)x^{-\zeta}\,d\zeta$$

は剰余関数であり, *modular relation (テータ関係式)*

$$\Phi(x) = x^{-\delta}\Psi\left(\frac{1}{x}\right) + P(x)$$

が成り立つ.

Theorem 4.2 逆に, 可微分関数 Φ, Ψ が

(1) *Mellin* 変換 χ_1, χ_2 は $\Re(s) \gg 0$ で絶対収束する,

(2) 定義 2 の意味の剰余関数 $P(x)$ があって, 上の定理の *modular relation* が成り立つ

の 2 条件を満たすならば, 定義 1 の意味で関数等式

$$\chi_1(s) = \chi_2(\delta - s)$$

が成り立つ.

Corollary 4.3 *Dirichlet* 級数

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{{\lambda_n}^s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{{\mu_n}^s},$$

について *Hecke* の関数等式

$$\Gamma(s)\phi(s) = \Gamma(\delta - s)\psi(\delta - s) = \chi(s)$$

と *modular relation*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n x} = x^{-\delta}\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\mu_n/x} + P(x)$$

は同値である. ここで, $P(x)$ は剰余関数である.

これが, Bochner による (a) $\Longleftrightarrow$ (b) の定式化である.

Symmetric theta relation

Dirichlet 級数の極が $s = 0, \delta$ である Hecke の場合のように, S が $\Re(s) = \delta/2$ によって分離されており, 剰余関数を定義する線積分の積分路 C を $\Re(s) > \delta/2$ に含まれる C_+ と $\Re(s) = \delta/2$ に関してそれと対称な ($\Re(s) < \delta/2$ に含まれる) C_- との合併となっているとしよう.

このとき，

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\chi(s)x^{-s}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\chi(s)x^{-s}\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\chi(s)x^{-s}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\chi(\delta-s)x^{s-\delta}\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\chi(s)x^{-s}\,ds - \frac{1}{2\pi i}x^{-\delta}\int_{C_1}\chi(\delta-s)\left(\frac{1}{x}\right)^{-s}\,ds \end{aligned}$$

となる．そこで，

$$M(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\chi(s)x^{-s}\,ds, \quad N(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\chi(\delta-s)x^{-s}\,ds$$

とおくと，剰余関数は

$$P(x) = M(x) - x^{-\delta}N(1/x)$$

の形となり，テータ関係式は

$$\Phi(x) - M(x) = x^{-\delta}\left\{\Psi\left(\frac{1}{x}\right) - N\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

と対称な形を持つことになる．

この両辺が Laplace-Stiltjes 積分として

$$\Phi(x) - M(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dR(\lambda), \quad \Psi(x) - N(x) = \int_0^\infty e^{-\mu x}\,dS(\mu)$$

と表されれば，テータ関係式はさらに

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dR(\lambda) = x^{-\delta}\int_0^\infty e^{-\mu/x}\,dS(\mu) \tag{7}$$

と表現できる．

4.2 テータ関係式と和公式

次に Bochner は，テータ関係式 (7) から，それを特殊な場合として含む和公式を導く．適当な関数族に含まれる $f(\lambda)$ に対して，次の定理が成立する．

Theorem 4.4 関数 $R(\lambda)$ (resp. $S(\mu)$) が任意の帯領域 $0 \le \lambda \le \lambda'$ (resp. $0 \le \mu \le \mu'$) で有界変動だとする．また，ある正定数 $\alpha, \beta > 0$ に対して

$$\int_1^\infty \lambda^{-\alpha}\,|dR(\lambda)| < \infty, \quad \int_1^\infty \mu^{-\beta}\,|dS(\mu)| < \infty,$$

だとする．このとき，和公式

$$\int_0^\infty f(\lambda x)\,dR(\lambda) = x^{-\delta}\int_0^\infty g\left(\frac{\mu}{x}\right)\,dS(\mu)$$

が成り立つ．ここで，$0 \le \lambda < \infty$ 上の関数 $f(\lambda)$ に対して $g(\mu)$ は *Hankel* 変換

$$g(\mu) = \mu^{-\frac{1}{2}(\delta-1)}\int_0^\infty J_{\delta-1}(2(\mu\lambda)^{1/2})\lambda^{\frac{1}{2}(\delta-1)}f(\lambda)\,d\lambda$$

で与えられる．（少なくとも *formal* には）この変換は *self-inverse* である．

もちろん, Bochner は上の和公式を成り立たせるような関数族を具体的に与えているが, その条件は省略する.

指数関数は Hankel 変換に関して不変である, すなわち, 次の公式が成り立つことに注意しよう：

$$e^{-\lambda} = \lambda^{-\frac{1}{2}(\delta-1)} \int_0^\infty J_{\delta-1}(2(\lambda\mu)^{1/2})\mu^{\frac{1}{2}(\delta-1)} e^{-\mu}\, d\mu.$$

したがって, テータ関係式 (7) は和公式の特別な場合となる.

さらに, この場合には Riesz 和型の公式（§2 の (d) の類似）は

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \int_0^x (x-\lambda)^\gamma\, dR(\lambda) = \int_0^\infty \left(\frac{x}{\mu}\right)^{(\delta+\gamma)/2} J_{\delta+\gamma}(2(x\mu)^{1/2})\, dS(\mu).$$

という形を取り, その成立条件も明確にしている.

この公式の $\gamma = 1$ の場合が Hamburger や Hecke による Riemann ゼータ関数の特徴づけの証明の基礎となった等式に相当するものであり, 別種のゼータ関数の一意性への応用もあるだろうと Bochner は注釈をつけている. だが、次に紹介するように、Bochner は実際には Siegel の証明の一般化という方向で, ゼータ関数の関数等式による特徴付けを進めたのである。

4.3 関数等式による ゼータ関数の特徴付け（Siegel の証明の一般化）

[BC, '56], [CM, '57] は, 関数等式

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\phi(s) = \pi^{-(\delta-s)/2}\Gamma\left(\frac{\delta-s}{2}\right)\psi(\delta-s), \quad (\delta\in\mathbb{R})$$

の一般 Dirichlet 級数解

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n\lambda_n^{-s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^\infty b_n\mu_n^{-s},$$

を, Siegel [Si, '22] の方法を一般化して（すなわち, §2 (c) 型の等式に基づく方法で）, 研究した.

Bochner [B, '58] は, さらに進んで,

$$(2P\pi)^{-s/2}\Delta_1(s)\phi(s) = (2P\pi)^{s/2}\Delta_2(-s)\psi(-s)$$

の形の関数等式を問題にした. ここで, Gamma 因子は

$$\Delta_1(s) = \prod_{f=1}^G \Gamma(p_f s + c_f), \quad \Delta_2(s) = \prod_{g=G+1}^H \Gamma(p_g s + c_g),$$

の形とする. ただし,

$$p_1,\dots,p_H > 0, \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_H = 1$$

である. また, P は

$$P = p_1^{p_1} p_2^{p_2} \cdots p_h^{p_h}$$

の形とする.

注意： 一般 Dirichlet 級数の Gamma 因子付き関数等式は上の形に標準化できる.

さて, 一般 Dirichlet 級数 $\phi(s)$, $\psi(s)$ が上の関数等式を満たすというのは, 定義 1 と同じように定義する. このとき, Bochner [B, '58] の結果は次のようにまとめられる：

- $p_1 + \cdots + p_G \neq p_{G+1} + \cdots + p_H$ ならば関数等式に解はない.
- $p_1 + \cdots + p_G = p_{G+1} + \cdots + p_H$ ならば, 関数等式の解に対して部分分数分解公式 (§2 の (c) 式) の一般化が成り立つ. すなわち, $r \gg 0$ に対して

  $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n {\mu_n}^r e^{-2\pi\mu_n z} = K_r(z) + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{{\lambda_n}^r} \Phi_r\left(\frac{z}{\lambda_n}\right) \tag{8}$$

  が成り立つ.[10] ここで, $K_r(z)$ は剰余関数であり, $\log z$ のリーマン面上に解析接続できる. $\Phi_r(z)$ は Gamma 因子のみに依存する右半平面で正則な関数.
- 上の一般化された部分分数分解公式 (8) において $x = 0$ での特異性を調べることから, 次のようなことが導かれる.

  (1) $\phi(s)$, $\psi(s)$ の少なくとも一方が有限 Dirichlet 級数ならば, 関数等式を満たすことはない.

  (2) ある $\epsilon > 0$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{2\pi\mu_n\epsilon} < \infty$ となれば, 関数等式を満たすことはない.

  (3) $\{\mu_n\}$ が Polya 密度 0 を持つならば,[11] 関数等式は満たさない.

  (4) $\{\mu_n\}$ が Polya 密度 1 を持つとき,

  $$k = \min\{n \mid \lambda_{n+1} > 1\}$$

  とおくと, 関数等式は高々 k 個の一次独立な解しか持たない.

  (5) $\mu_{n+1} - \mu_n = 1$ $(n \gg 1)$, かつ $\sup_n(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 1$ または $\sup_n(\lambda_{n+2} - \lambda_n) > 1$ ならば, 関数等式の解は $\zeta(s)$ と Dirichlet の L 関数を用いて explicit に決定できる.

---

[10] §2 の (c) 式を z について r 階微分したものに相当. 一般には, Dirichlet 級数の収束や剰余関数についてより強い仮定を課さなければ, (c) 式の直接の拡張は得られない. Hecke 型の関数等式の場合は [Wal, '22] がこのような等式を導いているそうである.

[11] $\{\mu_n\}$ が Polya 密度 δ_μ を持つ $\Longleftrightarrow$ $\inf_n(\mu_{n+1} - \mu_n) > 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mu_n} = \delta_\mu$.

4.4 Bochner と Hecke の対比

この論説では Hecke に端を発する研究は取り扱わないのだが, Bochner と対比したときの Hecke の研究の特徴をここで見ておくことは意義があると思われる.

第 1 に, これまでの議論（たとえば, Hamburger の第 2 論文, 第 3 論文など）で見てきたように, ゼータ関数の関数等式による特徴付けというのは, Dirichlet 級数の形をある程度制限することによって始めて可能になるということに注意しよう（p. 4 参照）. Hecke の場合には, $\lambda_n = n$ の形の Dirichlet 級数に限る, いいかえれば数論的なものに興味を集中することによって, 関数等式による良い特徴付けを得ているのである. この点は, Bochner と Hecke の重要な違いである.[12] Hecke の研究の数論的性格とは対照的に, Bochner の研究は Hamburger が提起した主題を, 解析の問題と見てとことんつきつめたものと言えよう.

第 2 に Hecke においては, 平行移動と反転の生成する群（モヂュラー群）の導入が内容をきわめて豊かなものとしている（Hecke 作用素, 表現論との関係など）. 一般 Dirichlet 級数に対応するテータ級数の類似物は, もちろん平行移動不変性は持たないから, この部分も数論性が効いている.

第 3 に Bochner の multiple Gamma factor を持つ関数等式は具体例を構成しようとすれば多変数の保型形式を考えるところであるが, Bochner の考察はある意味で 1 変数化したところで物事を見ているので, 多変数保型形式のような方向へは発展できない. 袋小路に入ってしまった感がある. Bochner の研究と前後して始められた代数群論や表現論の発展により保型形式の研究がリニューアルされてくる中で, Bochner の研究は興味深いのではあるが忘れられていったようである. (Serre に示唆された Vigneras の研究 [Vi, '77] は, 数少ない例外の一つである.)

5 ゼータ関数の関数等式と Poisson 型和公式

§3 において, Ferrar の仕事に基づいて Poisson 型の和公式の存在とゼータ関数の関数等式の関係を説明した. この節では次の発展として, テータ級数の Mellin 変換として得られるゼータ関数の積分表示を利用して, 局所関数等式を媒介にして Poisson 型和公式とゼータ関数の関数等式を結び付ける idea を説明する. この idea は, T. Kubota [Ku, '74], L. Ehrenpreis and T. Kawai [EK, '82] などに由来する.[13] それを図式化すると, 次のようになる.

$$\begin{tikzcd} \text{和公式} \arrow[rr, "\text{特殊化}"] \arrow[dr, "\text{Mellin 変換 + 局所関数等式}"'] & & \text{テータ関係式} \arrow[dl, "\text{Mellin 変換}"] \\ & \text{関数等式} & \end{tikzcd}$$

要点は, Riemann ゼータ関数の Riemann による第 2 証明に含まれる議論を次のように一般化することである. 適当な関数族に含まれる $f(x)$ に対し, ある積分変換 $f \mapsto \hat{f}$ が定

[12][H, '22-ii] の冒頭部分でも Riemann ゼータ関数の特徴づけにとって, 数論的条件が本質的であることが述べられている.

[13]もっと遡れるのではないかという気もするが, よく分からない.

義されて Poisson 型和公式

(9) $$\sum_n a_n f(tn) = t^{-\delta} \sum_n b_n \hat{f}(t^{-1}n)$$

が成り立っているとしよう.

$$Z(\{a_n\}, f; s) = \int_0^\infty t^{s-1} \sum_n a_n f(tn)\, dt, \quad \zeta(\{a_n\}, s) = \sum_n \frac{a_n}{n^s}, \quad \Phi(f; s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t)\, dt$$

とおく. これらの積分は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束するとする. ここで, 項別積分が正当化されるとすれば,

$$Z(\{a_n\}, f; s) = \zeta(\{a_n\}, s)\Phi(f; s), \quad Z(\{b_n\}, \hat{f}; s) = \zeta(\{b_n\}, s)\Phi(\hat{f}; s),$$

という Dirichlet 級数 $\zeta(\{a_n\}, s)$, $\zeta(\{b_n\}, s)$ の積分表示が得られる. Riemann ゼータ関数の場合に倣って, $Z(\{a_n\}, f; s)$, $Z(\{b_n\}, \hat{f}; s)$ の積分範囲 $(0, \infty)$ を $(0, 1)$ と $(1, \infty)$ とに分割して, $(0, 1)$ に対応する部分に和公式 (9) を適用すれば, $Z(\{a_n\}, f; s)$, $Z(\{b_n\}, \hat{f}; s)$ が $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続されて, 関数等式

(10) $$Z(\{a_n\}, f; s) = Z(\{b_n\}, \hat{f}; \delta - s)$$

が得られる. ここで, $f = f_0$ を上手に選ぶと, $\Phi(f_0; s)$, $\Phi(\hat{f}_0; s)$ が明示的に計算され, 特に

$$\gamma(s) = \Phi(f_0; s)/\Phi(\hat{f}_0; \delta - s)$$

が Gamma 関数 $\Gamma(s)$ や指数関数などを用いて書き表されたとする. 関数等式 (10) を $f = f_0$ に適用すれば, 直ちに,

(11) $$\zeta(\{b_n\}; \delta - s) = \gamma(s)\zeta(\{a_n\}, s)$$

が出てくる. (10) の $f = f_0$ という特殊ケースから得られた (11) を (10) に戻してやれば, 一般の f に対して $\Phi(f; s)$ の関数等式

(12) $$\Phi(f; s) = \gamma(s)\Phi(\hat{f}, \delta - s)$$

が得られる. これは, 無限素点における局所関数等式というべきものである.

このようにして, Poisson 型和公式の存在から (10) を介して, ゼータ関数の関数等式 (11), 局所関数等式 (12) が得られる. この考察を逆転させると, ゼータ関数の関数等式 (11), 局所関数等式 (12) が前もって得られていれば, (10) が導かれ, この等式の逆 Mellin 変換として Poisson 型和公式を証明できると考えられる.

言い換えると, ある積分変換に対して局所関数等式が存在すれば, その局所関数等式から定まる Gamma 因子に対して関数等式を満たすゼータ関数が存在することと, その積分変換について Poisson 型和公式が成り立つこととが同等である, という見通しが得られる.

以下, この考え方を具体的に実行した研究を列挙する. この辺りはもう少し詳しく述べたいが, 余裕がないので, 簡略な説明に止めざるを得ない.

(1) 久保田富雄氏は 60 年代から 70 年代の前半にかけて, 高次冪剰余の相互法則と結びついたテータ級数の類似物を Eisenstein 級数の留数として構成し, さらに Weil 表現の理論の一般化を行った. その過程で ([Ku, '74]), 古典的なテータ級数の変換公式 (テータ関係式) の場合の Poisson の和公式に相当する和公式を高次のテータ級数に一般化しているが, その証明に上記のアイディアが用いられている. すなわち, 高次テータ級数の変換公式からゼータ関数 (の族) の関数等式を導き, Bessel 関数で表される関数

$$k(z) = n\pi^2 \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1} |z| \left(\left|J_{-1/n}(2\pi z^{n/2})\right|^2 - \left|J_{1/n}(2\pi z^{n/2})\right|^2\right)$$

を用いて定まる積分変換に対する局所関数等式と組み合わせて, Poisson 型和公式を証明している.

(2) Poisson の和公式は, 超関数の言葉を用いると

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n) \text{ の Fourier 変換} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(y-m)$$

と表現できる.[14] Ehrenpreis and Kawai [EK, '82] では, $\mathbb{Z}$ に台を持つ超関数であり, その Fourier 変換もまた $\mathbb{Z}$ に台を持つようなものは, Poisson の和公式に多項式係数の線形微分作用素を働かせて得られるものに限ることを証明し, この事実に基づいて Hamburger の定理の別証明を与えた. このとき, ゼータ関数の関数等式から Poisson 型の和公式を前記のアイディアにもとづいて導いている. [EK, '82] では, さらに, 虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のゼータ関数にこの議論を拡張している.

(3) [EK, '82] の結果は, Yoshimoto [Y, '86] により, 一般の代数体の場合に拡張された. また, [Sa, '89] は, 正定値二次形式の Epstein ゼータ関数に対する Hamburger 型の特徴付け定理を同様の方法で示した. これらの論文では, 問題となっている積分変換は Fourier 変換であり, Fourier 変換に対する和公式は本質的に Poisson の和公式しかないことが, ゼータ関数の特徴付けのポイントになっている.

注意: (1) 以上の研究では, ゼータ関数の関数等式から多次元ベクトル空間内の格子上の和に関する Poisson 型和公式が導かれている. この場合, 1 変数のゼータ関数の関数等式を 1 つ用いただけでは, 高次元格子上の和公式は得られず, (保型形式や表現付きの) ゼータ関数の族を考察する必要がある.

(2) ここで説明した局所関数等式を媒介にしてゼータ関数の関数等式と和公式を結びつける方法は, 概均質ベクトル空間の場合に特にうまく機能する. このとき, (1) で触れた保型形式付きゼータ関数は, [Sa, '94], [Sa, '96] などで一般的に研究されている.

[14] このような観点から, ゼータ関数と Poisson の和公式の関連を調べた研究に, Kahane and Mandelbrojt の [KM, '58] がある.

参考文献

[V, '04-i] G. Voronoi, Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **21**(1904), 207–267.

[V, '04-ii] G. Voronoi, Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles $\sum f(pm^2 + 2qmn + rn^2)$, où $pm^2 + 2qmn + rn^2$ est une forme positive à coefficients entiers, *Verh. Int. Math. Kongr. Heidelberg* (1904), 241–245.

[H, '21-i] H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (Erste Mitteilung), *Math. Z.* **10**(1921), 240–254.

[H, '21-ii] H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (Zweite Mitteilung), *Math. Z.* **11**(1921), 224–245.

[H, '22-i] H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (Dritte Mitteilung), Die Funktionalgleichung der L-Reihen, *Math. Z.* **13**(1922), 283–311.

[H, '22-ii] H. Hamburger, Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind, *Math. Ann.* **85**(1922), 129–140.

[Si, '22] C. L. Siegel, Bemerkungen zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichng der Riemannschen Zetafunktion, *Math. Ann.* **86**(1922), 276–279.

[Wal, '22] Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen, Inaugural-Dissertation, Göttingen, 1922.

[He, '23] E. Hecke, Über die Lösungen der Riemannschen Funktionalgleichung, *Math. Z.* **16**(1923), 301–307.

[F, '34] W. L. Ferrar, Summation formulae and their relation to Dirichlet's series, *Compositio Math.* **1**(1934), 344–360.

[He, '36] E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, *Math. Ann.* **112**(1936), 664–669.

[F, '36] W. L. Ferrar, Summation formulae and their relation to Dirichlet's series II, *Compositio Math.* **4**(1936), 394–405.

[He, '38] E. Hecke, Lectures on Dirichlet series, modular functions and quadratic forms (Lectures at Universities of Michigan and Princeton in 1938), Vandenhoeck and Ruprecht, 1983.

[T, '51] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta function, Clarendon Press, 1951.

[B, '51] S. Bochner, Some properties of mudular relations, *Ann. of Math.* **53**(1951), 332–363.

[BC, '56] S. Bochner and K. Chandrasekharan, On Riemann's functional equation, *Ann. of Math.* **63**(1956), 336–360.

[CM, '57] K. Chandrasekharan and S. Mandelbrojt, On Riemann's functional equation, *Ann. of Math.* **66**(1957), 285–296.

[B, '58] S. Bochner, On Riemann's functional equation with multiple Gamma factors, *Ann. of Math.* **67**(1958), 29–41.

[KM, '58] J. P. Kahane and S. Mandelbrojt, Sur l'equation fonctionelle de Riemann et la formule sommatoire de Poisson, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **75**(1958), 57–80.

[W, '64] A. Weil, Sur cetains groupes d'operateurs unitaires, *Acta Math.* **111**(1964), 143–211.

[Ku, '74] T. Kubota, On an analogy to the Poisson summation formula for generalized Fourier transformation, *J. reine angew. Math.* **268/269**(1974), 180–189.

[Vi, '77] M. -F. Vignéras, Facteurs gamma et équations fonctionelles, in "Modular functions of one variable VI", Lect. Notes in Math. **627**(1977), 79–103.

[Hej, '79] D. A. Hejhal, A note on the Voronoi summation formula, *Monatshefte Math.* **87**(1979), 1–14.

[Su, '80] T. Suzuki, Weil type representations and automorphic forms, *Nagoya Math. J.* **77**(1980), 145–166.

[EK, '82] L. Ehrenpreis and T. Kawai, Poisson's summation formula and Hamburger's theorem, *Publ. RIMS, Kyoto Univ* **18**(1982), 413–426.

[Y, '86] A. Yoshimoto, On a generalization of Hamburger's theorem, *Nagoya Math. J.* **98**(1986), 67–76.

[Sa, '89] F. Sato, The Hamburger theorem for the Epstein zeta functions, Algebraic Analysis Vol.II, Academic Press, 1989, 789–807.

[Sa, '94] F. Sato, Zeta functions of prehomogeneous vector spaces with coefficients related to periods of automorphic forms, *Proc. Ind. Acad. (K.G.Ramanathan memorial issue)* **104**(1994), 99–135.

[Sa, '96] F.Sato, Zeta functions with polynomial coefficients associated with prehomogeneous vector spaces, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* 45(1996), 177–211.

不定域イデアルの理論と多変数代数関数論への道
評伝「岡潔」のための数学ノートⅠ
(未定稿)

高瀬正仁

１．第７報の初出テキスト

昭和11年（1936年）に始まる岡潔の連作「多変数解析関数について」の第７報「二、三のアリトメティカ的概念について」の仏文原稿が書かれたのは、先の大戦の終了後三年目にあたる昭和23年（1948年）７月のことと言われている。論文ができあがってまもないころのことであろう、岡潔は「ボロ服に，風呂敷包を肩に振り分けた」姿で故郷紀見村（現在、和歌山県橋本市）を発ち、原稿を手に京都岡崎天王町に住む友人秋月康夫を訪問した。20年後、秋月康夫はこのときの情景を感銘の深い筆致で書き留めている。

敗戦直後の食糧困難に悩んでいる頃だった．ボロ服に，風呂敷包を肩に振り分けた，岡潔君の久し振りの訪問をうけた．第一印象は“彼もずい分と齢をとったものだ．まるで百姓のようだ”ということであった．当時，無職であった同君は，家や田を売り，芋を栽培して糊口を養いつつ，多変数函数論の開拓に励まれてきていたのである．戦中芋畑から，層の概念の芽が，不定域イデアルの形で生み出されたのである．この論文は手記のまま，1948年渡米する湯川君に託されたが，角谷[1]・Weil[2]の手を経てH.Cartan[3]に手渡され，パリで印刷されるにいたったものである．プリンストン高級研究所へ招待されたわが国科学者は，この1948年の湯川・角谷両君が戦後最初であった．そして翌年に，朝永[4]・小平君[5]と続いた．
（「輓近代数学の展望（続）」の「序」より。秋月康夫『輓近代数学の展望』所収。「輓近代数学の展望（続）」は初め、「数理科学」誌に連載された。）

1）角谷静夫（かくたに・しずお）。数学者。角谷静夫は戦前すでにプリンストン高級研究所に滞在したが、1942年（昭和17年）、帰国した。『日本の数学100年史』（昭和59年（1984年）、上下二巻、岩波書店）によれば、再渡米の時期は1947年（昭和22年）である。同書、下巻、195頁参照。

2）アンドレ・ヴェイユ。フランスの数学者。1906- 年。

3）アンリ・カルタン。フランスの数学者。1904- 年。

4）朝永振一郎。物理学者。1906- 年。

5）小平邦彦。数学者。1915-1997年。

秋月康夫は岡潔が大正８年（1919年）９月、第三高等学校に入学したとき以来の親しい友人であった。京都帝国大学で岡潔とともに数学を学び（ただ

し、三高卒業、京大入学が一年遅れたため、京大時代は岡、秋月は同学年というわけではない）、京大の副手、講師を経て昭和４年（1929年）から三高教授を長く勤めたが（昭和４年４月10日就任）、昭和22年（1947年）11月15日付で新制京都大学助教授に就任した。岡潔の訪問を受ける直前、すなわち昭和23年６月２日付で教授に昇進したばかりであった。所属は理学部で、専攻は代数学である。

21年前の大正15年・昭和元年（1926年）、京都帝国大学理学部に入学した湯川秀樹が「微分、積分、微分方程式演習」に出席したとき、この演習を受け持って湯川に大きな感銘を与えたと言われているのは、京大講師二年目を迎えたころの若い日の岡潔であった。また、渡米を直前に控えたころ、湯川は岡潔のもうひとりの親友、「雪博士」こと中谷宇吉郎の訪問を受けている。確かな痕跡が残されているわけではないが、中谷からも、岡潔のために懇切な口添えがなされたであろうと思われる場面である（中谷と湯川もまた親しい友人であった）。

９月１日、湯川はプリンストン高等学術研究所客員教授に就任するためにアメリカに向けて出発し、９月３日、サンフランシスコに到着した。

おりしもプリンストン高等学術研究所には角谷静夫とアンドレ・ヴェイユが滞在中であった。ヴェイユは不定解析研究に代数幾何学を応用するという斬新なアイデアを提出して強力に押し進めたことで名高いが、1935年、まだ二十代だったころ、論文

「コーシーの積分と多変数関数」（数学年報111、1935年、178〜182頁）

を書き、岡潔の研究に深い影響を及ぼした経歴をもつ数学者である。

湯川はおそらく角谷を通じて岡潔の第７報をヴェイユに委託したのであろう。ヴェイユはそれをフランスのアンリ・カルタンのもとに届けた（秋月は「手渡された」と書いているが、ヴェイユが自分でパリにもっていって文字どおり手渡したのか、あるいは郵送したのか等々、さまざまな状況が考えられる。詳細は不明である）。アンリ・カルタンは長い年月に渡って岡潔と同じ多変数解析関数論の研究に携わっていた数学者であり、第１報「有理関数に関して凸状の領域」（1936年）第２報「正則領域」（1937年）が公表されたころからすでに、岡潔の研究の真価を理解した人である。この当時、フランス数学会の会長であった。後年、岡潔もまたアンリ・カルタンを懐かしく回想し、

この数学者は、多変数解析関数の、当時まだまったく開拓されていなかった分野を、私と手を携えて開拓していた人であって、いわば三十年来の同僚である。

（岡潔『紫の火花』所収「春の水音」より。同書314～315頁参照。）

という言葉を遺している。

第７報がフランス数学会雑誌に受理された日付は「1948年10月15日」と記録された。この論文は書き上げられた直後に湯川秀樹の手を経てアメリカに持ち込まれたが、この幸いな出来事も決して偶然とは思われない。確証はないが、これはおそらく秋月康夫や中谷宇吉郎などの企画であり、友人や後輩の支援に支えられながら、湯川の渡米に間に合うよう執筆が急がれたと見るのが妥当であろう。

世界大戦終了直後の荒廃した世相を背景にして、いくつもの美しい愛情（師弟愛、友情、学問を通じて成立した心の通い合い）に囲まれながら、日本の山村で書かれた一篇の論文が世に出ようとする情景は、半世紀後の今日のぼくらの目にも真にめざましい。ここまでは事態は順調に推移したと見てよいのではないかと思う。だが、実際に公表されるまでにはなお日にちを要し、翌翌年、すなわち1950年に刊行されたフランス数学会雑誌78を待たなければならなかった。この雑誌の巻頭論文が、岡潔の連作「多変数解析関数について」の第７報、すなわち

「多変数解析関数について　VII. 二、三のアリトメティカ的概念について」

（フランス数学会雑誌78、1950年、1～27頁）

の初出テキストである（末尾に、「このマニュスクリプトは1948年10月15日に受理された」という記載がある）。

第７報の仏文標題は

“Sur quelques notions arithmétiques”

となっている。ぼくはこれを機会のあるたびに「二、三のアリトメティカ的概念について」と訳出するのを常としてきたが、岡潔の晩年の遺稿『春雨の曲』（未定稿。ひとまず完成した第七稿と未完の第八稿が各々50部づつ刊行された）を見ると、「三、四の算術的概念について」（第七稿、318頁参照）という日本語標題が与えられている。「三、四」というのはやや珍しい言い方だが、「二、三」とするよりもよりよく実態を反映しているのはまちがいない。以後、この岡潔自身による日本語表記も適宜使用したいと思う。

2．第７報の速報「多変数解析関数ノート」

第７報がフランス数学会雑誌に受理されてから公表に至るまでには、少なくとも一年以上、足掛け二年という歳月が流れている。受理された年の翌年、すなわち昭和24年（1949年）10月25日、岡潔は京都大学で開催された日本数学会で特別講演を行なった。講演題目は

「n個の複素変数の解析関数のイデアルについて」

というものであった。わりあいに高い関心を引いたようで、学会終了後、「解析関数のイデアル」、すなわち岡潔が創案した不定域イデアルの理論をテーマにして連続講演が企画されたほどである（ただし、トラブルが起こって、頓挫したと伝えられている）。

続いて12月19日には、第７報の速報

「多変数解析関数ノート」

が「工大数学セミナー速報」（東京工業大学編集兼発行）に受理された。末尾に「第一ノート終わり」とあり、「1949年12月１日」という日付が附されている。工大数学セミナー速報は速報集だけあって処置も迅速で、早くも

第一巻第五、六号、15〜18頁。（工大数学セミナー速報。昭和24年９月30日。第一巻第五、第六号（合併号）。昭和24年12月31日発行）、15〜18頁。受理されたのは12月19日。

に掲載された。また、この速報を「第一ノート」と見て、これに続くべきノート、すなわち「第二ノート」を予告する言葉も具体的に語られているが、実際に世に現われたのは「第一ノート」のみであった。第二ノートでは、不定域イデアルの局所（有限）擬基底が存在するための必要十分条件の適切な形状について語られる予定であると言われている（工大数学セミナー速報、第一巻第五、六号、18頁参照）。第二ノートは書かれなかったが、第一ノートで言及された必要十分条件は昭和26年の第８報「基本的な補助的命題」（日本数学会雑誌３、204〜214頁および259〜278頁）、第IV章「補遺」において与えられた。

第７報の速報「多変数解析関数ノート」は全部で４頁の短篇にすぎないが、不定域イデアルの理論の契機と意義が明記されているという意味において（それに、「数学的発見はいかにして生い立つか」という「ポアンカレの問題」が取り上げられているという意味において）、端倪すべからざる内容が

盛られている。だが、半世紀後の今日、この魅力的な論攷がぼくらの目に触れる機会はきわめてとぼしい。しかもこの間には惜しむべき逸機があった。

昭和36年（1961年）2月25日、この日の日付で、岩波書店から岡潔の数学論文集

“Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables”（多変数解析関数について）

が刊行された。収録されたのは連作「多変数解析関数について」の第1報から第9報までの九論文である。それから22年後（岡潔の没後5年目）の昭和58年（1983年）6月17日、昭和37年（1962年）に書かれた第10報「擬凸状領域を創り出す新しい方法について」を加えて、論文集の増補版が刊行された。翌昭和59年（1984年）、西ドイツの出版社シュプリンガー社から、増補版論文集の英訳書が刊行された。この英訳書には、十篇の論文（Ⅰ～X）のほかに、連作以前の研究のノート

「多価関数の族などに関するノート」（広島大学理科紀要4、93～98頁。昭和9年1月20日受理。昭和9年刊行。フランス文。）

や、第6報の速報

「擬凸状領域について」（昭和16年1月13日受理。帝国学士院記事17、7～10頁。昭和16年刊行。フランス文。）

も英文に訳出されて収録された。訳者はナラシムハンである。巻頭にレンメルトの「緒言」（ドイツ文）、アンリ・カルタンの一文「岡潔作品集について」（フランス文）が置かれ、各論文ごとにカルタンによる解説（フランス文）がついている。加えて岡潔の写真一葉と略歴も附されているというふうであるから、岩波書店の論文集に比して、はるかに完備した形を備えていると言えるのではないかと思う。

おそらくこの英訳書の刊行の時期が、第7報の速報が広く世に紹介されるべき唯一のチャンスだったであろう。しかしなぜかこのノートの英訳は行なわれなかった。理由は不明であり、不可解な、企画者の真意をはかりかねる事態と言わなければならないと思う。

3．初出テキストに対する岡潔の感想

秋月康夫の証言

第7報がフランス数学会雑誌に掲載される日を待ちながら、岡潔は第7報

の概要を伝えるノートを書き、続いて第８報の準備を進めていた（第８報が日本数学会雑誌に受理されたのは昭和26年３月15日である）。ところが「フランス数学会雑誌」第78巻の巻頭を飾った第７報は、岡潔が書いた原稿と同じものではなく、アンリ・カルタンの手になる多くの改変が施されていた。これは岡潔にとって意想外の出来事だったようで、後年、岩波書店から刊行された岡潔の数学論文集には、公表された第７報ではなくて、オリジナルの原稿がそのまま収録されている。岡潔がカルタンによる改変に不満を抱いたことを、明白に物語る事実である。こうして状勢はいくぶん錯綜し、第７報にはふたつのテキスト、すなわち原テキストと初出テキストが存在するという異様な事態が立ち現われたのである。原テキストの末尾には「1948年７月。日本、和歌山県、紀見村において」と記されているが、初出テキストではこれも削除されている。

ぼくらはこの事件に関する岡潔の肉声を聞きたいと思う。秋月康夫は『岡潔先生遺稿集　第一集』に寄せた「序」の中で次のような証言を書き留めている。（岡潔は昭和53年３月１日に亡くなったが、翌昭和54年、岡家に遺された軍用大型トランクの中から原稿、研究メモ、講義録などが大量に発見された。それらの一部分が岡潔の数学上のお弟子さんたちの手で整理され、『岡潔先生遺稿集』第１～７集が編纂された。軍用トランクというのは、日露戦争に従軍した岡潔の父、岡寛治の遺品であろう。）

> 岡君は論文を仕上げ、書き上げた後も、急がずそのまま時間を置いて見直していられるのが常であった。しかし発表には一言一句も忽せにせず、その表現に強い自信をもっていられた。その証拠に次のようなことがあった。戦後、H．カルタンの世話で、フランス誌上に発表した論文において、親切にもカルタンがフランス文に手を入れ、分かりにくい表現の箇所を少し書き換えられたことがあった。それに対して、岡君は感謝どころか、非常に不満で、私に強く憤激をぶちまかれたものであった。
>
> （秋月康夫の序文には日付が入っていないが、『岡潔先生遺稿集　第一集』の刊行は「1980年12月」とされているから、序文も昭和55年に書かれたと推定してよいと思う。）

この証言によれば、カルタンが行なった書き換えを見て、岡潔が大きな不満を感じたことに疑いをはさむ余地はない。解明すべき論点は不満の理由で

ある。秋月康夫の見るところでは、カルタンは岡潔のフランス文のわかりにくいところに少々手を入れただけであり、親切でしたことなのであるから、感謝されこそすれ、激怒されるべき筋合いではないことになる。しかしそれでは岡潔が強い憤懣を顕わにした本当のわけがわからなくなってしまうであろう。

梶原壌二のエッセイ「岡潔先生のお仕事」（岩波講座「基礎数学」月報10。1978年８月）には、昭和40年（1965年）の時点での岡潔の発言が紹介されている。簡単だが興味深い発言であり、層の理論への嫌悪感が表明されているという点において、きわめて貴重な証言と思う。

> 岡は筆者に“faisceau analytique cohérent（解析的連接層）という用語は嫌いであるが、今は我慢できるようになった。いくら抽象化しても、こえらん（cohérentの発音通りであるが、岡を越えないという意味）だよ。・・・”と語った（1965年）。

岡潔の第７報はフランス数学会雑誌78の冒頭に掲載されたが、この巻頭論文にすぐ続いて、一頁の白紙（28頁目）をはさんで、カルタン自身の論文
「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」
（フランス数学会雑誌78、29～64頁）
が掲載されている。末尾に「このマニュスクリプトは1949年９月15日に受理された」という記載が見られるが、岡潔の第７報が受理された日付は「1948年10月15日」であるから、きっかり11箇月後の出来事である。この間、カルタンは岡潔の第７報を研究し、適宜書き直しを行ない、しかも同時に一篇の論文を執筆して、二つの論文を同時に公表したのである。

カルタンの論文のテーマは、岡潔の第７報を層の理論の視点から見て解明することで、第７報の書き換えも同じ視点から行なわれている。このような形で紹介された結果、第７報のテーマである不定域イデアルの理論は層の理論の萌芽として理解されるようになり、有限擬基底をもつ不定域イデアルは、解析的連接層として諒解されるようになった。すなわち、不定域イデアルの理論は、「三十年来の同僚である」カルタンによって高い評価を受け、現代数学の流れに受容されたとき、まさしくその瞬間にすでに歴史的遺産へと変容しなければならない運命に置かれたのである。上記の梶原壌二の証言には、このような趨勢を甘受しようとする岡潔の感慨がよく表われていると思う。

岡潔の言葉（1）不定域イデアル

不定域イデアルと層の理論の関係の考察は岡潔の理論を理解するうえで重要なテーマである。「多変数解析関数について」という標題の講演（この講演が行なわれた日時と場所は不明だが、昭和38～40年ころ、京都大学での講演と推定される。講演記録が残されている）を見ると、岡潔自身によるいっそう立ち入った言及がなされている。しばらく岡潔の言葉を観察したいと思う。

初めに語られるのは、解析関数論にイデアルの理論が導入されるまでの歴史的経緯である。

> イデアルといいますとクンマー[1]に始まります。それからそれをデデキント[2]がアクシオマチック[3]にいいなおしました。それのエレメント[4]を数からポリノーム[5]に拡げたのがヒルベルト[6]、さらにポリノームをアナリチック・ファンクション[7]に変えようと最初にしたのは、後で知ったのですが、リュッケルト[4]です。そしてこの後、これをさらに詳しく見ようとして、1940年にアンリ・カルタンがマトリス・ホロモルフ[9]という論文[10]を書いています。これは前の正則凸状の論文[11]とともに非常に重要な論文です。これだけで後は戦争になって、知らなかったのです。ところで エレメントを アナリチック・ファンクションにしますと、どうなるかといいますと、ポリノームの場合は数の代わりに個々のエレメントを f と書けばよいのですが、アナリチック・ファンクションですと、リーマン[12]がしました通り、この f がどこで正則かという領域 δ を添えて、(f, δ) としなければならない。そのように ペアにして初めて意味をもつんです。だから私は、領域が変わりますから、不定域イデアルとしたんです。

（下線による強調はぼくが行なった。）

1）エルンスト・エトワルト・クンマー。ドイツの数学者。1810-1893年。

2）ユーリウス・ヴィルヘルム・リヒャルト・デデキント。ドイツの数学者。1831-1916年。

3）公理的に（英語）。

4）要素（英語）。

5）多項式（仏語）。

6）ダヴィド・ヒルベルト。ドイツの数学者。1862-1943年。

7）解析関数（英語）。

8）ヴァルター・リュッケルト。ドイツの数学者。リュッケルトの論文は「冪級数イデアルの消去問題」、数学年報107、1933年、259～281頁。ドイツ文。

9）仏語。多複素変数の正則関数を要素とする正方行列のこと。「正則行列」という用語が使えればよいが、これはすでに別の意味で使われている。ほかに適切な訳語が見あたらないが、岡潔は「正則母式」としている。『春雨の曲』第七稿、322頁参照。珍しい訳語だが、おもしろいと思う。

10）「n個の複素変数の正則母式について」。純粋数学と応用数学のための雑誌19、1940年、1～26頁。

11）カルタンとトゥルレンの共著の論文「多複素変数関数の特異性の理論　正則領域と収束領域」。数学年報106、1932年、617～647頁。

12）ゲオルク・フリードリッヒ・ベルンハルト・リーマン。ドイツの数学者。1826-1866年。リーマン面の概念を土台にして一変数解析関数論を建設した。

イデアルの理論は数のイデアル（クンマー、デデキント）に始まり、多項式のイデアル（ヒルベルト）へと移り、さらに解析関数のイデアル（リュッケルト、カルタン）へと変遷した。解析関数のイデアルの場合には、漠然と解析関数の集まりを考えるのは無意味であり、岡潔が言うように（岡潔はそれをリーマンにならったと言っている）、解析関数を考えることのできる場所をつねに念頭に置かなければならない。それが、数のイデアルや多項式のイデアルの場合との本質的な相違点である。

カルタンの論文「n個の複素変数の正則母式について」では、あらかじめある領域Δを固定した上で、Δにおいて正則な解析関数の作るイデアルが考えられている。それ故、カルタンのイデアルは「定域イデアル」と呼ぶのが相応しいであろう。実際、岡潔は第7報の原テキストにおいて、これを「定領域Dの正則イデアル」（論文集『多変数解析関数について』、97頁参照。第2節「不定域イデアル」に見られる言葉。原テキストでは領域を表示するのに文字「D」が使われている）と呼んでいる。

呼称はこれが最善と思われるが、初出テキストでは、「定領域」から「定」が削除されて、単に「領域$\mathfrak{D}$の正則イデアル」と書き改められている（フランス数学会雑誌78、5頁参照。カルタンは文字「$\mathfrak{D}$」を使用した）。これでは、定領域から不定領域に移行しようとした岡潔の思索の流れは途切れてしまい、読者に伝わらないであろう。しかしカルタンがしたことは、あ

らかじめ領域を固定したうえで、その領域においてイデアルを考えるというだけのことであり、別段、それを「定域イデアル」と呼んでいるわけではない。「不定域イデアル」という言葉は岡潔の立場から見れば自然でも、それはカルタンの用語法ではないのである。

カルタンは岡潔とは別の道を選択し、「領域 $\mathfrak{D}$ の正則イデアル」から層の概念へと進んだのであるから、カルタンの目から見るかぎり、定域イデアルという用語はたしかに適切さを欠いているように思う。カルタンは何かしら本質的な理由に基づいて、岡潔が歩んだ道、すなわち不定域イデアルへの道を慎重に拒否したのであろう。「定」の一時の削除も意図的に行なわれ、そのために、岡潔の第7報の用語体系にいくぶん整合性が欠如するという結果を招来したのである。

さて、ある固定された領域 Δ 上の定域イデアルを考えるという段階に留まるのであれば、状勢は多項式イデアルの場合とほぼ同一である。だが、ふたつの異なる領域 Δ' と Δ'' を設定し、しかもそれらは交差するとするならば、Δ' 上の定域イデアル $\mathfrak{I}'$ と Δ'' 上の定域イデアル $\mathfrak{I}''$ の関係をめぐってまったく新しいタイプの問題が発生するであろう。たとえば、カルタンは次のような問題を取り上げている。

イデアル $\mathfrak{I}'$ と $\mathfrak{I}''$ はいずれも有限基底をもつとするとき、これらのふたつのイデアルはいかなる条件のもとで、合併 $\Delta' \cup \Delta''$ において同一の正則基底をもつであろうか。

カルタンは交わり $\Delta = \Delta' \cap \Delta''$ が単連結という前提条件のもとでこの問題を考察し、求められている条件は

イデアル $\mathfrak{I}'$ と $\mathfrak{I}''$ が交わり Δ において同一のイデアルを生成することである。（上記の論文の「定理II」。純粋数学と応用数学のための雑誌19、15頁参照。イデアルを表記するために印刷の都合上、文字「$\mathfrak{I}$」を用いたが、カルタンは別の文字を使っている。）

と答えている。

これに対して岡潔は解析関数 f に、それが存在する場所 δ を添えて、(f, δ) という順序のついた組の集まり (I)（組 (f, δ) が集まり (I) に所属することを、「f は δ に対して $f \in (\mathrm{I})$ となる」というふうに言い表わす）を考察し、それがイデアルとして満たすべき二条件を記述することによって、新しいタイプのイデアルを導入した。「多変数解析関数ノート」によれば、二条件というのは下記のようである。

1° $(f,\delta)\in(\mathrm{I})$ とし、(α,δ') は任意とすると、そのとき $\delta\cap\delta'$ に対して $\alpha f\in(\mathrm{I})$ となる。

2° $(f,\delta)\in(\mathrm{I})$ かつ $(f',\delta')\in(\mathrm{I})$ なら、そのとき $\delta\cap\delta'$ に対して $f+f'\in(\mathrm{I})$ となる。

（東工大セミナー報告１、第５、６号、16頁参照。）

この「多変数解析関数ノート」には、不定域イデアルの概念の導入に先立って、「Ｃヴァイエルシュトラスの解析要素に自由を与え、しかも同時にB.リーマンの解析要素を、もはや物理的直感さえ痕跡をとどめないような一般的な場に延長して、・・・」（東工大セミナー報告１、第５、６号、16頁参照）という魅力的な言葉も書き添えられている（しかし、意味はよくわからない）。また、このノートでは、不定域イデアルという言葉は使われず、単に「正則イデアル」と呼ばれている。これに先立って書かれた原テキストでは、「不確定領域の正則イデアル」、略して「不定域イデアル」、あるいはもっと簡単に「イデアル」と呼ぶと言われている（原テキストの第２節「不定域イデアル」より。論文集『多変数解析関数について』、97頁参照）。この用語法は初出テキストでも変更はない。

講演「多変数解析関数について」に立ち返ると、岡潔自身、不定域イデアルという言葉の妥当性を主張して、こんなふうに語を継いでいる。

これができたちょうどそのころ、戦争後二年[1]くらいですが、湯川君がノーベル賞をもらうので飛行機でアメリカへ行くというとき、この論文[2]をもっていってもらったんです。それだいぶひまがかかって出たんです。ところで、この辺、別にfaisceau（層）とか何とか知らなくてもできます。それにこんなところ、あまり問題もありません。少数だけれど、ぜひ解きたい問題、それを解くと解かんとではたいへん差が出る問題がありますが、それを解いてしまえば一応それでしまいになります。もちろんfaisceau（層）が直接代数的に意味があれば、それは別ですが。また、名前も、その前後関係からいっても、その名前の妥当さからいっても、当然、不定域イデアルというべきです。それはともかく、こんなふうにして、ヴェイユとかカルタンとか、そういった人たちと手をつないで、これらの問題をやったわけです。

（丸括弧内の言葉はぼくが補った。下線による強調もぼくが行なった。）

1）正しくは「三年」。

2）第７報。

これに対して、カルタンは論文「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」の第II節「モジュールの層」の冒頭（第４小節から始まる）で、層の概念を導入する理由を語っている。

岡潔とともに、**モジュールの層**の概念を導入しよう。我々は代数的位相幾何学での「層」という言葉を借用したいと思う。それは、代数的位相幾何学で、J.ルレイ[1)]によってホモロジー論において導入されたものである。我々がここで同じ言葉を使用するのは、ある類似の概念を記述するためである。また、ここでは代数的位相幾何学におけるのと同様に、「局所的に」与えられたものから出発して、「大域的な」諸性質の研究へと移行することが問題になる。層の概念が導入されるのは、そのような理由があるからである。

（フランス数学会雑誌78、33頁参照。ゴシック体の一語「モジュールの層」は、原文ではイタリック体で書かれて強調されている。）

1）ジャン・ルレイ。フランスの数学者。1906- 年。ルレイに関しては、文献として数学週報222、1946年、1366～1368頁が指示されている。1946年という年数は注目に値すると思う。なぜならこれによって、代数的位相幾何学でのルレイによる層の理論の研究は、多変数解析関数論での岡潔による不定域イデアルの研究とほぼ同時期に進行したことが諒解されるからである。

書き出しの一文には脚註が附されていて、層の概念と不定域イデアルの概念は根本的に同一であると明記されている。

岡潔はこの概念[1)]を彼の論文[2)]の第２節において、「不確定領域の正則イデアル」という名前で導入した。我々はここでは異なる用語と異なる表記法を採用するが、この概念の根底にあるものは同一である。

（フランス数学会雑誌78、33頁参照。）

1）「モジュールの層」の概念。

2）岡潔の第７報。

層の概念と不定域イデアルの概念は根本的に同一である、とカルタンは主張しているが、少なくとも論理的な視点から見るかぎり、カルタンの言うことは正しいとぼくも思う（様相を異にするふたつの理論が「論理的に同等」というのは、形式論理上の同値性を保持しつつ、相互に翻案可能であるという意味である）。だが、本質的に相容れない点もまた確かに存在する。ぼくらはその相違点を、多変数解析関数論が展開されるべき場所の概念を規定しようとする局面において、目の当たりにすることができるであろう。

岡潔の言葉（２）数学の客観的形式と主観的内容

昭和28年（1953年）６月30日、岡潔は「数学に於ける主観的内容と客観的形式とについて（草案）」という標題で一文を執筆した。カルタンによる第７報の改稿問題への言及も認められるという意味において、注目に値する手稿である。

初めに「数学とは何か」という問いが問われ、「数学とは数学的自然を研究する学問である」という美しい数学観が表明される。

・・・自然科学者が自然を研究すると同じように、数学者は数学的自然を研究するのです。ではその数学的自然は何処にあるかと云へば、勿論主観的存在です。研究対象が既にそうですから、他は一切そうであって、従って世の人々が数学の論文と呼んでいるものは、その主観的存在の文章の空間への客観的投影に外ならないのであります。所で文章の空間はたとへば「てにをは」の操り方によって随分その次元を高めることも出来ますが、主観的空間の次元はそれと比較を絶して高いのです。それで客観的描写は結局もとのものを彷彿させる以上のことは出来ないのです。それ故、セザンヌの所謂「生命の線」を逸すればそれまでです。

（以上の引用において、丸括弧内の文章は原文の通りである。下線による強調はぼくが行なった。以下の引用においても同様である。）

続いて数学の論文を構成するふたつの要素、すなわち「主観的内容」と「客観的形式」が語られる。

かように数学的論文は「主観的内容」と「客観的形式」との二部分から成り立っていると私は考へます。万人の検討に耐えたり、其の一部分を他の場所に持ち運びしたり出来るのは後者のみであって、前者は原論文に求める外ないのであります。（それで後に出来るだけ原論文や原著書を使ふのがよいと云ふ数学の教育及び研究指導の原理が出て来ます。）

にも拘わらず、前者は非常に重要であると私には思へます。二、三の例を申しますと、時を隔ててすぐれた数学者と語り合ひ其の真精神を受け継ぐことが出来るのは、主として前者によるのです。一般に一つのすぐれた論文の主観的内容が分りますと、これは云はば其の人が分ったのですから、他は大体分ります。これは大体の見当をつけるのに非常に便利です。また真精神を学んで真似をしても少しも真似をしたことにならないのです。時間的に前後を遠望したければ主観的最高峰に登ればよいのです。それを間違へて客観的最高峰に登りますと、芥川氏[1)] の言葉を借りて申しますと、まるで窓の無い室に入ったようで、外の景色は少しも見えません。また登るのに恐ろしく手間が掛ります。数学の応用については、数学を其の客観的形式の面を通して使ふよりも、（真の意味の）数学者をぢかに使ふのが、最も簡単で、最も尖鋭で、しかも適用範囲が比較にならぬ程広いのです。その外こうしてお話しして居ります中にも次々といくらでも思ひ浮んで来て、それが皆非常に重要です。一口に云へば、主観的内容を欠けば生きた数学の論文ではないのです。

・・・・・

1）「芥川氏」は芥川龍之介。

このような長い前置きの後に、岡潔の言葉はようやく第７報の改変問題に及んでいく。

所で、私のそのことについて、ここに実に困った問題が一つあるのです。私1948年にⅦ－Sur quelques notions arithmétiques を書いて仏蘭西へ発表することを頼んだのですが、1950年に数学の雑誌、Bulletin de la Société mathématiques de France (pages 1-27)[1)] に発表せられたものを見ますと、私の原論文と客観的内容は全く同一ですが、どうした訳か、主観的内容の方はもとの面影が残らない程、要所要所を書き換へてしまってあるのです。

これは全く世の習慣に反することであって処置に迷ったのですが、原論

文を発表しなければならないことだけは、上に色々説明しましたことによって明らかと思ひます[2)]。とり分け私の論文中でも始めのⅠとこのⅦとは主観的内容の方の勝ったものでして、かような論文は長い時間の研究の後にでなければ出来ないのが普通かと思ひます。実さい私の場合は共に7年[3)]掛っているのです。

1）フランス数学会雑誌78、1950年、1～27頁。

2）ここで表明されている考えに基づいて、昭和36年（1961年）2月25日に岩波書店から刊行された論文集には、原テキストが収録された。

3）第7報については、札幌で不定域イデアルの研究を始めた昭和17年ころから、第7報のフランス文原稿が執筆された昭和23年までの時期が念頭にあるのであろう。

第1報についてはやや明瞭さを欠くが、イテレーションの研究を離れた多変数解析関数研究に向かう決意を固めた昭和5年秋ころから、第1報が公表された昭和11年までの足掛け7年間を意味するのであろうか。

岡潔の多変数解析関数論研究はフランスに留学中の昭和5年秋、パリ郊外のサン・ジェルマン・アン・レ・に滞在したころに始まると推定される。はじめに読んだのはジュリアの論文「多変数解析関数の族について」（数学輯報47、1926年、53～115頁）であった。この研究は帰国後も続き、昭和9年（1934年）1月20日には、論文「多価関数の族などに関するノート」が広島大学理科紀要に受理されている。これは学位取得論文として企画された論文「解析的に創り出される4次元点集合について」の要約であり、この年の広島大学理科紀要4、93～98頁、に掲載された。これが、多変数解析関数論における岡潔の第一期の研究である。しかしこの研究は中断された。学位論文は150頁ほど書き進めたが、抛棄され、完成しなかった。

岡潔がベンケとトゥルレンの著作を入手したのは1934年暮れと言われている。この書物に手がかりを求めて新たに構想を建て、具体的に研究に着手したのは、新年があけて間もない昭和10年（1935年）正月のことであった（「1月2日」と明記した文献もある）。これが、多変数解析関数論における岡潔の第二期の研究である。

岡潔の回想

多変数函数論を専攻することに決めてから間もない一九三四年だったが、この分野での世界中の文献をあげた目録がドイツで出版された。これで自分の開拓すべき土地の現状が箱庭式に展望できることになったので、翌三五年正月からこれに取り組んだ。（「春宵十話」（六）「発見の鋭い喜び」より。昭和37年4月20日付毎日新聞）

その後、札幌に滞在中、中谷家の応接室で上空移行の原理の発見を経験し（その日付を「９月２日」と明記している文献もある）、それを受けて第１報が書かれ、昭和11年５月１日、広島大学理科紀要に受理された。昭和10年正月から数えると、ここまでに一年四箇月かかっていることになる。

数学の論文は「主観的内容」と「客観的形式」とのふたつの部分から構成され、しかも「主観的内容を欠けば生きた数学の論文ではない」とまで言われている。ところが第７報の初出テキストを原テキストと比べると、客観的内容は全く同一であるにもかかわらず、「主観的内容の方はもとの面影が残らない程、要所要所を書き換へてしまってある」というのであるから、初出テキストはさながら原テキストの亡骸（なきがら）であるかのように見られていることになると思う。秋月康夫は、「岡君は感謝どころか、非常に不満で、私に強く憤激をぶちまかれた」というふうに当時の情景をぼくらに伝えているが、この憤激は皮相な感情的な性格のものではなく、背景には、岡潔の独自の数学観が広がっていたのである。

それと同時に、カルタンにもカルタンの立脚点（それはブルバキの数学観であろう）があったと見るのが至当であろう。カルタンによる書き換えは、秋月康夫が言うように、「分かりにくい表現の箇所を少し書き換えられた」というだけの親切な行為の範疇にとどまる作業なのではなく、この書き換えの場には、ふたつの異質の数学観の相剋がかえってはっきりと露呈しているように思う。後にカルタンは二年間のセミナー（1951～52年度と1952～53年度のカルタン・セミナー）を通じて、岡潔の理論の大がかりな書き換えを遂行し、後の多変数解析関数論の理論的基準を提示した（引き続いて行なわれる研究に出発点を与えた、というほどの意味である）。第７報の書き換えはその先駆（さきがけ）をなす作業である。

今日、数学の世界に受け入れられている岡潔の理論は、岡潔の数学論文集に描かれた世界そのものなのではなく、カルタンの手を経て書き直された理論である（一般に流布しているのは「岡の理論」ではなくて、「岡－カルタンの理論」である。このような言葉にも、この間の事情がよく反映していると思う）。たとえば、岡潔自身の主張にもかかわらず、今日ではもう不定域イデアルという言葉の使用例は見られない。岡潔の他の諸論文と同様に、第７報もまたカルタン・セミナーの立場から理解されるのが普通であり、岡潔

は解析的連接層の理論の建設者と見られているのである。
岡潔の理論はカルタンの手を経て、比類のないほどに高い評価を受けたことはまちがいない。だが、「岡の理論」と「岡－カルタンの理論」は客観的形式は同一であるとしても、主観的内容はやはり異なっているのではないかとぼくは思う。「岡－カルタンの理論」と見るのは論理的には可能だが、それでは「岡の理論」を理解したことにはならない。「岡の理論」には備わっていて、「岡－カルタンの理論」には欠けている何ものかが存在する。岡潔はそのように主張しているとぼくは思う。その「何ものか」の正体の究明こそ、岡潔の理論の解明（これは、「理論形成の契機の解明」という意味である）における根幹をなす作業であり、本稿のふたつの主目標のうちのひとつである（もうひとつの目標は、岡潔の理論の展望を描くことである）。

4．第二期の多変数解析関数論

ベンケ、トゥルレン『多複素変数関数の理論』に見られる三つの問題

さて、「多変数解析関数ノート」は、

序文

Ｉ．分岐点をもたない有限領域

II．正則イデアル

という三部構成になっている。「序文」は六個の小節に分かたれているが、「ポアンカレの問題」や「第二ノート」への言及はひとまず措いて、不定域イデアルに関係のある事柄に限定して観察すると、ぼくらの目を引くのは第一小節の記述である。初めに語られるのは多変数解析関数の研究の動機である。

任意個数の変数の解析関数の場は、アリトメティカ（算術）、代数、解析、幾何および精密科学の場へと拡がっている。それは非常に簡明な、しかしごく基本的な事実である。この事実に伴って現われる新たな諸問題が夢想されるであろう。これが、我々が多変数解析関数の理論の研究を始めたいくつかの理由のうちのひとつである。

我々の論文Ｉ［５］[1]の序文に返ろう。そこには、相互に親密に結ばれているきわめて基本的な一群の問題がある。

本質的に言うならば、これらの問題をその存在理由とともに設定したの

はH.ベンケ[2)]とP.トゥルレン[3)]［2］[4)]である。それらの存在理由のうちのひとつは歴史的である。また、これは完全に具体的なやり方で、正確に言うと、適切な大きさの著作を著すことによって行なわれた。（『多複素変数関数の理論』、1934年。特に54頁、68頁、79頁参照。）

論文Ｉ－VI［５］を通じて、我々は道を知るためのひとつの実験を行なった[5)]。

（工大数学セミナー速報第一巻第五、第六号（合併号）、15頁参照。）

1）文献［５］として指示されているのは、第１報から第６報までの６論文と、第６報の概要「擬凸状領域について」である。

2）ハインリッヒ・ベンケ。ドイツの数学者。1898- 年。

3）ペーター・トゥルレン。ドイツの数学者。1907- 年。

4）『多複素変数関数の理論』。1934年、シュプリンガー社の叢書「数学とその境界領域の成果」の第三巻として刊行された。

ベンケとトゥルレンの所在地はミュンスターで、序文の日付は「1933年10月」。

5）第１報から第６報までの六篇の論文を通じて、二複素変数の空間においてハルトークスの逆問題が解決され、研究が一段落した。当初の研究目標はほぼ思惑通りに達成されたのである。それが、ここでは「道を知るためのひとつの実験」と言われている。新たな歩みを歩み始めようとする気構えが表明されたと見るのが至当であろう。

「論文Ｉ」として指示されている文献は、連作「多変数解析関数について」の第１報、

「多変数解析関数について　Ｉ 有理関数に関して凸状の領域」

（広島大学理科紀要６、245～255頁。昭和11年（1936年）７月30日発行。受理されたのはこの年の５月１日。）

である。この論文の序文を読む前に、ベンケとトゥルレンの著作『多複素変数関数の理論』において岡潔が参照するよう指示している箇所、すなわち54頁、68頁、79頁を観察したいと思う。

「54頁」に見られるのは、多複素変数の空間において、二回連続微分可能な超曲面 $\varphi=0$ で囲まれた領域 $\{\varphi<0\}$ が正則領域であるために、レビの条件 $L(\varphi)\geqq 0$ （$L(\varphi)$ は関数 φ のレビ形式）は必要条件を与えているというレビの定理（定理21の帰結１。同書、54頁参照）と、この条件において等号つき不等号から等号を除去して得られる条件 $L(\varphi)>0$ は、局所的に見れば、

領域$\{\varphi<0\}$が正則領域であるための十分条件を与えているという、もうひとつのレビの定理（定理22。同書、54頁参照）である。そうしてこれらの定理を紹介したうえで、

では、レビの条件$L(\varphi)>0$は大域的に見てもやはり十分であろうか。

という問題が提出されている（やはり54頁に出ている）。これが、後年のいわゆる「レビの問題」の初出形である。ただしこの段階では「レビの問題」という名称が成立しているわけではなく、あるのはただ問題のみにすぎない。レビの定理から一歩を進めて、レビの条件は大域的にもなお十分条件でありうるだろうか、と問う問いの形状には独創性が感じられるように思う。ベンケ、トゥルレンの本では、この問題の重要性を指摘したのはブルメンタールであるとして、次のように言われている。

この問題の重要性はまず初めにブルメンタール[1)]によって洞察され、それ以来、特異性の理論の主要な未解決問題になった。これまでのところ、この問題が解決された様子を目にすることができるのは、若干の個別的な場合[2)]に対してのみにすぎない。

（ベンケ、トウルレン『多複素変数関数の理論』、54頁参照。）

1）オットー・ブルメンタール。ドイツの数学者。1876-1944年。ヒルベルトの影響のもとで多変数解析関数論を研究した。参照するよう指示されている論文は、「多変数解析関数の特異性に関する注意事項」、ウェーバー記念論文集、1912年。

2）以下、ラインハルト領域、円領域、ハルトークスの領域が次々と取り上げられている。

後に岡潔がハルトークスの逆問題を解決したとき（第６報）、問題を解決した当の本人の主張にもかかわらず、その解決の意味合いはもっぱら「レビの問題の解決」という観点から認識されたように思う。ぼくはかつてこれを不思議に思い、長い年月に渡って大きな謎であり続けたが、遠因は問題の初出形それ自体の中にすでに芽生えていたと見るべきであろう。

ハルトークスの逆問題はレビの問題と同じ性格の問題ではあるが、別個の問題であることもまた疑いをはさむ余地はない。岡潔はレビよりもいっそう深く問題を掘り下げて、レビがそうしたように、ハルトークスから出発して

「ハルトークスの逆問題」を提示し、そのうえでその解決に成功したのである。だが、他方、レビが手を染めて、ブルメンタールが重要性を認識したのは「レビの問題」なのであり、ベンケとトウルレンが報告したのはこの一連の経緯なのであった。小さな数学史ではあるが、歴史が形成されている以上、諒解の様式もまた準備されたと見なければならないであろう。岡潔の言う「ハルトークスの逆問題」の解決には、「レビの問題」の解決が内包されている。もっぱらその点に着目したために（すなわち、そのような理解の様式が成立していたために）、ヨーロッパの数学者たちの目には、岡潔の理論は「レビの問題」の解決と映じたのではあるまいか。

これを岡潔の側から観察すれば、ハルトークスの逆問題の提出とその解決という出来事により、新しい数学史が叙述されたと考えらなければならないであろう。だが、この数学史は誕生してすぐに認識されることもなく忘れられ、以来、すでに半世紀という歳月が閲している。数学の世界に定着したのは「レビの問題」のみであり、「ハルトークスの逆問題」という言葉は地を払って、跡形も見られない。このような事態の中に、現代数学の流れとは異質の、小さなひとつの数学史の誕生と消滅の物語のいっさいが凝縮されているように、ぼくには思われる。

さて、ベンケ、トゥルレン『多複素変数関数の理論』の「68頁」に出ているのは、「クザンの問題」である。それに先立って、64頁に見られる「定理32」の内容は、「多複素変数の空間の全域において、または柱状領域においてクザンの第一問題はつねに解ける」というクザンの定理である。続く65頁の「定理33」では、「多複素変数の空間の全域において、または単連結な柱状領域においてクザンの第二問題は解ける」ことが紹介されている。これもクザンの定理である。68頁に移ると「定理34」が出ている。その内容は、「多複素変数の空間の全域において、または単連結な柱状領域において、の問題、すなわち、与えれた有理型関数をふたつの大域的な商表示の問題は解ける」というものである。定理33の証明は定理32（ただし、定理32では、柱状領域に対して単連結という条件が課される）の助けを借りて遂行され、定理34は定理33の帰結である。

このような状勢を受けて、68頁には、

> 定理33、従って定理34は少なくとも単連結な正則領域に移されないかどうかということは完全に未解決である。

という言い方で、ひとつの問題が出ている。すなわち、「単連結な正則領域においてクザンの第二問題は解けるだろうか」という問題である。クザンの第一問題については語られていないが、上述のように、第二問題の解決のためには第一問題の考察が不可欠なのであるから、第一問題もまた同時に問われていると考えなければならない。

最後に、ベンケ、トゥルレン『多複素変数関数の理論』の「79頁」に先立って、一変数関数論のルンゲの定理、すなわち、

> z－平面（zは一個の複素変数を表わす）の単葉で単連結な有限領域 $\mathfrak{B}^{(z)}$ において正則な任意の関数 $f(z)$ は、この領域においていたるところで一様に収束する多項式級数に展開される。

という定理が78頁に記されている。続いて、「この定理は一般に R_{2n}（＝n個の複素変数の空間）の領域には移されない」（78頁）と言明され、その後に、「ルンゲの定理の言明が成立するような R_{2n} 上の領域をルンゲの領域と名づける」（78頁）という定義が記述される。従って、ルンゲ領域というのは、「そこでの正則関数が、その内部の全域において一様収束する多項式級数で表わされるような領域」（79頁）のことである。

このような状勢のもとで、79頁に提示されているのは、

> ルンゲ領域であるための必要十分条件はどのようなものであろうか。

という問いである。これが「展開の問題」である。関数の展開は近似を意味するから、「近似の問題」と呼んでも実体は同じことになる。

こうしてベンケ、トゥルレンの小さな著作には、岡潔が指示する箇所に確かに未解決の三問題が登場する。だが、それらはひとつひとつ別個に記述されているだけであり、相互に関連して、全体として一個の有機体を形成するという認識は見られない。

岡潔の理論の形成過程それ自体が明らかにしたように、クザンの二問題と展開の問題は協力しあって、（レビの問題ではなくて）ハルトークスの逆問題の解決への道を開いている。ベンケ、トゥルレンの本を見る岡潔の目には、当初からそのような特異な情景が映じたのであろう、とぼくは思う。平方剰

余相互法則の中に高次の冪剰余相互法則の萌芽を見たガウス（類体論を導いた）や、ヤコビの逆問題を提出したヤコビ（一変数代数関数論を導いた）のように、数学では、問題の発見がそのまま偉大な数学的創造であるという局面がしばしば現われるように思う。フェルマの大定理やリーマン予想などもこの系列に加えられるであろう。

ハルトークスの逆問題もまた偉大な一例である。そうして現代数学の視点から見れば、その解決を通じて複素解析幾何学が建設されたと言明しなければならず、カルタンによる岡潔の理論の解釈も、そのような視点から理解されなければならないであろう。しかし岡潔は（「主観的内容」がまったく異なっているという理由で）カルタンの解釈を受け入れなかったのであるから、岡潔自身には、何かしら別の理論形成の動機があったと考えなければならない。後期の岡潔（第７報以降というほどの意味である）がめざした究極の理論というものがある、とぼくは思う。それは、複素解析幾何学と似ているが（すなわち「客観的形式」は完全に同一だが）、同時に明快に非でもあるもうひとつの理論、すなわち多変数の代数関数論であろう。

上空移行の原理

初めに第１報「有理関数に関して凸状の領域」の序文を読みたいと思う。短い序文だが、多変数解析関数論における岡潔の構想がよく描かれていると思う。以下の引用文は第１報の序文の全体である。

> 序.　多複素変数の解析関数の理論の近年の進展にもかかわらず、いくつもの重要な事柄が多かれ少なかれあいまいなままに残されている。わけても、ルンゲの定理[1)]やP.クザン[2)]氏の諸定理[3)]が成立する領域の型。F.ハルトークス[4)]氏の凸性[5)]と、H.カルタン氏とP.トゥルレン氏の凸性[6)]との関係。これらの間には親密な関係が存在する。本論文と引き続く諸論文では、これらの問題を論じる予定である。
>
> ところで、これらの問題の困難は、身を置いている空間を適切な次元に高めることにより、しばしば緩和される[7)]様子が私の目には映じている。この論文では、この一般理念をある特別の場合に対して実現に移すことにより、私は（この論文の）標題の領域を、言わばいっそう高い次元の柱状領域に帰着させる原理を示したいと思う。（具体的な形については、第１節参照。）

この原理がひとたび確立されたなら、そのときその原理から、与えられた極に関するP.クザン氏の定理[8]は、この論文の標題の領域においてもそのまま成立するという論証[9]を進めることが可能になる。（正確な形状については、第5節の定理Ｉ参照。）この逆の事柄もまた正しい。実際、私は循環の手順に基づいて、これらの定理を同時に証明するであろう。また、上記の原理の助けを借りて、（この論文の）標題の領域に対して、A.ヴェイユ氏の手で表明されたルンゲの定理がただちに、再度みいだされるであろう。

このような次第であるから、私はこの論文では、有理関数に関して凸状な領域[9]の内側に身を置く。それは同時に、私にとって不可欠な補助的諸命題の研究を、課される制限がよりいっそう少なくてすむ状態で実らせるためでもある。

（広島大学理科紀要６、245～246頁参照。）

１）カール・ダヴィド・トルメ・ルンゲ。ドイツの数学者。1856-1927年。ルンゲの定理については既出。

２）ピエール・クザン。フランスの数学者。生没年不詳。

３）柱状領域においてクザンの第一問題とクザンの第二問題に解決を与える定理。クザンの論文「n個の複素変数の関数について」（数学輯報19、1895年、１～61頁）において表明された。この論文が受理された日付は「1893年10月28日」。

この論文に記されているクザンの所在地はカンとなっている。カンはフランス西部ノルマンディーの中心都市である。

４）フリードリッヒ・ハルトークス。ドイツの数学者。1874-1943年。

５）ハルトークスの連続性定理から抽出される凸性で、疑凸性と呼ばれる。これは岡潔が提出した疑凸性であり、ベンケ、トゥルレンの『多複素変数関数の理論』には出ていない。

６）正則凸性と言われる凸性。

７）上空移行の原理がこうして表明された。高次元の空間に移ることによって、困難を緩和するという着想で、第１報の眼目である。「上空移行の原理」という用語がそのまま使われているわけではないが、すぐ次の段落に「この原理がひとたび確立されたなら、・・・」という言葉が出ていることから見て、簡潔に「上空移行の原理」と呼ぶのが相応しいであろう。

講談社文庫『日本のこころ』（昭和46年刊行）には、

・・・私は「上空移行」と名づけたのですが、いわばヘリコプターで登ったので

す。（同書、28頁参照）

という註記（『日本のこころ』に収録された「春宵十話」に附された註記）が見られる。

8）柱状領域ではクザンの第一問題は解けることを主張する定理。

9）第1報には一箇所だけ議論に難点がある。第4報の末尾に訂正が出された（日本數學輯報17、521頁参照）。第1報の議論を救済するには、「有理関数」を「多項式」に置き換えればよい。したがって第1報の主定理は「多項式凸状領域」において成立することになる。

上空移行の原理は第1報を根底から支える技術上の基本原理だが、ここでは冒頭の数行に着目したいと思う。岡潔は、ルンゲの定理が成立する領域（ルンゲ領域）、クザンの二定理が成立する領域（クザンの第一領域、クザンの第二領域）、ハルトークスの凸性、カルタン、トゥルレンの凸性に次々と言及し、そのうえで「これらの間には親密な関係が存在する」と語っている。岡潔自身が指摘しているように、ルンゲの定理とクザンのふたつの定理に関する問題、すなわち展開の問題とクザンの問題はベンケ、トゥルレンの『多複素変数関数の理論』にも書かれている。しかしそれらは個別に提示されただけであり、親密な相互依存関係で結ばれているという認識はこの書物には見られない。この教科書にはレビの問題も書かれているが、岡潔が語っているのは「レビの凸性」ではなくて、ハルトークスの凸性であることも、真に瞠目に値する。なぜなら、ベンケ、トゥルレンの本にあるのはハルトークスの連続性定理のみであり、しかもそこに内包されている凸性への着眼はなされていないからである。

岡潔の目には、展開の問題とクザンの問題、それにレビの凸性が淵源するいっそう深い場所にある凸性の問題が相互に有機的に繋ぎ合わされて、さながら「一つの山脈」（「春宵十話」（六）「発見の鋭い喜び」の中の言葉。昭和37年4月20日付毎日新聞参照）を作っているように映じたのであろう。この山脈のもっとも高い峯にあるのは（レビの問題ではなくて）ハルトークスの逆問題であり、登攀路の在処（ありか）を具体的に教えてくれる指針こそ、上空移行の原理だったのである。

ハルトークスの逆問題

ハルトークスの逆問題は初め二個の複素変数の空間内の単葉領域において

解決され（第６報）、次に内分岐しない有限多様領域において解決された（第９報）。まず第６報の序文を読もう。

序.　1906年、F.ハルトークスは、正則領域に課されているある非常に奇妙な制限[1]を発見した。この発見により、多変数解析関数論の近年の発展が始まった、と私は思う[2]。

この理論のさまざまな部門の土地で、E.E.レビ[3]、G.ジュリア[4]、W.ザクセル[5]、それに著者[6]によって、これと同じ制限が次々と発見された。我々はこのような様相の制限が課されている領域を、擬凸状[7]と呼びたいと思う。

この種の凸性は局所的な様式での議論を許容する。ところで、1932年、H.カルタンとP.トゥルレンは、正則領域はある意味で大域的に凸状[8]であることを発見した。そうしてこの性質のおかげで、我々はこれまでに正則領域に関するいくつかの大域的な定理を確立してきたのである。

このような次第で我々はいくつかの種類の擬凸状領域を手にしているが、正則領域についてはさておき、それらの擬凸状領域について我々はほとんど何も知らない。そこで我々はF.ハルトークスに立ち返り、逆に、擬凸状領域はどれも正則領域であるのかないのかという問いを問いたいと思う。そうして、もしこれらの二通りのタイプの領域が一致するなら、我々は正則領域の局所的な判定基準を手に入れたことになるであろう。ところで、いろいろな種類の擬凸状領域のうち、G.ジュリアの擬凸状領域は、有限のとき、正則領域であることがH.カルタン、P.トゥルレン、H.ベンケ、それにK.スタイン[9]の手で確かめられた。しかし、この場合以外には、上記の問題は今日に至るまで依然としてほとんど解明されないままにとどまっている。

この論文で、我々はこの問題を取り扱いたいと思う。記述を簡易化するため、２個の複素変数の空間に限定するが、結論は任意個数の複素変数の空間に適用されるであろうと私は思う。我々は、単葉な有限領域に対して、**擬凸状領域は正則領域である**[10]ことを見るであろう。

我々がこれから解明する予定の問題は、現在の研究のテーマを成す諸問題のうち、最後の問題[11]である。

（東北數學雑誌49、15～16頁参照。ゴシック体の語句は、原文ではイタリック体で書かれて強調されている。）

1）「奇妙な制限」という言葉はジュリアに由来する。

ヴァイエルシュトラスからF.ハルトークスやE.E.レビにいたる数々の幾何学者の研究により、たとえば、極点は孤立しえず、解析的連続体を作ること、本質的特異点は決して孤立しないが、そのうえなお奇妙な制限を受けることが示された。

（数学輯報47、1926年、53～54頁参照。下線による強調はぼくが行なった。）

ジュリアが「奇妙な制限を受ける」と言っているのは特異点の作る集合についてであり、そのような集合は連続性定理を満たさなければならないのであった。これはハルトークスの定理とレビの定理だが、岡潔は補集合に移行して、これを正則領域（有理型領域としても同じことになる）が受ける制限と見たのである。

2）岡潔の研究はハルトークスに端を発することが、ここでもまた明記されている。

3）エウジェニオ・エリア・レビ。イタリアの数学者。1883-1917年。ここでは、レビの問題の端緒を開いた下記の二論文が想起されている。

「二個またはもっと多くの複素変数の解析関数の本質的特異点に関する研究」（イタリア文。純粋応用数学年報（3）17、1910年。）

「二個の複素変数の解析関数の存在領域の境界でありうる4次元空間の超局面について」（イタリア文。純粋応用数学年報（3）18、1911年。）

4）ガストン・ジュリア。フランスの数学者。1893-1978年。岡潔がフランスに留学したときの先生。岡潔は留学前、ジュリアの影響を受けてイテレーションの研究を始めた。留学中、再度ジュリアの影響のもとに多変数解析関数論の研究を始めた。ジュリアの論文

「多変数解析関数の族について」（フランス文。数学輯報47、1926年、53～115頁）

を「繰り返し繰り返し、論文がすり切れてしまふまで」（日本文の遺稿「春の思い出」より。標題のみフランス語で書かれている。『岡潔先生遺稿集　第四集』、33頁参照）読んだと言われている。

5）ヴァルター・ザクセル。スイスの数学者。1896-？。言及されている論文は、

「多変数有理型関数の正規族について」（フランス文。パリ科学学士院の数学週報193、1931年、479～480頁）

「多変数有理型関数の正規族について」（ドイツ文。スイス数学評論4、1932年、256～267頁）。

後者の論文に附されているザクセルの所在地はチューリッヒ。

6）岡潔自身のノート「多価関数の族などに関するノート」（フランス文。広島大学理科紀要4、93～98頁、1934年）が挙げられている。このノートは、学位論文として企画された論文の要約である。

7）上に言われている「奇妙な制限」の幾何学的形状を描写すると、擬凸性の概念がさまざまに抽出される。ベンケ、トゥルレンの著作にも一例が出ている（同書、27～28頁参照）。岡潔はハルトークスの連続性定理それ自体から出発して、もっとも根源的な擬凸概念を取り出した。

8）正則凸性。カルタンとトゥルレンが1932年の論文「多複素変数関数の特異性の理論　正則領域と収束領域」で、正則領域の正則凸性を明らかにした。

9）カール・スタイン。ドイツの数学者。1913-？年。

10）ハルトークスの逆問題の解決が表明された。

11）ハルトークスの逆問題の解決により、当初の研究計画は達成されるという状勢認識が表明されている。

「ハルトークスに立ち返り、逆に、擬凸状領域はどれも正則領域であるのかないのかという問いを問いたい」という言葉は見られるが、この段階ではまだ、この問いに対して「ハルトークスの逆問題」という名称が与えられたわけではない。しかし岡潔が立ち返ったのはレビではなく、1906年のハルトークスの発見であることは明らかにされている。この年、ハルトークスは論文

「多変数関数におけるコーシーの積分公式からの二、三の帰結」（バイエルン科学学士院数学自然科学部門議事報告[1] 36、第1分冊。）

1）ベンケ、トゥルレンの本では「ミュンヘン報告集」として出ている。ミュンヘンはバイエルン州の首都。

を公表したが、この論文において、ハルトークスはコーシーの積分公式から連続性定理を導いたのである。それは多変数解析関数の特異点（ハルトークスの段階では、「解析関数の正則性が破れる点」の意である。後にレビがハルトークスの連続性定理を拡張して、特異点を「解析関数の解析性が破れる点、すなわち解析関数がそこでは正則でもなく有理型でもないような点、すなわち本質的特異点」と解しても連続性定理はそのまま成立することを明らかにした）は孤立しないことを言明する定理であり、注目に値するのは、その「孤立しない」という事実の特異な表現様式である。そこで特異点集合の補集合、すなわち正則領域に身を置けば、正則領域の形状は任意ではないという際立った事実認識が許されるであろう。

ハルトークスの連続性定理の表現様式から関数という言葉を除去して、幾何学的状勢をそのまま描写していけば、正則領域のもつべきある種の凸性が浮上する。岡潔はこのような手順を踏んで疑凸性の概念を抽出して、正則領

域は疑凸状であるという認識を獲得し、しかもその逆問題を設定して解決をめざしたのである。

「ハルトークスの逆問題」という言葉の初出について

これまでの検証から明らかなように、岡潔は第１報以来、一貫して「ハルトークスの逆問題」の認識を持ち続けたが、この言葉が実際に使われたのは意外に遅く、ようやく

第９報「内分岐点をもたない有限領域」（日本数学輯報23、1953年、97～155頁）

至ってからのことであった。第９報の構成は次のようである。

序文
第Ｉ章　補助的命題の補足
第II章　擬凸状領域、第二補助的命題
　A.　擬凸状領域
　B.　擬凸関数
　C.　境界問題
第III章　主要な諸問題
　A.　正則関数の展開、クザンの第一問題
　B.　ハルトークスの逆問題ー出発点
　C.　他の諸問題

第Ｉ章「補助的命題の補足」の第１節には「問題」という小見出しが附されていて、

我々はヴェイユの積分[1)]に助けを求めずに、**ハルトークスの逆問題**を解きたいと思う。（日本數學集報23、98頁参照）

（ゴシック体の「ハルトークスの逆問題」は、原文ではイタリック体で記されて強調されている。）

１）岡潔は第５報においてヴェイユの積分を改良し、第６報でそれを使用して、二個の複素変数の空間においてハルトークスの逆問題を解決した。第９報の段階では解析的多面体に対して上空移行の原理が確立されているので、ヴェイユの積分（を改良したもの）は必要ではなく、コーシーの積分で事足りる。

という明快な宣言とともに書き出されている。第III章「主要な諸問題」では、

空間(x)上の（内分岐点をもたず、有限な[1]）擬凸状領域はどれも正則凸状[2]であろうか。（日本數學集報23、134頁参照）

1）領域が「有限」というのは、無限遠点を包摂しないという意味である。

2）簡単にわかるように、正則凸状域は正則領域である。

という形に問題が設定され、「今後、これをハルトークスの逆問題と呼びたいと思う」（同上）と記されている。これが「ハルトークスの逆問題」の初出である。また、他の主要問題として挙げられているのは、クザンの問題と展開の問題である。

第二期の多変数解析関数論

第６報の序文の末尾で、ハルトークスの逆問題は一連の研究の「最後の問題」であると言われている。第６報の段階では二個の複素変数の空間内の領域に限定されていて、変数の個数がもっと多い場合や、領域が単葉ではない場合の考察が残されていたが、本質的な困難はもうない考えられたのであろう。すなわち、岡潔の当初の企画はこれで完成したのである。

この推定を裏付けるに足る明確な証言も残されている。それは昭和15年８月13日付（消印は８月14日）の中谷宇吉郎宛書簡（和歌山県伊都郡紀見村から札幌へ）における言葉であり、こんなふうに語られている。

僕の多変数函数論に一つだけ問題が残つて居たのです[1]。大変な問題の様に思はれましたから、御説の通り一つ腰を据えて三年程かゝる積りで始めてみようかと思つて色々計画を立てて居る内に簡単に解決されて了ひました。一九〇六年頃始まつた多変数函数論の deuxième époque[2]は之で完全に point[3]です。僕の此の研究も之を以て大成功裏に幕と云ふことにする積りです。

1）ハルトークスの逆問題のこと。

2）「第二期」の意。

3）ピリオドが打たれた、の意。

岡潔は多変数解析関数論の第二期の幕開けを1906年ころと見ているが、この年はハルトークスの論文「多変数関数におけるコーシーの積分公式からの二、三の帰結」が公表されて、連続性定理の発見が報じられた年である。この発見からハルトークスの逆問題が生まれ、その解決とともに第二期は終幕を迎えたというのである。ベンケ、トゥルレンの著作にも、カルタンの諸論文にも見られない岡潔に固有の数学史観であり、おそらく岡潔はベンケ、トゥルレンの小さな書物を素材として、このような数学史の可能性を紡ぎ出したのであろう。

講演「多変数解析関数について」では、第二期の数学史が岡潔の手で日に日に実現していく様相が生き生きと語られている。

そこに[1)]ある問題は、だいたい申しますと、関数を漸近的に展開する問題（ある領域で正則な関数をより広い領域で正則な関数の級数に展開する問題）、クザンの問題、これはIとIIとありまして、Iといいますと、極を与えて有理型関数を求める問題、IIといいますと零点を与えて正則関数を求める問題、それからハルトークスの逆の問題、すなわち有限で内分岐しない擬凸状域は正則域かという問題、なぜ正則域が大事かといいますと、トゥルレンの結果がありますから、それは正則凸状、それで正則域であるというのが大きいのです。まあ、こういった問題があります。さて、これらの問題を扱う領域ですが、一番一般的な領域が擬凸状領域で、ハルトークスの逆の問題はここでだけ問題になります。その次が正則凸状域で、これはだいたい正則域と同じこと、その次がポリノーム[2)]またはラショナル・ファンクション[3)]に関してコンヴェックスな[4)]領域、さらに一番簡単なのが筒状域[5)]、筒状域といいますと、各変数平面上の領域のプロダクト[6)]としての領域です。筒状域でこれらの問題が解けるというのは、（第二問題で多少まちがっていますが）クザン自身が解きました。1895年[7)]です。そこでポリノームまたはラショナル・ファンクションに関してコンヴェックスな領域においてはどうかというのが次の問題になります。ここでの漸近の問題はアンドレ・ヴェイユが解きました。1932年に予報[8)]を出して、1935年[9)]に出しました。それでその後が残っていました。これを私がみなだいたい解決しました。正則域においてクザンーIは解ける[10)]。クザンーIIは、与えた零面が当然要る必要十分条件、バラヤーブル[11)]という条件さえ満たすなら

ば解ける[12]。それからハルトークスの逆は成り立つ[13]。これ二変数については1942年[14]ですから、出たのは戦争中ですが、やったのは戦争前[15]。それからn変数については、ユニバラントな[16]領域の場合、戦争中に高木先生[17]のところへ日本文で書いて送っておきました[18]。これついに発表していませんけれど、それで、これだけでいろいろな研究をやろうと思えばやれるんです。しかしさらに分岐点を入れて考えたりしようとしますと、ここで解いた解き方だけでは不十分です。それで、ここではあまり言うことないのですが、ちょっと言っておきますと、イデアルに関する問題が出てきます。

（下線による強調はぼくが行なった。）

1）ベンケ、トゥルレンの本『多複素変数関数の理論』を指す。

2）多項式（仏語）。

3）有理関数（英語）。

4）凸状な（英語）。

5）柱状領域と同義。

6）積（英語）。

7）ここで言及されているのは、1895年のクザンの論文「n個の複素変数の関数について」（数学輯報19、1～61頁）である。

8）パリの科学学士院週報194、1304～1305頁。予報の標題は「二複素変数の多項式級数について」。

9）数学年報111、178～182頁。論文の標題は「コーシーの積分と多変数関数」。

10）第1報、第2報。

11）掃き出し可能（仏語）。バラヤーブルは、日本文で書かれた学位論文「多変数解析函数ノ研究」の「III　Cousinノ第二問題」では、「可掃型」と言われている。『岡潔先生遺稿集　第五集』、70頁参照。遺稿「多変数解析函数ニ就イテ　XII　固有集合体の表現」には「掃清可能」という訳語も見られる。『岡潔先生遺稿集　第二集』、20頁参照。

12）第3報。

13）第6報、第9報。

14）昭和16年（1941年）10月25日、第6報が東北数学雑誌に受理され、東北數學雑誌49、15-52頁、に掲載された。

東北數學雑誌49には「昭和18年2月」という表示が見られるが、第6報は昭和17年4月に刊行された第一分冊に掲載された。また、収録されている最後の論文が

「1943年3月5日受理」となっているところから見て、東北數學雑誌49の最終分冊が実際に刊行された時期は、昭和18年の3月から4月ころにずれこんだと思われる。

15）昭和15年（1940年）の螢のころ、関数の第二種融合法が発見されて、第6報の核心が作られた。翌昭和16年（1941年）1月13日、第6報の概要「擬凸状領域について」が帝国学士院記事に受理され、この年、公表された（帝国学士院記事17、7～17頁）。

16）単葉な（英語）。

17）高木貞治。1875-1960年。高木貞治は岩波茂雄（岩波書店主）が設立した奨学金補助組織、風樹会（財団法人。対象は哲学、数学、物理学など、基礎的学問の研究者で、昭和15年11月2日、設立が許可された）の理事であった。岡潔は昭和17年11月ころ、すなわち北海道帝大理学部の嘱託を辞めたころから風樹会の奨学金を受け始めた。中谷宇吉郎の斡旋によると推定される。風樹会の奨学金は昭和24年（1949年）まで続いた。

第7報の脚註に、

著者はここで、第6報の時期以来の援助に対して、風樹会に心からの感謝の気持ちを表明したいと思う。（原テキスト。数学論文集『多変数解析関数について』、92頁参照）

という言葉が見られる。

18）岡潔は第6報以後も日本文で続報を書き続けた。昭和18年（1943年）には、9月から12月にかけて下記のような五篇の論文が日本文で執筆され、高木貞治に送付された。風樹会の援助に対する研究報告だったと思われる。第8報の脚註に、

1943年、著者は高木貞治に宛てて、これを日本語で詳細に書き送った。（日本数学会雑誌3、204頁参照。）

という言葉が出ている。

9月4日、「多変数解析函数ニ就テ　VII正則函数ノ合同ニ関スル二ツノ補助問題」を執筆。末尾に附されている日付は「2603.9.4」（皇紀2603年9月4日）。

9月5日、「多変数解析函数ニ就テ　VIII　分岐点ヲ持タナイ有限領域ニ対スル第一基礎的補助定理」を執筆。末尾に附されている日付は「2603.9.5」（皇紀2603年9月5日）。

10月24日、「多変数解析函数ニ就テ　IX　擬凸状函数」を執筆。末尾に附されている日付は「3.10.24」（皇紀2603年10月24日）。

11月12日、「多変数解析函数ニ就テ　X　第二基礎的補助定理」を執筆。末尾に附されている日付は「3.11.12」（皇紀2603年11月12日）。

12月12日、「多変数解析函数ニ就テ　XI　擬凸状域ト有限正則域、有限正則域ニ於ケル諸定理」を執筆。末尾に附されている日付は「3.12.12」（皇紀2603年12月12日）。

先の大戦のさなかに高木貞治のもとに送付された五篇の論文により、「内分岐しない有限領域」を対象にしてハルトークスの逆問題が解決された。第６報は、

著者は、この結論[1)]は複素変数の個数に依存しないと思う。（東北數學雑誌49、52頁参照。）

1）複素２次元の場合におけるハルトークスの逆問題の解決。第６報が最後に到達した成果であり、

二個の複素変数の空間において、有限で単葉な擬凸状領域はどれも正則領域である。（東北數學雑誌49、51頁参照。）

と表明されている。

という言葉とともに終わっているが、岡潔自身、この推定を裏付ける作業を遂行したのである。

不定域イデアルの理論により、内分岐しない有限領域において上空移行の原理が確立され（論文Ⅷの「基礎的補助定理Ｉ」。『岡潔先生遺稿集　第一集』、69～70頁参照）、それを梃子としてハルトークスの逆問題が証明された（論文XIの定理Ｉ。同、148頁参照）。これで、昭和28年（1953年）の第９報の内容はできあがっている。ただし、この段階ではまだ「不定域幾何イデアルは有限擬基底をもつ」（カルタンのように層の言葉で言い表わせば、「ある開集合における解析的多様体の層は、その開集合の各点において連接的である」というふうになる。「解析的多様体」というのは、局所的に正則関数系の共通零点集合として与えられる図形のことである）ことの証明ができていなかったので、上空移行の原理はいくぶん中途半端な形になっている。

新しい手法が開発されて、ハルトークスの逆問題が解決される場は広がった。だが、おそらく理論展開の土台となる基本定理（すなわち、上空移行の原理。第８報の標題で言われている「基本的な補助的命題」）がなお完成していないことに不満があったのであろう。上記の五論文は日本文で書かれた段階にとどまって、フランス文に直されて公表されるには至らなかった。第

9報が公表されて、ここで獲得された成果が報告されたのは、第7報と第8報が書かれた後のことであった。

5．内分岐領域の理論

不定域イデアルの理論

上に引用した講演記録の末尾において、岡潔は、「しかしさらに分岐点を入れて考えたりしようとしますと、ここで解いた解き方だけでは不十分です。それで、ここではあまり言うことないのですが、ちょっと言っておきますと、イデアルに関する問題が出てきます」と語っている。岡潔の場合、多変数解析関数論にイデアルの理論を導入したのは、内分岐領域の理論形成のためであった。この直接的な動機が明示されているという点において、真に注目に値する言葉と思う（カルタンには別の動機があったと思う。それについては後述する）。

断片的ではあるが、内分岐領域の理論を語る岡潔の言葉は、ほかにもいくつか遺されている。昭和22年（1947年）4月18日付の高木貞治宛書簡（和歌山県伊都郡紀見村から東京都新宿区諏訪町182へ。草稿が遺されていて、『岡潔先生遺稿集　第二集』に収録されている。同書90～97頁）には、第二期の研究を越えてさらに内分岐領域の理論に分け入ろうとする際の心情が率直な筆致で描かれていて、見る者の感慨を呼び覚ます力が備わっている。

・・・私大学ヲ卒業シテ四年間ノ暗中模索[1]ノ後、巴里ニJulia[2]先生ノ所ニ三年[3]居リマシテ、多変数解析関数ノ分野ヲ、其ノ意義及ビ其ノ面白サカラ、研究ノ対象トシテ撰ビマシタ[4]。其ノ後十五年[5]掛ツテ、Behnke-Thullen[6]ノ文献目録[7]ニアル問題ハ略々解決シ了リマシタ。此ノコトハ一度先生ニ申シ上ゲマシタ[8]。（尚其ノ始メノ四年間[9]ハ行ケドモ行ケドモ陸地ノ見エナイ航海ノヤウナ苦シサデシタ。私ノ生涯デ一番苦シカツタ頃デゴザイマセウ）。所デ、先生ニ申シ上ゲタイノハ、其ノ本質的ナ部分ハ解イテ了ツタト思ツタ（今デモソウ信ジテ居マスガ）其ノ瞬間ニ、正確ニハ翌朝目ガ覚メマシタ時、何ダカ自分ノ一部分ガ死ンデ了ツタヤウナ気ガシテ、洞然トシテ秋ヲ感ジマシタ。ソレガ其ノ延長ノ重要部分ガ、上ニ申シマシタ様ニ、マダ解決サレテ居ズ容易ニハ解ケソウモナイ、ト云フコトガ分ツテ来マスト、何ダカ死ンダ児ガ生キ反ツテ呉レタ様ナ気ガシテ参

リマシタ。本当ニ情緒ノ世界ト云フモノハ分ケ入レバ分ケ入ル程不思議ナモノデアツテ、ポアンカレノ言葉ヲ借リテ申シマスト、理智ノ世界ヨリハ、或ハ遥カニ次元ガ高イノデハナイカトサヘ思ハレマス。
（『岡潔先生遺稿集　第二集』、93～94頁参照。下線による強調はぼくが行なった。）

1）岡潔が京都帝大を卒業したのは大正14年（1925年）3月で、同年4月1日、京大講師を嘱託された。昭和2年度と3年度の二年間は三高講師も兼任した。昭和4年（1929年）4月、文部省在外研究員としてフランスに留学したが、それまでの4年間は京都で教員生活をして日々をすごしたことになる。

この時期、特に後半の二年間は、河合十太郎先生（京大の数学の教授。岡潔が京大を卒業した年に定年退官した）の示唆を受け、ジュリアの論文などに手がかりを求めてイテレーションの研究に取り組んだ。

2）ガストン・ジュリア。

3）岡潔は昭和4年（1929年）5月末、パリに到着し、昭和7年（1932年）4月1日、マルセーユで日本郵船の箱崎丸に乗船して、帰国の途についた。この間、ほぼ3年である。

4）岡潔が多変数解析関数論に向かったのは、昭和5年（1930年）秋、パリ郊外のサン・ジェルマン・アン・レに滞在したころからと言われている。

5）「15年」というのは長すぎるように思う。ベンケ、トゥルレンの著作を読み始めたのは昭和10年（1935年）の正月、1月2日からであり、函数の第二種融合法が発見されてハルトークスの逆問題の解決に目鼻がついたのが昭和15年（1940年）である。この間、6年である。

イテレーションの研究に取り組み始めたのは大学卒業後三年目の昭和2年（1927年）からと言われている（この年4月3日付のノートに、イテレーションに関するジュリアの二論文「有理函数のイテレーションについて」と「有理函数の交換可能性について」の要約が書かれている）。第6報が東北數學雜誌に受理されたのが昭和16年（1941年）10月25日であるから、この期間を数えればきっかり15年になる。

6）ベンケとトゥルレン。

7）『多複素変数関数の理論』を指す。1934年刊行。

8）「昭和二十一年三月三日」の日付をもつ高木貞治宛書簡。草稿が残されている。『岡潔先生遺稿集　第二集』、80～89頁参照。

9）多変数解析関数論に心を向け始めた昭和5年（1930年）秋から、ベンケ、トゥルレンの著作を入手した昭和9年暮（1934年）までの4年間のことであろう。

こうして内分岐領域の理論は第二期の多変数解析関数論の「延長ノ重要部分」として認識されたのである。『春雨の曲』第七稿では、多変数代数関数論への言及がなされている。

若し論文Ⅰにあらわれたわたしの素志を貫く積りならば此の図に関する論文Ⅰの定理Ⅰ[1]を一般の場合に拡張しなければならぬ。また、これまでは領域は絶えず単葉に限定して研究して来たが、この制限を取り去る積りならばΣ[2]が代数的分岐点[3]を持ってもよいとしなければ徹底しない。そうでなければ、たとえばこれからの研究の成果を多変数代数函数の分野に適用することさえ出来ない。これで腹が決った。この拡張に全力を挙げよう。
（『春雨の曲』第七稿、320〜321頁参照。下線による強調はぼくが行なった。）

1）「定理Ⅰ」は「定理Ⅱ」の誤記。有理多面体に対する上空移行の原理である。

2）ΣはΔの誤記であろう。これまでの制限を除去するというのであるから、内分岐する領域において解析的多面体Δを考える。それを高次元の単葉領域内に移して（すなわち、上空に移して）得られる解析的多様体がΣである。

3）代数的分岐点というのは代数関数に付随して現われるタイプの分岐点である。

内分岐領域の理論がなければ多変数代数関数論を建設することさえできず、重要性の根拠もその点に求められている。研究の具体的な手がかりとして、第1報以来の「基本的な補助的命題」（これは第8報の標題でもある）、すなわち上空移行の原理を内分岐領域に移すことがめざされた。そのためには、不定域イデアルの理論が不可欠であった。

岡潔が不定域イデアルの研究に着手したのは昭和17年（1942年）ころと言われている。次に挙げるのも『春雨の曲』第七稿からの引用である。

この頃[1]はもう夏休みになっていた。札幌の夏は本当に美しい。わたしは研究の場所を北大の数学教室[2]から札幌市の植物園[3]に移した。ここには開拓時代以前からの大樹が沢山残っていて、札幌の夏の中でも特に夏は美しい所である。わたしは毎日植物園へ行って、土へ木の枝でシェーマ（象徴図）や記号を書きながら思索を楽しんだ。わたしの不定域イデアル

の端緒は此の頃なのである。

（『春雨の曲』第七稿、328頁参照。）

1）昭和17年（1942年）。

2）岡潔は前年、すなわち昭和16年（1941年）秋から研究補助員として北海道帝大に赴任した。辞令は「理学部研究補助を嘱託す」。発令の日付は10月31日。理学部の功力金二郎（くぬぎ・きんじろう。1903-1975年）の研究室に所属して、「純粋解析学に関する研究」の研究補助を行なうという趣旨であった。中谷宇吉郎の斡旋であった。功力金二郎は留学中、パリで知り合った友人である。

2）北海道帝大の附属植物園。

第三の発見（第一の発見は「上空移行の原理」、第二の発見は「関数の第二種融合法」）が生起して、第７報の骨格ができあがったのは、先の大戦の終戦の翌年、すなわち昭和21年（1946年）の夏と言われている。それは、第７報で「問題(μ)」と呼ばれている問題、すなわち「一次方程式の形式解の局地的存在を言う問題」（岡潔『昭和への遺書　敗るるもまたよき国へ』；月刊ペン社、昭和43年刊行、の言葉。ただし、この本では、発見の時期は「終戦後第三年目」となっていて、他の文献と一致しない）の解決のことである。

第７報の初出テキストの序文

第７報の目次は下記の通りである。

1．合同と同等。H.カルタンの定理
2．不定域イデアル
3．同次線形関数方程式とその形式解
4．局所的問題(K)への諸問題の還元
5．割り算の定理
6．局所的問題(K)の解決
7．結論

目次についてはふたつのテキストの間に食い違いは見られないが、本文の移動は著しい。初めに初出テキストの序文を読みたいと思う。

序.　この論文は一連の論文のうちの第七番目の報告である。先行する諸論文は、

Ⅰ. 有理関数に関して凸状の領域。1936年（広島大学理科紀要）。
II. 正則領域。1937年（広島大学理科紀要）。
III. クザンの第二問題。1939年（広島大学理科紀要）。
IV. 正則領域と有理凸状領域。1941年（日本数学輯報）。
V. コーシーの積分。1941年（日本数学輯報）。
VI. 擬凸状領域。1942年（東北数学雑誌）。

である[1]。

すでに第１報の定理II（基本的な補助的命題）、第２報の定理Ⅰおよび第５報の条件(β)（アンドレ・ヴェイユの条件）において、いくつかの算術的概念に出会っている。後に、我々は分岐点の研究においてもうひとつのアリトメティカ的概念に出会うであろう。それがなければ、代数関数を取り扱うことができなくなってしまう。

ここではこれらのアリトメティカ的概念の意味を深く掘り下げることから始めたいと思う。たとえば合同の概念とイデアルの概念は多項式の場から解析関数の場へと移される。関数というものは一般に全空間に延長されることはありえないから、新たにいくつかの問題に出会う。アンリ・カルタンはそのような性質を備えたひとつの現象を発見した。この論文のいくつかの定理と、ひとつの相当に複雑な問題は、カルタンが発見した現象に関連がある（第７節参照）。それらの定理は、第１報以来の諸問題を分岐領域の場合に拡張したいとき、私にとって不可欠である。それらはまた、複雑さの度合いの少ない領域に対しても有用である。

（フランス数学会雑誌78、１～２頁参照。「合同」と「イデアル」の二語は、原文ではイタリック体で記されて、強調されている。下線による強調部分が二箇所あるが、これはぼくが行なった。）

1）原テキストでは、これらの論文名の紹介は脚註に回されている。

これに対して、原テキストの序文は次の通りである。

序.　我々は今、これまでの道すがらに出会ったさまざまな困難の性格を再確認し、この道筋の延長線上で出会うであろう諸困難の形状に目を向

けたり、そのほかにもなおいろいろなことをしながら、深く省察を加えつつあるところである。ここではさまざまな成果のひとつを説明したいと思う。

第１報の定理II（基本的な補助的命題）、第２報の定理Ｉ、それに第５報の条件(β)（A.ヴェイユの条件）において、ある種のアリトメティカ的概念が目に留まるであろう。そうしてもし分岐点を受け入れるなら、もうひとつのアリトメティカ的概念に出会うであろう。分岐点を許容しなければ、代数関数さえ取り扱うことができなくなってしまう。我々はこのような事情に促されて、このような概念の研究を始めたのである[1]。

多項式の場から解析関数の場に移された三、四のアリトメティカ的概念、たとえば合同とイデアルのような概念を想定してみよう。解析関数は一般に全有限空間に延長されないという状勢に起因して、いくつかの新しい問題が見られる。そのような性質を備えているひとつの現象を発見したのはH.カルタン[2]である。この論文の中で、結論として、同じ性質をもついくつかの定理と、ひとつの十分によく濾過された問題がみいだされるであろう（第７節参照）。それらの定理は第１報以来の諸問題を、分岐点を含む領域において取り扱ううえで、私にとって不可欠である。また、それらは、複雑さの度合いの少ない領域に対しても有用[3]である。

ところで、我々は一系の美しい問題をF.ハルトークスとハルトークスの継承者たちに負っている[4]が、我々に続く人たちに、美しい諸問題を遺したいと思う。幸いにも多変数解析関数の分野は数学のさまざまな部門の上に広がっているから、それらの部門で準備が整えられているさまざまなタイプの美しい諸問題を夢みることが許されるであろう。

（論文集『多変数解析関数について』、92頁参照。下線による強調はぼくが行なった。）

１）多変数解析関数論においてアリトメティカ的諸概念の研究へと向かう動機が語られているが、この明快な宣言は初出テキストでは削除された。

２）ここで言及されているのは、1940年のカルタンの論文「n個の複素変数の正則母式について」である。

３）第９報では、内分岐しない有限領域という、「複雑さの度合いの少ない領域」においてハルトークスの逆問題が解決されたが、不定域イデアルの理論はそこでも有効に活用された。

４）岡潔の研究はハルトークスから出発することが、ここでもまた繰り返して語ら

れている。しかしこの一文と、それに続く最後の一文は、初出テキストでは削除された。

第7報の本文に移ると、問題(C_1)、問題(C_2)、問題(E)という基本的な三問題が次々と導入されていく。しかもそれらは第1報以来の歩みと無縁ではなく、第1報の定理II、第2報の定理I、第5報の条件(β)はそれぞれ第7報の問題(C_2)、問題(E)、問題(C_1)に対応することが特に注意されている（数学論文集『多変数解析関数について』、97頁参照）。新たな地平を開こうとするための礎石が過去の経験の中から採取され、措定されたのである。岡潔の数学の歴史的性格をはっきりと示す出来事であり、真に目の覚めるような情景である。

これらの問題を解決するために、次々と問題(I)、問題(J)、問題(K)、問題(λ)、問題(L)、問題(μ)、問題(M)が導入されていく。核心となるのは問題(K)であり、この問題はつねに解けることを示すのが第7報の骨子である。そこから、閉多重円板の近傍において問題(C_1)、問題(C_2)、問題(E)が解けることが明らかになる。

原テキストの序文に比して初出テキストの序文は非常に簡単なものになっていて、言い回しが大きく異なっている文章も目立っている。原テキストには、「もし分岐点を受け入れるなら、もうひとつのアリトメティカ的概念に出会うであろう。分岐点を許容しなければ、代数関数さえ取り扱うことができなくなってしまう。そこで我々はこのような概念の研究を始めたのである」というふうに、研究の動機が明記されている。また、原テキストの末尾では、第1報以来の一連の研究の淵源がハルトークスにあることが語られたうえで、「我々に続く人たちに、美しい諸問題を遺したいと思う」と、未来を開こうとする言葉が美しく語られている。このような岡潔の数学における意志的発言がすべて削除された点に、初出テキストの序文の大きな特徴が認められるように思う。そのために、初出テキストでは、多変数解析関数論の第三期（「第三期」というのは「第二期」に続いて開かれるべき時代というほどの意味だが、岡潔がこの言葉を使っているわけではない）において岡潔がめざしたものの所在が不明瞭になってしまうのである。

第8報の序文より

第7報の続篇である第8報も、岡潔の不定域イデアルの研究の本質を理解

するうえで不可欠である。ここでもまた初めに序文を読みたいと思う。

第1報以来の主要な諸問題は、クザンの問題、展開の問題、それに凸性の問題である。第1～6報において、我々は、ひとことで言えば、これらの問題は有限単葉領域に対して肯定的に解けることを見た。そうして著者は、説明はしないけれども、これらの結果は少なくとも分岐点をもたない有限領域まではそのまま成立することを確認した[1)]。

そこで、適切な無限遠点を採り入れることや、分岐点を受け入れることが問題になる。ところが、内分岐領域についてはほとんどなにも知らないという事態に気づくであろう。たとえば、局所的展開に関する状勢はどんなふうになるのであろうか。そこで、まず初めに第二の問題に取り組みたいと思う。

さて、ここで直面している研究のための基本理念は、第1報の定理II[2)]によって象徴的に表明されている。我々はこの定理を第2報の定理Iの形で使ったが、そのようにしたのは、問題(E)が解けなかったためである。内分岐領域を対象にする場合には、元の形状が不可欠である。それが、標題の基本的な補助的命題[3)]である。我々が第8報を準備したのは、これを確立するためなのである。

分岐点をもたない（有限）領域において基本的な補助的命題を確立するためには、問題(C_2)と問題(E)を解決して、不確定領域の幾何イデアルの局所擬基底を見つければ明らかに十分である。これらの問題のうち、我々は第7報において問題(C_2)と問題(E)を解決した。また、ごく最近、H.カルタンは、問題(K)はつねに解けるという第7報の定理4に基づいて、最後の問題を解決した[4)]。だが、分岐点を受け入れると、固有多様体上の正則関数は必ずしも周域空間における正則関数の跡ではないという新しい困難に出会う。その結果、問題(J)のような種類の諸問題が生まれる。それらの中には、ある意味での幾何イデアルの問題、しかもはるかに広い問題も入っている。

この論文では、我々は再び第7報の定理4から出発してこの問題を解決し（定理2）、基本的な補助的命題を確立し、それをどのようにして主要な諸問題に適用するのかを簡潔に示したいと思う。

（下線による強調はぼくが行なった。）

1）ここに、

1943年、著者は高木貞治に宛てて、これを日本語で詳細に書き送った。

という脚註が附されている。

2）上空移行の原理。第1報では、有理多面体を対象にしてこの原理が語られた。

3）第8報の標題で言われている「基本的な補助的命題」の実体は、上空移行の原理であることが明らかにされた。

4）カルタンは論文「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」において、岡潔の言う「不確定領域の幾何イデアルの局所擬基底を見つける」問題を解決した。同論文の定理2、フランス数学会雑誌78、42頁、参照。定理2の言明は、

開集合 A における解析的多様体の層は、A のすべての点において連接層である。

というもので、層の言葉が使われている。

カルタンは第二次大戦中に書かれた前論文「n 個の複素変数の解析関数のイデアル」において、この問題を「第二問題」（ふたつの問題が未解決問題として提出された）として提示した。第二問題の表明は次の通り。

V は点 a の近傍における解析的多様体とし、$\mathfrak{J}_a$ は点 a におけるこの多様体のイデアル（すなわち、点 a において正則で、a のある近傍において V 上で恒等的に消えるような関数のイデアル）としよう。$\mathfrak{J}_a$ の有限基底は、a に十分近い V のどの点 x においても、点 x における多様体 V のイデアル $\mathfrak{J}_x$ を生成するだろうか。（高等師範学校科学輯報61、187頁参照。）

ここではまだ表明の様式は素朴だが、終戦をはさみ、次の論文に至って解決されたときには層の言葉が全面的に採用されて、上記の定理2のような簡潔な形を獲得した。

岡潔は第7報でカルタンの第一問題に解決を与え（問題 (K) の解決。ただし、岡潔は第一問題が出されたカルタンの論文「n 個の複素変数の解析関数のイデアル」は知らなかった）、カルタンはそれを踏まえて第二問題を解決した。

第一問題は、

正則関数の作る任意の有限系の（点的な）導来モジュールは連接系を作るだろうか。（高等師範学校科学輯報61、187頁参照。）

というふうに表明される。これを解決するには、次の問題を解けば十分である。

$\mathfrak{J}$ は有限基底をもつイデアルを表わすとし、f は（複素数値を取る）正則関数を表わすとしよう。各点 x において、$\mathfrak{J}_x$ に所属して、しかも f で割り切れる関数の作るイデアル $\mathfrak{F}_x$ を考えよう。このようなイデアルは連接系を作るだろうか。（同上）

これを言い換えると、

a はある特定の点を表わすとするとき、 $\mathcal{F}_a$ の有限基底は a に十分近いすべての点 x において $\mathcal{F}_x$ を生成するだろうか。（同上）

というふうになり、これなら「連接的」という言葉の意味合いがよく表われている。

第一問題は論文「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」の定理1で解決されたが、その言明は層の言葉を用いてなされていて、

開集合 A において正則な関数 $f_i\left(1 \leq i \leq p\right)$ の間の関係の層は A のどの点においても連接的な層である。（フランス数学会雑誌78、37頁、参照。）

というふうに変容した。

第８報が書かれて、内分岐領域において上空移行の原理が確立された（状勢の複雑さを反映して、「基本的な補助的命題」の表明の様式もまた相当に込み入っている。日本数学会雑誌３、275頁に出ている）。そこでこれを補助的命題として用いて、内分岐域の世界に分け入っていこうとするのが、ぼくらの歩むべき本来の道筋であろう。だが、グラウエルトとレンメルトによってふたつの特異な例が示されて、この構想は頓挫した恰好になったまま、今日に至っている。

グラウエルトの例とグラウエルト－レンメルトの例

分岐点の問題は岡潔の講演「多変数解析関数について」でも語られている。初めにその言葉に耳を傾けたいと思う。

それから分岐点を入れたらどうかという問題はひどく残っています。私、これをだいぶ長くやったのですが、全然無条件でないと出さないと意地を張ってるんですだって、せっかくここまで無条件にやってきたのに、それ惜しいでしょう。だからこんなもの、いっさい人に言わないと思っている。言ったらそれだけ問題、減りますからね。まあ、これだいぶ長くやってみたんですが、非常にだんだんだんだんむつかしくなっていきます。この辺では、この問題それ自体を取り扱っているのではないでしょうが、分岐した代数面上におけるいろんな領域について、「正則域で擬凸状ではない」とかいったふうな論文をH.グラウエルト[1]が書いています。

1）ハンス・グラウエルト。ドイツの数学者。1930-　年。ここで言及されている論文は、

「注目に値する擬凸状多様体」（数学雑誌81、1963年、377〜391頁。）
である。

ここで言及されている論文「注目に値する擬凸状多様体」において、グラウエルトは次のような性格を備えた内分岐領域を例示した。

ある意味で擬凸状である非有限な内分岐領域であって、（定数以外の）正則関数が存在しないもの。従ってこの内分岐領域は正則凸状ではなく、正則領域でもない。しかし有理型領域（すなわち、ある有理型関数の存在領域）である。

岡潔が解決したハルトークスの逆問題が対象にしていたのは、有限で、しかも分岐点を内包しない領域であった。そのような領域では、
正則領域であること、
正則凸状であること、
擬凸状であること
はみな同義である。ところが非有限な内分岐領域に移ると状勢は一変し、ハルトークスの逆問題はもう解けないというのである。
このグラウエルトの例に先立って、グラウエルトとレンメルトは論文
「特異な複素多様体とリーマン領域」（数学雑誌67、1957年、103〜128頁）
において、もうひとつのめざましい性質を備えた内分岐領域の例を報告した。
それは、

有限で内分岐する正則領域（ただし、複素3次元以上）で、正則凸状ではなく、擬凸状でもないもの。

というのである。正則領域は擬凸状であるというハルトークスの連続性定理の発見が端緒になって、岡潔の言う第二期の多変数解析関数論が開かれた。正則領域は正則凸状であるという、カルタン－トゥルレンの定理もあった。ところが内分岐域ではこれらの定理はいずれも成立しないのであるから、ハルトークスの逆問題は存在理由を失い、正則凸状の概念は宙に浮いてしまうのである。
真に混沌とした状勢と言わなければならないが、それでもなお上空移行の

原理は成立する。理論形成の可能性は依然として残されているように思われる。

6．カルタンの二論文「n個の複素変数の解析関数のイデアル」と「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」

1944年の論文「n個の複素変数の解析関数のイデアル」

1944年のカルタンの論文「n個の複素変数の解析関数のイデアル」（高等師範学校科学輯報 61、149〜197頁）には、多変数解析関数論へのイデアルの概念の導入におけるカルタンの意図が明示されている。全体の構成は下記の通りである。

I．序
II．正則関数のイデアル。q次元空間に値をもつ正則関数のモジュール。
III．クザンの補助的命題の一般化
IV．点モジュールの連接系に関する基本的諸問題
V．純粋モジュール、完全モジュール
VI．p個の関数から成る基底をもち、しかもその多様体が$n-p$次元になるイデアル
VII．関数系の導来モジュール
VIII．与えられたモジュールの導来モジュール
IX．基本定理
X．基本定理の応用
XI．未解決の主問題
XII．柱状領域に対して証明された諸結果の、正則領域への拡張
付録I．点イデアルと点モジュール
付録II．既約な解析的多様体

4頁に及ぶ長い序文が附されているが、ここではそれを概観したいと思う。序文は四節に分かたれているが、第1節は、「ポアンカレの有名な定理を想起しよう」という言葉とともに始まっている。

1．ポアンカレの有名な定理を想起しよう。有限距離の範囲のいたると

ころで有理型である二個の複素変数の関数 f は、ふたつの互いに素な（すなわち、孤立点は別にして、同時に零になることのない）整関数の商である。これを証明するためには、関数 f の極を、同一の重複度の零点にもつ整関数の存在を示すのである。周知のように、それらの極は実二次元[1]の多様体を形成する。

クザン[2]はこの問題を n 個の複素変数の場合に取り上げて、**ある与えられた領域において与えられた零点をもつ正則関数を構成する**という問題を組織的に研究した。もちろん、「与えられた零点」という言葉で諒解されるものを正確に表現しておかなければならない。我々がある領域 D における**クザンの所与**と呼ぶのは、D の各点 x において、x で正則な関数 f_x の所与のことであり、しかもこれらの関数は次の条件を満たすものとする。すなわち、D のどの点 a もある近傍 V をもち、V において f_a は正則であり、V のすべての点 x において商 $\frac{f_x}{f_a}$ は正則かつ $\neq 0$ となる。この後者の条件は、点 x における正則関数環において、関数 f_x と f_a は同一の**イデアル**を生成するということを言い表わしている。このようにするとき、クザンによって設定された問題は次のようになる。領域 D におけるどの**クザン所与**に対しても、D **において正則な**関数 f で、D のすべての点 x に対して商 $\frac{f}{f_x}$ が正則になり、しかも点 x において $\neq 0$ となるものは存在するだろうか。

クザンはこの問題の研究を、今日では**柱状領域**という名で呼ばれる特殊な範疇の領域に限定した。柱状領域と呼ばれるのは、

$$x_1 \in \delta_1, \cdots\cdots x_n \in \delta_n$$

というタイプの点集合のことである。ここで $\delta_1, \cdots, \delta_n$ はそれぞれ n 個の複素変数 $x_1, \cdots, x_n$ の平面において与えられた集合を表わす。これらの n 個の集合は柱状領域の**成分**と呼ばれる。クザンは**開柱状領域**、従ってその成分が n 個の複素変数の平面内の開集合であるものに考察を限定した。そうしてクザンは、上記のように設定された問題は、**その成分が、高々ひとつを除いてすべて単連結**であるようなどの柱状領域においても解けることを証明した。我々がここで**クザンの定理**と呼ぶのはこの成果のことである。［実際には、クザンはすべての開柱状領域に対して彼の定理を証明したと信じた。成分の単連結性に関連して必要になる制限に注意を促したのはグロンウォール[3]である（アメリカ数学会報告18、1917年）。］

クザン以来、この定理をいっそう一般的な領域に拡張しようとする努力

が重ねられた。今日では、この定理はどんな領域に領域に対しても成立するわけではないことが知られている。しかしクザンの定理が成立する領域の組織的究明は困難な問題であり、これはわきにのけておくことにしたいと思う。他方、正則関数のイデアルに関して我々がこの論文において獲得する諸成果により、問題の言明をいくぶん修正したうえで、非常に一般的な領域に対して、この問題を解くことが可能になるであろう（§XII参照）。（高等師範学校科学輯報61、149～150頁参照。）
（ゴシック体の箇所は、本文ではイタリック体で記されて強調されている。下線による強調はぼくが行なった。）

1）従って、複素一次元。

2）1895年のクザンの論文「n個の複素変数の関数について」（数学輯報19、1～61頁）。

3）グロンウォールの論文は「多複素変数の一価関数の、二つの整関数の商としての表示の可能性について」。

ここまでが序文の第1節である。イデアルをめぐるカルタンの考察はクザンの定理に始まることが語られて、クザンの定理が成立する領域のタイプの究明は困難であることが記されているが、特に問題はないと思う。続いて第2節に移ると、クザンの定理の幾何学的解釈が登場する。

2．ここにクザンの定理からのよく知られたひとつの帰結がある。領域Dにおいて、Dの各点aの近傍で、方程式$f_a\left(x_1, \cdots, x_n\right)=0$によって規定される点の集合$E$のことを、$n-1$次元[1]の**複素解析的多様体**と呼ぼう。ここでf_aはaの近傍で正則な関数で、しかも恒等的に零にならないものである（aにおいて$f_a \neq 0$の場合も除外されない）。関数f_aを適切に選択して、aの近傍で正則で、しかも（aの近傍で）E上で恒等的に零になる関数はどれも、基底f_aのイデアルに所属する、すなわち、φは点aで正則として、φf_aという形になるようにできることが知られている。f_aをこのように選んでおくとき、aに十分近い点xで正則で、xの近傍においてE上で恒等的に零になる関数はどれも、φは点xで正則として、φf_aという形をもつ。それ故、Dのさまざまな点aにこのように付随するf_aの集合は一つの「クザン所与」を構成する。従って、Dはその成分が（高々ひとつを除いて）すべて**単連結**であるような柱状領域とすると、**Dにおいて正**

則で、Eのすべての点において、しかもEの点においてのみ零になる関数fであって、次のような簡明な性質を備えたものが存在する。すなわち、Dにおいて正則で、E上で恒等的に零になる関数はどれもfで**割り切れる。** 言い換えると、φはDにおいて正則として、φfという形をもつ。

クザンの定理からの、あまり知られていないもうひとつの帰結は次のようなものである。Eは（その成分が、高々ひとつを除いて、すべて単連結な柱状領域Dにおける）$n-1$次元の複素解析的多様体を表わすとしよう。そのとき、D**において正則な**関数の値がE上で任意に与えられる。ただし、それらの値はE**の近傍における**ある正則関数のE上へのトレースを構成しているものとする。もっと正確に、またもっと一般的に言うと、こんなふうになる。Eの各点xに対して、xの近傍で正則な関数f_xが付随している。しかも、Eのどの点aもある近傍Vをもち、V内に位置するEのすべての点xに対して、f_xとf_aはxに十分近いEのどの点においても等しいというふうになっているとする。そのとき、あるD**において正則な**関数fが存在して、Eのどの点xに対しても、fとf_xはxに十分近いEのすべての点において等しい。この定理は後に証明される定理の特別の場合にすぎない（§V. 定理I）。（高等師範学校科学輯報61、150～151頁参照。）

（ゴシック体の箇所は、本文ではイタリック体で記されて強調されている。）

1）これは複素次元。

この第2節では、クザンの定理は余次元1の解析的多様体について、さまざまな情報を与えてくれることが語られている。クザンの定理は零点や極の分布を与えて解析関数を構成しようとする問題に応える定理であり、一変数解析関数論のミッタク・レフラーの定理の延長線上において理解するのが本来の姿と思う。だが、カルタンは幾何学的な角度から解釈し、新たな知見を導いた。取り上げる解析的多様体の余次元をもっと高めて、同様の知見の獲得をめざすならば、イデアルの理論の全面的な導入が必然的に要請されるであろう。解析関数論から解析幾何学への道がこうして開かれて、同じ客観的形式をもちながら、しかも同時に、異なる主観的内容を内包するふたつの理論がこうして形成されていったのである。

第3節は技術的な注釈なので省略して、第4節を一瞥したいと思う。

４．我々が想起したクザンの諸成果により、n 次元空間の $n-1$ 次元[1]の複素解析的多様体の**大域的**研究と、そのような多様体上の正則関数の大域的研究が可能になる[2]。だが、**任意次元の複素解析的多様体の大域的研究**[3]のためには、何事も試みられてこなかったように思われる。我々はこの論文において、この空隙を部分的にでも埋めたいと思う。この問題をもっと細かく分析しよう。ある領域 D において、ある集合 E が複素解析的多様体（あるいは、もっと簡単に、解析的多様体）であると言われるのは、D の各点 a がある近傍をもち、その近傍において集合 E は有限個の正則関数に共通の零点集合として規定される場合である。このような多様体を、D **において正則な**有限個もしくは無限個の関数に共通の零点の集合として、大域的に規定することは可能であろうか。我々はこの問いに対してひとつの部分的な回答を与える予定である（§IX、§Xおよび§XII）。さてここにもうひとつの問題がある。D において解析的多様体 E が与えられたとしよう。また、E の各点 x において、その点において正則な関数 f_x が与えられていて、E のどの点 a もある近傍 V をもち、交わり $E \cap V$ のすべての点 x に対して f_x と f_a は x に十分近い E のすべての点において等しいというふうになっているとしよう。このとき、D において正則な関数 f で、E のすべての点 x の近傍において、この点に関する関数 f_x と E 上で一致するものが存在するだろうか。［略］

岡潔のアイデア[4]により、ある任意の領域における正則関数の研究は、（その領域が全存在領域であるという条件のもとで）結局のところ、（十分に大きな次元の空間内に位置する）コンパクトで、しかも単連結な柱状領域の解析的多様体上の正則関数の研究に帰着される。ところでこのような多様体の場合はこの論文の方法で精密に取り扱うことができる（§X）。これまでに研究がなされた唯一の場合は、ただひとつの関数で作られる基底をもつイデアルという、非常に特別な場合（クザンの場合）のみだったが、それをおして、この数年間、私が**正則関数のイデアルの大域的な研究**を組織的に企画したいという気持ちに誘われたのは、そのためなのである[5]。（高等師範学校科学輯報61、152頁参照。）

（ゴシック体の箇所は、本文ではイタリック体で記されて強調されている。下線による強調はぼくが行なった。）

1）これは複素次元。

2）カルタンの立場が明快に打ち出されている。今日の複素解析幾何学の淵源であ

る。

3）カルタンの立場に立ってクザンの定理から出発すれば、進行方向は必然的に一般次元の複素解析的多様体の大域的研究になるであろう。

4）上空移行の原理。

最後の段落ではっきりと語られているように、関数論を解析的多様体上に移すというカルタンのアイデアに鍵を与えたのは上空移行の原理である。この原理により、領域は多様体に移されて、領域上の関数論を多様体上の関数論と同一視するという視点が確立される。少なくとも客観的形式に関する限り、これらのふたつの関数論は同等である。そこで関数論を領域、特に分岐点を内包する領域上で考察する（それは困難で、しかも方法がない）代わりに、解析的多様体に身を移して、イデアルの理論という武器を駆使して理論展開の路を探ろうというのがカルタンのアイデアの骨子であろう。

カルタンの立場から見れば、岡潔を不定域イデアルの理論へと導いた多変数の代数関数論は、代数幾何学の一般理論に包摂されてしまうであろう。実際に数学史はこのように推移して、今日（それは、現代数学が存分に展開され尽くして、終焉に達しつつある時代である）、ぼくらの手中にあるのは解析幾何学と代数幾何学である。だが、多変数の代数関数論の可能性は立ち消えてしまったわけではない。なぜなら、客観的形式の同一性とは裏腹に、代数幾何学と代数関数論の主観的内容は根本的に異なっているからである。

1949年の論文「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」

1949年のカルタンの論文「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」（フランス数学会雑誌78、29～64頁）の構成を見るために、まず初めに目次を挙げたいと思う。

VII. 多面体領域おけるイデアルとモジュール
VIII. 正則領域におけるイデアルとモジュール

この論文にも長い序文が附されているが、書き出しの部分に、岡潔の第7報への言及が見られる。岡潔は、1944年のカルタンの論文「*n*個の複素変数の解析関数のイデアル」を知らないままに、そこに書き留められた未解決の第一問題を解決したというのである。

序.——「*n*個の複素変数の解析関数のイデアル」(高等師範学校科学輯報、第3シリーズ、61、1944年、pp.149-197。この論文は、目下の研究の全体に渡って、頭文字I. F. A.を用いて表記されるであろう)という標題の論文の中で、私は複素変数解析関数の理論のいくつかの問題においてイデアルが果たす役割を説明しようと試みた。私は、設定される主要な諸問題を指摘して、それらを解決するべく努力を重ねたが、不完全な仕方でしか解決には達せず、鍵を握る二問題(I. F. A.の187頁の「第一問題」と「第二問題」)を、解答のないままにしておかなければならなかった。同じ諸問題が日本で岡潔によって独立に究明された。それに先行する岡の美しい作品の数々は、イデアルに関する研究へと私を導いてくれたのである。私の作品I. F. A.を知ることもできない状態で、1948年、岡はひとつの論文[1]を執筆した。岡はそこで同じ問題を研究している。ただし用語は少々異なっている[2]。この、フランス数学会雑誌の同じ巻に掲載される論文において、岡は、上述の鍵となる二問題のうち、第一問題を解決している。それ故、私の1944年の論文の果実よりもずっと完全な果実を獲得していることになるのである。岡の新しい作品を原稿の段階で知るという特権を利用して、私は、この理論の全容を見据えて、新しい作品を作ろうという気持ちに誘われた[3]。一方では、私はここで、岡の手で解決された「第一問題」[4](I. F. A.の187頁)の簡易化された解決を与える(下記の定理1)。他方、私は「第二問題」も解決する(下記の定理2)。その結果、私は解析的多様体の**大域的**研究に自由闊達に取り組むことができるようになる。

[以下、略。]

(ここまでで序文全体の三分の一ほどである。ゴシック体の「大域的」の一語は、原文ではイタリック体で記されて強調されている。下線による強調はぼくが行なった。)

1）第７報。

2）異なっているのは用語のみではなく、到達目標もまた異なっている。

3）論文「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」は1949年９月15日の日付で受理されている。岡潔の第７報が受理されてから11箇月後である。

4）岡潔の第７報では、問題(K)の解決を意味する。

「私の作品I. F. A. を知ることもできない状態で、1948年、岡はひとつの論文を執筆した。岡はそこで同じ問題を研究している」とカルタンは記し、続いて「岡は、上述の鍵となる二問題のうち、第一問題を解決している」と述べている。研究の動機は異なっても（すなわち、主観的内容は異なるとしても）、岡潔とカルタンは同一の問題に逢着し、しかも岡潔はカルタンに先立って解決に成功したのである。ぼくらはこのようなところに、岡潔とカルタンのふたつのイデアル理論の客観的同一性を感じることができるように思う。また、カルタンが岡潔を高く評価した理由とともに、第７報に改訂を加えたわけもまた容易に諒解することができるように思う。

カルタンは岡潔の論文の論理的構造に着目するばかりであり、岡潔の数学的意図には無頓着である。カルタンはハルトークスの逆問題やレビの問題の解決はめざさなかったし、問題そのものに関心を示した様子も見られないが、カルタンにはカルタンの数学上の意図があったであろう。それは、代数幾何学との融和、すなわち代数幾何学と同じ論理的基盤（イデアル論などの抽象代数学）の上に、複素解析幾何学を構成することである。だが、到達目標の設定はむずかしい。代数幾何学に範を求めてアナロジーをたどりつつ歩みを進めていくのも有力な方針であり、実際に強力に推進されたが、それだけでは明らかに不十分である。クザンの定理が余次元１の複素解析的多様体の情報を伝える定理と見なされたように、複素解析幾何学に固有の問題群が確保されて、理論形成の可能性が具体的に開かれていくためには、原型となる理論、すなわち岡の理論が前もって成立していなければならなかったのである。

岡の理論により、有限で不分岐な領域では、

正則領域であること、

正則凸状であること、

擬凸状であること

という三通りの概念は論理的に見てみな同義だが、これらのうち複素多様体に移せるのは「正則凸状」の概念のみである。そこでその点に着目して「正

則凸状な複素多様体」、すなわちスタイン多様体（正確な概念規定のためには、もう少し条件を書き並べなければならない）というものが考えられて、正則領域の一般化とみなされた。一変数解析関数論におけるリーマンのリーマン面の概念が抽象化されて一次元複素多様体（今日では、単にリーマン面と言えば、つねに一次元複素多様体のことである）の概念が得られたのと軌を一にして、多変数解析関数論ではスタイン多様体が選定された。さらに「特異点つきの複素多様体」、すなわち解析空間の概念が導入され、スタイン多様体に対応してスタイン空間の概念が設定された。複素解析幾何学の根幹をなす概念がこうして定まったが、これは岡の理論があって初めて可能になる出来事なのであった。

ハルトークスの逆問題の解決へと至る具体的な手順は、スタイン空間の理論のふたつの基礎定理（カルタンの名を冠する二定理。すなわち定理 A と定理 B）として集大成された。第７報の不定域イデアルの理論が解析的連接層の理論として翻案された。第８報の「基本的な補助的命題」は「解析空間の正規化」の理論として解釈された。また、本稿では詳述するゆとりがなかったが、クザンの第二問題を扱う第３報に現われた基本思想は、「岡の原理」と呼ばれて定着した。岡潔の理論が幾何学的に解釈されて複素解析幾何学の実質が成立したのである。

岡潔と複素多様体

複素解析幾何学を明確に拒絶しようとする岡潔の言葉も記録されている。以下の一文は講演「多変数解析函数について」からの引用である。

さて次は複素多様体[1)]ですが、関数論をあそこへ初めてもっていったのはたぶんワイル[2)]です。そしてワイルは一変数関数だけについて考え、何もこの解析平面においてのみ考えなくても、それと同じだけの性質をもっていたらやれると予想して、あゝいうものを定義したんだと思います。ところが一変数のときは、特にそれがコンパクトだったりしますと、複素空間で考えるのとだいたい同じことになると思いますが、二変数以後は決してそうではない。関数論の方からいいますと、ここでは微分することができない。それから積分することができない。その上、格子わけすることができない[3)]。それではいったい何ができるのかとききたい。代数の観点からいきますと、そうとは違います。あるものはできるでしょう。そしてま

た不定域イデアルというふうまでいけば、多様体の方へ移せる[4]のですが、よほどそんなものが出てくるんでない限り、関数論の方との連携はつかないのではあるまいかと思われます。しかも連携がついたら、その後は、適当にコンパクトにした複素数空間で考えればよいので、そこへ移せた後、さらに詳しく多様体のところで調べねばならない問題はありそうもない。数学のことだから、なんだそんな問題があったのかということになるかもしれませんが、ちょっと観念的に考えますと、それなら数空間の方へ移して考えたらよいではないかということになるのです。それでプロジェクティブ・スペース[5]とプロダクト・スペース[6]と、それからそのふたつの組み合わさった空間、まあそういうような所で多変数解析関数を調べよう。一応、そういうことになるのです。

（下線による強調はぼくが行なった。）

1）この「複素多様体」はリーマンによるリーマン面の概念を抽象化して得られた概念であり、カルタンの論文での「複素解析的多様体」とは別の概念である。後者は、局所的に正則関数系の共通零点集合として認識されるような、単葉領域内の集合である。

2）クラオス・フーゴー・ヘルマン・ワイル。ドイツの数学者。1885-1955。ここで言及されているのは、1913年に刊行されたワイルの著作『リーマン面の理念』（トイブナー社）である。この書物は多様体概念の初出として名高いが、ヒルベルトと言われている。

3）高次元の複素多様体の上では、微分すること、積分すること、それに格子分けすることの三つができないと言われている。この言葉の意味はよくわからないが、微分と積分に関しては、高次元複素多様体に対しては、リーマン面の場合と違って、一意化定理が成立しないという事実が示唆されているようにも思う。

「格子分けができない」という言葉はいっそう謎めいている。ともあれ想起されるのは、一変数関数論における楕円関数の等分理論である。これをモデルにして、アーベル多様体の等分理論が構成されている。しかしそれは岡潔の言葉とは無関係であろう。

4）不定域イデアルの理論を複素多様体に移そうとすれば、層の理論の形に変換しなければならないであろう。それはカルタンが実行した道である。

5）射影空間（英語）。

6）積空間（英語）。リーマン球面の積。

岡潔はクザンの問題と展開の問題を梃子（てこ）にして、ハルトークスの逆問題とその解決という雄大な構想を描いたが、これは岡潔に固有の構想であること、すなわち構想それ自体が純粋な独創であることにくれぐれも注意したいと思う。そうして岡潔はこの難路が踏破可能であることを確信し、したのであるから、岡潔は歴史の創造に成功したと言えるのである。他方、カルタンはクザンの研究を幾何学的に解釈して、複素解析幾何学へと進んでいったが、この路線自体はカルタンの独創ではなく、カルタンに先立って二本の有力なレールが敷かれていた。それは、リーマンのアーベル関数論を共通の泉とする二本の道、すなわちイタリア学派の代数曲面論（その雛形になったのは、リーマンの理論を翻案して成立した代数曲線論である）とワイルの一次元複素多様体論（これもリーマンの理論の翻案であり、同一の客観的形式を備えている）である。カルタンの前には歴史が存在し、カルタンはその歴史の流れを大きく延長することに成功したのである。等しく第一期の多変数解析関数論（岡潔の言う第二期に先行する多変数解析関数論の状勢というほどの意味である）を踏まえて出発したにもかかわらず、ここにおいて岡潔とカルタンの歩んだ道は截然と二分されたと言えるのではあるまいか。

本稿は、第７報に加えられたカルタンによる改変の理由と、それに対する岡潔の激怒の理由の解明を主題にして書き進められてきたが、ここまで書き継いでようやく結論を述べうる段階に達したように思う。カルタンの関心はすでに存在する数学史を延長することにあり、新しい歴史創造の契機を包摂する岡潔の理論の主観的内容には、共感することができなかったのであろう。そこでカルタンは岡潔の主観的意図が吐露されている箇所を、おそらく不要と見て、削除したり書き換えたりしてしまったのであろうとぼくは思う。これが本稿の結論である。

７．多変数代数関数論への道

最後に、内分岐領域の理論をめぐって多少、附言しておきたいと思う。
前世紀半ば、リーマンはリーマン面の概念を根底に据えて一複素変数の解析関数の一般理論を展開し、それに基づいてヤコビの逆問題を解決するという構想を描き、しかもそれを遂行した。こうして形成されたのが一変数の代数関数論である。

多変数解析関数論の領域において、リーマンと同じ道を歩もうとすれば

（「真精神を学んで真似をしても少しも真似をしたことにならない」という岡潔の言葉を、ここで想起するべきであろう。岡潔「数学に於ける主観的内容と客観的形式とについて（草案）」参照）、まず初めに多変数解析関数論の一般理論を建設し、その土台の上に多変数の代数関数論の構築をめざすという順序になるであろう。一般理論の核心は存在領域の幾何学的形状を描写することにあるが、不分岐で、しかも有限な領域の場合には、今では「それは擬凸状の領域である」と簡明に答えることが可能である。ぼくらはそこに、ハルトークスの逆問題の解決の数学的意味を見ることができるであろう。だが内分岐領域に移ると状勢は混濁し、グラウエルトの例とグラウエルトーレンメルトの例が明示しているように、明らかに言えることはもう何もない。

代数関数論では、一変数の場合、ヤコビの逆問題という問題が存在し、理論全体の方向を照らす羅針盤のような役割を果たし続けた。多変数の場合にはヤコビの逆問題のように明確な形に提示された問題は見あたらないが、「ヤコビ関数」という多変数の代数関数が存在する。それは、ヤコビの逆問題の解決を通じて認識される新しい関数であり、すでにヤコビとエルミートにより、ヤコビ関数の等分と変換の理論に先鞭がつけられている。理論形成の鍵はヤコビ関数論の手に握られているであろう。

［平成10年（1998年）8月12日］

追記

本稿は平成９年（1997年）10月26日、津田塾大学で開催された第８回数学史シンポジウム（10月25～26日）における講演

「岡潔の第７論文に加えられたH.カルタンによる
改訂の様式に関する一考察」

の記録である。

本稿は下記の三点においてなお未定稿の域にとどまっている。

1．多変数解析関数論の第一期（岡潔の言う「第二期」以前というほどの意味である）の研究の叙述が不十分である。

2．岡潔の講演「多変数解析函数について」が行なわれた日時と場所、および講演記録の掲載誌が不明である。

3．第１報の定理II、第２報の定理I、第５報の条件(β)はそれぞれ第７報の問題(C_2)、問題(E)、問題(C_1)に対応するが、この点の説明が

なされていない。

第五問題研究史 II

杉浦 光夫

§0 はじめに

Iで述べたように、位相群の概念が1920年代に導入され、1933年にフォン・ノイマンによって、第五問題は位相群がリー群となるための（位相的な）条件を求める問題として新しく定式化され直した。詳しく言えば、「局所ユークリッド位相群(位相多様体であるような位相群)はリー群か？」という形の問題が第五問題の現代的な形として認められて研究されるようになったのである。そしてこの形の問題は、フォン・ノイマン[52]によってコンパクト群に対し、またポントリャーギン[45]によってアーベル群に対し、肯定的に解決されたのであった。

この二つの結果が第五問題に関する30年代の基本的結果であった。このIIでは、これに続く40年代以降の研究について述べる。1940年代前半は第二次大戦と重なり、戦争による混乱や亡命、軍隊や戦時研究への動員等があり、純粋数学の研究はかなり低調であった。ただしこのような時勢下にあっても数学の研究を続けた人々も存在し、それらの努力は戦後に花を咲かせたのであった。第五問題について言えば、41年に発表

されたシュヴァレー[7]では、「可解な連結局所ユークリッド群はリー群である」ことが証明されている。この結果は以後の発展に大きな影響を与えた。第二次大戦が終ると、数学の各方面で新しい研究が次次に現われるようになった。第五問題ではモンゴメリの活躍が著しい。彼は戦前からジピンと共に変換群の研究を続けていたが、戦後変換群についての重要な仕事(後述)をした後、1947年から51年にかけて第五問題について単独でまたは協力者ジピンとの共著で[28][29][32][34][40][41]等を発表した。

また新しく日本でも、岩澤健吉、倉西正武、後藤守邦、山辺英彦等が第五問題の研究を開始し、この方面の研究が活発になった。またモンゴメリは、彼の勤務していたプリンストンの高等研究所にこの方面の研究者を招いたので、このことも研究の進歩に役立った。またアメリカでも若手の有力研究者としてグリースンが現われた。このような状勢の中で上述の意味の第五問題は、1952－53年に完全に解決したのであった。以下本稿では、この経過の中の主要な動きについて述べる。

最後で本稿では扱わない変換群についての第五問題に簡単に触れておこう。

1935年にH.カルタン[5]は、$\mathbb{C}^n$の有界領域の複素解析的自己同型群はリー群であることを示した。また1939年にマイヤース・ス

ティーンロッド[44]は、リーマン多様体の等距離変換全体の群はリー群となることを示した。これらの結果を一般化して 1946年にボホナー・モンゴメリ[1]は次の定理を証明した。

定理 局所コンパクト群Gが、C^2級微分可能多様体Mに、効果的に(effectively)、位相変換群として作用し、かつGの各元gの引起すMの同相写像$x \mapsto g \cdot x$がC^2級微分同相写像ならば、Gはリー群である。

この定理でC^2級とある所はC^1級でよいことを1950年に倉西[26]が証明した。このボホナー・モンゴメリ・倉西の定理が多様体の位相変換群がリー群となるための一般的定理としては現在でも最良のものである。ここでは各変換$x \mapsto g \cdot x$がC^1級と仮定されているので、ヒルベルトの要求するように連続性だけで話はすまない。この点で完全に位相的な仮定にした次の問題が考えられる:

問題 A 局所コンパクト群Gが、位相多様体Mに効果的な位相変換群として作用するときGはリー群となるか?

この問題Aは現在でも未解決である。問題Aの肯定的な解答は次の問題Bの否定的な解答と同値であることが知られている:

問題 B p進体の加法群Q_pは、位相多様体Mに効果的に作用できるか?

問題Bが肯定的な答を持つと仮定するといろいろ不自然な現象が生ずることが知られている(ヤン[57]、ブレドン・レイモンド・ウィ

リィアムズ[43])ので、問題Aは成立ちそうに思われるが、証明もできないし、反例も見つかって居ない状態である。このようにして現在でも変換群Gについては、変換の微分可能性を仮定しないとGがリー群であることが結論できないのである。

なお第五問題と直接関係はないが、リー群の部分群がGの連結リー部分群となるための必要十分条件が位相的な条件で与えられるという次の定理も日本の数学者によって証明された。

定理　リー群Gの部分群HがGの連結リー部分群となるための必要十分条件は、Hが弧状連結であることである。

必要性は明らかで十分性だけが問題である。$G=R^n$ のときは多くの人によって種々の解が与えられた(後藤編[17])。一般の場合は倉西と山辺[53]によって独立な証明が与えられた。[53]は極めて簡潔であるが、後藤[18]は詳細な証明を与えた。

§1　岩澤の研究

岩澤は、第五問題の研究についてポントリャーギンのコンパクト群に対する研究[46]から位相群をリー群の族の極限と考えるという視点と、(第二可算公理をみたす)有限次元のコンパクト群は、局所的には局所リー群とコンパクト完全不連結正規部分群の直積と同型となるという構造定理を受け継いだ。勿論任意の位相群がリー群の極限となるわけではないので、岩澤は局所コンパクト群でリー

群の族の極限となるような位相群のクラスを考え、それを考察の対象とし、このクラスの群を(L)-群と呼んだ。そして連結(L)-群に対して、上のポントリャーギンの構造定理に類似の構造定理(Theorem 11)を得るのに成功した。この構造定理から連結(L)-群が有限次元かつ局所連結(特に局所ユークリッド的)ならばリー群であることが導かれ、連結(L)-群に対し第五問題が解決されたのであった。

岩澤の研究に影響を及ぼしたもう一つの結果は次のシュヴァレー[7]の定理であった。

定理(シュヴァレー) 有限次元で局所連結の連続局所コンパクト群Gが可解群ならば、Gはリー群である。

可解群は、アーベル群から出発しアーベル群による拡大を有限回繰返して得られる群である。従ってアーベル群に対する第五問題が解けた後、その結果を可解群に拡張するためには、リー群であるという性質が群の拡大で保たれるかどうかを調べる必要がある。岩澤はこれについて、「局所コンパクト群Gの閉正規部分群Nと剰余群G/Nが共にリー群ならば、Gもリー群である」というリー群の拡大定理をTheorem 7として得た。この定理7は、岩澤論文で重要な役割を果している。(この拡大定理でN=アーベル群の場合は倉西[25]によっても独立に得られグリースン[14]で一般化されている。)

岩澤健吉は、戦後第五問題の研究を始め、その結果は1947年秋の日本数学会秋季総合分科会で、特別講演として発表され、翌年発行の『数学』(第1巻第3号)に論説「Hilbertの第五の問題 可解位相群の構造について」という論説[22]で印刷公刊された。英文の論文としては、"On some types of Topological groups"[23]という題で Ann. Math. 50 (1949) に発表された。英語版の[23]は日本語版の[22]の単なる翻訳でなく、この二つの論文の間には内容の出入がある。日本語版[22]は、副題にもあるように、可解群の場合が詳しく述べられ、その構造定理(定理6, 7, 8)の後に、「可解な局所ユークリッド群はリー群である」という上述のシュヴァレーの定理が定理9として証明されている。これはこのシュヴァレーの定理の証明が、岩澤の最初の目標の一つであったことを示している。英語版[23]の方では、これらの定理は一般論に吸収されている。例えば上のシュヴァレーの定理は、[23]では「可解な連結局所コンパクト群は(L)-群である」という定理(Theorem 10)により「(L)群が局所連結かつ有限次元ならば(特に局所ユークリッド的ならば)、リー群である」(Theorem 12)という一般的定理に帰着されている。

英語版[23]にあって日本語版にない重要な部分は、リー群の位相的構造に関する一般論で、半単純リー群の岩澤分解(Lemma 3.11)やそれに基づく岩澤・マリツェフの定理「任意の連結リー

群Gは、その一つの極大コンパクト部分群Kとユークリッド空間R^rの直積に同相である(Theorem 6)は、[23]にしかない。岩澤分解は半単純リー群の大域的構造定理として基本的なもので、表現論では常用されている。また岩澤・マリツェフの定理は、リー群の位相に関する基本定理で、位相的な見地からは、コンパクト・リー群のみを考えればよいことになる。

またLemma 3.7は、「局所コンパクト群GをR^nと同型な閉正規部分群Nで割った剰余群G/Nがコンパクト・リー群ならばGは分裂する。すなわちコンパクト部分群Kで、G=KN, K∩N=eとなるものが存在する」という定理で、後にブルバキ[2](第7章§3 命題3.4.5),[3](第9章§1定理1)によって、ワイルの基本定理「Gが連結リー群で、そのリー環がコンパクト半単純ならば、Gはコンパクトで、その中心は有限群である」を、構造論に深入りすることなく証明するのに本質的な道具として用いられた。また岩澤は、上述のリー群の拡大定理をTheorem 7として証明している。

このように、リー群論に関する基本定理を含む岩澤の論文[23]は、リー群論の古典の一つである。以下では第五問題に直接関係する後半(第4節以下)の主要部分の概略を紹介する。

先づリー群で近似できる局所コンパクト群として、次のように(L)-群を定義する。

定義　局所コンパクト群Gは、その閉正規部分群の族$(N_\alpha)_{\alpha\in A}$であって次の i) ii) をみたすものが存在するとき、(L)-群と呼ぶ：

i)　各$\alpha \in A$に対し，剰余群G/N_αはリー群である．

ii)　$\bigcap_{\alpha\in A} N_\alpha = \{e\}$.

この条件をみたす正規部分群の族$(N_\alpha)_{\alpha\in A}$を，(L)-群Gの基準系と呼ぶ。Gが連結のとき，この定義の条件は次のように言い換えることができる：

Lemma 4.1　連結局所コンパクト群Gが(L)-群となるための必要十分条件はGの単位元eの任意の近傍Uに対し，Uに含まれるコンパクト正規部分群Nであって，G/Nがリー群となるものが存在することである。

また次のLemmaが成立つ。

Lemma 4.2　任意の連結(L)-群Gは最大コンパクト正規部分群Nを含む．Gの任意のコンパクト正規部分群N_1はNに含まれる。そしてG/Nはリー群である．

(L)-群の部分群と剰余群については，次の定理が成立つ：

Theorem 8.　1) (L)-群Gの任意の閉部分群Hはまた(L)-群である。2) (L)-群Gが連結のときその任意の閉正規部分群Nによる剰余群G/Nも(L)-群である。

次に(L)-群の拡大について，リー群の拡大定理(Theorem 7)を用いて次の定理が得られる：

Theorem 9 ((L)-群の拡大定理)　Gを連結局所コンパクト群，

Nをその閉正規部分群とする。このときNとG/Nが共に(L)-群ならば，G自身も(L)-群である。

この定理を繰返し適用すると，「(L)-群から出発して(L)-群による拡大を有限回繰返して得られる群は(L)-群である」ことがわかる。特に可解群は，アーベル群から出発してアーベル群による拡大を有限回施して得られる群である。一方ポントリャーギンの構造定理により，局所コンパクト・アーベル群Gはコンパクト部分群Nによる剰余群がリー群となるからLemma 4.1により(L)-群である。この二つの事実から次の定理が導かれる：

Theorem 10. 可解な連結局所コンパクト群は(L)-群である。

次に岩澤は，この論文の頂点である(L)-群の構造定理をTheorem 11として証明する。これは連結(L)-群は，局所的には，局所リー群とコンパクト群の直積と同型となるという定理である。この定理から直ちに局所ユークリッド的な連結(L)-群はリー群であることが導かれ，連結(L)-群に対して第五問題が肯定的に解決される。この定理を証明するために，著者は四つのLemma (Lemma 4.6, 4.7, 4.8, 4.9) を新たに示す他に，第2.3節のいくつかの結果を用いている。これらの結果を先ず掲げておこう。

Theorem 2. Gを連結位相群，Kをそのコンパクト正規部分群とする。今Kの中心化群$C_G(K)$をHとすれば，G=HKである。

Theorem 3 G, KをTheorem 2と同じとする。このときKの任意

の正規部分群 K'は、Gの正規部分群でもある。

Theorem 4. 連結位相群Gのコンパクト可換正規部分群は、Gの中心に含まれる。

Lemma 2.4. Gを連結位相群，Nをそのコンパクト正規部分群とする。Nの交換子群$[N, N]$の閉包を，$D_1(N)=N_1$とおき、Nの中心をZとするとき，$N=N_1Z$で、$N_1\cap Z$は完全不連結群である。

Lemma 3.6. Gをn次元連結可解リー群とするとき，Gのリー部分群 $H_1, \cdots H_n$ であって，次の 1) 2) 3) をみたすものが存在する：

1) 各$H_i \cong \mathbb{R}$ or $\mathbb{T}$, 　2) $G_i = H_{i+1} \cdots H_n \ (0 \leqq i \leqq n-1)$ は、Gの $(n-i)$次元 リー部分群で，G_iはG_{i-1}の正規部分群である。

3) $G=G_0$ で Gの任意の元gは，連続かつ一意的に

$$g = h_1 h_2 \cdots h_n, \quad h_i \in H_i$$

と表わされる。

Lemma 4.6 Gを連結局所コンパクト群，NをGの完全不連結正規部分群，L'を $G'=G/N$ の局所リー部分群とする。このときGの局所リー部分群Lで，$L\cap N = e$ かつ LN/N はL'の開集合となるものが存在する。

Lemma 4.7 Gを連結局所コンパクト群，Nをそのコンパクト正規部分群とし，Nを含むGの部分群H_1で $H_1/N \cong \mathbb{R}$

となるものが存在すると仮定する。このときGの部分群Hで，$H_1 = HN$，$H \cap N = e$，$H \cong \mathbb{R}$となるものが存在する。

Lemma 4.8　Gを連結(L)-群，ZをGのコンパクト可換正規部分群とする。いまG/Zはリー群であるとし，G/Zの根基(最大可解正規部分群)がN/Zであるとする。NはZを含むGのリー部分群である。このとき，Gの半単純局所リー部分群Lであって，LN/NがG/Nの閉部分群となるようなものが存在する。

Lemma 4.9　Gを連結局所コンパクト群，MをGの閉正規部分群でG/Hが半単純リー群となるものとする。さらにNをMの部分群で，Gの中心に含まれるもので，1次元トーラス群$\mathbb{T}$の有限または無限個の直積$\mathbb{T}^{\Omega}$と同型となるものとする。今Gの局所リー部分群L_1であって，$L_1 \cap M = e$でL_1M/MはG/Mの閉部分群であり，Mは局所リー部分群L_2とNの直積と局所同型となるものが存在すると仮定する。このときGは，局所リー群LとNの部分群$N' = \mathbb{T}^{\Omega'}$($\Omega'$は$\Omega$のある部分集合)の直積と局所同型となる。

これらの結果の証明をこゝで述べる余裕はないが，いづれも初等的な考察で証明できる。次の補助定理は*Theorem* 11の証明中で岩澤が用いているものであるが，二回使われるので，便宜上ここにまとめておいた。

補助定理　Gを連結局所コンパクト群，Dをそのコンパクト完全不連結正規部分群とする。剰余群 $G'=G/D$ が単位元の任意の近傍 $U'=U/D$ に含まれる局所リー部分群 L' とコンパクト正規部分群 Kの直積に，局所同型であると仮定する。このとき，G自身も単位元の任意の近傍Uに含まれる局所リー部分群Lとコンパクト正規部分群 Kの直積に局所同型となる。

証明　G'の正規部分群K'は，Dを含むGの正規部分群Kにより，$K'=K/D$の形に書ける。KはUに含まれる。D, K'がコンパクトだから，Kもコンパクトである。また Lem. 4.6 によって，このときGの局所リー部分群Lで $L\cap D=e$，LD/D はL'の開集合となるようなものが存在する。そして$L'K'$がG'における単位元の近傍を含むことから，LKはGにおける単位元のある近傍を含む。さらに，$L'\cap K'=e$ だから，$L\cap K\subset L\cap D=e$，$L\cap K=e$ である。一般性を失うことなくLは連結と仮定してよい。このときLの元とKの元が常に可換であることを言えば，Gは局所的にLとKの直積と同型になる。

それを言うために交換子の集合

$$[L,K]=\{usu^{-1}s^{-1}\mid u\in L,\ s\in K\}$$

を考える。各$s\in K$に対し，$f_s(u)=usu^{-1}s^{-1}$ とおくと，f_s は連続だから連結なLの像 $f_s(L)$ は連結で $f_s(e)=e$ を含む。従って，$[L,K]=\bigcup_{s\in K} f_s(L)$ は連結である。

一方 L', K' は直積因子だから $[L', K'] = e$, $[L, K] \subset D$ となる。D は完全不連結, $[L, K]$ は連結で e を含むから $[L, K] = e$ となる。従って L の各元は K の各元と可換である。これですべてが証明された。

Theorem 11 (連結 (L)-群の構造定理) G を連結 (L)-群とし、U を単位元 e の G における任意の近傍とする。このとき U に含まれる局所リー部分群 L とコンパクト正規部分群 K が存在して、G は局所的には L と K の直積と同型になる。逆に局所リー群とコンパクト群の直積に同型な連結位相群 G は、(L)-群である。

証明　ペーター・ワイルの定理によりコンパクト群は (L)-群であるから後半は明らかである。

前半を証明するのに三段階にわたってより単純な場合に帰着させる。G は連結 (L)-群であるから、Lem. 4.1 により e の任意の近傍 U に含まれる、コンパクト正規部分群 N であって、G/N がリー群となるものが存在する。いま $N_1 = \overline{[N, N]}$ とおく。即ち N_1 は N の位相的交換子群である。Z を N の中心とするとき、Lem. 2.4 により、$Z_0 = N_1 \cap Z$ は完全不連結である。Z_0 は N の閉部分群だからコンパクトである。$N_1 = D_1(N)$ および Z は、N の特性部分群 (N のすべての自己同型で不変) だから、G の正規部分群で、Z_0 もそうである。そこで (G, Z_0) は上の補助定理の条件をみたす。従って次の (1) が証明された。

(1) G/Z_0 に対し、定理11(前半)が成立てば、Gに対しても定理11(前半)が成立つ。

これで問題は、GからG/Z_0に還元された。群G/Z_0は一般論で$Z_0=e$となる場合であるから、上の(1)は言い換えれば、次の(1′)となる。

(1′) 定理11(前半)を証明するには、$Z_0=e$となる場合に証明すれば十分である。

N_1の中心をZ_1とすると$Z_0=N_1\cap Z\subset Z_1$である。一方Theorem 2により、$N=C_N(N_1)N_1$だから$Z_1\subset Z$でもあるから$Z_1\subset Z_0$で、$Z_1=Z_0$である。そこで$Z_0=e$となる場合には$Z_1=e$でもある。このとき$G_1=C_G(N_1)$とすると$G_1\cap N_1=Z_1=e$であるから、Theorem 2により、

$$G=G_1\times N_1$$

である。ここでN_1は、Gのコンパクト正規部分群である。従って才二段の還元として、次の(2)が成立つ。

(2) $Z_0=e$のとき、$G/N_1\cong G_1$に対し、定理11(前半)が成立てば、Gに対しても定理11(前半)が成立つ。

G_1を改めてGとかけば、G_1を考えることは、一般論で$N_1=D_1(N)=e$となる場合即ちNが可換である場合を考えることである。つまり(2)は、次の(2′)と同値である。

(2′) $Z_0=e$のとき、定理11(前半)を証明するには、Nが可換なコンパクト正規部分群である場合を考えれば十分である。この場合NはGの中心に含まれる(Theorem 4)。

さて、アーベル群の構造定理により、コンパクト・アーベル群Nを適当な完全不連結部分群N_0で割れば、剰余群N/N_0はトーラス群の直積$\mathbb{T}^\Omega$と同型になる。

(G, N_0)は上の補助定理の条件をみたすから、第三段目の還元として、次の(3)が成立つ。

(3)　$Z_0 = e$　のとき、G/N_0に対し定理11(前半)が成立てば、Gに対しても定理11(前半)が成立つ。

G/N_0を考えることは、一般論で$N_0 = e$, $N = \mathbb{T}^\Omega$の場合を考えることだから、(3)は次の(3')と同値である。

(3')　$Z_0 = e$　のとき定理11(前半)を証明するには、$N = \mathbb{T}^\Omega$のときに証明すれば十分である。

いま、連結リー群G/Nの根基(最大可解正規部分群)をM'/Nとし、n次元連結可解リー群M'/Nに対しLem. 3.6の条件をみたすn個の1次元リー群を$H_1'', \cdots H_n''$とする。各H_i''はNを含むGのリー部分群H_i'により、$H_i'' = H_i'/N$の形になる。このとき$M' = M_0' = H_1' \cdots H_n'$で、各$M_i' = H_{i+1}' \cdots H_n'$は$M_{i-1}'$の正規部分群である。各$H_i'/N \cong \mathbb{R}$ or $\mathbb{T}$である。$H_i'/N \cong \mathbb{R}$のときはLem. 4.7によりGの部分群H_iで

$$H_i' = H_i N, \quad H_i \cap N = e, \quad H_i \cong \mathbb{R}$$

となるものが存在する。$H_i'/N \cong \mathbb{T}$の場合も、今$N = \mathbb{T}^\Omega$であることを用いるとやはりGのリー部分群H_iで

$$H_i' = H_i N, \quad H_i \cap N = e, \quad H_i \cong \mathbb{T}$$

となるものが存在する。従って次の関係が成立つ。

$$M_i' = H_{i+1} \cdots H_n N, \quad M_{i-1}' = H_i M_i', \quad H_i \cap M_i' = e.$$

一方、Lem. 4.8 により、Gは局所リー部分群L_1で、$L_1 \cap M_0' = e$で$L_1 M_0'/M_0'$はG/M_0'の開集合となるものが存在する。そこでLem. 4.9を$M_{n-1}', \cdots, M_1', M_0', G$に順次適用して行けば、結局$G$の局所リー部分群$L$とコンパクト正規部分群$K \cong \mathbb{T}^{\Omega'}$($\Omega'$は$\Omega$のある部分集合)が存在して、$G$は局所的には、$L$と$K$の直積と同型となる。これでTheorem 11は証明された。∎

この構造定理(Theorem 11)により、任意の連結(L)-群Gは、局所的には局所リー群とコンパクト群の直積である。所がコンパクト群に対しては、第五問題は肯定的に解決されていて、ポントリャーギン[47]によれば、有限次元かつ局所連結な(特に局所ユークリッド的な)コンパクト群はリー群である。従ってTheorem 11から直ちに次のTheorem 12が導かれる。

Theorem 12 ((L)-群に対する第五問題の解決) (L)-群Gが、有限次元かつ局所連結ならば(特に局所ユークリッド的ならば), Gはリー群である。

上述のTheorem 12の証明では、Theorem 11を用いて、既知のコンパクト群の場合に帰着させたわけであるが、Theorem 12のすぐ後で、岩澤は次のような注意をしている:

「注意 Theorem 12だけを証明するためには、Theorem 11の長い証明は必ずしも必要でない。すぐわかるようにLemma 4.1を用いて、コンパクト群の場合と類似の議論（ポントリャーギン[47] §45）によってTheorem 12を証明することができる。」

定理12によって、岩澤はそれまでに、第五問題が解決したコンパクト群、可換および可解局所コンパクト群に対して、統一的な視点を与えた。即ちこれらの三種の群は、(L)-群であり、リー群によって近似され、その（射影）極限となる群である点に第五問題がこれらの群に対し解けたという事実に対する内在的根拠があることを示したのである。

こうして岩澤は、(L)-群という広いクラスの群に対し、第五問題を解決したが、岩澤はこの論文でさらに一歩踏み出した考察を行った。即ち岩澤は、この(L)-群が局所コンパクト群全体の中で、どのような位置を占めるのかという問題を考えたのである。先ず岩澤は次の二つの定理を証明した：

Theorem 22 任意の連結局所コンパクト群Gは、(L)-群である正規部分群の中で最大のものQを含む。QはGにより一意的に定まる。Gの任意の(L)-群である連結正規部分群はQに含まれる。そして剰余群G/Qは、e以外の(L)-群である正規部分群を含まない。

Theorem 23. 任意の連結局所コンパクト群Gの正規部

分群 R_0 で G/R_0 が (L)-群であるようなものの中で、最小のもの R が一意的に定まる。R 以外の R の任意の正規部分群 R' に対しては、R/R' は (L)-群とならない。

この Q と R が、任意の連結局所コンパクト群 G の中で、(L)-群の理論が適用できる限界を与えているわけである。つまり G/Q および R に対しては (L)-群の理論は全く無効である。所が岩澤は、この限界は存在しないのではないかと考えた。つまり常に

$$Q = G, \qquad R = e$$

であると予想したのである。すなわち岩澤は次の (C_1) を予想した。

予想 (C_1) 任意の連結局所コンパクト群は (L)-群である。

またこの (C_1) と次の予想 (C_2) が同値であることを岩澤は指摘した：

予想 (C_2) 連結局所コンパクト群 G の単位元 e の近傍 U で、e 以外の正規部分群を含まないものが存在するとき（このとき G は<u>小さい正規部分群</u>を持たないという）、G はリー群である。

(C_1) ⇒ (C_2) の証明

G が小さい正規部分群を持たない連結局所コンパクト群とする。いま U を e 以外の正規部分群を含まない G の単位元近傍とする。今 (C_1) が成立つと仮定すると、G は (L)-群である。従って

Lem. 4.1により、Uに含まれる閉正規部分群Nで、G/Nがリー群となるものが存在する。所がUはe以外の正規部分群を含まないのだから、$N=e$で$G/N=G$はリー群である。

$(C_2)\Rightarrow(C_1)$の証明.

任意の連結局所コンパクト群Gをとる。Theorem 22により、(L)-群である、Gの正規部分群中最大のものQが存在し、G/Qはe以外の(L)-群である正規部分群を持たない。特にG/Qのコンパクト正規部分群はeだけである。G/Qは局所コンパクト群だから、単位元の近傍の基としてコンパクト近傍がとれる。G/Qの単位元のコンパクト近傍Uに含まれる閉正規部分群はコンパクト正規部分群だからeとなる。従ってG/Qは小さい正規部分群を持たない連結局所コンパクト群である。そこで(C_2)が成立つと仮定するとG/Qはリー群 従って(L)-群である。QとG/Qが共に(L)-群であるから、(L)-群の拡大定理(Theorem 9)により、Gも(L)-群である。これで$(C_2)\Rightarrow(C_1)$が証明された。

予想(C_1)が重要なのは、もし(C_1)が成立てば第五問題が一般に解決するからである。いま、1930年代以後第五問題の解と考えられて来た次の命題を(V)とする：

(V) 任意の有限次元、局所連結な(特に局所ユークリッド的な)局所コンパクト群Gはリー群である。

$(C_1)\Rightarrow(V)$の証明

いまGを有限次元局所連結な局所コンパクト群とする。Gの単位元連結成分G_0は局所連結という仮定から、Gの開部分群である。

仮定(C_1)が成立つとき、連結局所コンパクト群G_0は(L)-群である。今、仮定によりG_0は有限次元かつ局所連結だから、(L)群G_0はTheorem 12により、リー群である。開部分群G_0がリー群だからGもリー群である。

後に山辺英彦[54] [55]は、予想(C_1), (C_2)が成立つことを証明し、(V)の形の第五問題を最終的に解決した。すなわち(V)の形の第五問題は岩澤の予想した形で解決したのである。

§2 グリースンの研究

グリースンは、1921年カリフォルニアに生れ、42年エール大学を卒業し、召集されて暗号解読の仕事に従事し、戦後ハーヴァード大学のフェローとなり第五問題の研究を始める。50年にハーヴァードの助教授となるが、朝鮮戦争が始まったため、再び暗号の仕事に召集された。第五問題についての彼の決定的な仕事[15](1952年)はこの間になされた。

グリースンは位相群Gの単位元eの近傍Uで、$\{e\}$以外の部分群が含まれないものがあるとき、Gは<u>小さい部分群</u>を持たないと呼んだ。この性質に注目したのは、シュヴァレーが最初

で、彼は1933年にC.R.ノート[15]で、次のことを証明した：

「可分な局所コンパクト群Gが局所連結で小さい部分群を持たないとすればGはリー群である。」

「しかし自分の証明は不十分だった」とシュヴァレーは間もなく友人H.カルタンに告げた（H.カルタン[5]序文脚註）.

このシュヴァレーの予想を、グリースンは改めて取上げ、彼の第五問題研究の鍵とした。グリースンのこの方面の最初の論文「局所ユークリッド群における平方根」[11]（1949年発表）において、彼は次の定理を証明した。

定理A　小さい部分群を持たない局所ユークリッド群Gにおいては単位元eの二つの近傍M, Nが存在してMの各元の平方根がNの中に唯一つ存在する.

さらにグリースンは、論文「局所コンパクト群における弧」[12]において、次の定理を証明した。

定理B．二つ以上の元を含む連結局所コンパクト群は、弧を含む．次元が正の連結局所コンパクト群は、一径数部分群を含む。

シュヴァレーは、定理Aを用いてGの単位元のある近傍は一径数部分群で埋めつくされることを証明した（「グリースンの一定理について」[9]）。

これは小さな部分群を持たない局所ユークリッド群Gは、eのま

わりでリー群と同様の状況となっていることを示している。しかし G がリー群であることを示すためには，G の群演算が e のまわりで解析的（少なくとも C^r 級）であることを示さなければならない。その方法は簡単には見つからなかった。

グリースンは，論文「局所コンパクト群の構造」[14] において，リー群の族で近似できる開部分群を含む位相群を考え，一般化リー群 (generalized Lie group) と名づけた。正確な定義は次の通りである：

定義　位相群 G の単位元 e の任意の近傍 U に対して，G の開部分群 G_1 と G_1 のコンパクト正規部分群 C で，$C \subset U$ かつ G_1/C はリー群となるものが存在するとき，G を一般化リー群という。

すなわち一般化リー群とは，リー群の族の射影極限となる開部分群を含む位相群のことである。岩澤の (L)-群とは，リー群の族の射影極限となる群のことであったから，この二つの概念は極めて近く，特に連結群に対しては一致する。

一般化リー群の方が一般性においては優るが，第五問題では連結群だけを考えればよいから (L)-群の方が直接的で便利だとも言える。要するに一長一短である。グリースンは [14] で，一般化リー群についてのいくつかの定理を証明した。それらは，岩澤の (L)-群についての結果と平行したものが多い。例えば，一般化リー群 G の剰余群 G/N は，また一般化リー群である（定理 4.3）。N 及び G/N が共に一般化リー群ならば，G も一般化リー群で

ある（拡大定理）。(定理4.7)。任意の局所コンパクト群の組成列の長さは有限である（定理5.5）。可解な局所コンパクト群は、一般化リー群である（定理6.4）。任意の連結局所コンパクト群Gは、最大可解正規部分群R（根基）を持つ。RはGの閉集合で、G/Rの根基は{e}である。

最後にグリーソンは、次の予想（C）を述べている：

予想（C）　任意の局所コンパクト群Gは、一般化リー群である。

これは岩澤の予想(G)に対応する予想であり、53年に山辺[55]によって正しいことが証明された。この(C)から、前節で述べた(V)という第五問題の解決が直ちに導かれる。

しかし岩澤論文の中心である(L)-群の構造定理（Theorem 11）と(L)-群に対する第五問題の解決（Theorem 12）に対応する定理は[14]には見当らない。

グリーソンの論文「小さい部分群を持たない群」[15]は、第五問題研究史上画期的な仕事である。フォン・ノイマン以後研究者が皆「局所ユークリッド群（有限次元局所連結な局所コンパクト群と言っても殆んど同じ）はリー群か？」という形で第五問題をとらえていた時、グリーソンはこれと異なる形の問題「小さい部分群を持たない有限次元局所コンパクト群はリー群か？」という問題を提出し、それを独自の方法で解いたのであった。これは岩澤の予想(C_2)よりも少し仮定が強くなっているが、同じ方向の予想が肯定的に解けるという発見であった。

グリースンの仕事の解説をする前に「小さい部分群を持たない」という仮定の意味を考えて見よう。実数の加法群$\mathbb{R}$は、小さい部分群を持たない。それはアルキメデスの公理「任意の $a>0$, $b>0$ に対し、自然数nが存在して $na>b$ となる」から直ちに導かれる。$\mathbb{R}$の部分群Hが$\{0\}$でなければ正の元aを含むので、任意の$b>0$に対し、0の近傍$(-b, b)$はHを含まないからである。一般に次の定理が成立つ。

定理D　任意のリー群Gは、小さい部分群を含まない。

証明　Gのリー環を$\mathfrak{g}$とする。指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$は、解析写像で、$\mathfrak{g}$における$0$のある閉近傍$N_0$を、$G$における単位元$e$のある近傍$N$の上に写す解析的同相写像を引起す。任意の$X \in \mathfrak{g}$, $t \in \mathbb{R}$に対し、$a(t) = \exp tX$ とすれば、aは$\mathbb{R}$からGへの解析的準同型写像である。aをGの<u>一径数部分群</u>という。Gの任意の一経数部分群は、すべてこの形に表わされる。いま$\mathfrak{g}$にノルム$\| \ \|$を入れておく。N_0は有界凸集合としてよい。$N^* = \exp\left(\frac{1}{2}N_0\right)$ とおくと、N^*もGにおけるeの閉近傍である。いま帰謬法により定理Dを証明するため、$N^* \supset S \neq \{e\}$となる部分群Sが存在したと仮定して矛盾を導く。このとき $e \neq s \in S$ が存在する。$s \in N^* = \exp\left(\frac{1}{2}N_0\right)$だから

$$(1) \qquad s = \exp X, \qquad X \in \frac{1}{2}N_0$$

となるXが唯一つ存在する。$e \neq s$ だから、$0 \neq X$ で $\|X\| > 0$

である。従って $\mathbb{R}$ におけるアルキメデスの公理により、次の (2) が成立つ。

(2) 集合 $A=\{\|kX\|=k\|X\| \mid k=1,2,\cdots\}$ は、上に有界でない。

$\frac{1}{2}N_0$ は有界集合だから、従って十分大きな自然数 m をとれば、$mX \notin \frac{1}{2}N_0$ となる。このような自然数 m の内最小のものを $k+1$ とすれば、

(3) $X, 2X, \cdots kX \in \frac{1}{2}N_0, \quad (k+1)X \notin \frac{1}{2}N_0$

となる。$X, k\ X \in \frac{1}{2}N_0$ だから

(4) $X=\frac{1}{2}Y, \quad kX=\frac{1}{2}Z$ となる $Y, Z \in N_0$ が存在する。

いま、N_0 は凸集合だから、その二点 Y, Z を結ぶ線分の中点 $W \in N_0$ である。そこで

(5) $N_0 \ni W=\frac{1}{2}(Y+Z)=X+kX=(k+1)X$

となる。今仮定 $S \subset N^*$ だから

(6) $s^{k+1}=\exp(k+1)X \in N^*=\exp(\frac{1}{2}N_0)$

である。従って

(7) $s^{k+1}=\exp(k+1)X=\exp V$ となる $V \in \frac{1}{2}N_0$ が存在する。

$(k+1)X=W \in N_0$ (5) かつ $V \in \frac{1}{2}N_0 \subset N_0$ (7) であり、$\exp$ は N_0 上一対一写像だから

(8) $W=(k+1)X=V \in \frac{1}{2}N_0$

である。この (8) は (3) の $(k+1)X \notin \frac{1}{2}N_0$ と矛盾する。これで定理 D は証明された。(この証明はヘルガソン [21] p.150, 552 のものを、アルキメデスの公理を強調する形に書直したものである)。

定理Dにより，小さい部分群を持たないことは，位相群がリー群となるための必要条件である。グリースンは適当な付加条件があれば，これが十分条件でもあることを証明した。すなわち彼は[15]において，次の定理を証明した。

グリースンの定理．小さい部分群を持たない有限次元局所コンパクト群Gはリー群である．

この定理を証明するためのグリースンのプロットは明快である。その主要なアイディアは，このような群Gに対し，リー群の場合の随伴表現に類似の有限次元線型表現Φを構成する点にある。このために，適当な条件をみたすGの一径数部分群γの集合Γを考え，各$\gamma \in \Gamma$の単位元eの接ベクトルにあたる元$z_\gamma \in L^2(G)$を定義し，その集合$Z = \{z_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$は実ベクトル空間の構造を持つことを示す。$G$が有限次元ならば$Z$も有限次元である。$G$の各元$\sigma$の引起す内部自己同型写像$\alpha_\sigma : \tau \longmapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$は，$\Gamma$の変換を引起すから，$\Phi_\sigma(z_\gamma) = z_{\sigma\gamma\sigma^{-1}}$により，$G$の$Z$上の連続表現$\Phi$が定義される。

この計画の問題点は，一径数部分群$\gamma \in \Gamma$が微分可能で，接ベクトルにあたるz_γが定義できるという点にある。Gは位相群で，微分構造はあらかじめ与えられてはいないので，微分可能ということの意味を与える所から出発する必要がある．そのため，グリースンは次のような工夫をした。

以下Gを小さい部分群を持たない局所コンパクト群とする。このときGは第一可算公理をみたすから，通常の点列による極限のみを考えればよい。点

列 $(x_n)_{n\in N}$ がコンパクト集合 C に含まれるとき、その部分列で収束するものがある。この部分列の記述をはぶくため、グリースンは自然数の集合 $\mathbb{N}$（離散空間と考える）のチェック・コンパクト化 $\mathbb{N}^*$ を考えた。C 内の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を、$\mathbb{N}$ から C への連続写像 $x : n \longmapsto x_n = x(n)$ と考えるとき、x は $\mathbb{N}^* \longrightarrow C$ の連続写像 x^* に拡張できる。任意の $\xi \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ に対し、$x^*(\xi) = \lim\limits_{n\to\xi} x_n$ と記す。これは元の点列 (x_n) の部分列の極限に外ならない。通常の極限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ が存在するのは、すべての $\xi \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ に対し $\lim\limits_{n\to\xi} x_n$ が存在して、その値が ξ によらないで一定のときに限る。f が C 上の連続写像ならば、$\lim\limits_{n\to\xi} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\xi} x_n)$ が成立つ。特に (σ_n)、(τ_n) がそれぞれ G のコンパクト集合 C, K 内の点列であるとき、$\lim\limits_{n\to\xi} \sigma_n\tau_n = (\lim\limits_{n\to\xi} \sigma_n)(\lim\limits_{n\to\xi} \tau_n)$ が成立つ。

またグリースンは、位相群 G のコンパクト集合全体の集合 $\mathcal{C}$ に位相を入れ G のコンパクト集合の列 $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $D \in \mathcal{C}$ に収束するということを定義した。

これはコンパクト対称集合の半群 $(U(s))_{s\geqq 0}$ を定義するのに用いられる。

$\mathbb{R}^n$ における 0 を中心とする半径 $s \geqq 0$ の閉球にあたる、コンパクト対称集合の族 $(U(s))_{s\geqq 0}$ で、半群性 $U(s)\,U(t) = U(s+t)$ をみたすものを一つ構成しておく。そして連続函数 $\alpha : [0, 1] \longrightarrow G$ で リプシッツ条件 $\alpha(t)^{-1}\alpha(s) \in U(|s-t|)$ をみたすものを一つ構成する。

そして、G 上の左不変ハール測度に関する実数値2乗可積分函数

全体の作る実ヒルベルト空間 $L^2=L^2(G)$ を考える。そして G の各元 σ を σ の L^2 上に引起す左移動 $L_\sigma : f(\tau)\mapsto f(\sigma^{-1}\tau)$ と同一視する。$L_\sigma f=\sigma f$ と記すことにする。

2.3　そして G 上の台がコンパクトな実数値連続函数 x で、$x(\varepsilon)>x(\sigma)$ $(\forall\sigma\neq\varepsilon)$, $|x(\sigma\tau)-x(\tau)|\leqq s$ $(\forall\sigma\in U(s))$ をみたすものを構成する。このとき $\|\sigma x-x\|\leqq s$, $(\sigma\in U(s))$ が成立つ。このとき上のリプシッツ条件をみたす $\alpha:[0,1]\to G$ を用いると

$$\|\alpha(s)x-\alpha(t)x\|=\|\alpha(t)^{-1}\alpha(s)x-x\|\leqq|s-t|$$

である。$\alpha(1)\neq\alpha(0)$ だから ある $y\in L^2$ に対し $(\alpha(1)x,y)\neq(\alpha(0)x,y)$ となる。そこで実数値函数 $f(s)=(\alpha(s)x,y)$ は、位数1のリプシッツ連続函数だから、特に絶対連続であり、従って殆んど到る所微分可能で、$f(s)=f(0)+\int_0^s f'(t)dt$ と表わされる。$f\neq$ 定数だから $f'\neq 0$ であり、ある $t\in[0,1]$ において $f'(t)\neq 0$ である。これは

(9)　$$\lim_{n\to\infty} n\{(\alpha(t+\tfrac{1}{n})x,y)-(\alpha(t)x,y)\}\neq 0$$

を意味する。(有限な極限が存在し0でない)。今、この t に対し

(10)　$$\sigma_n=\alpha(t)^{-1}\alpha(t+\tfrac{1}{n})$$

とおくと $\sigma_n\in U(\frac{1}{n})$, $\|\sigma_n x-x\|\leqq\frac{1}{n}$ となる。このとき点列 $(n(\sigma_n x-x))_{n\geqq 1}$ は L^2 の単位　　に含まれる。B は L^2 の弱位相に関しコンパクトだから、ある $\xi\in N^*-N$ に対し、弱極限

$$z=\text{weak}\lim_{n\to\xi} n(\sigma_n x-x)$$

が存在する。　(9)により

$$(z, \alpha(t)^{-1}y) = \lim_{n\to\xi} n\{\alpha(t+\tfrac{1}{n})x, y) - (\alpha(t)x, y)\} \neq 0$$

だから

(11) $\qquad z \neq 0$

である。(10) の $\sigma_n \in U\left(\frac{1}{n}\right)$ から出発すると，任意の $s \in R$ に対し

(12) $\qquad \sigma_n^{[ns]} \in U(|[ns]|\cdot\frac{1}{n}) \subset U(|s|)$

となる。ここで $[ns]$ は ns の整数部分を表わす．$U(|s|)$ はコンパクトだから．ある $\xi \in N^{*}-N$ に対し，極限

(13) $\qquad \gamma(s) = \lim_{n\to\xi} \sigma_n^{[ns]} \in U(|s|)$

が存在する。任意の $s, t \in R$ に対して

$$e(n) = [(s+t)n] - [sn] - [tn]$$

とおくと，$e(n) = \pm 0$ または 0 であるから，$\sigma_n \to \varepsilon \ (n\to\infty)$ により $\sigma_n^{e(n)} \to \varepsilon$

であり．

$$\gamma(s+t) = \lim_{n\to\xi} \sigma_n^{[(s+t)n]} = \lim_{n\to\xi} \sigma_n^{[sn]} \lim_{n\to\xi} \sigma_n^{[tn]} \lim_{n\to\xi} \sigma_n^{e(n)} = \gamma(s)\gamma(t)$$

となる。すなわち γ は G の一径数部分群である。(12) から

(14) $\qquad \gamma(s) \in U(|s|) \quad (\forall s \in R)$

が成立つ。いま $s \downarrow 0$ のとき $U(s) \to \{\varepsilon\}$ だから，$s_0 > 0$ が存在して $0 \leqq s \leqq s_0$ となるすべての s に対し，$\|U(s)z - z\| \leqq \frac{1}{2}\|z\|$ となる。$U(s)z$ の閉凸包を $K(s)$ とすれば任意の $A \in K(s)$ に対し，$\|Az - z\| \leqq \frac{1}{2}\|z\|$ が成立つから

(15) $\qquad \|Az\| = \|Az - z + z\| \geqq \|z\| - \|Az - z\| \geqq \frac{1}{2}\|z\| > 0 \quad (0 \leqq s \leqq s_0)$

となる。γ の定義から

(16) $\qquad \dfrac{\gamma(s)x - x}{s} = \lim_{n\to\xi} \dfrac{n}{[ns]}\{\sigma_n^{[ns]}x - x\} = \lim_{n\to\xi}\{\phi_{ns}\, n(\sigma_n x - x)\}$

ただし

(17) $\phi_{n,s}=\frac{1}{[ns]}\sum_{i=1}^{[ns]}\sigma_n^{i-1}\in K(s)$

である。Lemma 1.2.3 により $K(s)$ はコンパクトだから、ある ξ に対し $\lim_{n\to\xi}\phi_{n,s}=\phi_s$ が存在する。(5)(17)より $\|\phi_{n,s}z\|\geqq\frac{1}{2}\|z\|$ $(0\leqq s\leqq s_0)$ であるから、$\gamma(s)x-x=s\phi_s z\neq 0$ $(0<s\leqq s_0)$ となる。特に γ は自明でない一経数部分群である。すなわち次の 2.6 が示されたのである。

2.6 G の自明でない一経数部分群で、$\gamma(s)\in U(|s|)$ $(\forall s\in\mathbb{R})$ をみたすものが存在する

このことを証明するのに用いた G の性質は、コンパクト対称集合の半群 $U(s)$ の存在だけである。グリースンが [12] で示したように、任意の局所コンパクト群はこのような半群 $U(s)$ を含むか、いくらでも小さい連結コンパクト部分群を含む。連結なコンパクト群は一経数部分群を含むから、次のことが成立つ。

定理　連結局所コンパクト群 G が $\{e\}$ でないとき、G は自明でない一経数部分群を含む。

G の一経数部分群 γ で定数 $t_\gamma>0$ が存在して、すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して、$\gamma(t)\in U(t_\gamma|t|)$ となるもの(リプシッツ一経数部分群)の全体を Γ と記す。このような t_γ の下限を $|\gamma|$ と記す。

2.7　2.3 で構成した連続函数 $x\in L^2(G)$ と任意の $\gamma\in\Gamma$ に対し L^2 内の弧 γx は微分可能である。

$\gamma(-\frac{1}{n})\in U(\frac{|\gamma|}{n})$ だから、$\|n(x-\gamma(-\frac{1}{n})x\|\leqq|\gamma|$ となる。L^2 の閉球は

弱コンパクトだから、従ってある $\xi \in N^* - N$ に対し，弱極限

(18) $$z = \text{weak} \lim_{n \to \xi} n(x - \gamma(-\tfrac{1}{n})x) \in L^2$$

が存在する。$s > 0$ に対し $\gamma(s) = \lim_{n \to \infty} \gamma(1/n)^{[ns]} = \lim_{n \to \xi} \gamma(1/n)^{[ns]}$ だから

(19) $$\begin{aligned}\frac{\gamma(s)x - x}{s} &= \lim_{n \to \xi} \frac{n}{[ns]} \left(\gamma(\tfrac{1}{n})^{[ns]} x - x\right) \\ &= \lim_{n \to \xi} \left\{\frac{1}{[ns]} \sum_{i=1}^{[ns]} \gamma\left(\frac{i}{n}\right)\right\} \left\{n(x - \gamma(-\tfrac{1}{n})x\right\} \\ &= \int_0^1 \gamma(st)\, dt \cdot z\end{aligned}$$

となる。この積分の被積分函数 $\gamma(st)$ は，(s, t) の連続函数であるから，$s \downarrow 0$ のとき極限を積分記号下でとることができる（1.2.5 による）。そこで L^2 の強位相で

(20) $$\lim_{s \downarrow 0} \frac{\gamma(s)x - x}{s} = \int_0^1 \gamma(0)dt \cdot z = z$$

となる。$s < 0$ のときには，$(\gamma(s)x - x)/s = \gamma(s)((\gamma(-s)x - x)/(-s))$ だから

(21) $$\lim_{s \to 0} \frac{\gamma(s)x - x}{s} = z$$

が成立つ。即ち 弧 $\gamma(t)$ は $s = 0$ で微分可能で，導値（derivative）は z である。任意の $t \in R$ に対し $\lim_{s \to 0} \frac{\gamma(t+s)x - \gamma(t)x}{s} = \gamma(t) \lim_{s \to 0} \frac{\gamma(s)x - x}{s}$ $= \gamma(t)z$ であり，γz は到る所微分可能である。いまこの $s = 0$ での導値を z_γ と記し，

(22) $$Z = \{z_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

とおく。

2.8 接ベクトルの集合 Z は実ベクトル空間の構造を持つ。

なぜならば、任意の $\gamma\in\Gamma$ と $t\in R$ に対し $\delta(s)=\gamma(ts)$ とおけば、$\delta\in\Gamma$ で

(23) $$tz_\gamma = z_\delta \in Z$$

である。また任意の $\beta,\gamma\in\Gamma$ に対して

$$\delta(s)=\lim_{n\to\infty}\left(\beta(\tfrac{1}{n})\gamma(\tfrac{1}{n})\right)^{[ns]}$$

とおくと、$\delta\in\Gamma$ であり、数値函数の積の微分法と同様にして

(24) $$z_\beta + z_\gamma = z_\delta \in Z$$

が成立つ。

また このとき、次のことが証明される。

2.12 $\beta,\gamma\in\Gamma$, $z_\beta = z_\gamma$ ならば $\beta=\gamma$ である。

G の任意の元 σ による内部自己同型 $\tau\mapsto\sigma\tau\sigma^{-1}$ によって、一径数部分群 $\gamma(s)$ からもう一つの一径数部分群 $\sigma\gamma(s)\sigma^{-1}$ が生ずる。また内部自己同型によってリプシッツ性は保たれるから $\gamma\in\Gamma$ ならば $\sigma\gamma\sigma^{-1}\in\Gamma$ である。そこで

$$\Phi_\sigma(z_\gamma) = z_{\sigma\gamma\sigma^{-1}}$$

によって、Z 上の変換 Φ_σ を定義すれば、Φ_σ は Z 上の線型変換で、写像 $\Phi:\sigma\mapsto\Phi_\sigma$ は、G の Z 上の弱連続表現となる。

2.18 G が有限次元のとき、$\dim G = n$ とすれば、$\dim Z \leqq n$ である。

証明 帰謬法によって証明するために、$\dim Z > n$ と仮定して矛盾を導く。このとき Z には $n+1$ 個の一次独立な元 $z_1, z_2, \cdots,$

z_{n+1} が含まれる。$Z_1 = \{z_\gamma \in Z \mid |\gamma| \leqq 1\}$ とおく。必要があれば、z_i をその実数倍で置換えて $z_i \in Z_1$ $(1 \leqq i \leqq n+1)$ としてよい。Z_1 は凸集合である (2.17) から、$0, z_1, \cdots, z_{n+1}$ を頂点とする $(n+1)$ 次元単体 S は Z に含まれる: $S \subset Z_1 \subset Z$ であるから、次元の単調性により

$$n+1 = \dim S \leqq \dim Z = n$$

となるがこれは矛盾である。

2.19　定理　G を小さい部分群を持たない有限次元連結局所コンパクト群で $G \neq \{e\}$ とする。今 G の中心は完全不連結であるとする。このとき G は有限次元実ベクトル空間 Z 上に、自明でない連続線型表現 Φ を持つ。

証明　2.18 により Z は有限次元だから、Z 上の弱位相は、通常の位相と一致し、Φ は G の Z 上の連続線型表現である。2.6 により G は自明でない一径数部分群 $\gamma \in \Gamma$ を含む。いま G の中心は完全不連結と仮定しているから、連結な γ は G の中心には含まれない。従って G のある元 σ に対し、$\sigma\gamma\sigma^{-1} \neq \gamma$ となる。

従って、2.12 により、$\Phi_\sigma(z_\gamma) \neq z_\gamma$、$\Phi_\sigma \neq I$ (恒等変換) となり、Φ は自明でない。この定理 2.19 と既知の結果を組合せて、上に述べたグリースンの定理が証明される。

グリースンの定理．　小さい部分群を持たない、有限次元局所コンパクト群 G はリー群である。

証明. $n=\dim G$に関する帰納法で証明する。

第一段 $n=0$ のとき. このときGは離散群であるか, 完全不連結である。

後者の場合には, Gは小さい部分群を持ち, 仮定に反する。従ってGは離散群で, 0次元リー群である。

第二段 $n \geqq 1$ でGは連結のとき, $n>m \geqq 0$ となる自然数 m に対し, m次元群に対しては定理は成立つと仮定する。二つの場合(A)(B)に分けて考える。

(A) Gの中心が完全不連結のとき

定理2.19により, このときGは有限次元実ベクトル空間Z上に自明でない連続表現Φを持つ。 $K=\mathrm{Ker}\,\Phi$ とおく。KはGの閉部分群だから, 局所コンパクトで小さい部分群を持たない。局所コンパクト群 $G/K \cong \Phi(G)$ は, リー群$GL(Z)$の中への一対一連続準同型写像を持つからリー群である(シュヴァレー[8] Ch.IV.§XIV.命題I (p,130)). Φは自明でないから, $\Phi(G)$は2点以上を含む弧状連結集合であり,

(25) $$\dim G/K=\dim\Phi(G) \geqq 1$$

である。一方 $\dim K \leqq \dim G=n<+\infty$ であり. モンゴメリの定理([34]定理7)により. もし $\dim K=\dim G$ ならば,

(26) $$\dim G/K=0$$

である。(26)は(25)と矛盾するから, $\dim K<\dim G$ である。従

って帰納法の仮定がKに適用され，Kはリー群である。G/Kもリー群だから，リー群の拡大定理（岩澤［23］定理7，グリースン［14］（定理3.1））により，Gはリー群である。

（B）Gの中心が連結部分群$C\neq\{e\}$を含むとき．

このとき第一段からわかるように$\dim C\geqq 1$である。Cは局所コンパクト，アーベル群だから一般化リー群である。一方Gの部分群として，Cは小さい部分群を持たないから，それ自身リー群である。従って$C\cong R^k\times T^{n-k}$で，Cはコンパクト・リー群T^nの被覆群である。従ってグリースン［14］定理4.2により，Gのコンパクト集合Dであって，標準写像$\varphi:G\to G/C$により，G/Cのある単位元近傍Eの上に同相に写されるものがある。そしてGは$C\times D$と同相な部分集合を含む。Cは多様体だから，$\dim(C\times D)=\dim C+\dim D$である。従って

$$\dim G\geqq\dim(C\times D)>\dim D=\dim G/C$$

となる。後藤・山辺［19］により，剰余群G/Cは小さい部分群を持たない局所コンパクト群だから，帰納法の仮定により，G/Cはリー群である。Cもリー群だから，再びリー群の拡大定理により，Gはリー群である。

第三段　$n\geqq 1$でGが連結でないとき

Gの単位元連結成分をG^*とする。第二段により，G^*はリー群である。一方G/G^*は完全不連結局所コンパクト群であるから，一般化

リー群である（ポントリャーギン[47] Ch. III §22 E1）。従って一般化リー群の拡大定理（グリースン[13]定理4.7）により、G自身が一般化リー群である。Gは小さい部分群を持たないから、定義により、Gはリー群である開部分群G_1を含み、従ってG自身リー群である。

このグリースンの論文[15]は、局所ユークリッド群から小さい部分群を持たない局所コンパクト群へという視点の転換と、このような群に対し随伴表現に類似の有限次元表現Φを構成するというアイディアが際立っている。また一径数部分群の接ベクトルに当るものを考えるために$L^2(G)$に埋め込んで考えるという工夫や、その際の微分可能性を保証するためにリプシッツ条件を導入することや、それを位相群G内で定義するためにコンパクト対称集合の半群を構成するなど種々の独創的なアイディアを打出している。

岩澤論文[23]が、リー群、位相群に対する深い学識の上に立って書かれているのに対し、グリースンの論文[15]は、アイディアの勝利という印象が強い。

ともあれ、この二つの論文によって、第五問題の研究は大きく転換し、最終的解決も視野に入って来たのであった。

§3　モンゴメリ・ジピンの論文

「小さい部分群を持たない有限次元局所コンパクト群はリー群

である」というグリースンの定理は、リー群を位相群のカテゴリーの中で位相代数的に特徴付けて居り、第五問題の一つの解を与えていると言うことができる。

しかし1930年代以来、第五問題の標準的解釈とされてきた次の(V)および(V_0)は未解決であった。

(V) 有限次元・局所連結な局所コンパクト群はリー群であるか？

(V_0) 局所ユークリッド群（位相多様体である位相群）はリー群であるか？

これを解決したのがモンゴメリ・ジピンの論文「有限次元群の小さい部分群達」[42]であった。

[42]で扱う群は、有限次元の局所コンパクト群であって、可分距離群となるものである。便宜上このような群のクラスを、クラスMと呼ぶことにしよう。可分距離群であるという附加条件は、常に必要というわけではないが、モンゴメリのこれまでの論文では当時の次元論を適用するために常にこれを仮定していたので、ここでも仮定したのである。

前に岩澤の研究について述べた所の最後で、岩澤の予想(C_1)「任意の連結局所コンパクト群は、(L)-群である」から直ちに(V)が導かれることを注意した。グリースンの予想(C)「任意の局所コンパクト群は、一般化リー群である」からも同様に(V)が導かれる。[42]でモンゴメリ・ジピンが示したことは、(C)または(C_1)そのものでなく、多少の附加条件がついた命題から附加条件のついた(V)が導かれるということであった。彼等は、次元に関する帰納法がうまく働くような群

のクラスとして、次の条件(I)をみたすクラスMの群Gを考え、それについて次の定理Aを証明した。

条件(I)　GはクラスMの群(有限次元・局所コンパクト可分距離群)であって、連結かつ局所連結であり、Gと異なるすべての閉部分群は一般化リー群である。

定理A　群Gが条件(I)をみたすとき、Gの閉正規部分群Hであって一般化リー群であり、剰余群G/Hは条件(I)をみたしかつ小さい部分群を持たないようなものが存在する。

先づこの定理Aから導かれる結論をいくつか述べよう。

定理B　局所連結なクラスMの群はすべてリー群である。

証明　帰謬法。局所連結なクラスMの群であって、リー群でないものが存在したと仮定して矛盾を導く。そのような群の内で次元最低の連結群を一つとりGとする。後藤守邦の結果[16]を用いると、Gと異なるGのすべての閉部分群は、一般化リー群であり、Gは条件(I)をみたす。従って定理Aにより、Gの閉正規部分群Hで一般化リー群であるものが存在し、G/Hは(I)をみたしかつ小さい部分群を持たない。このときグリーソンの定理[15]により、G/Hはリー群従って一般化リー群である。そこで一般化リー群の拡大定理([14]定理4.7)により、G自身も一般化リー群である。Gは連結だから(L)-群である。Gは有限次元かつ局所連結と仮定されているから、岩澤[23]の定理12により(L)-群Gはリー群である。これはGの仮定に反し矛盾である。これで定理Bは証明された。

これで可分距離群であるという附加条件の下に，(V)が証明されたわけである。[42]には書かれていないが，上の(V_0)の形の第五問題は，定理Bから導かれることを注意しておこう。

定理C．Gが局所ユークリッド位相群ならば，Gはリー群である。

証明　Gは局所ユークリッド群だから，有限次元かつ局所連結である。従ってGの単位元連結成分G_0は，Gの開部分群である。G_0は有限次元連結局所コンパクト群である。局所ユークリッド性からG_0は第一可算公理をみたすから，距離付け可能な位相群である（角谷[58]）。さらにG_0における単位元eの近傍$V=V^{-1}$であって，R^nと同相なものが存在する。G_0は連結だからVから生成され，$G_0=\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$となる。V従って$V^n$は可分だから，$G_0$も可分である。従って$G_0$は定理Bの仮定をみたすので，リー群である。開部分群G_0がリー群だから，Gもリー群である。

さらに定理Aとグリースン[15]から直ちに次の系が得られる。

定理A系　条件(I)をみたす，クラスMの群Gはすべて一般化リー群である。

証明　定理Aにより，このときGの閉正規部分群Hであって，G/Hが小さい部分群を含まないものが存在する。G/Hは有限次元局所コンパクト群だから，グリースンの定理[15]によりG/Hはリー群である。仮定により，Hは一般化リー群だから一般化リー群の拡大定理([14]定理4.7)により，Gも一般化リー群である。∎

さらにモンゴメリー・ジピンは、条件(I)は不必要で、一般に次の定理Dが成立つことを証明している。

定理D（有限次元局所コンパクト群で可分距離群となる）クラスMの任意の群Gは、一般化リー群である。

証明　モンゴメリの論文「有限次元群」[34]には次の定理が証明されている。

定理（モンゴメリ[34]）Gをn次元局所コンパクト群とするとき、Gの単位元eの開近傍U(e)であって、0次元コンパクト集合Zとn次元の連結かつ局所連結な局所群Lで、Gの正規部分群となるものの、位相的直積となるものが存在する。

これはポントリャーギンの有限次元コンパクト群に対する構造定理[46] [47]および岩澤の(L)-群に対する構造定理[23]を、一般の有限次元局所コンパクト群に拡張したものである。ただしここでZは群であることは示されて居らず、その点で[47] [23]より弱い結果に終っている。このモンゴメリの定理により、クラスMの群Gがn次元のとき、連結かつ局所連結なn次元局所コンパクト群Lと、LからGへの一対一連続準同型写像fが存在して、f(L)はGの単位元成分G_0の中で稠密になる。定理Bにより、Lおよびf(L)はリー群で、後藤の定理[16]によると$\overline{f(L)}=G_0$は一般化リー群である。Gは局所コンパクト群だから、開部分群Hであって、$H\supset G_0$かつH/G_0がコンパクトとなるものが存在する（グリースン[14]補助定理1.4）。そこで一般

化リー群の拡大定理（[14] 定理4.7）により，Hは一般化リー群である。従ってHを閉部分群とするGも一般化リー群である。■

この定理Dは，有限次元の可分距離群であるという附加条件の下で，グリーソンの予想(C)が成立つことを示している。

最後に定理Aの証明の大筋を述べておこう。定理Aの結論は，G/Hが条件(I)をみたすこととG/Hが小さい部分群を持たないことの二つである。この内前半は一つの点を除いては一般論から直ちに導かれる。いま位相群Gの閉正規部分群Hによる剰余群G/Hを考える。クラスMと条件(I)を定義する諸性質の内有限次元性を除く他のすべての性質（局所コンパクト，可分，距離づけ可能，連結，局所連結，一般化リー群であること）は，Gで成立てばG/Hでも成立つ。またモンゴメリ[34]により，Hがアーベル群ならば，Gが有限次元のときG/Hも有限次元となる。従って以下述べる三段階の還元により，定理Aの証明が次の定理1，2，3の証明に帰着される。ここでの要点はG/Hが小さい部分群を持たないことを示す点にある。

第一段階では，Gの中心Zが$\{e\}$である場合に帰着させる。Zは局所コンパクト・アーベル群であるから，一般化リー群であり，あるコンパクト0次元部分群Z^*による剰余群Z/Z^*はリー群となる。特にZ/Z^*は小さい部分群を持たない。従って$G=Z$のときは，$H=Z$として定理Aが成立つ。そこで以下$G \neq Z$とする。今G/Z^*は[34]により有限次元である。このときG/Z^*の中心Z_0は小さい部分群を

持たないことが言えるから、グリースンの定理[15]により Z_0 は可換リー群である。$f: G \to G/Z^*$ を標準写像とする。Z_0 が離散群のときは $(G/Z_*)/Z_0 \cong G/f^{-1}(Z_0)$ は中心が $\{e\}$ となる。Z_0 が離散群でないときは、その単位元連結成分を Z_1 とするとき $\dim Z_1 > 0$ である。そして局所的切断面の存在から $G_1 = (G/Z^*)/Z_1 \cong G/f^{-1}(Z_1)$ は、G/Z_* より低次元となることがわかる；

$$\dim G_1 = \dim G/Z_* + \dim Z_1 < \dim G/Z_*$$

そこで以上の操作を有限回繰返えすことにより、次の定理1が証明される。

定理1　G が条件(I)をみたすクラス M の群であるとき、G の閉正規部分群 H であって H は一般化リー群で剰余群 G/H は(I)をみたしかつ小さい部分群を持たないようなものが存在する。

以下定理1の G/H を改めて G と置く。このとき G は(I)をみたすクラス M の群で中心は $\{e\}$ である。この新しい群 G が小さい部分群を持たないことを言えばよい。それを次の定理2と定理3に分けて証明する。

定理2.　G が(I)をみたすクラス M の群で中心が $\{e\}$ となるものとする。このとき正次元の G の部分群と可換であるようなコンパクト0次元無限群を、G は含まない。

定理の証明はかなり長く、ここで立入って紹介することはしないが、この定理2から次の三つの系が導かれる。

$\dim \bar{H} > 0$ に反し矛盾である。従って $\dim \bar{H} = 0$ であり，$\bar{H}$ はコンパクト 0 次元群である。$\bar{H}$ の任意の元 x を取り，x を含む G の最小閉部分群 $A = \overline{\langle x \rangle}$ を作る。A はコンパクト 0 次元アーベル群だから系 2.1 により有限群である。さらに $A \subset \bar{H} \subset U$ で U に含まれる有限群は $\{e\}$ のみであるから，$A = \{e\}$，$x = e$ である。そして x は $\bar{H}$ の任意の元だから $\bar{H} = H = \{e\}$ となる。これで定理3系は証明された。∎

定理 2.3 を用いて定理3系が証明されたが，さらにそれと定理1を組合せて定理 A が証明される。実際定理1の部分群 H をとると，G/H は条件 (I) をみたすクラス M の群で，中心は $\{e\}$ である。従って定理3系により，G/H は小さい部分群を持たない。これで定理 A が証明された。∎

§4　山辺の研究

モンゴメリ・ジピンの論文[42]によって「(V_0) 任意の局所ユークリッド群はリー群である。」という形での第五問題は解決した。しかし「(V) 任意の有限次元，局所連結な局所コンパクト群 G はリー群である」という命題は「G が可分距離群である」という附加条件の下でしか証明できなかった。この附加条件は，連結成分の個数が高々可算個のリー群では常に成立って居るので，特に強い限定条件では

ないが、それだけにそれは不必要ではないかとも考えられる。

またグリースンの予想「(C) 任意の局所コンパクト群は、一般化リー群である」に対しても、「有限次元かつ可分距離群である」という附加条件のもとで (C) が成立つことを、[42] は証明したのであった。ここでもこの附加条件をつけない。元来の (C) が成立つかが問題になる。

また岩澤の予想「(C_2) 小さい正規部分群を持たない任意の連結局所コンパクト群はリー群である」は、有限次元という附加条件をつけ、さらに「小さい正規部分群を持たない」という仮定を強めて、「小さい部分群を持たない」としたとき成立つことがグリースンによって証明された。これに対しても元来の (C_2) が成立つかどうかが問題となる。

これらの残された問題を解き、第五問題を最終的に解決したのが、山辺英彦が 1953 年に発表した二つの論文 [55]「岩澤とグリースンの予想について」、[56]「グリースンの定理の拡張について」であった。山辺は、グリースンの方法を改良して次の二つの結果を得た。

定理A ([55]定理) 連結局所コンパクト群 G が、小さい正規部分群を持たなければ、G は小さい部分群を持たない。

定理B ([56]定理2からの結論) 小さい部分群を持たない局所コンパクト群 G の任意の一径数部分群はリプシッツの条件をみたし、そのグリースンの意味の接ベクトルの空間 L は常に有限次元である。

定理A.Bの証明については、後で説明する。定理Bでは、Lの近傍がGの近傍と同相になること（[56]定理2）から、ノルム空間が局所コンパクトならば有限次元であるというリースの定理[59]に帰着させるのである。

定理A.Bによって、上に述べた第五問題について残された問題が解決することを説明しよう。先づ次の定理3の証明に用いるマリツェフの定理を掲げる。（山辺では岩澤[23]のLemmaを挙げているが、このマリツェフの定理の方が直接的である。）

マリツェフの定理（[61]，[20] Lemma 28）．Aが局所コンパクト群Gの連結可換閉正規部分群で、AおよびG/Aが共にリー群であるものとする。このとき $G'=G/A$ の任意の一径数部分群 $g'(t)$ に対し、Gの一径数部分群 $g(t)$ であって、標準準同型写像 $f: G \longrightarrow G/A$ により $f(g(t))=g'(t)$ $(\forall t\in\mathbb{R})$ となるものが存在する。

定理3（[56]）．小さい部分群を持たない連結局所コンパクト群Gはリー群である。

証明　任意の $g\in G$ と、Gの一径数部分群 $x=x(r)$ に対し、$y=y(r)=gx(r)g^{-1}$ はまた一径数部分群である。x,y のeにおける接ベクトルを $\tau(x)$, $\tau(y)$ とすると、対応 $\Phi_g: \tau(x) \longmapsto \tau(y)$ は接ベクトル空間Lの一次変換である。そして $\Phi_{gh}=\Phi_g\cdot\Phi_h$ であるから、Φ は群GのL上の線型表現である。そしてLemma 10により Φ は連続である。いま $\mathrm{Ker}\,\Phi=H$ とおくと、剰余群 G/H は局所コンパクト

群で、リー群 $GL(L)$ の中への一対一連続準同型写像を持つから、G/H はリー群である。(シュヴァレー[8] p.130)。

以下 G がリー群であることを、次の (a)(b) の二つの場合に分けて証明する。

(a) H が完全不連結のとき

G の閉部分群 H は、局所コンパクトである。従って H が離散群でなければ、H は小さい部分群を持つことになるから、G も小さい部分群を持ち、仮定に反する。従って H は離散群であるから、G はリー群 G/H と局所同型で、またリー群である。

(b) H が完全不連結でないとき

このとき H の単位元成分 H_0 は、連結局所コンパクト群で二点以上を含む。そこでグリースンの結果([15] 定理2.6)により H_0 は自明でない一径数部分群 $\mathfrak{X}$ を含む。$H = \mathrm{Ker}\,\Phi$ だから、H の各元 h は $\mathfrak{X}$ と可換であり、$\mathfrak{X}$ は H の中心 Z_H に含まれる。このとき H/Z_H は完全不連結となる。なぜならばそうでないと仮定すれば、上のグリースンの定理により、H/Z_H は自明でない一径数部分群を含む。このとき上述のマリツェフの定理により、H は Z_H に含まれない一径数部分群を含むこととなり、上に述べたことに反し矛盾である。

いま H は小さい部分群を持たないから、H/Z_H も小さい部分群を持たない(倉西[25] Lemma 6)。従って完全不連結局所コンパクト群 H/Z_H は離散群でなければならない。そこでリー群 $G/H \cong G/Z_H / H/Z_H$

は、G/Z_H と局所同型であり、G/Z_H はリー群である。一方 Z_H は局所コンパクト・アーベル群であるから、一般化リー群であり、かつ小さい部分群を持たないからリー群である。従ってリー群の拡大定理（[23]定理7、[14]定理3.1）により、Gはリー群である。∎

<u>定理4</u>　小さい正規部分群を持たない連結局所コンパクト群はリー群である。

証明　これは定理Aと定理3から直ちに導かれる。

<u>定理5</u>　任意の局所コンパクト群は一般化リー群である。

証明　定理4は岩澤の予想（C_2）が正しいということであるから、岩澤の証明した（C_2）と（C_1）の同値性により、次の（C_1）が成立つ。

（C_1）　任意の連結局所コンパクト群は（L）-群である

そこで今任意の局所コンパクト群Gをとるとき、その単位元連結成分G_0は、連結（L）-群であり、従って一般化リー群でもある。剰余群G/G_0は完全不連結局所コンパクト群であるから、コンパクト開部分群を持つ。コンパクト群は一般化リー群だから、G/G_0は一般化リー群である。従って一般化リー群の拡大定理（[14]定理4.7）により、Gは一般化リー群である。∎

既に第1節の最後に述べたように、岩澤の予想（C_1）から、30年代以後第五問題の標準的解釈とされてきた（V）が導かれる。すなわち次の定理Cが成立つ。

定理 C　任意の有限次元、局所連結の局所コンパクト群はリ

一群である。

こうして、山辺の二つの論文[55] [56]によって、リー群自身に関する第五問題について、当時懸案となっていた問題はすべて肯定的に解決したのである。

次に[55] [56]の実質的内容である定理A, Bの証明の大筋を述べよう。

以下Gを連結局所コンパクト群とし、UをGにおけるeのコンパクト近傍とする。いまグリースンのコンパクト対称集合の半群を次のように構成する。Nを自然数列$(0, 1, 2, \cdots)$の一つの部分列とし、集合列$(D_n)_{n\in N}$で次の(i)(ii)(iii)をみたすものを考える：(i) $D_n \to e\ (n\to\infty)$,　ii) $D_n^n \subset U$,　$D_n^{n+1} \not\subset U$　iii) $D_n = D_n^{-1}$で、D_nはコンパクト。(このような(D_n)が存在することはすぐ確められる。$0 \leqq i \leqq 2n$のとき、$D_n^i \subset D_n^{2n} = (D_n^n)^2 \subset U^2 =$コンパクトだから、$0 \leqq s \leqq 2$となる任意の有理数$s \in \mathbb{Q}$に対し$(D_n^{[sn]})_{n\in N}$の適当な部分列をとったとき、極限$\lim D_n^{[sn]} = D(s)$が存在する。$0 \leqq r \leqq 2$となる任意の実数$r$に対して

(1)
$$E(r) = \bigcap_{s>r} D(s)$$

とおくとき、次の(2)が成立つ：

(2)
$$D(s_1)D(s_2) = D(s_1+s_2),\quad E(r_1)E(r_2) = E(r_1+r_2),\quad s_1, s_2 \in \mathbb{Q},\ r_1, r_2$$

$\in \mathbb{R}$で、$s_1, s_2, r_1, r_2, s_1+s_2, r_1+r_2 \in [0, 2]$.

さらに$r_1 \in \mathbb{Q}$のとき次の(3)が成立つ。

(3) $E(r_1+r_2)=\bigcap_{s>r_1+r_2}D(s)=D(r_1)\bigcap_{s>r_2}D(s)=D(r_1)E(r_2)$

さらに $D(1)\cap\partial U\neq\phi$ (∂UはUの境界)であることから $D(1)\neq\{e\}$ であり, $D(s)$, $E(r)$は自明でない半群である。さらに, $\partial D(1)=\phi$ ならば $D(1)^2=D(2)=D(1)$で, $D(1)^{-1}=D(1)$ だから次の(4)が成立つ:

(4) $\partial D(1)=\phi$ ならば $D(2)=D(1)$ はGの部分群である。

$\partial D(1)=\phi$ のとき, $\partial D'(1)\neq\phi$ となる半群 $(D'(s))$ を作ることができる。

そこで以下Dの代りにD'をとって, $\partial D(1)\neq\phi$と仮定する。

Lemma 1

コンパクト対称集合の半群$D(s)$, $E(r)$は $\partial D(1)\neq\phi$をみたすと仮定する。このとき $L^2(G)$ の点列 $(\theta_n)_{n\in N}$ とGの点列 $(x_n)_{n\in N}$で, 次の(i)(ii)をみたすものが存在する。

i) $(n(x_n\theta_n-\theta_n))_{n\in N}$ の部分列である$\tau\neq 0$に弱収束するものが存在する。

ii) 十分大きなすべてのnに対し, $\mathrm{supp}\,\theta_n\subset U$ (初めに与えたeのコンパクト近傍). (ここで $x,y\in G$, $\theta\in L^2(G)$ に対し $(x\theta)(y)=\theta(x^{-1}y)$ とする).

証明 一点 $p\in\partial D(1)\neq\phi$をとる。このとき $p_n\in D_n^n$ となる点列$(p_n)_{n\in N}$でpに収束するものがある。$pE(\frac{1}{3})\in D(1)E(\frac{1}{3})=E(\frac{4}{3})$, $pE(\frac{1}{3})\in\partial E(\frac{3}{4})$, $E(\frac{1}{3})\cap\partial E(\frac{4}{3})=\phi$ から

(5) $pE(\frac{1}{3})\cap E(\frac{1}{3})=\phi$

GはT_2空間で、$pE(\frac{1}{3})$, $E(\frac{1}{3})$は交わらないコンパクト集合だから、それらの開近傍で交わらないものがある。それはeの開近傍Wにより$pE(\frac{1}{3})W$, $E(\frac{1}{3})W$の形のものとしてよい。さらに位相群は正則空間だから、eの任意の近傍Wに対し$\overline{V}\subset W$となるeの近傍Vが存在する。従って(5)から次の(6)が成立つ。

(6) Gにおけるeの開近傍$X\subset U$であって、閉包$\overline{X}$はコンパクトで次の(7)をみたすものが存在する。

(7) $$pE(\tfrac{1}{3})\overline{X}\cap E(\tfrac{1}{3})\overline{X}=\phi, \qquad pE(\tfrac{1}{3})\overline{X}\subset U$$

このとき、十分大きいすべての$n\in\mathbb{N}$に対し、次の(8)が成立つ。

(8) $$p_n D_n^{[\frac{n}{3}]}X\cap D_n^{[\frac{n}{3}]}X=\phi, \quad D_n^{[\frac{n}{2}]}X\subset U$$

今G上の連続函数θで次の(9)をみたすものを一つとる。

(9) $$0\leqq\theta\leqq 1, \qquad \mathrm{supp}\,\theta\subset X, \qquad \theta\neq 0.$$

いま各$n\in\mathbb{N}$に対し、G上の実数値函数Δ_n, θ_nを次のように定義する。

(10) $$\Delta_n(x)=\begin{cases} 3i/n, & x\in D_n^{i}-D_n^{i-1} \text{ のとき}, \ 1\leqq i\leqq [n/3] \\ 0, & x=e \text{ のとき} \\ 1, & x\notin D_n^{[n/3]} \text{ のとき}. \end{cases}$$

Δ_nは、次の三角不等式をみたす。

(11) $$\Delta_n(xy)\leqq\Delta_n(x)+\Delta_n(y)$$

また $$\Delta_n(x^{-1})=\Delta_n(x)$$

である。このΔ_nと(9)をみたす連続函数θを用いて、θ_nを次式で定義する:

(12) $$\theta_n(x)=\sup_{y\in G}\,(1-\Delta_n(y))\,\theta(y^{-1}x)$$

すぐわかるように

(13) $0 \leqq \theta(x) \leqq \theta_n(x) \leqq 1$, $\operatorname{supp}\theta_n \subset D_n^{[n/3]}X \subset UX$

である。θがG上一様連続であることと、$0 \leqq \Delta_n \leqq 1$を用いて、θ_nが連続であることが直ちに確められる。

さらに、$(1-\Delta_n(y))\theta(y^{-1}x)$の上半連続性、$0 \leqq \theta \leqq 1$、$\Delta_n$の三角不等式などを用いて

(14) $$|\theta_n(x) - u\theta_n(x)| \leqq \Delta_n(u),\quad x, u \in G$$

が成立つ。$\operatorname{supp}\theta_n \subset U$だから，ハール測度$m$を適当に定数倍して$m(U) \leqq 1$とすれば、$L^2$ノルムについて

(15) $$\|\theta_n - u\theta_n\| \leqq \Delta_n(u),\quad \|p_n\theta_n - \theta_n\| \leqq \Delta_n(p_n) \leqq 1$$

が成立つ。(15)からL^2の有界点列$(p_n\theta_n - \theta_n)_{n \in N}$は弱コンパクトだから適当な部分列をとるとき、

(16) $$\text{weak}\lim(p_n\theta_n - \theta_n) = \chi \in L^2$$

が存在する。一方(8)により，$\operatorname{supp}(p_n\theta_n) \cap \operatorname{supp}\theta \subset p_n D_n^{[n/3]}X \cap X = \phi$だから，(13)により

(17) $$(p_n\theta_n - \theta_n, \theta) = -(\theta_n, \theta) \leqq -\|\theta\|^2 < 0$$

となるから，ここで(16)の弱極限をとると、$(\chi, \theta) \leqq -\|\theta\|^2 < 0$で特に$\chi \neq 0$である。従って(16)の収束部分列の番号として現われる十分大きなすべてのnに対して

(18) $$(p_n\theta_n - \theta_n, \chi) > 0$$

となる。$p_n \in D_n^n$であるから

(19) $\quad p_n = x_{n1}\cdot x_{n2}\cdots x_{nn}\ ,\ x_{ni}\in D_n$

と表わされる。今 $g_n(j)=x_{n1}\cdot x_{n2}\cdots x_{nj},\ g_n(0)=e$ と置く。このとき

(20) $$0<(p_n\theta_n-\theta_n,\ \chi)\leqq\sum_{j=0}^{n-1}(g_n(j)(x_{nj+1}\theta_n-\theta_n),\ \chi)$$

である。右辺の n 個の項の内最大のものを一つとり、

(21) $$\Phi_n=(g_n(j_0)(x_{nj_0+1}\theta_n-\theta_n),\ \chi),\quad x_{n,j_0+1}=x(n)$$

とおく。このとき、$x\in G$ に対し $\|x\varphi\|=\|\varphi\|,\ x(n)\in D_n$ だから

(22) $$\|n g_n(j_0)(x(n)\theta_n-\theta_n)\|=\|n(x(n)\theta_n-\theta_n)\|\leqq nA_n(x(n))=3$$

従って有界点列 $(a_n)=(ng_n(j_0)(x(n)(\theta_n-\theta_n))$ のある部分列は τ' に弱収束する。(20) から

(23) $$0<(p_n\theta_n-\theta_n,\chi)\leqq n\Phi_n=(a_n,\chi)$$

だから、ここで部分列の極限をとれば

(24) $$(\tau',\chi)\geqq\|\chi\|^2>0,\quad 特\ \tau'\neq 0$$

を得る。$g_n(j_0)\in D_n^n\subset U=$ コンパクトだから、$(g_n(j_0))_n$ の部分列である $g\in G$ に収束するものがある。このとき任意の $\varphi\in L^2$ に対して

(25) $$\begin{aligned}(g^{-1}\tau',g^{-1}\varphi)=(\tau',\varphi)&=\lim(ng_n(j_0)(x(n)\theta_n-\theta_n),\varphi)\\&=\lim(n(x(n)\theta_n-\theta_n),\ g_n(j_0)^{-1}\varphi)\\&=\lim(n(x(n)\theta_n-\theta_n),\ g^{-1}\varphi)\end{aligned}$$

となる。従って L^2 の点列 $(n(x(n)\theta_n-\theta_n))_n$ は、$g^{-1}\tau'=\tau\neq 0$ に弱収束する。(13) と (25) により、Lemma 1 は証明された。∎

以下 G は、小さい正規部分群を持たない連結局所コンパクト群とする。

角谷・小平[60]により、任意の局所コンパクト群Gに対し、閉正規部分群Nが存在して、G/Nは第一可算公理をみたす。Nはいくらでも小さくとれる。いま考えているGは小さい正規部分群を持たないから、$N=\{e\}$であり、G自身第一可算公理をみたす。そこでGの単位元eの近傍の基底としてコンパクト近傍の可算系$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$が存在する。(V_n)は減少列$(V_n\supset V_{n+1})$としてよい。このとき次のように定義する。$x\in G$から生成されるGの部分群を$\langle x\rangle$とし、各$n\in\mathbb{N}$に対し

(26) $$S_n=\{x\in G \mid \langle x\rangle\subset V_n\},\quad T_n=\overline{\langle S_n\rangle}$$

とおく。T_nはS_nを含む最小の閉部分群である。

Lemma 2　このとき、十分大きなnに対して、T_nはコンパクトである。

証明．「eの任意の近傍Vに対して、十分大きなnをとると$T_n\subset V$となる」ことを言えばよい。特にVがコンパクトにとればT_nはコンパクトとなる。

今この「　」内の命題が成立たないと仮定して矛盾を導く。このとき各$m\in\mathbb{N}$に対して、$n(m)\in\mathbb{N}$が存在して、

(27) $$S_m^{n(m)}\subset V,\quad S_m^{n(m)+1}\not\subset V$$

となる。そこで最初のコンパクト対称集合D_nとして、$D_m=S_m$をとって半群$D(\lambda)$を作る。

前と同様　$\partial D(1)\neq\phi$としてよい。次の実数Γ_nを考える。

(28) $$\Gamma_n=(x(n)^n\theta_n-\theta_n,\ \tau)=\left(n(x(n)\theta_n-\theta_n),\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x(n)^{-k}\tau\right)$$
$$=(n(x(n)\theta_n-\theta_n),\ \tau)+\left(n(x(n)\theta_n-\theta_n),\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(x(n)^{-k}-e)\tau\right)$$

$x(n)\in D_n \to e\ (n\to\infty)$ であるから，任意の整数 k に対し，$(x(n)^k - e)\tau \to 0$ $(n\to\infty)$ である。従ってある $n_1\in N$ が存在して，

$$(29)\qquad \|(x(n)^k - e)\tau\| \leqq \frac{1}{6}\|\tau\|^2 \qquad (\forall n \geqq n_1)$$

となる。また $(n(x(n)\theta_n - \theta_n))$ は τ に弱収束するから，ある $n_2\in N$ が存在して

$$(30)\qquad (n(x(n)\theta_n - \theta_n), \tau) \geqq \frac{3}{4}\|\tau\|^2, \qquad (\forall n \geqq n_2)$$

となる。また (29) と $\|\theta_n\|\leqq 1$ ($0\leqq \theta_n \leqq 1$ (13) と $\mathrm{supp}\,\theta_n\subset U$, $m(U)\leqq 1$ から導かれる) により，

$$(31)\qquad \Gamma_n = (\theta_n, (x(n)^{-n} - e)\tau) \leqq \|\theta_n\|\cdot\|(x(n)^{-n} - e)\tau\| \leqq \frac{1}{6}\|\tau\|^2$$

である。一方 (28) 左辺からは (22)(30), (29) により

$$(32)\qquad \begin{aligned}\Gamma_n &= (n(x(n)\theta_n - \theta_n, \tau) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n(x(n)\theta_n - \theta_n), (x(n)^{-k} - e)\tau) \\ &\geqq \frac{3}{4}\|\tau\|^2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\|n(x(n)\theta_n - \theta_n\| - \|(x(n)^{-k} - e)\tau\| \\ &\geqq \frac{3}{4}\|\tau\|^2 - \frac{n-1}{n}3\cdot\frac{1}{6}\|\tau\|^2 > \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\|\tau\|^2 = \frac{1}{4}\|\tau\|^2\end{aligned}$$

(31) と (32) は明らかに矛盾する。従って帰謬法により Lemma 2 が証明された。∎

以上の準備の下で定理 A が証明される。

定理 A　連結局所コンパクト群コンパクト群 G が小さい正規部分群を持たないとき，G は小さい部分群を持たない。

定理 A の証明（山辺 [55]）Lemma 2 により，ある自然数 n_0 に対し，(26) で定義された部分群 T_{n_0} はコンパクトとなる。

コンパクト群の構造定理により，T_{n_0} は完全不連結なコンパクト

部分群Nと局所リー群Rの直積となる。すなわちGにおけるeの近傍 $V(\subset V_{x_0})$ を適当にとれば

(33) $$T_{x_0}\cap V = N\times R$$

となる。いま $W^2\subset V$ となるeの近傍Wをとる。$f(a,x)=axa^{-1}$ は連続で $f(e,x)=x$ だから、各 $x\in G$ に対し、eの対称開近傍 V_x が存在して

(34) $$f(V_x, x)\in W,\quad V_x^3\subset W$$

となる。$(xV_x)_{x\in N}$ はコンパクト集合Nの開被覆だから、有限個の点 $x_1,\cdots,x_n\in N$ が存在して、$\bigcup_{i=1}^{n} x_iV_{x_i}\supset N$ となる。$\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}=U_2=U_2^{-1}$ は、eの開近傍であり、(34)より

(35) 任意の $a\in U_2$ に対し、$ax_ia^{-1}=f(a,x_i)\in f(V_{x_i},x_i)\in W$

となる。また任意の $x\in N$ をとると、$x=x_iv_i$, $v_i\in V_{x_i}$ の形になる。そして

(36) 任意の $a\in U_2$ に対し、$av_ia^{-1}=f(a,v_i)\in f(V_{x_i},V_{x_j})\subset V_{x_j}^3\subset W$

となる。(35)(36)から、任意の $a\in U_2$, $x\in N$ に対し $axa^{-1}=ax_ja^{-1}\cdot av_ia^{-1}\in W^2\subset V\subset V_{x_0}$ となる。従って次の(37)が成立つ:

(37) 任意の $a\in U_2$ に対し、$aNa^{-1}\subset V\subset V_{x_0}$

次に山辺は、

(38) 任意の $a\in U_2$ に対し $aN_0^{-1}\subset T_{x_0}$, $aNa^{-1}\subset T_{x_0}\cap V=N\times R$

であると述べているが、T_{x_0}は部分群であって、正規部分群とは限らないから、その理由がわからない。今この点を保留して、先へ進もう。

今 $N\times R$ から第二因子への射影を φ とする：$\varphi(n, r)=r$. このとき、$\varphi(aNa^{-1})$ は R の部分群だから、仮定により $\varphi(aNa^{-1})=\{e\}$ となる。従って

(39) $aNa^{-1}\subset N \quad (\forall a\in U_2)$

が成立つ。G は連結群だから、対称近傍 U_2 により生成される。従って G の任意の元 g は、U_2 の元の有限個の積となるから、(39) から次の (40) が成立つ。

(40) $gNg^{-1}\subset N \quad (\forall g\in G)$ で、N は G の正規部分群で、$N\subset V$.

V は単位元の近傍で、いくらでも小さくとることができる。いま帰謬法により定理 A を証明するために、次の (41) を証明しよう。

(41) G が小さい部分群を含むと仮定すれば、$N\neq\{e\}$ で、G は小さい正規部分群を含む。

(41)の証明. G が小さい部分群を含むとすれば、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し e の近傍 V_n は、部分群 $H_n\neq\{e\}$ を含む。今 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は、e の近傍の基底だから、e の近傍 V に対し

(42) $\exists n_1\in\mathbb{N}.\ V_{n_1}\subset V$

となる。そこで $n_2=\max(n_0, n_1)$ とおくと

(43) $V_{n_2}\subset V_{n_0}\cap V_{n_1},\quad S_{n_2}\subset S_{n_0}\subset T_{n_0},\quad S_{n_0}\subset T_{n_0}\cap V=N\times R$

である。V_{n_2} は部分群 $H\neq\{e\}$ を含むから、$e\neq x\in H$ をとり、$x=(n, r)$, $(n\in N, r\in R)$ とすると、任意の $k\in\mathbb{Z}$ に対し $x^k=(n^k, r^k)$ であり、R は $\{e\}$ 以外の部分群を含まないから、$r=e$, $x\in N$ となる。従って

$N \neq \{e\}$となる。そこで(40)により、eの近傍Vは$\{e\}$以外の正規部分群Nを含むことになる。Vはいくらでも小さくとれるから、Gは小さい正規部分群を含む。これで(41)が証明された。(41)は定理Aの対偶であるから、これで定理Aが証明された。∎

上の証明では(38)の証明を保留したので、その点不完全である。しかし(38)の成立するかどうかに拘らず、定理Aは正しい。それを示すために、定理Aを拡張した、次のグルシュコフの定理[20](定理4)を述べておく。

グルシュコフの定理

局所コンパクト群Gの単位元連結成分をG_0とし、G/G_0はコンパクトと仮定する。このときGの単位元eの任意の近傍Uは、Gのコンパクト正規部分群AでG/Aは小さい部分群を含まないようなものを含む。

証明. Gにおけるeの任意近傍Uに対し、Uに含まれるコンパクト正規部分群Bであって、G/Bは第二可算公理をみたすものが存在する([20]定理3系1). 従って$G \supset A \supset B$となるコンパクト正規部分群Aに対し、$G/A \cong G/B \big/ A/B$だからGの代りにG/Bを考えれば、始めからGは第二可算公理をみたすとしてよい。

Gにおけるeのコンパクト対称近傍$U = U^{-1}$を考える。このときGのコンパクト部分群$B \subset U$と、Gにおけるeの近傍$V \subset U$であって、Vに含まれるGの部分群はすべてBに含まれるようなものが存在する([20] Lemma 2).
必要があればVをさらに小さい近傍と取り換えることにより、Vは次の

(44) をみたすとしてよい。

(44) V は e の開近傍で、$V \cap B = N \times R$ (直積)の形であり、N はコンパクト群、R は局所リー群で $\{e\}$ 以外の部分群を含まない

このとき、(37) により次の (45) が成立つ。

(45) e の対称近傍 U_2 が存在して $aNa^{-1} \subset V \ (\forall a \in U_2)$

aNa^{-1} は V に含まれる部分群だから、B に含まれる：従って

$$aNa^{-1} \subset V \cap B = N \times R \quad (\forall a \in U_2)$$

となる。R が $\{e\}$ 以外の部分群を含まないことから、上式より

(46) $\qquad aNa^{-1} \subset N \quad (\forall a \in U_2) \qquad$ となる

そこで N の正規化群を $M = N_G(N)$ とするとき、$M \supset U_2 = U_2^{-1}$ である。従って

(47) M は G の開部分群であり、G/M は離散群である。

一方、開部分群 M は単位元成分 G_0 を含むから、仮定 $G/G_0 =$ コンパクトより

(48) $\qquad G/M$ はコンパクト群である。

従って、(47)(48) から、G/M は有限群である。そこで

(49) 有限個の元 $g_1, \cdots g_m \in G$ が存在して、$G = \bigcup_{i=1}^{m} g_i M$ となる。

上で (46) を導いたと同じ理由で、次の (50) が成立つ。

(50) V に含まれる任意の部分群は $V \cap B = N \times R$ に含まれ、従って $V \cap N$ に含まれる。このことから次の (51) が成立つ。

(51) 群 M/N における e の近傍 $V' = (V \cap M)N/N$ は $\{e\}$ 以外の部分群を含まない。

すなわち

(52) 群 M/N は小さい部分群を含まない。

いま次のように定義する。

(53) $M_i = g_i M g_i^{-1}$, $N_i = g_i N g_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq m)$. $S = \bigcap_{i=1}^{m} M_i$, $A = \bigcap_{i=1}^{m} N_i$

M, M_i は G の開部分群、N, N_i は G のコンパクト部分群だから

(54) S は G の開部分群、A は G のコンパクト部分群である。

N は M の正規部分群だから

(55) N_i は M_i の正規部分群である $(1 \leq i \leq m)$.

そして (52) から、

(56) M_i/N_i は小さい部分群を持たない $(1 \leq i \leq m)$ から直積 $\prod_{i=1}^{m} M_i/N_i$ も小さい部分群を持たない。

いま写像 $\varphi : S/A \to \prod_{i=1}^{m} M_i/N_i$ を

$$\varphi(sA) = (sN_1, \cdots, sN_m)$$

によって定義するとき、すぐわかるように

(57) φ は S/A から $\prod_{i=1}^{m} M_i/N_i$ の中への一対一連続準同型写像である。

さて (56) (57) から

(58) S/A は小さい部分群を持たない。

(54) により S/A は G/A の開部分群であるから、(58) により G/A は小さい部分群を持たない。これでグルシュコフの定理が証明された。∎

定理 A の証明(グルシュコフの定理による)

今 G を連結局所コンパクト群とする。このとき $G_0 = G$ だから、グルシュコ

フの定理が適用される。従ってGにおけるeの近傍Uに含まれるコンパクト正規部分群Aが存在して、G/Aは小さい部分群を持たない。いまGが小さい正規部分群を持たないとすれば、$A=\{e\}$であって、G自身が小さい部分群を持たない。∎

次に[56]における定理Bの証明に移る。定理Bは二つの部分から成る。それを今定理B1、B2としよう。

定理 B1　小さい部分群を持たない局所コンパクト群Gの任意の一径数部分群はリプシッツの条件をみたす。

定理 B2　小さい部分群を持たない局所コンパクト群Gのグリースンの意味の接ベクトル空間は常に有限次元である。

[56]では、定理B1はLemma 4で証明され、定理B2は定理2とそれに続く部分で証明されている。

以下ではGを常に連結局所コンパクト群で小さい部分群を持たないとする。

定理 1. V_0をこのような群Gの単位元eのコンパクト対称近傍で、$\{e\}$以外の部分群を持たないものとする。このときGにおけるeのコンパクト対称近傍V_1で、$x, y \in V_1$, $x^2=y^2$ならば$x=y$となるものが存在する。

証明　Xをeの近傍で、$X^2 \subset V_0$となるものとし、eのコンパクト対称近傍V_1を十分小さくとり、次の(59)をみたすようにする：

(59)　$$V_1(c^{-1}V_1c) \subset X \qquad (^\forall c \in V_0)$$

いま，$x, y \in V_1$，$x^2 = y^2$ とし，$x^{-1}y = a$ とおく。このとき $a \in V_1^2 \subset X \subset V_0$ であり，また

$$x^{-1}a^{-1}x = x^{-1}y^{-1}x \cdot x = x^{-1}y \cdot y^{-2}x^2 = x^{-1}y = a$$

である。従って任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し

$$x^{-1}a^{-m}x = a^m, \quad a^{2m} = x^{-1}a^{-m}xa^m$$

となる。いま自然数 $n \geqq 1$ に対して $\mathbb{N} \ni m \leqq n$ となるすべての m に対し，$a^m \in V_0$ とすれば (59) により，$a^{2m} = x^{-1} \cdot a^{-m} x a^m \in V_1 \cdot a^{-m} \cdot V_1 a^m \subset X \subset V_0$ となり，従って $a^{2m+1} \in X^2 \subset V_0$ となる。従ってすべての $m \leqq 2n$ に対し，$a^m \in V_0$ である。そこで n に関する帰納法により，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し $a^m \in V_0$ となる。$V_0 = V_0^{-1}$ だから，$\langle a \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\} \subset V_0$ となる。V_0 に含まれる部分群は $\{e\}$ のみだから，$a = e$，$x = y$ となる。▮

以下定理1の近傍 V_0, V_1 を一つ固定しておく。各 $\alpha \in \mathbb{N}$ に対し

(60) $$Q_\alpha = \{x \in G \mid x, x^2, \cdots, x^\alpha \in V_1\}$$

とし，$n(\alpha) \in \mathbb{N}$ を

(61) $$Q_\alpha^{n(\alpha)} \subset V_1, \quad Q_\alpha^{n(\alpha)+1} \not\subset V_1$$

となるような正整数とする。$V_1 = V_1^{-1}$ は $\{e\}$ 以外の部分群を含まないから，このような $n(\alpha) \in \mathbb{N}$ が存在する。$n = n(\alpha)$ として，$D_n = Q_\alpha$ とおくと，$D_n^n \subset V_1$，$D_n^{n+1} \not\subset V_1$ だから，各 $s \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ に対し，$D(s) = \lim_{n \to \infty} D_n^{[sn]}$ が存在し，$\forall r \in \mathbb{R}$ に対して $E(r) = \bigcap_{s > r} D(s)$ とおくと，コンパクト対称集合のブリースン半群 $D(s)$，$E(r)$ が得られる。

前に [55] の解説で述べたように $L^2(G)$ の点列 $(n(x(n)\theta_n - \theta_n))_{n \in \mathbb{N}}$

は、ある$\tau \neq 0$に弱収束する。このとき次のことが成立つ([56] P.357)。

(以下述べる補助定理1，2，3は[56]の本文の中で証明されているが、命題番号がつけられていない命題に対し、便宜上このように番号をつけたものである。)

補助定理1　ある十分小さい$\gamma > 0$が存在して、$k \leqq \gamma n$をみたす任意の正整数kに対し、次の(62)が成立つ：

(62) $$\|(x(n)^k - e)\tau\| \leqq \frac{1}{6}\|\tau\|^2$$

証明　このような$\gamma>0$が存在しないと仮定して矛盾を導く。この仮定から、このときGの点列$(y(n))$と、自然数列$(k(n))$であって、次の(63)をみたすものが存在する。

(63) $$y(n) \in D_n,\quad y(n)^{k(n)} \notin V' = e\text{のある近傍},\quad \frac{k(n)}{n} \longrightarrow 0\ (n \to \infty).$$

$k(n) < n$　($\forall n \geqq n_0$) だから $n \geqq n_0$ のとき $y(n)^{k(n)} \in D_n^n \subset V_1 =$ コンパクトだから適当な部分列をとれば、$y(n)^{k(n)} \longrightarrow \bar{y}$ $(n \to \infty)$ となる。$\bar{y} \in \bar{V_1} = V_1 \subset V_0$ である。$y(n)^{k(n)} \notin V'$ だから

(64) $$\bar{y} \neq e$$

である。一方任意の$l \in \mathbb{Z}$に対して$\frac{lk(n)}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ だから、十分大きなすべてのnに対し、$lk(n) < n$で、$y(n)^{lk(n)} \in D_n^n \subset V_1 \subset V_0$ となるので、$\bar{y}^l \in V_0$ ($\forall l \in \mathbb{Z}$) となるから、V_0が$\{e\}$以外の部分群を含まないことから

(65) $$\bar{y} = e$$

となる。(64)と(65)は矛盾する。これで上の補助定理は証明された。∎

Lemma 3　$n(\alpha)$を、$Q^{n(\alpha)} \subset V_1$となる最大の整数とするとき、定

整数 $k>0$ が存在して、十分大きなすべての α に対し、次の(66)が成立つ：

(66) $\quad k\cdot u(\alpha) \geqq \alpha \qquad (\forall \alpha \geqq \alpha_0)$

証明　前に[55]の Lemma 2 の証明の中でも用いた次の量 Γ_n を考える：ここで γ は上の補助定理に現われる正数である．

(67)
$$\Gamma_n = (x(n)^{[\gamma n]}\theta_n - \theta_n, \tau)$$
$$= \frac{[\gamma n]}{n}(n(x(n)\theta_n - \theta_n), \tau) + \frac{[\gamma n]}{n}\left(n(x(n)\theta_n-\theta_n), \frac{1}{[\gamma n]}\sum_{k=1}^{[\gamma n]}(x(n)^{-k}-e)\tau\right)$$

右辺第一項 $\to \gamma\|\tau\|^2$ $(n\to\infty)$ である。また右辺第二項の上極限 $\leqq \gamma \overline{\lim}$ $\|n(x(n)\theta_n - \theta_n)\|\cdot\|(x(n)^{-k}-e)\tau\| \leqq \gamma\cdot 3\cdot\frac{1}{6}\|\tau\|^2 = \frac{\gamma}{2}\|\tau\|^2$ となる。
((15) および (62) による)。従って

(68) $\quad \underline{\lim}\,\Gamma_n \geqq \gamma\|\tau\|^2 - \frac{\gamma}{2}\|\tau\|^2 = \frac{\gamma}{2}\|\tau\|^2 > 0$

である。一方 $\gamma<1$, $x(n)^{[\gamma n]} \in D_\mu^n \subset V_1$ だから, 点列 $(x(n)^{[\gamma n]})$ の適当な部分列は、ある $\bar{x}\in V_1$ に収束する。もし $\bar x = e$ ならば、Γ_n の定義式(67)左辺により

(69) $\quad \lim_{n\to\infty}\Gamma_n = (\theta-\theta, \tau) = 0$

となり、(68)と矛盾する。従って

(70) $\quad \bar x \neq e$

である。$\bar x\in V_1\subset V_0$ だから

(71) $\quad$ ある $k\in N$ が存在して $\bar x^k \notin V$ となる．

なぜならこのような $k\in N$ が存在せず、$\bar x^k \in V_1$ $(\forall k\in N)$ なら、V_0 に含まれる部分群が $\{e\}$ のみだから、$\bar x = e$ となり、(70)に反する。

(72) $$\bar{x}^{k} = \lim_{n\to\infty} x(n)^{k[rn]}$$

だから (71)(72) から、ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、

(73) すべての $n \geqq n_0$ に対し、$x(n)^{k[rn]} \notin V_1$

となる。$x(n) \in D_n = Q_\alpha$ なので $x(n), x(n)^2, \cdots, x(n)^\alpha \in V_1$ だから

(74) $$k[rn] > \alpha$$

となる。そこで $k = 1 + [kr]$ とおけば $k \in \mathbb{N}$ で、$n = n(\alpha)$ に対し

$$kn(\alpha) = (1 + [kr])n \geqq krn \geqq \alpha$$

となる。これで Lemma 3 が証明された。∎

定理 B1 の証明([56] Lemma 4). $x(r) \in V_1$ $(0 \leqq {}^\forall r \leqq 1)$ となる G の一経数部分群 $x(r)$ をとる。

今、任意の $r \in [0, 1]$ に収束する有理数列 $\left(\frac{l(\alpha)}{\alpha}\right)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ $(\alpha, l(\alpha) \in \mathbb{N})$ をとる。$\frac{l(\alpha)}{\alpha} \in [0, 1]$ としてよい。このとき Lemma 3 により $kn(\alpha) \geqq \alpha$ だから

$$\begin{aligned} x(r) = \lim_{\alpha\to\infty} x\left(\frac{l(\alpha)}{\alpha}\right) &\in \lim D_n^{l(\alpha)} = \lim D_n^{\frac{l(\alpha)}{\alpha}\cdot\alpha} \\ &\subset \lim D_n^{\left[\frac{l(\alpha)}{\alpha}\cdot kn\right]} = E(kr) \end{aligned}$$

となり、$x(r)$ は $E(r)$ に関し、リプシッツ条件をみたす。∎

上の Lemma 3 の証明に登場した量 $\bar{x}^k$ は、[55] でも用いられ、重要な役割を果していた。この $\bar{x}^k$ をとり出したことが山辺の研究 [55] [56] を成功させた技術的基盤の一つとなっている。

次に定理 B2 の証明の要点を述べよう。グリースンの所で述べたことは、省略し、山辺の方法の特色を強調する。山辺においても、G の接ベク

トルの空間の作り方は、本質的にはグリースンの方法と一致する。しかしグリースンは G の(リプシッツ条件をみたす)一径数部分群 γ に対し、その e における接ベクトル Z_γ を定義した。これに対して、山辺は G における e の近傍 V_1 の点 x で一径数部分群 $x(\gamma)$ 上にあり、$x(1)=x$ となるものに対し、$x(\gamma)$ の上における接ベクトルを、x の函数としてとらえて $\tau(x)$ と記す。そして $x\longrightarrow\tau(x)$ という写像が同相写像であることを示し、G の局所コンパクト性から、接ベクトル空間 L も局所コンパクトであることを示し、リースの定理[59]により、L が有限次元であることを示したのである。

もう少し正確に述べると接ベクトル $\tau(x)$ の定義は次の通りである。点 $x\in V_1$ が一径数部分群 $x(\gamma)$ 上にあるとする。このとき V_1 の点列 (x_n) と自然数列 $(\nu(n))$ が $x_n, x_n^2, \ldots, x_n^{\nu(n)}\in V_1$ でかつ $\lim_{n\to\infty} x_n^{\nu(n)}=x$ であるとき、弱極限

(75) $$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\nu(n)(x_n\theta_n-\theta_n)=\tau(x)$$

が存在すれば、これを x に対応する<u>接ベクトル</u>という。この接ベクトル $\tau(x)$ は、点列 (x_n) と自然数列 $(\nu(n))$ によって定義されるが、実は「接ベクトル $\tau(x)$ は x のみで定まる」。すなわち、二つの点列 (x_n) と (y_n) および二つの自然数列 $(\nu(n))$ と $(\rho(n))$ があり

$$w\text{-}\lim\nu(n)(x_n\theta_n-\theta_n)=\tau,\quad w\text{-}\lim\rho(n)(y_n\theta_n-\theta_n)=\tau'$$

が存在するとき、$\tau=\tau'$ である(Lemma 6)。

さらに $\|\theta_n\|\leqq 1$ だから、

点列 (θ_n) の適当な部分列は、ある $\vartheta \in L^2$ に弱収束する。そこで以下この部分列を考え $\theta_n \to \vartheta$ $(n \to \infty)$ とする。このとき強収束の意味で

(76) $$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r}(x(r)\vartheta - \vartheta) = \tau(x)$$

となる。(Lemma 7)。このことから 山辺の接ベクトル $\tau(x)$ は、グリースンのものと一致することがわかる。

Lemma 7 系　$\|x\vartheta - \vartheta\| \leqq \|n(x(\frac{1}{n})\vartheta - \vartheta)\|$ が成立つ。特に $x \neq e$ ならば $\tau(x) \neq 0$ である。

証明　$\|x\vartheta - \vartheta\| \leqq \|n(x(\frac{1}{n})\vartheta - \vartheta)\|$ で $n \to \infty$ として前半が得られる。この不等式から、$\tau(x) = 0$ ならば $x\vartheta = \vartheta$ である。(17) により $(\theta_n, \theta) \geqq \|\theta\|^2 > 0$ で $n \to \infty$ として、$(\vartheta, \theta) \geqq \|\theta\|^2 > 0$ だから特に $\vartheta \neq 0$ である。また (13) により $\operatorname{supp} \theta_n \subset D_n^{[n/3]} X \subset V$ である。$V \subset V_1^2$ としてよいから

(77)　$x \notin V_1^2$ ならば $\vartheta(x) = 0$ である。

さらに次の (78) が成立つ：

(78)　$g \notin V_1^4$ ならば $\operatorname{supp}(g\vartheta) \cap \operatorname{supp}\vartheta = \phi$　特に $g\vartheta \neq \vartheta$.

実際 $\operatorname{supp}(g\vartheta) \cap \operatorname{supp}\vartheta \ni x$ が存在すれば、$x = gv = w$, $v, w \in \operatorname{supp}\vartheta \subset V_1^2$ となる。従って $g = wv^{-1} \in V^2 \cdot V^{-2} = V^4$ となる。対偶をとれば、$g \notin V^4$ ならば $\operatorname{supp}(g\vartheta) \cap \operatorname{supp}\vartheta = \phi$ となる。従って特に $g\vartheta \neq \vartheta$ である。

そこで $x\vartheta = \vartheta$ から 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $x^n\vartheta = \vartheta$ であり、従って

(79) $$\langle x \rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset V_1^4 \subset V.$$

とする。U_0に含まれる部分群は$\{e\}$のみだから，(79)から$x=e$が導かれる。これで$\tau(x)=0$または$x=e$が証明された。その対偶が後半である。∎

補助定理2　$r\in\mathbb{R}$に対し$x(r)$が定義されるとき，$\tau(x(r))=r\tau(x)$が成立つ。

証明　$x(1)=x$である。今$y(t)=x(rt)$とおくと，$y=y(1)=x(r)$である。$u=rt$とおくと　$t\to 0 \Leftrightarrow u\to 0$である。(76)により次の等式が成立つ。

$$\tau(x(r))=\tau(y)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(y(t)\vartheta-\vartheta)=\lim_{u\to 0}\frac{r}{u}(x(u)\vartheta-\vartheta)=r\tau(x).\ ∎$$

一径数部分群$x(r)$が，任意の$r\in[0,1]$に対し，$x(r)\in V_1$となることを，$x(r)\prec V_1$と記すことにする。

Lemma 8　$x(r)\prec V_1$ならば$\|\tau(x)\|\leqq 3k$　(kはLem. 3の整数)

証明　任意の$\alpha\in\mathbb{N}$に対し，$x(\frac{1}{\alpha})\in Q_\alpha=D_n$であるから$\Delta_n(x(\frac{1}{\alpha}))=\frac{3}{n}$
$=\frac{3}{n(\alpha)}$である。ここで$n=n(\alpha)$は，$Q_\alpha^{n(\alpha)}\subset V_1$となる最大の整数である。
(15)とLem 3の$kn(\alpha)\geqq\alpha$により

$$(80)\qquad \|\alpha(x(\tfrac{1}{\alpha})\theta_n-\theta_n\|\leqq\alpha\Delta_n(x(\tfrac{1}{\alpha}))\leqq\frac{3\alpha}{n(\alpha)}\leqq 3k$$

となる。いま$\alpha\to\infty$のとき$\alpha(x(\frac{1}{\alpha})\theta_n-\theta_n)$は，$\tau(x)$に弱収束するから，

$$\|\tau(x)\|\leqq\varliminf_{\alpha\to\infty}\|\alpha\,(x(\tfrac{1}{\alpha})\theta_n-\theta_n)\|\leqq 3k$$

が成立つ。∎

Lemma 8系　$x(r)\prec V_1$のとき$\lim_{r\to 0}\tau(x(r))=0$.

証明　補助定理2から$\tau(x(r))=r\tau(x)$である。Lem. 8により

$$\|\tau(x(r))\| = |r|\,\|\tau(x)\| \leqq r\cdot 3k$$

だから $r\to 0$ のとき $\|\tau(x(r))\|\to 0$ となる。∎

以下山辺は、次の四つの命題を証明する。ここでは結果だけを掲げる。

Lemma 9. 任意の正数 ε に対し e のコンパクトな近傍 W_ε が存在して次の(81)が成立つ。

(81) $x\in W_\varepsilon$ かつ $x(r) < V_1$ ならば、$\|\tau(x)\|\leqq \varepsilon$ である。

Lemma 10. 定数 $\gamma>0$ が存在して任意の $g\in V_1$ に対し $\tau(x)$、$\tau(g^{-1}xg)$ が定義され $x(r)<V_1$ であるとき、次の(82)が成立つ：

(82) $$\|\tau(g^{-1}xg)\|\leqq\gamma\,\|\tau(x)\|$$

補助定理3 G の二つの点列 (x_α) と (y_α) があり、$x_\alpha^\alpha\to x$, $y_\alpha^\alpha\to y$ $(\alpha\to\infty)$ で、$x_\alpha, y_\alpha\in Q_\alpha$ であるとする。このとき次の(a)(b)(c)が成立つ：

(a) L^2 の点列 $(\alpha(x_\alpha y_\alpha\theta_n-\theta_n))$ の適当な部分列は、ある $\tau(z)$ に弱収束する。ここで z は G の点列 $((x_\alpha y_\alpha)^\alpha)$ の極限点である。ただし $n=n(\alpha)$ (61)である。

(b) $z(r)=\lim_{\alpha\to\infty}(x_\alpha y_\alpha)^{[r\alpha]}$ は、G の一径数部分群で $z(1)=z$ である。

(c) $z\in V_1$ でなくても $z(\frac{r}{2k})<V_1$ であり、$\tau(z(\frac{r}{2k}))=\frac{r}{2k}\{\tau(x)+\tau(y)\}$ が成立つ。

証明 (a) (11)により $\Delta_n(x_\alpha y_\alpha)\leqq\Delta_n(x_\alpha)+\Delta_n(y_\alpha)\leqq\frac{6}{n(\alpha)}$ だから、(15)と Lemma 3により $\|\alpha(x_\alpha y_\alpha\theta_n-\theta_n)\|\leqq\frac{6\alpha}{n(\alpha)}\leqq 6k$ である。従って L^2 の有界点列 $(\alpha(x_\alpha y_\alpha\theta_n-\theta_n))$ の適当な部分列はある τ に弱収束する。
$(x_\alpha y_\alpha)^\alpha\in Q_\alpha^{2\alpha}\subset V_1^2=$ コンパクト だから $((x_\alpha y_\alpha)^\alpha)$ のある部分列は $z\in V_1^2$ に収束する。そして $\tau=\tau(z)$ である。

(b) このとき $z(r)=\lim_{\alpha\to\infty}(x_\alpha y_\alpha)^{[r\alpha]}$ は，Gの一径数部分群である（ブリースン[15] Lemma 1.4.2）．そして $z(1)=z$ である。

(c) $$z(r/2k)=\lim_{\alpha\to\infty}(x_\alpha y_\alpha)^{[r\alpha/2k]}\in \lim Q_\alpha^{2[r\alpha/2k]}\subset \lim D_n^{2[rn/2]}$$
$$=E(r)\subset V_1$$

である。そして，この $z(r/2k)$ に対し，次の等式が成立つ：

$$\tau(z(r/2k))=w-\lim[r\alpha/2k](x_\alpha y_\alpha\theta_n-\theta_n)$$
$$=w-\lim[r\alpha/2k]\{x_\alpha(y_\alpha\theta_n-\theta_n)+(x_\alpha\theta_n-\theta_n)\}$$
$$=\tau(x(r/2k))+\tau(y(r/2k))=\frac{r}{2k}(\tau(x)+\tau(y))\ \blacksquare$$

Lemma 11　eの任意のコンパクト近傍Wに対して，eの近傍$W^{\#}$と自然数α_0が存在して，$x\in yW^{\#}$，$x(r)\prec V_1$，$y(r)\prec V_1$ であるとき，任意の $\alpha\geqq\alpha_0$ に対して，$(x(\frac{1}{\alpha})y(\frac{1}{\alpha}))^{\beta}\in W$ となる。ここではβは，$\beta\leqq\alpha$ となる任意の自然数である。

定理2．　$x(r)\prec V_1$ となるGの一径数部分群$x(r)$に対する $x=x(1)$ の全体の集合をMとする。$x\in M$に対する接ベクトルwを$\tau(x)$とする。このとき写像 $\tau:M\to L^2$ は，一対一写像でかつ両連続である。ただしL^2には強位相を与えておく。

証明　任意の $\varepsilon>0$ に対し，Lem. 9 における eのコンパクト近傍W_εをとる。そしてLem. 11 により，W_εに対し eの近傍$W_\varepsilon^{\#}$と自然数α_0が存在して，$x\in yW_\varepsilon^{\#}$，$x(r)$，$y(r)\prec V_1$ に対して任意の整数 $\alpha\geqq\alpha_0$と，任意の自然数 $\beta\leqq\alpha$ に対して

$$(x(\tfrac{1}{\alpha})y(1-\tfrac{1}{\alpha}))^{\beta}\in W_\varepsilon$$

が成立つ。従って

$$z\left(\frac{1}{2k}\right)=\lim_{\alpha\to\infty}\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\left[\frac{\alpha}{2k}\right]}\in \overline{W}_\varepsilon = W_\varepsilon$$

となる。そこで、補助定理3 (c) と Lemma 9 により

(83) $$\frac{1}{2k}\|\tau(x)-\tau(y)\|=\|\tau(z(\tfrac{1}{2k}))\|\leqq \varepsilon$$

となる。kは定数>0 だから、これで τ の連続性が証明された。

次に、τ^{-1}の連続性を示そう。いま $x(r), y(r) < V_1$ となる二つの一径数部分群を考え、$x=x(1)$, $y=(1)$ とする。このとき $z(r)=\lim_{\alpha\to\infty}(x(\frac{1}{\alpha})y(-\frac{1}{\alpha}))^{[r\alpha]}$ はまた一径数部分群である。$z=z(1)$ とすると補助定理3 (c) により $z'(r)=z(\frac{1}{2k})$ は $z'(r)<V_1$ をみたす。今簡単のために $z(r)<V_1$ としよう。このとき、やはり補助定理3 (c)から

(84) $$\tau(z)=\tau(x)-\tau(y)$$

である。いま任意の $\psi\in L^2$ を一つとり

(85) $$\Gamma_n=(x\theta_n-y\theta_n,\psi)=\sum_{i=0}^{\alpha-1}\left(x\left(\frac{i+1}{\alpha}\right)y\left(\frac{\alpha-i-1}{\alpha}\right)\theta_n-x\left(\frac{i}{\alpha}\right)y\left(\frac{\alpha-i}{\alpha}\right)\theta_n,\psi\right)$$

を考える。右辺のα個の項の中で、絶対値最大のものを一つとり、

(86) $$\Phi_\alpha=\left(x\left(\frac{i_0+1}{\alpha}\right)y\left(\frac{\alpha-i_0-1}{\alpha}\right)\theta_n-x\left(\frac{i_0}{\alpha}\right)y\left(\frac{\alpha-i_0}{\alpha}\right)\theta_n,\psi\right)$$

とする。$u_\alpha=y((\alpha-i_0)/\alpha)$, $v_\alpha=u_\alpha^{-1}x(-i_0/\alpha)$ とおくと

(87) $$\Phi_\alpha=(u_\alpha^{-1}x(1/\alpha)y(-1/\alpha)u_\alpha\theta_n-\theta_n,\ v_\alpha\psi)$$

である。$|\Gamma_n|\leqq\alpha|\Phi_\alpha|$ だから、ここで $n\to\infty$ として

(88) $$|(x\vartheta-y\vartheta,\psi)|\leqq\lim_{\alpha\to\infty}\alpha|\Phi_\alpha|=\lim_{\alpha\to\infty}|(\alpha(u_\alpha^{-1}x(\tfrac{1}{\alpha})y(\tfrac{-1}{\alpha})u_\alpha\vartheta-\vartheta,\ v_\alpha\psi)|$$

である。　またここで (u_α), (v_α) はコンパクトな V_1 の点列だから、適当な部分列は収束する。そこでこの部分列において

$$u_\alpha \to \bar{u}, \quad v_\alpha \to \bar{v} \quad (\alpha \to \infty)$$

とする。(88) で $\alpha \to \infty$ として

$$\tau(z) = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha \left(x(1/\alpha)\, y(-1/\alpha)\, v - v \right)$$

であることを用いると

(89) $|(xv - yv, \psi)| \leqq |(\tau(\bar{u}^{-1} z \bar{u}), \bar{v}\psi)| \leqq \|\tau(\bar{u}^{-1} z \bar{u})\| \cdot \|\bar{v}\psi\|, \ (\forall \psi \in L^2)$

となる。ここで $\psi = xv - yv$ とおくと、Lem 10 と (84) により

(90) $\|y^{-1}xv - v\| = \|xv - yv\| \leqq \gamma \|\tau(z)\| = \gamma \|\tau(x) - \tau(y)\|.$

が得られる。(90) から直ちに次の (91) が得られる。

(91) $\tau : M \to L^2$ は一対一写像である

実際 $x, y \in M$, $\tau(x) = \tau(y)$ とすると (90) から $y^{-1}xv = v$ となるから

(92) 任意の整数 m に対し $(y^{-1}x)^m v = v$ である。

一方、(78) により、$g \notin V^4$ ならば $gv \neq v$ だから (92) より

(93) すべての $m \in \mathbb{Z}$ に対し、$(y^{-1}x)^m \in V^4 \subset V_0$

である。V_0 は $\{e\}$ 以外の部分群を含まないから、(93) により

$$x = y$$

となり、(91) が証明された。

最後に τ^{-1} の連続性の証明であるが、山辺は (90) の不等式を証明して、「これで τ^{-1} の連続性が証明された」と述べている。それは (90) から直ちに次の (94) が導かれることを意味する。

(94) e の任意の近傍 W に対して、$\varepsilon > 0$ が存在して

$$\| \tau(x) - \tau(y) \| \leqq \varepsilon \quad \text{ならば} \quad y^{-1}x \in W \quad \text{となる。}$$

つまり

(95) $\| y^{-1}x\vartheta - \vartheta \| \leqq \gamma\varepsilon$ ならば $y^{-1}x \in W$ である。

が成立つというのである。 (95)の逆命題は $L^2(G)$ における左正則表現の強連続性であって、よく知られた一般的事実であるが、(95)自身は函数 ϑ の性質に立入らなければ言えないように思われる。τ の連続性はグルシュコフ [20] が証明している(後で紹介する)ので、定理2の正しさには疑問の余地はない。

(95)の証明は保留して、定理B2の山辺の証明を紹介しよう。

定理B2の山辺の証明

山辺は(95)の成立は当然としているようで、(95)を定理B2の証明でも用いている。 (95)の W として V_1 をとると次の(96)が成立つ。

(96) e の近傍 V_1 に対し、正数 η が存在して

$$\| x\vartheta - \vartheta \| \leqq \eta \Longrightarrow x \in V_1 \quad \text{が成立つ。}$$

いまこの正数 η を用いて、G の部分集合 C を定義する:

(97) $C = \{ x \in G \mid x(r) \prec V_1,\ x(1) = x,\ \| \tau(x) \| \leqq \eta \}$

このとき次の(98)が成立つ:

(98) $\tau(C)$ は凸集合である。

なぜならば任意の $r \in [0, 1]$ に対し

$$\| z(r)\vartheta - \vartheta \| \leqq 2k \| z(\tfrac{r}{2k})\vartheta - \vartheta \| \leqq 2k \| \tau(z(r/2k)) \|$$
$$\leqq r\eta \leqq \eta$$

だから．$z(r) < V_1$ であり．補助定理2と3により

$$\lambda\tau(x)+\mu\tau(y)=\tau(z)\in\tau(C)$$

となる．（(98)証明終り）．

(99) $y\in C$，$\|\tau(y)\|<\eta$ ならば．ある正数 λ が存在して．$\|\tau(y(\lambda))\|=\eta$，$y(\lambda)\in C$ となる。

実際，$\lambda=\eta/\|\tau(y)\|$ とおくと，$\|\tau(y(\lambda))\|=\eta$ となる。そして Lem. 7 系と (96) から $\|y(\lambda)\alpha-\alpha\|\leqq\|\tau(y(\lambda))\|=\eta$ から $y(\lambda)\in V_1$ となる。同様にして任意の $r\in[0,1]$ に対し $y(\lambda r)\in V_1$ であるから $y(\lambda)\in C$ となる。

また $\tau(y(-r))=-\tau(y(r))$ だから．次の (100) が成立つ。

(100) $\varphi\in\tau(C)$ ならば $-\varphi\in\tau(C)$

いま，$L=\bigcup_{\lambda>0}(\lambda\tau(C))$ とおくとき

(101) L は実ベクトル空間（L^2 の部分空間）である。

実際．(100) と定義から任意の $t\in R$ と $\varphi\in L$ に対し $t\varphi\in L$ である。また任意の $\varphi,\psi\in L$ に対し $\varphi=\lambda\varphi_1$，$\psi=\mu\psi_1$ となる $\varphi_1,\psi_1\in\tau(C)$ と $\lambda,\mu>0$ がある。$\nu=\lambda+\mu$ とおくとき，$\varphi+\psi=\nu(\frac{\lambda}{\nu}\varphi_1+\frac{\mu}{\nu}\psi_1)$ であり．(98) から $\frac{\lambda}{\nu}\varphi_1+\frac{\mu}{\nu}\psi_1\in\tau(C)$ だから．$\varphi+\psi\in L$ となる。

$B=\{\varphi\in L^2 \mid \|\varphi\|\leqq\eta\}$ とおくとき

(102) $B\cap L\subset\tau(C)$

が成立つ。実際，任意の $\psi\in B\cap L$ をとるとき，$\psi=\lambda\varphi$，$\lambda>0$，$\varphi\in\tau(C)$ となる。(99) により $\mu>0$ が存在して $\|\mu\varphi\|=\eta$，$\mu\varphi\in C$ となる。このとき $\psi\in B$ より

$$\eta\cdot\frac{\lambda}{\mu}=\|\mu\varphi\|\frac{\lambda}{\mu}=\|\lambda\varphi\|=\|\psi\|\leqq\eta$$

となるから、 $1/\mu \leqq 1$ である。そこで

$$\psi = \lambda\varphi = \frac{1}{\mu}\cdot\mu\varphi \quad で\quad \mu\varphi \in \tau(C),\ \frac{1}{\mu}\leqq 1 \quad だから\quad \psi\in\tau(C)$$

となり、(102)が証明された。さて次の(103)が成立つ：

(103) $\tau(C)$ は L^2 の強位相でコンパクトである。

この(103)の証明は、[56]には欠けている。今その点を保留して先へ進むと(102)と(103)から、$\tau(C)$ の閉集合である $B\cap L$ について次の(104)が成立つ：

(104) $B\cap L$ はコンパクトである。

この(104)により、実ノルム空間 L（L^2 の部分空間）の任意の閉球はコンパクトであり、従って L は強位相に関し、局所コンパクトである。そこで F.リースの定理[59]「局所コンパクトなノルム空間は有限次元である」によって

(105) 実ベクトル空間 L は有限次元である。

これで定理 B2 の証明ができた。∎

以上の山辺の証明では、(95)と(103)の証明が欠けている。そこでこの gap を補うグルシュコフの証明[20]を紹介しておこう。

定理 B2 のグルシュコフの証明

[20]における補助定理を、山辺[56]にあるものと区別するために、レンマとして引用する。山辺[56]と異なる部分を重点的に示す。

G の一径数部分群 $x(\gamma)$ 全体の集合を K とする。K は $\mathbb{R}$ から G への連続準同型写像全体の集合である。$M=\{x(1)\mid x\in K,\ x(\gamma)\subset V_1\}$ とおく。

レンマ 20. M はコンパクトである。

証明．Mはコンパクト集合V_1に含まれるから，Mが閉集合であることを示せば十分である。それにはMの点列$(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$が，G内で点xに収束するとき，$x\in M$であることを言えばよい。$x_n(r)\subset V_1$であるから，$y_n = x_n\left(\frac{1}{n}\right)$とおくと，$y_n, y_n^2, \cdots, y_n^n \in V_1$であるから$y_n \in Q_n$である。($Q_\alpha$の定義は(60))．$Q_n \to \{e\}$であるから，$y_n \to e\ (n\to\infty)$である。このとき一径数部分群$x(r)$が

$$x(r) = \lim_{n\to\infty} y_n^{[rn]}$$

によって定義される。

このとき

$$(106) \qquad x(1) = \lim_{n\to\infty} y_n^n = \lim_{n\to\infty} x_n(1) = \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

である。そして$y_n, y_n^2, \cdots, y_n^n \in V_1$だから任意の$r\in[0,1]$に対し，$x(r)\in \overline{V_1} = V_1$である。そこでMの定義と(106)から，$x\in M$となる。これでレンマは証明された。

任意の$x\in M$に対し，接ベクトル$\tau(x)$が定義される。Lemma 7により

$$(107) \qquad \tau(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}(x(r)\vartheta - \vartheta) \in L^2$$

である。

レンマ26．　$\tau : M \to L^2$は，一対一連続写像で，τ^{-1}も連続である。

証明．前半は，山辺[56] Theorem 2の証明で証明されているからτ^{-1}の連続性を言えばよい。Mはコンパクトだから，Mの任意の閉集合Fはコンパクトであり，従って連続写像τによる像$\tau(F)$はコンパクト従ってL^2の

閉集合である。従って τ は閉写像であるから、逆写像 $\tau^{-1}: \tau(M) \to M$ は連続である。 ▮

G の一径数部分群全体の集合 K は、実ベクトル空間の構造を持つ。

(a) $t \in \mathbb{R}$, $x \in K$ に対し、$(t \cdot x)(r) = x(tr)$ $(r \in \mathbb{R})$ とすると $t \cdot x \in K$.

(b) $x, y \in K$ に対し

(108) $$z(r) = \lim_{\alpha \to \infty} \left(x\left(\tfrac{1}{\alpha}\right) y\left(\tfrac{1}{\alpha}\right) \right)^{[r\alpha]}, \quad r \in \mathbb{R}$$

とするとき、$z \in K$ である。 $z = x + y$ と定義する。

この定義によって実際 K が実ベクトル空間となることは容易に確められる。

任意の $x \in K$ に対し

(109) $$r_x = \sup\{ r \in \mathbb{R} \mid x(r) \in V_1 \}$$

とおく。 $x(r_x) \in \overline{V_1} = V_1$ である。 $x(r_x)$ は V_1 の境界に含まれるから、次の (110) が成立つ。

(110) $d = \inf_{x \in K} \| \tau(x(r_x)) \|$ とおくとき、 $d > 0$ である。

次に実ベクトル空間 K にノルムを導入する。

任意の一径数部分群 $x(r)$ に対し、$\varepsilon > 0$ が存在して $|r| \leqq \varepsilon \Rightarrow x(r) \in V_1$ だから、$y(r) = x(\varepsilon r)$ とすると、$0 \leqq r \leqq 1 \Rightarrow y(r) \in V_1$ であるから $x(\varepsilon) = y(1) \in M$ となる。そこで $x(r_0) \in M$ となる $r_0 > 0$ を一つとり（例えば $r_0 = \varepsilon$）、一径数部分群 $x = x(r)$ のノルムを次の (111) によって定義する：

(111) $$\|x\| = \left\| \frac{1}{r_0} \tau(x(r_0)) \right\| \qquad (x(r_0) \in M),\ r_0 > 0)$$

(111) の右辺の値は r_0 のとり方によらず一定である（補助定理2による）。そして実際に、K 上のノルムを定義する。特に

(112)　　$\|x\|=0 \Rightarrow x=0$　（すなわち $\forall r\in\mathbb{R}$ に対し $x(r)=e$）

実際定義 (111) により、$\|x\|=0$ のとき $x(r_0)\in M$ となる $r_0>0$ に対し $\|\tau(x_0(r_0))\|=0$ であるから、$\tau(x(r_0))=0$ で、レンマ 26 により $x(r_0)=e$ である。このとき $|r|\leqq r_0$ となる任意の $r\in\mathbb{R}$ に対し、$x(r)\in M$ であるから、同様にして $x(r)=e$ となる。x は $\mathbb{R}\to G$ の連続準同型写像だから、これから $x(r)=e$　$(\forall r\in\mathbb{R})$ が導かれる。

(110) の d の定義により

(113)　　$x\in K,\quad \|x\|\leqq d \Rightarrow x(1)\in M$

が成立つ。いま (110) の $d>0$ に対し

(114)　　$B=\{x\in K \mid \|x\|\leqq d\}$

とおく。また

(115)　　$K_1=\{x\in K \mid x(1)\in M\}$

とおく。

(116)　　$f: K_1\to G$ を、$f(x)=x(1)$

によって定義する。K_1 にノルム空間 K の強位相を与えておく。

(117)　f は K_1 から $f(K_1)$ への同相写像である。

証明　$x, y\in K_1$ に対し、$z=x-y$ とおく。このとき補助定理3 (c) により、$z\left(\frac{1}{2k}\right)\in M$ で $\tau\left(z\left(\frac{1}{2k}\right)\right)=\frac{1}{2k}\{\tau(x(1))+\tau(y(1))\}$ となるから、次の (118) が成立つ。

(118)　$\|x-y\|=\|z\|=2k\left\|z\left(\frac{1}{2k}\right)\right\|=\|\tau(x(1))-\tau(y(1))\|=\|\tau(f(x))-\tau(f(y))\|$

これから、$f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$ が導かれるので

(119) fは一対一写像である。

また，$\tau: M \to L^2$ は連続である（レンマ26）から、次の(120)が成立つ。

(120) $\forall \varepsilon>0$ に対し、eの近傍Uが存在して、$y^{-1}x \in U \Rightarrow \|\tau(x)-\tau(y)\|$ $\leqq \varepsilon$ となる。

(118)(120)から

次の(121)が導かれる。

(121) $f^{-1}: f(K_1) \to K_1$ は連続である。

実際 (120)により $\forall \varepsilon>0$ に対して eの近傍Uが存在して

(122) $$f(y)^{-1}f(x) \in U \Longrightarrow \|\tau(f(x))-\tau(f(y))\| \leqq \varepsilon$$

が成立つ。一方、(118)により $\|x-y\|=\|\tau(f(x))-\tau(f(y))\| \leqq \varepsilon$ だから

(123) $$f(y)^{-1}f(x) \in U \Rightarrow \|x-y\| \leqq \varepsilon$$

が成立ち、f^{-1}は連続である。一方 次の(124)が成立つ。

(124) $f(K)$ はコンパクトである。

$f(K_1) \subset M =$ コンパクト（レンマ20）だから、$f(K_1)$がGの閉集合であることを示せば十分である。今$f(K_1)$の点列 $(f(x_n))_{n\in N}$ $((x_n \in K_1))$ がG内で$\bar{x}$に収束したとする。

$f(x_n)=x_n(1) \in M$で、Mはコンパクトだから、$\bar{x}=\lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \bar{M}=M$ である。Mの定義から、$x(r)<V_1$ となる $x\in K$ が存在して $x(1)=\bar{x}\in M$ となる。そこで $x\in K_1$で、$\bar{x}=f(x)\in f(K_1)$だから、$f(K_1)$は閉集合である。((124)証明終り)。

(125) $f^{-1}: f(K_1) \to K_1$ は閉写像である。

証明 $f(K_1)$ の任意の閉集合 C をとるとき、(124) により C はコンパクトだから、(121) により、その連続像 $f^{-1}(C)$ はコンパクト。従って T_2 空間である G の閉集合である ((125)証明終り)。 (125)から直ちに次の(126) が導かれる。

(126) $f: K_1 \to f(K_1)$ は連続である。

(119) (121) (126) により、直ちに次の (127) が導かれる。

(127) $f: K_1 \to f(K_1)$ は同相写像である。

(128) K_1 はコンパクトである。

これは (124) と (127) から明らか。

(113) により、B はコンパクトな K_1 ((128)の閉集合だから、

(129) 閉球 B はコンパクトである。

さて、実ノルム空間 K の閉球 B がコンパクトだから、K は局所コンパクトであり、従って前述のリースの定理 [59] により、

(130) K は有限次元である。

$x \in K$ に対し、$\tau(x(1)) \in L$ を対応させると、これが全単写線型写像であり、(130) により L も有限次元となる。(証明終り)。

§5 結び

以上述べたように、第五問題は、位相群の中でリー群を位相代数的に

特徴付けるという，フォン・ノイマン［52］の設定した形では，完全に解決した。すなわち次の定理が成立つ。

定理　位相群Gがリー群となるための必要かつ十分な条件は，次の(A)または(B)をみたすことである。

(A)　Gは小さな部分群を持たない局所コンパクト群である。

(B)　Gは有限次元かつ局所連結な局所コンパクト群（特に位相多様体である位相群）である。

よく知られているように，微分可能構造を持たない位相多様体が存在するが位相群であるような位相多様体はすべて，微分可能多様体（実解析多様体）で群演算は微分可能（解析的）となるのである。

しかし，この結果は決して，リー群論を位相群論の中に解消することを意味しない。リー群の作用から，微分することによってその無限小変換を導くというリーのアイディアなくしては，今日でもリー群論の豊かな結果を導くことはできないのである。この意味で，第五問題の解決は，リー群論に代わるものを提供したわけではない。しかし，岩澤の研究に見られるように，第五問題はリー群論の進歩に大いに貢献し，その解決は位相群論の中におけるリー群論の地位を明確にしたのであった。

最後に第五問題の応用の例として，フロイデンタールの論文「リーマン・ヘルムホルツ・リーの空間問題の新しいとらえ方」［10］（1956年）に触れておこう。

[10]では、連結局所コンパクト T_2 空間 R 上に、位相変換群 F が推移的に作用しているものとし、(R, F) は次の三つの仮定 (S), (V), (Z) をみたすものとする。

(S) R の閉集合 A とコンパクト集合 B が交わらないとき、開集合 $U \neq \phi$ が存在して、任意の $f \in F$ に対し、$f(U) \cap A \neq \phi \Rightarrow f(U) \cap B = \phi$ が成立つ。

(V) 位相群 F は完備である。

(Z) $x \in R$ が存在して $J = \{f \in F \mid f \cdot x = x\}$ とおくとき、$R - J \cdot x$ は連結でない。

[10]では、この三条件をみたす R と F の組を数え上げている。この場合 F はリー群となるのであるが、その証明に第五問題の最終的な解となった次の定理を用いている：

山辺の定理5. 任意の局所コンパクト群 G は一般化リー群 G である。すなわち G の単位元 e の任意のコンパクト近傍 U に対し、U に含まれる G のコンパクト正規部分群 N が存在して、G/N はリー群となる。

この定理を用いて、上の F の単位元成分 F_0 がリー群であることを帰謬法で証明する。もし F_0 がリー群でないとすると、山辺の定理5により、F_0 のコンパクト正規部分群 N_r の無限減少列

(1) $$N_1 \supsetneqq N_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq N_r \supsetneqq \cdots$$

が存在して、F_0/N_r はすべてリー群で、N_r はどれもリー群でないようなものが存在する。所が上の三条件をみたす F では、(1) のような無限列は存

在しないことがわかるのである。実は(1)のような列の長さは高々5以下となるのである。このフロイデンタールの研究は、第五問題の他分野への応用として特筆すべきものである。このフロイデンタールの定理については、長野[63]は別証を与え、応用として「長さの等しい二つの線分は常に合同である」という条件をみたすリーマン多様体は、階数1の対称リーマン空間であることを証明した。

References

[1] S.Bochner and D.Montgomery, Locally compact groups of differential transformations, Ann. of Math. 47(1946), 639-653.

[2] N.Bourbaki, Integration, Ch. 7 et 8, Hermann, Paris, 1963.

[3] N.Bourbaki, Groupes et Algebres de Lie, Ch. 9, Masson, Paris, 1982.

[4] G.E.Bredon, F.Raymond and R.F.Williams, p-adic groups of transformations, Trans. AMS 99(1961), 488-498.

[5] H.Cartan, Sur les groupes de transformations analytiques, Hermann, Paris, 1935.

[6] C.Chevalley, Generation d'un groupe topologique par des transformations infinitesimales, C.R.Acad.Sci.Paris 196(1933), 744-746.

[7] C.Chevalley, Two theorems on solvable topological groups, Lectures in Topology, edited by Wilder and Ayres, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1941.

[8] C.Chevalley, "Theory of Lie Groups I", Princeton Unv. Press, Princeton, 1946.

[9] C.Chevalley, On a theorem of Gleason, Proc. AMS 2(1951), 122-125.

[10] H.Freudenthal, Neuere Fassungen der Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems, Math. Zeitschr. 63(1956), 374-405.

[11] A.M.Gleason, Square roots in locally compact groups, Bull.AMS 55(1949), 446-449.

[12] A.M.Gleason, Arcs in a locally compact groups, Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A., 36(1950), 663-667.

[13] A.M.Gleason, Spaces with a compact groups of transformations, Proc.AMS 1 (1950), 35-43.

[14] A.M.Gleason, On the structure of locally compact groups, Duke Math.J. 18 (1951(, 85-104.

[15] A.M.Gleason, Groups without small subgroups, Ann. of Math. 56(1952), 193-212.

[16] M.Goto, On local Lie groups in a locally compact groups, Ann. of Math. 54 (1951), 94-95.

[17] 後藤守邦編. vector 群の arcwise connected subgroup について, 数学 2巻 2号 (1949), 180-183.

[18] M.Goto, On an arcwise connected subgroups of a Lie group, Proc.AMS 20(1969), 157-162.

[19] M.Goto and H.Yamabe, On continuous isomorphisms of topological groups, Nagoya Math.J. 1(1950), 109-111.

[20] V.M.Gluškov, The structure of locally compact groups and Hilbert's fifth problem, Uspehi Mat. Nauk 12(1957)2,3-41. English translation, AMS Translations 15(1960), 55-93.

[21] S.Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Acad. Press, New York, 1978.

[22] 岩澤健吉, Hilbertの第五問題,可解位相群の構造について, 数学 第1巻3号(1948), 161-171.

[23] K.Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math. 50(1949), 507-557.

[24] I.Kaplansky,"Lie algebras and locally compact groups", Univ. of Chicago Press, Chicago, 1971.

[25] M.Kuranishi, On locally euclidean groups satisfying certain conditions, Proc. AMS 1(1950), 372-380.

[26] M.Kuranishi, On conditions of differentiability of locally compact groups, Nagoya Math. J.(1950), 71-81.

[27] D.Montgomery, Topological groups of differentiable transformations, Ann. of Math. 46(1945), 382-387.

[28] D.Montgomery, A theorem on locally euclidean groups, Ann. of Math. 48 (1947), 650-659.

[29] D.Montgomery. Connected one-dimensional groups, Ann. of Math. 49(1948), 110-117.

[30] D.Montgomery, Analytic parameters in three dimensional groups, Ann. of Math. 49(1948), 118-131.

[31] D.Montgomery, Subgroups of locally compact groups, Amer. J. Math. 70 (1948), 327-332.

[32] D.Montgomery, Theorems on the topological structure of locally compact groups, Ann. of Math. 50(1949), 570-580.

[33] D.Montgomery, Connected two dimensional groups, Ann. of Math. 51(1950),

[34]D.Montgomery, Finite dimensiona groups, Ann. of Math. 52(1950),591-605.

[35] D.Montgomery, Locally homogeneous spaces, Ann. of Math. 52(1950),261-271.

[36] D.Montgomery, Simply connected homogeneous spaces, Proc.AMS 1(1950), 467-469.[37] D.Montgomery and L.Zippin, Compact abelian transformation

[37] D.Montgomery and L.Zippin, Compact abelian transformation groups, Duke

Math. J.4(1936), 363-373.

[38] D.Montgomery and L.Zippin, Topological transformation groups, Ann. of Math. 41(1940), 778-791.

[39] D.Montgomery and L.Zippin, Existence of subgroups isomorphic to the real numbers, Ann. of Math. 53(1951), 298-326.

[40] D.Montgomery and L.Zippin, Two-dimensional subgroups, Proc.AMS 2(1951), 822-838.

[41] D.Montgomery and L.Zippin, Four-dimensional groups, Ann. of Math. 56(1952), 140-166.

[42] D.Montgomery and L.Zippin, Small subgroups of finite-dimensional groups, Ann. of Math. 56(1952), 213-241.

[43] D.Montgomery and L.Zippin, "Topological Transformation Groups", Interscience Publ. Inc., New York, 1955.

[44] S.B.Myers and N.E.Steenrod, The groups of isometries of a Riemannian manifold, Ann. of Math. 40(1939), 400-416.

[45] L.S.Pontrjagin, The theory of topological commutative groups, Ann. of Math. 35(1934), 361-388.

[46] L.S.Pontrjagin, Sur les groupes topologiques compacts et le cinquieme probleme de M.Hilbert, C.R.Acad.Sci. Paris, 198(1934), 238-240.

[47] L.S.Pontrjagin, "Topological Groups", Princeton Univ.Press, Princeton, 1939.

[48] J.P.Serre, Le cinquième probleme de Hilbert, État de la question en 1951, Bull.Soc.Math.France, 79(1951), 1-10.

[49] J.P.Serre, "Lie Algebras and Lie Groups", W.A.Benjamin, New York, 1965.

[50] 杉浦光夫. 第五問題研究史 I, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 13 (1997), 67-105.

[51] J.von Neumann, Über der analytische Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellung, Math. Zeitsch. 30(1929), 3-42.

[52] J. von Neumann, Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, Ann. of Math. 34(1933), 170-190.

[53] H.Yamabe, On an arcwise connected subgroups of a Lie groups, Osaka Math. J. 2(1950), 13-14.

[54] H.Yamabe, Note on locally compact groups, Osaka Math. J.3(1951), 77-82.

[55] H.Yamabe, On the conjecture of Iwasawa and Gleason, Ann. of Math. 58(1953), 48-54.

[56] H.Yamabe, Generalization of a theorem of Gleason, Ann. of Math. 58(k953),

351-365.

[57] C.T.Yang, p-adic transformation groups, Mich. Math. J. 7(1960), 201-218.

[58] S.Kakutani, Über die Metrisation der topologischen Gruppen, Proc.Imp.Acad. Japan, 12(1936), 82-84.

[59] F.Riesz, Über lineare Fuktionalgleichungen, Acta Math. 41(1918),71-98.

[60] S.Kakutani and K.Kodaira, Über das Haarsche Mass in der lokal bikompakten Gruppen, Proc,Imp,Acad.Japan, 20(1944), 444-450

[61] A.I.Malc'cev, On solvable topological groups, Mat.Sbornik N.S. 19(1946), 165-174. (Russian)

[62] 山辺英彦. Chevalley の問題について, 数学. 4巻1号 ((1952) 17-21.

[63] 長野正. Wang - Tits - Freudenthal の空間問題について —— 線分の合同定理による古典的空間の特徴づけ —— 数学 11巻 4号 (1960), 205-217.