ガウスが行なった数値計算（参）

杉本敏夫

〔前々回（2003年10月25日）と 前回（2004年10月17日）の講演を踏襲し，節番号を通し，文献番号も前のを用い，さらに新しい文献番号を追加した．論旨を通すため，補足の内容に小字を用いた所がある．〕

§20．級数の反転

すでに前々回（2003）の§2～§5でレムニスケート積分について，スターリング，オイラーそしてガウスの計算を詳述した．

訂正　§5の 6,8行目 $2\cdot\phi(1/2)+\phi(1/7)$ を $2\cdot\phi(1/2)+\phi(7/23)$ に訂す．

［1］高木貞治『近世数学史談』（以下「史談」と略す）36～37頁に，要旨「ガウスは(*1) $u=\int_0^x dx/\sqrt{(1-x^4)}$ なる積分の逆函数を(*2) $x=\mathrm{sin.lemn.}\ u$ と置き，函数レムニスケート的サイン(sinus lemniscaticus; 略して sin. lemn. または sl.)を定義した．但し（*3）$\varpi/2=\int_0^1 dx/\sqrt{(1-x^4)}$ である．」とある．（なお史談は$\varpi/2$をωで表す．）

現代の私たちはこのような説明に馴れいる．しかし，新関数に直面したガウスにとって，抽象的に関数の存在を仮定するだけではイメージが湧かなかった．彼の時代に関数とは，具体的な級数によって表現され，つねに計算可能な関数でなければならなかった．（常用の sin u は級数計算も可能であるが，天文学等の要請から精密な数表が用意された．ガウスも［6］シュルツェの数表下巻の三角関数表を愛用した．）

レムニスケート積分から得られる級数は，前々回§2～§5で述べたように

(*1')　$u=\phi x=x+(1/10)x^5+(1/24)x^9+(5/208)x^{13}+(35/2176)x^{17}\cdots$

であり，ガウスは紙片 Math25-(7)オに，次の表（一部略）を書いた．

$\phi(7/23)$	0,30460989	0,30434783	7/23	
$\phi(1/2)$	0,50320944	0,5		1/2
$\phi\sqrt{(3/5)}$	0.80781933	0,77459667	$\sqrt{(3/5)}$	
$\phi\sqrt{(240/289)}$	1,00641888	0,91129055	$\sqrt{(240/289)}$	
$\phi(1/5)$	0,20003202	0,20000000		1/5
ϕa	0,20000000	0,19996800		a

これは ϕx と x の対応を示す．特に上方の4行は前々回§5で引用した ϕ の加法定理

$$\phi 1=\phi\sqrt{(1/m)}+\phi[\sqrt{(m-1)}/\sqrt{(m+1)}],$$

$$\phi 1=2\cdot\phi\sqrt{(1/m)}+\phi[(mm-2m-1)/(mm+2m-1)]$$

の $m=4$ なる特別の場合である．ガウスは $\phi 1=1,31102877=\varpi/2$ を求めるとき，級数(*1')に直接 $x=1$ を代入したのでは仲々収束しないので，この ϕ の加法定理を利用した．4行目は加法定理に $1/m=7/23$ を代入し，$(23^2-7^2)/(23^2+7^2)=240/289$ としている．しかし実際の計算は $\phi 1=1,31102877$ から $\phi(7/23)=0,30460989$ を引いて求めたのである．5行目は 1/5 に対応する $\phi(1/5)$ の計算である．特に興味深いのは6行目である．ここでは x から ϕx を求めるのとは反対に，$\phi a=0,2$ となるような数値 $a=0,19996800$ 求めている．そのためには，ϕx の逆級数が必要になる．

そこで，級数の反転が必要になるが，ガウスは反転のための一般公式を目指した．［2］ライステ(A)頁の

$$x=y+ay^{m+1}+by^{2m+1}\;[+\;cy^{3m+1}]\cdots$$

$$y=x-aAx^{m+1}\quad\left.\begin{array}{r}-a^2A\\+\dfrac{2m+2}{2}b^2B\end{array}\right|\,x^{2m+1}\quad\left.\begin{array}{r}-a^3A\\+\dfrac{3m+2}{2}b^3B\\-\dfrac{3m+2.3m+3}{2.3}c^3C\end{array}\right|\,x^{3m+1}\quad \&c.$$

が公式の意図を示すが，これは誤りを含む．これまで屢々述べたが，私的なライステ記入には，至る所に誤りがある．彼は気付いてその場で直す．大きな誤りはその場で直さず，正した記述を別の箇所に書き込む．（彼は続き具合を知っていてそれでよいが，ガウス文書を辿る私にとっては，脈絡を摑むの悩まされる．）

私が正した計算は次の通り．便宜のため記号 x と y を交換する．級数

(*4)　$x=y+ay^{m+1}+by^{2m+1}+cy^{3m+1}\cdots$

を反転して，

(*5)　$y=x+Ax^{m+1}+Bx^{2m+1}+Cx^{3m+1}\cdots$

の形に直すことが目標である．予め，x の乗巾を計算しておく．

$$x^{m+1}=y^{m+1}+(m+1)ay^{2m+1}\quad\left.\begin{array}{r}+(m+1)b\\+\dfrac{m(m+1)a^2}{2}\end{array}\right|\,y^{3m+1}\cdots$$

$$x^{2m+1}=y^{2m+1}+(2m+1)ay^{3m+1}\cdots$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

縦線は y^{2m+1} の係数を括る意味をもつ所のガウス独自の記法．上下を見較べて x の乗巾に適当な係数を掛けて引く．すなわち<u>最後に y のみ残るように</u>，段階的に y^{m+1} の係数を掛けて引き，y^{2m+1} の係数を掛けて引く….次第に左辺には項が増え，右辺からは項が消えて行く．

$$
\begin{array}{rr|rr|rr|l}
x = y + a & & y^{m+1} & +b & y^{2m+1} & +c & y^{3m+1}\cdots \\
-ax^{m+1} & -a & & -(m+1)a^2 & & -(m+1)ab & \\
 & & & & & -\dfrac{m(m+1)a^3}{2} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|r|rr|l}
x = y & & +b & y^{2m+1} & +c & y^{3m+1}\cdots \\
-ax^{m+1} & & -(m+1)a^2 & & -(m+1)ab & \\
-b & x^{2m+1} & -b & & -\dfrac{m(m+1)a^3}{2} & \\
+(m+1)a^2 & & +(m+1)a^2 & & -(2m+1)ab & \\
 & & & & +(m+1)(2m+1)a^3 &
\end{array}
$$

これを継続して行けば，最後に

$$
(*6)\left\{\begin{array}{l}
A=-a,\quad B=-b+(m+1)a^2,\quad C=-c+(3m+2)ab-\dfrac{(m+1)(3m+2)}{2}a^3, \\
D=-d+2(2m+1)ac+(2m+1)b^2-(2m+1)(4m+3)a^2b+\dfrac{(m+1)(4m+3)(2m+1)}{3}a^4,\ \cdots
\end{array}\right.
$$

を得る．ここで面倒なのは，(*4) の右辺の乗巾計算である．しかしガウス所有の［8］ランベルトの数表補遺には（ x と y が逆），表39「無限級数の巾」が載っていて，ガウスは利用した．その一部を採録しよう．

$y = x$	$+\ ax^2$	$+\ bx^3$	$+\ cx^4$	$+\ dx^5$	$+\ ex^6$	$+$
$y^2 =$	1	$2a$	$2b$ a^2	$2c$ $2ab$	$2d$ $2ac$ b^2	
$y^3 =$		1	$3a$	$3b$ $3a^2$	$3c$ $6ab$ a^3	
$y^4 =$			1	$4a$	$4b$ $6a^2$	

訂正後の公式による計算は，係数のみであるが，ライステ(A)頁に載っている．

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{24} & -\frac{5}{208} & -\frac{35}{17.128} & 1 & -a & -b & -c & -d \\
 & & +\frac{1}{20} & +\frac{7}{120} & +\frac{9}{208} & & & +5a^2 & +14ab & +2.9ac \\
 & & & -\frac{7}{200} & +\frac{1}{64} & & & & -\frac{5.14}{2}a^3 & +9b^2 \\
 & & & & -\frac{57}{800} & & & & & -9.19a^2b \\
 & & & & +\frac{57}{2000} & & & & & -\frac{5.19.9}{3}a^4 \\
1 & -\frac{1}{10} & +\frac{1}{120} & -\frac{11}{15600} & +\frac{211}{3536000} & 1 & A & B & C & D
\end{array}
$$

こうしてレムニスケート積分(*1')の逆関数として，級数

(*2')　$x=\text{sin. lemn. } u$

$$
=u-(1/10)u^5+(1/120)u^9-(11/15600)u^{13}+(211/3536000)u^{17}\cdots
$$

が求められた．彼はこのように多数桁の計算を，楽々と実行していたのだ．

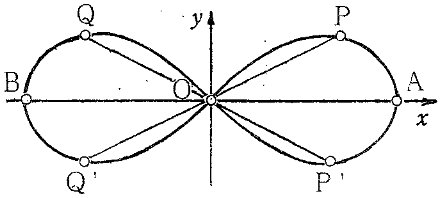
［17］ガウス日記第51項(1797年１月８日）に誇らかに書く．

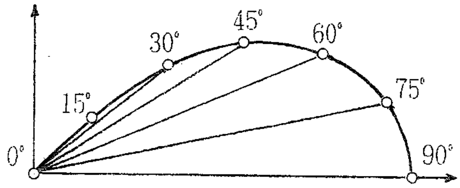
「$\int_0^x dx/\sqrt{(1-x^4)}$ ニ依存スル れむにすかーた ~~えらすちか~~ 曲線ノ研究ヲ始メタリ．」

ガウスは初め，オイラーに従って弾性（エラスチカ）曲線と呼んでいたが，これを横線で消してレムニスカータ曲線に書き直した．（以下慣用のレムニスケートと呼ぶ．）

§２１．度数表示のレムニスケート関数

いわゆるレムニスケート曲線は，数字の８を横に寝かせたような形である．下図左は長さＯＡを１と定めた特別の場合である．





原点ＯからＡまで弧ＯＰＡを辿った長さが$\varpi/2$＝1.311028777…である（全周はその４倍）．$\varpi/2$は§２の A に等しい．円の四半周を 90 等分して１度と称したのに倣い，ガウスはレムニスケート四半周を同じく 90 等分して１度と呼んだ(右図)．円の１度が$\pi/180$＝0,017453…なのに対して，$\varpi/180$＝0,014566…である．sl.uは，レムニスケートの弧長ＯＰ＝u から弦長ＯＰ＝x を求める．

弦長が負になる部分を説明せねばならない．Ａに達した後，下側の弧ＡＰ'Ｏを辿れば原点Ｏに戻る．続きは上側の弧ＯＱＢを辿る．（ガウスがどう考えたか分からないが，）曲線は原点Ｏで《裏返し》になるので，弦長ＯＱ＝x は負にとる．これは，sl.u が $u\times$function(u^4) の形をしているので，

(*7)　　$\mathrm{sl}.(-u)=-\mathrm{sl}.(u)$

とも整合性を持つ．Ｂからは下側の弧ＢＱ'Ｏを辿って，再び原点Ｏに戻る．

なお u が 90° に近い場合の sl.u を求めるために，ガウスは余弦に似た

(*8)　　$\cos.\mathrm{lemn}.u=\mathrm{cl}.u=\mathrm{sl}.(90°-u)$

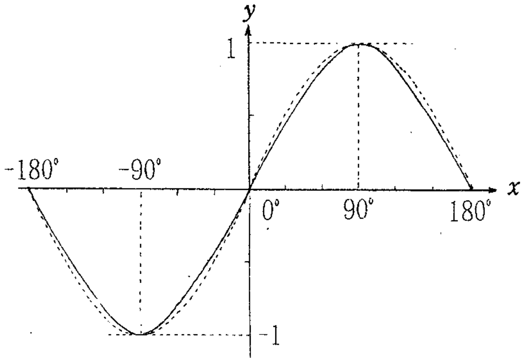
を導入した．それは $s=\mathrm{sl}.u$ と

(*9)　　$\mathrm{cl}.u=\sqrt{(1-s^2)}/\sqrt{(1+s^2)}$,

なる関係で結ばれる．

次に度数表示の利点を考えてみよう．先に述べたように$\varpi/2$に対応する90°は

1,31102… であり，円の $\pi/2$ に対応する90°は 1,57079… であって，数値は明らかに違う．しかし両者を，ガウスが試みたように，同じ度数で表示すれば，正弦（点線）とレムニスケート（実線）は非常によく似たグラフになる．



数値では，次のように 0° と 90° の 2 カ所で一致し，30°～45° の所で食い違う．

$u°$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
sl. $u°$	0	0,218	0,435	0,644	0,825	0,953	1
sin $u°$	0	0,259	0,5	0,707	0,866	0,966	1

レムニスケートは初め 0°～ 90° の区間で定義されたが，上述のように負の区間 −90°～0° に拡張され，類推によって無限区間に拡張される．これは私の考えではなく，ガウス自身がそう考えた証拠――すなわちライステ92頁の記述に注目したい．引用に際し（簡略のため）後の方の項を省略した．

(*10)

$$\text{sin. lemn. } a = 0,95500599 \sin a - 0,04304950 \sin 3a + 0,00186048 \sin 5a - 0,00008040 \sin 7a$$

現代の知識ではフーリエ級数であるが，フーリエの最初の論文発表は 1808 年だから，ガウスは勿論フーリエとは独立である．論理的に無限区間へ拡張すには，レムニスケートの加法公式を用いる．ライステ16頁の記号を用いると，

(*11)

$$\text{sl.}(A+B) = (s'c+sc')/(1-s'sc'c);$$
$$s=\text{sl.}A,\quad s'=\text{sl.}B,\quad c=\text{cl.}A,\quad c'=\text{cl.}B.$$

である．

私は《発見の心理学》の観点から，ガウスが二つの曲線の類似性を見て，sl. u は自然に無限区間に拡張され，sin u に似た波形の曲線になるだろうと予想したものと考える．新関数の発見者は，論理のみによって考えただけではなく，幸いなる類似性によって導かれたのではあるまいか．

ガウスは三角関数表に匹敵するようなレムニスケート関数表を作ろうと意図した．ライステ76-77頁には，引数 46° までの欄を作り，実際には 15½° までで中断している．Arg はレムニスケートの「度数」$u=2\varpi/360$ を表し，Rad.u は sin. lemn.u を表す．

Lemniscata

Arg	Rad.u						
0	0	6	0874014	11	1602263	14	2039025
1	0145670	7	1019678	11,5	1675072	14,5	2111793
2	0291340	8	1165337	12	1747875	15	2184550
3	0437009	9	1310990	12,5	1820673	15,5	2257296
4	0582679	10	1456633	13	1893465	16	
5	0728347	10,5	1529450	13,5	1966249	16,5	

1° ＝1, 31102878/90＝0, 0145670 から出発． 5° ＝0, 0728349 から sl. 5° ＝0, 0728347 を級数計算し，10° ＝0, 1456699 から sl. 10° ＝0, 1456633 を求め， 15° ＝0, 2185048 から sl. 15° ＝0, 2184550 を求め，等々．注目すべきは sl. 10, 5° や sl. 11, 5° の如き半端な値を求めたことである．その意図は，級数計算では仲々収束しない sl. 21° や sl. 23° 等の値は，後述の 2 倍角公式(*14)により求めようとした，と考えられる．さらに，u が 90° に近い場合は，(*8, 9) cl.u の公式を用いたかも知れない．

§２２．レムニスケート周の５等分

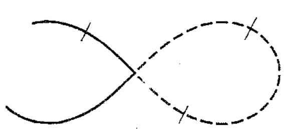
［20］河田敬義，ガウスの楕円関数論，上智大学数学講究録No.24, 1986.

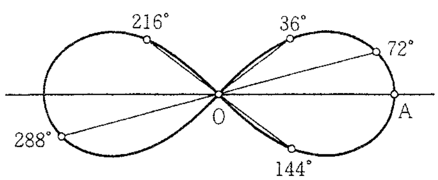
［21］河田敬義，数学の帰納的な発展，⇨小平邦彦編，数学の学び方．岩波書店，1987.

の２著は［１］史談を詳細に解説し，さらに史談に訂正を施していて貴重である．

前回§14～15で見たが，ガウスは円周１７等分を代数方程式で表し，１７等分点が平方根の積み重ねで表される事実を重視した．円周５等分点も周知の如く $\cos72° =(\sqrt{5}-1)/4$ と平方根によって表される．それは同時に作図可能な条件でもある．彼は類推によって，レムニスケート周においても５等分した場合，例えば sin. lemn. 72° が根号の積み重ねで表されないか，その可能性に強い関心をもった．

［１］史談45頁の図はレムニスケート周の１０等分の如く描かれていて誤り．sin36°［＝sl. 36°］は sin144°［＝sl. 144°］の代用．ガウス自身はライステ87頁の左上隅に次の左図を描いた．彼の意図を解説すれば右図になる．訂正を要する．





5つの点 $u=0°, 72°, 144°, 216°, 288°$ に対応する5つの値 sin. lemn. u を含む方程式は，史談45頁にあるように，25次の方程式

(*12)　$0=s(5-62s^4-105s^8+300s^{12}-125s^{16}+50s^{20}+s^{24})$

である．ガウスはスラスラとこの方程式を導いたのではない．史談45頁のように，三倍角公式と二倍角公式を等値する方法である．

ガウスによる5等分公式は，［1］史談45頁（元はライステ102頁）に紹介されているように，$s=\sin.\mathrm{lemn}.72°$ とおくとき，すぐ上の図により，

3倍角公式　$-\sin.\mathrm{lemn}.216°=-s(3-6s^4-s^8)/(1+6s^4-3s^8)$　…(*17)

2倍角公式　$\sin.\mathrm{lemn}.144°=2s(\sqrt{(1-s^4)})/(1+s^4)$　…(*14)

を等値して，s を約し，両辺を自乗して 24 次の方程式を得た．ライステ102頁から計算の続き（ここでも係数のみ表示）：

Die Theilung der Lemniscata in 5 Theile führt auf diese Gleichung $\dfrac{9-36s^4+30s^8+12s^{12}+s^{16}}{1+12s^4+30s^8-36s^{12}+9s^{16}}=\dfrac{4(1-s^4)}{1+2s^4+s^8}$

レムニスケートの5つの部分への分割から，次の方程式が得られる．

$$\left.\begin{array}{l} 9-36+\ 30+\ 12+\ \ 1 \\ \quad +18-\ 72+\ 60+\ 24+\ 2 \\ \qquad\quad +\ \ 9-\ 36+\ 30+12+1 \\ -4-48-120+144-\ 36 \\ \quad +\ 4+\ 48+120-144+36 \\ \hline \quad 5-62-105+300-125+50+1 \end{array}\right\}=0$$

左辺分子×右辺分母

左辺分母×右辺分子(負)

勿論この計算の代わりに，$s=\mathrm{sl}.(2u)$，$s'=\mathrm{sl}.(3u)$，$c=\mathrm{cl}.(2u)$，$c'=\mathrm{cl}.(3u)$ と置いて加法公式(*11) を用いて $\mathrm{sl}.(5u)$ を求めることも可能である．しかし私の試みた計算では，途中で式が錯綜して行き詰まった．ガウスの上記の方法は実際的であり，有効な方法である，と知った．

さらに式(*12)の因数分解も簡単には運ばない．s を除き，$s^4=x$ とおいて6次方程式

(*13)　$0=5-62x-105x^2+300x^3-125x^4+50x^5+x^6$

に直す．ニュートン法などの数値解法を用いて $x=0,0733810047$ を得るが，$\sqrt[4]{x}=0,52047025$ は§21の図(OA=1)の数値から考えて $\beta=\mathrm{sl}.144°=\mathrm{sl}.36°$ に相当する．

第2根は2倍角公式

(*14)　$\mathrm{sl}.2u=2s(\sqrt{(1-s^4)})/(1+s^4)$,　　$s=\mathrm{sl}.u$

の s に β を代入して得る 0,9335178 が $\alpha=\mathrm{sl}.72°$ である．$y=\alpha^4=0,7594355$ と置く．これらの数値の代数的な意味を知るため $z=x\cdot y=0,05572814$ の連分数を求めると，z は2次方程式 $0=1-18z+z^2$ の根となり，$z=9-4\sqrt{5}$ となる．同様に $w=x+y=0,83281650$ の連分数を求めると，w は2次方程式 $0=-44+52w+w^2$ の根となり，$w=-26+12\sqrt{5}$ となる．まとめて $x=\beta^4$ と $y=\alpha^4$ は，2次方程式 $0=(9-4\sqrt{5})+(26-12\sqrt{5})x+x^2$ の根となる．残る因数は式(*15)に示す．

ライステ 100-102頁の，ガウスによる悪戦苦闘の計算の意味を，私が探り当てた．

こうして，根 α と β を含む25次の方程式は，次のように分解される：

$$(*15)\qquad 0=s(5-2s^4+s^8)(1-12s^4-26s^8+52s^{12}+s^{16})$$
$$=s(5-2s^4+s^8)(9-4\sqrt{5}+(26-12\sqrt{5})s^4+s^8)$$
$$\times\ (9+4\sqrt{5}+(26+12\sqrt{5})s^4+s^8)\ .$$

［21］河田著 54～55頁に，5等分方程式の解法および根の根号による表記があり，さらに 62頁に，虚平面上の根の位置が描かれている．これらは，ガウスの研究結果を知る上で大変参考になる．ただし数値に誤りを含み，根の位置も不正確なので，下記に訂す．

先ず**実根**は，$\mathrm{sl.}\,0^\circ=0$ の他に，上で求めた

$\alpha=\mathrm{sl.}\,72^\circ=\sqrt[4]{[-13+6\sqrt{5}+\sqrt{((13-6\sqrt{5})^2-9+4\sqrt{5})}]}=\sqrt[4]{0,759435}=0,933518$,

$\beta=\mathrm{sl.}\,144^\circ=\sqrt[4]{[-13+6\sqrt{5}-\sqrt{((13-6\sqrt{5})^2-9+4\sqrt{5})}]}=\sqrt[4]{0,0733810}=0,520470$,

および $-\alpha=-0,933518$ と $-\beta=-0,520470$,

の4個を加えて，全部で5個ある．残りの 20個はすべて**虚根**である．すなわち，先ず

$0=9-4\sqrt{5}+(26-12\sqrt{5})s^4+s^8$

の根で，α や β と共役な4個，$\pm\alpha i$ と $\pm\beta i$ である．残る 16個のうち8個の虚根は

$0=9+4\sqrt{5}+(26+12\sqrt{5})s^4+s^8$

の根である．それらは4個づつ2組に分かれる．

$\gamma=\sqrt[4]{[-13-6\sqrt{5}+\sqrt{((13+6\sqrt{5})^2-9-4\sqrt{5})}]}=\sqrt[4]{-0,341855}=0,764646\sqrt{i}$,

および $-\gamma,\ \gamma i,\ -\gamma i$.　［河田著の数値 $\sqrt[4]{-0,688220}$ を私の数値に訂す．］

$\delta=\sqrt[4]{[-13-6\sqrt{5}-\sqrt{((13+6\sqrt{5})^2-9-4\sqrt{5})}]}=\sqrt[4]{-52,490961}=2,691666\sqrt{i}$,

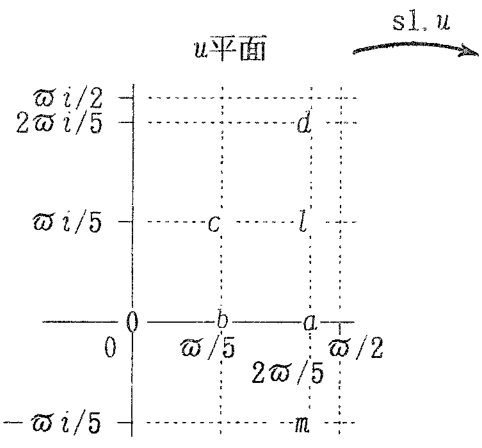
および $-\delta,\ \delta i,\ -\delta i$.　［河田著の数値 $\sqrt[4]{-52,144595}$ を私の数値に訂す．］

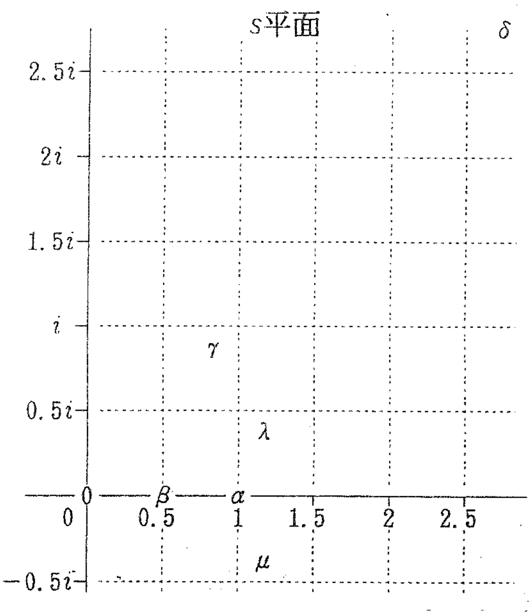
残る8個の虚根は，　$0=5-2s^4+s^8$　の根で，4個づつ2組に分かれる．

$\lambda=\sqrt[4]{(1+2i)}=1,176301+0,334162i,\ -\lambda,\ \lambda i,\ -\lambda i.$

$\mu=\sqrt[4]{(1-2i)}=1,176301-0,334162i,\ -\mu,\ \mu i,\ -\mu i.$

25 個の根の虚平面上のおよその位置（第一象限近くの根に限定）を示す．





史談40頁「何故れむにすけーと n 等分カラ n^2 次ノ方程式ガ生ズルカ．」（日記第62項）の疑問に答えるべく，円周５等分，17 等分の根が根号の積み重ねで表されたことの類推として，レムニスケート周５等分の根も根号の積み重ねによって表される実例が得られた．ガウスはこのような実例を基にしてレムニスケートの研究を進めたものと思われる．

§２３．３等分方程式その他

レムニスケート周の３等分点は $0°, 120°, 240°$ で，$\mathrm{sl}.0°=0$，$\mathrm{sl}.120°=\mathrm{sl}.60°=\kappa$，$\mathrm{sl}.240°=-\mathrm{sl}.60°=-\kappa$ が３実根である．ここで κ は３等分方程式

(*16)　$0=s(-3+6s^4+s^8)=s(3-\sqrt{12}+s^4)(3+\sqrt{12}+s^4)$

のうち $0=3-\sqrt{12}+s^4$ の根であり，$\pm\kappa=\pm\sqrt[4]{(-3+\sqrt{12})}=\pm 0,825379$ が実根である．虚根は κ の共役 $\pm\kappa i$ である．残りの４虚根は $0=3+\sqrt{12}+s^4$ の根であって，いま $\kappa'=\sqrt[4]{(3+\sqrt{12})}=1,594509$ と置くとき，４虚根は $\pm\kappa'\sqrt{i}$，$\pm\kappa'\sqrt{-i}$ である．

ガウス自身が，このような３等分の解析を行なった痕跡は見当たらないが，小手調べとして，何処かで実行した可能性はある．

興味深いことに，紙片 Math25-(8)ウに，次の作りかけの表がある．

β	36°	0,5204702	60°	0,8253788	$\kappa=\sqrt[4]{(-3+\sqrt{12})}$
α	72°	0,9335179	30°		♯
	90°	1,0000000	…	…	
$\sqrt{(\sqrt{2}-1)}$	45°	0,6435948	22½°	0,32737932	♭

この表も§21末で引用した表と同様に，レムニスケート関数表の一部とする予定であったろう．しかし先の関数表とは違い，レムニスケート周の等分値を引数としている．

$\mathrm{sl}.45°=\sqrt{(\sqrt{2}-1)}$ はレムニスケート周８等分方程式の一根である．

♯はレムニスケート周 12 等分方程式の根で，$\mathrm{sl}.30°$ であり，いま $\kappa^2=\sqrt{(-3+\sqrt{12})}$ と置くと，$\mathrm{sl}.30°$ は $\mathrm{cl}.60°=\mathrm{sl}.(90°-60°)$ である．余角公式（*9）を用いると，$\mathrm{sl}.30°=\sqrt{(1-\kappa^2)}/\sqrt{(1+\kappa^2)}=0,4354205$ として♯が得られる．ガウスがこの欄を未記入なので補った．

♭はレムニスケート周 16 等分方程式の根で，ライステ64頁にある．ただし，そこでは別の経路で求めている．もしも２倍角公式（*14)を用いようとするならば，$\rho=\mathrm{sl}.45°=\sqrt{(\sqrt{2}-1)}=0,6435948$ から，$\sigma=\mathrm{sl}.22½°=2\rho(\sqrt{1-\rho^4})/(1+\rho^4)$ と置いて，逆に σ の方程式を解くことになる．その実行は煩わしい．むしろ $u=11¼°$ を級数計算してから，２倍角公式(*14)によって $\sigma=\mathrm{sl}.22½°$ を求めたのであろう．

確かにレムニスケート周の５等分の例題は鮮やかであり，５等分点を示す図も印象的である．しかし，ガウスは単に５等分のみならず，その他多くの等分を試みていることを指摘したい．かくして，虚数領域におけるレムニスケート関数の値について，多くの具体的な経験を積み重ねていたのである．

§ 2 4．ガウスが辿った道

［22］高木貞治『解析概論』，岩波書店，1943，53節

に，要旨次のような記述がある：

「三角函数は歴史的に幾何学の見地から定義されたが，これも解析的に積分から導かれる．〔中略〕今かりに微積分の発見以前に三角函数が未知であったと想像すれば，円弧の計算の必要上，自然に積分 $\theta = \int_0^x dx/\sqrt{(1-x^2)}$ に遭遇したであろう．青年ガウス(1797)は連珠形の弧長 $\theta = \int_0^x dx/\sqrt{(1-x^4)}$ を考察して，楕円函数発見の糸口を得たのである．」

レムニスケート積分の級数を反転してレムニスケート関数を入手したガウスは，続いてどのように理論を展開したか？ ［20］，［21］河田著，および

［23］L. Schlesinger, *Uber Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie*, Gauss'sche Werke, X-1. Abh. 2

などに述べてある展開から推測すれば，次のような筋道であって，これは**論理的な順序**である．それは偶然に支配される**発見の歴史**とは区別される所の，論理的な必然性をもつ展開の筋道である．

（１）連珠形の四半弧長 $\varpi/2 = 1.3110287\cdots$ の計算　……式(*3)を見よ．

（２）積分の逆関数 sl. x の導入　……式(*2)を見よ．

（３）sl. x の加法公式　……式(*11)を見よ．

（４）sl. x の２倍角公式，３倍角公式　……式(*14)その他を見よ．

（５）加法公式による負領域，実無限区間への拡張　……式(*10)を見よ．

（６）sl. x 周の５等分　……式(*12)その他を見よ．

注釈　sl. x 周の５等分という項目はガウス独自であって，楕円関数論としては特殊な項目と言える．彼は円周 n 等分との関連で，新関数の場合にも直ちに周 n 等分を目指したのである．また，彼が度数表示したことも，これと関係がある．また５等分以外に３，８，12，16等分なども考えていた．特に５等分点 $\alpha = \mathrm{sl}.\,72^\circ$ および $\beta = \mathrm{sl}.\,144^\circ$ なる実数値を求める所までは，論理的必然性を認めてもよいが，５等分方程式に含まれる虚数値まで求めたことは，まさにガウス独自であって，論理的な展開の範疇には含めにくい．

（７）複素領域への拡張　……（［21］河田著では［１］史談に引きずられて sl. x 周の５等分を扱った後，この項目(7)に戻る．）

（８） sl. x の零点と極　……（［21］河田著は，ここを丁寧に扱う．）

（９）零点と極の一次式を因数とする無限積

（10） sl. x の整関数の比 M/Nへの分解

しかし，ガウスの［２］ライステ記入をよく見ると，彼が辿った道は，どうもこのような展開ではない．念のために，彼が各項目に何時取り組んだか調べよう．だがライステに散見する種々の計算は，「隙間があれば何でも書き込む」という風に記入されていて，その前後関係が判定しにくい．

代わりに，研究の進捗状態を日付と共に記入した［17］ガウス日記が手掛かりになるかも知れない．《　》内は，日記を整理したクラインとシュレジンガーが振った通し番号である．日記記事の原文通りの翻訳は，後にその都度掲げることにして，ここでは標語的に要約する．

《51》れむにすけーと研究ノ開始（1797年１月８日）→§２０．

《60》れむにすけーとｎ等分カラ何故n^2次の方程式？（３月19日）→§２８．

《61》〔無限積項ノ〕係数〔後述〕（３月）〔日付なし〕→§２９．

《62》れむにすけーと５等分（３月21日）→§２２．

《63》れむにすけーと研究ノ成果〔後述〕（３月29日）→§２７．

これ等の中間では一般的オイラー積分，整数論，連分数など多岐にわたり，彼はレムニスケートにのみ専念していたのではない．日記から上記の(1)～(10)項目の日付を確定することはおろか，前後関係を知ることすら不可能に近い．

［１］史談43頁に「現代的の楕円函数論では高度に発達した函数論を用いるから，すべてが簡単に出てしまう．…」とある．青年ガウスが現代の関数論のテキストと同様なる道を辿った，と再構築することは危険である．ところで

［24］ W. K. Bühler, Gauss : A biographical study, Springer, 1981.

には，［３］ガウス全集を編纂したシュレジンガー(L. Schlesinger)を指して，

「シュレジンガーが試みた，ガウスが辿ったかも知れない思考の線を再構築する代わりに」(87頁)，とか，「余り詳細に立ち入るのはシュレジンガー風の(a là Schlesinger)再構築を意味する」(92 頁）と批判する．私はこの見解に同感する．［３］ガウス全集に採録されたライステ記述の，シュレジンガーによる分類と注釈，そして［23］シュレジンガー論文の展開は，まさにシュレジンガー風であって，とても「ガウスが辿った道」とは思えない．

私が一番知りたいのは，1797年頃，ガウスはどう考えたか？　である．私たちは再び残された資料：［２］ライステへの書き込み，多くの紙片(Math. 25 等)の探索を続けることにしよう．

§25．級数の比 M/Nへの分解

レムニスケート関数論の進め方に（A）論理的展開すなわち（7）複素領域への拡張，（8）sl. xの零点と極，（9）零点と極の一次式を因数とする無限積と辿ってから（10）sl. x の整関数の比 M/Nへの分解と進める方法がある．しかし私は，ガウスは別の道（B）すなわち（6）sl. x周の5等分から直ちに(10) sl. x の整関数の比 M/Nへの分解に歩を進めたのではないか，と考える．以下［2］ライステ記述を追って，彼が（B）の道をどう進めたかを再構築してみよう．

それはnを奇数とするとき，n倍角公式の分子と分母の s に，u の級数

(*2') $s=\mathrm{sl}.u=u-(1/10)u^5+(1/120)u^9-(11/15600)u^{13}+(211/3536000)u^{17}\cdots$

を代入してみるのである．

$s=\mathrm{sl}.u$ の3倍角公式は［1］史談39頁（［2］ライステ18頁から引用）に見るように，

(*17) $\mathrm{sl}.3u=s(3-6s^4-s^8)/(1+6s^4-3s^8)$,　ただし $s=\mathrm{sl}.u$,

である(分子括弧内の根 $\kappa=0,8253788$ については§23を参照)．

5倍角公式の分子は§21の(*12) として述べた．5倍角公式自体は

(*18) $\mathrm{sl}.5u=s[5-62s^4-105s^8+300s^{12}-125s^{16}+50s^{20}+s^{24}]$

$\div[1+50s^4-125s^8+300s^{12}-105s^{16}-62s^{20}+5s^{24}]$

である．注意すべきは，分母の方程式は分子括弧内の方程式に $1/s$ を代入して s^{24} を掛けたいわゆる**逆数方程式**になっていることである．この点は各n倍角公式にも共通する．

次に予備的に4倍角公式を示そう．

(*19) $\mathrm{sl}.4u=4s[(1-5s^4-5s^8+s^{12})\sqrt{(1-s^4)}]$

$\div[(1+20s^4-26s^8+20s^{12}+s^{16})\sqrt{(1+s^4)}]$

7倍角公式の計算はライステ69頁にある．彼の記法は例えば $(1-5s^4-5s^8+s^{12})$ を係数のみ記して，(1-5-5+1) と書く．彼は7倍角公式の分子を求めるため，4倍角公式の分子・分母の平方と3倍角公式(*17)の分子・分母の平方を等値し，展開し，

$(16-16)(1-5-5+1)^2(1+6-3)^2=(1+20-26+20+1)^2(3-6-1)$

から両辺を整理して，

(*20) 7-308-2954+19852-35231+82264-111916+42168+15673-14756+1302-196-1

を得ている（計算の中断を私が補った）．分母は上述のように逆数方程式であり，

(*20') 1+196-1302+14756-15673-42168+111916-82264+35231-19852+2954+308-7

まとめて，

(*21) $\mathrm{sl}.7u=s(7-308s^4-2954s^8\cdots)/(1+196s^4-1302s^8\cdots)$,

となる．9倍角公式の明示的な記述は見当たらないが，後述（§26)の《実験公式》から推察すれば，恐らく（始めの方の係数は計算していて）

(*22) $\mathrm{sl}.9u=s(9-1044s^4-32106s^8\cdots)/(1+540s^4-7722s^8\cdots)$,

には到達していた，と思われる．

これらの公式の s のところに§20の $\mathrm{sl}.u$ の級数

(*2') $s=u-(1/10)u^5+(1/120)u^9-(11/15600)u^{13}+(211/3536000)u^{17}\cdots$

を代入して整理すれば，各n倍角公式から

(3倍角) $\mathrm{sl}.u=[u-(7/270)u^5+(1/9720)u^9\cdots]/[1+(2/27)u^4-(1/1215)u^8\cdots]$

(5倍角) $\mathrm{sl}.u=[u-(1/50)u^5-(71/1875000)u^9\cdots]/[1+(2/25)u^4-(29/78125)u^8\cdots]$

(7倍角) $\mathrm{sl}.u=[u-(9/490)u^5-(6857/98825160)u^9\cdots]$

$\div[1+(4/49)u^4-(6902/28824005)u^8\cdots]$

(9倍角) $\mathrm{sl}.u=[u-(6961/393660)u^5-(35861279/433910947680)u^9\cdots]$

$\div[1+(20/243)u^4-(862/4782969)u^8\cdots]$

を得る．ガウスに倣いn倍角が，二つの整関数の比として，

(*23) $\mathrm{sl}.u=\mathrm{M}/\mathrm{N}=[u+pu^5+Pu^9\cdots]/[1+qu^4+Qu^8\cdots]$

のように表せるものと仮定すれば，

$p=-1/38.57\cdots,\ -1/50,\ -1/54.44\cdots,\ -1/56.52\cdots$;

$q=+1/13.5,\ +1/12.5,\ +1/12.25,\ +1/12.15$;

$P=+1/9720,\ -1/26408.4\cdots,\ -1/14412.3\cdots,\ -1/12099.7\cdots$;

$Q=-1/1215,\ -1/2693.9\cdots,\ -1/4167.1\cdots,\ -1/5548.6\cdots$

となる．特に q の値に注目すれば次第に $+1/12$ に近づくことが明瞭である．いま仮りに $q=+1/12$ と置いて，ガウスが得意とする未定係数法を適用すれば，

$$\mathrm{sl}.u\cdot[1+(1/12)u^4\cdots]=[u-(1/10)u^5\cdots]\cdot[1+(1/12)u^4\cdots]$$
$$=u+(-1/10+1/12)u^5\cdots=u-1/60u^5\cdots,$$

これを分子の $u+pu^5\cdots$ と比べて $p=-1/60$ を得る．さらに

$$\mathrm{sl}.u\cdot[1+(1/12)u^4+Qu^8\cdots]$$
$$=[u-(1/10)u^5+(1/120)u^9\cdots]\cdot[1+(1/12)u^4+Qu^8\cdots]$$
$$=u-(1/60)u^5+(1/120-1/120+Q)u^9\cdots$$

これを分子の $u-(1/60)u^5+Pu^9\cdots$ と比べて $P=Q$ を得る．

他方 $s=\mathrm{sl}.u$ の2倍角公式(*14)に $\mathrm{M}=\mathrm{M}u$ と $\mathrm{N}=\mathrm{N}u$ を入れて書き換えば，$\mathrm{sl}.2u=\mathrm{M}2u/\mathrm{N}2u=[2s\sqrt{(1-s^4)}]/(1+s^4)$ から

(*24) $\mathrm{M}2u=2\mathrm{MN}\sqrt{(\mathrm{N}^4-\mathrm{M}^4)},\quad \mathrm{N}2u=(\mathrm{M}^4+\mathrm{N}^4)$

これに級数 $\mathrm{M}u=u+pu^5+Pu^9\cdots$，$\mathrm{N}u=1+qu^4+Qu^8\cdots$ を入れて，未定係数法を適用すれば $\mathrm{M}u$ の u^9 の係数 P と $\mathrm{N}u$ の u^8 の係数 $Q(=P)$ が求まり，

(*25) $$\begin{cases}\mathrm{M}u=u-(1/60)u^5-(1/10080)u^9\cdots,\\ \mathrm{N}u=1+(1/12)u^4-(1/10080)u^8\cdots,\end{cases}$$

を得る．以下，同様に進める．

ガウスは実際にライステ63頁で Mu の続きを pu^{13}, Nu の続きをqu^{12} と置いて，すなわち$Mu=u-(1/60)u^5-(1/10080)u^9+pu^{13}$, $Nu=1+(1/12)u^4-(1/10080)u^8+qu^{12}$ とおいて係数 p, q を求めている．上記の方法は，彼の方法を模倣したのである．上記の場合，Mの u^5 の係数 p およびNの u^4 の係数 q を求めるため，第二の条件式として，sl.の２倍角公式から導かれる，MとNの２倍角公式を必要とした．（ただしこれは私の推測であって，ガウスが実際にどう計算したか不明であるが）．これと同様に，ライステ63頁の場合，第二の条件式として ln.M と ln.N の係数を用いた．彼の未定係数法の実際を紹介するには多くの紙面を要する．上記では，私が推測した計算例を述べた．

§26．ガウスの実験公式

話は前節で扱ったｎ倍角公式に戻る．これまで[23]シュレジンガーらも気が付いていないが，紙片 Math.25-(3)ウに，$s1=s$,　$s2=sc(1-s^4)2/(1+s^4)$, $s3=s(3-6s^4-s^8)/(1+6s^4-3s^8)$ 等々，すなわちｎ倍角を書いた後に，

(*26)
$$
\begin{aligned}
&snx=s(n-gs^4-Gs^8)/(1+hs^4-Hs^8),\\
&\quad g=(n.n^2-1.n^2+6)/60,\\
&\quad G=(n^6-13n^4+36n^2+420.n.n^2-1)/10080,\\
&\quad h=(n^2.n^2-1)/12,\\
&\quad H=(n^2.n^2-1.n^2-4.n^2+75)/10080.
\end{aligned}
$$

と言う驚くべき公式を書いた．原式は１行目の g, G, h, H の所に下側の n の式を直接書いた． $n.n^2-1.n^2+6$ は現代の記法ならば $n(n^2-1)(n^2+6)$ と書くべき所，ガウスやそれ以前のスターリングなどの時代の慣用記法．

この公式に $n=3$, 5, 7, 9 を代入した所，前節で挙げたｎ倍角公式の係数と凡て一致する． $n=11$ の場合，私が計算した 11倍角公式の係数のうち $g=2794$ と $h=1210$ は一致する．11倍角公式の係数 G と H の正しい値は $G=169291$, $H=34569$ なのに，彼の実験公式(*26)では $G=1489774/7$[分数], $H=33033$ となる．よって公式はここで破産する．

私は次のように考える．ガウスは恐らく， $n=3$, 5, 7, 9 の場合に求めておいたｎ倍角公式の係数に基づいて，連立方程式を立てて g, G, h, H などを求めたのであろう．しかし 11倍角公式の係数までは計算しなかった．そのためこの《驚くべき》公式も，所詮は**実験公式**に過ぎなかった！

§27. レムニスケートのパイ

一度§25の級数

$$(*25)\quad \begin{cases} \mathrm{M}u=u-(1/60)u^5-(1/10080)u^9+(23/249459200)u^{13}+\cdots, \\ \mathrm{N}u=1+(1/12)u^4-(1/10080)u^8+(17/19958400)u^{12}+\cdots, \end{cases}$$

を入手したガウスは，早速に数値的な検算をする(検算は習い性となっている).

まず最も簡単な $u=90^\circ=\varpi/2=1.31102878$ の場合，先に

(*23)　$\mathrm{sl.}\,u=\mathrm{M}u/\mathrm{N}u$

と定義されたから，$\mathrm{sl.}\,90^\circ=1=\mathrm{M}90^\circ/\mathrm{N}90^\circ$ により，

(*27)　$\mathrm{M}90^\circ=\mathrm{N}90^\circ$，$(=\Pi$ と置く)

となる筈である．その計算がライステ66頁（[1] 史談43-44頁)にある．

sl. 90°の分子	Zähler bei sin 90°	Nenner	分母
$A=90^\circ$	1,31102878	1,2461884	$1+A^4/12$
$-A^5/60$	− 6455202	− 86583	$-A^8/10080$
$-A^9/10080$	− 113514	1,24532257	
	1,24534162	+ 2196	$+17A^{12}/19958400$
$+23A^{13}/259459200$	+ 300	1,24534453	$\mathrm{N}.A=\mathrm{N}(90^\circ)$
$\mathrm{M}.A=\mathrm{M}(90^\circ)$	1,24534462		

すなわち $\mathrm{M}90^\circ=1.24534462\fallingdotseq 1.24534453=\mathrm{N}90^\circ$ で，式(*27) が成立しそうである(その証明が残された主題になる)．この

(*27')　$\Pi=1.245344609\cdots$

なる値は，ライステ(A)頁の「スターリングによれば」の下に書かれた 1.2453 と同じ数値である([2] 史談38頁).

$u=45^\circ$ の場合の検算の例は，紙面の都合で略す．

ガウスは次に，§25で取り上げたMとNの2倍角公式を試す．念の為に再記しておく．$\mathrm{M}u$ を M，$\mathrm{N}u$ を N と略して，

(*24)　$\mathrm{M}2u=2\mathrm{MN}\sqrt{(\mathrm{N}^4-\mathrm{M}^4)}$，　$\mathrm{N}2u=\mathrm{M}^4+\mathrm{N}^4$

この後半の式で，$u=90^\circ$ と置けば，(*27) も用いて，

(*28)　$\mathrm{N}180^\circ=(\mathrm{M}90^\circ)^4+(\mathrm{N}90^\circ)^4=2(\mathrm{N}90^\circ)^4$

が成立する筈である．実は式 (*24) の前半は，$u=90^\circ$ を代入すれば平方根の内側が $(\mathrm{M}90^\circ)^4-(\mathrm{N}90^\circ)^4=(\mathrm{N}90^\circ)^4-(\mathrm{N}90^\circ)^4=0$ となり，$\mathrm{M}180^\circ=0$ という詰まらない結果しか得られない．しかし $\mathrm{N}180^\circ$ を直接求めることは難しく，結局の所，$2(\mathrm{N}90^\circ)^4$ を計算することになる．[2]ライステ71頁に，

N(90°)	$\Pi = 1,2453447$			
	$2\Pi^4$			
	L. Π	0,0952896		
4·L. Π		0,3811584	2,4052400	Π^4
			4,81048 = Nπ[Lemn.]	$2\cdot\Pi^4 = \mathrm{N}(180°)$
			log. hyp. dieser Zahl	この数の双曲線対数
			$= 1,5708 = \frac{1}{2}\pi$ Circuli ?	=…=円のパイの $\frac{1}{2}$?

「この数，N(πLemn.)=4.81048 の双曲線対数は=πCirculi/2 だろうか？」という疑問は，［2］史談44頁で，「…と推測するなどは**驚くべきこと**と言わねばなるまい」なる感嘆の有名な件りである．しかし，前回§19で「愛の愛情」を紹介した．それはオイラーの論文［16］「方程式の虚根の研究」の中の

$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\pi/2} = 0,2078796$　の逆数　$e^{\pi/2} = 4,810477$

なる数値に絡まる．この印象的な数値は長くガウスの記憶に止まった．いま全く偶然の経過から目の前に 4,81048 という数値が出現した．数学上の発見の瞬間（異質の領域間の観念の結合）であり，「おや，これは？」と思うのは，自然の成り行きで，両辺の双曲線対数（自然対数）を考えたのは言葉の綾に過ぎない．

いま一つ注目すべきは**パイの二様の用法**．ガウスはこの時期，レムニスケートのパイϖと，円のパイπに同じπなる文字を当てていた．このライステ71頁の記述においては両者の区別を迫られ，止むを得ず πLemn. と πCirculi のような姑息な区別で済ませた．もちろんライステも日記も門外不出の《私的》な文書であり，ガウスがどう書こうが彼の自由であろう．［1］史談37頁では πl の表現を珍重するが，ライステ71頁と日記第 63 項に登場するにすぎない．

この発見は，［17］ガウス日記第 63 項1797年3月29日の記事に載っている．

「れむにすけーと曲線ニ関スル多クノ中ニ，私ハ［以下］ヲ観察セリ．
二倍弧長ノ正弦ヲ分解セル分子ハ　=2・単弧長ノ正弦ノ分子・分母・単弧長ノ余弦ノ分子・分母 トナルデアラウ．［$M2u = 2MN\mu\nu$］　然ルニ其ノ分母ハ　=(正弦ノ分子)^4+(正弦ノ分母)^4．［$N2u = M^4 + N^4$］　弧長 πl ニ対応セル分母ヲ θ ニ等シキ者ト置カバ，弧長 $k\pi^l$ ノ正弦ノ分母 $=\theta^{kk}$ トナルデアラウ．今ヤ $\theta = 4,810480$ デアル．コノ数ノ双曲線対数ガ =1,570796，即チ $=\pi/2$ ナル事ハ極メテ注目スベキ事デアリ，而シテ其ノ独自性ノ証明ハ，解析ニ於ケル最モ重大ナル進歩ヲ約束セン．」（μ と ν は次式で定義された.）
(*29)　$\mathrm{cl.}\,u = \mu u/\nu u = \sqrt{(N^2 - M^2)}/\sqrt{(N^2 + M^2)}$.

§28. 虚数領域への拡張

これまで§25.冒頭の，（B）ガウスが辿ったと私が推測する筋道に沿って来た．以下では（A）レムニスケート関数論の論理的展開，すなわち(7)虚数領域への拡張，(8) sl.u の零点と極，(9) 零点と極の一次式を因数とする無限積，を経て(10) sl.uの整関数 Mu と Nu の比への分解，と進む筋道を辿ってみよう．

レムニスケート周５等分の 25 次方程式の虚根から，ガウスは日記第 60 項で，

「れむにすけーとヲ n 部分ニ分ケル時，何故 n^2 次ノ方程式ニ導カレルノカ」と問う．彼は sl.u の虚数領域への拡張を考えた．sl.u は u×function(u^4) の形だから，変数を $u\sqrt{-1}$ に置き換えると，$u\sqrt{-1}$×function(u^4) の形になり，

（*30）　$\mathrm{sl}.\,iu = i\cdot\mathrm{sl}.\,u,\quad i=\sqrt{-1},$

と定義される．cl.iu は式(*9) から$=\sqrt{(1+s^2)}/\sqrt{(1-s^2)}$，$s=$sl.$u$ となり，

（*31）　$\mathrm{cl}.\,iu = 1\ /\ \mathrm{cl}.\,u$

を得る．かくしてライステ86頁に，次の加法公式が書かれた：

（*32）
$$\begin{aligned}\sin t+u\sqrt{-1} &= [\sin t\ \cos u\sqrt{-1}+\sin u\sqrt{-1}\ \cos t]\\ &\qquad\div[1-\sin u\sqrt{-1}\ \cos u\sqrt{-1}\ \sin t\ \cos t]\\ &= [\sin t+\cos t\ \sin u\ \cos u\cdot\sqrt{-1}\ )\\ &\qquad\div[\cos u-\cos t\ \sin u\ \sin t\cdot\sqrt{-1}]\end{aligned}$$

勿論 sin t は sl. t，cos $u\sqrt{-1}$ は cl. iu のことである．既に§21.で見たように実無限区間まで拡張された sl.u は，類推で変数 u を虚数領域全範に拡張できる．先ず $t=u=\varpi$ の場合を考えよう．sl.$\varpi=0$，cl.$\varpi=-1$ から

（*33）　$\mathrm{sl}.(\varpi+\varpi i)=0$,

　　　　一般に $\mathrm{sl}.(m\varpi+n\varpi i)=0,\quad m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \cdots$

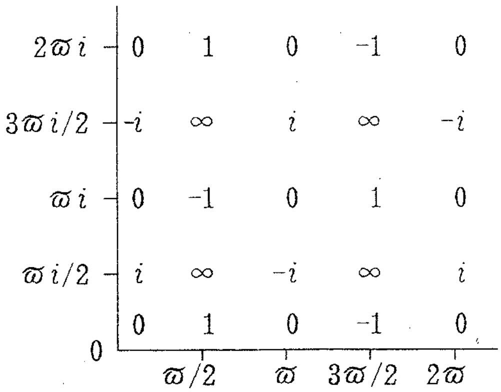
が成立する．次に式(*32)において $t=u=\varpi/2$ なら，sl.$\varpi/2=1$，cl.$\varpi/2=0$ だから分子は１，分母は０となり，

（*34）　$\mathrm{sl}.(\varpi/2+\varpi i/2)=\infty,$

　　一般に $\mathrm{sl}.(h\varpi/2+k\varpi i/2)=\infty,$

　　　　$h,\ k=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$

が成立する．右の図は**sl.uの値**の分布（第一象限のみ）を示す．例えば $u=(\varpi/2+\varpi i/2)$の所で sl.$u=\infty$，$u=(\varpi+\varpi i/2)$の所でsl.$u=-i$ 等．



§ 2 9. MとNの無限積

簡単のため $i=\sqrt{-1}$, $v=u/\varpi$ と書く. **零点を根とする無限積**を次で表そう：

(*35)　$\mathrm{M}=u\Pi'(1-v/(m+ni))$　（Π' は同時に $m=0=n$ を除く整数の積）

ガウスは記号Π'を用いず, $n=0$ なる実軸, $m=0$ なる虚軸上の対応する四項, $m=n$ なる半直角の線上の四項, それ以外の組み合わせで対応する四項, これをそれぞれまとめて実の形に書く. ライステ62頁の記法に似せると次のようなる：

(*35')　$\mathrm{M}=u\times(1-v^4)(1-v^4/16)(1-v^4/81)\cdots$

$\times(1+v^4/4)(1+v^4/4\cdot16)(1+v^4/4\cdot81)\cdots$

$\times\mathrm{Prod.ex}\ (1-v^4/(m+ni))(1-v^4/(m-ni))$

$=u\times(1-(3/4)v^4-v^8/4)(1-(3/4)v^4/16-v^8/4\cdot256)$

$\cdot(1-(3/4)v^4/81-v^8/4\cdot6561)\cdots$

$\times\mathrm{Prod.ex}\ (1-v^4/(m+ni))(1-v^4/(m-ni))$

Prod. ex ［ノ形ノ積］の各項は

$1-2(m^4-6m^2n^2+n^4)v^4/(m^2+n^2)^4+v^8/(m^2+n^2)^4$

となる. ガウス日記第61項(1797年３月某日)では,

「乗巾　$\Sigma((m^2+6mn+n^2)/(mm+nn)^2)^k$ ハ０カラ１マデノ積分

$\int\delta x/\sqrt{(1-x^4)}$ ニ依存スル」

と書き誤っているが, ライステ88頁では　$\Sigma2(m^4-6m^2n^2+n^4)/(m^2+n^2)^4$ に訂されている.

極を根とする無限積の場合, $w=u/(\varpi/2)$ と書き,

(*36)　$\mathrm{N}=\Pi(1-w/(h+ki))$, $h, k=\pm1, \pm3, \pm5, \pm7, \cdots$

と置く.　$h=k$ なる半直角の線上の四項, それ以外の組み合わせで対応する四項, これらをそれぞれまとめて実の形に書けば, 次になる：

(*36')　$\mathrm{N}=(1+w^4/4)(1+w^4/4\cdot81)(1+w^4/4\cdot625)\ \cdots$

$\times\mathrm{Prod.ex}\ (1-2(h^4-6h^2k^2+k^4)w^4/(h^2+k^2)^4+w^8/(h^2+k^2)^4)$

さて, §24で引用した諸著書の論理的な展開におけるMとNの級数の各係数は, 級数MとNを自然対数 ln. M, ln. Nの級数に直したとき$\Sigma1/\rho^4$ の形の和と, $\Sigma2(h^4-6h^2k^2+k^4)w^4/(h^2+k^2)^4$の値から求められる筈である.

ρが 1, 2, 3, … をとるときの和 $\Sigma1/\rho^4=\pi^4/90=1,082323\cdots$　およびρが 1, 3, 5, … をとるときの和 $\Sigma1/\rho^4=\pi^4/96=1,014678\cdots$　などは, 既に

[25] L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, Tomus primus, 1748.

高瀬正仁訳，オイラーの無限解析，海鳴社，2001.
の第10章に詳細に説明されていて，ガウスも読んだ．ライステ89頁に 1,014678 が明瞭に書いてある．その近くに 1,082323 は見当たらない．

Mの級数の u^5 の係数の主要項は，$-(3/4)\cdot 1,082323/\varpi^4=-0,01717003=-1/58,2410$ となる．Nの u^4 の係数の主要項は，$(1/4)\cdot 1,014678\cdot 16/(\varpi/2)^4=0,0858502=1/11,6482$ となる．目標の $-1/60$ 及び $1/12$ に近いとは言え，係数の主要項の計算だけでは不十分である．Mの u^5 の係数，Nの u^4 の係数の主要項をこのように求めたと仮定してみても，ガウスが日記第61項で述べた副項

$$\Sigma 2(m^4-6m^2n^2+n^4)/(m^2+n^2)^4$$

を，ライステのどの頁を探しても，計算した形跡はない．（私は m と n の初めの数項についての計算を試みたが，甚だ面倒であってその和を求めるのは困難だ，と痛感した．）私はやはり(B)の筋道，すなわち§25で述べたように，ガウスは未定係数法によってMとNの級数の各係数を求めたであろう，と考えたい．

MとNの級数を再記すれば，

$$(*25)\quad \begin{cases} \mathrm{M}u=u(1-(1/60)u^4-(1/10080)u^8+(23/249459200)u^{12}\cdots), \\ \mathrm{N}u=1+(1/12)u^4-(1/10080)u^8+(17/19958400)u^{12}+\cdots. \end{cases}$$

級数からその自然対数を求めるには，ライステ72～73頁に出ているように，

$$(*37)\qquad U=1+au^4+bu^8+cu^{12}\cdots=1+V,\quad V=au^4+bu^8+cu^{12}\cdots$$

と置いて，予め級数 V の乗巾 V^2, V^3, … を計算して置き，級数

$$(*38)\qquad \mathrm{ln.}\,U=V-V^2/2+V^3/3-+\cdots$$

を求めればよい．ガウスが sl. とM，Nから求めた ln. sl.，ln. M，ln. N は，

$$(*39)\quad \begin{cases} \mathrm{ln.\,sl.}\,u=\ln\, u-(1/10)u^4-(1/300)u^8-(1/4875)u^{12}+\cdots, \\ \mathrm{ln.\,M}u=\ln\, u-(1/60)u^4-(1/4200)u^8-(1/321750)u^{12}+\cdots, \\ \mathrm{ln.\,N}u=(1/12)u^4-(1/280)u^8+(1/4950)u^{12}+\cdots. \end{cases}$$

である．（検算のため ln. Mu から ln. Nu を引けば ln. sl. u を得る．）

[17]ガウス日記第61項，その[3] ガウス全集515-516頁に採録された記事の注釈を，シュレジンガーが書いている．彼はその中で，ガウスがMとNの無限積を項別に自然対数に直してから，係数 $-1/60$, $1/12$ を求めた．そのとき例の

$$(m^4-6m^2n^2+n^4)/(m^2+n^2)^4$$

の値を求めたのだ，と推測している．しかし私の見解では，ガウスはライステ72～73頁に書いているように，Mu が先で ln. Mu が後，Nu が先で ln. Nu が後と計算しているから，どうもシュレジンガーが言う順序は当たらない，と思う．

§30. 空白の期間

これまで三回にわたって，1796年から1797年にかけて，ガウスが行なった数値計算を紹介してきた．その内容は，［1］近世数学史談の

1節．正十七角形のセンセーション，　3節．ガウス略歴[その青年時代]，

5節．ガウス文書，　6節．レムニスケート函数の発見（σ函数），

8節．数字計算とガウス

の内容をほぼ覆っている．ところで，

史談7節．レムニスケート函数の発見（δ函数）．の冒頭(47頁)に，

「ガウス日記はレムニスケートに関してしばらく沈黙した後 1798年7月（日を欠く）に至って

『レムニスケートに関して凡ての予想を超越したる極めて見事な結果が得られて，研究の新分野が開かれた』

ことを記録している．1797年1月に研究を始めてから 19ケ月である．」

とある．一言補えば，日記第63項(1797年3月29日)から約 15ケ月の空白である．［1］史談は実は[23]シュレジンガー論文に基づいて書かれた．同論文を見ると，日記第62項の内容を解説した後，**一行の空白**を空けて，

「日記は今や 1798年7月すなわち第92項に通ずる…」

とあり，何らの注釈も加えずに 15ケ月を飛び越えている．

私は，この突如実現史観に疑問を持つ．ガウスが如何に天才であったとしても，ただ単に構想を練っていただけだろうか？［1］史談7節．δ函数の発見と言う豊富な内容を導くような，多くの計算を試みていたに違いない．私は，ライステ及び関連する紙片を精査するうち，ガウスがこの空白の期間に準備的な作業をやっていた証拠を蒐集した．それらを日記に記入するには到らなかったのだ，と思う．（日記へ記入するか否かが，一貫したガウスの価値観による選択であるかを検討する余地が残り，それを主題にすればまた多くの研究が必要になる．）稿を改めて，空白を埋め，ガウスのδ関数が生成される過程を再構築したい．

この連載は一先ず打ち切りとする．　(2005年10月16日講演)

訂正

前回（第 15 回数学史シンポジウム，2004）報告書 28 頁，杉本講演§19の末尾，ガウスの数値計算の能力の例　$19\times53=1060-\underline{13}=1007$ を $19\times53=1060-53=1007$ に訂正する．