はじめに

この研究所報第６号は、１９９２年１０月２４・２５日に行われた津田塾大学数学計算機科学研究所主催の第３回数学史シンポジウムの記録である。

ただし御健康上の理由で中止となった長岡亮介氏の講演は、９３年度の第４回数学史シンポジウムで講演して下さることになったので、第４回の記録として発表して頂く予定である。なお第４号の編集に間に合わなかった第２回シンポジウムの浪川幸彦氏の講演の記録を今回頂くことが出来たので、本号に掲載した。

御多忙中を講演して下さり、さらに記録をお寄せ下さった方々に厚く御礼申し上げる次第である。

１９９３年7月２０日

津田塾大学数学教室

杉浦　光夫

目　次

クロネッカーの数論の解明

I. 解明の基本構想

高瀬　正仁（九大理）

〔目次〕

1. はじめに

数学者クロネッカーの名の記憶は古く、「クロネッカーの青春の夢」という美しい言葉の響きとともに、数学という学問に深く心を寄せ始めてまもない十代の終わりのころまでもさかのぼることができるように思う。クロネッカーはガウスに始まるドイツ数学史の山脈を形成する高峰の一つであり、数学者列伝には欠かせない人物なのであるから、小堀憲『大数学者』（新潮社）、E. T. ベル『数学を作った人々』（東京図書）等々、書店や図書館で気軽に目にしうるたいていの近世数学史に登場するのは蓋し当然である。そうしてそれらの書物を手に取れば、クロネッカーはあるいはヴァイエルシュトラスやカントールの数学思想上の敵対者として、またあるいは、類体論の建設を通じて「クロネッカーの青春の夢」の解決を導いた高木貞治の先駆者として語られるのが常であった。数学上の業績はさぞかしと思わせるに足る風情はもとより十分すぎるほどに感じられたが、それればかりではなく、クロネッカーは何かしら非常に独自な数学思想家のようであり、あまつさえその思考様式は常に「青春の夢」の甘美さを漂わせ、濃厚なロマンティシズムの香りに包まれているように思われた。オイラーの巨大さ、ガウスの偉大さ、アーベルの可憐さ、ガロアの悲惨さ、ヴァイエルシュトラスの堅実さ、それにデデキントの思弁性やリーマンの神秘性などと並んで、クロネッカーから受ける印象はロマンティシズム、しかも晦渋なロマンティシズムだったのである。

ところがひとまず数学史を離れて具体的に数学そのものの勉強を進めていくと、不思議なことにクロネッカーの全体像はとりとめもなくかすんでいくばかりであった。クロネッカーをめぐって交わされる数学上のうわさ話は確かに必ずしも少なくはなかったが、それらはほとんどいつでも間接的であり、しかもむしろ消極的な評価へとつながりかねないものが多かった。たとえば、クロネッカーが語ったという、「整数は神の創造物であり、他の数は人間が作ったものである」という主旨の言葉は、「数学の本質はその自由性にある」とするカントールの叫びに比していかにも偏狭であり、頑迷固陋の感を免れがたいであろう。楕円関数論の分野では、「青春の夢」を口にしながらもみずからの手で解決しえたわけではなく、解決をめざして試みられたという膨大な晩年の連作「楕円関数の理論」のうわさは耳にしたものの、なお完成の域には遠いという印象をぬぐいさることができなかった。さらに、代数的整数論の基礎理論、わけてもイデアル論の構築に際しては、デデキントの理論の斬新な簡明さに対して、クロネッカーの理論は容易に正体を捕捉しがたい複雑さの故に、敬して遠ざけられなければならなかった。クロネッカーの名を冠する数学用語（「クロネッカーのデルタ」、「クロネッカーの指数」、「クロネッカーの積」等々）、公式（「クロネッカーの極限公式」、「クロネッカーの合同関係式」等々）、定理（「クロネッカーの近似定理」、「（有理数体上のアーベル数体の構成に関する）クロネッカーの定理」等々）にもしばしば遭遇したが、総じて印象は散漫であり、全体を一人の数学者のもとへと帰一せしめるだけの濃密な有機的連関が存在するようには思われなかった。見聞する事柄が増していけばいくほど、数学者クロネッカーの輪郭は逆に次第に曖昧になっていった。その間、時期により多少の濃淡の差こそあれ、クロネッカーへの関心はとぎれることなく持続したが、より深い認識への道が開かれようとする気配はついに見えないままであった。

さて、二十代のころ、岡潔の多変数関数論の勉強を通じて、数学という学問は数学的自然を対象とする自然学の一分野、すなわち数学的自然学であり、その数学的自然の本体は本質的に時間的契機を内包する歴史的観念であるという考えを抱くに至った。このような考えによれば、数学と数学史は分かちがたく融合している一個の有機体であり、その結果、数学のよりよい理解を願う気持ちは自然に数学史研究の意欲へと転化していったのである。そこで昭和５７年（１９８２年）の春、いよいよ本格的に数学史への道を踏み出そうと決意して、大まかな見取図の作成に取り掛かった。ただちに決断がなされたのは、ともあれガウスの大著『アリトメティカ研究』（この邦訳名は私見によるものだが、ほかにも種々の提案がなされている。結局、単に『整数論』とするのが最も簡明のようである）から始めるという一事のみだった。続いてアーベル、ヤコビ、アイゼンシュタイン、クンマー、ディリクレ、リーマン、ヴァイエルシュトラス、デデキント、クロネッカー、ヒルベルト等々、いずれ劣らぬ大数学者たちの巨大な全集群を前にして、取り組むべき作品をひとつひとつリスト・アップ

する作業を進めたが、名を知るのみで見たことのない傑作が目白押しであり、その総量はたちまちのうちに４０００，５０００，６０００・・・頁へとふくれあがっていくのであった。まことに目の眩まんばかりのきらびやかな情景だったが、数学と数学史は一体であるという観点に立脚している以上、このような状勢は取りも直さず数学的知識の極端な欠如を示しているのであり、さすがに内心忸怩たるものを禁じえなかった。すなわち、数学史への着眼とともに、ここに初めて数学の勉強が真に始まるのだという鮮明な感慨を得たのである。

一般化と問題解決とを主要な関心事とする現代数学の趨勢に倦み果てて久しかったおりから、この古文書解読計画は数学的生命の再生への期待を荷なうに足る生き生きとした活力を十二分に備えていた。だが、ここにはただ一点だけ、何かしら不吉な行く末を暗示する黒点が存在し、しかもその処遇の如何はいつか必ず大計画の帰趨を左右する一大事となるにちがいないと思われた。それがクロネッカーであった。この数学者以外の大数学者たちについては、ガウスでもアーベルでも、なるほど遺漏なく精密に理解するには膨大な量の時間と労力を要するであろうとしても、がんばればなんとかなるという予感があった。しかしクロネッカーだけはちがっていた。ほとんどの論文が未知のものであることに当惑させられて、リスト・アップの段階ですでに大きな困難を覚えたこともさることながら、どの論文を観察しても、「とうてい理解できそうにない、丹念に読んでもおそらく何もわかるまい」としか感じられなかったのである。なぜひとりクロネッカーのみが例外的であるのか、もちろんこの時点では知るすべもなかったが、ともあれこの「おそらく理解できまい」という感情は論理と本質の双方にまたがって、広くクロネッカーの世界全体を覆っていた。何よりもまずほとんどすべての論文は容易に論理的追随を許さないであろうという気がしたが、たとえ、連作「楕円関数の理論」の場合のように、幸いにも普通の（これは、クロネッカー以外の、という意味である）論文を読むのと同様の仕方で論理の連鎖を追っていくことが可能であるように思えたとしても、その本質、すなわち、真実の意図の洞察となると、手がかりとなりうるものは依然として何も見えそうにないのであった。

玉城康四郎先生（仏教学者、東大名誉教授）は道元のわかりにくさについてこんなふうに語っている。

> 道元がわたしの心に影を落としはじめたのは、いつのころであったろうか。仏教を学ぼうとするものが、道元に関心を持つのは当然であるかもしれないが、かれとのそのころのかかわり方には、いささか特殊な雰囲気があったように思う。
>
> 日支事変の起こる前に高等学校の生活を楽しんだものにとっては、人生を語り、芸術を論じ、何とはなしに哲学にあこがれるという思考が、青年の心をとらえて放さなかった。それは全部ではなくても、大部分のものが同じような方向に向いていたことが、特別の共同体意識をつくり

上げていたようである。語りあい論じあうことにおいて、芸術や人生の在り方がすでにわれわれの掌中につかまれているような錯覚をおぼえ、青春の目覚めが、情熱と自覚との未分の状態のなかから、はっきりと立ちのぼっていく光景を、生まれかわったような気概で享受したものである。

そうした雰囲気のなかで、カントやヘーゲルの名が口にのぼり、ニーチェやキルケゴールが語られたが、もとより原書を見ているわけではなかった。これらの名前にまじって、道元の名がわれわれの心に浮かんでいたのである。心に印せられた人物の配列からいえば、道元は、空海や親鸞などとではなく、カントやヘーゲルと並んでいたことは、いかにも奇異である。この組み合せは、大学へ進んでも変わることはなかった。おそらく、和辻哲郎教授の論著「沙門道元」の影響が及んでいたことは疑いを入れまい。道元は、近代哲学にも比べられるような、すぐれた思弁を包んでいるということが、かれへの接触の最初の印象であったように思う。

しかしながら、カントやヘーゲルは、学べば理解できるという予感があった。なるほどかれらの指さすところの世界は深遠ではあっても、ことばをたどっていけば意味は通じそうである。しかし道元は、学んでもおそらく理解できまいという危惧の念が先立っていた。『正法眼蔵』の巻を開けば、ただちに共感はできる。しかも不思議な言葉の魅力がたたえられている。しかし、その境地はたちまちに雲煙のかなたに飛び去り、凡識の及び得ないところで、ひたすら語っているのである。［『日本の名著7　道元』（中央公論社）所収「道元思想の展望」より］

幾年か前、このような玉城先生の言葉に初めて触れたとき、驚きと感銘と喜びがこもごもわきおこり、心から共感を禁じえなかった。私のクロネッカーはそのまま玉城先生の道元のようであった。玉城先生が道元について言うように、クロネッカーもまた「学んでもおそらく理解できまいという危惧の念が先立っていた」が、クロネッカー全集の各巻をひもとけば、どの頁を見ても「不思議なことばの魅力がたたえられて」いた。だが、「その境地はたちまちに雲煙のかなたに飛び去り、凡識の及び得ないところで、ひたすら語っている」のであった。クロネッカーの解読作業は今日もなお著しい進展を見ないままの状態に留まっている。しかしそれはそれとして、私はここで、クロネッカー以外の数学者たち、特にガウスとアーベルとアイゼンシュタインとクンマーの解読の成果を踏まえたうえで、クロネッカー全集の中の不思議な魅力をたたえている言葉の数々を丹念に拾っていくことにしたいと思う。そうしてそのような作業の中から、クロネッカー解明の基本構想がおのずと立ち現われてくることを期待したいと思う。

２．クロネッカーの諸論文における特異モジュールの諸相　（１）特異モジュラー方程式の二性質．アーベル方程式であること、および不分岐であること．

クロネッカーの数学的思索の中には、手に手を携えてつねに全体を統御する働きを示す二つの変数、「顕わな変数」と「隠れた変数」が存在すると私は思う。顕わな変数とは**特異モジュール**を指し示す言葉であり、隠れた変数の意味するものは**相互法則**（本稿では、単に相互法則といえばつねに冪剰余相互法則を意味する）にほかならない。特異モジュールの働きをさまざまな角度から究明し、その究明の成果に立脚しつつ、相互法則に向けて大きな一歩を運ぼうとする数論的世界。それがクロネッカーの世界である。そこで私はまず特異モジュールという顕わな変数に着目し、この変数がクロネッカーの諸論文の中でさまざまな変奏を繰り拡げていく様子を概観したいと思う。この変奏は特異モジュラー方程式の二性質（アーベル方程式であること、および不分岐であること）に始まり（本節）、単項イデアル定理およびアーベル方程式の構成問題との関わりへと進んでいく（第３節）。そうして最後に、相互法則という隠れた変数がわずかに浮上して、陰陽二つの変数の軌跡が瞬時に交叉する場面が出現する（第４節）であろう。そのかすかな情景を目にしえたとき、我々のクロネッカー論はようやく基本構想の糸口をつかむことができるのである。

さて、特異モジュールに関するクロネッカーの究明において決定的な契機となったのは、アーベルの楕円関数論であった。１８５７年の論文「虚数乗法が生起する楕円関数について」（全集，Ⅳ，ｐｐ．１７９－１８３）の冒頭で、クロネッカーはアーベルから受けた影響に触れて、みずから次のように語っている。

アーベルの論文*)（全集，Ｉ，ｐ．２７２**)）の中に、虚数乗法が生起する楕円関数のモジュールはすべて冪根を用いて書き表わされる、という所見が見いだされる。しかしアーベルがそのような特別の種類の楕円関数の、この注目すべき性質を発見するに至った方法についての示唆は欠如している。この発見が起こったのはまさしく論文「楕円関数研究」の起草の後のことであったという事実は、この論文の中の一節（全集，Ｉ，ｐ．２４８．***)　またはクレルレ誌，Ⅲ，ｐ．１８２）から明らかになる。そこではなお、上に言及されたモジュールを定める方程式の可解性に対して疑念が表明されているのである。――― 一番初めに挙げたアーベルの所見に刺激され、私はその証明を見つけようとする意図を持って、この前の冬に、****)　虚数乗法が生起する楕円関数の研究に打ち込

んだ。そうしてその折に、私は探し求められていた証明のほかにもなお、多くの興味ある結果を見いだした。それらのうちのいくつかをここで手短に報告したいと思う。［全集，Ⅳ，p．179．太字の語句「後の」に対応する原語はイタリック体で記されて強調されている。］

*）「楕円関数の変換に関するある一般的問題の解決」（全集，Ⅰ，pp.403－428）

**）ここで言われているアーベル全集はホルンボエが編纂した旧版（1839年）を指す。現行の全集（1881年）の第一巻，p．426参照。

***）同上。現行の全集の第一巻，p．383参照。

****）1856年の冬。

虚数乗法が生起する楕円関数のモジュール。それが特異モジュールである。そうして特異モジュールはある代数方程式を満足し、しかもその方程式、すなわち**特異モジュラー方程式**（これは私が仮に与えた名称である）は代数的に可解である。アーベルは多少の逡巡の後にそのような認識を明確に表明した。クロネッカーの研究はこのアーベルの言明に証明を与えようとする試みから出発したのである。研究の成果はめざましく、特異モジュラー方程式はアーベル方程式である、言い換えると、特異モジュールは虚二次数体上の相対アーベル数体を生成するという著しい事実の発見に到達した（ここにはアーベルの代数方程式論が反響している）。クロネッカーの報告は下記の通りである。

nは3よりも大きな正奇数を表わすとしよう。さらに楕円関数のモジュールをκで表わし、その平方をkで表わそう。すると、$\sqrt{-n}$による楕円関数の乗法が可能であるようなkの相異なる値、すなわち，$\sin^2\mathrm{am}(\sqrt{-n}u,\kappa)$が$\sin^2\mathrm{am}(u,\kappa)$と$\kappa$との有理関数として表示されうるようなkの値の個数は、判別式－nに所属する相異なる二次形式の類の個数の6倍に等しい。これらのkの値はすべて、それらのうちのどれか一つの値のエクスプリシットな代数関数である。そのうえそれらはある整係数方程式の根である。その方程式の次数はkの値の個数に等しい。また、この方程式は、判別式－nに所属する相異なる目（もく）と等個数の整係数因子に分解する。これらの目のどれに対しても、上記の方程式のある定まった因子が所属する。その因子の次数は該当する目の中に含まれている類の個数の6倍に等しい。最後に、正式原始目に所属する因子は、整数と$\sqrt{n}$のみを含む係数を有する6個の等次数因子に分解可能である。従って、これらの6個の部分方程式の次数はどれも、判別式－nに所属する正式原始類の個数に等しい。そうしてこれらの部分方程式の一つには、可解性の特色が最も明瞭に現われている。すなわち、そ

の方程式の諸根は、それらはすべてそれらの一つの（整係数のみを含む）有理関数として表示可能であり、しかも、そのような二つずつの関数 $\phi(k)$ と $\psi(k)$ に対して方程式 $\phi\psi(k)=\psi\phi(k)$ が成立する、という性質を有するのである。**もしnが素数で、しかも－nは二次形式の判別式として正則であるとするなら、言及された部分方程式はアーベル方程式である。**そのほかのあらゆる場合には、その方程式の特殊な性質、その諸根の周期の個数、等々、は、判別式－nに対する種の個数と非正則性指数に依存する。［全集，Ⅳ，pp.179－180．「虚数乗法が生起する楕円関数について」より。太字による強調は私が行なった。また、二次形式の類、正式原始類、目（もく）、正式原始目、種、正則な判別式、非正則性指数などの用語は、ガウスの二次形式論（『アリトメティカ研究』第五章）の中で用いられているものである。］

特異モジュラー方程式には、アーベル方程式であるという性質と双璧をなすと目される、もう一つの著しい性質が認められる。それはこの方程式の不分岐性、すなわち、その判別式は単数を除いて本質的因子を含まないという性質である。クロネッカーはこれを次のような言葉で報告している。

$\sqrt{-n}$ による乗法が生起する特異モジュールは——$n\equiv 3$ もしくは1 (mod. 4)であるのに応じて——kもしくは $k(1-k)$ に対する方程式を通じて定められる。その方程式の係数は、nに含まれている個々の素因子の平方根から作られている。また、その方程式の次数は、判別式－nの正式原始形式の、ある同一の種に所属する類の個数に等しい。［全集，Ⅳ，p.211．「楕円関数の虚数乗法について」より］

上記の部分方程式と二次形式の個々の種との間には、どの種に対してもある定まった部分方程式が対応し、その種の中に含まれている個々の二次形式類に対して、その方程式のある定まった根が対応するという、いっそう精密な関係が見いだされる。［全集，Ⅳ，p.211．同上］

上記の部分方程式に関して私の念頭を離れることのなかった最も困難な問題の一つは、その既約性に関するものであった。・・・整係数方程式の既約性に関する従来の証明法は、ほとんどすべて、判別式に含まれている本質的素因子の性質に基づいている。ところが、**$\sqrt{-n}$ による乗法に所属するモジュールが依拠する上記の部分方程式の判別式は、ある種の例外を除いて、単数以外の本質的素因子を全く含まない。**私は上記の方程式のこの注目に値する性質を帰納的に発見したにすぎず、いまだに一般的に証明することはできないでいる。［全集，Ⅳ，p.213．同上。太字による強調は私が行なった。］

下記の言葉の中では、特異モジュラー方程式の不分岐性が、「特異モジュールは虚二次数体上に相対不分岐数体を生成する」という表現様式をもって語られている。

・・・私がすでに１８６２年６月のベルリン学士院月報，ｐ．３６８[*)]，において言及したように、**楕円関数の特異モジュールの種は、ある一定の平方根を添加するとき――そのとき、モジュールの方程式はいくつかの部分方程式に分解していくが――、もはや「種の判別式」をもたない**という、注目すべき性質を有する。［全集，Ⅱ，ｐ．２６９．「代数的量のアリトメティカ的理論の概要」より。太字による強調は私が行なった。］

＊）１８６２年６月のベルリン学士院月報には、クロネッカーの論文「楕円関数の虚数乗法について」が掲載されている。同月報，ｐｐ．３６３―３７２．

こうして特異モジュールは虚二次数体上に相対不分岐アーベル数体を生成する。これが**ヒルベルトの類体**の原型である。ヒルベルトはクロネッカーの発見それ自体を定義として流用し、力のある特異な数学的概念を得たのである。

３．クロネッカーの諸論文における特異モジュールの諸相（２）単項イデアル定理とアーベル方程式の構成問題

特異モジュールには虚二次数体のイデアルを単項化する力が宿っている。この力の発見を語るクロネッカーの言葉に耳を傾けよう。

私が初めて楕円関数の特異モジュールの研究に専念していたころ、そのときすでに、私はこの［随伴種の究明という］問題の重要性に気がついていた。［全集，Ⅱ，ｐ．３２２．「代数的量のアリトメティカ的理論の概要」より］

楕円関数の虚数乗法の研究に専念していたころ（１８５６年冬）、負整数の平方根の種に随伴する代数的数の種が、指示された通りの仕方で私

の眼前に現われたとき、それは全く新しい、驚くべき、そうして興味ある現象であった。**種√－nに付随するこのような種Γは**、私がすでに１８５７年１０月の月報の中に印刷されている報告*)において強調しておいたように、クンマーの命名に従うならば、**種√－nのすべての理想因子を供給する**。種Γの位数は種√－nの類数に等しい。そうして一般に、種√－nの、合成および類の分配に関する深い諸性質はすべて、随伴種Γの初等的な諸性質の中に、いわばコピーをもっているのである。この例に教えられて、私は複素数に関する私の諸論文を、この問題を解決してそれらを真に完成することが可能となる日までは発表するべきではないと思った。まさにそのために、私はクンマーの言葉の引用の中で言及されている論文発表も、その当時、さしひかえたのである。しかし、最近、すなわち前年の初めに、**種√－nに随伴する種の性質のアプリオリな認識、すなわち解析的な起源に依存しない把握**に到達し、それと同時にこのような種類の随伴に関する一般的な問題の研究のための視点を獲得したときに、私は今や、他の方法の吟味も踏まえたうえで（序文参照）、代数的な量と数を取り扱う私の方法をここで早々に展開しようと決意した。［全集，Ⅱ，ｐｐ.３２３－３２４．同上。太字による強調は私が行なった。］

ここには明記されてはいないが、「種√－nに随伴する種Γ」とは、虚二次数体 Ｋ＝Ｑ(√－ｎ) の数を虚数乗法子とする楕円関数の特異モジュールが、Ｋ上に生成する新たな数体Γのことである。クロネッカーの主張に従うならば、そのΓはＫの随伴種となり、Ｋのイデアルは Γの中ではいっせいに単項化されてしまうのである。

上記の引用文では、「種√－nに随伴する種の性質のアプリオリな認識、すなわち解析的な起源に依存しない把握に到達し、それと同時にこのような種類の随伴に関する一般的な問題の研究のための視点を獲得した」と言われている。これは代数的整数論におけるクロネッカーの理論（主論文は大作「代数的量のアリトメティカ的理論の概要」，全集，Ⅱ，ｐｐ.２３９－３８７） の真意の所在を端的に物語る貴重な言葉である。おそらくヒルベルトはこのようなクロネッカーの言葉の深い影響の中からまずヒルベルト類体、すなわち不分岐類体の概念を抽出し、続いてそのヒルベルト類体における単項イデアル定理の成立という、極めて簡明な情景（「随伴種のアプリオリな認識」はこれで実現されている）を想定したのではあるまいか。こうして特異モジュールに関するクロネッカーの研究は、類体というものの原型を与えるばかりではなく、同時に類体の一般理論、すなわち類体論の実質的な起源とみなすことができるのである。

さて、イデアルの単項化という、特異モジュールに備わっている独特の力の認識に続いて、我々はこの力が真に発揮されるべき固有の場所を探したいと思う。クロネッカーは全集中のただ一箇所において、そのような場所の所在を示

唆している。その場所こそ、クロネッカーの世界に偏在するロマンティシズムの源泉、あの青春の夢にほかならない。特異モジュールの働きの真実の意味は、クロネッカーの青春の夢の考察の中で初めて解き明かされるのである。そこでその解明の様相を観察するために、クロネッカーの言葉に即しつつ、一般的な視点からアーベル方程式の構成問題——青春の夢はこの問題の一区域をなしている——に目を向けたいと思う。

まずクロネッカーはこう言っている。

> どの整係数アーベル方程式の根も、１の冪根の有理関数として表わされる。［全集，Ⅳ，ｐ.１０.「代数的に可解な方程式について」より］

これはいわゆるクロネッカーの定理であり、ここでは整係数アーベル方程式は全体として円周等分方程式によって汲み尽くされることが主張されている。この言明のすぐ次に来る言葉は下記の通りである。

> その係数がａ＋ｂ$\sqrt{-1}$という形の複素数のみを含むようなアーベル方程式の根と、レムニスケートの分割の際に現われる方程式の根の間にも、類似の関係が存在する。そうして究極的には、この結果をいっそう広範に、その係数が、一定の代数的数に由来する非有理性を含むようなすべてのアーベル方程式に対して一般化することが可能である。［全集，Ⅳ，ｐ.１１. 同上］

この言葉の前半で語られている事柄は、クロネッカーの青春の夢の一部分をなす命題である。ここでは、ガウス数体を係数域とするアーベル方程式は、全体としてレムニスケート曲線（またはレムニスケート関数）の等分方程式によって汲み尽くされることが主張されている。これに対して、後半部の言葉の中で表明されている状勢は完全に一般的であり、ある代数的数体を任意に指定するとき、その数体を係数域とするすべてのアーベル方程式を生成する一定の構成様式が存在すると言われている。ここではっきりと打ち出されているのはアーベル方程式の構成問題そのものにほかならないが、さらにクロネッカーは、真に驚くべきことに、その解答をも手中にしていることを示唆している。ただしアーベル方程式の構成様式というものの実体は必ずしも明確ではない。クロネッカー論の立場からは、円周等分方程式やレムニスケート等分方程式、あるいは青春の夢における「特異モジュールをもつ楕円関数の変換方程式」（引き続く引用文における青春の夢の表明参照）を包摂するものとして考えられている、ある一般的なものを明らかにするべく努力しなければならないであろう。この最後の問いに対して、ヒルベルトは「与えられた数体に附随するある一定の解析関数系の特殊値が満足するアーベル方程式系」をもって答えようとした。それがヒルベルトの第12問題である。

さて、クロネッカーは１８８０年3月１５日付のデデキント宛書簡の中で、「最愛の青春の夢」をこんなふうに語っている。

> この数箇月間、私はある研究に立ち返って鋭意心を傾けてきました。この研究が終結に至るまでにはなお多くの困難が行く手に立ちはだかっていたのですが、今日では最後の困難を克服したと信じます。そのことをあなたにお知らせするよい機会と思います。それは私の**最愛の青春の夢**のことです。詳しく申し上げますと、整係数アーベル方程式が円周等分方程式で汲み尽くされるのと同様に、**有理数の平方根を伴うアーベル方程式は特異モジュールをもつ楕円関数の変換方程式で汲み尽くされる**という事実の証明のことなのです。［全集，Ｖ，ｐ．４５５．　太字による強調は私が行なった。］

即座に問題となるのはこの青春の夢の解決法だが、それについてクロネッカーが同じデデキント宛書簡の中で表明している見解は瞠目に値する。我々はクロネッカーの言葉に虚心に耳を傾けたいと思う。

> 私は先ほど申し上げた定理*)の証明を長い間おぼろげに心に描いて探し求めてきたのですが、そのためにはなお、特異モジュールに対するあの注目すべき方程式の本性に対する、ある全く別の――そのように申し上げてよろしいかと思います――哲学的洞察が私にとっては不可欠でした。その哲学的洞察の力をもって、このような方程式はなぜ――クンマーの表記法（私はそれを１８５７年にも報告**)の中で使用しました）によりますと――ａ＋ｂ√－Ｄに対する理想数に具体的な姿を与えるのに過不足のない無理量をもたらすのかという、そのわけが明らかにされなければなりませんでした。［全集，Ｖ，ｐ．４５６］

*)「青春の夢」を指す。
**)「１８５７年の報告」は「虚数乗法が生起する楕円関数について」を指す。

上述のように、特異モジュールには虚二次数体のイデアルをいっせいに単項化する力が宿っているが、ここに引用した言葉によれば、クロネッカーはこの事実の発見に続いてなお一歩を進め、なぜこのような力が存在するのかという形而上的な問いの究明へと移ったようである。そうして青春の夢の解決のためには、この問いに対する解答を我々に教示してくれる、何かしら超越的な性格を有する洞察力が不可欠であるというのである。不思議な魅力をたたえてやまない数々のクロネッカーの語録の中でも白眉とも言うべき言葉であり、特異な数学思想家としてのクロネッカーの面目が躍如とするかのような場面である。

アーベルの深い影響のもとに出発したクロネッカーの特異モジュール研究はここに大団円を迎え、青春の夢との親密な関わりの中で、その真意の所在が明るみに出されたのである。［ただし歴史はクロネッカーの思惑どおりには進行せず、高木貞治が最終的に類体論を完成させて青春の夢を解決したとき、その解法は単項イデアル定理とは無関係であった。そのためにこの定理は類体論の体系の中でひとつの孤立したエピソードとしての位置を占めるにすぎないことになり、その結果、この定理に対する上記のようなクロネッカーの謎めいた認識は、今日もなお意味不明なままに放置されているのである。］

青春の夢をそのみごとな雛形として包摂するアーベル方程式の構成問題は、クロネッカーの代数的整数論の基本的動因であった。クロネッカー自身、論文「代数的量のアリトメティカ的理論の概要」の序文の冒頭で、その間の事情をこんなふうに説明している。

> 代数的および数論的研究に関する同時代の仕事に導かれて、私はすでに早い時期から、代数学のアリトメティカ的側面を特別に注視しなければならないという見解に達していた。そこでアーベル方程式の根から形成される複素数の研究は、ある有理域におけるすべてのアーベル方程式の構成という、代数的—アリトメティカ的問題へと私を導いたのである。
> ［全集，Ⅱ，p.２４５］

すでに見たように、クロネッカーの代数的整数論の中には相対アーベル数体に関するある種の一般理論——そこには今日の類体論へと向かう力が内在している——が萌していたが、上記のような言葉によりそのような理論の意味もまた明瞭に看取されるであろう。すなわち、何かしら類体論の名に値する理論を建設し、その基盤の上にアーベル方程式の構成問題（あるいは同じことだが、相対アーベル数体の構成問題）の解決をはかること。それが代数的整数論におけるクロネッカーの基本構想だったのである。

ヒルベルトからウェーバー、高木貞治へと、代数的整数論の歴史は大略クロネッカーの指針に沿う形で推移していった（ただし、理論叙述の枠組みとしてはデデキントが開発したものが採用され、クロネッカーの手になるものは顧みられなかった）。それは普通、類体論形成史として語られることの多い数学史的現象である。そうして最終的に高木貞治によって規定された類体の一般概念を土台に据えるとき、「任意の相対アーベル数体は類体である」という、類体論におけるいわゆる逆定理が成立する。しかしこれはそれ自体としてはいわば縦のものを横にしたような出来事にすぎず、これによって別段アーベル方程式の構成問題がすっかり解決されたというわけではない。だが、これだけのことではあっても、その威力は絶大だった。実際、この逆定理を踏まえて、まず高木貞治自身の手でクロネッカーの青春の夢が解決された。続いてアルティンの相互法則が出現し、その結果、ガウス以来の懸案であった冪剰余相互法則は完

全な形で確立されるに至ったのである。

次節（第４節）で述べるように、私見によればアーベル方程式の構成問題の真意は相互法則にあるのであるから、たとえこの問題自体はなお未解決であるとしても、我々の目には、類体論の成立により代数的整数論におけるクロネッカーの構想はほぼ実現されたかのように映ることであろう。もし考察の範囲を代数的整数論に局限するならば、このような判断は完全に正しいと私も思う。しかし我々が今そうしているように、クロネッカーの数論の解明という全的な立場に立脚するのであれば、全容の解明のためにはこれだけでは片手落ちである。我々はなお一歩を進めて、アーベル方程式の構成問題における解析性の働きをめぐって深刻な考察を積み重ねていかなければならない。なぜなら、数論的世界の中で決定的な契機として作用する解析性の働きこそ、クロネッカーの世界の本質を規定する、あの香り高いロマンティシズムの源なのであるから。この最後の論点については、最終節（第５節）であらためて言及したいと思う。

４．特異モジュールと相互法則

ひとつの本質的な問いがなお残されている。クロネッカーの言葉によれば、アーベル方程式の構成問題は代数的ーアリトメティカ的、すなわち代数的であるとともにアリトメティカ的であるとも言われていた。この問題が代数的である道理は見やすいが、さらにアリトメティカ的でもあるという言葉に接すれば、だれしも違和感を禁じえないのではあるまいか。そこで我々はこのクロネッカーの不可解な言葉の意味をここで考察したいと思う。

有力なヒントはすでにガウスの円周等分論の中に現われている。ガウスは『アリトメティカ研究』の緒言の末尾で円周等分論に言及し、「円周等分の理論もしくは正多角形の理論は、なるほど**それ自身**はアリトメティカに所属するものではない。しかしそれにもかかわらず、その**諸原理**はひとえに高等的アリトメティカから汲み取られなければならないのである」（ガウス全集，Ｉ，p.８．太字の語句に対応する原語はイタリック体で記されて強調されている）という不思議な言葉を書き留めている。そうして私の見るところによれば、ここで言われている円周等分論の「諸原理」という一語の意味は、ガウスを促してこの理論の形成へと向かわせるに至った根本的動因のことと解するのが至当であり、しかもそれは平方剰余相互法則の中に隠されている。すなわち、ガウス自身が明らかにしたように、円周等分論の中には平方剰余相互法則の証明の基本契機が見いだされる（ガウスの第四、第五、第七証明参照）が、円周等分論はまさしくこの事実の故にアリトメティカ的であると言われるのである。

さて、ガウスの円周等分論は「円周等分方程式はアーベル方程式である」と

いう基礎的認識から出発する（ただし、もちろん、アーベル方程式の一般概念が表明されているわけではない）が、さらにクロネッカーの定理によれば、円周等分方程式は整係数アーベル方程式の構成問題に対してその完全な解決を与えるのであった。それ故、アーベル方程式の構成問題はアリトメティカ的であるとするクロネッカーの言葉は、その本質的な部分においてガウスの言葉とよく共鳴していると考えられるのである。それならば、クロネッカーの言葉の真意もまた相互法則の中に隠されているのではあるまいか。すなわちクロネッカーは、アーベル方程式の構成問題の解決はおのずと冪剰余相互法則の証明原理として機能する、と考えていたのではあるまいか。これが私のクロネッカー論の土台をなす二つの仮説のうちの一つである（これを**第一基本仮説**と呼びたいと思う。もう一つの仮説については第５節参照）。

私の仮説を支持する役割を果たすであろう、有力な間接的証拠が存在する。それはヒルベルトの類体論である。既述のように、ヒルベルトは特異モジュールに関するクロネッカーの研究の中からヒルベルト類体、すなわち不分岐類体の概念を取り出したが、そのねらいは、不分岐類体の力により冪剰余相互法則に関するクンマーの研究の限界を乗り越えることであった。そうしてそのヒルベルトの意図はフルトヴェングラーや高木、アルティンの手で当初のもくろみをはるかに越える形で成就され、類体の一般概念の確立を通じて「任意の相対アーベル数体は類体である」という状勢認識――既述のように（前節参照）、この状勢認識はともあれアーベル方程式の構成問題（あるいは同じことだが、相対アーベル数体の構成問題）に対して一定の解答を与えている――が可能となったとき、そのとき初めて冪剰余相互法則の理論が完成した。それ故、類体論形成史とは、とりもなおさず、代数的整数論におけるクロネッカーの構想を形あるものにしようとする、大掛かりな試みの軌跡にほかならない。現実に生起した数学史の様相は、第一基本仮説に対して高い蓋然性を与えていると考えられるのである。

ここでアイゼンシュタインの研究を想起したいと思う。アイゼンシュタインはレムニスケート関数の理論を応用して四次剰余相互法則の新証明を得たが、クロネッカーの念頭には、ガウスの円周等分論とともに、つねにこのアイゼンシュタインの研究があったのではないかと私は思う。クロネッカーの定理は平方剰余相互法則に対するガウスの第四、第六、第七証明の証明原理を与えているが、同様に、ガウス数体上のアーベル方程式の構成問題に関するクロネッカーの言明（第３節参照）は、アイゼンシュタインによる四次剰余相互法則の証明に対して、その証明原理として機能する。ヒルベルトの類体論はこのような状勢の延長線上に自然な形で立ち現われてくるのである。

クロネッカー全集の中には、私の仮説を支える働きを示すであろうと思われる、唯一の直接的証拠が存在する。それは論文「ある種の複素数の冪剰余について」（全集，Ⅱ，ｐｐ．９７－１０１）の中の次のような言葉である。

すでに非常に早い時期に、オイラーは、ある定まった判別式Dをもつ二次形式の素因子はある一定の一次式mD＋αに包含されるという観察を行なっていたが、１７８３年になって初めて、彼はこの数論にとって極めて豊饒な観察を注目すべき仕方で定式化した。相互法則という名称はその由来をその定式化の様式に負っているのである。その際に――正当にも――つねに特別に重視されていた相互関係の美しさのあまり、そのとき以来、元来のオイラーの観察の意味と目的はかなり背景にしりぞいてしまった。ところが、近ごろ、**特異モジュールのアリトメティカ的理論の、複素数の冪剰余への応用**にあたって、私はある特異な新しい現象に直面したが、それは即座に、オイラーが二次相互法則の本質的内容を公に語った、あの最初の言い回しを想起させるのである。そうして冪剰余の理論におけるこの現象は、単にこの理論の歴史的出発点との類似性によりそのような回想に誘われるという点においてばかりではなく、この理論の展開の途次、新しい段階へと向かうためのヒントを通じて先行きを展望するという点から見ても、特に興味深いものである。そこで私は本日、学士院にこの現象に関する手短な報告を行ないたいと思う。
［全集，II，p.９７．太字による強調は私が行なった。］

「特異モジュールのアリトメティカ的理論［これは青春の夢を意味すると考えるのが至当である］の、複素数の冪剰余への応用」に際して、クロネッカーが直面したある特異な新現象。それは冪剰余の理論に所属する現象であり、しかも平方剰余相互法則の本質を語るオイラーの言葉に通うところがあると言われている。我々の推定を裏付けるに足る、真に決定的な言明と言わなければならないであろう。

さらに同じ論文の中には、「新現象」の報告の後に、

・・・そうして冪剰余の理論のいっそう進んだ展開に向けての明確な指示を、クンマーの研究では除外された場合に対しても含んでいるのは、まさにこの状勢なのである。［全集，II，p.１００］

という注目すべき言葉も認められる。冪剰余相互法則に関するクンマーの研究の及ぶ範囲は無制限なのではなく、正則な場合、すなわち、相互法則の舞台として設定される円分体に「正則」という一条件が課される場合に限定されていた。そこでこの限界を打破して、「クンマーの研究では除外された場合」、すなわち非正則な場合に対しても相互法則を確立しようとすることが問題となるが、上記のようなクロネッカーの言葉に依拠するとき、クロネッカーの特異モジュール研究ははっきりとその方向を指向していたと明言することが許されるのではあるまいか。そうしてヒルベルトの類体論により、この方向へと向かう道は実際に踏破されたことも、ここで想起されなければならないであろう。か

くして間接的証拠の信憑性はますます高まり、直接的証拠と相俟って、我々の第一基本仮説の堅固な成立基盤を構成するのである。

5．クロネッカー論の構想

代数的整数論におけるクロネッカーの構想は類体論の建設を通じて相当によく実現されたとみられるが、クロネッカーの数論の全容の解明のためにはこれだけでは不十分であり、事の真相はなお封印されていると言わなければならない。なぜなら、ひとつにはアーベル方程式の構成問題は依然として決定的な解決をみていないからであり、またひとつには、クロネッカーの数論の世界に内在する解析的契機の意味がまだ明らかにされていないからである。ところで、もしヒルベルトの第１２問題の立場に立脚するならば、これらの二論点は統一的視点のもとに論じられ、あらゆる困難は一挙に解消されてしまうであろう。実際、そのとき、アーベル方程式の構成問題はいつでも一系の解析関数を通じて解決されることになり、その結果、円関数や楕円関数やモジュラー関数がクロネッカーの数論的世界の中で果たす役割は、自然に諒解されるようになるからである。ではクロネッカー自身の念頭にあったものは何か、という問いが当然問われなければならないが、クロネッカーはおそらくヒルベルトの第12問題における情景をすでに心に描いていたであろうと私は思う。この推測は、第一基本仮説とともに、私のクロネッカー論の根幹をなす仮説である（これを**第二基本仮説**と呼びたいと思う）。

あるやなきやというほどのか細い仮説だが、私のクロネッカー論の成否はひとえにこの仮説の実証にかかっている。そこで私は、たとえ痕跡なりとも、文献上に現われている直接的証拠を見つけだすべく努めなければならなかったのである。困難な作業だったが、幸いにもただ一つだけ、下記のような小さな、しかし明瞭な根拠が存在する。出典は青春の夢と同じく１８８０年3月１５日付のデデキント宛書簡である。

> 私はいよいよ、これまでに獲得された事柄を解明して、それらを書き留めておく仕事に取り掛からなければなりません。そうしますと、さらに歩を進めて一般の複素数に対しても**特異モジュールの類似物**を見つけるという事柄を要点なりとも片付けておきたいのではありますが、この望みは少々延期することにしなければなりません。［全集，Ｖ，ｐ．４５７．太字による強調は私が行なった。］

クロネッカーの定理から青春の夢を経て、今ここに一般の複素数に対する

「特異モジュールの類似物」が語られている。断片的な隻語にすぎないとはいえ、この夢のような数語は優にヒルベルトの第１２問題の原風景とみなしうるのではあるまいか。

こうして長い考察の末に、ようやくクロネッカーの数論的世界の基幹線が浮き彫りにされてきたように思われる。おおよそこんなふうに言えばよいであろう。すなわち、**まず**（たとえば今日の類体論のような）**相対アーベル数体に関するある種の一般理論を建設し、次にその理論を駆使して**（細かく言えば、単項イデアル定理が中心的役割を果たすような仕方で使用して）、**ヒルベルトの第１２問題の要請に応える形でアーベル方程式の構成問題を解決し、最後にその成果に基づいて相互法則の理論を完成すること**、というふうに。数学史は基本的にはおおむねこの基幹線を中軸として展開したと考えられるが、致命的な難点はヒルベルトの第１２問題が（青春の夢の解決を例外として）すっぽりと抜け落ちていることである。そこで私は、クロネッカーの諸論文の解読作業を通じて上記の基幹線の存在を実証し、特に、数論的世界の中で本質的な意義を担って作用する解析性の働きを明らかにしたいと思う。それがクロネッカーの数論の解明における私の基本構想である。

［附記］

１．クロネッカー論そのものからは多少離れるが、最後にヒルベルトの数論について一言しておきたいと思う。本論の叙述方針から看取されるであろうように、私の見るところでは、ヒルベルトこそ、数論におけるクロネッカーの最も直接的な継承者である。実際、ヒルベルトの数論の骨格は類体論による冪剰余相互法則の確立（第９問題のテーマ）と、解析関数系の特殊値による相対アーベル数体の構成問題の解決（第１２問題のテーマ）から成るとみられるが、本論の第２～４節で詳細に論証したように、このような構想はその淵源をクロネッカーの数論的世界の中に有している。その外観こそデデキント様式に隈無く覆われているものの、ヒルベルトの数論にはクロネッカーの数学的生命が生き生きと脈打っているのである。だが、これらの二つの数論はもとより完全な相似形ではありえず、ヒルベルトの第９問題と第１２問題の中に象徴的な姿で現われているように、本質的な相違点もまた存在する。ヒルベルトの場合、これらの二問題は個別的に提示されていて、両者を結び合わせている親密な相互関係については、別段関心が払われている様子は見られない。歴史的には第９問題は第１２問題とは無関係に解決されるに至ったのであるから、純粋に論理的な視点から見る限り、ヒルベルトの見通しはそれはそれで正鵠を射ていたと評されてしかるべきであろう。しかし私の目には、ヒルベルトがこのように分離した二問題は、それらの本来の故郷であるクロネッカーの数論的世界の中では、分かちがたく融け合って一個の数学的事象を形成しているように思われた。そこには第９問題の解決に当たって本質的な仕方で作用する第１２問題の働きという、真に魅惑的な局面が確か

に認められ、我々はそのような認識を通じて初めて、青春の夢に表象されるクロネッカーのロマンティシズムを掌中にすることができるであろう。おおよそこのような展望のもとに、私はクロネッカー論の成否を「（一般の複素数に対する）特異モジュールの類似物」という一語に託して、本稿において上記の予感を論証しようと試みたのである。

2．随所で言及したように、クロネッカーの念頭にはたえず「相対アーベル数体に関するある種の一般理論」の構想が明滅していたであろうと思われるが、その理論と今日の類体論との間の具体的な関係については独自の論証が必要である［この論点への着眼は杉浦光夫先生（津田塾大学）の御教示による］。なぜなら、類体論の中にクロネッカーの数学的生命が宿っていることは本論において詳述したとおりだが、クロネッカーの影響が今日の類体論の構成様式それ自体へも及んでいたかどうかという点はなお定かではないからである。私の見るところでは、そのような直接的もしくは具体的な影響もまた確かに存在し、おそらく虚数乗法が生起する楕円関数と二次形式類群との関係に関するクロネッカーの考察（論文「虚数乗法が生起する楕円関数について」参照）の中に、そのかすかな痕跡を見いだすことができるであろう。だが、このような論証はもはや解明の基本構想を離れてすでにクロネッカー論の本論に所属するテーマであり、本稿で提示された他の諸論点とともに、今後の課題として受け止めていかなければならない。

—— 平成５年（１９９３年）１月１１日 ——

エルミートのモジュラー方程式

笠原乾吉（津田塾大学）

0. Kroneckerは1857年「虚数乗法が生起する楕円関数について」([10])、1862年「楕円関数の虚数乗法について」([11]) 等を発表した。それは虚数乗法を持つ楕円関数の母数が満たす方程式（すなわち、特異モジュラー方程式）と2次形式類との関係を発見した画期的な論文である。これについては、前掲の論文 [15] で高瀬正仁氏が、一部分の訳も付して内容、意義等を詳しく紹介されている。

しかし、Kroneckerは結果を言明しているだけで、証明をしているわけではない。当時どのように受けとめられていたか、1865年のSmith の言を借りよう([13] p.321)。

「・・・・この数年間にKronecker氏によって発見された重要な一連の結果は、2次形式に関する我々の知識の記憶すべき到達となり、数論研究に全く新しい分野を開いた。その証明は非常に複雑な種類の考察を必要とする。それはもっとも興味深いものの中に入ることは確かであるが、同様に数論的真理の中でもっとも難解なものの中に数えられるに違いない。彼の方法は非常に漠然とした風に示されているだけである。その後にでたHermite 氏やJoubert 氏の論文で、それに投げかけられた光りにもかかわらず、それを再発見するのは時々困難である。・・・・」。

ここでは、1859年のHermite の論文「モジュラー方程式について」([4]) を中心に話をしたい。

1. 1858年以前　1832年遺書の中でGaloisは、素数pに対し周期のp等分にともなうモジュラー方程式はp＋1次であるが、p＝5,7,11のときには、1次下げてp次方程式に還元でき、p>11のときはこの還元は不能であると述べた。1846年のJ. Math. Pures Appl にGaloisの全集が発表されたが、そのすぐ後にHermiteはJacobiへの手紙の中でこれに触れている（3つの手紙がJ.reine angew.Math.40 (1850) に公

表．日付なしの２番目の末尾）。Bettiは1852年にGaloisの結果の注釈と完全化の論文を書き、翌1853年に論文「楕円関数のモジュラー方程式の次数低下について」を発表し、上記のGaloisの言明を証明した。（Bettiについては Kiernan [8] p.106, Gray [1] p.181, 182 から孫引き）。

Hermiteの関心は、この次数を１次下げた方程式を、具体的に表示することにある。そして長い間の試みの後、1858年に$p=5$のときの表示式をみつけ、この表示式と５次方程式のJerrard（とBring）の標準型とを組み合わせて、モジュラー関数を用いての５次方程式の解法を発見した([3])。Hermiteがこの表示式を得るのに役立ったのは次の２つである。

一つはSohnkeによるモジュラー方程式の研究である(1836年 [14])。$u=\sqrt[4]{k}$, $v=\sqrt[4]{\lambda}$ [1] の関係として$p=3,5$のときにJacobiが得たモジュラー方程式(1829年)を、Sohnkeは$7 \leq p \leq 19$のpに対して計算する。それからHermiteはnが奇素数のとき$\varepsilon=\left(\frac{2}{n}\right)$として、モジュラー方程式は

$$\Theta(v,u)=(v-\varepsilon\varphi(n\omega))\prod_{m=0}^{n-1}\left(v-\varphi\left(\frac{\omega+16m}{n}\right)\right)$$

であると気づく。（翌年の[4]では、nが素数でなくても奇数のとき、モジュラー方程式の根は$\left(\frac{2}{\delta}\right)\varphi\left(\frac{\delta\omega+16m}{\delta_1}\right)$であるといっている。但し、$\delta\delta_1=n$, $\left(\frac{2}{\delta}\right)$は平方剰余記号）。

もう一つは、ωを$SL(2,\mathbf{Z})$の元で変換したときの$\varphi(\omega)$の変換公式である。$ad-bc=1$として、a,b,c,dの偶奇による組み合わせは６通りにわかれるが、例えば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod 2 \text{のとき、} \varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right)=\varphi(\omega)\exp\frac{i\pi}{8}\{d(c+d)-1\}$$

---

1) 記号については [7] p.27 をみよ。但し、そこでτと書いたものをωに、φ_1, ψ_1をφ, ψと変更。すなわち、母数kに対する第１種完全楕円積分がK，補母数k′に対するそれがK′，$\omega=iK'/K$, $q=\exp(i\omega)$, $u=\sqrt[4]{k}=\varphi(\omega)$, $\sqrt[4]{k'}=\psi(\omega)$である。変換前後の新旧母数がk, λで、$u=\sqrt[4]{k}$, $v=\sqrt[4]{\lambda}$。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bmod 2 \text{のとき、} \varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \psi(\omega) \exp\frac{i\pi}{8}\{c(c-d)-1\}$$

等々である。Hermiteは1858年にはこの変換公式を書いているだけで証明はない。Smith (1865年 [13]) には、$\psi(\omega)$ の変換公式も付け加えられ、Jacobiによる $\varphi(\omega)$，$\psi(\omega)$ の q による表示式とテータ関数の変換公式から、証明が得られるであろうと書かれている。完全な証明は Königsberger(1871年 [9])、Schläfli(1870年 [12])による(雑誌の出版年は逆転しているが、Königsbergerの証明が先である)。また後年(1900年) に、HermiteはTanneryの手紙による質問に答えて、自分の証明の方法を説明している([6])。

これらを用いて、Hermiteは次のことを示す。p＝5のときのモジュラー方程式は

$$u^6 - v^6 + 5u^2 v^2 (u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4 v^4) = 0$$

という6次式で、その根は $u = \varphi(\omega)$ としたときに

$$v = -\varphi(5\omega), \quad \varphi\left(\frac{\omega+16m}{5}\right) \qquad (m = 0, 1, \cdots, 4)$$

である。

$$\Phi(\omega) = \left[\varphi(5\omega) + \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+16}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+4\cdot 16}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+2\cdot 16}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+3\cdot 16}{5}\right)\right]$$

とおくと、Fとuの間に

$$\Phi^5 - 2000u^4(1-u^8)^2\Phi - 1600\sqrt{5}u^3(1+u^8)(1-u^8)^2 = 0$$

という5次式が得られ、これが求めるものである。

この後、1858年12月7日のBrioschiへの手紙で、Hermiteは同様な方法でp＝7に対する8次のモジュラー方程式の7次式への還元を実行している([5])。

2．Hermiteの「モジュラー方程式論について」(1859年)

この論文([4])は45頁で、Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 48巻、49巻に6回にわけて発表された。まず、序文を要約しよう。「・・・私は長い間、12次のモジュラー方程式の11次への還元ができなかった。それは、代数方程式の判別式の計算は多くの場合実行不可能で、判別式の計算をしながら、低次化を実現するために用いられる根の関数を

作ることが難しかったからである。それで、根の超越的な形の表現を出発点にとり、私が目をつけた場合には少なくとも実行可能な計算に到達する期待のもとに、一般的にモジュラー方程式の判別式を研究することを試みた。」そしてそれができて、その研究が「ある条件を満たす２次形式の類数の和についてその命題を導くことをみた。」ここでKroneckerの1857年の論文[10] に触れ、「他の原理にもとづきながら、Kronecker氏の命題とともに、数論のより重要な理論の一つに新しい光を投げかけて、代数学と超越的な解析とを結び付ける」ことが目的という。

本文は1節から16節にわかれる。まず、モジュラー方程式$Q(v,u)=0$の判別式Dが

$$D=u^{n+1}(1-u^8)^{n+\varepsilon}(b_0+b_1u^8+\cdots+b_\mu u^{8\mu}),$$
$$b_i=b_{\mu-i},\ \varepsilon=\left(\frac{2}{n}\right),\ \mu=\frac{1}{4}(n^2-1)-(n+\varepsilon)$$

と表せることと、Jacobiによる新旧母数k,λと乗法子Mの関係式

$$M^2=\frac{1}{n}\frac{\lambda(1-\lambda^2)}{k(1-k^2)}\cdot\frac{dk}{d\lambda}$$

を基礎とし、Dが完全平方式であることを示す。そして、

(1)　$D=u^{n+1}(1-u^8)^{n+\varepsilon}\theta(u)^2,\quad \theta(u)=a_0+a_1u^8+\cdots+a_\nu u^{8\nu}$

と表す。($a_i=a_{\nu-i}$ になっている。　$\nu=\frac{1}{8}(n^2-1)-\frac{1}{2}(n+\varepsilon)$.)

$\theta(u)=0$ の根を $u=\varphi(\omega)$ ($=\sqrt[4]{k}$) と表すと、ω は判別式負の整数係数２次式 $P\omega^2+2Q\omega+R=0$ の根になる。Dが完全平方になるところまで(１節)は証明があるが、この２次式があらわれる2節以後は証明がほとんどなく、結果の言明だけである。2節と4節のそれぞれ一部について、この論文が$\varphi(\omega)$の変換公式を書いた５次方程式の論文([3])の後であることを手がかりに、考察しておこう。

$\varphi^8(\omega)=k^2$ が

$$\Gamma(2)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbf{Z}) : \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\bmod 2\right\}$$

に対し、

$$\varphi^8(\omega)=\varphi^8(\omega')\Leftrightarrow {}^{\exists}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma(2),\ \omega'=\frac{c+d\omega}{a+b\omega}$$

であることはよく知られている。(たぶん、Gaussも知っていた)。

Hermiteの$\varphi(\omega)$の変換公式から、

$$\varphi(\omega)=\varphi(\omega') \Leftrightarrow {}^{\exists}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2) \ , \exp\frac{\pi i}{8}\{d(c+d)-1\}=1\ ,\ \omega'=\frac{c+d\omega}{a+b\omega}$$

である。

$u=\varphi(\omega)$としたとき、モジュラー方程式$Q(v,u)=0$の根は

$$\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\omega)\ ,\ \varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right) \qquad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

であるから、uが判別式の根であるための条件は

$$\varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\omega+16k'}{n}\right)$$

または

$$\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\omega)=\varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right) \qquad (k,k'=0,1,\cdots,n-1,\ k\neq k')$$

が成り立つことである。

(2) $$\varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\omega+16k'}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{\omega+16k'}{n}=\frac{c+d\frac{\omega+16k}{n}}{a+b\frac{\omega+16k}{n}}\ ,$$

(ただし、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$は上記のもの)

$$\Leftrightarrow b\omega^2+(na+16bk+16bk'-nd)\omega+(16nak'+16^2bkk'-n^2c-16ndk)=0$$

を得る。後者の場合は、

(3) $$\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\omega)=\varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right) \Rightarrow \varphi^8(n\omega)=\varphi^8\left(\frac{\omega+16k}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow n\omega=\frac{c+d\frac{\omega+16k}{n}}{a+b\frac{\omega+16k}{n}} \quad \left({}^{\exists}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma(2)\right)$$

$$\Leftrightarrow nb\omega^2+(an^2+16bnk-d)\omega-16dk-cn=0$$

となる。これで、判別式の根uを$u=\varphi(\omega)$としたとき、ωは整係数2次式

$P\omega^2+2Q\omega+R=0$を満たすことがいえた。$-\Delta=Q^2-PR$とおくと、

(2)のときには

$$-4\Delta=\{(a+d+2)n-16b(k'-k)\}\{(a+d-2)n-16b(k'-k)\}\ ,$$

(3)のときには

$$-4\Delta=(an^2+16bkn+2n+d)(an^2+16bkn-2n+d)$$

である。

(2), (3) の２次式を mod n で考えると

(2) は $b\omega^2 + 16b(k+k')\omega + 16^2bkk' \equiv 0$, $\therefore \omega \equiv -16k, -16k'$

(3) は $-d\omega - 16dk \equiv 0$, $\therefore \omega \equiv -16k$

となる。これから、モジュラー方程式 $\Theta(v,u)=0$ の判別式の根 $u=\varphi(\omega)$ に対し、ω の満たす２次式 $P\omega^2+2Q\omega+R=0$ を mod n で考えた根により、$\Theta(v,u)=0$ のどの根とどの根が一致するかが決まることになる。したがって、$\Theta(v,u)=0$ の重根は２重根だけで３重以上の根はない ([4] p.49)。

同じ頁に、$\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\omega)=\varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right)$ のときに、ω をとりかえ、$u=\varphi(\omega)=\varphi(\omega')$、かつ $\varphi\left(\frac{\omega'+16j}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\omega'+16j'}{n}\right)$ とできる。つまり (2) は (3) に還元できるという記述がある。この証明は次のようにしてできる（方針だけかく）。

任意の $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \Gamma(2)$ に対し、

$$(4)\qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n & 0\\ 16j & 1\end{pmatrix} \quad (\text{但し } \beta \not\equiv 0 \bmod n \text{ と仮定})$$

$$\begin{pmatrix}n & 0\\ 16k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha'' & \beta''\\ \gamma'' & \delta''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n & 0\\ 16j' & 1\end{pmatrix}$$

(但し $16k\beta+\delta \not\equiv 0$ mod n と仮定)

という $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha'' & \beta''\\ \gamma'' & \delta''\end{pmatrix} \in \Gamma(2)$ がとれることを示す。

$\beta=2$, $\delta=-32k+1$ とすると、$\alpha\delta-32\gamma'=1$ に α, γ' がとれ、$\gamma=16\gamma'$ とおく。この $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に対し、上の $\alpha', \cdots, \delta''$ を作る。

条件の式に $\omega=\dfrac{\gamma+\delta\omega'}{\alpha+\beta\omega'}$ を代入すると、

$$\varphi(n\omega)=\varphi\left(\frac{\gamma'+\delta'\dfrac{\omega'+16j}{n}}{\alpha'+\beta'\dfrac{\omega'+16j}{n}}\right)=\varphi\left(\frac{\omega'+16j}{n}\right)\exp\frac{\pi i}{8}\{\delta'(\gamma'+\delta')-1\}\text{、}$$

同様に

$$\varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\omega'+16j'}{n}\right)\exp\frac{\pi i}{8}\{\delta''(\gamma''+\delta'')-1\}$$

を得る。これから $\varphi\left(\frac{\omega'+16j}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\omega'+16j'}{n}\right)$ が仮定より得られ、$\varphi(\omega)=\varphi(\omega')$ も確かめられる。

さて、Hermiteはモジュラー方程式の判別式 (1) の零点、すなわち、$u\neq 0$, $u^8\neq 1$ として、$\theta(u)=0$ の根 $u=\varphi(\omega)$ に対応する ω が満たす2次式をすべて求めようとする。

ω の満たす2次式を

(a)　$P\omega^2+2Q\omega+R=0$

とし、(P,Q,R) とも略記し、$-\Delta=Q^2-PR$ とおく。

$\theta(u)$ の次数は $8\nu=8\{\frac{1}{8}(n^2-1)-\frac{1}{2}(n+\varepsilon)\}$ なので、その根も 8ν 個あり、対応する 8ν 個の ω が満たす (a) の形の方程式の求め方を Hermite は調べ、$3\leq n\leq 29$ の奇素数 n に対し結果をかく。

まず、$\varphi(\omega)$ が $\theta(u)=0$ の根のとき、$\varphi(\omega+2m)=\exp\left(\frac{\pi i}{4}m\right)\varphi(\omega)$ も根なので（これは $\theta(u)$ が u^8 の式であるということ。直接には $\Theta(v,u)$ の2根が等しいとおいて (4) のような式を作り証明できる）、$\omega+2m$ （$m=0,1,2,\cdots,7$）の満たす方程式は一つのグループを作り、これで 8ν 個の方程式は8個づつのグループにわかれる。以後は、$u^8=\varphi^8(\omega)$ の異なる値だけに注目し、それに対する ν 個の方程式を求める。

$u=\varphi(\omega)$ が $\theta=0$ の根のとき、$\varphi\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)$, $\varphi\left(-\frac{1}{\omega}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{1-\omega}\right)$, $\varphi(\omega-1)$, $\varphi\left(1-\frac{1}{\omega}\right)$ のすべてが $\theta=0$ の根になる場合があり、このときこの6個をまとめて、6つの方程式が1つのグループを作る場合（イ）という。そうでないときは、$u=\varphi(\omega)$ が $\theta=0$ の根なら $\varphi\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)=\frac{1}{\varphi(\omega)}$ も根なので、ω とその ω に対する $\frac{\omega}{1+\omega}$ とが満たす2次式をまとめて、2つの方程式がグループを作る場合（ロ）という。

ただし、$m\equiv 1 \bmod 4$ のときは $(c,0,c)$、$m\equiv 1 \bmod 3$ のときは $(2c,c,2c)$ の形からは例外が生じる。（例えば、$m\equiv 1 \bmod 3$ のときは、θ は $u^{16}-u^8+1$ の形の

因数をもつ)。

さて、Δ は2つの組にわかれ

第1組 ： $\Delta=(8\delta-3n)(n-2\delta)$ ， $\frac{3}{8}n<\delta<\frac{n}{2}$

第2組 ： $\Delta=8\delta(n-8\delta)$ ， $0<\delta<\frac{n}{8}$

である。各組で Δ, δ の条件により、いつ場合（イ）、（ロ）にわかれるかがいえる。

以上が、5節までの要約であるが、コメントをつけ加える。第1組と第2組にわける所は私にはわからず、Smith([13] p.345)の記述をみると、もう一つ $\Delta=\delta(n-16\delta)$ が落ちているかもしれない。2次形式の還元理論が出発点になっているわけで、それは $SL(2,\mathbb{Z})$ による同値の話であり、一方、$\varphi^8(\omega)$ は $\Gamma(2)$ について保型的である。$SL(2,\mathbb{Z})\,/\,\Gamma(2)$ は6個の元よりなり、それを ω に作用させたのが、$\frac{\omega}{1+\omega}$, $-\frac{1}{\omega}$, $\frac{1}{1-\omega}$, $\omega-1$, $1-\frac{1}{\omega}$ である。

6節のはじめで、虚数乗法をもつ楕円関数の母数（つまり、特異母数）は虚2次無理数 ω に対する $k^2=\varphi^8(w)$ であり、その全体はモジュラー方程式の2重根を与える $u^8=\varphi^8(\omega)$ の全体であるという。

整係数2次式 $A\omega^2+2B\omega+C=0$（(A, B, C) とかく）の判別式を $-\Delta=B^2-AC<0$ とする。A,B,Cの最大公約数が1のとき原始的であるといい、さらにA,2B,Cの最大公約数が1か2かにしたがって固有的、非固有的という。

$\Delta\equiv1 \mod 4$ のときに、判別式 $-\Delta$ の固有原始的な2次式の根 ω に対する $\varphi^8(\omega)$ の異なる値をすべてとり、それを根とする方程式を $F_1(x,\Delta)$ とかく。$\Delta\equiv2 \mod 4$ のときの同様のものを $F_2(x,\Delta)$、$\Delta\equiv3 \mod 8$、$\Delta\equiv-1 \mod 8$ のときにそれぞれ今度は非固有原始的なものについて同様のものを作り $\mathfrak{F}_1(x,\Delta)$, $\mathfrak{F}_2(x,\Delta)$ とおく。これらはいずれも整係数多項式で、$\mathfrak{F}_2$ は最高次係数が2のべき、他のものの最高次係数は1、次数は $\mathfrak{F}_1$ は類数の6倍、他のものは類数の2倍である。

これらはまさに高瀬氏のいう特異モジュラー方程式であるが、Hermiteは証明なしに次のことを言明し、それにしたがって例を計算する。奇数 n に対し n 位のモジュ

ラー方程式 $\Theta(u,v)=0$ に対し

1°　　$u^4=\dfrac{v^4-1}{v^4+1}$,　$u^8=x$

2°　　$u^4=-\dfrac{v^4-1}{v^4+1}$,　$u^8=x$

3°　　$u^8=\dfrac{1}{1-v^8}$,　$u^8=x$

4°　　$u^2=\dfrac{1-v^4}{2iv^2}$,　$u^8=1-x$

という代入を行ってxの方程式を作る。そのとき、その各々は次の形の因子の積である：

1°　　$F_1(x,\Delta)$　　（Δ は $2n-1, 2n-9, 2n-25, \cdots$）

2°　　$F_2(x,\Delta)$　　（Δ は $2n, 2n-4, 2n-16, \cdots$）

3°　　$\mathfrak{F}_1(x,\Delta)$　　（Δ は $4n-1, 4n-9, 4n-25, \cdots$）

4°　　$\mathfrak{F}_2(x,\Delta)$　　（Δ は $8n-1, 8n-9, 8n-25, \cdots$）。

例えば、$n=7, n=11$ としてモジュラー方程式に1°を行うと、それは $F_1(x,13)\cdot F_1(x,5)$, $F_1(x,21)\cdot F_1(x,13)$ と因数分解され、その共通因子として $F_1(x,13)$ が計算できる。

方程式 $\mathfrak{F}_1$ は、前の6つの方程式がグループを作る場合（イ）に対応していて、$\varphi^8(\omega)=\rho$ とおくと、ρ , $\dfrac{1}{\rho}=\varphi^8\left(\dfrac{\omega}{1+\omega}\right)$, $1-\rho=\varphi^8\left(-\dfrac{1}{\omega}\right)$, $\dfrac{1}{1-\rho}=\varphi^8\left(\dfrac{1}{1-\omega}\right)$, $\dfrac{\rho}{\rho-1}=\varphi^8(\omega-1)$, $\dfrac{\rho-1}{\rho}=\varphi^8\left(1-\dfrac{1}{\omega}\right)$ がグループとなる。結局、$\mathfrak{F}_1(x,\Delta)$ はこれらを根とする $(x^2-x+1)^3+\alpha(x^2-x)^2$ という形の因数の積に分解できる。F_1, F_2 の場合には、ρ と $\dfrac{1}{\rho}$ とで2つの方程式のグループを作る場合（ロ）であるが、実は ρ , $\left(\dfrac{1-\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}}\right)^2$, $\dfrac{1}{\rho}$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{\rho}}{1-\sqrt{\rho}}\right)^2$ の4つでグループを作り、$(x+1)^4+\alpha x(x-1)^2$ の

形の因数に分解される。このときは類数が必ず偶数になり、F_1, F_2 の次数は4の倍数である(4節)。Δが4で割り切れるときなどの特異モジュラー方程式も論じている(7節)。

こうして、nを与えたときに現われるΔは第1組、第2組の議論でわかり、Δに対する特異モジュラー方程式は1°～4°などの議論でわかる。これでモジュラー方程式の判別式の計算は実行できるわけで、12節でn=11のときのそれが計算される。(しかし、この重要な2点が、私にはまだ解明ができない)。

このあと、いよいよn=5,7,11のときにモジュラー方程式の次数を1次下げる話に進み、最後の16節でその方程式を具体的に書き下しているが、この部分は省略する。なお、14節では、このHermiteの結果を別の方法で1853年に得ていたという、1859年5月24日付けのBettiの手紙が紹介されている。

3. 私が大変不思議に思うことがある。それはKronecker, Hermite達は証明なしに結果を言明しているだけなのに、当時の人々はそれを正しいことと受け入れ、疑いを持っていないように見受けられることである。一方、Dedekindは1887年のJ(t)を発見した論文の末尾で、J(t)に関するモジュラー方程式 $F_n(X, Y)=0$ に対し、$F_n(X, X)$ かまたは $F_n(X, Y)$ の判別式を調べることにより、特異母数が得られるであろうが、それらについては後日を期する、といっている。Dedekindの態度は、納得いく証明が公表されていないものは信じないという、今日の数学者の考え方に近いと思う。事実の発見ということ、その証明、そして証明を公表するということについての態度が、1850年頃からの30年位の間に、大きく変化していると思う。

ただ、Hermiteについては、時代以上に彼の性格も影響しているのかも知れない。Hadamard([2], p.109)は、「彼は幾何に対してある種の積極的な嫌悪を感じていて、私が幾何的な論文を書いたときに、もの珍しそうに非難したことがある」と書いたあとで、次のようにいっている。「方法はいつも何か神秘的な具合に彼の心に

生まれるように思えた。彼のソルボンヌでの講義に我々は絶えず熱心に出席したが、彼は「この公式から出発しよう」といって話を始めることを好んだ。そしてその公式を書くのだが、それが正しいことは確かだけれど、それが頭の中にどのように浮かんだのか、発見の方法は説明しないし我々には推測することができなかった。」

残念なことに、私には正しいことを確かめることさえ、まだ終わっていない。

文献

[1] J. Gray, Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré, Birkhäuser, (1986).

[2] J. Hadamard, The Psychology of Invention in the Mathematical Field, Princeton Univ. Press, (1945). (Dover Publ. Inc., (1954)).

[3] C. Hermite, Sur la résolution de l'équation du cinquième degré, C. R. Acad. Sci. Paris, 46 (1858). 全集第2巻, 5 - 12.

[4] C. Hermite, Sur la théorie des équations modulaires, ibid. 48, 49 (1859). 全集第2巻, 38 - 82.

[5] C. Hermite, Sur l'abaissement de l'équation modulaire du huitième degré, Brioschi 氏への手紙 (1858). 全集第2巻, 83 - 86.

[6] C. Hermite, モジュラー関数についての Tannery 氏への手紙 (1900), 全集第2巻, 13 - 21.

[7] 笠原乾吉, モジュラー方程式について (続), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報, 4 (1992), 26 - 31.

[8] B. M. Kiernan, The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin, Arch. History of the Exact Sciences, 8 (1972), 40 - 154.

[9] L. Königsberger, Die linearen Transformationen der Hermite'schen f-Functionen, Math. Ann., 3 (1871), 1 - 10.

[10] L. Kronecker, Über die elliptischen Functionen, für werche complexe Multiplication stattfindet, 29. Oct. 1857, 全集第4巻, 179-183.

[11] L. Kronecker, Über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen, 26. Juni. 1862, 全集第4巻, 207-217.

[12] L. Schläfli, Beweis der Hermiteschen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunctionen, J. reine angew. Math., 72 (1870), 360-369.

[13] H. J. S. Smith, Reports on the theory of Numbers, Part VI, Report of the British Association for 1865, 選集第1巻, 289-358.

[14] L. A. Sohnke, Aequationes modulares pro transformatione Functionum Ellipticarum, J. reine angew. Math., 16 (1836), 97-130.

[15] 高瀬正仁, クロネッカーの数論の解明, 津田塾大学 数学·科学研究所報, 6(1993), 1-18

フロベニウス自己同型写像について

三宅　克哉（名古屋大　教養）

1．現在では「フロベニウス自己同型写像」といえば，例えば，有限体の上の万有体〈universal domain〉の場合にも用いられ，さらに代数幾何学的には，それから有限体上の多様体上に引き起こされる「フロベニウス写像」がしばしば用いられる．しかしここでは，ハセが高木-アルティンの類体論を詳細に解説した報文[H]で，彼が名付けた「フロベニウス記号」によって代数体のイデアルと対応させた代数体の自己同型写像の場合を見る．良く知られているように，また昨年のシムポジウムで触れたが（[M2,4] 参照），これはアルティンの相互法則（[A1]）に本質的に関わっており，さらにチェボタレフによる「フロベニウスの予想」（＝「チェボタレフの密度定理」）の証明（[Ts]）の方法がアルティンの相互法則の証明（[A2]）を産み出したのであった．ハセがフロベニウスの名を採ったのもまさにこれ（[Fr3]）による．それ以来「フロベニウス自己同型写像」と呼ばれることになる．しかし実は「フロベニウス自己同型写像」そのものは，円分体に関してはすでにクムマー [Ku1] が遥かに先んじてそれを取りだしており，デデキントは（絶対）ガロア拡大におけるイデアルの分解理論（[De4]）によってその正体を明かしていた．問題のフロベニウスの仕事 [Fr3] はこの分解理論に本質的に依拠している．

ここでは高木-アルティンの類体論との関わりから，「フロベニウスの予想」が提示されるまでの道筋のいくらかを辿ってみる．

２．フロベニウス自己同型写像といえば有限体の自己同型群の考察を欠くわけには行かないし，有限体といえばガロアを欠くことが出来ない．

もっともガウスはすでに彼の〈Disquisitiones Arithmeticae〉の草稿として有限素体の代数拡大の考察を用意していたが，出版に際してこれを割愛したようである．後に彼の全集のなかに出版される（[G2]）が，出版の時期からいえばこれはガロアに遅れることになる．もちろんガロアはこのガウスの仕事をまったく知ることはなかったろう．しかしさすがにガウスである；標数の素数を p とするとき有限素体 GF(p) の有限次拡大にたいして，p 乗自己同型写像を導入して基本的なことをすべて押さえている．ただし彼の場合は抽象的な有限体の認識を表に出さずに，（有理）整数係数の多項式を mod p のみならず，「素」多項式による合同関係によって考察している．

一方ガロア [Gal] はまったく現代風であって，旗色鮮明である；学術論文として練りあげたものでないだけに，彼がかかる対象をどのように認識していたかが直接に現われている．彼にとってはもとより GF(p) の真の有限次拡大が問題であり，GF(p) 上の高次既約多項式とその根が問題である．まず，ガウスの〈Disquisitiones Arithmeticae〉流の有理整数のあいだでの mod p の合同関係について，混乱を避けてその記号「≡」を退けて，等号「＝」のみを用いる．そして与えられた GF(p) 上の高次既約多項式 $Fx=0$ の「根」を，複素数の虚数単位の場合にならって「虚な記号の類として」〈comme des espéces de symboles imaginaires〉認識し，そのひとつを i と書き，それが GF(p) 上に生成する拡大体を考察している．例えば既約多項式 Fx の次数を ν とするとき，この拡大体の要素が，有理整数の（mod p の）代表系から $a, a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$ を取って

$$a + a_1 i + a_2 i^2 + \ldots + a_{\nu-1} i^{\nu-1}$$

の形に一意的に表わされることを示している．当然p乗自己同型写像が本質的に利用されており，フェルマの小定理の拡張を与え，この拡大体の0でない要素がすべて1の$p^{\nu}-1$乗根であることを見ている；従って拡大体が次数νのみによることおよび各νにたいしてν次の拡大体$GF(p^{\nu})$が存在することが結論づけられる．

なお[M3]でもすでに名前をあげておいたが，シェネマン[S]が同じころに「高次合同関係」を考察している．しかしこれは（有理）整数環を素数の高い羃を法にして考察したものであって，一般の有限体の研究ではない；ベルヌーイ数についてのクムマーの一連の仕事ほどには直接の影響はなかったにしても，p-進数への先駆のひとつと見てもよかろう．

3．いよいよフロベニウス同型写像に移ろう．

有限次代数的数体のガロア拡大K/kが与えられたとし，そのガロア群をGとする；またKおよびkの全整数の環を$\mathfrak{O}$，$\mathfrak{o}$と表わす．体Kの素イデアル$\mathfrak{P}$にたいして$\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$は$k$の素イデアルであり，剰余体$\mathfrak{K}=\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$，$\mathfrak{k}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$は有限体である；これら$\mathfrak{P}$，$\mathfrak{p}$の下にある（で割り切れる）有理素数を$p$とすれば，$\mathfrak{k}$の標数は$p$であり，位数$q=|\mathfrak{k}|$は$p$の羃である．さらに$f=[\mathfrak{K}:\mathfrak{k}]$を拡大次数とすれば，$\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$のガロア群は$\mathfrak{K}$の$q$乗自己同型写像で生成される位数$f$の巡回群である．

もとのガロア拡大K/kに戻って，Gの部分群$Z(\mathfrak{P})=\{\sigma\in G\mid\mathfrak{P}^{\sigma}=\mathfrak{P}\}$を$\mathfrak{P}$の分解群という．部分群$Z(\mathfrak{P})$の各要素は明らかに$\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$の同型写像を引き起こすが，この対応で$Z(\mathfrak{P})$からガロア群$\mathrm{Gal}(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})$への準同型写像が得られ，$K/k$の生成元を$\mathfrak{O}$から選べばわかるように，これは上への写像である．ここで特に$\mathfrak{K}$のq乗自己同型写像に写されるものを$\mathfrak{P}$のフロベニウス同型写像と呼ぶ．一般的にはこれは$\mathfrak{P}$にたいしてただ一つ定まるわけではない；この準同型写像の核を$V(\mathfrak{P})$とすれば，$Z(\mathfrak{P})$における$V(\mathfrak{P})$の剰余類として確定する．しかしK/kで分岐する有限個の$\mathfrak{P}$を除けば実は$V(\mathfrak{P})=1$となる．実際，拡大K/kにおいて素イデアル$\mathfrak{p}$は，$\mathfrak{p}$

$=(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots\mathfrak{P}_g)^e$, $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}$, $g=[G:Z(\mathfrak{P})]$, $e=|V(\mathfrak{P})|$, と分解され, $V(\mathfrak{P})$ の位数 e が $\mathfrak{p}$ の分岐指数である；また明らかに $\{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_g\}=\{\mathfrak{P}^\sigma \mid \sigma\in G\}$.

これらのことは特に K と k が共に有理数体上のガロア拡大である場合にデデキント [De3, 4] に見られる；群論的なイデアルの分解法則に関する部分は [De4] として 1894 年に出版された；しかしその最後に付けられた日付は 1882 年 6 月 8 日である．序文には，1882 年 6 月 3 日のフロベニウスからの問い合わせにたいしてこの日付にこの内容をそのまま送付したものとある；もともとデデキントが 1877 年の論文 [De1] の § 27 Examples empruntés á la division du cercle で例示した事柄について，利用できそうな形の一般論をフロベニウスが求めたようである．またヒルベルトがこの内容を含む論文を 1894 年 7 月 7 日付けで発表するというので公表することにした旨が書かれている．フロベニウスもそのいきさつを，この我々の小論の焦点である [Fr3] の序文で証言している．デデキントの 1878 年の [De2] では，「フロベニウス自己同型写像」はまったく表にはあらわれていないが，有理素数が代数体でどのように分解・分岐するかが説明されてある；また理想数に関する「ゾロタレフの理論」についての 1874 年と 1877 年のゾロタレフの報告へのコメントが序文と二箇所の脚注にある．ただしゾロタレフがこの理論の全体像を公表したものは 1880 年の [Z 2] であるようである；彼のこの理論への動機は楕円積分の計算（[Z 1]）とその一般化を図るところから来ているとある．

4． もう少し数学に立ち入ってチェボタレフの密度定理を紹介する必要がある．これはフロベニウスが 1880 年に着想を得たあと 1896 年の論文 [Fr3] によってようやくその定式化を与え，特殊な場合を示して一般の場合を予想したものである．

上記 § 3 の記号にもどる．体 k の素イデアル $\mathfrak{p}$ から見る場合，もし最初に取った $\mathfrak{P}$ のかわりに他の $\mathfrak{P}_i=\mathfrak{P}^\sigma$, $\sigma\in G$, を取ったなら，$Z(\mathfrak{P})$ は $\sigma^{-1}Z(\mathfrak{P})\sigma$ で置き換えられる；従って K/k で分岐しない $\mathfrak{p}$ にたいしては，その上にある K の各素イ

デアルのフロベニウス自己同型写像全体が G のひとつの共役類となって確定し，それが対応する．（特に K/k がアーベル拡大，すなわち G がアーベル群であれば，これらのフロベニウス自己同型写像はすべて一致し，$\mathfrak{p}$ にたいしてただひとつ確定する．これら両者の対応がアルティンの相互法則の要であった．）このように，基礎の数体 k の数論的な要素である素イデアルがガロア群として与えられた有限群 G の代数的な構造のみで決まってしまう共役類と対応づけられる．ここではこれをフロベニウス対応と言うことにしよう．

数論的な要員をさらに整備しよう．体 k の素イデアルの集合 M にたいして次の極限値 $\Delta(M)$ が存在する場合にこれを M の（クロネッカー式）密度という：

$$\Delta(M) = \lim_{s \to 1+0} \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in M} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}}{\log \frac{1}{s-1}}$$

もちろん一般の M について密度 $\Delta(M)$ が存在するはずもないが，特に k のすべての素イデアルの集合 $S(k)$ については $\Delta(S(k)) = 1$ となる．

定理（チェボタレフ）　有限次代数的数体のガロア拡大 K/k のガロア群を G とする．群 G の共役類 C にたいし，それにフロベニウス対応する k の素イデアル全体の集合を $M(C)$ とすると，その密度は必ず存在して $\Delta(M(C)) = |C| / |G|$ で与えられる．

すなわち数論的な密度 $\Delta(M(C))$ が完全に代数的に，いわば共役類 C の群 G 内での「密度」として確定する．

この定理は実に強力である；例えば G の要素 σ を与えたとき，G の巡回部分群 $\langle \sigma \rangle$ に対応する K の部分体を F とし，K/k に代えて K/F に定理を適用すれば，

σ そのものをフロベニウス同型写像にもつ K の素イデアルの存在ばかりか，それらの（K での）密度もわかる．

始めに触れたように，チェボタレフによるこの定理の証明法が，シュライヤー [Sc] による分析の助けをも得て，アルティンの相互法則の証明（[A2]）に大きく寄与した．しかし高木-アルティンの類体論は直接この定理には拠らずに証明でき，さらに類体論（によるアーベル拡大の存在とその特徴づけ）の簡単な応用としてこの定理を証明することができる．ただしこのとき，チェボタレフの方法から抽出されたものが形をかえて類体論の証明のなかに折り込みずみであるとも言える．

5．我々は上で素イデアルの集合の密度を，高木 [T] に倣って「（クロネッカー式）密度」と呼んだ．これは，上の形に定理を定式化したフロベニウスのそもそもの出発点に起因する．フロベニウスは 1880 年のクロネッカー [Kr4] の問題提起によって着想を得て以来，この定式化を 1896 年の [Fr3] によって公表するまでに 16 年を費やした．（チェボタレフ [Ts] によって証明が得られるまでになんとさらに 30 年が必要であった．）歴史を見る場合の常道ではあるが，これを理解するに当たって，我々は当時の数学界の状況を想像を逞しくして捉えておかなければなかろう．たとえガロアの理論がすでに当時十分の認知を得るに至っていたとしても，有限群論はまだまだ幼なかった；たとえば体論抜きでガロアの理論を書き上げたジョルダンの「置換論」（[J]）の出版は 1870 年のことであり，シローの定理（[Sy]）が出たのはようやく 1872 年であった．はたして当時の誰が，深い数学的現象を記述するに際して有限群が本質的に有効であると考え得たろう．ガロアの理論からさらに数論的な現象の深部にまで踏み込んだところにある事象が，ガロア群の代数的構造を用いればいとも簡明に記述されてしまうなどと誰が予期していたろう．

フロベニウスの出発点に立ってみよう．

クロネッカーの論文 [Kr4] のなかで特にフロベニウスが群論へと引き込れていく契機になったと思われる件（[Fr3]）は，次のようである：まずフロベニウスは [Fr3] の冒頭でその主定理を引用している．

定理（クロネッカー）　整数係数の多項式 $F(x)$ にたいして，素数 p を法にする合同式 $F(x) \equiv 0 \mod p$ の（重複度をこめた）根の個数を ν_p とするとき，すべての素数 p にわたる級数

$$\sum \nu_p \cdot p^{-1-w}$$

の和の w の値が正で無限に小さくなるときの極限値は $log(1/w)$ の値と比例し，ちょうど $log(1/w)$ に $F(x)$ の既約因子の個数を掛けたものと一致する．

さて各整数 k，$0 \leq k \leq n = \deg F$, にたいして $F(x) \equiv 0 \mod p$ がちょうど k 個の根を持つ素数を p_k と表わすことにすれば，上の級数は

$$\sum k \cdot \sum p_k{}^{-1-w}$$

となる．そこで次の極限が存在すると仮定する：

$$D_k = \lim_{w \to 0+} \frac{\sum p_k{}^{-1-w}}{log(1/w)} = \lim_{w \to 0+} \frac{\sum p_k{}^{-1-w}}{\sum p^{-1-w}}$$

ここで最後の項の分母はすべての素数にわたる和である．このとき，もし定理を認めるとすれば，等式

$$\sum k \cdot D_k = 1$$

が得られる．この等式こそがフロベニウスを捉えてしまったものであった．

現代の学生，あるいは数学者でさえ，果たして何人がここに群論に踏み込む着想を得るだろうか？

またクロネッカーは D_k の「存在を仮定したにすぎなかったが，ここでも『ヤマ』が当たって，」 D_k「の存在は Frobenius の部分的成功の後を継いで Tschebotareff に至って確定したのである」（高木 [T]）．

フロベニウスはこのあと，上で述べたように 1882 年にデデキントからイデアルの分解法則に関しての群論的な分析のノウト（[De4]）を得たあと，1887 年には，副産物（?!）シローの定理の別証明 [Fr1] とともに，まず群論的な部分 [Fr2] を公表する．これについても，さらにフロベニウスが群指標の理論を独創するに至った背景にあるディリクレ [Di1, 2, 3] に発する数論的な問題意識についても，すでに [M1] で述べた；群指標の理論の独創に関してのデデキントの影響についてはホウキンス [Hk1, 2] が興味深い．

補記．すぐ上でクロネッカーの仕事についての高木のコメントを引いた．誤解があるやも知れないので，少し言葉を補っておく．数学における「定理」は厳密な証明が付けられて始めて「定理」であり，そこで始めて「数学的な言明」，あるいは端的に，「数学」になる，とする観点から見れば，このコメントは，まさに見事に，的確にクロネッカーの仕事の本質を衝いている．高木は，必ずしもガウス流を唯一尊んだ訳ではないだろうが，数学者としての自分自身をこの意味で非常に厳密に律していたものと思われる．しかも，例の彼の「高木節」とでも言うような語り口の背景に，今日の並の「数学者」には想像もつかないほどの深く広い数学的教養を身に付けていた．すなわち，常識が我々とまったく異なっているのだ．そう単純に「ヤマ」などという言葉づかいに乗ってしまうわけには行かない．

また数学史からの観点からすれば，そのように端的に切り捨てるわけには行かな

い．例えば「厳密な証明」にしても，それは当然その時点での数学界のレヴェルと相対的でしかありえない．高木も「この予言者の名を冠して『クロネッケル』式密度の称呼を用いたのである」．クロネッカーは彼にとっても単に「数学」の観点からアッサリと切り捨てられる者ではない．

とはいえ，クロネッカーの論文の多くは，特に彼がその構築をライフワークとした代数的数論に関するものについては，「数学的」に書かれていると言えるものではない；恐らく当時の常識からしても．しかし，例えば現代の物理学者達の論文と対比して見れば，わかりやすい．クロネッカーは，いまだ定義も，概念すらはっきりとはしない，しかし彼にとって現代の物理学者達の見るものよりも遥かに厳然，確固として存在する「数学的な事実」を発見し，それを報告しようとした．彼が見たもの自身は，例えば「一般的な関数」，「一般的な無限級数」と言ったあやふやな，捉え所のない新参者とは異なり，新しいとはいえどこから見ても伝統的で歴とした数学であった．彼はそこに新しく驚嘆すべきものを発見し，それを，書き方としては「数学的」ではなっかたにせよ，なんとか報告したのであった．そこに自身の数学者としての全身を賭けて．

例えば，有理数体上のアーベル多項式の根が1の冪乗根の有理整数係数の有理式として表わされることを「発見」して，躊躇わずにそれを「定理」〈Satz〉として報告した（[Kr1]）．有限体の扱い方を例にとれば，彼は決してガロア流を採らず，あくまでもガウス流にこだわり続けたろう．それは，彼の代数体における因子論（[Kr5]；高木[T]，附録（3）も参照）からも想像がつく．例えば彼は，師でもあったクムマーの理想数の与え方（[Ku2, 3]）に満足せず，そのように本質的なものは「明確な数学的なもの」によって表示すべきであるとした；（そしてその嗅覚は確かであった）；まず虚二次体について，それを虚数乗法として持つ楕円関数の特異モデュライが本物の数として虚二次体の理想数を具現すること，および，そ

れらの数による虚二次体の拡大が不分岐であること，を発見した（[Kr2, 3]）；さらに「単項化定理」に基づく「類体」の存在を信じて彼の代数的数論構築ひとつの大きな指針とし，一般の代数的数体にたいして「単項化定理」を彼の流儀で定式化した（[Kr5]）．ヒルベルトがそこから出発して彼の類体論の構想へと進んだことは明らかである（[M2]）．また，例えばフライは，彼の数学史の論文 [F] で，虚二次体の絶対類体を「クロネッカーの類体」と呼んでいる．

文　献

[A1] E. Artin. Über eine neue Art von L-Reihen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3 (1924), 89-108 = Collected Papers, 105-124.

[A2] _____. Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 353-363 = Collected Papers, 131-141.

[De1] R. Dedekind. Sur la Théorie des Nombres entiers algébriques, Paris, Gauthier-Villars, 1877, 1-121, Bulletin des Sci. math. astron., 1er série, t. XI, 2e série, t. I, 1876, 1877 (= Werke III, 262-296).

[De2] _____. Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen, Abh. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Bd.23 (1878), 1-23 = Werke I, 202-230.

[De3] _____. Über die Discriminanten endlicher Körper, Abh. kgl. Ges. Wiss. Göttingen Bd. 29 (1882), 1-56 = Werke I, 351-396.

[De4] _____. Zur Theorie der Ideal, Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1894, 272-277 = Werke II, 43-48.

[Di1] P.G. Lejeune Dirichlet. Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres, Jour. reine angew. Math. Bd.18 (1838), 259-274 = Werke I, 357-374.

[Di2] _____. Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale á la théorie des nombres, Jour. reine angew. Math. Bd.19 (1839), 324-369, Bd.21 (1840), 1-12 und 134-155 = Werke I, 411-196.

[Di3] _____. Recherches sur les formes quadratiques á coefficients et indeté rminées complexes, Jour. reine angew. Math. Bd. 24 (1842), 291-371 = Werke I, 533 -618.

[F] G. Frei. Heinrich Weber and the Emergence of Class Field Theory, in The History of Modern Mathematics, ed. by D.E. Rowe and J. McCleary, Academic Press, 1989.

[Fr1] G. Frobenius. Neuer Beweis des Sylowschen Satzes, Jour. reine angew. Math. Bd. 100 (1887), 179-181 = Ges. Abh. II, 301-303.

[Fr2] _____. Über die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul, Jour. reine angew. Math. Bd.101 (1887), 273-299 = Ges. Abh. II, 304-330.

[Fr3] _____. Über Beziehungen zwischen Primzahlen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, Sitzungsb. kgl. preuss. Akad. Wiss. Berlin (1896), 689-703 = Ges. Abh. II, 719-733.

[Gal] E. Galois. Sur la théorie des nombres, Journ. Math. pures appl. 11 (1846), 398-407 = Écrite et Mémoires Mathématiques d'Évariste Galois, par R. Bourgne et J.-P. Azra, Gauthier-Villars, Paris, 1962, pp.113-127.

[G1] C.F. Gauss. Disquisitiones Arithmeticae, 1801.

[G2] _____. Disquisitiones Generales de Congruentiis. Analysis Residuorum Caput Octavum, Gauss Werke II, Göttingen, 1863, 212-242.

[H] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper II, Jahresber. dt. Math.-Ver. Erg. Bd. 6 (1930), 1-204.

[Hk1] Th. Hawkins. The origins of the theory of group characters, Arch. history exact sci. 7 (1970/71), 142-170.

[Hk2] _____. New light on Frobenius' creation of the theory of group characters, Arch. history exact sci. 12 (1974), 217-243.

[J] C. Jordan. Traité des substitutions et des équations algébriques, Gauthier-Villars, Paris, 1870.

[Kr1] L. Kronecker. Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen, Monatsber. König. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1853), 365-374 = Werke IV, 1-11.

[Kr2] _____. Über die elliptische Functionen, für welche complex Multiplication stattfindet, Monatsb. König. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1857), 455-460 = Werke IV, 177-183.

[Kr3] _____. Über die complex Multiplication der elliptischen Functionen, Monatsb. König. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1862), 363-372 = Werke IV, 207-217.

[Kr4] _____. Über die Irreductibilität von Gleichungen, Monatsb. König. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1880), 155-162 = Werke II, 85-93.

[Kr5] _____. Grundzüge einer arithmetschen Theorie der algebraischen Grössen, Jour. reine angew. Math. 92 (1882), 1-122 = Werke II, 237-388.

[Ku1] E. Kummer. Über die Divisoren gewisser Formen der Zahlen, welche aus der Theorie der Kreistheilung entstehen, Jour. reine angew. Math. Bd. 30 (1846), 107-116 = Collected Papers I, 193-202.

[Ku2] _____. Zur Theorie der complexen Zahlen, Monatber. kgl. preuss. Wiss. Berlin (1845), 87-96 = Jour. reine angew. Math. Bd.35 (1847), 319-326 = Collected Papers I, 203-210.

[Ku3] _____. Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complex Zahlen in ihre Primfactoren, Jour. reine angew. Math. Bd.35 (1847), 327-367 = Collected Papers I, 211-251.

[M1] K. Miyake. A note on the arithmetic background to Frobenius' theory of group characters, Expo. Math. 7 (1989), 347-358.

[M2] _____. The Establishment of the Takagi-Artin Class Field Theory, Preprint series 1990, No.12, Coll. Gen. Educ., Nagoya Univ. Submitted to Proceedings of The Tokyo History of Mathematics Symposium 1990.

[M3] _____. デデキントの数論について，津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 1 (1991), 22-31.

[M4] _____. アルティンの相互法則ついて，津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 4 (1992), 44-53.

[S] Schönemann. Gründzuge einer allgemeinen Theorie der höhern Congruenzen, deren Modul eine reelle Primzahl ist, Jour. reine angew. Math. Bd.31 (1846), 269-325; Von denjenigen Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind, Jour. reine angew. Math. Bd.32 (1846), 93-105.

[Sc] O. Schreier. Über eine Arbeit von Herrn Tschebotareff, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 1-6.

[Sy] L. Sylow. Théorèmes sur les groups de substitutions, Math. Ann. 5 (1872), 584-594.

[T] 高木貞治. 代數的整數論，岩波書店，1948；第2版，1971.

[Ts] N. Tschebotareff. Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, Math. Ann. 95 (1926), 191-228.

[Z1] M.G. Zolotareff. Sur la Méthode d'intég ration de M. Tchebichef, Journ. de Math. pures appl. 2e série, 16 (1874), 161-188.

[Z2] _____. Sur la théorie des nombres complexes, Journ. de Math. pures appl. 3e série, 6 (1880), 51-84, 129-166.

ゼータ関数から見た代数体と関数体の類似の歴史

黒川信重(東大・数理)

§0. はじめに

表題は「ゼータ関数を通して見た、類似の歴史」あるいは「ゼータ関数自身が見た、類似の歴史」とも考えられるが、ここでは前の意味での歴史を簡単に概観したい。

体(非可換も含めて) K_1, K_2 に対して ゼータ関数 $\zeta_{K_1}(s)$, $\zeta_{K_2}(s)$ が何らかの方法で構成できたとき K_1 と K_2 の類似を $\zeta_{K_1}(s)$ と $\zeta_{K_2}(s)$ の類似から見たい。 ここで取り挙げるのは

§1. 代数体および代数体上の関数体のゼータ関数

§2. 有限体上の関数体のゼータ関数

§3. 複素数体上の関数体のゼータ関数

§4. 非可換(関数)体のゼータ関数

である。今回は 全体的な比較が容易になるように詳細な記述は避ける。またL-関数も扱っていない。別の機会に「L関数の歴史」として議論したい。

§1. 代数体および代数体上の関数体のゼータ関数

① 有理数体 $\mathbb{Q}$ のゼータ関数

$$\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \prod_{p:\text{素数}} (1-p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

は オイラー(1737)[1a], リーマン(1859)[1b] により研究され解析接続と関数等式が証明された。これを用いて 1800年代末までに素数定理

$$\pi(x) = \#\{p:\text{素数} \mid p \leqq x\} \sim \frac{x}{\log x}$$

が証明された。また，ディリクレ（1837）[1c] が"L-関数"

$$\zeta_{\mathbb{Q}}(s, \chi) = \prod_{p:\text{素数}} (1-\chi(p)p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

を導入し，ディリクレの素数定理（等差数列内の素数分布）を証明した。

② 一般の代数体 K（有理数体上の有限次拡大体）のゼータ関数 $\zeta_K(s)$ は デデキント（1877）[1d] によって

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1-N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} N(\mathfrak{a})^{-s}$$

と構成された。ここで，$\mathcal{O}_K$ は K の整数環，$\mathfrak{p}$ は $\mathcal{O}_K$ の零でない素イデアル全体（つまり極大イデアル全体）を動き $\mathfrak{a}$ は $\mathcal{O}_K$ の零でないイデアル全体を動く。$N(\mathfrak{a}) = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})$ は ノルムである。デデキントは $s=1$ における有名な留数公式を得た。

このデデキント・ゼータ関数を用いて素イデアル定理

$$\pi_K(x) = \#\{\mathfrak{p} \mid N(\mathfrak{p}) \leqq x\} \sim \frac{x}{\log x}$$

は ランダウ（1903）[1e] によって $\zeta_K(s)$ の $\mathrm{Re}(s) > 1 - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}$ における様子を調べることにより示された。全平面への解析接続と関数等式は ヘッケ（1917）[1f] が証明し，後に 1950年代初頭，岩沢 および テイト が アデール解析 をもちいて 再構成 した。岩沢の方法 については

詳細は未発表であったが、文献[1g]を参照されたい。
(この文献は岩沢からデュドネへの1952年4月8日付の手紙であり、岩沢の方法が詳しく書かれている。類数の有限性とディリクレの単数定理を含めて岩沢の証明法はヴェイユの"Basic Number Theory"1967に用いられた。
[1g]が出版されたのは1992年12月であり、デュドネは直前の11月29日に86歳で亡くなった。)

③ Kを代数体上の(有限次元)関数体とするとゼータ関数 $\zeta_K(s)$ はハッセとヴェイユにより1940年代に考案され、現在ではハッセ・ヴェイユ・ゼータ関数と呼ばれている。歴史的事情(ハッセが楕円関数体の場合にゼータ関数を提案して解析接続を学生に課題として提出したこと——この問題は現在でも解けていない)に関しては、このゼータ関数についての最初の出版物であるヴェイユ(1952)[1h]および全集における注記(杉浦光夫・訳『数学の創造』日本評論社)を参照されたい。

ハッセ・ヴェイユ・ゼータ関数の定義はグロタンディーク(1965)[1i]がスキームおよびそのゼータ関数を導入することにより明確にされた。(セール(1965)[1j]にわかりやすい解説がある。)そのためにはKを関数体とするスキーム X (Spec $\mathbb{Z}$ 上有限型)を取ってきて

$$\zeta_K(s)=\zeta_X(s)=\prod_{\substack{x\in X\\ \text{閉点}}}\left(1-N(x)^{-s}\right)^{-1}$$

と定義する。つまり、イデアルで言えば極大イデアル全体

にわたる積をとる。ここでは，素イデアルと離れてくる。ディリクレ級数としての解状は形式的な展開である

$$\zeta_K(s) = \sum_{c:\ \mathfrak{O}\text{ーサイクル}} N(c)^{-s}$$

はあるが実質的な意味は定かでない。このため解析接続および関数等式の証明は非常に困難であり，ごく一部のKに対してしか示されていない。残りの部分はハッセ・ヴェイユ予想，谷山（ーヴェイユ）予想，ラングランズ予想…などと呼ばれている。KがQ上の楕円関数体のときに$\zeta_K(s)$の解析接続と関数等式（谷山予想）ができれば有名なフェルマー予想が証明されることは1980年代末に示されている。

§2. 有限体上の関数体のゼータ関数

① 有限体$\mathbb{F}_p$上の有理関数体$K = \mathbb{F}_p(T)$において平方剰余の相互法則をはじめとする類似を証明したのはデデキント（1857）[2a]であった。（さらにさかのぼれば有限体論の最初であるガロアの"Sur la théorie des nombres" 1830年やガウスの遺された「高次合同式論」にたどりつく。）彼の仕事を進めゼータ関数を最初に構成し計算した人はドイツのコルンブルム（1890−1914）である。コルンブルムは論文をまとめる前に第1次世界大戦において24歳でなくなってしまったが，遺稿はランダウにより

編集され論文(1919)[2b]として出版された。([5b]を参照されたい。)定義はデデキント(1877)[1d]にならって，Kの整数環 $\mathcal{O}_K=\mathbb{F}_p[T]$ に対して

$$\zeta_K(s)=\prod_{\substack{\mathfrak{p}\subset\mathcal{O}_K\\ \text{極大イデアル}}}(1-N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K\\ \text{イデアル}}}N(\mathfrak{a})^{-s}$$

とした。Kを関数体とするスキームは $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K=\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p[T]$ である。コルンブルムは $\zeta_K(s)$ を次のように計算した：

$\mathcal{O}_K$ は単項イデアル整域であるから

$$\zeta_K(s)=\sum_{\substack{f\in\mathbb{F}_p[T]\\ \text{モニック}}}N(f)^{-s}$$

となり $\left(N(f)=p^{\deg(f)}\right)$，$s>1$ とすると

$$\begin{aligned}\zeta_K(s)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{f\in\mathbb{F}_p[T]\\ \text{モニック}\\ \deg(f)=n}}N(f)^{-s}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}p^n(p^n)^{-s}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(p^{1-s})^n\\ &=(1-p^{1-s})^{-1}.\end{aligned}$$

この結果はオイラー積の方から直接に

$$\zeta_K(s) = \prod_{\substack{h \in \mathbb{F}_p[T] \\ \text{既約モニック}}} (1 - N(h)^{-s})^{-1}$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - (p^m)^{-s})^{-a(m)},$$

$$a(m) = \#\{h \mid h \in \mathbb{F}_p[T], \text{既約モニック}, \deg(h) = m\}$$

を計算しても得られる。この方法ではデデキント(1857)［2a］による結果

$$a(m) = \frac{1}{m} \sum_{d \mid m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) p^d$$

を用いることになる。

コルンブルムは同じ論文［2b］において，タイトルにあるようにディリクレの素数定理の $\mathbb{F}_p(T)$ における類似を証明している。このために，ディリクレのL関数の類似

$$\zeta_{\mathbb{F}_p(T)}(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p} \subset \mathbb{F}_p[T]} (1 - \chi(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

$$= \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathbb{F}_p[T]} \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}$$

を導入し，χ が単位指標でないときに $\zeta_{\mathbb{F}_p(T)}(1, \chi)$ が有限なこと（$s=1$ が極でないこと）を示している。

有限体上の1変数関数体のゼータ関数はコルンブルム の研究を追って 1920～40年代に アルチン(1924)[2c], シュミット(1931)[2d], ハッセ(1936)[2e], ヴェイユ(1941)[2f] によって研究され, 関数等式, "素数定理" (正確には 対数積分の p 版を用いる), リーマン予想 など 各類似物が証明された。とくに, シュミットによって 関数等式 と リーマン・ロッホの定理が同値であることが 明確にされた ことは ゼータ関数の理解に大きく 寄与した。

② 有限体上の多変数関数体のゼータ関数は ヴェイユ(1949)[2g] によって導入され, グロタンディエク (1965)[1i] によって行列式表示, 関数等式など 基本的枠組が スキーム論の整備とともに構築 された。後に ドリーニュ(1974)は リーマン予想の類似 (ヴェイユ予想)を 証明した。

§3. 複素数体上の関数体のゼータ関数

① 複素数体$\mathbb{C}$上の1変数関数体 Kは 種数が2以上の とき コンパクト・リーマン面 X (Kを関数体とする $\mathbb{C}$-スキーム の実解析化) を対応させることにより

$$\zeta_K(s) = \zeta_X^{Selb}(s)$$

として ゼータ関数が定義される。ここで, $\zeta_X^{Selb}(s)$ は セルバーグ(1956)[3a] によって導入された セルバーグ・ ゼータ関数

$$\zeta_X^{Selb}(s) = \prod_{p \in Prim(X)} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$$

である： $Prim(X)$ は X の素な閉測地線全体を動き $N(p) = \exp(length(p))$ をノルムとする。収束域は $Re(s) > 1$ である。このときも素元定理

$$\pi_K(x) = \#\{p \in Prim(X) \mid N(p) \leqq x\}$$

$$\sim \frac{x}{\log x}$$

が成立する。

なお，いまコンパクトでないリーマン面

$$X = SL_2(\mathbb{Z}) \backslash SL_2(\mathbb{R}) / SO(2)$$

と，その関数体 K （コンパクト化すれば有理関数体 $\mathbb{C}(T)$ ）を考えるとゼータ関数

$$\zeta_K(s) = \zeta_X^{Selb}(s)$$

は同様に定義され素元定理

$$\pi_K(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

も成立するが，この場合には，さらに

$$\zeta_K(s) = \prod_{F:\text{実2次体}} \left(1 - \left(\varepsilon(F)^2\right)^{-s}\right)^{-h(F)}$$

となっており（$\varepsilon(F)$ は基本単数，$h(F)$ は類数），

$$\pi_K(x) = \sum_{\substack{F:\text{実2次体} \\ \varepsilon(F)^2 \leqq x}} h(F) \sim \frac{x}{\log x}$$

という，古典的整数論では予想もされない結果が得られる：セルバーグ（1954）[3b]。

② 複素数体上の多変数関数体 K に対しては一般には明確なゼータ関数は知られていない。しかし，特別な場合として K が代数多様体 $X = \Gamma \backslash SU(1,n)/SU(n)$ の関数体（Γ は $SU(1,n)$ の離散部分群）のときには再びセルバーグ型ゼータ関数 $\zeta_X^{Selb}(s)$ を用いて

$$\zeta_K(s) = \zeta_X^{Selb}(s)$$

として $\zeta_K(s)$ を構成できる。ここで $\zeta_X^{Selb}(s)$ はセルバーグの元の構成と同様に $Prim(X)$ 上のオイラー積であるが，解析接続，関数等式および素元定理まで含めてガンゴリ（1977）[3c] によって成された。

簡明なオイラー積および行列式表示はルエル(1976)[3d]が提起しフリード(1986)[3e]が整理した。

一般の多変数関数体 K に対しては K を関数体とする複素代数多様体 X を取ったとき X を実解析的リーマン多様体とみなしてそのセルバーグ型ゼータ関数(セルバーグ・ルエル・ゼータ関数とも呼ばれる)

$$\zeta_X^{Selb}(s) = \prod_{p \in Prim(X)} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$$

を考えると($Prim(X)$ は X の素な閉測地線全体, $N(p) = \exp(\mathrm{length}(p))$) $\zeta_K(s) = \zeta_X^{Selb}(s)$ とおくことにより $\zeta_K(s)$ は一応定義できる。このときは全平面への解析接続と素元定理は証明できるが、関数等式は X が局所対称空間とは限らない一般の場合には不明であり不成立と思われている。この意味で、一般の場合に、この $\zeta_K(s)$ が適切なものかどうかは明確でない。なお、X が局所対称空間の場合には $\zeta_X^{Selb}(s)$ はラプラス作用素をもちいた行列式表示ができリーマン予想の類似が成立するが、一般の場合にはルエル作用素をもちいた行列式表示によって解析接続を行うことしか知られていず(したがって局所対称空間の場合には2種類の行列式表示がある)リーマン予想の類似は不明であり不成立と見られている。

§4. 非可換(関数)体のゼータ関数

① 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上有限次元の非可換体("多元体") K のゼータ関数は $\mathbb{Q}$ 上のオイラー積として ヘイ(1929)[4a]によって導入され

$$\zeta_K(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K \\ \text{左イデアル}}} N(\mathfrak{a})^{-s}$$

となること($\mathcal{O}_K$は極大整環)や解析接続および関数等式が証明された。(先行する仕事としてはリプシッツやフルビッツによる4元数体の整数論があった: R. Lipschitz "Untersuchungen über die Summen von Quadrat" 1886 および A. Hurwitz "Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen" 1919 にまとめられている。これらの仕事は応用としてラグランジュの4平方和の定理を扱っている。)

これを用いてツォルン(1933)[4b]は多元環に関するハッセ・ブラウアー・ネーターの基本定理(1932)[4c]およびハッセの相互法則の別証を与えた。基本となるのはゼータ関数の関数等式である。関数等式 ⇔ 相互法則(双対性)のテーマがここでも現れている。この関連で特筆されるべきことはこの相互法則の証明により類体論が導かれることであり、実際、このツォルンの方法はそのままヴェイユの "Basic Number Theory" (1967)において類体論の証明に使われた。

② 有限体上の1変数関数体 k 上有限次元の非可換多元環 K のゼータ関数は ヴィット(1934)[4d]により同様に構成され ツォルンの結果の類似を超えて(ハッセ・ブラウアー・ネーターの基本定理の類似—関数体版—は証明されていなかったため ヴィットによるゼータ関数の関数等式を用いた証明が最初であった) "非可換関数体"のリーマン・ロッホの定理 まで証明された。これは ゼータ関数なしには考えられない，非可換代数幾何の先駆であり，他の非可換代数幾何学者に取り挙げられるようになったのは 半世紀後の1980年代になってからであった：[4e]参照。

①②：K を"関数体"とする空間 X(非可換スキーム)の研究は現在活発に行なわれている。マニンによる単行本 [4f](1991) などを参照されたい。

$\zeta_K(s)$ を拡張して"L-関数"まで含めた一般的な扱いは ゴドマン+ジャッケ (1972)[4g]を見られたい。 また，佐藤幹夫の概均質ゼータ関数の一例としても捉えることができる(佐藤文広)。

素数定理の類似(極大イデアルの分布)については ブッシュネル+ライナー(1982)[4h]を参照されたい。

③ 複素数体上の非可換体 K のゼータ関数の例として1変数超関数体 K のゼータ関数 $\zeta_K(s)$ が超リーマン面 X の セルバーグ型ゼータ関数 $\zeta_X^{Selb}(s)$ として マニン達(1987)[4i] によって超弦理論との関りで導入された。

§5. 類似比較

§1－§4 の類似を簡単に比較すると次の表のようになる

体 K	§1：代数体および代数体上の関数体	§2：有限体上の関数体	§3：複素数体上の関数体	§4：非可換(関数)体
空間 X (KはXの関数体)	スキーム (Spec $\mathbb{Z}$ 上有限型) [実解析化]	スキーム (Spec $\mathbb{F}_p$ 上有限型)	スキーム (Spec $\mathbb{C}$ 上有限型) の実解析化	"非可換スキーム"
ガロア群, 基本群 Γ	ガロア群* (代数的基本群)	ガロア群 (代数的基本群)	基本群	ガロア群 基本群
ゼータ関数の構成	オイラー積 $\zeta_K(s)=\zeta_X(s)=\zeta_\Gamma(s)$	オイラー積 $\zeta_K(s)=\zeta_X(s)=\zeta_\Gamma(s)$	オイラー積 $\zeta_K(s)=\zeta_X(s)=\zeta_\Gamma(s)$	オイラー積 $\zeta_K(s)=\zeta_X(s)=\zeta_\Gamma(s)$
素元	閉点 $\mathrm{Prim}\,K=\mathrm{Prim}\,X=\mathrm{Prim}\,\Gamma$	閉点 $\mathrm{Prim}\,K=\mathrm{Prim}\,X=\mathrm{Prim}\,\Gamma$	$\mathrm{Prim}\,K=\mathrm{Prim}\,X=\mathrm{Prim}\,\Gamma$ 素測地線＝素共役類	$\mathrm{Prim}\,K=\mathrm{Prim}\,X=\mathrm{Prim}\,\Gamma$
素元定理	対数積分で成立	p-対数積分で成立	対数積分で成立	対数積分 (p-対数積分) で成立
関数等式	ポアソン和公式 (双対性) [ポアンカレ双対性?]	ポアンカレ双対性 (レフシェッツ跡公式)	双対性 (セルバーグ跡公式)	双対性 ● 非可換リーマン・ロッホ ⟺ 相互法則(類体論) ● 跡公式
行列式表示 (作用素)	予想	グロタンディエック (フロベニウス作用素)	セルバーグ (ラプラス作用素)	§4①は予想 §4②はグロタンディエック §4③はマニン達
リーマン予想の類似	予想	ドリーニュ (ヴェイユ予想の証明)	セルバーグ	一般には不明 (予想)

いずれも数論的対象M（前頁の表では体K，空間X，基本群Γ）から

$$M \xrightarrow[\text{分解}]{} \underset{\text{素元}}{p} \longrightarrow \zeta_{M_p}(s)=\zeta_p(s) \xrightarrow[\text{合体}]{} \underbrace{\zeta_M(s)=\prod_p \zeta_p(s)}_{\text{大域ゼータ}}$$

という局所大域原理的な構成法を用いてゼータ関数が定義されており，得られたゼータ関数の性質に数論的対象物の大域的な性質が反映している。とくに素元の分布を示す「素元定理」はゼータ関数を用いて得られる重要な結果であり，ゼータ関数の零点や極の分布と直接関係している。またゼータ関数の関数等式には数論的対象物の「双対性」が現れている。これはゼータ関数を用いてはじめて捉えられる場合（§4②の「非可換リーマン・ロッホ」など参照）も少なくない。

体Kのゼータ関数はKを関数体とする空間Xを用いてXのゼータ関数として定義される：$\zeta_K(s)=\zeta_X(s)$。したがって体の（ゼータ関数の）類似は空間の（ゼータ関数の）類似と言い換えられる。ゼータ関数は $\zeta_K(s)=\zeta_X(s)=\zeta_\Gamma(s)$ と基本群（ガロア群）Γからも捉えることがL-関数の扱いを含めて重要であるが，記述を簡単にするために，$\zeta_\Gamma(s)$からの見方はここでは略する。

有限体上の関数体のゼータ関数(§2)および複素数体上の関数体のゼータ関数(§3)の研究の深化を動機付けた大きな原因はリーマン予想であった。代数体および代数体上の関数体(§1)のリーマン予想は現在も不明であり，§2, §3のゼータ関数においては行列式表示をもとに零点や極が作用素の固有値として解釈されることを用いてリーマン予想の類似が証明されていることと較べると後に構成された類似物の方が研究が進んでいることがわかる([5a][5c]参照)。さらに，関数等式の根拠を考察するためにも背後にひそむ作用素を用いた行列式表示が重要となってくる：ゼータ関数の局所因子 — ガンマ因子を含めて — の行列式表示はデニンガー(ハッセ・ヴェイユ・ゼータ関数)および黒川(セルバーグ・ゼータ関数)により知られている([5d]参照)。

最近マニン[5e]は§1のゼータ関数(リーマン，デデキント，ハッセ・ヴェイユ)も$\mathbb{Q}$をその仮想的"係数体" $\mathbb{F}_1$ ("1元体")上の関数体とみなすことによって§2, §3と同様に扱え，したがって，ゼータ関数の行列式表示が与えられるのではないかと提唱し，"絶対モチーフ"を導入した。(スキーム論の枠内には収まらない。ここで再び「リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ の表わす空間は何か？」という根本問題に当る。いずれにせよ，スキーム $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ や"数論的空間" $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を越えねばならない。)

マニンの研究は「Spec $\mathbb{Z}$ × Spec $\mathbb{Z}$ を2次元のものとして見よう」という問題提起（黒川［5f］［5g］；前回の本研究集会報告「三角関数の一般化をめぐって」『津田塾大学 数学・計算機科学研究所報告第4号：近現代数学』1992年，p.1−25 を参照されたい）から出発している。

このマニンの視点は，これら（§1−§4）のゼータ関数はすべて関数体のゼータ関数となり，類似の根拠をはっきりさせるとともに，代数体と関数体の類似という古くからの主題にも画期的な解明を与えると思われる。

ゼータ関数を通してみた代数体と関数体の類似は，ここではその一部しか概観できなかったが，これからも様々な示唆の源泉として重要な役割を果していくであろう。

文献

[1a] L. Euler: "Varie observationes circa series infinitas" Comm. acad. Scient. Petropolitanae 9 (1737) 160–188 (全集 I-14, p. 216–244).

[1b] B. Riemann: "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" 『ベルリン学士院月報』 1859年11月号, p. 671–680 (出版は1860年).

[1c] P.G.L. Dirichlet: "Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor sind, unendlich viele Primzahlen enthält" Abh. Akad. Berlin (1837) 45–71.

[1d] R. Dedekind: "Über die Anzahl der Ideal-Klassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers" 1877 (55頁) (全集 I, p. 105–158)

[1e] E. Landau: "Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes" Math. Ann. 56 (1903) 645–670.

[1f] E. Hecke: "Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper" Göttingen Nachrichten 1917, p. 77–89.

[1g] K. Iwasawa: "Letter to J. Dieudonne (April 8, 1952)" Advanced Studies in Pure Math. vol 21 (1992) p. 445–450, "Zeta Functions in Geometry" (eds., N. Kurokawa and T. Sunada), Kinokuniya, Tokyo.

[1h] A. Weil: "Jacobi sums as "Grössencharaktere" "
Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952) 487-495.

[1i] A. Grothendieck: "Cohomologie l-adique et fonctions L" SGA 5, 1965; Springer Lect. Notes in Math. 589 (1977).

[1j] J.-P. Serre: "Zeta and L-functions": in "Arithmetical Algebraic Geometry" (ed. O.F.G. Schilling) p. 82-92, Harper and Row 1965.

[2a] R. Dedekind: "Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus" Crelle J. 54 (1857) 1-26 (全集 I, p. 40-66).

[2b] H. Kornblum: "Über die Primfunktionen in einer arithmetische Progression" (Landau 編) Math. Zeit. 5 (1919) 100-111.

[2c] E. Artin: "Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen (I, II)" Math. Zeit. 19 (1924) 153-246 (全集 p. 1-94).

[2d] F. K. Schmidt: "Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p" Math. Zeit. 33 (1931) 1-32.

[2e] H. Hasse: "Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper (I, II, III)" Crelle J. 175 (1936) 55-62, 69-88, 193-208.

[2f] A. Weil: "On the Riemann hypothesis in function-fields" Proc. Nat. Acad. Sci. USA 27 (1941). 345-347.

[2g] A. Weil: "Numbers of solutions of equations in finite fields" Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949) 497-508.

[3a] A. Selberg: "Harmonic analysis and discontinuous groups on weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series" J. Indian Math. Soc. 20 (1956) 47-87.

[3b] A. Selberg: "Harmonic Analysis" Göttingen Lecture Notes 1954 (全集 vol. I).

[3c] R. Gangolli: "Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one" Illinois J. Math. 21 (1977) 1-41.

[3d] D. Ruelle: "Zeta-functions for expanding maps and Anosov flows" Invent. Math. 34 (1976) 231-242.

[3e] D. Fried: "Zeta functions of Ruelle and Selberg (I)" Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19 (1986) 491-517.

[4a] Käte Hey: "Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen" Diss. Hamburg 1929.

[4b] M. Zorn: "Note zur analytischen hyperkomplexer Zahlentheorie" Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 9 (1933) 197-201.

[4c] H. Hasse, R. Brauer, and E. Noether: "Beweis eines Hauptsatzen in der Theorie der Algebren" Crelle J. 167 (1932) 399-404.

[4d] E. Witt: "Riemann-Rochser Satz und Z-Funktionen in Hyperkomplexen" Math. Ann. 110 (1934) 12-28.

[4e] F. van Oystaeyen and A. Verschoren: "Non-commutative Algebraic Geometry" Springer Lecture Notes in Math. 887 (1981).

[4f] Yu. I. Manin: "Topics in Noncommutative Geometry" Princeton Univ. Press 1991.

[4g] R. Godement and H. Jacquet: "Zeta Functions of Simple Algebras" Springer Lecture Notes in Math. 260 (1972).

[4h] C. J. Bushnell and I. Reiner: "Prime ideal theorem in non-commutative arithmetic" Math. Zeit. 181 (1982) 143-170.

[4i] H.A. Baranov, Yu. I. Manin, I.V. Frolov and A.S. Shvarts: "A super analog of Selberg trace formula and multi-loop contributions for fermionic strings" Comm. Math. Phys. 111 (1987) 373-392.

[5a] 黒川：「オイラー積の250年」『数学セミナー』1988年9月号(p.84-91), 10月号(p.67-74)；『現代数学のあゆみ・4』日本評論社(1992) p.13-27に再録。

[5b] 黒川：「類似の魅力」『数学セミナー』1990年9月号(p.54-55).

[5c] 黒川：「リーマン予想の現在と将来」『数学セミナー』1992年4月号(p.22-26).

[5d] 黒川：「ゼータ関数の行列式表示とテンソル積」『代数解析学と整数論』数理解析研究録 810 (1992) 305-317.

[5e] Yu. I. Manin: "Lectures on Zeta Functions and Motives" (Harvard-MSRI-Yale-Columbia 1991-1992); Max Planck Institute preprint 1992.

[5f] N. Kurokawa: "On some Euler products (I)" Proc. Japan Acad. 60A (1984) 335-338.

[5g] N. Kurokawa: "Multiple zeta functions: an example" Advanced Studies in Pure Math. vol. 21 (1992) p.219-226, "Zeta Functions in Geometry" (eds., N. Kurokawa and T. Sunada) Kinokuniya, Tokyo. ▨

微分不可能な連続関数を巡っての小史

徳永 秀也（同志社高校） & 鹿野 健（岡山大学理学部）

§1．Ｒｉｅｍａｎｎの例

Ｒｉｅｍａｎｎは1861年のある講義の中で、下記のようなことを述べた、と言われている（［３］，［４］，［５］）。

「（１）　$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2}$

は、いたるところで微分不可能な連続関数である。」　…　（＊）

ただし、Ｒｉｅｍａｎｎ自身による証明は残されていない。

（１）の連続性を示すのは用意であるが、微分不可能性を示すのはかなり困難であり、その最終決着をみるのは、この後100年以上も先のこととなった。この間、多くの数学者が（＊）に挑んだ。

Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓもその１人で、彼は1875年、この（＊）に触れているが、その証明については言及していない。その替り、彼は（１）とは別のいたるところで微分不可能な連続関数の例として（２）を挙げている（［３］）。

（２）　$\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$

$$\left(0<a<1,\ b:\mathrm{odd},\ \underline{ab>\frac{3}{2}\pi+1}\right)$$

（「＿」については、1916年にＨａｒｄｙ［８］が「$ab\geqq1$」まで改良している。）

（２）では「b：ｏｄｄ」となっているが、これは証明のテクニカルな事情によるものであり、「b：ｉｎｔｅｇｅｒ」としても支障はない。

数学史では、この（２）がいたるところで微分不可能な連続関数である最初の例であるように言われているのであるが、実はそれ以前に、このような関数の他の例が、Ｃｅｌｌéｒｉｅｒ［６］により示されていた（（３）式、1830年）。

（３）　$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(a^nx)}{a^n}$　　（a：十分大の整数）

このことは、Ｈｏｂｓｏｎ［７；P.402,406,407］にも証明付で詳しく載っている。

ここで、（２），（３）を比較してみると、$0<a^{-1}<1$であるから、bが偶数でも良しとした場合（前述済）、（３）は（２）の特別な一例であることがわかる。

さて、（＊）はその後多くの数学者によって証明しようという努力がなされ、例えばＨａｒｄｙ［８］は次のような結果を得た。

<u>Ｔｈｅｏｒｅｍ １.</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2\pi x)}{n^{\alpha}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2\pi x)}{n^{\alpha}}$ $\left(\alpha<\dfrac{5}{2}\right)$

は、それぞれ任意の無理数点において微分不可能である。また、

$$\frac{2A+1}{2B}\ ,\quad \frac{2A}{4B+1}\qquad (A,\ B\in\mathbb{Z})$$

の形をした有理数点においても微分不可能である。

これは（＊）のうちの一部を立証していることになる。後は、$f(x)$が他のπの有理数倍についても微分不可能出あることを示せば良かったわけである。この真偽はともかくとして、この解決をみるには、さらに半世紀以上もの年月を待たねばならなかった。

§２．$f(x)$の微分可能性・不可能性の解決

Ｌａｎｇは［９］原書第２版の第15章で、「$f(x)$が連続であることを示せ。また、$f(x)$が微分可能であるかどうかを定めよ」という練習問題を与え、さらにその（注）として、「注目に値することであるが、これはまだ知られていないようである！」と記述している。また、同様のことを講義でも述べていたらしい。その講義を聴いていた当時学生であったＧｅｒｖｅｒは、この問題に興味を感じ、それに挑んだのである。かれは極めて初等的な方法によって、1970年、次のような驚くべき結果を得たのである（［10］）（［９］の原書第３版ではこのことが記述されている）。ただし、彼の用いた方法は初等的な方法である上に、しかもＬａｎｄａｕのO記号も使っていないので必要以上に長い論文となっている。

<u>Ｔｈｅｏｒｅｍ ２.</u> $f(x)$は$x_0=\dfrac{b}{a}\pi$（a，bは互いに素な奇数）

において微分可能で、しかも、$f'(x_0)=-\dfrac{1}{2}$である。

さらに、[10]および翌年の[11]でx/πの他の有理数点では微分不可能であることも示している。

このことは長年信じられていた(*)を大きく覆すものであり、ＷｅｉｅｒｓｔｒａｓｓやＨａｒｄｙ等が解決できなかったのは、(*)が正しいという先入観があったからではないだろうか。

後にこのニュースを知ったＭｏｈｒ[12]は、「実は、それ以前の1967年７月14日、Ｓｔｕｔｔｇａｒｔ大学において同じことを講演した。」と述べているが、このことはあまり知られていない。

さて、晦渋を極めたＧｅｒｖｅｒの証明も、不思議なことにこれが発表されると、一気にその別証明が続々と出現したのである([13], [14], [15])。Ｇａｕｓｓ和の性質を用いたり、Ｔｈｅｔａ関数の反転公式を用いたり、手法は様々である。

§３．Ｒｉｅｍａｎｎの就職論文(Ｈａｂｉｌｉｔａｔｉｏｎｓｓｃｈｒｉｆｔ)

ＲｉｅｍａｎｎはＧｏｔｔｉｎｇｅｎ大学へ就職したわけであるが、その際に、就職論文(Ｈａｂｉｌｉｔａｔｉｏｎｓｓｃｈｒｉｆｔ)として３つの論文を書かねばならなかった。そのうちの１つは、かの有名な非ユークリッド幾何学に関するものであったが、ここでは[１](三角級数で表現することのできる関数について)を取り上げてみる(1854年)。この中で、Ｒｉｅｍａｎｎは次のような事を述べている。

「 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty \quad (c_n > 0,\ c_n \downarrow 0)$ のとき、

(４) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n^2 x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n^2 x)$

の収束性を、Ｇａｕｓｓ和

(５) $\sum_{n=0}^{m-1} \sin(n^2 x)$, $\sum_{n=0}^{m-1} \cos(n^2 x)$

の性質を用いることによって調べることができる。」 … (☆)

しかし、具体的な方法、収束点等については、言及していないのである(ちなみに、Ｂｏｔｔａｚｚｉｎｉ[18]の邦訳は「$c_n \downarrow 0$」の部分を「$c_n \to 0$で発散」と誤訳している)。Ｒｉｅｍａｎｎの意味するところを考えてみると、(☆)の直後には、次のようなことも記述されている。

Lemma 1.（Riemann［1］；*cf* Genocchi［2］，Hobson［6］ and Bottazzini［18］）

（6） $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n!x)$

は、$x=\dfrac{2\pi}{e}$，$\pi\sin 1$，$\pi\cos 1$で収束し、$x=e\pi$，$\dfrac{\pi}{4}$　$e-\dfrac{1}{e}$で発散する。

この補題は、（6）がπの有理数倍での収束することは自明であるが、πの無理数倍でも収束する点があることを示すものになっており、大変興味深い。この点についても［18］は英訳こそきちっとなされているが、邦訳では「xのあらゆるπの有理数倍に対してのみばかりか、やはり例えば$\pi\sin 1$，$\pi\cos 1$，$2\pi/e$のような無数の無理数に対しても収束しない。」と誤訳してしまっている。Lemma 1の証明は例えばGenocchi［2］を参照されたい。彼は、Riemannの論文を数多くフォローした19世紀のイタリアの数学者である。

ところで、（4），（5）を比較してみると、c_nの有無が挙げられるが、（6）についてはcₙの付いたタイプのものが挙げられていない。そこで、（6）でc_nの付いたタイプにおいてLemma 1と同様のことを調べてみると、

Lemma 2.（徳永［16］）

$c_n>0$，$c_n\to 0$，$\dfrac{c_n}{n+1}\downarrow 0$　のとき、

（〔注〕☞「$c_n\downarrow 0$」より広い）

（7） $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n!x)$

は、$x=\dfrac{2}{e}\pi$ で収束する。

という結果を得ることができる。

また、Riemann［1］は、その前半部分で次のような定理を述べている。

Theorem 3. （cf Hobson［7］p.645～648）

次のような三角級数を考える。

$$(8)\quad A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)$$

ただし、
$$\begin{cases} A_n(x)=a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx) \\ A_0=\dfrac{1}{2}a_0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0\ ,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=0\ .$$

このとき、次のような連続関数$G(x)$が存在する（C_1，C_2はともに定数）。

$$G(x)=C_1+C_2x+\frac{1}{2}A_0x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}A_n(x)$$

さらに、この$G(x)$には次の性質がある。

与えられた級数（8）が$x=x_0$で$g(x_0)$に収束するとき、

$$(9)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{G(x_0+h)+G(x_0-h)-2G(x_0)}{h^2}=g(x_0)$$

が成り立つ。

Remark
$$D^2(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{G(x+h)+G(x-h)-2G(x)}{h^2}$$

とおくと、この$D^2(x)$は$G(x)$の広い意味での第２次導関数となる。

（ i.e. $G''(x)$が存在する。
$\Longrightarrow$ $D^2(x)$が存在し、$D^2(x)=G''(x)$ となる。）

このTheorem 3とLemma 2を組み合わせると、次のような微分可能性に関する定理を得ることができる。

Theorem 4. （徳永［16］）

$c_n>0$，$c_n\to 0$，$\dfrac{c_n}{n+1}\downarrow 0$ のとき、

$$(10)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\cos(n!x)}{n!}$$

は、$x=\dfrac{2}{e}\pi$ において（9）の意味で微分可能である。

[Proof]「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\sin(n!x)}{(n!)^2}$ が $x=\dfrac{2}{e}\pi$ において広い意味で2階微分可能である。」…(＊＊) ことを示せば良い。

Theorem 3において、

$$a_n=0,\quad b_n=\begin{cases}c_m & (\text{if } n=m!)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

とおけば、Lemma 2より(＊＊)が示せる。

一般には、各$f_n(x)$が区間$[a,b]$で微分可能であり、かつ$\Sigma f_n'(x)$が$[a,b]$で一様収束するとき、$\Sigma f_n(x)$は項別微分が許される。しかし、このTheorem 4の証明の短さを見てもわかる通り、Theorem 3の面白いところは、「＿＿」を言わなくても、ある一点x_0において$\Sigma f_n''(x)$が収束しさえすれば、$\Sigma f_n(x)$はx_0において(9)の意味で微分可能であることが示せることにある。

では、(10)でc_nの付いていないものはどうか。これも初等的な証明で、次のような結果が導ける。

Theorem 5. (徳永[16])

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n!x)}{n!}$

は、いたるところで微分不可能な連続関数である。

さらに、このTheorem 5を一般化させて、いたるところで微分不可能な(連続)関数となるための十分条件を与えると次のようになる。

Theorem 6. (徳永[16])

c_nと$\Psi(n)$が次のような(Ⅰ)～(Ⅴ)の条件を満たすとき、

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\cos(\Psi(n)x)}{\Psi(n)}$

は、いたるところで微分不可能な関数となる。

(Ⅰ) $\Psi(n)>0$,　(Ⅱ) $\Psi(n)\uparrow\infty\quad(n\to\infty)$

(Ⅲ) $\dfrac{\Psi(n)}{\Psi(n+1)}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$

(Ⅳ) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}|c_n|=0$,　(Ⅴ) $0<|c_n|\leqq{}^{\exists}K\ (<\infty)$

さらに、次の（Ⅵ）の条件を満たすとき、（12）は連続関数となる。

$$(\text{Ⅵ})\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\Psi(n)}<\infty$$

これらの条件のうち、（Ⅳ）の評価は、Ｔｈｅｏｒｅｍ４とＴｈｅｏｒｅｍ５を比較することにより（広い、普通という微分の違いはあるにせよ）、かなり本質的なものであろうと予想できる。しかし、上からの評価（Ⅴ）も合わせて考えてみると、c_n は結局、定数（≠０）と全く同じｏｒｄｅｒになってしまう。つまり、$\dfrac{\Psi(n)}{c_n}$ を一つの数列と見なすと、この（12）のｃｏｓの中身の数列と分母の数列は結果として同じｏｒｄｅｒにしかならない。これはおそらく我々の証明方法上からくる限界であって、改良の余地はあると思われる。

また、Ｐｉｎｃｈｅｒｌｅ[17]（彼のことについては、次の節で詳しく紹介する）によると、Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓは、どうも（11）について、「ｃｏｓ」の部分を「ｓｉｎ」にしたものに関して、やはりＴｈｅｏｒｅｍ５と同じ結論を導いていたと思われるが、その証明は載っていない。不思議なことであるが、Ｐｉｎｃｈｅｒｌｅ[17]にはＲｉｅｍａｎｎという名前は一度も登場しない。

前述したように、［１］では、（４），（５）の直後にＬｅｍｍａ１が書かれている。したがって、おそらくＲｉｅｍａｎｎは「n！」のタイプと同様に、この論文を元にして、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\cos(n^2x)}{n^2}\quad,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\sin(n^2x)}{n^2}$$

および、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2x)}{n^2}\quad,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2}$$

の微分可能性を調べようとしていたのではないだろうか。いや、そればかりではなく、Ｒｉｅｍａｎｎは、（４），（５）に関連した記述を見れば、（１）の$f(x)$が実は「ほとんどの点において微分不可能であるが、微分可能な点も存在する」ことを知っていたものさえ思われる。

§4．Ｂｏｔｔａｚｚｉｎｉの本[18]について

Ｌｅｍｍａ６の下で登場したＧｅｎｏｃｃｈｉがＲｉｅｍａｎｎの研究をフォローしたのに対して、前節の最後で登場した同じイタリアのＰｉｎｃｈｅｒｌｅ（1853〜1936年）は、1877〜78年のＷｅｉｅｒｓｔｒａｓｓのＢｅｒｌｉｎ大学での講義に出席するという研究旅行をしていた。彼の書いた[17]はその内容をまとめたものである。当時、Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓの見方がヨーロッパ中に拡がった理由のひとつとしては、Ｐｉｎｃｈｅｒｌｅのような講義ノートを通してであったことが挙げられる。このことはＢｏｔｔａｚｚｉｎｉ[18]に詳しく載っている（邦訳本ではP.322〜323）。ただし、この［18］は邦訳段階でかなりの誤訳が登場する。このＰｉｎｃｈｅｒｌｅの読み方にしても「ピンセール」と書かれているが、正しくは「ピンケルレ」のはずである。また、この原書はイタリア語であり、英訳された時点でもかなりの数学的におかしな表現がある。その一例を挙げてみると、例えば、

邦訳（P.244）「次は、あらゆる有理点で不連続だが、積分可能である。

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{[nx]}{n^2}$$

ここで、［nx］＝x引く最も近い整数、あるいはもしxが二つの整数から等距離だと［nx］＝０」

英訳（P.274）“

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{[nx]}{n^2}$$

where $[nx] = x$ minus the nearest integer, or $[nx] = 0$ if x is equidistant from two integers.”

これは表現だけでなく、Ｒｉｅｍａｎｎ［１］やＨｏｂｓｏｎ［７］を見てもわかる通り、まず“［　］”の記号ではなく“（　）”を使うべきこと、そしてもっと決定的なことは、分母のn^2は誤りで、分母はnなのである。残念ながらイタリア語の原本は未だ見れていないので何とも言えないが、この段階で既に記述ミスの可能性もある。

とにかく、[18]の邦訳は直訳調が目立ち、おかしな日本語の表現が多い。

§５．Ｒｉｅｍａｎｎの例（１）に関するその後の発展

§１でも述べたように、Ｈａｒｄｙ［８］は（１）の$f(x)$がπの無理数倍では微分不可能であることを示したが、彼はそれだけではなく、

$$(13)\quad f_{\alpha}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^{\alpha}} \qquad \left(\alpha < \frac{5}{2}\right)$$

に対しても同じ結果を証明した。

また、最近ではＬｕｔｈｅｒ［15］により、次のような結果も得られている。

<u>Ｔｈｅｏｒｅｍ ７．</u>
$$f_{\mu}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^{\mu}} \qquad (1 \leqq \mu < 3)$$

とおくと、

（Ⅰ）$1 \leqq \mu \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき、

$f_{\mu}(x)$は、いたるところで微分不可能な関数である。

（Ⅱ）$\dfrac{3}{2} < \mu < 3$ のとき、

$f_{\mu}(x)$が$x = \dfrac{b}{a}\pi$　（a，bは互いに素な整数）において微分可能であるための必要十分条件は、

$$ab \equiv 1 \pmod 2$$

が成り立つことである。

これは、Ｒｉｅｍａｎｎの例（１）は勿論のこと、Ｈａｒｄｙ［８］による（13）の結果も当然含んでいる。

~ References ~

[1] B. Riemann: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe *(1854)*, *Collected Works of B. Riemann*, *228−264*, *Dover ed ; New York (1953)*

[2] A. Genocchi: Intorno ad Alcune Serie, *Atti delle R. Accademia delle Scienze di Torino* *10 (1874−1875)*, *985−1016*

[3] K. Weierstrass: Über continuirliche Functionen einer reellen Arguments die für keinen werth des Letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, *Math. Werk*, *Bd. II*, *71−76*, *Mayer & Müller Berlin* (*1895*)

[4] P. du Bois-Reymond: Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen, *Jour. für Math.* *79* (*1875*), *28*

[5] E. Neuenschwander: Riemann's example of a continuous "nondifferentiable" function, *The Math. Intelligencer* *1* (*1978*), *40−44*

[6] Ch. Cellérier: Note sur les principes fondamentaux de l'analyse, *Bull. des Sci. Math.* (2) 14 (*1890*)

[7] E. W. Hobson: The Theory of Functions of a real variable, *Cambridge Univ Press.* *vol* II (*2nd ed. 1926*),

[8] G. H. Hardy: Weierstrass's non-differentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), 301–325* (= *Collected Papers of G. H. Hardy vol* IV; *Oxford* (1969), *477–501*)

[9] S. Lang: A First Course in Calculus, *Addison-Wesley Published Company*, (*2nd ed. 1968, 3rd ed. 1973*)
：邦訳 「ラング解析入門Ⅰ」 松坂和夫・片山孝次 訳，岩波書店
（原書第２版の初訳、１９６８；原書第3版の初訳、１９７８）

[10] J. Gerver: The differntiability of the Riemann's function at certain rational multiples of π, *Amer. Jour. Math. 92 (1970), 33–55*

[11] J. Gerver: More on the differentiability of the Riemann function, *Amer. Jour. Math.* 93 (*1971*), *33–41*

[12] E. Mohr: Wo ist die Riemannsche Funktion $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ nichtdifferenzierbar?, *Ann. Math. Pura Appl.* (4) 123 (1980), 93–104

[13] A. Smith: The differentiability of Riemann's function, *Proc. Amer. Math. Soc.* 34 (*1972*), *463–468*

[14] S. Itatsu(板津 誠一):Differentiability of Riemann's function, *Proc. Japan Acad. Sci. Ser. A57*(1981), 492-495

[15] W. Luther:The Differentiability of Fourier Gap Series and "Riemann's Example" of a Continuous, Nondifferentiable Function, *Journal of Approximation Theory* 48(1986), 303-321

[16] 徳永秀也:Riemannの三角級数の数論的研究, 岡山大学大学院理学研究科修士論文(1990)

[17] S. Pincherle:Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del prof. C. Weierstrass, *Giorn. matem.* 18 (1880), 178-254, 317-357

[18] U. Bottazzini:Il Calcolo sublime: storia dell'analisi matematica du Euler a Weirestrass, *Boringhieri societa per azioni Torino, corso Vittorio Emanuele* 86(1981)
英訳:The Higher Calculus:A History of Rial and Complex Analysis from Euler to Weierstrass, Translated by W. V. Egmond, *Springer-Verlag New York Inc.* (1986)
邦訳: 「解析学の歴史~オイラーからワイアストラスへ~」 好田順治 訳, 現代数学社(1990)

ガリレオの連続量概念と不可分者*

津田塾大学数学計算機科学研究所
中根美知代

1．はじめに

「連続性」の概念が今日の数学の重要な概念の一つであることは，数学を学んだ人の間で，まず異論のないところであろう．デデキントの連続の定義[1]を学んだとき，多くの人はある種の違和感を感じることだろう．連続性という事柄は直観的には把握しやすいにもかかわらず，1872年に提出されたその定義は，人為的・操作的に思われるからである．実際，この定義が確立するまでには，運動や物質の理論などの自然の認識，連続性をめぐる哲学的な議論，数学の技術的な面およびそれに伴う厳密性の理解の発展など様々な視点から考察がなされてきた．

ギリシアから，デデキントに至るまでの連続性の概念の歴史を振り返った際，注目に値するのは，アリストテレスが連続性の性質を「連続的なものは不可分なものからなっていることはない」と捉え，それが中世を通じて受け入れられてきたのに対し，ガリレオが，正反対の主張，すなわち「連続的なものは不可分者からなっている」と唱えていることである．17 世紀は，科学史上，科学革命期と呼ばれている．アリストテレスが提示した自然の見方や法則が次々と覆され，それに代わる新しい科学が登場したことから，そのように名づけられたのであった．とりわけガリレオは，力学において自然落下に見られるような加速度運動を把握し，アリストテレスの運動学を刷新していった中心人物であった．連続性の概念はこの時期の，この人物によって転換されたのである．

この報告では，ガリレオはなぜ連続性の性質をこのように捉えるようになったのだろうかという問題をとりあげる．その際，まず，アリストテレスとガリレオの言明が異なるのは，両者の「連続」は同じものであるがその属性の捉え方が異なっているためか,「連続」自体が違う概念なのかを明らかにする必要があるだろう．つぎに，仮に前者であれば属性の捉え方が，後者であれば「連続」自体が，なぜガリレオにより転換されるに至ったのかということが考察される課題となるだろう．以下では，アリストテレスの「連続」と「不可分なもの」の概念をはっきりさせることからはじめていく．そして，ガリレオと同時代の研究者カヴァリエリにより,「不可分者の方法」が提示され,「不可分なもの」の概念が変化していくこと，それをガリレオが受け入れていることを示す．そして，そのうえでガリレオの連続の概念が，アリストテレスとは大

*プログラムでは「ガリレオの連続量概念とカヴァリエリ」となっているが，当日，演題をこのように改めた．
[1]デデキント（河野伊三郎訳）『数について』(岩波文庫 1961 年)．

きく異なっていることを明らかにし，その原因は，彼の運動学の記述に「不可分者の方法」をとりいれたことによるものであることを示していきたい．

2．アリストテレスの連続性の概念

アリストテレスの連続性の概念は，『自然学』,『形而上学』，偽書『不可分の線について』等[2]に見られる．彼は，運動についての考察をすすめていくうちに，連続性の概念を吟味するようになった．彼の連続性の概念が明示的に述べられている箇所としては，たとえば『自然学』227aa20 が挙げられよう．

「接触する」とは端と端とが一緒にあるところのものである.「継続的」とは，はじめのものの後にあって，当のものと，当のものによって継続されるものの中間には，同じ類のものは何も介在していないものである.(ただし，他の類のものなら，中間に何か介在していても差し支えない.)「接続的」とは継続的であって，接触するものである.「連続的」: 連続的なものは接続するものの一種にほかならない．接続するものどもが互いに接触しあうところのおのおのの限界が,(たんに一緒にあるというのでなく）同じ一つのものとなるとき，連続的であるという．ものの端と端が一緒にあるのみならず，一つになっていなくてはならない．

アリストテレスは，

$$「継続的」\supset「接続的」\supset「連続的」$$

といった包含関係を提示することにより,「連続性」の概念を規定していく．これから，たとえば，10 cm の積み木を 10 個くっつけて並べて 1 m にしたものは接続的であり，1 m の長い棒は連続的ということになる．したがってデデキント的な切断，すなわち任意の点を指定した場合，その点に連続体の構成要素があるかないか，といったことについては,「連続的」なものであれば必ず存在するし,「継続的」なものであれば存在する場合とそうでない場合があるということになろう．

つぎにアリストテレスは,「連続的」なものの構成要素を吟味することにより，その属性をより的確に把握しようとし,「連続的なものが不可分割なものどもからなるということは不可能.」(『自然学』231a21）との結論に達した．たとえば，線は連続的，点は不可分割的だから，線が点からなることは不可能であるというのである．なぜなら，

(1)（連続体の要素は相互に接触していなければならないが）不可分割的なものどもが相互に接触する場合は，全体が全体と接触するのでなければならない．しかし，全体が全体と接触するならば，不可分割なものどもは連続的なものとならないであろう．なぜなら，連続的なものは，別々の諸部分をもち，このような仕方で異なるものども，すなわち，場所的に離れているものどもへと分割されるからである．

とアリストテレスは述べている．すなわち，不可分割なものは，部分を持たないから接触するとしても全体と全体が接触するしかない，それでは，大きさを持つ連続的なものは構成できないではないかというのが，彼の論拠であった．ここでは,「接触的」という「連続的」であるた

[2]本報告の作成にあたっては，岩波書店『アリストテレス全集』を参照した．

めの必要条件を否定することにより，議論がなされている．アリストテレスはさらに別の論拠を挙げる．それは

(2) 線も面も一般にどんな連続的なものも，不可分なものではない，ということは明らかである．このことは今述べた理由で明らかであるばかりでなく，もし不可分とすれば，不可分なものが分割される（という不合理な）ことになる，ということからも明らかである．（『自然学』233bb20）

というものである．すなわち不可分[3]なものを奇数個集めて連続的なものを作り，それを真ん中で２つに切ったとすると，真ん中にある要素は２つに分けられてしまう．これは不可分なものの定義に反するというのである．

アリストテレスの論証は，部分を持たない，それ以上分けられないことといった不可分なものの定義と，連続性の定義に基づくものであり，今日私達が見ても十分説得的と思えるものである．この見解は，中世に至るまで広く受け入れられていった．

３．カヴァリエリの不可分者

ガリレオの議論を検討する前に，近代において不可分者の概念の変化があったことを見ておこう．新しい求積法として「不可分者の方法」を確立し，それとともに新たな不可分者の概念を提示したのが，ガリレオの弟子で友人でもあったカヴァリエリであった．

1635 年に公刊した著書『不可分者による幾何学』(*Geometoria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*) においてカヴァリエリが示した，不可分者の方法とはつぎのようなものである[4]．図形ＡＢＣが，ＢＣに無数の平行な線分からできていると考えてみよう．こうした線分の集合のことを彼は「すべての線分」と呼んでいる．その線分一本一本が不可分者と呼ばれるものである．ここで，図形ＡＢＣ本来の面積を F，線分の集合からなる図形を $\Theta(l)_F$ 等とかくことにする．カヴァリエリは，同じ底辺をもつ２つの図形の面積の間に，

$$F_1 : F_2 = \Theta(l)_{F1} : \Theta(l)_{F2}, \tag{1}$$

の関係があることを示した．カヴァリエリは，F_1 と F_2 の「すべての線分」の間に１対１対応をつけることができ，任意の対応する線分間の比が一定であれば，それが $\Theta(l)_{F1}$ と $\Theta(l)_{F2}$ の比となることを指摘し，(1) の関係式に達している．彼はこの方法を立体の体積の比を断面積の比に

[3]アリストテレスの言明のなかで,「不可分割なもの」と「不可分なもの」はまったく別のギリシア語があてられており，厳密には区別されなければならない．前者はこれ以上分割できないという，分割という操作を含むニュアンスを持つが，後者は物質を構成する大きさを持たない原子といった意味合いの強いものと考えられる．いずれにせよ連続体の構成要素とはならない．とくに区別しなくても本報告の論旨には影響しないと思われる．

[4]カヴァリエリの仕事については, E. Giusti, *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, 1980, Bologna, および, K.Andersen, "Cavalieri's Method of Indivisibles" , *Arch. Hist. of Exact Sciences*, vol.31, No.4 (1985),pp.291-367 を参照にした.

帰着させるといった場合にも適用している．

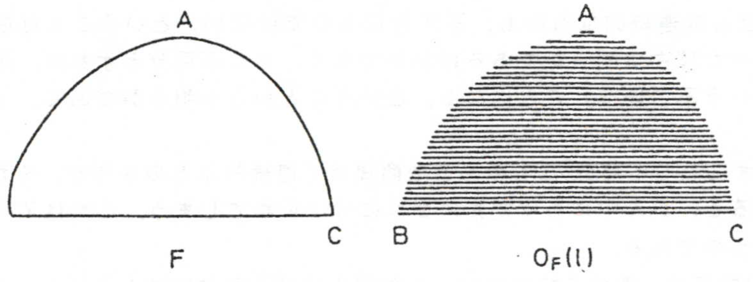


図 1

カヴァリエリはこの方法に基づいて，$n=1$ から 9 までの場合について，積分の公式

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \tag{2}$$

を導くことができた．彼はこの方法をさらに拡張して 1647 年『6つの幾何学の問題』(*Exercitationes geometricae sex*) を出版している．

数学史の立場からは，カヴァリエリが不可分者の方法を用いて公式 (2) を導いたこと，すなわち求積の有効な計算方法を与えたことが評価されている．しかし，より注目したいのは，彼が「すべての線分」の概念を用いて，あらたな公式を導きつつ，この概念の数学的基礎づけを深く考察しながら，その理論を構成していったことである[5]．

まず，カヴァリエリは，無限集合からなる2つの「すべての線分」$\Theta(l)_{F1}$ と $\Theta(l)_{F2}$ のあいだに有限の比が存在するかどうかを検討した．[6]彼は，ユークリッド原論第5巻定義4「何倍かされて互いに他より大きくなりうる2量は相互に比を持つといわれる」にしたがい,「すべての線分」がそのような性質を持つことを 1622 年 3 月 22 日づけのガリレオ宛の手紙のなかで述べている．さらに『不可分者の幾何学』においては，それらの間にユークリッド原論の大きさの関係が導入されることを示している．

つぎに問題になるのは,「すべての線分」の大きさをどのように捉えるかということである．カヴァリエリの考え方が明確に提示されたのは,『不可分者の幾何学』出版後，グルディンが提示した不可分者への批判に応じたときである．グルディンは自身の無限に関する著作 (*Centrobaryca seu de centro grauitatis* …) において,『不可分者の幾何学』を引用し,「すべての線分」の大きさは線分全体の長さの和となる，あるいはそれに対応する面積となる，すなわち $F_1 = \Theta(l)_{F1}$ である，との2つの可能性があるが，そのいずれもが求積には役だたないと述べた．前者であれば，大きさは無限にならざるを得ないし，後者であれば，面積そのものを扱うことになってしまうからである．この問いに対し，カヴァリエリは『6つの幾何学の問題』のなかで,「「すべて

[5]Andersen , pp.300-310.

[6]この問題はカヴァリエリ自身が 1621 年末の手紙でガリレオに問いかけている．ガリレオがカヴァリエリに直接答えたとの証拠はない．しかしドレイクによれば，ガリレオは 1628 年にグェヴァラに対して,「点の無限集合の間の比は合法的に存在する」との証明が可能であると請け負ったとされているので,「すべての線分」同志も有限の比を持つことには合意していたに違いない．S.Drake, Galileo at Work, University of Chicago, 1978．なお本論文では，田中一郎訳『ガリレオの生涯』1·2·3，共立出版，1985 年を参照し，必要な箇所は，原著から訳出した．

の線」は線分の本数においては無限であるが，広がりにおいては有限である」と解答し，不可分者の大きさに対する考え方を述べたのであった．

このような属性を持つ不可分者を今日の言葉であらわせば，$n+1$ 次元空間における n 次元の要素のことを意味する，幾何学的な概念といってよいだろう．不可分者を意味する *indivisible* とはギリシア語の$\acute{\alpha}\tau o\mu o\nu$に対応するラテン語であった．不可分者は，ギリシア・中世を通じて，原子のイメージとともに捉えられ，物理的，化学的な考察の文脈のなかで用いられるものであった[7]．しかしこれ以降，カヴァリエリ流の不可分者の定義が，広く使われるようになっていくのである．[8]．

1627 年 12 月づけチアンポリの宛の手紙の記述「わたしは「図形のすべての線分」もしくは「立体のすべての面」とよぶものにおいた基礎を変えていません．というのも，それらはわたしには明白で穏当な根拠によって十分確立されていると思われるからです.」[9]からわかるように，カヴァリエリの不可分者の数学的基礎に対する概念は，早い時期から固まっていた．そして，この問題をめぐって，カヴァリエリが，ガリレオと積極的に議論したことは，残された手紙から跡づけることができる[10]．そして，1834 年 1 月 10 日づけのガリレオ宛の手紙のなかで，カヴァリエリは,「『新科学論議』に不可分者の理論に関するなにかを挿入してほしい」と依頼し，ガリレオはこれに同意するに至ったのである．

4．ガリレオの連続量概念と不可分者

２．３．で見たように，アリストテレスとガリレオの「不可分なもの」の捉え方には違いがある．しかし，議論を 1 次元に限定すれば，連続体である直線に対して点を不可分者と読んでいることに違いはない．実際,『新科学論議』において，ガリレオがとりあげているのは線と点との関係で，これをきちんと示すことにより，連続体一般の構成要素が何であるかを論じているのであるから,「直線は点からなっているか，いないか」がアリストテレスとガリレオの対立点と理解しても差し支えないだろう．そして，話題をここに限定する分には，本来なら区別されるべきアリストテレスの「不可分割なもの」,「不可分なもの」と近代の「不可分者」という

---

[7]M.Segre, *In the Wake of Galileo*,(1991), Rutgers University Press, p.69

[8]不可分者の方法はトリチェリによって発展させられ，これを用いて得られた彼の結果は，ガッサンディ，バロウ，ホッブスらの注目を集めた．P. Mancosu and E. Vailati, “Torricelli's Infinitely Long Solid and Its Philosophical Reception in the Seventeenth Century”, *ISIS*, 1991, vol82, pp.50-70

[9]ドレイク『ガリレオの生涯』, p.390.

[10]論文末の資料を参照

言葉遣いも大きな問題とはならないであろう.

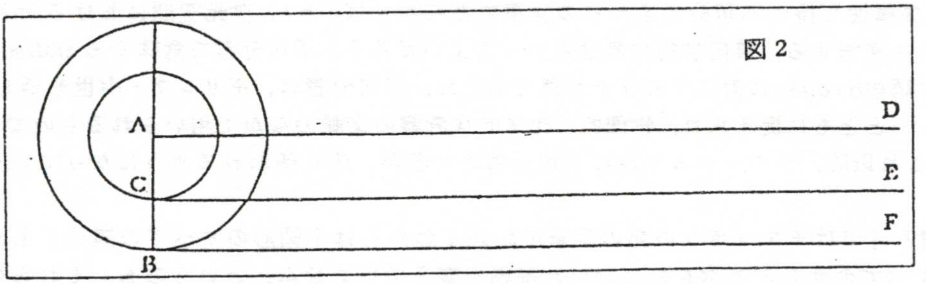


図2

ガリレオは，1638 年に出版した『新科学論議』第1日[11]で，有限な大きさの金属を無限にのばすことができるのはどうしてか，という問題から，連続体の構成要素を論じている．ここでガリレオは,「アリストテレスの車輪」をとりあげる．図2のような運動をともにする2つの同心円を描き，外側の円を直線ＢＣに沿ってころがすと，点Ｂが点Ｆに達したとき，点Ｃが点Ｅに達するが，半径が異なるに2つの円をころがしているにもかかわらずＣＥ＝ＢＦとなるのはなぜか，というのが問題になっているのである．ガリレオは，直線ＢＦが外側の円がすき間なくころがって作られたのに対し，ＣＥは無限個の点とすき間からなっているためとした．そして，連続体が不可分者からできていれば，ＢＣのように無限個のすきまが入ることが可能で，それゆえ金属をいくらでも大きくすることができるというものであった．[12]そこで，連続体が不可分者から構成できるかどうかが問題になる．ガリレオは，

> 線その他全ての連続量は，それ自身無限に可分な部分に分かつことができるから，これらの線は無数の不可分量からなっているといわざるを得ない．なぜならば，無限に行うことのできる分割，またその再分割は，線を構成する部分が無数であるということを前提として初めて可能だからである．そうでなければ，その細分はどこかで終わってしまう．もし線の各部分の数が無限であるとすればその各部分は有限の大きさではないといわなければならない．有限量を無限に集めれば無限大となってしまうから．そういうわけで，無数の不可分量から有限の連続量が作られる．[13]

とする．これはアリストテレスの主張と矛盾する．そこでガリレオは，奇数個の不可分者からなる連続体に見られる矛盾に対して，不可分なものが有限個あるならばそうかもしれないが，無限個集まれば事情はちがうとして，無限のもつ，有限からは想像できないような性質を挙げる

[11]今野武雄・日田節次訳『新科学対話上下』(岩波文庫 1937・1948 年)．なお，伊東俊太郎『ガリレオ』(人類の知的遺産 31，講談社，1985 年) に収録されている翻訳『新科学論議』も参考にした.

[12]研究集会終了後，実は，物質がいくらでも大きくなる理由を説明するためにも彼独自の連続量概念が提示させる必要があったことが明らかになった．これについては，現在論文を準備中である.

[13]ガリレオは，1634 年,『天文対話』への批判を述べたロッコの本へかき込んだ注釈のなかでも「連続体がどこまでも可分割的な部分から構成されているというのと，それが不可分なものから構成されているというのは同じことだと認めねばなりません.」と述べている.

のである．ガリレオは，任意の自然数とその数を平方したものとは，後者が前者の真部分集合であるにもかかわらず，両者の間に1対1対応がつくこと，長さのちがう線分上の点同志にも1対1対応が存在することを指摘する．そして,「等しい」,「多い」,「少ない」という属性は有限量のみにあって無限量にはないと結論したのであった．そして，無限はこのような不思議な性質をもつがゆえに，大きさを持たない不可分者であっても無限個集まれば大きさをもつ連続量をもち得るのだと論じたのである[14]．

実は,『新科学論議』のみならず，筆者が見たかぎりのガリレオの著作のなかで，連続性の定義が明示的に述られている箇所は見あたらない．したがって「連続体が不可分者からなっている」という主張はまた，彼の連続性の定義と理解しても差し支えないだろう．数学史家ボイヤーは，この言葉を指して，ガリレオの連続性の概念は稠密性を基礎におくものだとしたと察せられる．どんな小さな区間をとっても，その間に要素があるというのがここでいう稠密の意味であろう．ただし，図2に示されている直線ＣＥの作り方からすれば，ガリレオの場合，その区間の間には要素とともに，すき間も入っていることを積極的に主張しているのである．すなわち，連続体の任意の点を指示したとき，そこには構成要素とともにすき間もあるというのがガリレオの連続性の概念なのであった．

この連続性の概念は，今日から見るとアリストテレスから後退したように見える．ガリレオはアリストテレスを十分に理解していたのだろうか．それと照らし合わせて自分の不備に気が付かなかったのだろうか．ここでガリレオは，連続性の条件である接続性をめぐる議論について触れられていない．しかし，1613年にはコロンベ宛書簡のなかで,「つながったものから区別できる連続体の属性を見いださなければなりません.」と述べていることから，この点を見落としたというよりも，それを克服しての論証であると察せられる．また,「アリストテレスの車輪」を扱ったときには，アリストテレス的な連続直線ＢＦとガリレオ的なそれでＣＥを対比させて論じている．こうしたことから，ガリレオは，アリストテレスの連続性の概念を十分理解し受け入れた上で，それを意図的に拡張したと判断せざるを得ないのである．

５．カヴァリエリの方法の受容と連続量概念の拡張

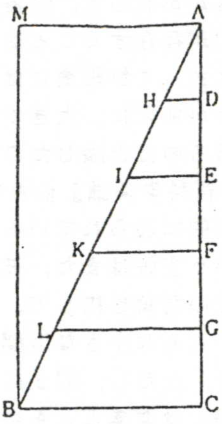
カヴァリエリは1634年，ガリレオに宛てて,「連続体は不可分者からなっていると絶対思わないが，このことについてあえて議論することはないだろう」[15]と述べている．さらに1639年には,「そんなことは絶対にない」[16]と念を押しているのである．ここでは，同時代の数学者にも同意が得られないにもかかわらず，ガリレオが，独自の連続性と不可分者の関係を積極的に打ち出す根拠は何だろうか．ここでは，ガリレオが不可分者の概念を導入する以前，科学史家ドレイクによれば1629年秋にかかれたとされる『天文対話』[17]と『新科学論議』[18]の双方に見られる命題の証明を検討することにより，この問題を考察していく．

とりあげる命題は,「静止から自然加速した物体のある時間内における移動距離は，その物体

[14]ただし，不可分者が集まって今日の意味での連続量を作るかどうかについては結局わかっていない．
[15]Galilei *Opere*, vol.16, p.138 所収
[16]Galilei *Opere*, vol.18, p.67 所収
[17]青木靖三訳『天文対話上』,（岩波文庫 1988 年）, pp.340-343.
[18]『新科学対話下』, pp.35-36．

の最終速度で同じ時間運動した場合の移動距離の２分の１である」との主張である．

『天文対話』での証明は以下のようであった．まず三角形ＡＢＣを描く．辺ＡＣを等分し，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇの点をとる．それらの点を通り，底辺ＢＣに平行な直線をひく．点Ａで物体は静止している．ＡＣ上にとられた等しい部分は等しい時間間隔を，点Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇを通ってひかれた平行線は，等しい時間に等しく加速し増大する速さをあらわしている．点Ａは静止の状態で，これに続く時間ＡＤの最初の瞬間であるが，時間ＡＤの間に速さの度合ＤＨが獲得されるのに先だって，線ＤＡ上にある無限の点に対応した無限の瞬間に得られる無限の小さな度合が通過されることは明らかである．したがって線ＤＡ上の無限の点からＤＨに平行にひかれると考えられる，たえず小さくなる無限の線を考えねばならない．この線の無限性は，三角形ＡＨＤの面積であらわされ，これが物体が移動する距離をあらわす．同様にして，時間ＡＣにおける落下距離は三角形ＡＢＣの面積であらわされる．この面積の２倍が平行四辺形ＡＣＢＭの面積である．これは，物体が自由落下の場合の最終速度で，時間ＡＤを運動したときの移動距離を意味する．したがって，この命題が成り立つ．

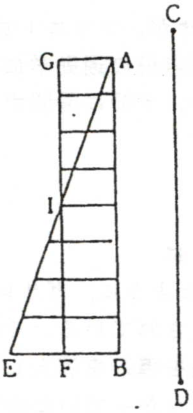


この証明では，平行線の長さは速度をあらわしており，落下時間に比例している．そして，すべての平行線の集まりの大きさが物体の移動距離となることが述べられている．しかし，より注目したいことは，ここでのガリレオは，平行線の全体を足したものの大きさは三角形ＡＢＣの面積をなしていると明確に記していることである．先にみたパドヴァ時代の記述では，無限の平行線そのものの大きさを扱いながら，それが面積になるとは述べられていなかった．「無限の平行線からなる三角形」の大きさを面積と考えることにより，移動距離をあらわす値は有限なものになる．その結果，２つの面積の比較が可能になり，上のような命題を示すことができたのであった．

ここでの記述には，力学の証明としては不自然な箇所はない．しかし『対話』のなかで，シンプリチオが「自然学的科学においては，正確な数学的明証性を求める必要はない」という言明とともにこの証明を受け入れているように，線分を合計して面積にするという議論はガリレオ自身にとっても不十分と感じられていたのである．

ところが，この曖昧さは，「無限の平行線からなる三角形」を不可分者と捉えることにより克服することができるのである．『新科学論議』第３日，定理１，命題１では同様の主張が「静止から自然加速した物体のある時間内における移動距離は，その物体の最終速度の半分で同じ時間運動した場合の移動距離に等しい」というように，表現をかえて，以下のように証明されている．ここで，図に示されている三角形ＡＢＥが『天文対話』の三角形ＡＢＣに対応している．

ＥＢを２等分する点Ｆをとる．
ＢＡ，ＢＦに平行なＦＧ，ＡＧをひくならば，
三角形ＡＥＢに（面積の）等しい平行四辺形
ＡＧＦＢがつくられ，その辺ＧＦはＡＥをＩで
２等分する．さて，もし三角形ＡＥＢ内の平行線を
ＩＧまで延長するならば，四辺形内に含まれる
すべての平行線の集まりは，三角形ＡＥＢ内に
含まれる平行線の集まりに等しいだろう．
というのは，三角形ＩＥＦ内にある平行線は
三角形ＧＩＡ内の平行線に等しく，一方台形
ＡＩＦＢ内の平行線は共通だからである．ここ
では，時間ＡＢのすべての各瞬間に線分ＡＢの
すべての各点が対応しており，またＡＢの各点からひかれて三角形ＡＥＢ内に含まれる平行線は，増大する速さの増加する度合をあらわし，一方，平行四辺形内に含まれている平行線は，同数の増大しない均等な速さの度合をあらわしている．



この命題でも，瞬間の速さがＥＢに平行な線分の長さであらわされており，その線分の集まりが移動距離をあらわしている．しかし，その大きさの比較の仕方は異なっている．ガリレオは，三角形ＩＦＥと三角形ＩＧＡに含まれる平行線の間の１対１の対応を強調した．しかも対応する線分の比は，１：１である．したがって，不可分者の理論により，三角形ＩＦＥと三角形ＩＧＡに含まれる「すべての線分」の大きさの比は１：１である．このことから，三角形ＩＦＥと三角形ＩＧＡであらわされる移動距離は等しいことが帰結できるのである．こうしてガリレオは，すべての線分の大きさの和が面積になるということを持ち込むことなく，この命題を証明することができた[19]．科学史家ドレイクは，『新科学論議』定理１命題１の証明を物理学における数学的厳密性を多年にわたって考察した結果であると評価している．

『新科学論議』では，アリストテレス以来の「時間は連続である」との見解が受け継がれており，その属性は「どんなに小さな時間のなかにも無数の瞬間が存在する」というように捉えられている．ＡＢであらわされる時間軸がこのようであるならば，そのことを幾何学の言葉で表現すると「線分のどんなに小さな部分をとっても，それは無数の点からなっている」ということになろう．ガリレオは，ここで，三角形のなかに，底辺に平行な無数の本数の線分があり，しかも面積にはなっておらず，与えられた線分に対して対応する線分が見つかるような性質を要請している．そうであれば，線分ＡＢが，上に述べた性質を持っていることが，必要にして十分なのである．実際アリストテレス的な連続の概念をとったとすれば，「すべての線分」は面積を構成せざるを得ない．そして，ガリレオによれば上のような言い方で，ＡＢ上の任意の点には，構成要素もすき間もあるということをいっているのだから，時間軸を切断した点においては必ず時間が存在するのである．そして，このような連続性の概念は，デデキントのそれを含んでいるのだから，今日いわれるような連続性が問われることになっても，大きな問題になり得なかった．

[19]E.Giusti, p.44 にも，この証明と不可分者の理論との関係が述べられている．

ガリレオが，アリストテレスとは異なる独自の連続性の概念を提示した一因は，カヴァリエリの手法を自分の運動学にとりいれ，十分に展開するにはカヴァリエリの手法を自分の運動学にとりいれ，十分に展開するためだったといえるだろう．

6．おわりに

以上見たように，ガリレオの提示した新たな連続の概念は，彼の物質理論，運動学の記述に大きく規定されている．それは，ガリレオの力学の記述の上で，強力な方法を提供する，不可分者の理論を導入を導入したことに大きく依存していた．カヴァリエリのように純粋に幾何学の問題をあつかっていたのであれば，おそらくこうした連続性の概念は提示されなかったであろう．

だが，残念なことに，ガリレオの連続性の考え方は当時の数学者に大きな影響を及ぼしたとはいいがたい．まず，不可分者の方法自体が，広くうけいれられなった．また，ニュートンやデカルトは，点が動いて連続的なものを作ると捉え，その構成要素が何であるかについては，考察しないという立場をとっている．

ニュートンは 1687 年に出版した『プリンキピア』のなかで以下のように述べている．

> 不可分者の仮説はいささかぎこちないようにみえますし，その方法は非幾何学的と思われますから，以下のことがらの証明には，消滅していく最後の和と比および生まれてくる量の最初の和と比に，すなわち，それらの和と比の極限に帰せしめるという途をとりました．[20]

ニュートンは彼なりに連続量を捉え，新たな数学的方法を構成して，彼の力学を作り上げたのである．それらが，以降の数学・力学の発展を方向づけたのは，よく知られている通りである．「連続的なものが不可分なものからなっているかいないか」の議論が，数学史の表舞台にでてきたのは，その後，250 年近くたってからのことであった．

---

[20]河辺六男訳『自然哲学の数学的諸原理』,（世界の名著 26『ニュートン』，中央公論社，1971 年），pp.95-96.

＜資料＞ ガリレオとカヴァリエリとのやりとり

カヴァリエリは 1616 年-1641 年にかけてガリレオに 100 通余りの手紙をかいた．ガリレオはこれを保存してあるが，カヴァリエリはガリレオからの手紙をほとんど紛失した模様である．以下は，Andersen と Drake の著作から，本報告に関連すると思われる事柄を整理したものである．

1621 年末：カヴァリエリ，ガリレオに「ある平面の全ての線分（それらは全域をカバーしていないが）が，別の平面の全ての線分に対して比を持つかどうか知りたい」との問う．
1626 年 2 月末：カヴァリエリ，ガリレオに不可分者についての論考をかく決心を伝える．
1626 年 3 月 21 日：カヴァリエリ，ガリレオに「静止状態から出発し，任意の速さを獲得する物体は，まず中間のあらゆる速さを通過しなければならない」ことの証明ができたなら送ってほしいと要求する．
1625 年はじめ：ガリレオはカヴァリエリに，彼自身が連続的な大きさについて彼自身の業績を発表するまで『不可分者による幾何学』の出版を延期してほしいとの依頼．
1626 年：ガリレオ，グェヴァラと「連続体の不可分者」を定義する必要性について話し合ったらしい．
1627 年：カヴァリエリ，ガリレオから，不可分者の方法についての返事がこないとカステリに不平をもらす．このころガリレオは病気．
1628 年：ガリレオ「点の無限集合のあいだの比率は合法的に存在する」ことの証明をグェヴァラに請け負う．
1628 年：ガリレオがカヴァリエリをボローニャ大学の数学教授に強力に推薦．
1631 年 2 月 16 日：ガリレオ，命題 35 の証明に関連した問題を解くようカヴァリエリに要請する．
1632 年：ガリレオ『天文対話』出版．
1634 年 1 月 10 日：カヴァリエリ「『新科学論議』に不可分者の理論に関する何かを挿入してほしい」，ガリレオは第 1 日にこれを持ち出すと同意．
1634 年 10 月 2 日：カヴァリエリ，ガリレオにあてて，「連続体は不可分者からなると私は絶対に宣言しないが，この問いには触れないで，連続なもの（同志）に対しては，不可分者の集合の（の間に）比が存在することを示そうと思う.」
1635 年：カヴァリエリ『不可分者による幾何学』出版．
1638 年：ガリレオ『新科学論議』出版．
1639 年 6 月 28 日：カヴァリエリ，ガリレオにあてて「連続体は不可分者からなるとあえていったことはない.」述べる．
1647 年：カヴァリエリ『6 つの幾何学問題』出版．
「線分はその本数は無限であるが，広がりにおいては有限である」,「もし連続体が不可分なものからできているとすれば，与えられた平面図形と“全ての線分の大きさ”は 1 つで同じものになるだろう」と述べる．

和算のイエズス会起源説

清水達雄

数学は、日本には、外から3回、はいってきた。1回目は奈良朝時代のすこしまえで、中国の数学が伝えられた。大学での教科書は『九章算術』などで、全体として唐の算経十書に相当するが、こまかくは新羅の制に似る。これは、消化も不充分のまま、算博士が世襲となるにおよんで、衰退する。

2回目は、江戸時代のすこしまえ。なにより「そろばん」が伝わり、ことに割り声

二一天作の五、二進が一十（しん）、三一三十一、…

が重宝された。計算の普及と共に、四則応用題も楽しまれる。天元術（中国式代数）までふくむ『算学啓蒙』が、朝鮮から獲られて読み解かれ、その土台の上に、関孝和が筆算式代数の点竄を発明し、日本固有の数学「和算」が創られてゆく。

ただし本文では、一歩手前の、算術程度とはいえ数学書が、日本で著わされはじめた、その時期に注目をする。「和算」を広義に、日本で意欲的に語られ書かれ学ばれはじめた数学に、ひろげておく。

さて3回目は、明治維新のすこしまえからの、今度は西洋

からの数学だが、いったん中国で受容され漢訳されたものが、橋渡しとなった。そもそも仏教が、そういう形で伝えられた。のちに漢訳仏典からサンスクリットにさかのぼり、その文法を帰納したのが、慈雲尊者なのだが、第一の手掛かりとして、密教に注目して将来した、空海による解説書があった。この長い細い糸に対し、漢訳から洋書原典への移行は速かだった。長崎出島の通詞が窓口となり、開国後は、横浜の関内などが加わる。洋算の場合は、和算の知識が、理解を容易にした。西洋数学が、生でいきなりはいってきたわけではない。

2回目の摂取期にさかのぼるが、そろばん普及の証拠には、キリシタンの文献が引用される。パードレたちは、日本人の算術能力をよく見ていた。ならば西洋数学を伝えてみようと試みなかっただろうか。この時期、中国数学だけではなく、なにがしかの西洋数学が、一時的にせよ受容された可能性は充分にある。はっきりした文献的証拠にはとぼしいけれども、何分にも禁制下に痕跡まで消されたから、残っていなくても、無かったということにはならない。

とくに天文・数学に通じていた、イエズス会士スピノラが、1605年から7年間、京都にいて、講じたという事実がある。これを直接の契機として、初期和算が興ったのではないか。平山諦氏が、この和算のスピノラ起源説を、唱導されている。

同じく東北大学出身の，中村正弘氏もこれに唱和されている．平山氏は，米寿を過ぎられた，和算史の長老．中村氏には

ワイマール文化における数学，第9回現代数学史研究会，

1984年4月5日，阪大工学部，現代数学のあゆみ2所収

があり，文化史的の展望に特長がある．

難をいえば，中村氏の精力的な連作は，推理小説の風味で，おもしろすぎる．平山氏のには，説明の重複や欠落もあってまとまどうが，的確な指摘を蔵している．本文の標題だが，スピノラとせず，イエズス会に拡げたのは，同じイエズス会士マテオ・リッチ＝李瑪竇の中国伝道をも視野に入れるため．『幾何原本』前半を徐光啓に訳させる次第は，リッチ自身の『中国布教史』に出てくる（第五の書第8章）．このくらいの記録が見つかれば問題はないのだが，病弱で多忙で1か年入牢殉教した，スピノラの行状は，あまり明でない．

ここで筆者は大学卒業時のニュートン祭の折に拝聴した，長岡半太郎さんの演説を引用したい．

諸君．世間では論より証拠などというが，間違いである．

証拠より論である．論が正しければ，証拠は出てくる．

その良い例が，湯川君の中間子論である…

目星をつけて探さなければ，資料は出てこない．

本能寺、そして殉教

本能寺の変の、天正10＝1582年というと、イエズス会関連では、三つの出来事があげられる。まず、西欧での

暦法改正

古代からのユリウス暦を廃し、日付をとばして新暦に移った。教皇の名をとりグレゴリウス暦とよばれるが、実際の制作はイエズス会の数学者クラヴィウスによる。これが現行暦だが、当初はカトリック圏にとどまり、ギリシア正教圏のたとえばロシアでは、革命まで旧暦が続いた。ユダヤ暦、イスラム暦、また中国の農暦など、それぞれに現行の暦も多い。

つぎに、イエズス会巡察師ヴァリニャーノに率いられた、大友・大村・有馬三侯の名代としての

天正少年使節の出発

帰国は8年後で、その間に、秀吉が禁教に転じた。

もう一つ、イエズス会の

マテオ・リッチ、広東に上陸

リッチ『中国布教史』では、ヴァリニャーノ死亡の記事が、『幾何原本』クラヴィウス注釈本の漢訳の、つぎの章に出る。イエズス会は、全地球的な情報網をもっていた。

さて、帰国した少年使節による、西洋楽器の御前演奏は、

秀吉を嫌げ12。しかしその後もキリシタン弾圧は続行され、ことに1597年、神父など26人を、長崎の西坂で磔刑にした。後世に列聖されたので、これは

26聖人殉教

とよばれる。その物語の映画を、小学生の折に観せられて、怖い気がしたのを、いま想い出す。

当時にあっては、しかし、殉教は殉教をよびこんで、殉教の栄冠をかちえることは、いじわるく許すれば、教皇すらもめったになり得ない、聖人への、王道だった。スピノラは、インドでの殉教をききインド布教に志をたて、できれば殉教したいと心にねがったという。実際には、1602年に来日して、前記のように京都にて年いたあと、会計係として長崎に戻り、1614年の全国禁教令に、変名して潜伏、捕えられ入牢する。1622年、30名は斬首、スピノラら25名は火刑。計55名処刑を、『日本史年表』岩波は

大殉教

と記す。これも長崎西坂でだが、翌年に江戸芝で処刑があった。国道15号を、田町から品川へ向う右側、札の辻を過ぎてすぐ、都インン東京(三田3丁目て)裏手の高台、4丁目16の済海寺の下あたりに、キリシタン処刑地の標示がある。

そうして1637年の、島原蜂起となるのだが、そのおり原城

砲撃を、オランダ船に依頼した(バルセロナ・オリンピックでの、オランダ選手団の入場に、NHKアナウンサが、この件の仔細を知らず、幕府に協力があったなどと述べた)。

ともかくキリシタンは根絶されたと、信じられていたので、幕末の開港地の長崎でも、居留民のカトリックのためにと、大浦天主堂が建立される。パリ外国宣教会(イエズス会系)プチジャン神父が、建設に当たった。1865年完成、小祭壇にフランス渡来のサンタ・マリア像が安置された。

ここで信徒発見が起こる。「フランス寺」見物に来た農民十余名の一団の一人、四五十才ほどの婦人が、神父に近づき、私達は皆、同じ心の者といい、さらに尋ねて

サンタ・マリアの御像はどこ

この言葉は、プチジャン神父からジラール管区長あての仏文書簡中に、ローマ字日本文で書かれているという。

もともと宣教師たちは、日本退去にあたり、サンタマリアがカトリックの徴と、訓えていた。オランダのは、違う。だからこそまず、それが尋ねられたのだった。この信徒発見に続く、浦上四番崩れ、明治初年の大弾圧について、いまは触れない。高札の撤去、信仰の自由は、その犠牲を礎としてようやくに得られたのだった。

それから約百年、1962年6月10日、長崎市西坂町9−8に

二十六聖人記念聖堂（今井兼次　設計）

日本二十六聖人像　（舟越保武　作）

が建てられた．列聖百年の記念という．（大浦の方も正式には日本二十六聖人教会とよばれる）．ついでながら，今井氏はガウディ理解の日本でのさきがけで，この聖堂はバルセロナのに通う．塔のモザイクの陶片は，京都・長崎間の聖人たちの通った道から，集められたという．

『割算書』序

さて初期和算書とキリシタンといえば，まず問題になる

毛利重能『割算書』元和八年（1622）

の序．割算の縁起譚として

夫割算（それわりさん）と云（いふ）は寿天屋辺連（じゅてやへれん）と云所に智（ち）恵万徳を備（そな）はれる

名木有此木に百味含霊（かんれい）の菓（このみ）一生一切人間の初夫婦二人

有故是を其時二に割初より此方割算と云事有…

寿天屋辺連，ジュデヤ・ベレン，このベレンはベトレヘムのポルトガル語形．含霊の菓，つぎは「一つ生ず」とよむと，大矢真一先生より訓えられた．「一生一切」とよんでいたのでは，

意味が通じない。人間の初夫婦二人は、当然にアダムとエバ。これには、疑問の余地がない。

問題なのが、ベトレヘム。これは救い主イエズス誕生の地で、楽園のほうはエデン。こんな初歩的混同をするようでは、という見方もあるのだが、聖書劇のやり方を考えにいれると、いっしょくたにするほうが自然に思えてくる。時代を些少かさかのぼって16世紀中葉の、九州の教会や学校での聖書劇。これは記録にはっきり残っているのだが、その初期の一例を、海老澤有道『洋楽伝来史』から、引用しよう。

まず最初にアダンの堕罪と贖いの望みを演じた。そのため教会の中央に林檎の木を置き、金メッキの数個の林檎を付け、ルシフェル(悪魔の名)がこの木の下でエワを欺いた。…歓びの日なのに成人も子供も落涙しないものはなかった。…この後で、サロモンに裁判を願った二人の女を演じた。この劇は母が子に持つ自然の愛の力を示し…　つぎには牧者(パストル)らが登場し、アンジョ(天使)が現われて彼らに新しい喜びを告げ知らせ、幼児ゼズスを拝むようにと教える…

豊後府内(大分)、1560(永禄三)年の、ナタル(降誕祭)。作り物の出し入れはあっても、幕なしの通しだろう。場面は離っても、場所の差異は意識されまい。

『算用記』と『割算書』

和算書中，刊年が解る刊本では，『割算書』が最初にくるのだが，先行する刊本のあることが解ってきた。『算用記』と題する諸書のうちから，『割算書』に似通うものが，見つかった。事始めに，大矢真一の，戦時中の報告がある。

東京大岡山書店主 横山重氏所蔵の此書物のことを名古屋の藤園堂の主人から伺ったので，横山氏宅に参上して拝見させて頂いた。…

前半は『割算書』のまま，後半は『塵劫記』からの抜萃というもので，『塵劫記』を考える資料とされた。

ところが戦後も1968年頃になって，『割算書』より素朴な『算用記』が発見された。下平和夫氏が，その第一発見者で

最近私は寛永元（1624）年の書きこみのある『算用記』なる写本を入手した。…

これは恐らくは古い刊本の写本と見られたが，天文暦学史の神田茂が，刊本そのものをつきとめた。

昨年12月に岩波の『国書総目録』第3巻によって算用記の項を調べた処，天理図書館本は記されておらず，龍谷大学に古活字本が所蔵されていることを知った。…

天理図書館本というのは，大矢紹介の横山蔵本が入ったもの。

龍谷大学蔵のは、『割算書』に先行する刊本と判定された。本願寺歴代門主収集の「写字台文庫」中の一冊で、原書印影と現代活字の対照版が、いま出ている。下平本は、その異版の写本とされる。

『国書総目録』を、岩波の文化貢献の筆頭にも挙げたいと、吉川幸次郎が述べていたのを想起する。ともかくこうして、和算書はこの龍谷大学蔵『算用記』から、たどるべきことになった。『割算書』のほうだが、書名は明治後に後につけたもの。内容はこの『算用記』とさして変らないから、独立の書名はふさわしくない。『算用記』として著者名をかぶせ

　毛利重能『算用記』、『毛利算用記』

などとするのが、実体を現わすと思う。区別のために

　『龍谷・算用記』、『天理・算用記』

残存数では、龍谷2、毛利10以上、天理1。毛利が断然多く、その半数が元和八＝1622年版、あとは寛永四と八。

その元和八が、まさにスピノラ殉教の年に一致する。なお最後のほうが整理不行届なので、スピノラに見てもらうため仕事を急いだと、中村正弘氏は推理されている。龍谷算用記の著者と毛利とは、用語から別人とされるが、龍谷のほうが殉教、その記念に弟子の毛利が、序跋つきの書を押出した、という想定はどうだろうか。

上り坂の問題

『龍谷 算用記』だが、はじめに、そろばんでの割り声。二一天作五、… 珠算は足し算の初歩を習っただけの筆者に、解説はつとまらない。でも割り声というと母が、節をつけて誦えながら、こんな風にするのよと訓えてくれたのを想出す。

金銀など、換算用の特殊な割り声、利息。この辺りは社会経済史的に興味のもたれるところ。それから体積、面積など幾何学的の例題が続く。そして上り坂の問題が出る。つぎに目測の手ほどきがあって終るので、終りから2番目だが最難。

上り坂を横から見た直角三角形を、鉛直線で7部分に分け、できた台形、上り口だけは直角三角形の面積を、与えられた7国の知行高に比例させる。坂上から、1番：43万6千石、2番：68万石、3番：20万3千石、4番：52万石、5番：32万5千石、6番：30万7百石、7番：10万7千5百石。

はじめの三角形の底辺150間、垂線75間。1間を6尺として、20万2500平方尺。知行高計257万2200石。千石につき、78平方尺7263。そこで解、底辺をつぎのように分ける。1番：13間1尺8寸2分、2番：23間5尺1分、3番：8間9寸7分、4番：24間3尺6寸9分、5番：20間1尺9寸8分、6番：29間5寸5分、7番：30間3尺9寸8分。

右、上り段の割り、かくのごとく書下のするといへども、
ここを併て記す事なし。

その故は、高さまた地通り五十一尺ちかいても、算の次第ちがうなり。算を知りたるものにあい尋べし。

こう断って、解法は記していない。術があり それを習えばこういう問題も解けるのだ、と訓えるいみで載せたのだろう。開平の問題なのだが、一応やってみる。逆順にして、上り口の方から知行高を累計、対応する台形を寄せて直角三角形の増分を割当てる。

$$78.7263 \times \text{知行高累計} = \text{直角三角形の面積}$$

高さがちょうど底辺の半分だから、面積 ＝ 底辺^2/4 で、

$$\sqrt{78.7263 \times \text{知行高累計} \times 4} = \text{底辺}$$

そこで

7番	107.5	$\sqrt{33852.30900} = 183.989\cdots$
6番まで	408.2	$\sqrt{128544.30264} = 358.530\cdots$
5番まで	733.2	$\sqrt{230888.49264} = 480.508\cdots$
4番まで	1253.2	$\sqrt{394638.79664} = 628.202\cdots$
3番まで	1456.2	$\sqrt{458564.94824} = 677.174\cdots$
2番まで	2136.2	$\sqrt{672700.48824} = 820.183\cdots$
1番まで	2572.2	$\sqrt{809999.15544} = 899.999\cdots$

この底辺の差をとって、間数を求め、4捨5入すると

1番	79.816…	13間182
2番	143.009…	23間501
3番	48.972…	8間097
4番	147.694…	24間369
5番	121.978…	20間198
6番	174.541…	29間054
7番	183.989…	30間399

上に記した解では、7番が1分短く、その分6番が長い。

毛利もこの問題の、図と解をのせるが、5番の8分を2分に誤っている。なお後書きが異っていて

右の割は、かんかりと云てさだまりたる割は無し。ただししきちやう（式正）の方吉しと云割有。是は口傳也

これは逃口上にもきこえ、毛利はこの問題の解法を知らなかったと考える人もある。

ところで、昭和31年の『割算書』複製本の解説中P.76−7に、5番：19間5尺6寸9分、4番：24間5尺9寸9分、とある。5番までの部分での開平で0.53389…を0.53135として誤。意外のことでが、本稿の進行中に発見できた。

西田知己校注『割算書』では、39−40ページに註⑩として、電卓で計算した精確な値を列挙している。

『諸勘分物』

百川治兵衛の作。刊本ではなく，弟子集中にあてた，巻物。元和八壬戌暦弐月三日，これもスピノラ殉教の年。のち寛永十五年，百川はキリシタン嫌疑で捕えられ，弟子たちが身元保証して釈放されたという。第二巻だけが残る。りてで開巻ひまなり

材木分直し（ざいもくぶなおし）

五本，長さ三間，六寸角。

直し，拾六本壱丈一尺三寸七分半。

是ハ右之木を，長さ二間に太さ四寸角に直す時には，長さ三間に六五を懸けて，太さの六寸二つ，六六卅六をも懸け候へば，七尺二の分数（ぶかず）に成る。是に又五本を懸け候へば，三五一の分数，是を直し木の太さ四寸二つ，四四十六を以て割る。太さ四寸に長さ二十一丈九尺三寸七分半，是れ一丈三尺にハり［割り］十六本一丈一尺三寸七分半也。

同大小あり（おなじくだいしょう）

三本，長さ四間に太さ五寸角，五本，長さ三間に太さ八寸角。右二口（ふたくち）の直し，卅九本欠四尺八寸七分半。是れを直す……

見るなりとっつきにくく、ながらく捨ておいたのだが、読みはじめて興趣がつのった。研究所在籍時に、これを読み解いて、建築学会あたりで報告してもよかった…

第1問。6寸角で長さ3間の材木5本を、標準材木に直す。條件は、等体積なのだが、標準材木は、4寸角で長さ2間。また、この1間が、6尺ではなくて、6尺5寸。この解釈で、本問が読み解ける。

$3 \times 6.5 \times 0.6^2 = 7.02$　これが、七尺二

$7.02 \times 5 = 3.51$

$3.51 \div 0.4^2 = 219.375$

本数をとり出すため、$6.5 \times 2 = 13$ で整数部分を割る。

$219 \div 13 = 16$ あまり 11

答 16本と 11.375

第2問。材木2種類をあわせて、標準材に直す。第3問は平物、切口が長方形。第4問は、切口が直角二等辺の三角。つぎの第5問の頭に「材木代銀指引」、また「此銀三百目、一本三匁づつ」とあるのは、まぎれこみ。実際に解かれている問題は、第5、6問とも、標準材をなかだちに、別の切口のに直すこと。これを「入する直し」とよんでいる。標準材が、貨幣のように機能する。

第7〜11問は、丸木。直径を「中隈（なかすみ）」とよんでいる。何寸

の角材が削り出せるかを見るには14で割る。$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.4$,

3尺5寸廻り（周囲）の中限は、32で割る。$\pi \fallingdotseq 3.2$.

それからとれる角材は、さらに14で割る。これは

　448の音(こゑ)にて割りても同前。此音(こゑ) 可し秘 なり。

その逆、5尺角がとれるのは何尺廻りか、でも同じく

　448の音にて懸けても同断。これは可し秘也。

以上の7〜9問は削って出すのだが、10〜11問は「押直し」

　丸木を削らずに其儘押直し、平を押し込み、角へ押し出し

これは思考実験で、要するに等積の正方形を問う。算式は

　直径 × 0.894444

この換算定数は $\sqrt{\pi/4}$，πを3.2とするから$\sqrt{0.8}$。その

小数表示の正体だが

$$89\frac{4}{9} = \frac{805}{9}, \quad \frac{805^2}{81} = 8000.308\cdots$$

つまり $80 \times 81 = 80.5^2$ をいうもの。

　第11問は、丸木と等体積の角材、切口を求めて長さを問う

のだが、本数の端数処理を誤っている。

　第12〜13問は、鎗(やり)（鑓(やり)）の柄(え)、下と末の廻りが同じでない。

平均の廻りに1つの長さが、第12問。等体積にはならないが、

なお「日本古典全集」本には、数字の誤がある。

　二九六二八丈 → 一一六二八丈　と直す

七尺三二五　→　七尺三一二五　と直す
（第3問でも，三間 → 二間）。こういう誤りをふせぐ用心から，本文には大体の，壱，弐がよく使われている。

第13問は，数学的には別物。本末がなっていないとして，

六尺同尺角物に縮め，何寸の角に成るを見る

等体積の立方体にする。算式は

（周囲 $3.5 \div 3.2)^2 \times 0.8 \times$ 長さ $195 = 186.621$

これから立方体の一辺を，5.715　としている。

$5.715^3 = 186.658\ 900\ 875$

$5.714^3 =$ 〃 $560\ 934\ 344$

だから正しい（筆者は開立までは旧制中で習わなかった）。

第14問，太鼓或の木。直径5尺8寸，高さ1尺5寸の円柱を4寸角に直すと，長さ25丈2尺3寸＝38間半2尺5寸。

$58^2 \times 0.8 \times 15 = 40368$，$40368 \div 4^2 = 2523$

なのだが，

是れよりも早き延様（のべやう），虎巻（とらのまき）に有しえ。

つぎの第15問にも

是れも早き仕様（しやう）は虎巻（とらのまき）に有り。

こちらは同じ太鼓或を下5寸廻り，末3寸廻りの錐にした長さ。ならし4寸廻りの円柱とみての計算で，さきの40368を

$(4 \div 3.2)^2 \times 0.8 = 1.25$

で割る．$\pi^{-2}\times(\pi/4)=(4\pi)^{-1}$ だから，前問から

$$2523\times(4\times3.2)=32294.4$$

となる．ただし原巻にあるのは，丈・間の直しかもしれない．

$$\square\div6.5=\square\times2\div13$$

第16－17問は玉形(球)，廻り3尺．まず六方を削り角形に直すのだが

$$3\div3.2\div1.4=.6696$$，これも448の音を可し用也．

わざわざ「丸木，木口直しに同前」と記すが正しくは $\div\sqrt{3}$．

第17問「削らずに，平へ押し込み隅へ押し出し，角に直す」．

$$周\div3.2\times0.894444$$

直径に掛けている定数は，これも丸木の押直しの $\sqrt{\pi/4}$．

第18－19問は，角物3尺四方からの玉形．まず削るほうは

3×3.2 で9尺6寸廻り．削らずのほう

$$3\times3.2\times1.4\quad(=13.44)$$

これでは外接球になってしまう．なお，二尺→三尺．

第20－23問は，石．第24－29問は，堀普請．第30問は検地，など．「堀普請」を1問とみて52問，目録は48條，目録末に「全五十三ケ條」とある．53は，東海道五十三次の数だが，元来は『華厳経』の入法界品の数．この入法界品の善財童子が，平安女性に愛されたことは，源為憲『三宝絵詞』から窺えるが，南方志向の故か，江戸時代には忌避されたらしい．

球と錐

球の体積公式は、難しかった。ブルバキにあるn次元での公式をみると（区間ではπは表に出ないが）、円と球

2〜3次元では、πがかかり、$\frac{1}{2}$のさも

4〜5次元では、π^2がかかり、

6〜7次元では、π^3がかかり、以下同様。

次元2で一つ上るというのが意外で、球の体積公式にはπ^2が出てくる、と予想する方が自然だろう。

中国では南朝の梁の、祖暅が、球の体積公式に到達した。同径の円柱二つの直交相貫体「合蓋形」で、球をくるんで、考えている。合蓋形の、両円柱軸に平行な平面での切口は、正方形で、ピタゴラスの定理から、平方差になる。そこで

合蓋形 ＝ 立方体 − 正方錐、

球：合蓋形 ＝ 円：正方形。

これは、一つにまとめると

球 ＝ 円柱 − 円錐。

ギリシアでも、天才アルキメデスを必要とした。自身でも最大の発見と考えて、墓に彫らせた（プルタルコス）。

球の表面積 ＝ 円柱の側面積

に基づくが、代表的な不可展面が、可展面に等しい意外さ。

祖暅の関係式では、錐の、3分の1公式が、前提となる。これは中国では、三国魏の、劉徽が、理由づけをしている。

初期和算書では、しかし、『算用記』(龍谷、毛利)に

$$\fallingdotseq 2.96$$

が出てくる。実験公式とみる説もあるが、2.9ならともかく、3桁だから計算式のようにみえる。試みにいま、ピラミッド型に、100段まで積みあげた場合を考えると

$$1+4+9+\cdots+10000=338350$$

$$\frac{1000000}{338350}=2.95551\cdots\fallingdotseq 2.96$$

これで、説明がつくと思う。

1000段までの場合を計算すれば

$$1000^3 / 667\times 500500 = 2.99550\cdots$$

となるのだが、Σn^2 の公式を知らなかっただろうから、これは視野外。100段で真相が顕れた、として無理もない。

3分の1公式の説明として、スピノラがピラミッドの計算をして見せたのを、一知半解に流した、と見られなくもない。

『諸勘分物』では、第46問「四方無レ底」に

此或は口四方にして底までも同じ様にて尖る。是れも常の角物にして三尺五寸四方懸け合せ、深さ三尺懸け、…大目引三ケ一入る。

三分の一にする，とある．「大目引」のところを，大ざっぱな見積値と解する説もあるが，うんと引いての三分の一，の意か．三角形の面積では「半分捨つる也」が何度も出てくる．

なお『諸勘分物』第二巻には，その紙背に，進んだ知識が記されている．表紙裏のは，三四五の古典的直角三角形だが，そのさき，与えられた面積の長方形で，与えられた辺差のを求める，算法と図解．これは2次方程式と同等．近似値

$\pi \fallingdotseq 3.16$, $\sqrt{2} \fallingdotseq 1.4142$

それから，積みあげの和の，算法

$$1+(1+2)+(1+2+3)$$
$$=(3+2)(3+1)3/6$$
$$1^2+2^2+3^2+4^2=(4+0.5)(4+1)4/3$$

この紙背記入は，いつ頃のことだろうか．

『竪亥録』と『因帰算歌』

『算用記』，『割算書』(1622)，『諸勘分物』(1622)に，『塵劫記』(寛永四＝1627序)が続いて，それから『竪亥録』(1639)となるのだが，『塵劫記』には岩波文庫版がある．先入見なく一見されることを期待して，その解説は，いまはぶく．

『竪亥録』。竪ではない，竪，ジュ。まぎらわしいので，おどろかされる。辞書に当たると

竪亥　夏の人，禹の臣。山海経に…

帝命竪亥，歩自東極至于西極，五億十選九千八百歩

世界の東から西までを踏破した人。

著者の今村知商は，学のある侍で，漢文で体系的にのべた。弟子が案じて，和文の解説書『竪亥録仮名抄』を出版した。本人も考えて，和歌仕立てに書きかえたのが『因帰算歌』。

記憶の便のために詩の形式というのは，古今東西その例にこと欠かないが，インドではとくに著しい。数学書としては『リラヴァティ』が有名だが，実際には数学といわず学問書は全部，暗誦を前提に詩形式で述べられている。そこでまず全文を覚える。すると各條は自由に取出せる。だから章節の体系性は必要でない（たとえば，パーニニ『文典』）。考えてみれば，線型順序による展開たとえば歴史などは，インド的発想にはそぐわない。

時間に沿っての，発話は，しかし重んじた。その究極は，意味をもたない音連続のマントラ，真言だろう。専門の書も，必要な要綱から逸脱し，ほとんど無意味な数，存在しないものまでの列挙，などの枚挙にも富む。

列挙たとえば

比丘，比丘尼，優婆塞，優婆夷，天，龍，夜叉，乾闥婆，
阿修羅，迦楼羅（カルラ），緊那羅（キンナラ），摩睺羅伽（マホラガ）等

同じ繰返しだから，じきに覚える。経文の，だめ押しの偈（ゲ）

爾（そ）の時に世尊，重ねて此の義を宣べんと欲して，偈を説きて言（のたま）はく，

自我得佛来　所経諸劫数　無量百千萬　億載阿僧祇
常説法教化　無数億衆生　令入於佛道　爾来無量劫
為度衆生故　方便現涅槃　而実不滅度　常住此説法

明代算書の歌訣――忘れられた数学史家　武田楠雄

この辺まできて，『算法統宗』に考え及んではっと気付いた。一番大切なことを忘れている。

戦後，最も優れた研究業績を遺した数学史家，武田楠雄．氏の明代数学史研究の最初の論文に接しての，感激を筆者は

月報　2号

にのせる。月報――のちに改題して「数学の歩み」となるが，これは，1953年の秋．杉浦光夫君たちの，大学卒業の年。

中世数学の発見　武田楠雄氏の最近の業績

と題したのだが，唐宋の間に時代区分をおく内藤湖南の見解，それを承けての，歴研が推す前田直典説が，念頭にあった。

新数学人集団（SSS）に身を投じた自身の思い入れもある。

武田さんは一度、SSSの例会に来ていただいている。苛烈な批判をといわれ、下痢の最中とかでじきに帰られたが、印象は強烈だった。小柄ながら気力充実。国際的視野からの博捜し精密しての比較検討。学風は、三上義夫に似通うという。

久し振りに「科学史研究」誌を繰り、連作をたどってみたが、何れにも引用に邦訳はつけずの、峻厳な書法。そして原典は古典漢文、中世俗語、一方ではラテン、イタリアなど。発表当時、恐れ入るばかりだった。いまでも拝読というより拝観なのだが、主旨はよく理解できるようになった。たびたびの中国旅行で、現代文が読めるようになったのが効いている。

大矢真一先生は、武田君は向うにいたから中国語で不自由しない、うらやましい、と云われた。京大数学科昭和8年の卒業で、旅順工大に奉職、実用数学を教えられた。戦後は、工学院大。その旧校舎の一室に、お訪ねしたこともある。

1967年6月4日、急逝された。「科学史研究」誌に発表のものは実は、大研究の概要のみで主著は公刊されていない。

三上義夫の『支那数学史』も、公刊にはまだ到らず、この分野は、最良の知見が眠ったままになっているわけ。（高名なニーダムの『中国科学技術史』は、全体としては偉業だが、日本語文献を使っておらず、三上の欧文だけを引く）。

武田さんの第一論文，明代における算書形式の変遷．宋元までの数学書との違いでが，まず算法を説く冒頭に「詩」が現れる．ひとひねりした難問が「歌」で述べられ，それの節廻しが指示されるようになる．その，難法歌の例．

趙嫂自言快績麻　李宅張家顧了他
李家六斤十二両　二斤四両是張家
共織七十二尺布　二人分布鬧喧嘩
借問郷中能算師　如何分得的無差

節廻しつきの例

白米三石五斗，芝麻換得三石，芝麻五斗五升，…
知公能算問，端的不会人笑你，　右　西江月

この「西江月」が，節の名称．この結びの俗語表現に

端的不會人笑你（ほんとうに出来なかったら人に笑われますよ）

と，武田さんの訳がつけられている．

この節廻しの

西江月，鳳棲梧，折桂令，寄生草，…

これらは元代の歌劇「雑劇」からきている．雑劇については吉川幸次郎の研究があるが，大まかにはいまの「京劇」などを想い浮べればよい．

追記　佐藤健一氏のお世話で『算法統宗』が入手できた．巻之一巻頭の，先賢格言を引用する．節迎1は，已改調西江月．

智慧童蒙易曉　　愚頑皓首難聞
世間六藝任紛紛　　算乃人之根本
知書不知算法　　如臨暗室昏昏
謾同高手細評論　　數徹無際方寸

武田評："任紛紛"もそうであるが，語り手が高座から一席聞かせる調子の"慢（謾）同高手細評論"のごときに至っては，民間算書の真髄を発揮したものといわざるを得ない．

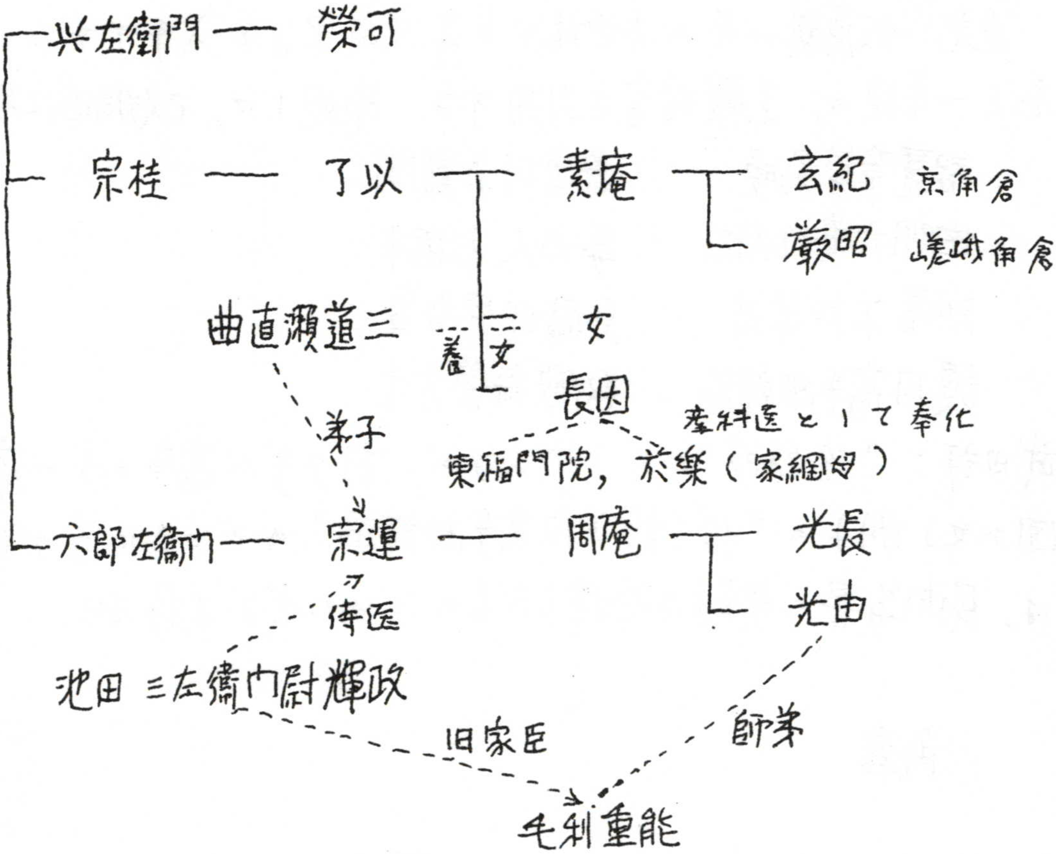
角倉

『塵劫記』の著者，吉田光由は，角倉（すみのくら）の一族，というより吉田家が，屋号の角倉でも呼ばれる．もとは，むしろ医家．土倉をもち，海運や水運を興して，豪商・代官になった．

系図を，つぎのページに掲げる．

宗桂は，医業を継ぐが，入明使僧の策彦にしたがって渡明（1539−41，47−49），世宗嘉靖帝に薬を献じている．

了以は，安南朱印船貿易を創め，大堰川（保津川）開鑿で名をあげ，幕命で富士川疏通にも従い，のち高瀬川を開鑿．（琵琶湖疏水計画は明治に持越され，田辺朔郎でまとまった）．



素庵も父了以の事業を援けたが，むしろ文人として活動，鷹ヶ峰の光悦と交わり，嵯峨本で知られる．妹を養女とした曲直瀬道三は当時随一の名医，キリシタンとなりのち隠棲．

長因，宗運，周庵も医者．光長は医業にあきたらず，光由とともに，角倉隧道を掘って水を北嵯峨に引いた．

光由は幼少時からソロバンになじんでいただろう．割算はもとより，開平・開立もこなしていただろう．商業算術から土木にも通じていた．『塵劫記』の素材は身についていた．

しかし名選手・名力士かならずしも名監督・名親方にあらず。解っているのと、解らせるのとは違う。そこで『塵劫記』の手本が問題になってくる。幸いに光由自身の後書きがある。

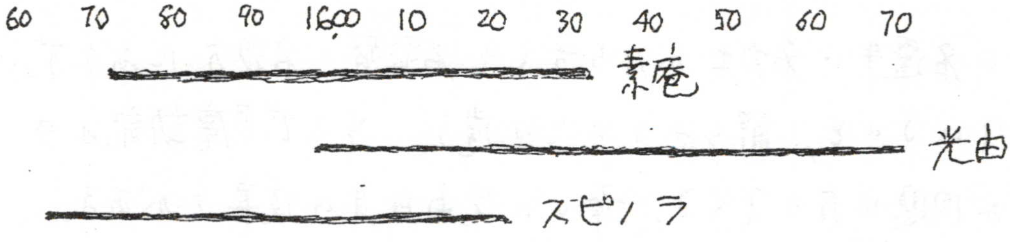
我れ稀れに或師に就きて汝思の書を受けて是を服飾とし領袖として其一二を得たり　其の師に聴ける所のもの書き集めて十八巻と成してその一二三を上中下として我に勝なる人の初門として伝へり　（寛永八年版，後書き）

汝思は程大位のことで，その書は『算法統宗』，くわしくは直指算法統宗。これに「新編」があり「纂要」があるから，どの版を受けて「服飾とし領袖とし」たのかも問題になる。しかし親類といったような，近縁関係にはないことは，定説としてよい。なお中村・松宮氏は別の手本を想定している。

N. Tartaglia : General trattato de numeri et misure, 1556–60.

後書きでは「稀に或師に就きて」が問題になる。在来説は師を素庵とするが，スピノラの名を伏せたものとの説が出た。ここは「素庵」を伏せたとしても，寛永八年の時点では説明がつく。素庵の業病はすでに重く翌九年六月没。恐らく遺志により，角倉の菩提寺二尊院を避け，化野念仏寺に葬られる。林屋辰三郎氏は，ハンセン氏病だったらしいとされている。

門を堅く閉ざし



常に紙帳の中に座して、人と相面せず、平生は侍史をして書を読ましめてこれを聞き、或は書を紙帳の中で看る…古典漢文の書籍に関っていたのだが、貿易の家だから俗語文も読めたはずだと思う。

スピノラ

スピノラは、何を教えたのか。まず何よりも

教えることを、教えた

のだと思う。一般論として宣教師の感化力は強かっただろう。暁星学園十年を振返り、小学校のセルメッツセル、ジェローム、中学校のグットレブン、ヴィグルス、ジェルマンなどの方々の面影が浮ぶ。つづいて山田政右衛門さんはじめの日本人黒服、背広の普通の先生方の学恩もあるのだけれど、いたるまで修道士がまもる。

加えて方法がある。公教要理での掛図、聖書中の大洪水などの物語部分は、その金彩色を通して、頭にしみついている。

あめ玉を貰うこともあった。往時ならばコンペイ糖、葡萄酒やワインも珍らしかった。公教要理(カテキスム)の問答体は、キリシタン時代も同じだったろう。ロバート・レコードの算術書や、ガリレオ・ガリレイの対話も、その形式の転用だろう。

イエズス会は教育を重んじた。創立は1534年、初代会長のイグナチオ・デ・ロヨラ(1491-1556)、東洋伝道の開祖のフランシスコ・デ・ザ(シャ)ビエル(1506-52)、ともにバスク(エウスカル)の人。ピレネ山脈に據り、ヨーロッパ系でない独自の言語を話す民族。ベレー帽の陽気さと、不屈の斗志と、聖国が近年でも、この辺に顕現する。ロマ学院のクリストファ・クラヴィウス(1537-1612)はドイツ出身。マッテオ・リッチ(1552-1610)はイタリア。ここで問題のカルロ・スピノラ(1564-1622)も同じ。国際的の会だった。

会士自身の自己錬成は、ロヨラの著『霊操』に據るのだが、教育活動について、武田楠雄のクラビウス論から引用しよう。

宗教改革の反撃として生れたジェスイット教團の厳格な教育は、この教團の戦闘的、秘密結社的組織網と相俟って16世紀末以降、ヨーロッパ数学の水準を急速に高めていった。その初期に活躍したのは古典派の巨頭クラビウスである。

古典派とは、ラテン・ギリシアを学ぶ派で、商算家と相対す

2. その中間に市民(学者)派が形成される。

ジェスイットの数学教育は、その発足当時のまゝ停滞していたのではない。彼等の枠内における「実践性」つまり「数学の応用」をめざし、クラビウスを先頭に数学教育の強化に乗り出した。その時期は1586年、改暦(1582)を終えて、非常に有名になった壮年のとき(49歳)である。

そこで、1571年に入会して

はやくも1577年にローマを去って東洋伝道におもむいたマテオ・リッチが、代数的知識をもちあわせていなかったであろうことも、ほゞ確認せられる。…

彼が[Collegium Romanum に]入校したときには、まだクラビウスの幾何原本さえ刊行されてはいなかった。

対して1584年入会のスピノラは、その伝の年表によると

1587 ローマへ立ち寄り、クラビウスの下で数学を学ぶため短期間滞在

となると、新しい数学的知識を身につけて、来日した。

それよりもまず、グレゴリオ改暦について語っただろう。

暦は中国天文制理念の表看板。日本では中国暦が盲信されて、南北朝年号の争はあっても、本体は放置されていた。本能寺が一年おそければ、フロイスが

私共、暦をあらためてございまする。

うん、いうてみよ。

となったろうか…

スピノラは天文暦法の知識が買われて、幕府や宮中からも照会されている。彼の科学的業績としては、「スピノラ伝」には出ていないが、科学史年表に

1612 長崎での月蝕時刻を観測、マカオとの経度差を決定

経度決めは、大航海時代の大問題だった。日月星辰は、直接には経度をおしえない。蝕とか、木星の4衛星の配列とかの、速い運動の地方時観測しか、決め手がなかった。航海に耐える精密な機械時計、クロノメータは、もうすこし後の太平洋探険時代に登場する。

スピノラは、その当時の英国海賊に、本を奪われている。

喉に短剣を突きつけ

教皇聖下が日本のために…喜捨として与えた四百デュカードと、…本、文書、聖遺物、アニュス・デイ その他の信心用具を取り上げ…

…一本の敬虔な十字架と、蝋のアニュス・デイ、聖遺物、その他の価値ある聖なるみなが旅の安い品々を取り戻すことができたからでした。しかし船長自身が奪っていた大部分の品物は取り返すことはできませんでした。

聖遺物などは返り、市場価値のある品々は返らなかったわけ。この後リスボンに戻り、再出発しインドのゴア、マラッカ、マカオを経て、日本に着く。寄港地にもイエズス会の施設があるから、本なしで来たことにはならない。本などあってもなくても、身につけた数学しか語れないだろう。スピノラが教えることのできた数学の範囲は、武田楠雄が指摘している、1586年の改革の、検討で決められよう。

光る　わだつみ

『塵劫記』350年の記念碑が、京都市右京区嵯峨小倉山の常寂光寺にある。角倉栄可が、本圀寺日禎上人から所望されて付嘱した地に、日禎を開山に建立された寺。法華なのだが上人が不受不施の宗制を守りぬき本圀寺を出てのこと。

不受不施とは、法華宗の僧は他宗の信者の布施供養を受けず、信者は他宗の僧に供養してはならないという制誡。公武除外の説も出てくるが、日奥（1565−1630）は、1595年の秀吉の千僧供養会に出席拒否、妙覚寺を退出。家康が重ねて出仕を命じたのに応ぜず、遠島。1612年、許されて寺に戻り、不受不施公許状を得て、不受義を鼓吹。のち1665年、幕府は不受不施義を禁止し、僧侶は地下に潜んで宗命をつないだ。終

度の弾圧・迫害に耐えて、明治維新を迎えた（『岩波 仏教辞典』による）。

隠れキリシタンに対し、仏教の側から唯一あげられる例。再著もあるが、目黒区碑文谷1丁目22の円融寺を挙げておく。齋藤正秀夫人寛子さんの葬儀のあった、鎌倉期からの寺。

光由という円融自在の学徳の人

という、常寂光寺住職の評が、顕機円哲居士という戒名からの連想として、350年記念顕彰事業の記録中に見える。

光由、光長は、光悦、光瑳、光甫、光栄などと同じく法華だったように思える。不受不施ないしそう疑われたとすれば、禁制後に没した光由に墓がなくても不思議でない。実際には大分県国東郡夷村に、弟子渡辺藤兵衛・即頓休圓大徳の墓と、一字も刻まない白墓とが並び、隅井家所有の渡辺の位牌書に、顕機圓哲居士・吉田七兵衛光由算術元師範也、とある。国東は磨崖仏があるなどの秘境だが、夷村から12キロの安岐出の三浦徹山（1651−1730）の孫に、梅園（1723−89）。さらに4キロほどの武蔵町の綾部道弘の孫に麻田剛立（1734−99）。光由がこの地で、失明後の余生を送ったとすればうなずける。

さて筆者の考えだが、光由は浄土でも法華でもキリシタンでもなく、16世紀西欧でいえばリベルタンに近かっただろう。素庵が藤原惺窩に依頼した、安南貿易の「舟中規約」にいう。

異域の我国に於ける，風俗言語異なると雖も，其れ天賦の理，未だ嘗って同じからず，其同を忘れ其異を怪しみ少しも欺詐，慢罵するなかれ。彼れ且つ之を知らずと雖も，我豈に之を知らざらんや。信は豚魚に及び，機を海鷗に見る。

文献案内

和算のスピノラ起源説

[0] 平山諦『東西数学物語』恒星社厚生閣，昭31，増補新版，昭48．cf 志田一夫（＝大矢真一），新刊紹介，数学教室，22（1956．12），21ページ．

[1] 平山：初期和算への西洋の影響，富士論叢，32巻1号（1987．5）萩野公剛教授華甲記念号，135－165ページ．

[2] 平山：わが国初期の測量術，数学史研究，121（1989．4～6），1－4ページ．

[3] 平山：二つの俗説，同上，5－12ページ．

[4] 平山：ほう，弗，拂について，数学史研究，124（1990．1～3），16－23ページ．

[5] 平山：吉田光由の墓について，珠算界，439（平3＝19

91．3），1－16ページ．440（91．4），8－9ページ．
[6] 平山：和算の発生，珠算界，447（91．11－12），65－72ページ．450（92．3），37－40ページ．451（92．4），29－36ページ．453（92．6），37－44ページ．以下次号．
[7] 平山『和算の誕生』恒星社厚生閣，1993（予定）．
[8] 中村正弘：和算の古里を訪う，数学教育研究（大阪教育大，数学教室），20（1990），115－120ページ．
[9] 中村，松宮哲夫：百川治兵衛への疑惑，同上，121－128ページ．
[10] 中村：和算――全般的危機の前兆，数学教育研究，21（1991），119－138ページ．
[11] 中村，松宮：ある独学者の話―― ニコロ・タルタリアの場合，同上，139－150ページ．
[12] 中村：ある侍医の話――ロバート・レコードの場合，92年4月．
[13] 中村：ある顕官の話―― フランソワ・ヴィエトの場合，数学セミナ，93年3月，74－79ページ．
[14] 中村：和算――革命のプロシオン．
[15] 中村，松宮：今村知商の故郷．
[16] 清水達雄：拂，忽の広東音．
[17] 清水：和算のイエズス会起源説．

以下は反論.
[18] 鈴木久男：平山博士の仮説 ― 和算の起源はキリシタン ― について，珠算史研究，27 (1991.11).
[19] 吉田政美：平山博士の仮説を珠算による開平から考察する (2)，珠算史研究，28 (1992.6).
[20] 下平和夫：平山博士のスピノラ仮説について，珠算史研究，29 (1992.11)，3－16ページ.

初期和算書

[1]『古代数学集』日本古典全集刊行会，昭2＝1927.
上　割算書，塵劫記
下　諸勘分物第二巻，竪亥録，因帰算歌
[2]『割算書』日本珠算連盟，昭31＝1956.
[3]『塵劫記』大阪教育図書，昭52＝1977.
[4]『塵劫記』吉田光由著，大矢真一校注，岩波文庫，1977.
[5]『竪亥録仮名抄』下平和夫監修，佐藤健一著，研成社，1988.
[6]「江戸初期和算選書」下平和夫監修，研成社，第1巻，1990. ①下平『江戸初期和算書解説』，②『算用記』原書印影と現代語字，佐藤健一校注，

③『塵劫記』寛永十一年小型四巻本，勝見英一郎校注．
第2巻，1991．①『割算書』西田知己校注，
②『因帰算歌』中山陽子校注，
③『万用不求算』吉田政美校注，
④『算元記』北邑一恵・上野尚亨校注．
第3巻，1993予定．①『諸勘分物』蔵持信朗校注，
②『古今算法記』清水布夫校注，
③『算法勿憚改』佐藤健一・西田知己校注．
第4巻．①『諸算記』鈴木久男他校注，
②『円方四巻記』大山誠・大竹茂雄校注，
③『算法発蒙集』藤井康生校注．
第5巻．①『参両録』，②『改算記』，③『算学級聚抄』．
第6巻．①『格致算書』，②『童介抄』，③『股勾弦鈔』．
第7巻．①『新刊算法起』，②『四角問答』，③『数学乗除往来』．
第8巻．①『算法至源記』，②『算法明備』，③『算法直解』．
第9巻．①『竪亥録』，②『九数算法』，③『九数算法付録』．
第10巻．①『算法闕疑抄』，②『方円秘見集』，③『算法根源記』．

第11巻. [1]『算爼』, [2]『発微算法』, [3]『算学啓蒙』.
[7]『算爼』[原書所影と現代活字と] 現代訳と解説, 佐藤健一, 研成社, 1987.
[8] (明) 程大位『[新編直指] 算法統宗 校释』梅荣照, 李兆华 校释, 安徽教育出版社, 1990.

『算用記』の出現

[1] 大矢真一: 寛永五年版『算用記』について, 科学史研究, 7号 (昭18. 11), 105-6ページ.
[2] 下平和夫: 『割算書』は毛利重能の創作か, 科学史研究, II期7巻, 85号 (1968春), 32-7ページ.
[3] 神田茂: 元和版の竜谷大学本「算用記」—— 日本で一番古い刊本和算書, 数学史研究, 6巻1号, 通37号 (1968. 4-6), 48-54ページ.

明代の数学

[1] 武田楠雄: 中国の民衆数学, 自然, 1953. 9月号.
[2] 武田: 明代における算書形式の変遷 —— 明代数学の特質序説, 科学史研究, 26号 (1953. 7), 13-19ページ.

[3] 武田：明代数学の特質 ── 算法統宗成立の過程，I，科学史研究，28号（1954.4），1−12ページ．II，同，29号（54.5），8−18ページ．

[4] 武田：同文算指の成立，同，30号（54.7），7−14ページ．

[5] 武田：天元術喪失の諸相 ── 明代数学の特質III，同，34号（55.4−6），12−22ページ．

[6] 武田：東西16世紀商算の対決，（1），同，36号（55.10−12），17−22ページ．（2），同，38号（56.4−6），10−16ページ．（3），39号（56.7−9），7−14ページ．

[7] 武田：数学史上のクラビウスの地位，同，41号（57.1−3），1−4ページ．

[8] 武田：中国の数学 ── 世界史的視野にたって，遺稿，1956，未完，数学史研究，5巻2号，通巻34号（1967.7−9），1−39ページ．

[9] 大矢真一：武田楠雄氏を悼む，同，同，39−40ページ．

[10] 清水達雄：中世数学の発見　武田楠雄氏の最近の業績，月報（新数学人集団ほか），2号（1953.10），4−5ページ．

イエズス会

[1]『イグナチオ・デ・ロヨラ　カラー・ブック』エンデルレ書店，1978.
[2]『イグナティウス・デ・ロヨラ』垣花秀武，講談社，人類の知的遺産27，1984.
[3]聖イグナチオ・デ・ロヨラ『霊操』エンデルレ書店，1956.
[4]『イグナチオ・ロヨラ書簡集』中村徳子，ボネット訳，イエズス会ペンクラブ，1972.
[5]『聖イグナチオ・デ・ロヨラ書簡集』イエズス会編，平凡社，1992.
[6]『聖フランシスコ・デ・ザビエル書簡抄』アルーペ神父，井上郁二訳，岩波文庫，上下，1949.
[7]『聖フランシスコ、ザビエル全書簡集』河野純徳訳，平凡社，1985.
[8]『聖フランシスコ・ザビエル全生涯』河野純徳，平凡社，1988.
[9]『耶蘇会士日本通信，京畿篇』（昭2，駿南社）改訂复刻，雄松堂，1966.
[10]『イエズス会士日本通信　豊後・下篇』井上近次郎訳，

（豊後は明44，帝国教育会，下は大15，長崎市役所），柳谷武夫編輯版，雄松堂，新異国叢書，上1968，下69.
[11]『イエズス会日本年報』村上直次郎訳，柳谷武夫編輯，雄松堂，新異国叢書，上69.
[12]『元和五・六年度の耶蘇会年報』浦川和三郎訳，東洋堂，昭19＝1944.
[13]『十六・七世紀イエズス会日本報告集』松田毅一監訳，同朋舎，第Ⅰ期，第1巻1987，2巻87，3巻88，4巻88，5巻88，第Ⅱ期，第1巻90，2巻，3巻，… 第Ⅲ期，…
[14]ルイス・フロイス『日本史 キリシタン伝来のころ』柳谷武夫訳，平凡社，東洋文庫，1：1963，2：65，3：66，4：70，5：78.
[15]ルイス・フロイス『日本史』松田毅一，川崎桃太訳，中央公論，1豊臣秀吉篇Ⅰ，2同Ⅱ77，3五畿内篇Ⅰ普及版81，4同Ⅱ同，5同Ⅲ同，6豊後篇Ⅰ78，7同Ⅱ同，8同Ⅲ同，9南九州篇Ⅰ79，10同Ⅱ同，11同Ⅲ同，12同Ⅳ80.
[16]ヴァリニャーノ『日本巡察記』松田毅一他訳，平凡社，東洋文庫，1973.
[17]『イエズス会士中国書簡集』矢沢利彦編訳，平凡社，東洋文庫，全6巻，1康熙1970，2雍正71，3乾隆72，4社会73，5紀行74，6信仰74.

[18]『中国の医学と技術』矢沢，平凡社，東洋文庫，77.
[19]『中国の布教と迫害』矢沢，平凡社，東洋文庫，80.
[20]『中国陶瓷見聞録』ダントルコール著，小林太市郎訳注，佐藤雅彦補注，平凡社，東洋文庫，1979.
[21] マッテーオ・リッチ『中国キリスト教布教史』川名公平訳，矢沢利彦注，平川祐弘解説，岩波，大航海時代叢書，第II期のうち. 一，1982. 二，83（後半は，アルヴァーロ・セメード『チナ帝国誌』矢沢利彦訳注）.
[22] 平川祐弘『マッテオ・リッチ伝』平凡社，東洋文庫，1：1969. 2未刊.
[23] クーパー『通辞ロドリゲス』松本たま訳，原書房，1991.
[24]『日本大文典』ロドリゲス原著，~~土~~井忠生訳注，三省堂，1955.
[25] ロドリゲス『日本文典』東京勉誠社，1956.
[26]『日葡辞書』土井忠生編訳，岩波，1980.
[27]『日葡辞書 ボドレイ文庫本』亀井孝解説，勉誠社，1978.
[28]『羅葡日対訳辞書』福島邦道他解説，勉誠社，1979.
[29] Lexicon Latino-Iaponicum depromptum ex opere cui titulus Dictionarium Latino-Lusitanicum ac Iaponicum typis primum mandatum in Amacusa in Collegio Iaponico

Societatis Iesu anno Domini M. D. XCV. nunc denuo emendatum atque auctum a Vicario Apostolico Iaponiae, Romae, MDCCCLXX. (Praefatio : B. Petitjean).
[30]『吉利支丹文学集』新村出，柊源一校注，朝日新聞社，日本古典全集，上1957，下60.
[31]『カルロ・スピノラ伝』宮崎賢太郎訳，キリシタン文化研究会，1985.

一般

[1] 海老澤有道『洋樂伝来史』日本基督教団出版局，1983.
[2] 大阪府立図書館編『南方渡海古文献図録』昭18，復刻版，臨川書店，1992.
[3] 林屋辰三郎『角倉素庵』朝日，評伝選，1978.
[4] 遠藤寛子『きりしたん算用記』PHP，1976.
[5] 片岡弥吉『浦上四番崩れ，明治政府のキリシタン弾圧』筑摩書房，グリーンベルトシリーズ，1963.
[6]『岩波 仏教辞典』中村・福永・田村・今野編，1989.

含意について

足立恒雄（早稲田大学理工学部）

§１　数学における含意の導入

含意ｐ⊃ｑを¬ｐ∨ｑと解釈するのは自然言語の感覚からはずれたところがあるので、数学の入門書ではいくつか工夫を凝らしている場合が多い。

適当な日常生活上の実例を挙げて¬ｐ∨ｑが妥当で自然な解釈なのだとしている本もある（例えば、松坂和夫『数学序説』）。これは算術を物との対応で説明するのと軌を一にしているのだが、含意の場合はあまり成功を収めない。例えば、

「悪魔が大統領に選ばれるならば、米国国民の精神的幸せに資するところ大である」

というパースの挙げた例によっても知られるとおり、前件が偽だから推論は正しいというのが果たして「自然である」といえるか疑問である。

また、ｘ＞５⊃ｘ＞２あるいは

$$\forall x\,[x>5\supset x>2]$$

によって「偽⊃偽」および「偽⊃真」が正しい推論であることを理解させる方法がある（例えば、［Ｌｕ］）。これは後に説明するようにformal implicationと呼ばれる場合なので説得的ではあるが、しかし、

$$\forall x\,[x<5\supset x<2]$$

という偽命題にも「偽⊃偽」という組み合わせは起こり得るので、「偽⊃偽」が正しい推論であるという証拠にはなり得ない。

もっと歴史的考察をも加え、なぜ数学では含意ｐ⊃ｑを¬ｐ∨ｑと定義して構わないのか考えてみる必要があるのではないだろうか。

§２　古代における仮言命題（Hypothetical Proposition)

Cicero, Sextus Empiricus（２Ｃ頃）等の伝えるメガラ派のDiodorusとPhilo の大論争（BC.3C:［Ｋ－Ｋ］p.130fによる）。この論争は世間で大変有名であったので、烏さえもが条件文の性質をカーカー論じているという詩があるという。Zenoによる、”If P then q. If p then¬q. Therefore it is impossible that p. ”という論法からconditionalsに注意が向けられるようになったと思われる（パラドクスに対する関心）。正統な、つま

りプラトン、アリストテレスの流れからは含意に関する特異な主張は出なかった。

Philo は現在言う真理関数的な仮言命題を主張したとSextus Empiricusは伝えている：「フィロンは言う；真に始まり、偽に終わるのでなければ、条件文は正しい（sound)、例えば、今昼で、私が議論しているとしたら、『今昼ならば、私は議論している』はsoundである。Diodorusは言う；真に始まり、偽に終わることができない、あるいはできなかった条件文がsound である。だから、今昼で、私が沈黙してしまったとき、先の文は真に始まり、偽に終わるので、偽である。ところが、次は真であろう；『原子が存在しないならば、原子は存在する』。なぜなら、これは偽に始まり、真で終わるからである」。これに続いて『今は昼ならば、今は昼である』が真と主張する派と偽と主張する派の意見が紹介されている。

⊃は単なる命題を合成して複合命題を作るだけだと解釈するか、前件から後件が帰結されていると解釈するかで、以後長く論争が続いたが、科学用の記述言語としては自然言語は欠陥があるから、真理関数的に定義するのが単純明解で都合が良いというFrege の見解が今ではごく一般的な見方である。しかし、科学という言葉の意味は非常に広がっているから、社会問題、言語、人工知性の問題を扱う立場から言えば、自然言語との関連は無視できないと考えられるので、現在でも条件文の問題がなくなったわけではない。

［Ｐ］ではDiodorusは常識的な解釈（論理的連鎖）を考えたとし、ヨーロッパ語ではこうとるのが当然であるとしている。

論理的に帰結できるときに、ｐ⊃ｑであると定義してみよう。

斜辺と辺がcommensurable ならば、偶数が奇数と等しい。

は論理的連鎖がないように見えるけれども、実は　２が無理数であることを証明するときに現れる。俗にも

風が吹けば、桶屋が儲かる

という例がある。そういうわけでフィロン派は全知という状態で何を意味するかを考えることで仮言命題の研究をすべきだと主張してきた（［Ｐ］）。

例文（５）のように具合の悪い場合もあるが、その具合の悪さは重要ではない。しかしDiodorusの見解がうまく修正できれば、より好ましいものになるかもしれない（［Ｐ］）。

真理値を考える際、ｐが偽の場合は真理値がない（真でも偽でもない、その場合は何も述べていない）とすれば常識的なようなものだが、それでは対偶が真であるということが言えなくなる。数学的に考えても、関数に値がないというのは都合が悪い。

§３　自然言語の条件文の論理学的解釈に困難が伴う理由

条件文の解釈が難しい理由をいくつか挙げてみよう：

(1) ぴったりした否定形がない。

(2) 前件、後件の真偽が分かっている場合には通常は条件文を使わない。

(3) 用法が多様である。

(4) 前件と後件が無関連な場合に条件文を作ることは少ない。

(1) について：条件文は誘導推論を伴いがち。数学における例では、誘導推論は起こしにくい。否定文は理由文や、事実的、あるいは仮定的譲歩文などとなる（用例参照）。

(2) について：前件、後件の真偽が定まっている場合は理由文、譲歩文、仮定的条件文などが用いられる（用例（１）参照。これはタルスキの本から引用）。

(3) について：用例参照。これを一貫した背後にある論理の流れを見つけ出して説明する試みは認知科学で試みられている（例えば［Ｓ］）。

(4) について：用例（４）などはナンセンス。

自然言語では暗黙の前提、知識などが数多く存在する。また間違い易さの度合いが対象となる文の抽象度、なじみ易さなどによって大変異なる。人間は論理で理解したり、説得したりしているのではないらしい。だから機械に会話をさせるためには論理を教えこんでもほとんど意味がない。しかし、自然言語の背景にある論理はどういうものかは興味のあるところである。

(4) のように前件と後件が無関連な場合に「ならば」という言葉を使うことには、心理的抵抗があって、これが特に素人に真理関数的な定義を受け入れがたくさせている原因の一つとなっているが、そのほかにも偽からは任意の命題が帰結される（任意のＢに対して $A \wedge \neg A \supset B$ ）というのも真理関数的定義を不愉快にしている原因であろう。これについては、後述。

§４　Principia Mathematica －material implicationとformal implication

ＰＭにおいて $p \supset q$ は $\neg p \vee q$ で定義されている。これはすでに珍しいことではなく、中世以来の伝統を経て、単純にして明快な定義がしだいに優勢となっていったのである。

「ｐでかつｐ⊃ｑならば必然的にｑを得ることから、ｐ⊃ｑはp implies q と読むことにする」。さらに

$$(x)[p(x) \supset q(x)]$$

なる場合 p(x) formally implies q(x) という。formal implizationによって含意の定義の持つ不愉快さがかなり程度解消されることは事実である。formal implicationと区別して先のｐ⊃ｑはp materially implies qという（実質含意と訳されているが、物質含意というのが原意に近いのではないだろうか）。これらは［Ｗ－Ｒ］の命名であるが、その由来を推測してみよう。

中世における推論形式の研究にconsequentiaという理論があった。代表的人物としてはOckham,Pseud-Scot 。consequentiaにはmaterialisとformalisの２種類があった。中世ラテン語のformalisにはproperという意味があるという（以上［Ｋ－Ｋ］による）

materialisがどういう意味を持つのかはわからないが、実質という意味でないことは確かである。

なおScot（とされている人物）は矛盾からはどんな命題でも従うことを次のように証明している：

①「ソクラテスは存在する」ならば「ソクラテスは存在するか、あるいは人間は驢馬である」が成り立つ。

②「ソクラテスは存在するか、あるいは人間は驢馬である」が成り立つとして、「ソクラテスは存在しない」を仮定すれば「人間は驢馬である」ということになる。

③故に「ソクラテスが存在し、かつソクラテスは存在しない」ならば、「人間は驢馬である」が成り立つ。

ラッセルは講演途中で「1=0 ならあなたは法皇であることを証明してくれ」と言われて即座に証明したというような話を読んだことがあるが、ラッセルはこういう古典に通じていたのではなかろうかと思われる。

Scotの証明は大変説得的であるから、$p \wedge \neg p$ からｑが帰結されることを否定するためには大きな代償を払わねばならないことを示している。この命題は、仕方なく認めている煩わしいものではなく、それ自身正しい原理の反映であると考えたい。「そんな間違ったことを認めたら、どんなことでもして良いということになりますよ」と言いたい気持を反映する原理を含んでいるというべきである（以上［Ｈ－Ｃ］による）。

例えば、「ｐならばｐ∨ｑ」は無駄な推論で、こんな推論は実際には使われないように

見えるけれども、数学ではしばしば現れる推論である（［G］参照）。

§5　様相論理

1912年以降、Lewis はＰＭにおけるmaterial implicationの概念に不満を表明して、一連の論文と著書を出版した。含意にはもっと強い意味があるとして、strict implication（厳密含意）の概念を導入した。［L－L］では可能性を原始様相記号として採用している。

Ackermann は厳格含意（rigorous implication）の概念を導入している（［H－A］に簡単な解説がある）。この体系では$p \wedge \neg p \Rightarrow q$は証明できない。

§6　古典数学における含意

古典数学ではニュアンスというものは考慮されていないから、誘導推論が起きにくいので、条件文の否定命題が作りやすい。つまり、$p \supset q$の否定は（背理法による証明を振り返ればわかるように）$p \wedge \neg q$である。故に、この形の否定命題を取って、$p \supset q$の定義を$\neg p \vee q$とすれば良いことがわかる。数学の入門を講じるに際して、古典数学ではこの形式でしか含意を使わないことを何度か確認すれば納得が行くはずである。

<u>条件文用例</u>

（１）Every metal is malleable.

If x is a metal, then x is malleable.

Since iron is metal, it is malleble.

Although clay is not a metal, it is malleable.

If wood were a metal, then it would be malleble.

（２）１万円くれたら、あなたに投票する。

（否定は「たとえ１万円もらっても、あなたには投票しない」か？）

（３）フランスの現在の王様ははげである。

（４）２が３より大きければ、東京は日本の首都である。

（５）もし君がフェルマー問題を解いたら、逆立ちして世界一周するよ。

（６）彼が謝罪するなら、彼の無礼を許してやろう。

（誘導推論）彼が謝罪しないなら、彼の無礼は許してやらない。

（７）（誘導推論を起こさない例）フランスにいったら、まずルーブル美術館を訪れる。

（８）（理由文）おまえが警察に知らせたから、子供は死んだのだ。

（誘導推論）おまえが警察に知らせなかったら、子供は生きているはずだ。

（９）（無関連）300 円持っていれば、100 円のりんごが２個買えるね。

（否定）300 円持っていなくても、100 円のりんごは２個買えるさ。

(10)（誤解）甘いものをたくさん食べれば、歯が丈夫になる。

（否定）冗談じゃない、甘いものをたくさん食べれば、歯が悪くなるよ。

(11)（過大評価）ナポレオンが原爆を持っていたら、戦争に勝っていただろう。

（否定）いや、ナポレオンには原爆の使い方が分からなかったさ。

(12) 神が存在しなければ、この世は空しい。

神が存在しなくても、この世は空しいとは限らない。

神が存在しても、この世は空しい。

神が存在しようがしまいが、そんなことはこの世が空しいかどうかに関係ない。

(13)（疑似条件文）よろしかったら、冷えたビールもありますよ。

文献

[K－K]　W.kneale-M.Kneale, The Development of Logic, Oxford, 1962

[P]　C.Peirce, Collected Papers, Harvard, 1933, vol.III, 441-444

[F]　G.Frege, Collected Papers on Mathematics,Logic,and Philosophy, Basil Blackwell, 1984

[Ru]　B.Russell, The Principles of Mathematics, London, 1903

[W－R]　A.N.Whitehead-B.Russell, Principia Mathematica I- III , Cambridge, 1910 -13

[Lu]　ウカシェーヴィチ『数理論理学原論』(文化書房博文社) 1992 (原著：J. Lukasiewicz, Elementy logiki matematycznej, 1929)

[G]　G.Gentzen, The Collected Papers of Gerhard Gentzen, North-Holland, 1969 (ゲンツェンの論文集の英訳)

[L－L]　C.I.Lewis-C.H.Langford, Symbolic Logic, 1932

[H－A]　ヒルベルト＝アッケルマン『記号論理学の基礎』（大阪教育図書）1974

（原著：D.Hilbert-W.Ackermann, Grundzuge der theoritische Logik, 6 Auflage)
［Ｒｅ］　ライヘンバッハ『記号論理学の原理』（大修館書店）1982　（原著：H. Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, 1947)
［Ｈ－Ｃ］　ヒューズ＝クレスウエル『様相論理入門』（恒星社厚生閣）1981　（原著：G.E.Hughes-M.J. Cresswell, An Introduction to Modal Logic,1968)
［Ｃ］　A.Church, Introduction to Mathematical Logic, Vol.1, Princeton, 1956
［Ｓ］　坂原茂『日常言語の推論』（東京大学出版会）1985

<u>文献解説</u>

［Ｋ－Ｋ］　論理学史研究の必携書。フィロンとディオドロスの仮言命題に関する論争を詳述。consequentiaについても詳しい記述がある。

［Ｐ］　フィロン派とディオドロス派に関する考察。

［Ｆ］　Beitrage zur Philosophie des deutschen Idealisumus I(1918-19) の仮言命題に関する考察を含む部分がLogical Invesigations という題名の元に英訳されている。¬¬p ⊃p も当然とは見なしていない。

［Ｒｕ］　material implication(p⊃q)をprimitive symbolとして、logic の体系が構成されている。Ch.3 Implication and Formal implication が重要。Frege 発掘の書としても有名。

［Ｗ－Ｈ］　記号論理学の聖典。ここから現代の厳密な論理学が始まった。Lewis の様相論理もこの書のmaterial implicationに対する不満から生まれたという。

［Ｌｕ］　推論規則と命題との明確な区別はウカシェーヴィチによって初めて認識された。真理表も３値論理を対象として使われている。

［Ｇ］　特に、The consistency of elementary number theory では、ユークリッドの素数定理の証明を厳密に分析して、問題のある推論、ない推論とは何かを論じている。含意、否定が網状になると矛盾を起こす可能性があるとして、無矛盾性の必要性を説明。

［Ｌ－Ｌ］　現代様相論理の原典。VIII. Implication and Deducibilityの考察が重要。

［Ｈ－Ａ］　アッケルマンによる厳格含意（strenge Implication)の研究が紹介されている。

［Ｒｅ］　法則的含意と外延的含意の区別を与え、自然言語を法則的含意の概念で分析

する。構文論、意味論、語用論の解説も明快。

［Ｈ－Ｃ］　様相論理学の解説書。特に、付録２「帰結と厳密含意」は重要。例えば、ｐ．￢ｐ⊃ｑが認められないような論理体系はありえないことを指摘。

［Ｃ］　文献を捜すときに必要。同著者のA Bibliography of Symbolic Logic, J.Symbolic Logic(1936)も重要。

［Ｓ］　自然言語、とくに条件文の語用論的分析。論理学の知識を使って、条件文を理解するというふれこみ。これは情報科学、言語学、認知科学の研究領域。

Ｌｉａｒの系譜

上村義明（京都産業大学　理学部）

§１「うそつき」の起源

●うそつき
真理と循環をめぐる論考

ジョン・バーワイズ
ジョン・エチュメンディ◉著
金子洋之◉訳

四六判，xiv＋286ページ
1992年5月発行，3090円(税込)
産業図書

「うそつき」＝“ミノタウロス”？

この等式を仮定するとクレタ文明の意味が露になるという説がある．クレタのエピメニデスが「クレタ人は常にうそつき」と言ったときから話がおかしくなった．その昔クレタ王ミノスは名工ダイダロスに迷宮ラビリントスを作らせ，この怪物を閉じ込めた．後にアテナイのテーセウスがこれを退治したといわれるが，場所が迷宮，相手が「うそつき」とあっては真偽のほどは推りかねる．

数学なんかどうでもよかった中世は平和であったが，あのカントールが節度を失って対角線論法を取り上げると，よみがえったミノタウロスは彼を精神病院に押し込め，ラッセル・パラドックスに変身してフレーゲを消耗させ，ゲーデルの不完全性定理と化してヒルベルトに打撃を与え，チューリングの停止問題を決定不能にした．数学者達はあわて，ブラウワーは直観主義を唱え，“カントールの楽園”を守る現代のダイダロス達はZFC集合論を作って再び怪物を封じ込めた．

しかしいつの時代にもテーセウスはいるもので，バーワイズ達がまたもやミノタウロスに挑んでいる．今度のアリアドネの糸毬はオースチン由来の状況意味論とアクツエルのZFC/AFA (anti foundation axiom)集合論である．

面白いことにこれが両方ともコンピュータにからむのである．状況意味論は状況に関する局所変数を露にさせて意味を救済するが，おそらく“言語”を前にしてバーワイズがロジックから転身を余儀なくされた由縁のものであり，アクツエル集合論は循環現象のモデル作りに不可欠で，ZFCの過剰防衛から循環を救出する能力を有する．直観主義も論理直輸入型でコンピュータに迫る向きには今や花盛りであるが，しかしバーワイズのように事の本質をみてとると，“言語”が実世界の存在であることが気になるのである．ともあれ“環境”ぬきにはゆかないのだ．

アクツエル集合論も元を正せばチューリング賞のミルナーのいわゆるSCCS理論のモデル作りをよくみての岡目八目という出自をもつから何か必然の流れにある．であってみれば現代のミノタウロスはコンピュータかもしれない．いやはや「うそつき」についてとんだホラを吹かせてもらった．

追記　「うそつき」の意味の救出はパラドックスの解決法としては“隠れた変数”の理論にあたる．量子力学のパラドックスはベルの不等式がからんで，局所的な隠れた変数の理論は実験的に否定される．非局所的な理論を要する本格的なパラドックスと言わねばなるまい．

上村義明(うえむら よしあき／京都産業大学)

左は１９９２年の数学セミナー１０月号に載った書評であるが勿論、うそつき＝ミノタウロスという説などはない。そういう説があれば与したいというのが本音である。そこで何故そんなホラまで吹いたのかというのが本題である。

「クレータのうそつき」の出典は新約聖書のテトス書：「テトスへの手紙」である。パウロがクレータに残して来た弟子テトスにあてた手紙とされている。その道の権威によれば、これはパウロの筆になるのではなさそうだが、それはこの際どうでもよい。共同訳によれば、そのくだりは次の通りである。

"彼らのうちの一人預言者自身が次の様に言いました。「クレータ人はいつもうそつき、悪い獣、

怠惰な大食漢だ」。この言葉は当たっています。"

こういわれるとミノタウロスに符合するから不思議である。ギリシャ神話によれば、ポセイドンが送った牡牛とミノス王の妃パシパエが交わって生まれたとされるミノタウロスは牛頭人身の怪物で９年毎にアテナイの少年少女１４人を犠牲に供させたといわれる。

アレキサンドリアのクレメンス（２世紀）によると、ここで引用されているのはクレータ島の詩人哲学者エピメニデス（紀元前５００年頃）の詩の一節だそうで、彼は奇跡を行なう宗教教師であったがペルシア軍のギリシャ遠征（紀元前４９０年）の失敗を予告しそれが的中したので預言者の評判を得たと言われる。引用句の前半はカリマコス（紀元前３０５年－２４０年頃）の詩にも現われる。カリマコスは不死であるべきゼウスの墓がクレータ島にあると主張するクレータ人に憤り「クレータ人はいつもうそつき」と言う。この諺は人口に膾炙していたらしく「クレータ人のようにする」（クレティゼィン）は「うそをつく」ことを意味する俗語であったようだ。一方数学者のワイルはディオゲネス・ライエルティウス（紀元前３世紀）のギリシャ哲学者列伝の証言としてミレトスの人ユウブリデス（メガラ派のエウクレデスの弟子）が「うそつき」の論理の発明者であるとしているが、それは次の様な次第である。ディオゲネス・ライエルティオス「ギリシャ哲学者列伝」第２巻第１０章ユウクレイデス（岩波文庫）の一節に

”ところでユウクレイデスの学派にはミレトスの人ユウブリデスも属している。この人は問答形式による数多くの詭弁をつくり出した人である。すなわち「嘘つき」「気づかれていない者」「エレクトラ」「蔽いをされているもの」「穀物の堆積」「角ある者」「禿頭」という詭弁がそれである。・・・また、ユウブゥリデスはアリストテレスとも論争して、彼をさんざんに誹謗したのであった。”とある。

ここで述べられている「うそつき」についてキケロ（前一世紀）[9]には

"もし君が、自分は嘘をついていると言い、そして本当のことを言っているのだとしたら、君は嘘をついているのだ。ところが、君は、自分は嘘をついていると言い、そし

て本当のことを言っている。それゆえ、君は嘘をついているのだ。" とある。これを見てもわかるように「うそつき」のニュアンスは今日の「うそつき」とはかなりちがう。ワイルのいう様に[6]これが「うそつき」の始まりとしても、これから「クレータのうそつき」への距離は容易でない。又、クレータという固有名詞を偶然によらずに導入するには相当の理由がいる。

ワイルの言うようにクレメンスはＡＤ１５０－２１１頃の人でアテナイ生れの教父でアレクサンドリア教校の校長であったし、エピメニデスは前述のディオゲネス・ライエルティウスのギリシャ哲学者列伝にも登場するが父の命で迷羊を捜しに出かけたが昼の暑さに洞窟の中で５７年も眠っていたとか１５７オ－２９９才まで生きたとか伝説的な事柄のみで、勿論「クレータのうそつき」の話なんか一つも出てこない。だからワイルはエピメニデス説はクレメンスの"こじつけ"と理解したようである。しかし前述のようにエピメニデスの詩が現存していないにしても、カリマコスの例もあり、どうやらその時代に「クレータの嘘つき」が人口に膾炙していたことは認めねばなるまい。しかもユウブリデスの「うそつき」が「クレータのうそつき」に変形する過程を考えるのは偶然を持ち込んでも容易でなく、従って私はクレータに広く伝承されたものとしてあったと考えるのは自然に思えるのである。けれども「クレータのうそつき」がクレータに伝承されたものとして存在していた事を認めると事態は大きく変わり始める。

§２「うそつき」成立の背景

後に見る様に「クレータのうそつき」の内容の豊かさから考えて、この様な発想は個人なら巨人、そしてそれをささえる文化環境を想定せざるを得ない。ユウブリデスのメガラ派ではとても納得が行かないのもワイル説に反対する理由の一つである。

だとすればクレータにその様な巨人や文明が存在したであろうか？クレメンスがそこでエピメニデスをかつぎ出したのであろう。伝説的人物でギリシヤ７賢人に準ぜられることもある彼ならまあまあの人選であろうが、前述の様にワイルが反対するのも理由がある。それよりその背景になる文明の方が問題である。エピメニデスの前六世紀はミレ

トスのタレースをはじめとしてギリシャ７賢人達が勢ぞろいするギリシャ文化の発生期で彼らはそろってデルポイのアポローンの神殿に詣うで、有名な箴言"汝自身を知れ","度を過ごすこと勿れ"を奉納したと伝えられる（プラトンのプロタゴラス）。この箴言は「クレータのうそつき」と並べてみると問題意識として共通の文化圏の事象という印象が深い。そしておそらく七賢人達がかすかに感じとっていた、前時代の輝ける遺産であったのではなかろうか？ホメロス風「アポローン讃歌続編」の伝えるところよるとアポローンはデルポイを神殿の場所に定めるとアークリータース岬沖をピュロスに向けて航行中のクレータのクノーソスの商人達の船にイルカに似た怪物となって飛び乗りペロポネーソス半島の西海岸を北上させコリントス湾のクリーサに入港させる。アポローンは「神官達」を探し求め彼らに白羽の矢を立てていたのである。デルポイの神殿の神官はクレータ人だったのである。このことはデルポイの発掘からも認められている。有名な箴言は彼らによってクレータからもたらされたのかも知れない。「クレータのうそつき」とアポローンの箴言をならべて見るというのはそれ程荒唐な試みではないのである。しかも自己参照、適用限界、「嘘つき」はアポローンの死の神学の解釈よりは素直で透明である。（同時代の中国の聖人孔子は「述べて作らず、信じて古を好む。ひそかに我が老彭に比す」と言っている。老彭は殷王朝の賢大夫である。）

すでに前８世紀の人とされるホメーロスは「イリアス」「オディセウス」をものしていた筈だが、人々はそれが前１４－１３世紀に実際にあった事件とは知る由もなかった。現在判明している様に前１１世紀から前９世紀に及ぶ暗黒時代をわずかな情報がトンネル効果のように伝えられていたと考えられる。それは口承詩の形をとり語り伝えられたのであろう。なぜなら線文字Ｂは既に忘れ去られ、新しいアルファベットがギリシャ全土に拡がろうとしていた前８世紀である。前８世紀のギリシャは小国が無秩序に割拠し、文化の程度がまだ低い段階にあった。住居は木や泥煉瓦で作られ絵画や彫刻の技法も原始的な段階に止っている。ところがホメーロスの描くギリシャは軍事上の連合が可能な秩序ある王国群から成っており王たちは黄金、象牙その他の稀少な素材で飾られた豪荘な石造りの王宮に住んでいる。ヘーパイストス神がアキレウスのために作った盾に描か

れていたとされる情景などは高度な芸術的力量をうかがわせるものである。これはミュケーナイ時代少なくとも紀元前１２世紀より正確には１３世紀あたりまで遡らねばならない。[4] ところがクレータにはそれに先がけてミノア文明が存在していたことが知られている。前１６世紀ミノア文明はギリシャ本土に著しい影響を及ぼした。本土の文明が美術や工芸品の分野で洗練されたものとなったのは、すべてクレータの影響によるものらしい。ギリシャ人は好戦的で武器や狩猟を好んだが、ミノア人は天然の守りもない地に建てた開放的な宮殿に住んでいた（例えばクノーソス宮殿）。ミノア時代のスポーツで雄牛を相手とする競技がフレスコ画に書かれている。突進してくる雄牛の上を宙返りしてやり過ごすもので闘牛とちがって一人として武器を持たない。ミノア人は教養と節度を具えながらいささかも勇敢さに欠けることのない人々であった。クレータ島は前１６世紀のある時期に大地震に見舞われる。テーラ島やクノーソス、パイストスなど各地に被害の跡らしきものが認められるがやがて復興し繁栄が続く。前１５００年頃再び地震。これは前回程大きくはないが火山の大爆発がテーラ島で起きた。当時テーラは直径１６Ｋｍの島で休火山、数ケ月後火山が活動し始め、降灰、最後の大爆発で山全体が吹き飛び海水が侵入し、津波を起こす。アナーフィ島（テーラの東方２７キロの地点）で軽石の層が標高２５０ｍのところに残っている。ミノア艦隊は壊滅したかもしれない。前１４５０年クノーソスを除くクレータ全土でミノア人の建物が炎に包まれた。おそらくギリシャ人がミノア勢力の拠点を破壊した可能性がある。しかしギリシャ人達はミノア文明をよく受け継いだようだ。前１５世紀までクレータにはギリシャ語を話さぬ人が住んでいた。彼らの言語が文字によって書き残されておりギリシャ語でない事は確かとされている。粘土版やその他の刻文に線文字Ａと呼ばれる文字で書かれている。この言語はクレータの多くの地域で発見されている。エーゲ海諸島、ケオース、キュテーラ、メーロス、ロドス、わけてもテーラに住んでいた事は明らかである。ミケーネの支配がミノア文明を覆ったときミケーネは既にミノアの影響を充分受けていた。従ってミノア文明の水準はこれによって低下しなかった様である。クノーソスが破壊をまぬがれていることも大きい。その後線文字Ａに代わって線文字Ｂが記される。しかし線文字Ｂはギ

リシャ語であることが判明している。後期ミノア文明の遺物をみると彼らの精神的高さが並大抵でないと思わざるを得ない。（例えばアテネ考古学博物館蔵のテーラ島の「西の家」出土の壁画をみよ）。

それを見ると、彼らはその深みで「クーレタのうそつき」に到達したに違いないとしきりに思われるのである。筆者のささやかな禅の修業の体験から類推して古代人達の神秘主義的な修業体系は己事究明、真理追及の方法として決して現代科学の諸方法に比べて見おとりのするものではない。特に人間、自己にかかわる分野ではしかりで、これに代わる方法を現代科学は発見していない。それ故、古代人達が到り得た領域や認識の深さを甘く見てはならないと思う。（カスタネーダ著「呪術師ドンファン」、中沢新一著「チベットのモーツアルト」等参照）シュリーマンのトロイ発掘がそしてミケーナイ発掘がミケーネ文明を明るみに出した様な物証はないし、今後見出されそうにないからトロイ発掘前のシェリーマンの様に問題にすらされないのかも知れない。

特にワイルが"数学と自然科学の哲学"の中でユウブリデスを「うそつき」の発明者と認定してからは権威にさからうものはいない様である。真理が存在してそれが言語で表現できるとは限らないという認識は洋の東西を問わず神秘主義的傾向の中であまねく存在していたが、古代クレータ人は、なぜ表現出来ないのか、又は表現出来ない例として「クレータのうそつき」をとらえていたフシがあるという筆者の主張は、一方言語と離れて真理というものが存在しており、言語はそれを表現しているに過ぎないとする枠組みの発見として重大な意味をもつことを同時に主張することになる。これは後のソクラテス、プラトンにイデアの形で引き継がれ逆にプラトニズムの名で呼ばれる数学の世界の実在を認知した最初として特筆すべき事柄なのである。それは丁度感覚の向こうにこれとは異なる物理的世界が実在することを認知する発見（これはエレア派のパルメニデスやゼノンに帰される功績と考えられる。特にゼノンのパラドックスは物理学と数学の分離にかかわるものである）と双璧をなす。筆者の主張には、従来、こちらの方だけが重視されてきたギリシャ科学史の歪みを正したいという願いも込められている。

地中海の中央に位置し肥沃な三角形、小アジアとの関係からその知的水準を推し量る

のもよいし、ギリシャ神話の主神ゼウスの生誕の地がクレータのディクテー山とされていることからもギリシャ文明全体に於ける位置が想像されよう。しかし物的証據は何もない。そこで以上の推論を強く裏付けるのは「クレータのうそつき」の内容の深さがとてもユウブリデスの手におえるものでないことを示すことによってしかあるまい。

§３バーワイズの「うそつき」分析

では今、バーワイズ達が到り得た「うそつき」分析の結論は何か？彼らは「うそつき」として"この命題は真でない"を取り上げる。「うそつき」は「クレータのうそつき」の洗練された形である。これは誰しも「クレータのうそつき」をひねりまわしていると見えてくる標準形の一つである。「うそつき」、カントールの定理、ラッセルの逆理、ゲーデルの不完全性定理を並べて眺めていると何か共通の似た構造が感ぜられる。事実既にローベルは後の三者が対角線論法という点で同一であることを示した。そしてバーワイズ達も「うそつき」が対角線論法であることを明らかにした。そして「うそつき」が最も難しいのである。ミノア人達はそれを直覚していたというのが筆者の主張であるが、それにはバーワイズ達の分析を先ず見なければならない。

先ず彼らはパラドックスの役割を高く買う。パラドックスは通常は表に現われないままにされている仮定を顕在化させ、それらの仮定を極端な事例においてテストせざるを得なくする。（デルフォイの箴言"度を過すことなかれ"が何を指しているか、それが"汝自身を知れ"に劣らず重視されている所以であろう。）パラドックスには共通の構造があり隠れたパラメータがあって、その値が考察の途中でずれて来てパラドックスに導くのであるとする。

例えば、私が午后４時だというのに相手が午后７時だと言い張る時、私がパラアルトに居、相手がボストンに居れば別に矛盾にはならない。つまり時計は地球上の場所というパラメータを明るみに出せば矛盾は解消する。ＡがＢの左に居るかＢがＡの左に居るかは見る人の位置による。相対論は同時性が観測者に依存することを明らかにした。つまり同時性は３項関係であって２項関係ではない。この３番目のパラメータを考慮に入

れるのが難しかったのである。ラッセルの床屋の逆理を見てみよう。"自分のひげをそれない人は皆そってくれる床屋がいる。" という文章は正しい命題を述べているだろうか？たしかに床屋自身が"皆"から外れてしまう。

"皆"を"オクスフォードに住む皆"とでも変えれば、正しい命題になる。ラッセルパラドックス

$$Z=\{\ x \mid x \text{ not}\in x\ \}$$

はパラメータのaを導入して各集合aに

$$Z=\{\ x\in a \mid x \text{ not}\in x\ \}$$

を対応させることにすればaがwell foundedならZ_a＝aだし、もしa={Max, Ω, a}のようにwell foundedでなければZ_a={Max}となってパラドックスは生じない。従って得られる教訓はZ_aは a のメンバーになり得ないのだから、"universalな集合"が存在しないということに過ぎない。Uがuniversalな集合であればZ_uはuのuniversarityからuに屈せねばならないが、そのこと自体がZ_uを u に屈せなくさせる。いいかえるとZ_uはuから対角線的にとび出る(diagonalize out of u)。

床屋がオックスフォードを対角線方向にはみ出るように、「うそつき」("この命題は真ではない")に於て彼らはオースチン流の見方とラッセル流の見方を対比させる。オースチン流の解決法はラッセル流でかくれていたパラメータをあらわにする。

ラッセル流ではこの部分が全世界をおおうと仮定している。ラッセルパラドックスが示しているようにすべての集合の宇宙というものは我々の認識の埒外にあって、従って「うそつき」は我々がすべての事実の宇宙についての言明が出来ないでいることを示しているのである。我々がラッセル流の見方をとる限り「うそつき」は世界の本質的な部分性の承認を迫る。即ち真ではないが、その虚偽性が事実の宇宙の外、「世界」の外にあるような命題が存在すると。

オースチン流の解決はラッセル流がそっとしておいて全体としての世界をそれにあてていたパラメータをあらわにさせて新しい命題概念を持ち出す。一旦この移行がなされると世界の整合性と総体性が保存される。すべての命題は真か偽となり、真や偽である

ことが世界内の事実であること、即ち命題によって特徴づけられる事実であることを妨げるものは何もない。「うそつき」は今や教訓であってパラドックスではない。

つまり、「うそつき」命題が偽であることは全体としての世界の完全にまともな特徴であるにもかかわらず、その命題がかかわる特殊な状況の特徴にはなり得ない。ここで「うそつき」が偽であることは、それが関与する限定された状況から対角線的にとび出すが、ラッセル的な対処では偽であるという事実が全世界からはみ出るように思われていた。ラッセル的見地からこのパラドックスを難しくしていたのは、こう思われていた事の外に、世界はすべての事を含むべきだという我々の直観である。ラッセル的見解では世界の全体性を放棄しなければならない。オースチン的見解ではその様な深い形而上学的見解は放棄する必要はない。しかし何かは捨てねばならない。そして捨てるのは、命題は一般に全体としての世界にかかわり得るという信念である。少なくとも「うそつき」がかかわる限りそうである。この放棄の結果は高くはつかない。反映定理というのがあってラッセル的世界に含まれるすべてのものを含む状況にかかわることが可能である。その上、そうした状況から踏み出して、その状況についての「うそつき」の振舞いを記述できる。

はじめに表現力の制限と思われていたものが実際にはより大きな表現可能性のための障害を取除くことになる。我々はもはや「うそつき」が偽であることを認識しつつもそれを表現出来ないという特異な地点を脱出したのである。

以上をまとめてみると

記述された"状況"を表わす変数を導入することによって「うそつき」がなぜこの様な不作法な振る舞いをするのかが明らかになる。もし「うそつき」が世界のある特定の部分について主張を行うために用いられるならば、そこで記述された部分の外に存在する一つの事実がつねに与えられる。これが対角線的に"とび出る"と呼ばれるものである。その結果「うそつき」以外の文が世界全体についての主張を行うために使用されることがあろうとなかろうとそのような主張のために「うそつき」文を使用することは単純にはできないのである。

以上がバーワイズ達の分析である。

§4　不完全性定理と「うそつき」

議論を締めくくる意味でゲーデルの不完全性定理と「うそつき」を対比させてみよう。

ある無矛盾な形式体系の中で「この命題は証明できない」(*)という命題を証明しようという形でゲーデルの議論は展開される。

この命題がまともな命題になるかどうかが肝心でゲーデルは、ゲーデル数をはじめとする技巧を駆使して実際にこの体系の中でまともな命題であることを構成してみせる。

あとは何でもない。

この命題が証明できるとすると、「この命題は証明できない」が真となるので、矛盾。よってこの命題は証明できない。そこで真ではあるがこの体系の中で証明できない命題が存在することになる。又この命題の否定が証明できたとすれば、偽な命題が証明できた事になって無矛盾性に反する。よってそれ自身もその否定も証明できない真なる命題が存在することになり不完全性定理が成立する。即ち、この命題の証明可能性が対角線方向に体系をとび出すのである。幸にも "証明可能性" の概念は "その形式的体系" に依存する。これが隠れたパラメータになって形式的体系が変われば証明可能性も変る。

だから完全性を破壊しているこの命題を新たに公理として加えた体系を作ればそれは証明可能となる。

勿論、そこで上と同じ命題を作れば隠れたパラメータ "この体系に於いて" が効いて上と同様な議論が成立し、……この様な事情が繰り返される。

ところで「うそつき」ではどうなるだろうか？　「この命題は真ではない」。またもやこの命題はまともな命題であるかが問題になる。バーワイズ達はまともとして前進する。ここでは真偽が正面に立っているので隠れたパラメータ理論で切り抜けるには真偽

$\sim {}^{\exists}x[\Pi_x \text{ proves } P_k(k)] = P_k(k)$

をパラメータ化しなければならない。

いきなり"真偽"であるから間に一つ層をはさむ発想がやりにくく「うそつき」を難しくしていたのである。

恐らくゲーデルは「うそつき」を見て"真"を"証明可能"におきかえれば、命題に意味を持たせることが可能と考えて不完全性定理に到達したのであろう。彼自身「うそつき」との類似性を指摘している。

バーワイズ達は自然言語の枠組の中でゲーデルと同じ仕事を遂行したのである。鍵は隠れたパラメータの発見にかかっていた。そういう次第であるから理論構築にはゲーデル並の技巧が要求される。詳細は"the Liar"に依るしかないが、その粗筋を付録1に抜粋しておく。

§5　まとめ

問1　「クレータのうそつき」については古代ギリシャでは引用された例がないが？

答　「クレータのうそつき」はミノア文明の最盛期に恐らく線文字Aのクレータ人達によって発見された（又は発話された）のではないかと考える。

ミケーネとミノアの関係が逆転して以来、即ちミケーネがクレータを支配するに及んで、（ＢＣ１４５０年頃）これはクレータ人への悪口に転化し、その深い意味は忘れられ、或いは詩の一節となり、あるいは「クレティゼイン」（クレータ人のようにする）という言葉の意味がうそをつくことを意味する程になってしまった。従ってパウロはそれをまともに引用し「これは本当です」といって怪しまなかったのであろう。ポシリデス（ＢＣ　５３０）は"Lare人は悪人である；そしてProclees はLare人である"といったとか、Lare人をChios の住民にかえた変形はデモドカスであるとかいわれている。ユウブリデス以前にもこの程度の話は知られていた。

問2　クレータ人がうそつきであるなどとクレータ人が言い、それが伝承されるというのは解せないが？

答　「クレータのうそつき」命題が偽であるという認識が発話者クレータ人にあった

ことを証拠だてるものと思う。

発見者達の興味の中心はこの命題が偽であるという事実が及ぼす反作用にあってバーワイズ達の分析と同じ境地を直観的に把握し言語で真理を表現するときの問題等を論議していたのではないかと推察する。当時の遺物のもつ文化的水準と全く平和的な傾向とが、それに伴って存在していた知的文化を想像させるのである。城壁をもたぬ王宮（クノーソス）で自由なドルフィンの壁画に囲まれて貴族達の深い瞑想から生まれたものと考えられる。デルポイの箴言もこの様な環境の産物に違いないと思う。

問３　ではユウブリデス（メガラ派）はどう位置づけられるか？

答　メガラ派は論争屋と呼ばれていた。アリストテレスは彼等を詭弁家としてとらえていた。彼等はソフィスト達とは区別されるべきであるが、詭弁家と呼ばれても仕方のない傾向がある。彼等はそれを通して何を言いたいのか？　目的は単に論争に勝つことではないかと思われる。少なくとも「クレータのうそつき」は深い瞑想とはなじんでも論争とはなじまない。ユウブリデスが「クレータのうそつき」と無関係にみえるのは問１の答にあるような事情による。ユウブリデスは多くの詭弁の一つとして「うそつき」をみていたのであって「うそつき」の本質に関する洞察を欠いている。

以上、「クレータのうそつき」はミノア文明に端を発し、古代ギリシャを貫き、カントルの対角線論法、ラッセルパラドックス、ゲーデルの不完全性定理に至る系譜を形造る数学の基礎、言語（表現）の基礎の物語なのである。

付録１.

オースティン命題は、「指示的規約（demonstrative convention)」によって確定される状況および「記述的規約（descriptive convention）」によって確定されるタイプという二つの成分によって決定される。命題Ｐが真であるのは、

この命題がかかわる状況About(p)が、成分をなすタイプType(p)になっている場合である。こうした命題をモデル化するために、事態（SOA）、状況（SIT）、タイプ（TYPE）そして命題（PROP）という四つのクラスを必要とする。それらは同時に定義されねば

ならない。というのも、例えば、状況は命題の成分であり、逆もまた同様だからである。この後で、世界のモデルという概念を導入する。事実および現実的状況の概念は、与えられた世界のモデルに相対的なものとなるであろう。

以下の定義では、Xの閉包Γ(X)は再び、Xを含み、

＊もしY⊆Γ(X)が集合ならば、［∨Y］と［∧Y］はΓ(X)の中にある。

という条件の下で閉じた最小の集まりである。先ずアトムタイプからなるクラスAtTYPEを定義する。あらゆるタイプからなるクラスTYPEは、その閉包Γ(AtTYPE)であると見なされる。

定義　SOA, SIT, AtTYEP, PORPは、以下の条件を満足する最大のクラスである。

＊すべてのσ∈SOAは、次の形のいずれかである。

＊＜H, a, c ; i＞　または、

＊＜Tr, p ; i＞または、

＊＜Bel, a, p ; i＞、

ここでH, Tr, Belは異なるアトムであり、aはClaireか　Max、cは標準的なカードの一つである。iは0か1のどちらかであり、p∈PROPである。

＊すべてのs∈SITはSOAの部分集合である。

＊すべてのp∈PROPは｛s；T｝という形をもつ。ただし、s∈SITかつT∈Γ(AtTYPE)である。

＊すべてのT∈AtTYPEは{σ}という形をもつ。ただし、σ∈SOAである。

事態σによって完全に確定されるタイプを表すのに{σ}を用いる。

例1　p={s；［H, Claire, 3　：1］｝　sはClaireがクラブの3を持っているようなタイプの状況であると主張する命題である。ちょうど＜H, Claire, 3　：1＞∈sの場合にpは真である。

例2　（オースティン的嘘つき）任意の状況sと命題pに関して、pがsで偽であることを主張する命題、すなわちその虚偽がsにおける事実であるような命題が存在する。

これは、命題

$$F(s,p)=\{s;\ [Tr, p;0]\}$$

である。AFA*を用いると、不動点f_sが得られるが、これは一意に決る命題p=F(s, p)である。つまり各々のｓに関して、嘘つき命題

$$f_s=\{s;\ [Tr, f_s;0]\}$$

が得られる。命題f_sはf_sの虚偽がｓにおける事実であると主張する。

（AFAはantifoundation Axiomの略。Aczel集合論の公理で循環オブジェクトの存在を保証する）

オースティン命題の真理

最初にある状況があるタイプを持つということが何を意味するか定義する。

定義　OFを、以下の条件を満たす、SIT×TYPEのただ一つの部分クラスであるとしよう。

＊<s, [σ]>∈OFであるのは、σ∈ｓのとき、そのときに限る。

＊<s, [∧X]>∈OFであるのは、あらゆるT∈Xに関して<s, T>∈OFのとき、そのときに限る。

＊<s, [∨X]>∈OFであるのは、あるT∈Xに関して<s, T>∈OFのとき、そのとにかぎる。

つぎの命題は、オースティン的真理概念をモデル化するのに重要である。

命題　上の定義を満たす唯一のクラスOFが存在する。したがって、任意のｓとＴに関して、

1. 状況sはタイプTであるか、ないかであって、両方ではない。

2. 状況sがタイプ[σ]であるのは、σ∈sのとき、そのときにかぎる。

3. 状況s がタイプ[∧X]であるのは、各々のT∈Xに関してsがタイプTであるとき、そのときにかぎる。

4. 状況s がタイプ[∨X]であるのは、あるT∈Xに関してsがタイプTであるとき、そのときにかぎる。

われわれはクラスTRUEを、p∈PROPであるようなpからなるクラスと定義するであろう。ただし、p={s,T}

となっており、そこではsがタイプTであるとする。このクラスのどの命題も真と言われ、それ以外はすべて偽と言われる。この定義は、次のような期待通りで望ましいいくつかの属性を持つ。

命題

1. すべての命題は真か偽かであり、両方であることはない。

2. 命題{s;σ}が真であるのは、σ∈sのとき、そのときにかぎる。

3. 命題{s;[∧X]}が真であるのは、各々のT∈Xに関して{s;T}が真であるとき、そのときにかぎる。

4. 命題{s;[∨X]}が真であるのは、あるT∈Xに関して{s;T}が真であるとき、そのときにかぎる。

5.. ある命題は真であり、ある命題は偽である。

オースティン的世界をモデル化すること

オースティン的枠組みの中で現実世界が果たす役割を描き出すには、世界のモデルを持ち込み、命題が、与えられた世界のモデルAに相対的に接近可能であるという概念を導入する必要がある。

定義

1. 世界の部分モデル(partial model)Uとは、以下の条件を満たす事態SOAの集まりである。

・どんな事態であれ、その事態とその双対とがUにあることはない。

・もし＜Tr,p;1＞∈Uならば、pは真である。

・もし<Tr,p;0>∈Uならば、pは偽である。

2. ある状況sがモデルUにおいて現実的(actual)であるのは、s⊂=Uの場合である。もしその状況があるモデルで現実的ならば、それは可能である。

3. 命題pは、もしAbout(p)がモデルUで現実的ならば、Uにおいて接近可能である。

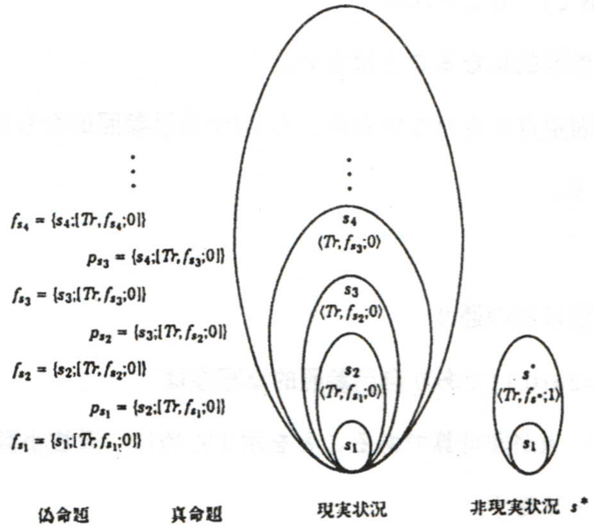
4. モデルUは、もしそれが他のどんな部分モデルにも真に含まれていないならば、総体的(total)である。

このとき次の定理が成立する。

定理　sをあるモデルにおける現実的状況としよう。このとき、sについての嘘つき命題f_sは偽である。言い換えれば、あるモデルにおいて接近可能な嘘つき命題は、どんなものであれ単純に偽である。

状　　況	現実的	嘘つき？
s_1	仮　定	f_{s_1} は偽
$s_2 = s_1 \cup \{\langle Tr, f_{s_1}; 0\rangle\}$	yes	f_{s_2} は偽
$s_3 = s_2 \cup \{\langle Tr, f_{s_2}; 0\rangle\}$	yes	f_{s_3} は偽
$s_4 = s_3 \cup \{\langle Tr, f_{s_3}; 0\rangle\}$	yes	f_{s_4} は偽
⋮	⋮	⋮
$s^* = s_1 \cup \{\langle Tr, f_{s^*}; 0\rangle\}$	no	f_{s^*} は真

命　　題	真理値
$f_{s_1} = \{s_1; [Tr, f_{s_1}; 0]\}$	偽
$p_{s_1} = \{s_2; [Tr, f_{s_1}; 0]\}$	真
$f_{s_2} = \{s_2; [Tr, f_{s_2}; 0]\}$	偽
$p_{s_2} = \{s_3; [Tr, f_{s_2}; 0]\}$	真
$f_{s_3} = \{s_3; [Tr, f_{s_3}; 0]\}$	偽
$p_{s_3} = \{s_4; [Tr, f_{s_3}; 0]\}$	真
⋮	⋮



付録２. Lowvreの対角線論法

Lowvreの論文[2]のエッセンスをトポスの形でまとめた塚田[8]を参考のために引用しておこう。

Th.

トポスEにおいて対象Aと射 $f: A \to \Omega^A$ で自己参照的なものがあれば

（つまり、すべての $g: A \to \Omega$ に対して、ある $a: 1 \to A$ が存在して

すべての $b: 1 \to A$ に対して $f(a)(b)=g(b)$ が成立する）

Ω は固定点性質をもつ

（つまり、すべての射 $t: \Omega \to \Omega$ は固定点 $x: 1 \to \Omega, t_0 x = x$ なるものを持つ。）

証明

仮定のもとで $g: A \to \Omega$ として

$$A \xrightarrow{\Delta} A \times A \xrightarrow{id \times f} A \times \Omega^A \xrightarrow{ev} \Omega \xrightarrow{t} \Omega$$

をとる。$g(b)=tf(b)(b)$ （bが対角線上にならんでいる）

gに対応する $a: 1 \to A$ をとれば $f(a)(b)=g(b)$ であって

特に $b=a$ とおくと $f(a)(a)=tf(a)(a)$

$x=f(a)(a)$ が求める固定点になっている。

Th. ブールトポスBで1　0とすれば

$A \to \Omega^A$ は自己参照的になることはない。

証明　$T: \Omega \to \Omega$ は固定点をもたないから、もしfが自己参照的ならば $g: A \to \Omega, g(b)=\neg f(b)(b)$ が反例を与える。

Cantorの対角線論法は次の通り

B=Setをとれば $\Omega=2=\{0,1\}$ であり自己参照的な写像は

全射に外ならない。Rが非可算であることを示すために二進法小数展開により[0,1]の元は2に値をとる列と見做す。

今$f:N\to[0,1]$が全射だとすればg_nを$f(n)$の小数点以下第n桁$f(n)(n)$が0ならば1,1ならば0と定義すれば小数$g=0.g_1g_2g_3\cdots$はfの像の内にはない。

ラッセルの逆理は充分大きな宇宙Uを考えて、Uの元に対する性質ϕがUの元である集合$\{x|\phi(x)\}$を決めるとすると矛盾が出るというものである。この仮定は$U\to 2^U$,$A\in U$に対してXの性質$x\in A$を対応させる写像が全写であるということだから$S=\{x|x \text{ not}\in x\}$をつくればSはどの集合にも対応せず破綻する。即ち$S\in S$ならSの定義から$S \text{ not}\in S$,

$S \text{ not}\in S$なら再びSの定義により$S\in S$となる$(g(x)\Leftrightarrow x \text{ not}\in x)$

さてカテゴリー論的数理論理学の立場に立ってブールトポスTとはある古典論理の枠での理論そのものであると思うことにする。そのときTが無矛盾であるとは0 not　1,いいかえるとTでtrue $\neq$ falseであること。Tが完全であるとは$Hom_T(1,\Omega)=\{true,false\}$つまり眞偽値は二つしかないことと解釈される。

これは$1\xrightarrow{true}\Omega$に対応するのはTで証明可能な文の全体

$1\xrightarrow{false}\Omega$に対応するのはTでその否定が証明可能な文全体と思うからである。

例えばSetは無矛盾完全である。

射$A\xrightarrow{\phi}\Omega$はTでの一変項論理式$\phi(x)$でxはAを動く（ただし$\phi_1\Leftrightarrow\phi_2$が証明可能なとき、$\phi_1=\phi_2$と同一視している）

射$1\xrightarrow{a}A$は、つまりAの元は型Aの定項と思うことができる。ゲーデルの不完全性定理をトポスで証明するために次の仮定をおくAをTの対象として、Aの元と眞偽値との間の関係

$$\Gamma\subset Hom(1,A)\times Hom(1,\Omega)$$

について各眞偽値σに少なくとも１つのAの元aがあって

$$a\Gamma\sigma$$

が成立するとする。

これは、眞偽値σをもつ文のゲーデル数aが存在することを意味する。そしてaをσのゲーデル数とよぶ。

定義

「Aで代入が定義可能」とは、代入演算Subst $A\times A\to A$ですべての論理式$\phi:A\to\Omega$に対してその「ゲーデル数」

$c:1\to A$があって、かってな定項$a:1\to A$に対して

文$\phi(a):1\to\Omega$のゲーデル数はSubst(c,a)で与えられること。つまり、Subst(c,a) Γ ϕ(a)となること。

定義　「証明可能性がAで表現可能」とは

論理式$Pr:A\to\Omega$があってaが眞偽値σのゲーデル数ならばPr(a)=true と

σ=true とが同値。

この準備の下で

ゲーデルの不完全性定理（第１不完全性定理）

Tが無矛盾でAで代入が定義可能で、しかもAで証明可能性が表現できればTは不完全

証明　前と同様に$g:A\to\Omega$をg(a)=¬Pr(Subst(a,a))で定義する。代入が定義可能なのだからSubst(c,a) Γ g(a)となるcがある。とくにa=cとしてSubst(c,c) Γ ¬Pr(Subst(c,c))

今Tが完全だとすればd=Subst(c,c)に対しPr(d)=true又はPr(d)=falseのはず　Pr(d)=trueとすれば¬Pr(d)=trueで矛盾

Pr(d)=falseとすれば¬Pr(d)=falseで矛盾、よってTは不完全。

参考文献

[1]　J.Barwise and J.Echemendy ; The Liar - An Essay on Truth and Circularity, Standford Univ. Press. (1987)
(邦訳　うそつき　真理と循環をめぐる論考　金子洋之訳　産業図書)

[2]　Lawvre,F.W. ; Diagonal arguments in cartesian closed Categories, in Category Theory. Homology Theory and their Applications II, L.N.M. vol.92 Springer-Verlag.1969.

[3]　J.Soto-Andrade and F.J.Varela ; Self-Reference and Fixedpoints: A Discussion and Externdion of Lawvre's Theorem. , Acta Applicandae Mathematicae 2, 1984

[4]　J.チャドウィック　安村典子訳　ミュケーナイ世界　みすず書房

[5]　ディオゲネス　ライエルティオス　ギリシャ哲学者列伝　岩波文庫

[6]　ヘルマン・ワイル　菅原正夫訳　数学と自然科学の哲学　岩波書店

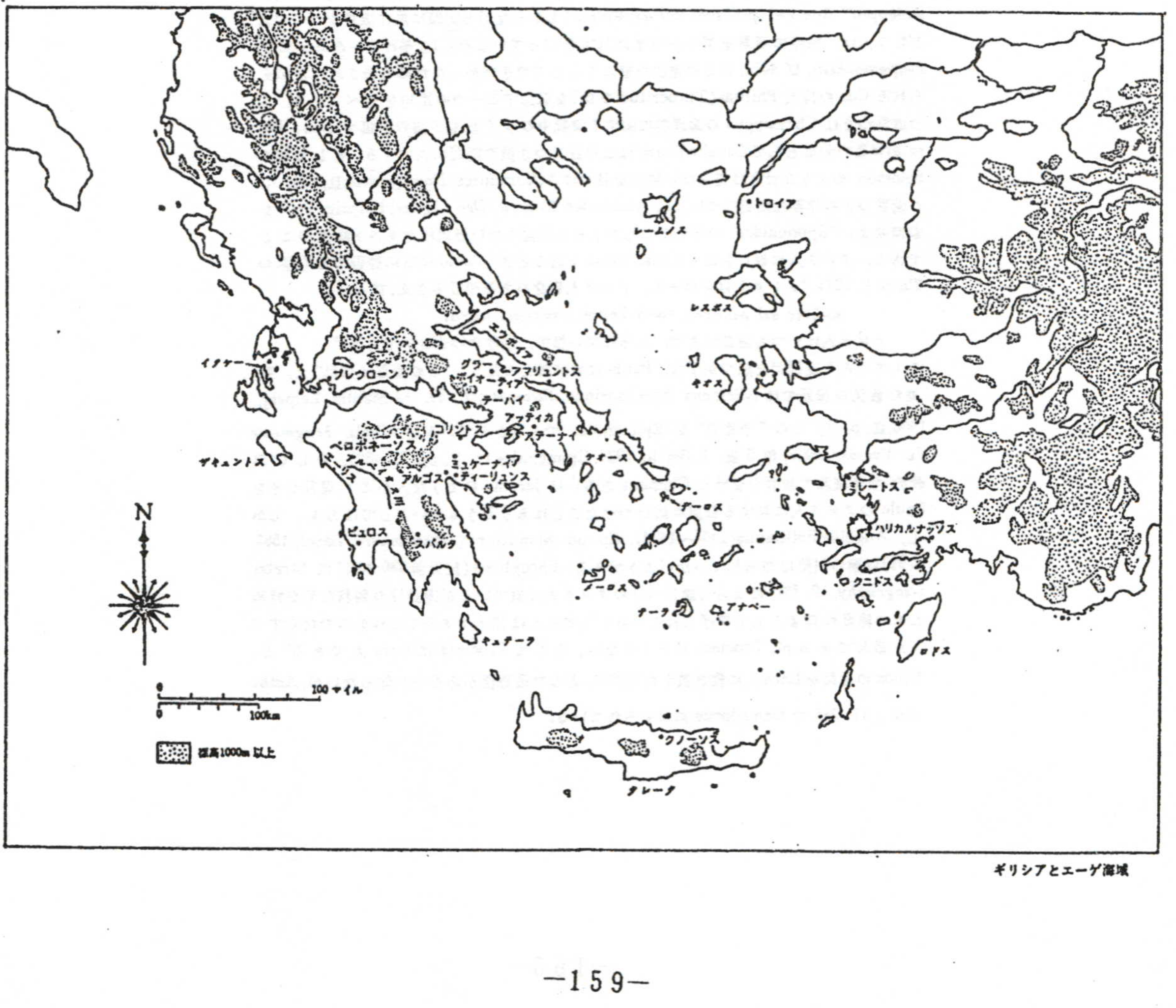
[7]　J.L.オースチン　坂本百大監訳　オースティン哲学論文集

[8]　塚田春雄　カテゴリーと数理論理と対角線論法　エピステーメII

[9]　後期ギリシャ哲学資料集　山本光雄,戸塚七郎　岩波書店

クレタ文明

	新石器時代の開始		おそらく紀元前4000年頃から	
	初期ミノア	I	一前2600年頃まで	
前2500年		II	前2600—2300年頃	王宮以前
⇑		III	前2300—2000年頃	
	中期ミノア	I	前2000—1850年頃	
隆盛期		II	前1850—1700年頃	初期王宮期
⇓		III A	前1700—1660年頃	(ヒエログリフ)
		III B	前1660—1580年頃	
	後期ミノア	I A	前1580—1510年頃	高度王宮期
前1500年		I B	前1510—1450年頃	(線文字A)
		II	前1450—1405年頃	
		III	前1405—1100年頃	ミケーネ時代
				(線文字B)



ギリシアとエーゲ海域

文献[6] ヘルマン・ワイル「数学と自然科学の哲学」より

[1] Megara 学派の Socrates 派の哲学者, Euclides, Eubulides, 等々はこの種の逆説に耽った, それらは明かに, Zeno によって定式化されたようなエレア派の運動の逆説とは異なる類に属する. Aristoteles はこれらの逆説に *De Sophisticis Elenchis* の全巻を捧げた; ストア学派の Chrysippus は手広くそれらを取扱った(*Diogenes Laertius*, VII, 189〜198 中の Chrysippus の論理学に関する論説の題目の表を参照); ローマ帝国下ではそれらは弁証論の正規の教科目の一部をなしていた. 中世のスコラ哲学の発展は Paulus Venetus (1428年に死去)において最高潮に達した(*Logica Magna*, Venetiis 1499. 以降, とくに *De Insolubilibus*, 192r. B 以下). ごく近代の哲学者たちの態度の典型的なものは C. Prantl の 彼の古典的著作 *Geschichte der Logik im Abendlande* 中の軽蔑的な注意である: "おとし穴論法の多くはつまらぬものであるが, 真の論理学はそんなものを全然顧慮しないであろう"(I, p. 95).

[2] Diogenes Laertius の証言(*D. L.*, II, 108)に従えば, Eubulides がこの逆説の発明者である. Aristoteles は *Soph. Elench.*, 25, 180 a, 35 以下においてそれを記述し, 彼自身の解決を与えている. 我々にまで伝ってきた古代の定式化のうち私は Cicero, *Academica*, II, 29 の: "Si te mentiri dicis idque verum dicis, mentiris an verum dicis?(もし君が虚言をついていると言い, かつ同時にそれが真実であると言うならば, 君はいったい虚言をついているのかそれとも真実を言っているのか?)"; また Aphrodisias の Alexander(紀元後約 200 年)の, *ad Soph. Elench.*, Aldina f. 54r. [M. Wallies, *Comm. in Arist. Graeca*, Vol. II, pars III, Berlin, 1898, p. 171, l.18] *ἀλλά μὴν ὁ λέγων "ἐγὼ ψεύδομαι" ἅμα καὶ ψεύδεται καὶ ἀληθεύει*. (しかしながら実際に私は虚言をつくのだと言う人は, 同時に虚言を言いかつまた真実を言っているのだ)を挙げる. Athenaeus, *Deipnosophists*, IX 401e, はこの逆説を解こうとしてできなかったために殺されたと伝えられる Cos の詩人 Philitas(Theocritus の師)を記念する一つの迷句を述べている. この虚言つきは Chrysippus の論理学に関する論説中の少くとも 7 個の主題である. Barataria島の知事として Sancho Panza はこの虚言つき型の問題に当面する, そして彼の Solomon のような賢さは荒っぽい解決を見つける(Cervantes, *Don Quixote*, II, 51). この虚言つきの詳細な歴史については Alexander Rüstow, *Der Lügner*, Leipzig, 1910 を参照せよ. "Epimenides" の類似したしかしそれ程鋭くない形式はキリスト時代のことである. クレタ人に福音を説くために Titus を送るとき, Paulo は彼に警告する (*Ep. to Titus*, I, 12): "クレタ人自身の一人, クレタ人自身のある予言者さえ, 言った:

κρῆτες ἀεὶ ψεῦσται, κακὰ θηρία, γαστέρες ἀργαί

クレタ人はいつも虚言つきで, たちの悪い獣で, 怠け者の大食いである,"

そしてなんら逆説だと感づかずに, Paulo は付け加えて言う: "この証言は真だ" と. 初期の教父の伝承では (Clemens Alexandrinus, *Stromata*, I, 59, ed. Stählin, Leipzig, 1906, II, p. 37) この "予言者" を Epimenides であるとしている (H. Diels, *Fragmente der Vorsokratiker*, 第 5 版, I, Berlin, 1934, Epimenides fr. 1, pp. 31〜32), そして '異教的' な弁証論で教育を受けた Clement あるいは Jerome のような人がこの虚言つきを Paulo のクレタ人に対する侮辱に結びつけたことはありそうもないことではない. しかし, Angelus Politianus(1454〜1494), Ep. ad Manutium (*Opera omnia*, Basel, 1553, p. 91)以前の引照は知られていないようである. Phocylides (紀元前530年頃) は Strabo, *Geography*, 10. 487, によって虚言つきのクレタ人に似ているが逆説性の鋭利な刃を鈍めた次の陳言の作者として挙げられている: "Lera 人は悪人である; たれかれでなくすべてが悪人であるが, Proclees はそうでない; そして Proclees は Lera 人である" と. Chios の住民を Lera 人に置き換えた変形は, どんな信憑性があるのか知らないが, *Anth. Pal.*, 11. 235 で Demodocus に帰せられている.

シュヴァレーの群論 I

杉浦光夫（津田塾大）

§0 シュヴァレーの数学

この小論は、シュヴァレーの群論の研究内容を把握し、群論の研究史の中での位置付けを考えることを目標とする。

シュヴァレー（Claude Chevalley, 1909-1984）は、17才でエコール・ノルマル・シュペリユール（ENS）に入学した。そしてJ. エルブラン（1908－1931）と友人になり、共に代数的整数論という、当時のフランスでは研究する人の全くいなかった分野の研究を始めた。この分野はガウス以来殆んどドイツだけで研究されていたが、1920年高木貞治が一般類体論の体系を作り、1927年アルティンが一般相互法則を証明してそれを完成させた。このアルティンの仕事は、シュヴァレーのエコール・ノルマル在学中のことであった。シュヴァレーは、1931－32年にハンブルグのアルティンの下に留学した。1940年までのシュヴァレーの仕事は殆んどすべて類体論に関するものである。高木は類体論について次のように述べている（(56)序文）。「類体論の成果は、基本定理、分解定理・同型定理（相互律）、存在定理、いづれも極めて簡

単明瞭であるに反して、その証明法は、上記諸家の努力にも拘らず、今なお迂餘曲折を極め、人をして倦厭の情を起さしめるものがある。類体論の明朗化は、恐らくは新立脚点の発見に待つ所があるのではあるまいか。」シュヴァレーのこの方面の研究は、証明の簡易化と共にこの「新立脚点」の発見を目ざすものであったといえよう。シュヴァレーの群論を対象とするこの小論では、彼の数論の成果（例えばイデールの導入，局所類体論の自立的基礎付け，類体論の算術化等）についてはこれ以上触れない。これについては、彌永(33)（附録2，類体論の成立），デュドンネ・ティツ（26）を参照。

1938年以来シュヴァレーはプリンストン大学に滞在していたが、39年第二次大戦が始まり、結局彼は、戦争中アメリカに止まることになって、米国市民権も得た。48年からコロンビア大学教授となり、1953/54年には、フルブライト交換教授として来日し、名大および東大で講義を行った。1955年にはフランスに帰り、パリ大学教授となり、78年定年で退職するまで、その職にあった。1939年類体論の算術化の論文を完成して以後のシュヴァレーの研究は、群論と代数幾何に専ら向けられた。（1941年以後シュヴァレーは、ヴェイユの依頼（ヴェイユ全集 I. p. 578 (62)）によって発表した短い論文（J. Math. Soc. Japan 3 (1951), 36–44（高木記念号））以外には数

論の論文を発表していない。この方面の関心を失ったわけではなく，名大では類体論の講義をしている。）シュヴァレーの代数幾何の研究には，ヴェイユの刺戟が影響しているようである（ヴェイユ全集 のI. p.559）。シュヴァレーは，ヴェイユとは独立に，任意体上の代数多様体の局所環の基本的諸性質を導き（Ann. Math. 42（1941），また独自の交点理論を構成した（Trans. AMS 57（1945））。シュヴァレーは，フランスに帰ってからH.カルタンと共同で代数幾何学のセミナーを行い（1955/56），また1958年には「代数幾何学の基礎」というセミナーを行っている。

シュヴァレーの群論の論文は，既に1930年代からある（[1]，[2]）が，本格的研究は，1940年頃から（つまりアメリカ滞在が長期化してから）始まる。それはリー群と代数群を対象とするものであった。（末尾のシュヴァレーの群論関係文献表の内[1]だけは，そのどちらでもない。[1]はある種の可算無限群の性質を，フックス群として実現することによって証明するという内容の論文である。）初期の1940年代の研究は，リー群・リー環を対象とし，当時のリー群論の諸問題を多面的に追求して成果を収めた。

これらの研究の当初から，シュヴァレーは線型代数群とリー群論，リー環論の関連に注目していた（レプリカ理論，淡中

双対定理）が、1951年以後の研究では、代数群が前面に出て来る。そうしてこの方面でシュヴァレーは、複素単純リー環から出発して、任意の体上の（分解型）単純代数群（シュヴァレー群）を構成し[25]，また任意の代数的閉体上の単純線型代数群の分類に成功した[27]。この二つの仕事がシュヴァレーの群論研究の頂点である。

このⅠでは、リー群の研究のみを扱い、Ⅱで代数群と関連する研究を扱うことにする。シュヴァレーのリー群の研究は、多面的であり、リー・キリング・カルタン・ワイルによって展開されてきたリー群論の殆んどすべての局面に触れている。以下これを次の六項目に分けて述べることにする。項目の後の[3]のような番号が、この論文の最後につけたシュヴァレーの群論関係著作目録の番号である。

1　リー群の大域理論　[9]

2　レプリカの理論　[6] [7] [8] [10] [18] [24]

3　二つの存在定理と共役定理　[5] [12] [13]

4　例外リー群(環)・スピノル　[14] [19] [20] [22]

5　リー群の位相　[4] [11] [15] [23] [26]

6　ヒルベルトの第五問題　[2] [3] [17]

この外シュヴァレーのリー群論の研究成果の中で論文としてシュヴァレーが発表しなかったものがある。そのようなものと

して次の四つを挙げておく。末尾の引用文献の岩澤（36）Lemma 3.11（p. 525）は実半単純リー環しの随伴群の岩澤分解を与えるもので，半単純リー群論の基本的構造定理である。脚註に記されているように，(4)におけるこの証明はシュヴァレーによるものである。また岩堀（38）では「連結半単純リー群Gの任意の二つの極大コンパクト部分群はG内で共役である」というE.カルタンの定理のシュヴァレーによる証明が紹介されている。またヴェイユ（62）では，ファイバー空間の微分幾何学を研究しつつあったヴェイユの質問に答えて，半単純リーGの原始的不変コサイクルの形に対する一つの命題の証明をシュヴァレーが与えている。またコシュール（41）にもシュヴァレーの定理が一つ述べられている。

§1　リー群の大域理論

リーの連続変換群Gとは，有限個の実または複素パラメタによって規定されるR^n（またはC^n）の開集合の解析的な（十分滑らかならよい）変換の作る群（または群芽）であった。パラメタの動く範囲は，一般論では明確に規定されていない。それを正確に規定することは，多様体概念の未成熟な当時にあっては不可能であった。n次元多様体の概念は，周知のように1854年のリーマンの就職講演「幾何学の基礎をなす仮定

について」において始めて提出された。しかしそこでは、n次元多様体は「n重に拡がったもの」としてそのイメージは与えられているが、今日の数学でいうような正確な定義は述べられていない。その意味を確定して行くことが、以後の数学の一つの課題となったのである。

ポアンカレは、位相幾何学の出発点となった1895年の「位置解析」とその補遺(45)において、R^nにおいてp個の独立で微分可能な方程式によって、$n-p$次元多様体を定義し、そのホモロジー論を展開した。ポアンカレはそのホモロジー論のあいまいな点、問題点をヘーゴール(学位論文1898年・仏訳 Bull. Soc. Math. France, 44(1916))に指摘され、第一補遺(1899)でホモロジー論を胞体分割の与えられた多面体(複体)に対して展開することにした。

またヒルベルトは、1902年に発表した2次元のユークリッド幾何と双曲型非ユークリッド幾何の群論的基礎付け(32)において、数平面の領域に対し各点Aのまわりの近傍系$\mathfrak{U}(A)$として、Aを含むジョルダン領域(ジョルダン閉曲線の内部)のある集合$\mathfrak{U}(A)$を考えた。即ちヒルベルトは彼の幾何学を展開すべき「平面」として、このような「近傍系」の与えられた数平面の部分集合Xを考えたのである。このときヒルベルトは、この意味のAの近傍系$\mathfrak{U}(A)$は次の条件をみたす

ものと仮定した。

1. $U\in\mathfrak{U}(A)$で，$A\in V\subset U$ なるVがジョルダン領域ならば $V\in\mathfrak{U}(A)$である。

2 $U\in\mathfrak{U}(A)$, $B\in U\Rightarrow U\in\mathfrak{U}(B)$

3 Xの任意の二点A, Bに対し $B\in U\in\mathfrak{U}(A)$となるUが存在する。(ここでもう一つの条件として次の4が必要であろう。)

4 $U_1, U_2\in\mathfrak{U}(A)\Rightarrow {}^{\exists}U_3\in\mathfrak{U}(A), U_3\subset U_1\cap U_2$)

2次元位相多様体（面）の最初の定義は，ワイル（64）の「リーマン面の理念」（1913）で与えられた。その定義は次の通りである。「2次元多様体$\mathfrak{F}$が与えられているとは次のことを意味する。$\mathfrak{F}$の点と呼ばれるもののある集合が与えられて居り，$\mathfrak{F}$の各点Pに対して，$\mathfrak{F}$の点から成るいくつかの集合がPの近傍として指定されている。$\mathfrak{F}$の点P_0の近傍$\mathfrak{U}_0$は，必らずP_0を含み，かつ$\mathfrak{U}_0$をある円板K_0の上へ一対一に写す写像φで$\varphi(P_0)$が円板の中心となるようなものが存在し，しかもこの写像φは，次の二つの性質1，2をみたす：

1. $P\in\mathfrak{U}_0$で，$\mathfrak{U}$はPの近傍で$\mathfrak{U}\subset\mathfrak{U}_0$とすれば，$\varphi(P)$は$\varphi(\mathfrak{U})$の内点である。

2 $K\subset K_0$となる円板Kの中心を$g=\varphi(P)$とすれば，Pの近傍$\mathfrak{U}$であって$\varphi(\mathfrak{U})\subset K$となるものが存在する。」

ワイルは「リーマン面の理念」第2版（1923）の巻末において、上の定義にさらにもう一つの次の条件を附加することが必要であると述べている。
「3. $\mathcal{F}$の各点Pのどの二つの近傍に対しても、その双方に含まれるPの近傍が存在する。」
ワイルは初版でヒルベルトと同じ点を見過していたのである。

この頃まだ位相空間論は萌芽期にあった。近傍系による位相空間の正確な定義が始めて与えられたのは、ハウスドルフ(31)の「集合論綱要」(1914)においてであり、この本はワイルの本の翌年に出版されたのである。ワイルは面の上では、連続函数の概念は定義されるが、微分可能函数や解析函数は定義できないことを注意して解析函数がうまく定義できる面即ちリーマン面の定義に進む。

n次元のC^k級多様体（$0 \leqq k \leqq \infty$または$k=\omega$）の概念は、ヴェブレン・ホワイトヘッド(61) 1932で与えられた。これは内容上、今日の定義と一致するが、位相空間という概念を明示的に用いていないので、ややまわりくどい表現となっている。ともあれ1930年代にはケアンズ(9)(1935)によって（R^nへ埋め込まれた）微分可能多様体が単体分割を持つことが示され、またホイットニー(68)(1936)によって、n次元微分可能多様体は、R^{2n+1}に埋め込むことができることが示されるな

ど、微分可能多様体の基本的な性質が確立されていったのである。

一方リー群を大域的多様体としてとらえる視点は、ワイル(64)(1925/26)で打出され、ワイルは特にその立場からコンパクト半単純リー群の基本群の有限性や積分公式を導き大きな成果を挙げた。しかしワイルは大域的リー群論の教科書を書こうとはしなかった。ワイルの著書(67)「典型群――その不変式と表現」は、代数的な取扱いに傾斜し、指標公式の証明のためにリー群的手法も用いたもののリー群論そのものの系統的展開はされなかったのである。同じ頃ポントリャーギンは(48)「連続群」(1938)を出版した。この本は前半で位相群、後半でリー群を扱っている。しかしそのリー群論の部分は、古典的なリーの理論を変換群でないリー群について述べ位相群と結びつけたものであった。

こうして多様体論の基礎の上に大域的リー群論を展開するという仕事は、シュヴァレーが[9](「リー群論I」1946)で行うまで手がつけられないままに残っていたのである。[9]では実解析多様体の理論を展開した後、連結リー群(解析群)Gを実解析多様体(連結と仮定している)であって、群演算が解析的となるような群として定義する。

そしてG上の左不変ベクトル場の全体を$\mathfrak{g}$と置くと、$\mathfrak{g}$は

ベクトル場の括弧積に関し実リー環で $\dim \mathfrak{g} = \dim G$ となる。$\mathfrak{g}$ が G のリー環と呼ばれるものであり $\mathfrak{g} = L(G)$ などと記す。これがリーの第三基本定理の大域化であり、それは G 及び $\mathfrak{g}$ の定義から直ちに導かれる。同様に連結リー群 G のリー部分群 H（G の部分多様体となっているようなリー群）に対しては、自然な埋め込み $i : H \to G$ により、$L(H)$ は $L(G)$ の部分リー環となることが直ちに証明される。

リー理論の要となる第三基本定理の逆定理に当るものを、シュヴァレーは次の二つの命題に分解して考えた。それは

定理　1　連結リー群 G のリー環 $\mathfrak{g} = L(G)$ の任意の部分リー環 $\mathfrak{h}$ に対し、G の連結リー部分群 H で、$L(H) = \mathfrak{h}$ となるものが唯一つ存在する。

定理　2．任意の有限次元実リー環 $\mathfrak{g}$ に対し、連結リー群 G で $L(G) \cong \mathfrak{g}$ となるものが存在する。

定理２は、リー環 $\mathfrak{g}$ は忠実な有限次元表現を持ち、従って $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の部分リー環と見なされるという 1934/35 年の Ado の定理(2)を用いて定理１に帰着するというのがシュヴァレーの方針で 1955 年の第三巻[24]で実現された。

Ado の定理の証明にはリー環論特に Levi の定理（$\mathfrak{g}$ は根基と半単純部分環の半直積となる）が必要であるが、シュヴァレーはこれと定理２を「リー群論Ⅲ」で証明したのである。

そこでリー群論としては定理1の証明が要となる。シュヴァレーは、これを「多様体Gの包含的な接空間バンドルは、積分可能である」というフロベニウスの定理を大域化することによって証明した。定理1の場合 $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分リー環になるということが、$\mathfrak{h}$ の定義する接空間バンドルが包含的であることを意味する。そしてシュヴァレーはGの各点 g を通る $\mathfrak{h}$ の極大積分多様体が唯一つ存在することを証明した。特に単位元 e を通るものをHとすれば、これが求めるGの連結リー部分群で、$L(H)=\mathfrak{h}$ となるものである。このとき g を通る $\mathfrak{h}$ の極大積分多様体は剰余類 gH となる。以上のようにして、シュヴァレーは、リーの局所的理論を大域化することに成功したのである。

ただし大域化に伴って新しい問題も発生する。リーは二つのリー群(芽)は、その構造定数が等しいとき、同じ構造を持つと考えた(cf. 杉浦(53))。これはリー環の同型な二つのリー群は同じ構造を持つということであり、それは大域的には正しくない。すなわち二つの連結リー群G, G′のリー環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ が同型ということは、GとG′が局所同型(単位元の近傍で一致する)ということで、それは必ずしも大域的な同型を意味しない。既に1926年にシュライヤー(51)(52)は、被覆群の理論を構成し、互に局所同型な連結リー群の間の大域的関係を記述する一般論を作っていた。即ちそのような連

結リー群の内同型を除き唯一つ単連結なもの G^* があり、それと局所同型な任意の連結リー群 G は G^* の離散正規部分群 D による剰余群 G^*/D と同型になるというのである。シュヴァレーは[9]でこのシュライヤーの理論をとり入れた。しかしその記述は、独自の構成を取って居り、シュライヤーのような、道の連続変形を用いず基本群も一次元ホモトピー群 $\pi_1(G)$ でなく、G の普遍被覆群 G^* の G 上の被覆変換群として定義する。正直の所シュライヤーの記述の方がはるかに読み易い。

しかしシュヴァレー[9]では、リーやシュライヤーにはない一つの視点が打出されている。それはリー群とリー環の対応が、リー群の間の準写（即ち解析的準同型写像）に対してどう振舞うかを考えたことである。リー群 G からリー群 H への解析的準同型写像 Φ が与えられたとき、リー環 $L(G)$ から $L(H)$ へのリー環の準同型写像 $d\Phi$ が

(1) $$(d\Phi(X))_e = (d\Phi)_e X_e$$

によって与えられる。これは明らかであるが、逆が問題である。これについてシュヴァレーは次の定理3を証明した。

定理 3. G, H を連結リー群とする。

1) $\Phi: G \longrightarrow H$ が解析的準同型写像ならば、(1)によりリー環の準同型写像 $d\Phi: L(G) \rightarrow L(H)$ が定義される.

2) 逆に $\varphi: L(G) \rightarrow L(H)$ なるリー環の同型写像が与へられ

たときGの単位元eの近傍Uで定義されたHへの解析的局所準同型写像 $\varphi: U \to H$ で任意の $X \in L(G)$ に対し，X と $\varphi(X)$ は φ-related となるものが存在する。

3) 2)で特にGが単連結のとき，GからHへの解析的準同型写像 Φ で $d\Phi = \varphi$ となるものが唯一つ存在する（Ch. IV. Theorem 2 (p. 113)）

2)は容易に証明できるが3)が面倒である。Gは連結だから単位元eの近傍Uから生成される。$U = U^{-1}$ と仮定してよいが，このときGの任意の元 x は

(2) $$x = x_1 x_2 \cdots x_n, \quad x_i \in U \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

の形に表わされるから，準同型写像 Φ で φ の延長となっているものは，(2)の x に対し

(3) $$\Phi(x) = \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n)$$

となる。問題は(2)のような表示は一般に一意的でないから，(3)によって一価函数として $\Phi(x)$ が定義できるという保証がないことである。シュヴァレーは，複素解析函数の解析接続における一価性定理にヒントを得て，一般的な一価性定理(Principle of monodromy）を証明してGの単連結性から Φ の一価性を導いた。(Ch. II Theorem 2, p. 46).

この定理1, 2, 3がシュヴァレーの大域的リー群論における基本定理である。定理1, 2がリーの理論の直接の大域化である

に止まらず、用いられる概念自体も変化していることに注目したい。シュヴァレーは、多様体論の組み立てから始めて、リー群論を精密かつ自然な表現で記述するのに成功したのであった。

以上が[9]の大域リー群論への最も重要な寄与であるが、[9]にもこの外にいくつか、新しい定理が述べられている。無理数αを方向係数とする直線 $y=\alpha x$ の2次元トーラス群 $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ における像Hは、$\mathbb{T}^2$ の閉じていないリー部分群である。この場合Hはリー群としては$\mathbb{R}$に同型であるが、その位相は $\mathbb{T}^2$ の相対位相とは異なる。この例は以前から知られていたが、これに対しシュヴァレーは次のことを証明した。

定理4　Hが連結リー群Gの連結リー部分群でGの閉集合となっているものとする。このときHの部分多様体としての位相は、Gの相対位相と一致する。(Ch. IV §V Proposition 1, p.110)

この外[9]には、指数写像 $\exp: L(G)\to G$ の定義および$L(G)$上の一次写像としての微分$(d\exp)_X$の計算(Ch. V. §V Proposition 1, p.157)やリー群Gの自己同型群 Aut G がまたリー群となることの証明(Ch. IV. §XV Proposition 1, p.137)などいくつか新しい結果があるが技術的になるのでこゝでは触れない。第V章では微分形式の理論が大域的な立場から系統的に展開され、特にリー群上の左不変微分式の外微分の公式

が与えられ規準座標系による左不変微分式の具体的な構成法が与えられている。さらに左不変微分式による左不変ハール積分の構成がされている。

Ch. VIでのコンパクト・リー群に対する淡中双対定理の取扱いは重要であるが、コンパクト・リー群が実線型代数群の構造を持つというのがその中心的内容なので、IIで扱うことにする。

シュヴァレー[9]は、解析的多様体論と大域的リー群論の基礎を確立した。このことは、リー群論および微分幾何学の研究史において、基本的な意義を持つ事実である。

§2 レプリカの理論

この節の内容はやや技術的である。手短かに内容を述べる。シュヴァレーのこの方面への貢献は、標数0の体Kに対し、リー環$\mathfrak{gl}(n, K)$の部分リー環$\mathfrak{g}$がある線型代数群$G(\subset GL(n, K))$のリー環となるための必要十分条件をあたえ、それをK上のリー環の構造論に応用した点にある。シュヴァレーはこの必要十分条件が代数群を表に出さないで、純粋に線型代数学の言葉(テンソル不変式、レプリカ)で表現できることを発見し[6]それを用いて、リー環の構造論の簡易化に成功した。特にこれによりカルタンによる「半単純$\Longleftrightarrow$キリング形式が非退化」

という判定条件の見透しのよい証明を得たのであった。

Kを任意の体、$X\in gl(m,K)$, $Y\in gl(n,K)$ に対しそのテンソル和$X\oplus Y$を　$X\oplus Y=X\otimes 1_n+1_m\otimes Y$　によって定義する。こゝで$\otimes$は行列のテンソル積であり，1_nはn次単位行列である。リー群のテンソル積表現を微分するとリー環に対してはこのテンソル和が対応するのである。また$X^*=-{}^tX$とおく。任意の$r,s\in\mathbb{N}$に対して

$$X_{r,s}=\underbrace{X^*\oplus\cdots\oplus X^*}_{r\text{個}}\oplus\underbrace{X\oplus\cdots\oplus X}_{s\text{個}}$$

とおく。　$V=K^n$, $V^*=V$の双対空間，とする。

$$V_{r,s}=\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{r\text{個}}\otimes\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{s\text{個}}$$

とし，$v\in V_{r,s}$ が

(1)　　　$X_{r,s}v=0$

をみたすとき，vはXの(r,s)型（テンソル）不変式であるという。

定義1　　$X,Y\in gl(m,K)$とする。

$$(\forall(r,s)\in\mathbb{N}^2)(\forall v\in V_{r,s})(X_{r,s}v=0\Rightarrow Y_{r,s}v=0)$$

が成立つときYはXのレプリカ（replica）であるという。（シュヴァレーはこの記号を用いていないが，日本の研究者の慣用に従って）このことを$X\twoheadrightarrow Y$と記すことにする。

シュヴァレーは，Kが完全体のとき任意の行列Xは$X=X^{(s)}+X^{(n)}$，$X^{(s)}$と$X^{(n)}$は可換 $X^{(s)}$＝半単純，$X^{(n)}$＝冪零と一意的に分解できることを示した。これをXのジョルダン分解と呼ぶことにしよう。（これはXがジョルダン標準形のときは，対角線の部分と残りの部分への分解である。）シュヴァレーは〔6〕はレプリカについて，次のような結果を得た。

定理 1 1) $X \twoheadrightarrow Y$のとき，Yは$f(0)=0$となる多項式$f(t)$により，$Y=f(X)$と表わされる。

2) $X, Y \in \mathfrak{gl}(m, K)$に対し，「$X \twoheadrightarrow Y \Leftrightarrow X^{(s)} \twoheadrightarrow Y^{(s)}, X^{(n)} \twoheadrightarrow Y^{(n)}$」

3) 半単純なXの固有値を$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$とするとき，多項式$f(t) \in K[t]$に対し，

$$「X \twoheadrightarrow f(X) \Longleftrightarrow (\forall k_i \in \mathbb{Z} (1 \leq i \leq m)) \left(\sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} k_i f(\alpha_i) = 0\right)」$$

4) X＝冪零のとき「$X \twoheadrightarrow Y \Leftrightarrow Y = aX, \ a \in K$」

5) X＝冪零 $\Longleftrightarrow$ $X \twoheadrightarrow Y$となる任意のYに対し$\mathrm{Tr}(XY)=0$.

ただし 2)－3)では，基礎体Kは完全，4) 5)では標数0と仮定する。

線型代数群とレプリカの関係は，次の定理2で与えられる。

定理 2 Kを標数0の体とするとき，$\mathfrak{gl}(n, K)$の部分リー環$\mathfrak{g}$に対し，次の1)と2)は同値である。

1) $X \in \mathfrak{g}$, $X \twoheadrightarrow Y$（YがXのレプリカ）$\Rightarrow Y \in \mathfrak{g}$

2)　$\mathfrak{g}$はある線型代数群G ($\subset GL(n, K)$) のリー環である。

始めシュヴァレーは，$K=\mathbb{C}$のとき，Tuanとの共著論文[8] (1945)においてこの定理を証明した。後の著書[18] (1951)では，$X \in \mathfrak{gl}(n, K)$を含む$GL(n, K)$の最小の代数部分群$G(X)$のリー環の元$Y$がレプリカを特徴付ける基本性質(定理1, 2) 3) 4))をみたすことによって定理を実質上証明した。([18]ではテンソル不変式によるレプリカの定義には全く触れていない。)そこで，シュヴァレーは上の定理2の性質をみたすリー環$\mathfrak{g}$ ($\subset \mathfrak{gl}(n, K)$)を代数的リー環と呼んでいる。シュヴァレーは，レプリカの概念を用いてリー環論の基本的な諸定理，特にカルタンによる半単純性の判定条件が見通しよく導かれることを発見し，それを[10]で示した。[10]では次の簡単な補助定理1が出発点となっている。

補助定理　1.　P, Qが共に$V_{r,s}$の部分線型空間で$Q \subset P$となるものとするとき

$$\mathfrak{g} = \{ X \in \mathfrak{gl}(n, K) \mid X_{r,s} P \subset Q \}$$

とおく。このとき$\mathfrak{g}$は代数的である。即ち$X \in \mathfrak{g}$, $X \twoheadrightarrow Y$ならば　$Y \in \mathfrak{g}$となる。

この補助定理1とレプリカの性質(定理1, 5)を組み合せて，シュヴァレーは次の補助定理2を得た。K=標数0とする。

補助定理　2.　$\mathfrak{g}$を$\mathfrak{gl}(n, K)$の部分リー環とする。

1) $\mathfrak{n} = \{N \in \mathfrak{g} \mid Tr(NX) = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{g})\}$

とおく。もし$\mathfrak{g}$が代数的リー環ならば，$\mathfrak{n}$のすべての元は冪零である。

2) 任意の$X, Y \in \mathfrak{g}$に対し $Tr(XY) = 0$ ならば$\mathfrak{g}$は可解である。（[10] Proposition 3 and 4）.

これからカルタンの判定基準が直ちに導かれる。

定理　（カルタンの判定基準）標数0の体上のリー環$\mathfrak{g}$に対し，次の(1)(2)は同値である。

(1)　$\mathfrak{g}$は半単純，　(2)　$\mathfrak{g}$のキリング形式は非退化。

証明　(1)$\Rightarrow$(2)　$\mathfrak{n} = \{Y \in \mathfrak{g} \mid B(X, Y) = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{g})\}$とおくと補助定理2，2)により$ad_{\mathfrak{g}}\mathfrak{n}$は可解である。$\mathfrak{g}$＝半単純なら，$ad_{\mathfrak{g}}$は忠実な表現だから，$\mathfrak{n}$は$\mathfrak{g}$の可解イデアルとなる。従って$\mathfrak{g}$＝半単純なら$\mathfrak{n} = 0$で$B$は非退化」

(2)$\Rightarrow$(1)　$\mathfrak{a}$を$\mathfrak{g}$の任意の可換イデアルとすれば，$\forall A \in \mathfrak{a}$，$\forall X \in \mathfrak{g}$に対し$(ad(A)(ad X))^2 \mathfrak{g} \subset (ad A)(ad X)\mathfrak{a} = 0$

$((ad A)(ad X))^2 = 0$，$B(A, X) = Tr(ad A)(ad X) = 0$　だから

B＝非退化なら$A = 0$，$\mathfrak{a} = 0$。

シュヴァレーは，その教科書[24]でこのやり方でリー環論を展開した。その後ブルバキ(6)の「リー群とリー環」第I章では，上の特別な場合の補助定理1と補助定理2，1)を合わせた次の補助定理3（ブルバキ(6)第I章§5補題3）

があれば、補助定理2, 2)が導かれ従ってカルタンの判定条件も得られることを示した。

補助定理 3. Vを標数0の体K上の有限次元線型空間P, QをVの部分線型空間で$Q \subset P$となるものとし、

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid [X, P] \subset Q\}$$ とおく。

$X \in \mathfrak{g}$がすべての$Y \in \mathfrak{g}$に対し$Tr(XY) = 0$をみたせば、Xは冪零である。

この補助定理3は、シュヴァレーのレプリカの理論の中心的な部分をレプリカを表面に出さずに再現したものである。これによってリー環論の展開にレプリカは必ずしも必要ではなくなった。しかし標数0の体上の線型代数群のリー環を線型代数的に特徴付ける概念としてのレプリカの意義は失われていない。ただ現在の線型代数群の理論は、標数pの場合をも含めるため、リー環を用いないやり方が主流となって居りこのシュヴァレーのレプリカの理論も忘れられている。しかしシュヴァレーの群論の研究史においては、彼が群論で得た最初の理論であり、かつ彼を代数群に導くきっかけともなった点でこのレプリカ理論は、重要な意義を持つ。

§3 二つの存在定理と共役定理

シュヴァレーは[12]において、半単純リー環に対する基本

的な二つの存在定理の統一的かつ代数的な証明を始めて与えた。その定理は次のような内容のものである。

定理 1　任意の既約ルート系R（またはカルタン整数の組S）に対し、標数0の代数的閉体K上の単純リー環Lで、Rをルート系とするものが存在する。

定理 2.　単純リー環Lのカルタン部分リー環V上の任意の優整形式w_0に対して、w_0を最高ウエイトとする，Lの有限次元既約表現が存在する。

これらの定理の歴史は、次の通りである。複素数体$\mathbb{C}$上の単純リー環の分類を始めて行ったキリング(40)は、その分類をカルタン整数の組の分類によって行った。このとき逆に各カルタン整数の組Sに対し実際にリー環が存在するかが問題になる。既にリー環が知られていた典型リー環については、これは問題ないが、例外リー環の存在が問題になるわけである。キリングはSを用いて各例外リー環の基底の間の交換子積を定義したが、それらがヤコビの恒等式をみたすことを確めることはしなかった。

その後カルタン(10)は、キリングの分類論の誤りを正し，正しい証明を与えた。カルタン行列Sに対するリー環の存在についてもカルタン(10)は各単純リー環の最低次元表現に対応する線型リー環を与えているので、存在も示されているわ

けである。ただしE_8に対しては、その最低次元表現はE_8の随伴表現なので、リー環E_8の存在が前提となる。従ってE_8に対してはなお問題が残っている。(§4参照) 例外リー環特にE_8の構成が困難なことが、一方ではルート系に対するリー環の存在を、一般的に証明しようという考えを後に生じさせる一つの動機となった。

ワイル(65)では、複素半単純リー環のカルタンによる構造論を精密化して、いわゆるワイル基底を導入した。

$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in R}\mathfrak{g}_\alpha$をルート空間分解とするとき$\mathfrak{g}_\alpha$の基底$E_\alpha$を適当にとるとき、

$$[H, E_\alpha]=\alpha(H)E_\alpha,\ [E_\alpha, E_\beta]=\begin{cases} N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}, & \alpha+\beta\in R \\ 0 & ,\alpha+\beta\notin R\end{cases}$$

において、構造定数$N_{\alpha,\beta}$の2乗はルート系から定まる正数となる。より詳しく言えば

$$\beta+j\alpha\in R\quad(-q\leq j\leq p),\ \beta-(q+1)\alpha,\ \beta+(p+1)\alpha\notin R\ (p\geq 1)$$

のとき

$$N_{\alpha,\beta}{}^2=\frac{p}{2}(q+1)(\alpha,\alpha)$$

となる。従って$N_{\alpha,\beta}$は実数でその符号を除いてルート系Rから一意的に定まるのである。そして符号もルートの字引式順序に関し、下から帰納的にきめて行くことができる。このことからファン・デル・ワルデン(58)は、ルート系Rによって

複素半単純リー環が、同型を除き一意的に定まることを注意した。

さて，ワイルは一方でルート系をユークリッド空間のベクトルの集合として定義し，ワイル群を各ルートαを法ベクトルとする超平面Π_αに関する鏡映から生成される鏡映群として定義した。ファン・デル・ワルデン(59)は，このベクトルの集合としてのルート系の分類を初等幾何的方法で実行した。ワイルは$\mathfrak{g}$のコンパクト実形$\mathfrak{g}_u$をリー環とする連結リー群G_uが常にコンパクトであることを示した。$\mathfrak{g}_u$のカルタン部分環$\mathfrak{h}_u=\mathfrak{g}_u\cap\mathfrak{h}$は，$G_u$の極大トーラス$T$に対応する。このときトーラスの周期性から，超平面$\Pi_\alpha$を各整数だけ平行移動した超平面$\Pi_{\alpha,k}$が生ずる。超平面族$\{\Pi_{\alpha,k} \mid \alpha\in R, k\in\mathbb{Z}\}$に対応する鏡映族$\langle s_{\alpha,k} \mid \alpha\in R, k\in\mathbb{Z}\rangle$から生成される群$W_a(R)$が，ルート系$R$のアフィン・ワイル群である。

コクセターは(66)(附録)でルート系とアフィン・ワイル群が一対一に対応することを発見した。例えばB_n型とC_n型のルート系は互いに双対ルート系なので，ワイル群は同型であるが，$n\geqq 3$ならばB_nとC_nは同型でない。そしてアフィン・ワイル群も$n\geqq 3$のとき$W_a(B_n)\not\cong W_a(C_n)$となる。(コクセター(22)は$\mathbb{R}^n$の離散鏡映群の分類をコクセター図形を用いて，きれいな形で与えた。) ヴィット(71)はコクセタ

ー(66)の結果の別証を与えこれを複素単純リー環の分類に用いた。ヴィットの結果の内で、単純リー環の存在に関する一般論は次の形であった。

定理(ヴィット(71) Satz 15) 4次元以下の各ルート系に対し、それをルート系とする複素単純リー環が存在すれば、任意の既約ルート系Rに対し、Rをルート系とする複素単純リー環が存在する。

A, B, C, D型ルート型には、典型リー環が対応する。この外ヴィットは(71)で例外型複素単純リー環G_2, F_4を構成している。従って上の定理からE型のルート系に対しても、対応するリー環の存在が保証されたことになる。

こうしてファン・デル・ワルデンとヴィットの結果によって、複素単純リー環の代数的な分類が一応でき上ったといえる。ただしそれは上述のヴィットの定理が示すように統一性の面で、問題が残った。4次元以下という制限なしに存在の証明ができることが望ましいのである。

また定理2の証明は、カルタン(11)(1913年)が各複素単純リー環の各基本ウェイトΛ_iを最高ウェイトとする既約表現を具体的に与えるという個別チェックにより証明した。後ワイル(65)(1934/35)は、コンパクト半単純リー群の指標公式とペーター・ワイルの定理(既約表現の行列成分の完全性定理)を用いて、

定理２の統一的な証明を与えた。(杉浦 (54) 参照)　これは群の調和解析の見地からは最も自然な証明といえる。しかしそれは解析的な証明であるから、代数的な証明は別の意義がある。

以上がシュヴァレーがこの方面の研究に着手するまでの定理1, 2 の研究史の概略である。これに対してシュヴァレーの研究のねらいは次の三点にあった。

1. 定理1, 2を各(半)単純リー環に対して統一的に証明する。
2. その証明を解析や幾何を用いることなく純粋代数的に行う。
3. 定理1と定理2を同時に証明する。

シュヴァレーは [12] で定理1, 2 の証明の方針を発表した直後に、プリンストンの研究所にいたハリッシ・チャンドラが独立に定理２の証明を得ていたことを知った。[13] はそのことの報告である。結局シュヴァレーは学位をとった(1947年)ばかりの若いハリッシ・チャンドラ (29)に証明の発表を委ねたのである。ハリッシ・チャンドラの序文によると彼が考えていたのは定理２だけで定理Ｉも同時にできるというのはシュヴァレーのアイディアであり、発表された (29) では、このアイディアを取入れて、定理Ｉを含むようにしたとのことである。

さらにその後セール(49)は、定理1の証明を整理し、生成

元とその間の基本関係として見通しのよい形に定理1を再定式化した。リー環が構成できれば、その展開環の適当な極大左イデアルによる剰余加群上の正則表現を考えることにより定理2は比較的容易に得られる。これが現在の標準的な方法である。(例えばハンフリーズ(33)を見よ)　以上の経緯によりシュヴァレーの原論文を読んだ人はあまりいないと思われるので、その後半の翻訳を以下に掲げておく。

「カルタン行列 $S=(a_{ij})$ が与えられたとする。これは有理数体Q上のl次元ベクトル空間V上の一次形式の有限集合としてのルート系Rの基本ルート系$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$から、$a_{ij}=\alpha_i(H_{\alpha_j})$によって与えられる。ここで$H_\alpha$はルート$\alpha$に、基本2次形式(キリング形式)によって対応するVの元である。先づ無限次元ベクトル空間Mを構成する。

$$\Sigma=\{\sigma=(i_1,\cdots,i_m)\mid m\in N,\ 1\leqq i_1,\cdots,i_m\leqq l\}$$

とし、各$\sigma\in\Sigma$と一対一に対応する元$x(\sigma)$($\sigma\in\Sigma$)を基底とする体K上のベクトル空間をMとする。($m=0$のとき$\sigma=\phi$, $x(\phi)=x_0$とする)　今任意の優整形式w_0(V上の一次形式で$w_0(H_{\alpha_i})\in N$ ($1\leqq i\leqq l$)となるもの)が与えられたとする。各$\sigma=(i_1,\cdots,i_m)$に対して、ウエイトw_σを次のように定義する：

$$w_\sigma=w_0-\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_{i_\mu}$$

Mの元uがウエイトwのウエイト・ベクトルであるとは，uが$w=w(\sigma)$となるような$x(\sigma)$の一次結合となることをいう。このときM上の$3l$個の一次変換P_i, Q_i, D_i $(1\leqq i\leqq l)$で，交換関係

$$[P_j, D_i]=a_{ji}P_j,\quad [Q_j, D_i]=-a_{ji}Q_j, [Q_i, P_i]=D_i$$

$$[Q_j, P_i]=0\quad (i\neq j)$$

をみたすものが構成できる。D_i, Q_i, P_iは

$$D_i x(\sigma)=w_\sigma(H_{\alpha_i})x(\sigma),\quad Q_i x(\sigma)=x(i,\sigma),\quad P_i x_0=0$$

をみたす。

Mのウエイト・ベクトルuは，$\{P_i, Q_i, D_i \mid 1\leqq i\leqq l\}$から生成される多元環$\mathfrak{A}$の元$U$であって，$Uu=x_0 u$, $x_0\neq 0$となるものが存在するとき，第一種であるといい，そうでないとき第二種という。Mの第二種ウエイト・ベクトル全体の張る部分ベクトル空間をNとおく。NはP_i, Q_i, D_i従って$\mathfrak{A}$で不変である。そこで商空間M/N上に$\mathfrak{A}$の表現ρが生ずる。ρによるP_i, Q_i, D_iの像をP_i', Q_i', D_i'とする。ここで本質的なことは，M/Nが有限次元となることの証明である。

そのためにワイル群Wの任意の元sをとり，$s\alpha_i=\beta_i$ $(1\leqq i\leqq l)$とおく。このとき$(\beta_1,\cdots,\beta_l)$はまた一つの基本系である。$(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$に対応する$P_i, Q_i, D_i$と平行した性質を持つ$3l$個の一次変換$sP_i', sQ_i', sD_i'$が$(\beta_1,\cdots,\beta_l)$に対応して，

P_i', Q_i', D_i' の生成する多元環の中に存在する。さらに M/N の元 $y \neq 0$ で、$sP_i'y = 0$ $(1 \leqq i \leqq l)$ となるものが存在する。このとき M/N 上に weight w のウエイト・ベクトルが存在すれば、ウエイト sw のウエイト・ベクトルも存在する。従って特に

$$(1) \qquad sw = w_0 - \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{i\mu}$$

の形でなくてはならない。$s \in W$ を適当に選ぶことにより、$sw = w_1$ は優形式となる。このような w_1 は有限個しか存在しない。……(＊) [Mの定義から M/N における一つのウエイトの重複度は有限であるから]。(＊)から M/N が有限次元であることが導かれる。このとき一次変換 P_i', Q_i', D_i' $(1 \leqq i \leqq l)$ の生成するリー環 L は単純リー環で、そのカルタン行列が S となる。またこの L の M/N 上の最高ウエイトは w_0 であり、w_0 を最高ウエイトとする有限次元既約表現の存在も証明される。」 (＊)の証明を補っておこう。w_1 は優形式だから $(w_1, \alpha_i) \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq l)$ である。そして $w_1 = w_0 - \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{i\mu} = w_0 - \beta$ の形である。このとき $(w_1, \beta) = \sum_{\mu=1}^{m} (w_1, \alpha_{i\mu}) \geqq 0$, $w_0 = w_1 + \beta$ だから

$$|w_0|^2 = |w_1|^2 + |\beta|^2 + 2(w_1, \beta) \geqq |w_1|^2$$

となるので、w_0 が与えられたとき (1)の形の優整形式 w_1 の集合は、整係式の作るディスクリート集合の有界集合となり、有

限集合である。

定理1，2は有限次元リー環論の基本的定理であるだけでなく、後のKac-Moodyリー環の発見にもつながる。論文[12]は短いけれども重要なアイディアを含む論文であった。

ルート系に対する半単純リー環の存在定理と並んで、代数的閉体上の半単純リー環に対しルート系が同型を除き一意的に定まるという一意性定理も基本的である。その基礎となるのは、次の定理である。

定理 3　複素半単純リー環$\mathfrak{g}$の任意の二つのカルタン部分環$\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$に対し，$\mathfrak{g}$の内部自己同型$\sigma$（$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$の単位元連結成分の元）が存在して$\sigma\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'$となる。

定理3はカルタン(12)が初出（証明なし）。この定理は次の定理4とユニタリ実形の共役性（極大コンパクト部分群の共役性の特別な場合 E. カルタン(15)）から導かれる。

定理 4　コンパクト連結（半単純）リー群Gの任意の二つの極大トーラスH, H'は共役である。

この定理4はワイルの基本定理$G=\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$から導かれる。従って定理4による定理3の証明は、位相的考察に基づく。シュヴァレー[5]は半単純という仮定なしに次の定理5を証明した。

定理 5　任意の複素リー環$\mathfrak{g}$の二つのカルタン部分代数$\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$は$\mathfrak{g}$の内部自己同型$\sigma$で共役である；$\sigma\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'$.

シュヴァレーの証明は、プリュッカー座標と代数幾何（生成点の概念）を用いる純代数的なもので、任意の標数0の代数的閉体で成立つ。それはそれまでの位相的・解析的な証明と全く異なるものであった。（定理5の簡易化された証明についてはウインター（70），ハンフリーズ（33）参照。）。

§4　例外リー群（環）・スピノル

前節に述べた任意のルート系に対する（半）単純リー環の存在定理は，一意性定理と合わせると半単純リー環がルート系と一対一に対応することを示す。これは標数0の代数的閉体上の半単純リー環論がルート系という初等幾何学的対象によって統制されることを示す。実単純リー環の分類は、リー環またはルート系に対するガロア群$G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$の作用を考慮することにより$\mathbb{C}$上の分類から得られる（E.カルタン(12)，荒木捷郎(4)）。この統一性は、例えば有限単純群の分類と比較したとき，際立った特徴といえる。しかしまた単純多元環の分類程一様でもなく，代数的閉体上でも4系列の典型リー環と5個の例外リー環がそれぞれの個性を持つ。

シュヴァレーの群論の仕事では前節の存在定理のような統一理論が重要であるけれども，彼はこのような統一理論の外に、各単純リー群（リー環）特に例外リー群の個性に関する個別

的な研究も行っている。この方面で重要な研究を行ったフロイデンタール(27)も、「シュヴァレー・シェイファー〔14〕の研究が出発点だった」と述べているように〔14〕はこの方面の研究史上重要である。

例外リー群の研究はE.カルタンに始まる。カルタンは全集I, p.132で例外群の変換群としての構成を述べ、(10)ではその最低次元表現を構成している。しかしそれは説明が簡単すぎて、理解が困難な部分を含む。これを解読し、新しい研究の出発点とする仕事は、かなり遅れて始った。ジェイコブスンのG_2型リー環に対する研究(39)(1939年)あたりがそのはしりであろうか。カルタン(12)(全集I p.2981)は、ケイリーの8元数の作る非結合環(以下ケイリー環と呼ぶ)の自己同型写像群がG_2型例外リー群となるという注意を述べている。これに対しジェイコブスン(39)は、その無限小版として、標数$\neq 2$の任意の体K上のケイリー環$\mathfrak{C}$の導作用素(derivation)全体の作るリー環$\mathfrak{D}$は、14次元の単純リー環であることを証明している。キリング・カルタンの複素数体(標数0の代数的閉体でも同じ)上の単純リー環のリストでは、14次元のものはG_2型リー環しかない。そこでカルタンの注意が成立つことも証明されたのである。

シュヴァレー・シェイファー〔14〕では、1932年物理学者P.ヨルダン

が導入したジョルダン環を利用している。ジョルダン環とは双線型な積を持つベクトル空間で、積が $ab=ba$, $(ab)a^2=a(ba^2)$ という二つの恒等式をみたすものをいうのである。ジョルダン環は数学的にも興味を持たれ、ヨルダン等、アルバート(3)、ジェイコブスン等によってその構造が調べられ、単純環の分類が行われていた。$\mathbb{R}$上の単純ジョルダン環の典型的なものの一つに$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$上のエルミート行列の全体が

(1) $\qquad X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)$ (右辺の積は行列の通常の積)

を積として作るジョルダン環がある。これらは多元環から(1)で乗法を定義して得られる所謂特殊ジョルダン環(Special Jordanalgebra)であるが、特殊ジョルダン環でない唯一つの単純ジョルダン環として、ケイリー環$\mathfrak{C}$を係数とする3次のエルミート行列の全体$\mathfrak{J}$がある。これが例外ジョルダン環と呼ばれるものである。シュヴァレー・シェイファー[14]は、これについて次の定理1, 2を得た。

定理 1　標数0の代数的閉体上のケイリー環$\mathfrak{C}$上の3次エルミート行列の全体に(1)より乗法を定義して得られるジョルダン環$\mathfrak{J}$とする。$\mathfrak{J}$上の導作用素($D(X\circ Y)=DX\circ Y+X\circ DY$ をみたす$\mathfrak{J}$上の一次変換D)の全体$\mathfrak{D}$が作るリー環は、54次元の単純リー環でF_4型である。

定理 2　$X\in\mathfrak{J}$による右移動を $R_X: Y\to X\circ Y$ とし、

$\mathfrak{R} = \{R_X \mid X \in \mathfrak{J},\ \ \mathrm{Tr}X = 0\}$ とおくとき，$\mathfrak{gl}(\mathfrak{J})$ の部分リー代数

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{D} + \mathfrak{R}$$

は78次元の単純リー環で E_6 型である。

証明はどちらも適当に大きな部分リー環を用いて，次元を計算し随伴表現をその部分環の既約表現に分解することにより，単純性を導く。$\mathfrak{D}$ の場合は52次元の単純リー環は F_4 しかないことから，直ちに $\mathfrak{D} = F_4$ と結論される。$\mathfrak{g}$ の場合78次元の単純リー環は B_6，C_6，E_6 の三個があるが，$\mathfrak{g}$ のように27次元の既約表現（$\mathfrak{J}$ を表現空間とするもの）を持つのは E_6 だけであることから：$\mathfrak{g} = E_6$ と結論している。

[14]では，上の定理の証明に8次元直交群のリー環 $\mathfrak{o}(8, K)$ に対する「三つ組原理」(principle of triality) というものを使っている。これは $\mathfrak{o}(8, K)$ の位数3の外部自己同型をケイリー環を用いて構成したものである。これは8次元に限る特殊な現象であるが興味深い。シュヴァレーは[22]の最終章でこれを別の形で取り上げて詳しく論じている。「三つ組原理」はE.カルタン(13)が発見したもので，$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の外部自己同型 $X \longmapsto -{}^tX$ が射影幾何の双対原理に関連するのに対比して命名された。

このように[14]では，$\mathfrak{D}$ および $\mathfrak{g}$ が F_4 型，E_6 型である

ことを、最短コースで証明するという内容になっている。これとは別に[19][20]では別の立場からE_6を取上げている。

E_6は27次元既約表現を持ち、その表現の像はこの27次元空間W上の一次変換で、ある3次形式を（無限小変換の意味で）不変にするものの全体となることをE.カルタン(10)(p.142)が注意している。[19]は、このカルタンの言明を実際に確かめたもので、外積代数を用いて、この3次形式Fを具体的に構成している。そして$\mathfrak{g}=\{X\in\mathfrak{gl}(W)\mid XF=0\}$とおくとき、この線型リー環$\mathfrak{g}$のウエイトとルートを計算している。ルートの形から、$\mathfrak{g}$がE_6型であることが直接確められる。

例外リー群（環）の構造に関するシュヴァレーの発表された仕事は以上の[14][19][20][22]だけであるが、そのベッチ数に関する研究[15][26]が示すように彼は例外リー群全体に関し強い関心を持っていた。1953年シュヴァレーはフルブライト交換教授として来日したが、その時の最初の講演のテーマとして例外リー群を選んでいる。服部昭(30)によるその講演記録を見ると、F_4に関する[14]の結果の外、E型の群についても述べている。特にE_7はある56次元ベクトル空間の一つの4次形式を不変にする一次変換群として得られると述べている。これはカルタンの学位論文(10)(p.148)にある記述を受けたものであるが、これについてシュヴァレー自身がど

れだけ研究していたかは明らかでない。

このシュヴァレーの講演記録は次のような言葉で結っている。「例外リー群がすべて直交群に関係するのは principle of triality による。しかし，なぜ E_6, E_7, E_8 が射影群に関係してくるのか，またなぜ E_8 だけが低い次元の表現をもたないのか，これらのことは私には全く神秘的に思える。」

ここで E_8 の表現について述べていることは，次の意味である。各単純リー群の次元と $\mathbb{C}$ 上の自明でない既約表現の最低次元数は次の表にまとめられる。

単純リー群	$A_n(n\geqq1)$	$B_n(n\geqq2)$	$C_n(n\geqq3)$	$D_n(n\geqq4)$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
次　　元	n^2+2n	$2n^2+n$	$2n^2+n$	$2n^2-n$	78	133	248	52	14
既約表現の最低次元	$n+1$	$2n+1$	$2n$	$2n$	27	56	248	26	7

すなわち E_8 以外の各単純リー環は皆自身の次元より小さい次元数の既約表現を持つ。最低次元表現の像が同型なリー環の内最も簡単なものと考えられる。所が E_8 だけはそうではない。E_8 の最低次元表現は E_8 の随伴表現である。従ってこの場合 E_8 の最低次元表現を構成することは，E_8 自身を構成するのと同じであり，最低次元表現を作ることで最も簡明な E_8 の構成を得ることはできないのである。

シュヴァレーの上述の疑問は，今日でも十分に解明されたとは言えない。シュヴァレー自身も，例外リー群の研究ではなく，

任意の複素単純リー環と任意の体Kから出発して，K上の分解型単純代数群（シュヴァレー群）を構成するという研究[25]を日本滞在中に完成した。例外リー群については，例外リー環全部を含むある種のリー環を，ジョルダン環を用いて統一的に構成する方法をティッツ(57)が与えたことが注目される。

シュヴァレーは例外群だけでなく，典型群についても，詳しい研究を一つ行った。それが「スピノルの代数的理論」「22」である。1913年E・カルタン(11)は各複素単純リー環の基本既約表現を具体的に構成したが，その際直交群$O(n)$のリー環は，$\mathbb{C}^n$上のテンソルでは実現できない基本表現を一つ($n=2\nu+1$のとき)または二つ($n=2\nu$のとき)持つことを発見した。1920年代スペクトルの多重項やゼーマン効果を説明するために，電子のスピンが量子力学に導入された。1928年ディラック(26)は，彼の相対論的波動方程式を導入し，それによって電子のスピン角運動量と磁気能率を正しく導くことに成功した。そこでは時間tに対する2階の波動方程式を1階の方程式に「因数分解」することによりディラックは彼の方程式を導いたのであるが，その時用いられたのが，

$$\gamma_\mu^2=1 \quad \gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=0 \quad (\mu\neq\nu,\ 1\leq\mu,\ \nu\leq 4)$$

をみたす行列γ_μの組である。これはクリッフォードが1878年(Amer. J. Math. 1)に導入した多元環の基底と本質的に同じも

のである。(クリフォードでは $\gamma_i^2=-1$ となっている)(スピンをめぐる物理学史については、朝永振一郎「スピンはめぐる」(58)を参照) 1935年ブラウアー・ワイル(8)は、この関係をn次元で考え、n次元回転群の2価表現を与えるスピノルを導入した。1938年にE.カルタン(20)は独自の幾何学的な方法でスピノルを導入し、その多くの性質を論じた。

シュヴァレーの[22]は、この二つの仕事を統合し一般化したものといえる。[22]の内容の基本的なものは、次の点にある。

1. ブラウアー・ワイルが回転群の二価表現という形で論じていたのに対し、シュヴァレーは、直交群回転群の被覆群となるクリッフォード群 Γ 被約クリッフォード群 Γ_0^+ を導入しその既約表現としてスピン表現、半スピン表現を導入して、事態を明確に定式化したこと。これらの表現の表現空間の元がスピノル、半スピノルである。

2. ブラウアー・ワイルは複素数体 $\mathbb{C}$ 上の単位二次形式 Σx_i^2 に基づいて理論を構成したのに対し、シュヴァレーは、任意の体K上の任意の二次形式Qに対し、クリッフォード環 $C=C(Q)$ を構成してその構造を明らかにした。

3. Qが偶数次元の空間上の極大指数2次形式(2r次元空間M上の指数rのQ)に対し、Mの各r次元全特異部分空間Zが、ある半スピノル u_Z とスカラー倍 $\neq 0$ を除き一対一

に対応する。u_Z を Z の代表スピノルといい，ある Z に対し u_Z の形になるスピノルを純スピノルという。これは E.カルタン(20)が始めて導入した概念であるが，シュヴァレーはその新しい特徴付けを与えた。

4. 最終章でシュヴァレーは，8次元の極大指数2次形式Qに対し，「三つ組原理」の新しい定式化を与え，それを用いて，ケーリー環を定義した。

この「22」は，ごく一般の多元環に関する知識（単純環に対するウェダーバーンの定理等）のみを用いて，任意の体上の直交群とスピノルの理論が直接明快に構成されて居る点で，シュヴァレーの著書の中でも完成度の高いものの一つである。コロンビア大学二百年記念出版という形で出版されたためか，絶版になっているのは残念である。

§5 リー群の位相

大域的なリー群がワイル(65)により1925−26年に導入されると共に，その基本群が問題になった。ワイルはコンパクト，半単純リー群Gの基本群は有限群であることを証明したのであった。これを受けてE.カルタン(14)は各コンパクト単純リー環の随伴群の基本群をルート図形から計算することに成功した。次にカルタンは直ちにそのベッチ数の計算を

次の目標に選んだ (16)(18)(19)。彼はポアンカレの位相幾何学に関する最初の論文(45)(1895年)の示唆に従って微分形式を用いた。最初のノート(16)でカルタンは，閉多様体上のp-チェインとp-形式の間の基本的な関係を，二つの予想定理A,Bとして述べた。

ルベーグの指導の下で位相幾何を研究していたド・ラームがこれを読んで，その研究を始め，定理A,Bの証明に成功したのである(ド・ラーム(24)参照)。これがド・ラームの学位論文(23)の内容となった。この学位論文の審査をしたのがカルタンであり，(8)では既に脚註でド・ラームが証明に成功した旨が記されている。ド・ラームの定理により，ベッチ数の計算を微分形式によって行う理論的な基礎ができた。

さらにカルタンは，リー群Gの等質空間上の各(コ)ホモロジー類を不変微分形式で代表させることを考えた。これが特にうまく行くのは，彼が発見したばかりの対称空間の場合で，このとき任意の不変微分形式ωは閉形式($d\omega=0$)となる。(カルタンはこの論文では，現在の用語と異なり閉形式を，exactと呼んでいることに注意) そして特にGがコンパクト(かつ連結)の場合には，G/H上の任意の閉形式ωに対し，そのGの元gによる変換$T_g\omega$のG上の平均$I\omega$で置き換えることができる。すなわち $\omega-I\omega=d\theta$ となるθがある。

また $\omega = d\theta$ なら $\omega = d\varphi$, $I\varphi = \varphi$ となる φ がある（定理 I, II）

このことと ド・ラーム の定理から、カルタンはコンパクト対称空間 $M = G/H$ の p 次ベッチ数 B_p は、M 上の G－不変な p 次微分形式の作る線型空間の次元に等しいことを見出した。特にコンパクト・リー群 G の p 次ベッチ数 B_p は、G 上の両側不変 p 次微分形式の空間の次元に等しい。従ってそれは、G の随伴表現の p 次外積が含む単位表現の重複度に等しい。この一般論から進んでカルタンは、個々のコンパクト・リー群 G 特にコンパクト典型群の p 次ベッチ数 B_p またはそのポアンカレ多項式 $P_G(t) = \sum_{p=0}^{n} B_p t^p$ をもとめようとしたが、いくつかの一般的命題を得、また $A_{n-1} = SU(n)$, $B_n = SU(2n+1)$ のポアンカレ多項式が、それぞれ

(1) $P_{A_{n-1}}(t) = (1+t^3)(1+t^5)\cdots(1+t^{2n-1})$

(2) $P_{B_n}(t) = (1+t^3)(1+t^7)\cdots(1+t^{4n-1})$

であることを予想するにとどまった。

カルタンはこの問題の重要性を論文や著書、講演などで強調した。その結果 1935 年になって R. ブラウァー (7) がカルタンの方法で上の予想を証明した。彼は $C_n = Sp(n)$, $D_n = SO(2n)$ に対しても

(3) $P_{C_n}(t) = P_{B_n}(t)$

(4) $P_{D_n}(t) = (1+t^3)(1+t^7)\cdots(1+t^{4n-5})(1+t^{2n-1})$

であることを示した。ほぼ同時にポントリャーギン（47）も別の方法で同じ結果を得た。

1941年にH.ホップ（Ann. of Math. 42）は，連結コンパクト・リー群の実係数全ホモロジー群$H(G)$には，群の乗法$G\times G\to G$によって自然に積が定義されて，多元環になることを発見した。そしてそれは，原始元と呼ばれる奇数次元の元$x_1,\cdots,x_l$から生成される外積代数となることを示した。このとき生成元の個数lは，Gの階数（Gに含まれるトーラス部分群の最大次元）に等しい。これから，x_iの次元数を$2m_i-1$とするとき，Gのポアンカレ多項式は

$$P_G(t)=\prod_{i=1}^{l}(1+t^{2m_i-1})$$

の形となる。この$2m_i-1=p_i$ $(1\leqq i\leqq l)$をGの冪指数と呼ぶ。

この辺からシュヴァレーのリー群論の研究が始まる。彼のリー群の位相に関する最初の論文は，連結可解リー群が$T^n\times R^m$と同相であることを示した[4]であるが，これは話の都合上後にまわし，アイレンバーグとの共著論文[10]を取上げよう。これはリー環のコホモロジー群の立場から，既知の結果を見直したものである。前半は上述のカルタンのベッチ数に関する結果を整理したものであり，例えば次の定理が証明されている。

定理 1. コンパクト連結リー群Gの実係数q次コホモ

ロジー群 $H^q(\mathfrak{g})$ と同型である。

[10] の後半は、リー環 $\mathfrak{g}$ の表現 P に関するコホモロジー群 $H(\mathfrak{g}, P)$ を扱って居り、特にすべての表現が完全可約という性質が $H^1(\mathfrak{g}, P)=\{0\}$ で表現されること及びリー環の拡大と2次コホモロジー群の関係が述べられている。これは J.H.C. ホワイトヘッド (68) やアドー(1) の研究を整理したものである。なお第Ⅲ章では、ワイル (65) によって、複素半単純リー群とそのコンパクト実形の間の関係として述べられたユニタリ制限の原理が拡張され、代数化されて次の形で述べられている。

K を標数 0 の体、L をその拡大体、$\mathfrak{g}$ を K 上のリー環、$\mathfrak{g}^L$ を $\mathfrak{g}$ の L への係数拡大とする。リー環 $\mathfrak{g}$ の性質 P は、次の 1°, 2° をみたすとき、線型性質という:

1° K 上のリー環 $\mathfrak{g}$ が性質 P を持つとき、K の任意の拡大体 L に対し、$\mathfrak{g}^L$ も性質 P を持つ。

2° K のある拡大体 L に対し、$\mathfrak{g}^L$ が性質 P を持てば、$\mathfrak{g}$ も性質 P を持つ。

定理 2 (ユニタリ制限の原理) P が線型性質であるとき、任意のコンパクト・リー環 (キリング形式が負値の実リー環) が性質 P を持てば、任意の標数 0 の体上の半単純リー環も性質 P を持つ。

この定理 2 は万能ではなく、例えば複素半単純リー環のカル

タン部分環の共役性は、コンパクト実形のカルタン部分環の共役性とコンパクト実形の共役性に帰着するが、これは定理2の適用外である。)

さて、実際にコンパクト単純リー群 G のベッチ数を求めようとすると、定理1だけでは計算できない。R.ブラウアー(7)は、ワイルの典型群の表現論を用いて、典型群の場合にベッチ数を計算した。コンパクト例外リー群 G では同じようにはいかない。そこでさらに G にベッチ数を、G に内在する不変量と結びつけることが必要となる。こゝで例外リー群の存在がリー群論の一般論の発展を促す要因となったのである。

例外リー群のベッチ数を最初に求めたのは、Yen Chi Ta(72)であるが、これは証明の方針しか与えられていない。理論的な break through はヴェイユ(62)のファイバー空間の微分幾何学的研究からもたらされた。ヴェイユは G 上の両側不変微分式が外積によって作る多元環 $H(\mathfrak{g})$ の中の原始元の作る部分空間 $P(\mathfrak{g})$ と、$\mathfrak{g}$ 上の多項式函数環($\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ 上の対称環) $S(\mathfrak{g})$ の中で随伴群 $Ad\,G$ の反傾群の不変式の作る部分環 $I(\mathfrak{g})$ の間の関係を与えた。$\omega_1, \cdots, \omega_n$ を $\mathfrak{g}^*$ の基底とし、G 上の左不変一次微分形式と考える。$d\omega_i$ は2次微分形式で $\mathfrak{g}^*$ 上のグラスマン代数 $A(\mathfrak{g})$ の中心に属する。そこで $P(d\omega_1, \cdots, d\omega_n)$ が考えられ、$H(\mathfrak{g})$ に属する。このとき $\omega_i(X) = X_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ に

対し

$$(5)\qquad \eta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial P}{\partial x_k}(d\omega_1, \cdots, d\omega_n)$$

を考えると $d\eta = 0$, $\eta \in H(\mathfrak{g})$となる。そして写像 $\Phi : P \longrightarrow \eta$ は $I(\mathfrak{g}) \rightarrow H(\mathfrak{g})$ の線型写像で $\mathrm{Im}\,\Phi = P(\mathfrak{g})$ となる。これから $I(\mathfrak{g})$ が次数 $m_1, \cdots, m_\ell$ の ℓ 個の代数的独立な元から生成されることがわかる。そこで G のベッチ数をもとめるには、$I(\mathfrak{g})$ の生成元を調べればよい。

この代数化をもう一段進めることができる。即ち H を G の極大トーラス、$\mathfrak{h}$ を H のリー環とするとき、ワイル (65) の基本定理から

$$G = \bigcup_{g\in G} gHg^{-1}, \quad \mathfrak{g} = \bigcup_{g\in G}(\mathrm{Ad}\,g)\mathfrak{h}$$

となる。そして H の正規化群 $N(H)$ を H で割った $W(G) = N(H)/H$ は有限群であり、G のワイル群と呼ばれる。それは随伴表現により $\mathfrak{h}$ 上の線型群と考えられる。この線型群は、各ルートを法ベクトルとする超平面に関する鏡映から生成される群である。今 $\mathfrak{h}$ 上の多項式函数環の内で $W(G)$ で不変なものの全体の作る環 $I(\mathfrak{h})$ を考える。このとき $P \in I(\mathfrak{g})$ に対し、その $\mathfrak{h}$ 上への限定を P' とするとき、写像 $P \longrightarrow P'$ により $I(\mathfrak{g}) \cong I(\mathfrak{h})$ と環同型になる。$I(\mathfrak{h})$ あるいは、より一般に、有限鏡映群の不変式環の構造はシュヴァレー が [23] で与えた。それは次のように述べられる。

定理　標数0の体K上のn次元線型空間V上の有限鏡映群Gで不変なV上の多項式函数の作る環Iは，n個の代数的に独立な同次式から生成される。

（この定理は，リー群の位相に用いられるだけでなく，対称空間上の不変微分作用素環の構造にも重要な役割を果すなど，リー群の表現論，調和解析でも大切な定理である。）

従って有限群W(G)の$\mathfrak{t}$上の不変式環の$I(\mathfrak{t})$の生成元の次数を求めることにより，Gのベッチ数は計算できる。（生成元のとり方は一意的でないがその次数は一意的に定まる。）

例えば$G=U(n)$のとき，$W(U(n))=S_n$（n次対称群）である。$\mathfrak{t}$の自然な座標$x_1,\dots,x_n$をとると$W(U(n))$はこのn個の変数の置換からなる。従って$I(\mathfrak{t})$の生成元としては基本対称式，$\sum x_i$, $\sum_{i<j} x_i x_j$, $\dots$, $x_1\cdots x_n$がとれる。その次数は$m_1=1$, $m_2=2$, $\dots$, $m_n=n$であるから，$U(n)$のポアンカレ多項式は

(6)　$$P_{U(n)}(t)=(1+t)(1+t^3)(1+t^5)\cdots(1+t^{2n-1})$$

となる。これからまた，$U(n)$から一次元の中心を除いた$A_{n-1}=SU(n)$のポアンカレ多項式が(1)で与えられることもわかる。同様に他の典型群B_n, C_n, D_nのポアンカレ多項式が(2)(3)(4)で与えられることもわかる。これは典型群ではワイル群が対称群かそれと$(2,\dots,2)$型アーベル群の半直積だから

である。例外群ではワイル群がもっと複雑になるので、典型群のようには行かない。

[15]では $J(\mathfrak{g})$ の性質と

$$(7)\quad \sum_{i=1}^{l}(2m_i-1)=\dim G,\quad \prod_{i=1}^{l} m_i = \mathrm{ord}\,W(G)$$

という一般的関係から例外リー群のベッチ数も計算できると述べているがその計算法は記されていない。その具体的計算法はボレルとの共著論文[26]に記されている。こゝでは[15]とは計算法が異なり、ハーシュの公式（ハーシュが予想し、ルレイ(42)とH.カルタン、コシュール、A.ボレル等が証明した）

$$(8)\quad P_{G/U}(t)=\frac{(1-t^{2m_1})\cdots(1-t^{2m_l})}{(1-t^{2n_1})\cdots(1-t^{2n_l})}$$

を用いる。こゝでUはGと同じ階数のGの閉連結部分群で、それらはボレル・ジーベンタール(5)によって、拡大ディンキン図形から決定されている。また $2n_1-1,\cdots,2n_l-1$ はUの冪指数である。この公式から直ちに次のことがわかる。

(9) $n_1,\cdots,n_l$ の内のt個が一つの整数Cで割り切れるとき、$m_1,\cdots,m_l$ の内のt個もCで割り切れる。

[26]では、この(9)を巧みに用い、(7)のような一般的関係と合せて、各例外リー群の冪指数を決定している。ただし例えば F_4 の場合に、ケーリー射影平面（エルミット対称空間）の奇数次ベッチ数が消える等の既知の事実をいくつか用いて

いる。またE_8の場合は，計算がかなり面倒で，ワイル群の不変式に関する事実も用いている。序文で著者達は，「ここでの方法は，いろいろな知識を用いる点で less satisfactory であるが，計算は簡単になっている」と述べている。

コクセター (Duke Math. J. 18 (1951), P. 765) は，「ICM 1950 におけるシュヴァレーの講演 [15] を聞いて始めて，以前に自分が (22) で導入したコクセター変換の固有値が，リー群のベッチ数に関係することを知った」と述べている。コクセター変換を利用することによって，[26] のように種々の事実を用いることなく，[15] の方針だけで，$I(\mathfrak{g})$ の不変式の次数を求め，ベッチ数が計算できるようになった。これについては，ブルバキ (6)，ハンフリーズ (34) を参照。

さて以上はコンパクトなリー群の位相についてであった。コンパクトでないリー群の位相についての研究も E. カルタンに始まる。彼は対称リーマン空間の理論を用いて，非コンパクト連結半単純リー群 G は，その極大コンパクト部分群とユークリッド空間の直積に同相であることを示した。これを用いてカルタンは，一般に単連結リー群について，次の定理を得た (19)。

定理（E. カルタン）任意の単連結リー群 G は，いくつかの単連結コンパクト単純リー群（0個のこともある）と，ユーク

リッド空間R^nの直積に同相である。

このカルタンの定理は特に,「Gが単連結可解リー群ならば,GはR^nと同相である」という結果を含む。連結リー群Gの基本群は常に有限生成アーベル群であり,Gはその普遍被覆群$\tilde{G}$をその中心に含まれる離散部分群Γ($\cong \pi_1(G)$)で割って得られる: $G \cong \tilde{G}/\Gamma$.

シュヴァレーは[4]において次のことを示した。

定理1. Gを単連結可解リー群とする。Gの中心に含まれる離散部分群Γが与えられたとき,Gのリー環$\mathfrak{g}$の基底$L_1, \cdots, L_n$であって,次の(1)(2)をみたすものが存在する:

(1) $(t_1, \cdots, t_n) \in R^n \longrightarrow \exp t_1 L_1 \cdots \exp t_n L_n$ はR^n onto Gの同相写像である.

(2) Γは自由アーベル群で$\mathrm{rank}\, \Gamma = r$のとき,$\{1, 2, \cdots, n\}$の部分集合$\{i_1, \cdots, i_r\}$が存在して$\exp L_{i_1}, \cdots, \exp L_{i_r}$は$\Gamma$の独立な生成元であり,$[L_{i_\alpha}, L_{i_\beta}] = 0$ $(\alpha \neq \beta)$である。

これから直ちに次のことが導かれる。

定理2. 任意のn次元連結可解リー群Gは,$T^r \times R^{n-r}$と同相である。(ただしTは一次元トーラス)

この外,シュヴァレーはカルタンの主要結果の現代的な再証

明も与えている。岩澤(37)にある半単純リー群の随伴群 $G=KAN$ と岩澤分解されるという結果(K=極大コンパクト部分群, ANは$\mathfrak{g}$の標準基底を適当な順(ルートの大きさの順)に並べたとき, Gに含まれる対角成分>0の上三角行列の全体, Aは対角行列)は, Gと$K\times R^n$が同相であることを示すだけでなく, ANが部分群となっているため、表現論で便利に用いられている。(37)にある証明はシュヴァレーのものであることが脚註に記されている。定理2は、マリツェフ(43)と岩澤(37)による「任意の連結リー群Gはその極大コンパクト部分群Kとユークリッド空間R^nの直積と同相である。Gの任意の二つの極大コンパクト部分群は互いに共役である」という一般的定理の基礎の一つとなった。

なおシュヴァレーは, G=半単純の場合の極大コンパクト部分群の共役性についても一つの証明を与えた。これは岩堀(38)で紹介されている。

§6 第五問題

ヒルベルトは、その第5問題を「微分可能性または解析性の仮定なしにリー群論を建設することは可能か」という問題として提出した。1933年フォン・ノイマン(60)は、この形では反例があることを示し,「位相多様体である位相群G(以

下位相リー群という）はリー群か」という問題として定式化し，Gがコンパクトのとき，答はyesであることを証明した。

このフォン・ノイマンの論文が、今日言う意味での第5問題の出発点であり、大きな影響を与えた。シュヴァレーも、この論文とハール測度の発見に刺戟されて、[2]を発表した。ストーン(53)によって，ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の1パラメタ・ユニタリ群$U(t)$は，自己共役作用素Hにより，$U(t)=\exp(itH)$ $(t\in \mathbb{R})$の形に表わされる。シュヴァレーは$iH=R$を無限小作用素と呼んでいる。[2]の主定理は，このストーンの定理を踏まえて、「ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の有限個の無限小作用素（$=i\times$自己共役作用素）$R_1,\cdots,R_l$が，リー環の基底となっているとき，（即ち$[R_i,R_j]=\sum_k c_{ijk}R_k$）となっているとき），$U_i(t)=\exp tR_i$ $(1\leqq i\leqq l)$は，局所リー群を生成する」というものであった。シュヴァレーの記述は，彼の他の論文と似ず荒削りの所がある。例えばR_jが一般に非有界作用素であることから来る困難さを十分意識していないようである。

そしてこの論文の最後に次の命題が証明できると述べられている：「可分な局所コンパクト群Gが，さらに局所連結であり、単位元1の近傍Vで{1}以外の部分群を含まないものを含むとき、Gはリー群である。」この論文の発表後間もなく，シュヴァレーは、自分の発見したこの命題の「証明」が不

完全であることを発見した。このことはH・カルタン (21) にシュヴァレーが語ったこととして注記されている。しかし上の命題に述べられたような、単位元の近傍Vを持つ位相群は、以後「小さな部分群を持たない群」と呼ばれ、第5問題の最終的な解決の鍵となったのである。

実数の加法群$\mathbb{R}$は小さな部分群を含まない。これはアルキメデスの原理からの直接の帰結である。非可換な一般なリー群Gでも、積xyの標準座標は一次の近似ではxとyの標準座標の和となる。このことからリー群Gも小さな部分群を持たないことが導かれる。一方p進体$\mathbb{Q}_p$のような非アルキメデス付値を持つ体の加法群は、小さい部分群を持つ。$\mathbb{Q}_p$ではp進展開において、p^n以上の項から成る元の集合をV_nとすれば、V_nは加法部分群で$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$が0の近傍系の基底を作るから、$\mathbb{Q}_p$は小さい部分群を持つ。一般の非アルキメデス付値体でも同様である。さらに一般に完全不連結な位相群Gは、単位元eのどんな近傍にも、Gのコンパクトな開部分群$H\neq\{e\}$が含まれる。こうして局所コンパクト群の中には、アルキメデス的なリー群のグループと、非アルキメデス的な完全不連結群のグループが対立しているのである。第5問題とは、局所コンパクト群の中で、前者のグループを特徴付ける性質を求める問題と考えられる。

一般の局所コンパクト群の中での，このニつのグループの位置を示す手がかりとなるものとして，次のポントリャーギン(48)の定理がある。

定理（ポントリャーギン）有限次元 r のコンパクト群 G の単位元の近傍 U で，r 次元局所リー群 L と完全不連結なコンパクト正規部分群 N の直積となるものが存在する。（従って G が局所連結ならば，$N=\{e\}$，$V=L$ で，G はリー群となる。）

第5問題の研究によって，この定理の状態が，一般的な局所コンパクト群に対しても成立つことが最終的には言えたのであるが，その結論に到達するための道はそれ程簡単ではなかった。

第5問題に対するシュヴァレーの最大の寄与は，可解群に対し，肯定的な解決を与えたことである。彼の定理は次の通りである。

定理1（シュヴァレー[3]）可解局所コンパクト群は，有限次元かつ局所連結ならば（従って位相リー群ならば），リー群である。

この[3]の掲載されたのは，ミシガン大学で行われたトポロジーのシンポジウムの報告集であり，戦争のため我国には来なかった。そして戦後数学書の輸入が始まった時には絶版になっていたのではないかと思われる。従ってこの[3]を筆

者は見ていない。しかし岩澤健吉は戦後 Math. Review でこのシュヴァレーの結果を知り、(36)において、その証明を与えた。岩澤の証明では、やはり上のポントリャーギンの定理に平行した結果が、可解局所コンパクト群に対して成立つことが基礎になっている。岩澤はこれからさらに進んで、リー群で近似できる局所コンパクト群として L群という概念を導入した。岩澤の L群の理論は、ほぼ平行して行われた A.M. グリースン(28)の GL群の研究と共に、オ5問題解決の基礎となった理論である。

シュヴァレー[17]はまた1949年のグリースンの「小さい部分群を持たない局所コンパクト群Gにおいては、単位元のある近傍Vにおいて、平方根をとる写像が定義され、しかもそれは一対一写像である」という結果(Bull. AMS 55 (1949))に触発されて、次の定理2を証明した。

定理2　小さい部分群を持たない任意の位相リー群Gにおいて、単位元のある近傍Vで一径数部分群で埋めつくされているものが存在する。

こうしてシュヴァレーはオ5問題に、強い関心を抱き続けて来た。しかし1940年代後半から、この問題は多くの研究者によって熱心に研究されるようになり、良く知られているように岩澤，グリースン，モンゴメリー・ジピン　，山辺英彦(72)(73)

等によって，1952－53年に最終的に第5問題は解決した。シュヴァレーは、この最終段階には加わらなかった。

上述のように第5問題は，局所コンパクト群のクラスの中で、アルキメデス的なもの，局所連結なものを特徴付ける問題と考えられる。一方，逆の方向のアプローチとして，1960年代以後，非アルキメデス的な完備付値体上でも，リー群と平行して解析群の理論ができることが示されたことは注目に値する。すなわち，セール(49)，ブルバキ(6) 第3章等で，離散的でない完備付値体上でのリー群論が構成された。完全不連結なp進体$\mathbb{Q}_p$上でもある所までは，$\mathbb{R}$や$\mathbb{C}$の上と平行した理論が成立つのである。

§7 結び

以上述べて来たシュヴァレーのリー群論における仕事をリー群論の研究史の中で考えて見よう。リー以来のリー群論の120年にわたる歴史は，次のように区分される。

第一期	1873年―1893年	(1893年リー「変換群論第3巻出版)
第二期	1894 ―1924	(1894年 カルタン学位論文(11) 出版)
第三期	1925 ― 1948	(1925年 ワイルの表現論(64)発表) (1948年 シュヴァレー [12] 発表
第四期	1947 ― 1976	(1947年 ユニタリ表現論始まる
第五期	1977 ― 現在	(1976年 ハリッシ・チャンドラ公式完成

第一期はリー，第二期はカルタンがそれぞれ代表的研究者であり，殆んど one man show に近い。第三期からは研究者が増え，多くの人によって重要な研究が行われるようになる。第三期はワイル(65)によって始まる。リー群論の大域的研究が開始されたのである。この時期の初期には，またカルタンが盛んに活動して居り，対称リーマン空間の大きな理論を作り上げている。このカルタンとワイルの大きな仕事を引き継いだのが，シュヴァレーを始めとする何人かの数学者である。従ってシュヴァレーの仕事には，カルタンの強い影響が見られる。これらの人人によって，リー群論の現代化がなし遂げられた。その現代化の内容の内，特に重要なのは次の二点であろう。

1. リー群をリーのように局所的変換群（芽）としてではなく，大域的な多様体としてとらえた理論を建設した。

2. （標数0の体上の）リー環論を，建設した。その場合単純環に対する個別的な検証ではなく統一的証明を与え，リー群論と独立に一貫した体系を樹立した。

1については[9]，2については[5][10][12]において，シュヴァレーは基本的な貢献をした。彼によって上の1，2の二つの目標は，その骨組みができたのである。一方 1947年には，ゲルファント・ナイマルクの $SL(2,\mathbb{C})$，バーグマンの $SL(2,\mathbb{R})$

のユニタリ表現論が発表され，リー群の無限次元表現論という新しい分野がはっきりとその姿を現わした。これが[13]発表の1948年でリー群論研究史の第三期が終るとした理由である。実際1950年以後では、こうしてできた現代的なリー群とリー環の理論を基礎にして、無限次元表現，線型代数群，等質空間の微分幾何，その位相幾何，リー群の離散部分群などの新しい研究分野が出現して来る。リー群・リー環自体の基礎的研究は、1950年以後もいくつかなされているが、やはりこの辺で時代は変ったと考えるのが適当であろう。そうしてシュヴァレーは、ワイルによって開かれた，リー群論史の第三期を完成させ、同時に線型代数群の理論という新しい分野の幕を開けた人と位置付けることができる。

The Publications of C.Chevalley on the group theory

[1] Groupes topologiques, groupes fuchsiens, groupes libres, C.R.Acad. Sci. Paris 192(1931), 724-726. (with J. Herbrand)

[2] Génération d'un groupe topologique par transformations infinitésimales, C.R. Acad. Sci. Paris 196(1933), 744-746.

[3] Two theorems on solvable topological groups, Lectures on topology (University of Michigan), Univ. of Michigan Press, An Arbor, 1941, pp. 291-292.

[4] On the topological structure of solvable groups, Ann. of Math. 42(1941), 666-675.

[5] An algebraic proof of a property of Lie groups, Amer.J.Math. 63(1941), 785-793.

[6] A new kind of relationship between matrices, Amer. J. Math. 65(1943), 321-351.

[7] On groups of automorphisms of Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 30(1944), 274-275.

[8] On algebraic Lie algebras, Proc. Nat.Acad. Sci.U.S.A. 31(1945),195-196. (with H.Tuan)

[9] "Theory of Lie groups I", Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

[10] Algebraic Lie algebras, Ann. of Math. 48(1947), 91-100.

[11] Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, Trans.AMS. 63(1948), 85-124. (with S. Eilenberg)

[12] Sur la classification des algèbres de Lie et de leurs représentations, C.R.Acad.Sci. Paris 227(1948),1136-1138.

[13] Sur les représentations des algèbress de Lie simples,C.R.Acad.Sci. Paris 227(1948), 1197.

[14] The exceptional Lie algebras F_4 and E_6, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A. 36(1950), 137-141. (with D.Schafer)

[15] The Betti numbers of the exceptional simple Lie groups, Proc.ICM 1950, Cambridge Mass. vol. 2, pp.21-24.

[16] Two proofs of a theorem on algebraic groups, Proc.AMS 2(1951),126-134. (with E.Kolchin)

[17] On a theorem of Gleason, Proc.AMS 3(1951), 122-125.

[18] "Théorie des groupes de Lie II", Hermann, Paris, 1951.

[19] Sur le groupe E_6, C.R.Acad.Sci. Paris 232(1951), 1991-1993.

[20] Sur une variété algébrique liée à l'étude du groupe E_6, C.R.Acad. Sci. Paris 232 (1951), 2168-2170.

[21] On algebraic group varaieties, J.Math. Soc. Japan 6(1954), 36-44.

[22] "The algebraic theory of spinors", Columbia Univ. Press, New York, 1954.

[23] Invariants of finite groups generated by reflections, Amer.J. Math. 77(1955), 778-782.

[24] "Théorie des groupes de Lie III", Hermann, Paris, 1955.

[25] Sur certains groupes simples, Tôhoku Math. J. 7(1955), 14-66.

[26] The Betti numbers of the exceptional groups, Memoirs AMS 14(1955), 1-9. (with A.Borel)

[27]"Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques", École Norm. Sup. Paris, 1956-1958. (with P.Cartier, M.Lazard, and A.Grothendieck)

[28] La théorie des groupes algébriques, Proc. ICM 1958, Edinburgh, Canbridge Univ.

Press, 1960, pp.53-68.

[29] Une démonstration d'un théorème sur groupes algébriques, J. Math. pure et appl. 39(1960), 307-317.

[30] Certains schémas de groupes semi-simples, Sém.Bourbaki 1960/61,no.219, Benjamin, New York, 1966.

References

(1) I.Ado, Über die Struktur der enndlichen kontinuierlichen Gruppen, (Russian with German summary), Izvestia F.M.O. Kazan 6(1934), 38-42.

(2) I.Ado, On the representations of finite dimensional continuous groups by means of linear transformations (Russian), Izvestiya F.M.O. Kazan 7(1934/35)), 3-43.

(3) A.A.Albert, A structure theory for Jordan algebras, Ann. of Math. 48(1947), 546-567.

(4) S.Araki, On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, J.Math. Osaka City Unv. 13(1962), 1-34.

(5) A.Borel and J.Siebenthal, Les sous-groupes fermés connexes de rang maximum des groupes de Lie clos, Comm. Math. Helv. 23(1949/50), 200-221.

(6) N.Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, ch. 1, 1960, ch. 2 et 3, 1972, ch. 4,5 et 6, 1968, Hermann ,Paris(杉浦訳、ブルバキ,「数学原論」、リー群とリー環、1,2,3,東京図書).

(7) R.Brauer, Sur les invariants intégraux des variétés de groupes simples clos, C.R.Acad.Sci Paris 201(1935), 419-421.

(8) R.Brauer and H.Weyl, Spinors in n-dimensions, Amer.J.Math.57(1935)), 425-449.

(9) S.S.Cairns, Triangulation of the manifold of class one, Bull.AMS 41(1935), 549-552.

(10) E.Cartan, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thèse, Nony, Paris,1894.

(11) E.Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull.Soc.Math. France 41(1913), 53-96.

(12) E.Cartan, Les groupes réels simples finis et continus, Ann.École Norm.Sup. 31(1914), 263-355.

(13) E.Cartan, Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples, Bull.Soc.Math. France 49(1925), 361-374.

(14) E.Cartan, La géométrie des groupes simples, Annali Mat. 4(1927), 209-256.

(15) E.Cartan. Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemanienne, J.Math. pures et appl. 8(1929), 1-33.

(16) E.Cartan, Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos, C.R.Acad.Sci. Paris 187(1928),196-198.

(17) E.Cartan, Leçon sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

(18) E.Cartan, Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, Ann.Soc.pol.Math. 8(1929),181-225.

(19) E.Cartan, Topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie, L'Enseignment Math. 35(1936), 177-200.

(20) E.Cartan," Leçon sur la théorie des spineurss I,II", Hermann, Paris, 1938.

(21) H.Cartan, "Sur les groupes de transformations analytiques", Hermann, Paris, 1935.

(22) H.S.M.Coxeter, Discrete groups generated by reflections, Ann. of Math. 35(1934),

588-621.
(23) G.de Rham, Sur l'analysis situs des variétéss à n dimension (Thèse), J.Math. pures et appl. 10(1931), 115-200.
(24) G. de Rham, (a) L'oeuvres d'E.Cartan et la topologie, Hommage à Elie Cartan, (b) Quelques souvenirs des années 1925-1950, "Oeuvres math". de de Rham, L'Enseignement math, Genéve,1981. pp.641-650, 651-668.
(25) J.Dieudonné and J.Tits, Claude Chevalley (1909-1984), Bull.AMS 17(1987), 1-7.
(26) P.A.M.Dirac, The quantum theory of electrons, Proc.Roy.Soc.London, 117(1928), 610-629.
(27) H.Freudenthal, Lie groups in the foundation of geometry,Advances in Math. 1(1964), 145-190.
(28) A.Gleason, The structure of locally compact groups, Duke Math.J. 18(1951). 85-104.
(29) Harish-Chandra, On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra, Trans.AMS 70(1951), 28-96.
(30) 服部昭、C.Chevalley 教授の東大における講演:新しい単純群について、数学 6(1954),42-45
(31) F.Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, de Gruyter, Leipzig, 1914.
(32) D.Hilbert, Über die Grundlagen der Geometrie, Math.Ann. 56(1902),381-422. Reprinted in "Grundlagen der Geometrie" 7th. ed. (寺阪英孝訳、「幾何学の基礎」、共立出版、pp,154-193)
(33) J.E.Humphreys, "Introduction to Lie algebras and representation theory", Springer, 1972.
(34) J.E.Humphreys, "Reflection groups and Coxeter groups", Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1990.
(35) 彌永昌吉編、「数論」、岩波書店、1969.
(36) 岩澤健吉、Hilbert の第 5 の問題、数学 1(1948),161-171.
(37) K.Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math. 50(1949), 507-558.
(38) 岩堀長慶、対称リーマン空間の不動点定理、「微分幾何学の基礎とその応用」、数学振興会夏期セミナー第 1 集、1956,pp.40-60.
(39) N.Jacobson, Cayley numbers and normal simple Lie algebra of type G, Duke Math.J. 5(1937), 775-783.
(40) W.Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen I-IV, Math.Ann. 31(1888), 252-290, 33(1889), 1-48, 34(1889), 57-122, 36(1990), 161-189.
(41) J.L.Koszul, Sur un type d'algèbres differentielles en rapport avec la transgression, Colloque de Topologie (Espaces fibrés) Bruxelles 1950, CRBM Liége et Paris, 1951, pp.73-81.
(42) J.Leray, Determination, dans les cas nonexceptionels, de l'anneau de cohomologie de l'espace homogènes quotient d'un groupe de Lie compact par un sous-groupe de même rang, C.R.Acad.Sci. Paris 228(1949), 1784-1786.
(43) A.Malcev, On the theory of the Lie groups in the large, Mat.Sbornik 16(1945), 163-190.
(44) A.Malcev, On solvable topological groups (Russian), Mat.Sbornik 19(1946), 165-174.
(45) H.Poincaré, Analysis situs, J.l'École polytech. 1(1895), 1-123, Complément à analy-

sis situs, Rend.Circlo mat.Palermo, 13(1899), 285-343, Deuxième complément, Proc.London Math.Soc. 32(1900), 277-308, cinquième complément, Rend.Circlo mat. Palermo 18(1904), 45-110. (Oeuvres t. VI)

(46) L.S.Pontrjagin, Sur les groupes topologiques compacts et le cinquième probleme de M.Hilbert, C.R.Acad.Sci. Paris 198(1934), 238-240.

(47) L.S.Pontrjagin, Sur les nombres de Betti des groupes de Lie, C.R.Acad.Sci. Paris 200(1935), 1277-1280.

(48) L.S.Pontrjagin," Topological groups", Princeton Univ.Press, Princeton, 1939.

(49) J.-P.Serre, "Lie algebras and Lie groups", 1964 Lectures at Harvard Univ., Benjamin, New York, 1965.

(50) J.-P.Serre," Algèbres de Lie semi-simples comlexes", Benjamin, New York, 1966.

(51) O.Schreier, Abstract kontinuierlichen Gruppen, Abh.Math.Sem. Hamburg 4(1925), 15-32.

(53) O.Schreier, Die Verwandschaft stetigen Gruppen im Grossen, Abh.Math.Sem. Hamburg 5(1926), 233-244.

(54) 杉浦光夫、リーとキリング・カルタンの構造概念、津田塾大学数学・計算機科学研究所報 No.1、19世紀科学史、1991,pp.76-103.

(55)杉浦光夫、ワイルの群論、津田塾大学数学・計算機科学研究所報 No.4、近現代数学史、1992,pp.68-97.

(56)高木貞治、「代数的整数論」、岩波書店、1948.

(57) J.Tits, Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionelles I, Indag. Math. 28(1966), 223-237.

(58)朝永振一郎、「スピンはめぐる、成熟期の量子力学」、自然選書、中央公論社、1974.

(59) van der Waerden, Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen, Math.Zeit. 37(1033), 446-462.

(60) J.von Neumann, Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, Ann. of Math. 34(1933), 170-190.

(61) O.Veblen and J.H.C.Whitehead, "The foundation of differential geometry", Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1932(矢野健太郎訳、「微分幾何学の基礎」、岩波書店、1950).

(62) A.Weil, Géometrie différentielle des espaces fibrés, Oeuvres Scientifiques vol.1., [1949e] pp.422-436. Springer, 1980.

(63) A.Weil, Oeuvres Scientifiques vol.1, Commentaire [1951b]*, pp.577-578, Springer, 1980.

(64) H.Weyl, Die Idee der Riemannsche Flächen, Teubner, Sttutgart, 1913 (田村二郎訳、「リーマン面」、岩波書店、1974).

(65) H.Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen I,II,III und Nachtrag, Math.Zeit. 23(1925), 271-309, 24(1926), 328-376, 377-395, 789-791.

(66) H.Weyl, "The structure and representations of continuous groups", Mimeographed Notes taken by N.Jacobson and R.Brauer of lectures delivered in 1934-35, Institute for Advanced Study, Princeton.

(67) H.Weyl,"The classical groups, their invariants and representations", Princeton Univ.Press, Princeton, 1939.

(68) H.Whitney, Differentiable manifolds, Ann. of Math. 37(1936), 645-680.

(69) J.H.C.Whitehead, On the decomposition of an infinitesimal group, Proc.Cambridge Philos.Soc. 32(1936), 229-237.
(70) D.J.Winter, "Abstract Lie algebras", MIT Press, Cambridge, Mass. 1972.
(71) E.Witt, Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe, Abh.Math.Sem. Hamburg 14(1941), 289-322.
(72) Chi Ta Yen, Sur les polynomes de Poincaré des groupes de Lie exceptionelles, C.R.Acad.Sci. Paris 228(1949), 628-630.
(73) H.Yamabe, On the conjecture of Iwasawa and Gleason, Ann. of Math. 58(1953), 48-54.
(74), H.Yamabe, A generalization of a theorem of Gleason, Ann. of Math. 58(1953), 351-365.

多様体論的幾何学による数学の幾何学化

浪川　幸彦　（名古屋大学教養部）

幾何学というと一般の人々の多くはユークリッド幾何学のことを考える。特に４０歳台以上の世代はそうであろう。しかし今高校で「代数・幾何」として習う幾何学はいわゆる解析幾何学であり、イメージにずれが生じている。（これは特に高校教育の分野で深刻な問題を引き起こした。）両者の区別は１９世紀末に初めて明確に意識され、幾何学の二つの流れを生んだ：

◇絶対幾何学　→　公理論的幾何学
◇座標幾何学　→　多様体論的幾何学。

そして現代数学における幾何学とは、殆どの場合後者の座標幾何学から発展した多様体論的幾何学を意味する。

しかも近年この多様体論的幾何学の枠組みが幾何学を越えて、整数論、解析学の領域に及ぶようになってきた。言わば数学の「統一理論」が多様体論的幾何学の枠組によって実現される可能性が生まれている。

その一方で（というかその結果と言うべきか）図形の無い多様体論が現れ、多様体とは何かについて我々の常識の変革を迫っている。

この機会にこうした多様体論的幾何学の流れを振り返って、未来を展望する基礎としてみたい。

§１．多様体論的幾何学の成立

Ａ）ギリシャ時代

ユークリッドの「原本」の後半大部分はEudoxosの比例論に当てられており、これは初等整数論と別になっている。我々の感覚で言えば、有理数は実数の一部であるが、ユークリッドにおいては前者は数論、後者は幾何学の対象であって、まったく別物であった。つまり「数」と「量」とは厳密に区別して考えられていた。正確に言えば「実数」という概念は存在しなかった。従ってそこに座標幾何学の考えが生まれようはずは無い。

しかし実数は無かったが、線分は長さを持つものであった。そして平面の位置を二つの線分で表わすという意味での座標は、（斜交座標を含め）アポロニウスの「円錐曲線論」の中で用いられている。

数を用いた座標は、むしろメソポタミアに由来する。天文学では（当然のことながら）星の位置を表わすのに座標が用いられ、現在のさまざまな用語の多くがそこに起源を持っている。そして球面三角法までもがある程度知られていた。座標幾何学の起源あるいは先史はここに求めるべきであろう。これはアラビアから中世の西欧に受け継がれた。

Ｂ）座標幾何学（解析幾何学）の成立（１７－１８世紀）

ルネッサンスの勃興とともに近代科学が成立した。（現在これより早い１２世紀に近代科学思想の成立を見る立場が有力になっているが、ここではとりあえず現象的に明瞭になった１６世紀以降を考える。）ガリレオの「自然は数学の言葉で書かれている」という言葉に代表されるように、この近代科学には数学が不可欠であった。

デカルト（1596-1650）は中世の神学的世界観に変えて、自然科学的世界観の確立

を主張した。彼はユークリッド幾何学に倣って、それを全自然学に拡張することを企て、その具体化として、1637年に「幾何学」を「光学」、「気象学」とともに著した（これらに付けた序文が「方法序説」である）。

この中で彼は幾何学を扱う一般的方法として代数学を積極的に応用し、座標を用いれば、初等幾何の問題（例えば角の３等分問題）が代数方程式のそれに帰着されること、二次曲線が有理曲線であることなどを示している。こうした取り扱いは彼以前にもヴィエタ等によって行われているが、幾何学の方法論として代数学を用いるという思想性の故に彼をもって解析幾何学の祖と呼ぶことが相応しい。この辺はいろいろ数学史家の間に議論もあるのだが、通説に従っておいて、先へ進む。

解析幾何学による取り扱いが最も相応しいのは二次曲線である。それはWallisによって「円錐曲線」（1655）にまとめられた。また彼によって負の座標が導入されたことも付記しておく。

１７世紀後半にはニュートンおよびライプニッツによって微積分学が確立され、前者はそれを用いて一般力学を建設した（「プリンキピア」1686-87）。これは文字通り近代科学の金字塔であるが、ここでは解析幾何学が当然のこととしてその基盤になっている。ただし現代のような代数的に整備された座標幾何ではないので、非常に分かりにくい（［Y］参照）。

またニュートンによるもう一つの貢献として、（実）平面３次曲線の分類を挙げておこう。円錐曲線をその方程式によって分類することはつとにFermatが企てていたが、ニュートンはこれを３次で実行し、７２個の「型」を得た。（後更に６個が追加された。）

この時代はまだ実数論および位相的概念（連続、極限など）が整備されていないこともあって、解析幾何学と言っても非常に幾何的なものであり、また分かりにくかった。そこで１８世紀後半にはむしろ座標を用いず、幾何的対象を直接代数的記号を用いて記号論理的に取り扱う「綜合幾何学」が主流になり、この傾向は１９世紀前半まで続く。

しかしこの綜合幾何学の発展の中で、Desarguesの画法幾何学に起源を持つ射影幾何学が成立し、射影空間の概念が導入されたことは決定的に重要である（Monge, Poncelet）。さらにこの中で、射影的性質と計量的性質の区別、（空間全体の変換としての）射影変換、双有理変換の概念の導入なども後の幾何学に大きな影響を与えた。

一方座標幾何学としても、３次元空間内の曲線、曲面についての研究が進む。前者についてはつとにClairautが着手し（1731）、２種類の曲率の存在が認識されている。それはMongeによる研究（1771）を経て、Frenet-Serretの公式の発見（1847/50）をもって一応の完成を見る。曲面についての系統的研究としてはオイラーによる断面曲率のそれ（1760以降）を挙げておこう。

C）ガウスの微分幾何学（１９世紀前半）

ガウスについて述べる前に、綜合幾何学の発展について補う。

綜合幾何学、特に平面射影幾何学の一つの完成された形としてPonceletの「図形の射影的性質概論」が1822年に出版される。そして彼の弟子達（Steiner, Chasles等）によって円幾何学などさまざまの幾何学へと分化してゆく。またMöbiusは重心座標を導入し、射影同次座標導入の端緒を作った（それまでは非同次座標のみが用いられていた）。Plückerはこの同次座標をさらに発展させたPlücker座標を導入し、Grassmannによる外積代数に大きな影響を与えた。

ガウスの幾何学に対する決定的寄与は（現代的意味での）微分幾何学の創始である。1827年に出版された論文、「曲面に関する一般的研究」の中で、彼は曲面の微分幾何についての基本的諸定理を与えているが、その方法として、（曲線座標とし

ての）座標近傍、（無限小三角形の面積としての）面積要素などを実質的に得ており、それ等を用いて定理や（曲率などの）概念を定式化している。より重要なのは、曲率が曲面の基本形式のみに依存し、その属する空間には依らないことを示した点である。ガウス自身は空間内の曲面のみを考察したが、これによって図形それ自身を、全体空間を考えることなしに考察するという、リーマンへの道が開かれた。

さらに発表はしなかったが非ユークリッド幾何を知っていたこと、共形変換と複素解析関数の関係を知っていたことも注目される。

D）リーマン　－　多様体幾何学の誕生

リーマンにおいて初めて多様体幾何学の基本概念が出揃う。ただしそれは統一された（現在のような）形ではなく、かなり年代の離れた二つの仕事に分散されて出る。その両者が本人の中でどのように結び付けられていたのかはよく分からない.

1854年6月10日、彼の提出した教授資格論文の審査が行われた。その最後に行われた公開講演は「幾何学の基礎をなす仮説について」と題されたものであった。（この題名はリーマンが前もって提出した３つの題の中からガウスによって選ばれた。）その中で彼は、「n次元多様体」の概念を導入し、曲率などが基本形式から出発して得られる概念であることをはっきりと述べている。さらに多様体自身の変形以外に計量の変形のパラメータが存在し、非ユークリッド幾何学は多様体を変えることなく、計量を変えることによって得られることを注意している。つまりいわゆるリーマン幾何の基本を述べている。ただし座標近傍の概念は無い。一般講演のゆえに内容は概説的で、数式もほとんど無い。数学的に厳密なリーマン幾何流の非ユークリッド幾何の展開は後のクライン、ポアンカレによる。非ユークリッド幾何学の存在を明確に主張したのはガウスの友人F.ボヤイであるが、微分幾何的モデルによってその存在を「証明」したのはリーマンが最初である。

1857年いわゆるCrelle's Journalにリーマンは「アーベル関数論」と題する（彼としては）長い論文を発表する。これは一般のテータ関数を導入していわゆるJacobiの逆問題を解いた画期的な論文であるが、その中で彼は多価関数のリーマン面の概念を導入し、複素１次元解析多様体の理論を展開する。これは多様体幾何学の初めての具体的な展開である。特に「一意化変数」の名の下に、局所座標を導入した意味は大きい。ただしその根底にある位相幾何学的諸概念がまだ無く、彼自身それを準備していたことが死後残されたノートから分かる。またリーマン面上の有理型関数の存在定理の証明の不備をWeierstrassから激しく攻撃されたことは有名な話である。後者は収束べき級数環と、解析接続の原理に基づく独特の（１次元）複素解析的多様体論を展開した。現在の環付き空間を用いる多様体の定義はこれら両者の総合と見ることも出来る（後述）。存在定理を含めた厳密なリーマン面の理論はH. Weylによって初めて展開された（"Die Idee der Riemannschen Flächen", 1913）。

E）その後の展開　－　１９００年前後

ポアンカレは様々の仕事をするが、特に位相幾何学の諸概念（基本群、ホモロジーなど）を整備したことは以後の展開において重要である。

またリー、クライン等によって変換群の重要性が指摘された。クラインは、リーマンの、曲率によるユークリッド、非ユークリッド幾何学の分類を拡張する形で、しかし変換群の不変量の研究として（個々の）幾何学を特徴付けた（Erlangen プログラム、1872年就任講演）。リー群論はさらにE. Cartan によって発展させられた。これは多様体の代表例を与える。

これにより解析幾何学的非ユークリッド幾何学はリーマン幾何学とクライン流のそれと二つの流れに分かれることになった．これらを統合するためには，リーマン多様体上に平行移動の概念を定義する必要がある．これはDarboux の動標構、Levi-

Cibitaの平行性などの理論を経て、E. Cartan等による接続の概念につながっていく。
微分幾何学の諸概念を記述する代数的道具はテンソル代数および外積代数である。Christoffel記号の導入（1869）を契機として、Ricciは一般のテンソル場を定義した（1887）、これを用いて彼やLevi-Cibitaはリーマン幾何学を展開した。テンソル場は局所座標変換に対する変換性によって特徴付けられ、微分幾何学とはテンソル場の理論に他ならないことになる（テンソル解析）。これは非常に便利な道具である一方、大域的概念でありながら表示は局所的なため、その取り扱いに職人芸的な技術が必要であった。そこで諸概念を抽象化して、繁雑なテンソル解析から逃れることが次の世代の目標になる。
テンソル場の中でもベクトル場とならんで最も重要なものは微分形式である。その重要性はE. Cartanによって示された。これは外積代数を用いて記述される。後者はつとにGrassmannによって導入された（1844）ものであったが、理解の困難さによりずっと受け容れられず、Cartanの理論により初めて一般のものとなった。
アインシュタインがこうしたリーマン幾何学の発展の影響の下に、擬リーマン構造を導入して、一般相対性理論を確立する（1915）ことも忘れてはならない。擬リーマン幾何はその後Weyl, E. Cartan等によって発展させられる。
この辺の事情について、詳しくは［R］を参照されたい。

F）絶対幾何学　－　公理論的幾何学の成立
１９世紀後半にはユークリッドの公理的方法にも批判的検討が加えられ、近代的なより厳密な公理論が成立した。この過程で公理論的方法と解析幾何学的方法との間に優位性を巡る確執が生じたが、それは無意味であって、両者は単に方法論において異なるに過ぎず、理論としては同等であることを指摘したのは上記Erlangenプログラムにおけるクラインである。近代的公理論幾何学は最終的にヒルベルトの著書「幾何学の基礎」（1899）に纏められる。ここでその無矛盾性の証明は解析幾何学モデルの存在によって行われ、従って実数論の無矛盾性に帰着されていることも注意してよいであろう．この前提には実数論の公理論的建設があり、それはPeano, Dedekind等によって成された．

§２．抽象多様体論の成立（公理論化）
A）線形代数学の抽象化
抽象ベクトル空間はPeanoによって公理化された（1888）。しかし抽象線形代数学が普及するのはずっと遅く、1930年代以降関数解析学の進展により、数ベクトル空間だけでは済まなくなってからのことである（ヒルベルトではまだ可算）。

B）微分可能多様体とファイバー束
今日の意味での微分多様体の定義，すなわちある位相空間とその上の相互に微分可能写像によって関係付けられた局所座標系という形が初めて与えられたのはVebren-Whiteheadの"The foundation of differential geometry" (1932)あたりではないかと思われるが、原本を見る機会がなくて確かめていない。またリーマンの多様体(Mannigfaltigkeit) がどう今日の微分可能多様体 (differentiable manifold) に接続するのかも充分跡付けていない。これらの点については調査の不備をお詫びして、後の課題とさせて頂く。
ともかく今日行われる定義および名称はWhitneyの記念碑的論文、"Differentiable manifolds" (Ann. of Math., Vol.37, 1936) においては既に確立されている。この中で、彼は微分可能多様体についての基本諸概念および基本的定理、特に可算基を持つ多様体のユークリッド空間への埋め込み定理を与えている。（リーマン多様体とは限

らない）微分可能多様体の理論は（実解析的多様体を含め）彼によって基礎付けられたとしてよい。

これに続いて彼はさらにファイバー束の概念を導入した（1937）。Ehresmann はCartan 接続に関する仕事の中でこの概念を抽象化し、これを背景にS. S. Chern は、接続がファイバー束の概念を用いて（intrinsicに）定義されることを示した。これによって微分幾何は繁雑なテンソル解析から解放され、しかも様々な接続の概念が系統的に整理されて、新しい大域的な微分幾何が生まれた。それらの成果は1951年のSteenrod の教科書 "The topology of fibre bundles" にまとめられる。

C）位相幾何と微分幾何

1848年に Bonnet によって与えられた公式（Gauss-Bonnet の公式）は、その特別な場合として、閉多様体の場合、（微分幾何的に定義される）ガウス曲率の積分が、（位相不変量である）オイラー標数に等しいことを導く（Gauss-Bonnet の定理）。ファイバー束の理論の進展の中で、Chern類などの特性類が定義されて、この等式は微分幾何学的不変量と位相不変量との様々の関係式として一般化される。

その代表的なものは、Serre によって定式化され、Hirzebruch によって証明された一般型 Riemann-Roch の定理である(1956)。それはさらに Atiyah-Singer の楕円形微分作用素に対する指数定理(1963)へと一般化されるが、これらは層、コボルディズム、K－理論といった抽象理論を用いており、思想的には次節の段階に属する。

一方1931年 DeRham は微分形式によるコホモロジーを定義し、これが位相空間としてのそれに等しいことを示した。これはさらにヒルベルト空間論の見事な応用として調和形式の理論を生む（DeRham, 小平）。また DeRhamは多様体上でのカレントを導入するが、当初はSchwarz の超関数を知らなかったので、充分に明解でなかった。DeRham の定理の証明の代数化は層の導入により始めて可能になる（後述）。

D）リー群論

1925年に H. Weyl はコンパクト・リー群の有限次元表現論を完成させる。この頃量子力学がヒルベルト空間の作用素論として定式化され、ユニタリ表現論が物理学に導入される（Weyl, "Gruppentheorie und Quantenmechanik", 1928)。これは強烈な影響を物理に与えた一方、「群ペスト（Gruppenpest）」などという陰口を生んだ。しかし物理学に「対称性」の概念をもたらした点で、現在場の量子論の進展とともに、むしろその意味はますます大きくなりつつある。

C. Chevalley はリー群論の代数的再構成を目指して、1946年以降代数幾何の基礎付けから着手してセミナーを行い、代数群の理論を半単純群の表現論とともに完成させる。その成果は彼の３巻の教科書となって結実した。後の Grothendieck における用語「概型」が Chevalley 流の代数幾何に由来する事実も見落とせない。

§３．現代多様体論の成立 － 多様体論の代数化

A）代数的位相幾何学の圏論化

それまで組み合せ論的であった代数的位相幾何学は、Eilenberg-MacLane によって導入された圏論を用いて抽象化される。その成果は Eilenberg-Steenrod による教科書 "Foundations of algebraic topology" としてまとめられた（1951）。

またこの間フランスでも H. Cartan による代数的位相幾何学のセミナーが行われ、若き Serre らが参加する（1948-49, 50-51）。ここから（位相的）ファイバー空間の理論が誕生したことの意義が大きい。

B）ホモロジー代数の導入

代数的位相幾何学において（Poincaré によって導入された）（コ）ホモロジーの

概念を Chevalley-Eilenberg はリー群に（1948）、次いで Hochschild-Serre はリー環に（1952）応用した。こうしてホモロジーが、位相幾何学のみならず、代数学の分野でも重要な道具になった。それら全体は Cartan-Eilenberg による教科書 "Homological Algebra" (1956)中に纏められる。

またこの教科書には含まれていないが、同じ頃 Serreによりホモロジー代数の局所環論への応用が開始される。

C）複素多様体ー層の導入

H. Cartan は1953-54年の彼のセミナーにおいて、岡潔の一連の結果を再構成し、その中で複素多様体を「層」の概念を用いて定義した。層は Leray によって1945年頃定義されたものであるが、ここで初めてその本質的な重要性が明らかにされた。

複素多様体は、位相空間とその上の「正則関数の」層との対である、「環付き空間」として定義される。これによって多様体は遂に「局所座標」からも自由になった。これは多様体論に全く新しい次元を切り拓いたものである。

小平はつとにHodgeとともにケーラー多様体の調和解析学を展開し、その重要性を示したが，さらに層の理論を積極的に応用し、それが理論を著しく明解にすること、更にそのコホモロジー理論により困難と思われていた問題があっさり解けてしまうことを示した（1950年代）。その最も重要な例として、彼によるコホモロジー消滅定理を基礎とした、Hodge多様体と射影多様体との同値性の証明（1954）が挙げられる。

層の理論導入の意義をより具体的に言えば、次の３点にまとめられよう。

１）多様体においては、空間自身よりむしろその上の「関数」が重要であることが明白になった。位相多様体、微分可能多様体、解析的多様体という違いは、空間（それは単なる位相空間でしかない）の上でどのような関数をその「多様体上の関数」として考えるかによって決まる。標語的に言えば、「始めに空間があった」から、「始めに関数があった」という形に多様体というものの認識が逆転したのである。もっともそれが実際に起こったのはもっと後のことであり（後述）、正確には逆転することが可能になったというべきだろう。

２）「局所的」と「大域的」との関係がより明白になった。微分可能多様体ももちろん複素解析多様体同様層を用いて定義できる。それにもかかわらず後者で初めて層が導入されたのには理由がある。すなわち微分可能多様体では、大域的な微分可能関数全体（C－代数を作る）を知るだけで、多様体が決まってしまう。１の分解を用いることで局所関数を大域的に拡張できるからである。それに対し、複素解析的多様体では、充分な数の大域的正則関数が存在しない場合がある。大域的正則関数が充分沢山ある多様体（シュタイン多様体）は特別の性質を持ち、岡の定理はその形で定式化できる。一方射影空間のような基本的空間でも、大域的正則関数は定数関数しかない。そこでどうしても局所的なものをそれ自身として取り扱う道具が必要になったのである。

３）コホモロジー論が導入された。上の「局所的」と「大域的」との関係を記述する道具として、「層のコホモロジー」が重要な役割を果たす（局所関数を大域関数に拡張する「障害」を量る等）。

またこの方法論を導入することにより、理論全体が著しく代数化された。例えばDeRhamの定理はこれによって証明され、従来の高度な解析を用いる調和形式の理論にとって変わることが出来る。解析が不用になったのではない。逆にどこでどの解析が本質的に必要かが、より明瞭になったのである。例えば上のDeRhamの定理の証明では、１の分解の存在（大域的）とポアンカレの補題（局所的）とが解析的部分である．そして調和解析は小平消滅定理の証明の方で本質的役割を果たす。

D）代数幾何学とその一般化[*1]

A. Weil は数論の問題を解くために、幾何学的方法論を用いようと考えた。例えば、有名な Fermat の問題（正しくは「Fermat の最終定理」）は「曲線　$x^p + y^p = 1$　上には$p > 2$ならば有理点が無い」という形に定式化される。彼はこの問題に関連した、「種数２以上の曲線の有理点は有限個である」という Mordell 予想を考察したのである。しかし彼は代数幾何学に理論の展開に必要な代数的基礎付けが欠如していることを悟った。従来の複素数体上の代数幾何では代数的手法と位相的解析的手法が混在しており、その都度都合のいい方を使っていた。しかし例えば有限体上の代数幾何を展開しようとすれば、解析的手法は使えない。そこで彼は純代数的な抽象的代数幾何学を建設した（"Foundations of algebraic geometry", 1946, 2nd ed. 1962）。

この基礎の上に立ってWeilはさらに代数関数論、アーベル多様体論を建設し（３部作）、（有限体上の）代数曲線に対するリーマン予想の類似を解いた。そしてさらに一般の代数多様体に対する予想（Weil予想）を定式化する。これは有理点の個数を数えるものであるが、彼はそれをフロベニウス写像の不動点として幾何的にとらえ、その個数を数えるよい「幾何学的」公式（Lefschetzの不動点定理の類似）があればよいことを指摘している．

一方同じ頃、O. Zariski もまたイタリア学派の曲面分類論を再構築しようとして同様の問題意識を持ち、やはり抽象代数学の基礎付けに着手する。彼のものはより幾何的であり、特にいわゆる Zariski 位相の導入が重要である。

さてJ.P.Serreはおそらく上記の多変数関数論Cartanセミナーに影響を受けて、代数多様体を代数的連接層を用いた環付き空間として定義し、その上に代数幾何学を建設する（1953－54）。

これを継承、発展させる形で、A.Grothendieckは1950年代後半から60年代にかけて一般概型理論として代数幾何学を構築する。それらは Dieudonné との共著になる教科書（ＥＧＡ）、彼自身によって組織されたセミナー記録（ＳＧＡ）、ブルバキセミナー等様々の形で公けにされ、その全体は膨大な量にのぼるが、1973年彼の突然の実質的引退と共に未完のまま残された。

彼は理論を構築するに先立って、その主たる方法論の一つである圏論を整備し、特に層のコホモロジー論を完全に抽象化する。

さてGrothendieckは彼の幾何学の基本的対象を「概型」と名付けた。この命名はChevalleyの用語（§２Ｄ））の踏襲ではあるが、何よりも従来の代数多様体とは全く違う概念なのだという彼の自負の現われなのである（彼の筆者への私信）。

概型の基本要素（微分多様体の局所座標近傍、代数多様体のアフィン多様体に対応）はアフィン概型である。これが環付き空間として定義され、張り合わされて概型になる。さてここで本質的に重要なのはアフィン概型が任意の（１を持つ）可換環に対して定義される点である。環に対して位相空間（「スペクトル」と呼ぶ）が定義され、層が定義される。従来の代数幾何では、まずアフィン空間内に（位相空間としての）アフィン多様体が定義され、環はその上の（正則）関数全体（アフィン座標環）として現れる。（概型論でもその仕組は同じで、この対応によって可換環の圏とアフィン概型の圏とは同値になる。）つまり関数の集合がまずあって、それに対して（それらを「関数」とする）空間が定義されるという風に順序が逆転した。多様体幾何学において、空間よりも関数が本質なのだということが、初めて理論の中で明確にされたのである。

この逆転によって概型理論は完全な一般性を確立した。概型理論は抽象代数幾何学の最も完成された理論として一般に定着する。

Grothendieckはこの他にも様々の深い抽象論を築くのであるが、一つだけ例を挙げ

[*1]本パラグラフの内容については［N］に詳述したので、興味のある方は参照されたい。

よう。Grothendieckの目標であったWeil予想を解くためにはZariski 位相とは異なる、（不動点定理を与える）「良い」位相が必要である（上述）。彼はその候補としてエタル位相の概念を得、実際に絶対値予想以外の部分をこれを用いて解いた。このエタル位相は、位相の概念を拡張したトポスの概念を用いて定義される。後にこのトポスの概念は最も一般な多値論理の概念に他ならないことが分かって、むしろ基礎論の方で重要になる。

なおWeil予想自身はP.Deligneによって最終的に解かれた(1973)。

またGrothendieckによって、複素解析幾何学も概型論的に展開されたこと（1960-1961、Cartanセミナー）、SerreのＧＡＧＡ理論（1956）によって、複素解析幾何学と代数幾何学との本質的類似（或る条件の下では同値）が明らかにされたことを補っておこう。

§４．多様体論的幾何学による数学の統一へ

1960年代に現代的抽象数学として確立された多様体論の枠組みは、やがて70年代以降幾何のみならず、数論、微分方程式論といった他の数学、さらには理論物理学までにも用いられるものとして広がって行く。かってBourbakiの唱えた“Mathematicsから A mathematic へ” という標語が、深い意味で現実のものとなったと言えよう．この見方はYu. I. Maninによって初めて公けにされた（［M］，1984）。

A）数論的多様体（Arakelov-Faltings理論）－　数論と代数幾何の統一

代数的整数論と（１変数）代数関数論との類似性は両者の理論が生まれて間もない１９世紀後半既に意識されていた。それは1900年の国際数学者会議における有名なヒルベルトの講演中に明言されている（［H］第１２問題）。

この関連を更に一歩進めて考えたのはA.Weilで、彼は両者の間に立つものとして、有限体上の代数関数論を置くことを考えた。これを媒介として、両者の関係が明らかになるというものである。彼のこのアイデアは当時の一般向け科学雑誌や、妹のSimoneへの手紙の中で表明された（1943頃）ため、彼の全集が出て初めて一般の目に触れることとなったが、以前より彼の仕事を見れば彼がそれを目指していることは明らかであった。

そのアイデアを更に多次元へと一般化するものとしてWeil予想があったわけであるが、これはGrothendieckの概型論を用いて解決された。

では概型論は数論と代数幾何との統一を実現したのであろうか？　答えは「否」である。それは概型論が現れて間もなく、Weil自身によって"Foundation"第２版の補遺中に明言されている(1960)。すなわち代数体および１変数代数関数体の理論では付値論が共通の基本的道具であるが、概型論は代数体のアルキメデス付値の理論を含まないのである。

この問題を、アルキメデス付値上に然るべき幾何的対象を定義することによって解決し、数論と代数幾何の完全な統一を実現しようというアイデアがArakelovによって提出された(1974)。その幾何的対象とは（複素）リーマン面に（適当な）Hermite計量を考えたものである。これにより、代数体上の１変数関数体に対し、数論と代数幾何とを統合した理論が建設出来る。これを展開して見せたのはFaltingsである(1984)。この理論は数論側と幾何側と各々１次元の広がりを持っているので、全体としては２次元になっており、数論的曲面論と呼ばれる。

そしてこれを更に多次元へと一般化するものとしてYu.I.Maninは数論的多様体の概念を提出した(1984)。ここではアルキメデス付値上の幾何的対象がケーラー・アインシュタイン計量付き複素多様体となる。最近ここでGrothendieck型Riemann-Roch定理の成り立つことが証明された(Gillet-Soulé, 1989)。特性類の定義をうまく拡張しさえすれば、（証明はずっと複雑になるとはいえ）最も一般的な形の定理がそのま

ま成立するのは驚くべきことであり、数論と代数幾何との本質的関連を示す有力な証拠の一つと言えよう。

もう一つ代数的整数論と代数関数論との深い関連を示すものとして、非可換類体論の建設を目指すLanglandsプログラムの代数関数論での類似を展開したDrinfel'dの仕事が挙げられる。ただしこの場合は並行した理論が展開出来るということであって、両者を統一出来るというわけではない。

B）*D*-加群の理論（代数解析学）　－　解析学と代数幾何の統一

つとに1950年代後半佐藤幹夫はSchwartzのそれとは全く異なる「超関数(hyperfunction)」の概念を得、それを用いて線形微分方程式論を代数化する構想を得ていた。これを、Grothendieckの方法論を全面的に取り入れ、*D*-加群の理論として建設したのは柏原正樹である（1971以降）。彼は佐藤、河合隆裕等と共に壮大な理論を建設し、ここに解析的線形偏微分方程式論の概型理論的展開が実現した。特に超局所解析を用いたホロノミー系の理論は最も自然な確定特異点型線形微分方程式論の抽象一般化を与える。

この理論の最も著しい応用として、Beilinson-Bernstein, Brylinski-柏原によるKazhdan-Lustig予想の解決（1981）が挙げられる。さらに前者はこの証明の中で、半単純リー群の旗多様体が*D*-加群として、複素多様体のStein多様体に対応する性質を持つことを示した（詳細は［S］を参照）。

ここでは構造層が微分作用素の環となる（作用素の係数は解析関数）。特に環が非可換になったこと、関数への作用素であることが本質的に新しい。

C）無限次元多様体　－　物理学（場の量子論）の幾何学化

70年代後半に入って、理論物理学、特に場の量子論と幾何学との交流が生まれてくる。従来より古典解析力学等は微分幾何学と深い関わりを持っていた。力学系の理論、特に特異点理論、シンプレクティック多様体の理論等はその典型である。しかしこの新しい流れは、これらの関連をその基礎に踏まえつつも幾つかの点で全く新しい側面を持っている。

これらの動きには相互に関連した大きな三つの山がある。

Ｃ１）ゲージ理論

電磁場理論を拡張し、弱い相互作用を記述する量子場の理論を記述するために生まれたゲージ理論（Yang-Mills, 1954）が、70年代に入って強い相互作用をも含めた形で建設される（ＱＦＤ，ＱＣＤ理論）。この頃ゲージ理論がファイバー束の接続の理論と全く同等であることが見出され、微分幾何学にその量子場の方法論が導入される。つまり接続全体のなす無限次元アフィン空間の上でモース理論を展開し、（無限次元の）ゲージ群の作用を考える。

80年代に入って、Atiyah-Bottはある種の制限（平行移動不変性）を加えたYang-Mills接続を考えることにより、（代数幾何学での）リーマン面上の安定ベクトル束のモジュラス空間が構成出来ることを示した。しかもこの場合モジュラス空間上のケーラー計量も同時に得られる。これは接続空間のシンプレクティック構造をモーメント写像でゲージ群の商空間上に落とすことによる。この方法論は更に発展させられ、Donaldsonによる新しい４次元多様体不変量の定義、Uhlenbeck-Yauによる一般ケーラー多様体上の安定ベクトル束のモジュラス空間の構成（1986）からFloerコホモロジーの理論へと繋がってゆく。この流れは無限次元多様体における微分幾何学の展開という主題の下に纏められよう。

Ｃ２）ソリトン方程式論

これと並んで発展したのがソリトン方程式の理論である。ソリトン方程式とは、非線型微分方程式でありながら、（線形方程式の特徴である）重ね合わせの原理に近い性質を持つ、いわゆるソリトン解が存在する微分方程式の総称である。1965年頃Kruskal-ZabuskyはＫｄＶ方程式がソリトン解を持つことを数値計算によって示し、一躍注目を浴びた。その結果この事実の背後に深い数学理論の存在することが明らかにされ、またＫｄＶの自然な一般化であるＫＰ方程式も見出された。特にこれらの方程式は実は無限個の方程式系の最初のものなのである。その結果の一つに、ＫＰ方程式系の準周期解の時間発展が、対応するリーマン面のヤコビ多様体上の平行移動に他ならないという発見がある（Krichever, 1976）。これはリーマン面の理論と場の量子論との関連を示す最初の例になっている（後述）。

一方佐藤幹夫は無限次元グラスマン多様体を導入し、ＫＰ方程式系の解全体がここでパラメータ付けられることを示した。ここで重要なのは非線型方程式の（解析的）性質が、無限次元グラスマン多様体上では代数的関係式として見えるという点である（方程式系と同値な「広田の双１次関係式」はグラスマン多様体の Plücker座標が満たす２次関係式に他ならない）。さらに伊達－柏原－神保－三輪は佐藤理論を基礎に、ＫＰ方程式論を場の量子論の枠組みの中に実現し、諸定理を後者の方法論によって証明することに成功した（1984）。これと並ぶDrinfel'd-Sokolov理論も忘れてはならない。

Ｃ３）弦模型理論と共形場理論

量子的場の理論の成功はくりこみ理論による。素粒子の４種類の相互作用のうちゲージ場３種類はくりこみ可能であるが、重力のみはくりこみを許さなかった。ところが素粒子を点ではなく、１次元の拡がりを持った紐と考えて量子場の理論を展開する、弦模型理論によれば、理論がくりこまれた形で、しかも重力場とゲージ場が自然に組み合わされた形で出ることが分かって、一挙に注目を浴び始めた（Green-Schwarz）。弦模型理論、特に超対称性を加えた超弦理論はその後５年近くにわたって爆発的に流行して、終息する。４次元重力場理論には至らなかったものの、「オモチャのモデル」上とはいえ、摂動解とは全く異なるくりこまれた厳密解を重力場まで含む形で得たという成果は小さくない。

さてこの理論がリーマン面のモジュラス理論と密接に関連することを示したのはBelavin-Knizhnikである（1986）。彼らは期待値積分（Feynman積分）をモジュラス上の保型形式の積分に帰着させた。

ここでFriedan-Shenkerが決定的な寄与をする。彼らは弦模型理論を、一般リーマン面上の２次元共形場理論として、数学的には普遍モジュラス空間上の可積分系として定式化することを提唱した。これにより数学的に厳密なモデルの構成への道が開かれ、また共形場理論の本質的重要性が示された。

共形場理論とは、一般座標変換（ワイル変換）として共形変換のみを許すことによって得られる量子場の理論であるが、特に２次元の場合豊富な理論になる。２次元統計力学で、相転移点にこの（連続）対称性が現れることで注目され、Belavin-Polyakov-ZamolodchikovがVirasoro代数（特殊なリー代数）の表現論として一般論を作った（1984）。さらにBelavin-Knizhnikはゲージ場理論を含めた形で理論を定式化し、それによれば自然に重力場が取り込まれ、運動方程式が得られる。

彼らの理論は射影直線上の場の理論であり、これを一般種数のリーマン面上に展開すると弦模型理論に対応する量子場の理論になる。

さて定式化はこれで得られたが、具体的モデルの構成が問題になる。

まず自由フェルミ粒子の場合（可換ゲージ）の期待値計算（テータ関数が現れる）から、ＫＰ方程式論との関連が気付かれ、特に佐藤の無限次元グラスマン多様体の理論で考えれば、伊達－柏原－神保－三輪の量子論がちょうどゲージ理論であり、

これに全く自然にVirasoro代数の作用を定義する形で共形場理論を展開できることが分かった（1987）。

しかし可換ゲージの場合には基本粒子が無限個現れるという困難があって、完全な形でFriedan-Shenkerモデルの存在が示されたわけではない。これに対し、非可換ゲージでは基本粒子が相互作用の下でも有限個で閉じることが出来、この場合に数学的に厳密なモデルが初めて構成された（土屋－上野－山田、1988）。彼らの理論が代数幾何学の安定曲線のモジュラス理論、柏原のホロノミー系の理論など、先に述べた現代多様体論の精華を全面的に用いることによって得られている事実は著しい。

これらの動きはなお様々の流れとして発展しつつあり、その全体の姿は見えにくいのであるが[*2]、多様体論的幾何学の立場からこれらの流れを見ると、次のような特徴を挙げることが出来よう。

1）無限次元多様体の幾何学。理論が本質的に無限次元の多様体上の幾何学を展開することで得られている。

2）大きな対称性の存在。さらに多くの理論では、対象となる無限次元多様体にやはり無限次元の群が作用しており、その不変式論を展開することで有限次元の理論が得られるという仕組になっている。Grothendieckの、彼の数学の究極目標は最も一般のGalois理論を構築することだ、という言葉が想起される。

3）新しい様々の非可換構造が大きな役割を果たす。ただしその中心に十分大きな可換部分があり、それが構造を統制している。この最も基本的例は有限群の群環であるが、それと本質的に同じ構造が実に広範囲に見られるのである。

4）モジュラスの幾何学。理論が、ある代数構造全体をパラメータ付けるモジュラス多様体上の幾何学として展開される。量子論ではこの多様体が量子状態全体の空間に、多様体上の計量が確率測度に対応している。

§5．新しい流れ　－　多様体無き多様体論

前節に述べた流れと密接に関連する形で、全く新しい多様体論幾何学が現れてきた。それは標語的に「多様体無き多様体論」と呼ぶことが出来よう。

§3D）で述べたが、現代多様体論の最も重要な考え方は、「多様体論幾何学で大切なのは空間ではなくて、その上の関数である」という点にある。この考え方を徹底するならば、「多様体上の関数全体」とみなし得る構造があれば、それについての幾何学を（多様体そのものはなくとも）建設できるわけである。実際そのような理論が二つの流れとして出現する。

しかもこれらの流れは突然現れたのではなく、むしろ大きな深い流れの延長上にあることも忘れてはならない。また非可換な「関数」（正確には作用素）が扱われていることも著しい事実である。

A）非可換微分幾何学

von Neumannによって導入されたC*環は量子力学のもたらしたもう一つの重要な数学的手法である[*3]。ここでも無限次元の群とその表現が取り扱われる。すなわちC*環はあるヒルベルト空間上の作用素環（の部分環）であり、量子力学はその表現論として定式化される。

1970年代末、A.Connesは群作用を持つC*環（C*力学系）に対する微分幾何学、K－理論を建設し、Atiyah-Singerの指数理論を拡張することに成功する。ここで彼

[*2] 特にKontsevichの持つ統一的視点は注目に値する（例えば［Ko］）。

[*3] その歴史については例えば［T］が見やすい。

は様々の概念、不変量を（値が）非可換な場合に拡張している。このような理論が存在すること自体大きな驚きである。

彼はこの理論を（本稿で取り上げなかった）葉層理論へ応用した（葉層構造の不変量の研究）。この場合そこにあらわれる「空間」はHausdorff空間ではないため、考える「関数」はその上の連続関数よりも広いものになっている。

彼の場合まだ作用する群が有限次元であるが、これが無限次元にまで拡張されるならば、本質的に新しいものが見えてくると思われる。

B）量子群　－　可換からの変形としての非可換化

リー群（より正確には代数群）の理論を純代数的に得る二つの方法がある。一つはGrothendieck流にその上の正則関数全体のなす環を考える方法、もう一つはその上の微分作用素全体のなす包絡環を考える方法である。いずれの場合も群演算からもう１種類の構造が入り、（互いに双対的な）Hopf代数と呼ばれるものになっている。ただし関数の（値の）可換性から、これらは可換、あるいは余可換なHopf代数になる。いずれにせよこれを用いれば、リー環から（解析を用いることなく）代数的にリー群が構成される（Hochschild理論）。

さて一方古典力学理論の量子化に際しては、（可換な）物理量を（非可換な）作用素に置き換えるが、この時物理量に関するポアソン積を作用素の交換子積で置き換える。すなわち古典系での運動方程式は物理量の時間発展がその物理量のハミルトン関数とのポアソン積に等しい

$$\frac{dA}{dt} = -(H, A)$$

というものであるが、対応する量子系での（Heisenberg）運動方程式は

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{i}{h}[H, A(t)] \quad \text{（ここで } h \text{ はPlanck定数）}$$

となる。これは可換量の h をパラメータとする非可換量への変形と見做せる。

この操作を上のHopf代数に対して行うことによってリー群の変形である量子群の概念が定義される（神保およびDrinfel'd、1985）。これは可解格子模型（統計力学）とモジュラー表現（整数論）という全く異なる二つの領域からの要請を統一する形で生まれた。

量子群の理論では表現論が中心であるが、古典群の変形として得られる量子群の表現論は古典群のそれと同じ形をしている。変形は１次元パラメータ q を持っており、$q=1$ が古典的場合である。柏原およびLustigは $q=0$ を考えることにより、表現の「良い」基底が得られることを示した（結晶基底、1990）。これは量子群の理論が古典群に対しても新しい結果をもたらした著しい例である。

そして量子群の理論は一般のKac-Moodyリー環にまで拡張されつつある。

さらに量子群は共形場理論の中にも現れる。すなわちＫＺ理論（§４Ｃ３））の定める基本方程式のモノドロミー表現がゲージ群の量子化から得られるものに一致することが見出された（土屋－蟹江、河野、1987）。この理由はまだ解明されていない。背後には深い物理的構造が存在するものと思われる（隠れた対称性）。

その一方整数論との結び付きからDrinfel'dはガロア群 $Gal(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ との関係をも示唆している（［Dr］）が、その具体的展開もなお将来の課題である。

参考文献

[D] デュドネ編：数学史 1700-1900，岩波書店，1985

[Dr] Drinfel'd, V.G.：Quantum groups, Proc.ICM Berkeley, 1986, 798-820;On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $Gal(\overline{Q}/Q)$, Leningrad Math. J. Vol.2 (1991), 829-860

[H] ヒルベルト：数学の問題，共立出版，1969

[Kl] クライン：エルランゲン・プログラム，共立出版，1970

[Ko] Kontsevich, K.M.：Formal (non-)commutative symplectic geometry, Proc. Gel'fand Seminar, 1993, 173-187

[M] Manin,Yu.I.：New dimensions in geometry, LNM 1111 (1985), Springer, 59-101

[N] 浪川幸彦：現代代数幾何学の成立，現代数学の歩み 第３巻，日本評論社，1980，128-145

[R] リーマン他：リーマン幾何とその応用，共立出版，1971

[S] 関口次郎：微分方程式の表現論への応用，上智大学数学講究録，27，1988

[T] 竹崎正道：作用素環論の歴史（50年の歩みと日本の伝統），数学，35巻（1983），158-165

[Y] 山本義隆：重力と力学的世界，現代数学社

後書

本稿は1991年11月に津田塾大学で開かれたシンポジウムでの講演内容に加筆したものである。筆者の怠慢からこの会の記録に間に合わず、一度は発表を諦めていたのであるが、杉浦光夫氏の御親切なお申し出により今回の記録に加えて頂くことになった。１年の遅れはいささかその後の流れを踏まえた内容を加えることが出来たと思う。整数論および確率論との関連を十分に解明できなかったことは心に残っている。それについては将来の課題としたい。

しかしながら原稿の完成が当初の予定を大幅に遅れ、再び杉浦氏に大変な御迷惑をかけてしまった。これもひとえに筆者の怠慢のゆえであり、杉浦氏および本号の著者の方々に心からお詫び申し上げる次第である。そしてこのような筆者の非礼にもかかわらず、辛抱強く原稿の完成を待って下さった杉浦氏の御厚意に心から感謝したい。

なお筆者は文部省科学研究費補助金重点領域研究「無限可積分系」および一般研究C「場の量子論的方法の幾何学および数論への応用」（課題番号05640030）より援助を受けた

---

*4) なお筆者は文部省科学研究費補助金重点領域研究「無限可積分系」および一般研究C「場の量子論的方法の幾何学および数論への応用」（課題番号05640030）より援助を受けた。感謝と共に付記する。