19世紀後半期における Fractional Calculus の展開

日本大学　工学部　佐藤憲一

はじめに：

１８５０年から１９００年までに発表された Fractional Calculus に関連する研究と関与した数学者をまとめる。この目的のため本論文の構成は

Ⅰ．欧州・ロシア における研究・論文リスト[イタリアを除く国別]

Ⅱ．１９世紀後期イタリアにおける研究

Ⅲ．分数階微分の起こり（Leibniz と交友者による）

Ⅳ．分数階微分の初期（１８世紀・１９世紀初頭における著名数学者の関与）

Ⅴ．年譜（主要歴史背景）

Ⅵ．Wölffing リストについて

とした。

結語　：　１８４７年リーマンが草稿論文書き上げから１８７７年にリーマン全集の出版・収録されるまでの３０年間の分数階微分研究は相当程度の広がりを有しているが，その大半は１８３０年代のリユービルの研究が発端・契機になっており，リュービル研究の強い影響下になされた。１８４７年のリーマン並びにリーマン研究がどの様な形にせよ伝えられていて何らかの影響，寄与した痕跡，形跡をうかがわせるせるものは，これまで調べた所において存在しない。

Ⅰ．欧州・ロシア における研究・論文リスト[イタリアを除く国別]

フランス：

1855　Ｌｉｏｕｖｉｌｌｅ，Ｊｏｓｅｐｈ　［１８０９－１８８２］

Sur une formule pour les differentielles a indices quelconques a l'occasion d'un Memoire de M.Tortolini.

= Journal de Mathématique pures et appliquées

= J.Math.Pures Appl = Liouville's Journal = L.J.　20, 115-120

なお　Liouville が最も精力的に当該分野の論文を発表したのは彼が２０代であった１８３０年代に集中している。（第１１回数学史シンポジウム，津田塾大に記述）

1884　Ｌａｕｒｅｎｔ, Hermann [P.M.H.=Mattthieu Paul **Hermann** , 1841-1908]

Sur le calcul des derivees a indices quelconques.

Nouvelles annales de mathematiques (= Nouv.Ann.Math.) Vol.3,no.3, 240-252.

(ローラン級数展開で有名な数学者は Laurent, Pierre Alphonse, 1813-1854 で H.Laurent とは別人)

筆者注　Professor at the Polytechnic School in Paris .

多数の解析の本の出版している。

1892　Ｈａｄａｍａｒｄ, Jacques [１８６５－１９６３]

Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur developpment de Taylor.

J.Math.Pures Appl.[4], Vol.8, pp.101-186.[特に, pp.154-186]

1893　Ｇ. Ｏｌｔｒａｍａｒｅ

Calcul de Generalization,

Hermann, Paris, reprinted with revisions,1899

1897　Ｃ. Ｂｏｕｒｌｅｔ

Sur les opérations en général et les équations différentielles linéares d'ordre infini.

Annales scientifiques de l'Ecole normale superieure, Ser.3, Vol.14(1897), pp.133-190 [特に, pp.153-155]

イギリス:

Ｋｅｌｌａｎｄ, Ｐｈｉｌｉｐ(1810-1879, Edinburg 大学の教授を務めた)

1850-1851　On a process in the differential calculus, and its application to the solution of certain differential equations.

Transactions of the Royal Society of Edinburgh

(= Trans.Roy.Soc.Edinburgh),Vol.20, no.1,pp. 39-55.

(Kelland については第１１回数学史シンポジウム, 津田塾大 2001 に記述あり)

Ｇｒｅｅｒ, Henry R.(Royal Military College)

1860　On Fractional Differentiation.

Quarterly journal of pure and applied mathematics.

(= Quart.J.Math .= Ｑ．Ｊ.), Vol.Ⅲ, pp.327-330

1860　Postscript

Quart.J.Math., Vol.Ⅲ, pp. 370-372

筆者注 postscript = 後記

Ｃａｙｌｅｙ，Ａｒｔｈｕｒ ［Cambrdge 大学教授、１８２１－１８９５］

1851 On a doubly infinite Series
Cambridge and Dublin mathematical journal , Vol.6, pp.45- 47.

1880 Note on Riemann's Paper „ Versuch einer allgemeinen
Auffassung der Integration und Differentiation . “ Werke, pp.331-344.
Mathematische Annalen (= Math.Ann.) 16, pp.81-82;
筆者注 ：この論文のタイトルにある Werke は
１８７６年に Ｗｅｂｅｒ，Ｄｅｄｅｋｉｎｄによって
初めて編纂されたリーマン全集のことで、該当論文の掲載ページ
と一致している。

Ｓａｍｕｅｌ，Ｒｏｂｅｒｔｓ ［１８２７－１９１３］

1866 On interpolation with reference to development and differentiation.
Quart. J.Math.Oxford .VOL.Ⅶ. pp.184-212

1867 On interpolation with reference to development and differentiation. Part Ⅱ.
Quart. J. Math. Vol.Ⅷ. pp.52-65 and pp.139-149.

注 The Council of the London Mathematical Society ［1866-1892］
London Mathematical Society President に就任［1880-1882］

Hammond, J. (Buckhurst Hill, Essex, 後に Cambridge)

1880 On General Differentiation.
American Journal of Mathematics. Vol.3, pp.164-173

Ｈｅａｖｉｓｉｄｅ，Ｏｌｉｖｅｒ ［１８５０－１９２５］

１８９２ Electrical Papers.
The Macmillan Company, London.
(2nd ed. vol.1,vol.2 New York :Chelsea Pub. Company, 1970)

１８９３ On Operators in Physical Mathematics.
Proceedings of the Royal Society of London
(= Proc.Roy.Soc.London),Vol.52, pp.504-529 (1893);
and Proc.Roy.Soc.London , Vol. 54, pp.105-143 (1894).

１８９３ Electromagnetic theory, Vol.1.
The Electrician printing and publishing company,
ltd., London.
(Reprinted by Benn Brothers, London 1922.)

１８９９　Electromagnetic theory, Vol.2.

The Electrician printing and publishing company, ltd., London.

(Reprinted by Benn, London 1922.)

(Heavisideについては第１１回数学史シンポジウム、津田塾大に記述)

スウェーデン:

Ｈｏｌｍｇｒｅｎ, Hjalmar

1865　Om Differentialkalkylen med indices af hvad natur som helst.

Kongliga svenska vetenskaps-akademiens handlingar,

(= K. Vet. Akad. Handl.) Vol. 5, no.11, pp.1-83.

1867　Sur l'intégration de l'équation différentielle

$$(a_2+b_2x+c_2x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dx}+a_0y=0$$

K. Vet. Akad. Handl.,Vol. 7, no.9, pp.1-58.

注　Mittag-Leffler[1846-1927]の先生。

ドイツ／オースﾄﾘｰ／チェコ:

Riemann, G.F. Bernhard (1826-1866)

1876　Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation.

Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher

Nachlass/herausgegeben unter Mitwirkung von Richard Dedekind von Heinrich Weber.Leipzig:B.G.Teubner, Weber ,H.; Dedekind, R. pp.331-344;

1847年に書かれていたが、発表されず没後１０年を経て、全集に収録された。(Ｈ１２年第１１回数学史シンポジュウム、津田塾大数学計算機研究所所報に記述あり)

Ｓｉｍｏｎ　Ｓｐｉｔｚｅｒ(1826-1887, Der Handels-Akademie zu Wien):

1857　Integration der linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} = Ax^my''+Bx^{m-1}y'+Cx^{m-2}y.$$

Archiv der Mathematik und Physik. Vol .29; pp.403-414.

1859　Note über Differenz-und Differential-Quotienten von allgemainer Ordnungszahl.

Archiv der Mathematik und Physik. Vol .33; pp.116-118.

1859 Note zur Integration einer linear Differentialgleichung der Form
$y^{(n)} = Ax^{m}y'' + Bx^{m-1}y' + Cx^{m-2}y$.

Archiv der Mathematik und Physik. Vol .33, pp.118-120

1859 Neue Integrations-Methode für Differenzen-Gleichungen, deren Coefficienten ganze algebraishe Functionen der unabhängig Veränderlichen sind.

Archiv der Mathematik und Physik. Vol .33, pp.334-348

1860 Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen.
Erste Fortsetzung. Wien.

1862 Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen.
Zweite Fortzetzung. Wien.

1874 Neue studien ueber die integration linearer differential-gleichungen
Wien:Gerold,1874.142S.

1878 Vorlesungen ueber lineare differential-gleichungen.
Wien:Gerold,1874.194S.

Grünwald, Anton Karl (Polytechnikum in Prag)

1867 Ueber „ begrenzte " Derivationen und deren Anwendung.
Zeitschrift für Mathematik und Physik, Vol.12, pp. 441-480.

1880 Ueber die Entwickelung der begrenzten Derivationen nach ganzen positiven aufsteigenden Potenzen des Index, und die damit zusammnenhängende Logialrechnung.
Sitzungsberichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, pp.276-284.

1881 Ueber die Entwickelung der begrenzten Derivationen nach positive ganzen Potenzen des Index und die damit zusammnenhängende Logialrechnung.
Abhandlungen der Königlich-Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften (= Prag.Abh.), (6), XI. pp.1-63.

Cantor, Moritz Benedikt (1829-1920, 主に Heiderberg 大学で教えた)

1869 Leibniz und die Differential mit beliebigem Index.
Von Tardy und Genocchi
Zeitschrft für Mathematik und Physik, Vol.14, pp.30-31.

筆者注：カントールはドイツの著名な数学史家.
集合論などで知られている Cantor, G (1845-1918) とは別人。

Most , R.　(Stettin , 旧ドイツ領、現在はポーランド Szczecin)

1871　Ueber die Anwendung der Differentialquotienten mit allgemeinem Index zum Integriren von Differentialgleichungen.
Zeitschrft für Mathematik und Physik, Vol. 16 , pp.190-210.

Buchwaldt, F.

1875　Ny Methode for Differentiation med hvilkesomhelst Indices.
Tidsskrift for mathematik. (= Zeuthen Tidsskrift = デンマークの数学雑誌) 3 raekke (= 3 e série), V. pp.1-21.
Tlilfojelser p.95-96, Trykfejlsliste p.128.

1876　Tilføjelse til „ Ny Methode for Differentiation med hvilkesomhelst Indices "
Tidsskrift for mathematik. 3 raekke (= 3 e série) ,VI. pp.41-56.

1876　Ny Methode for differentiation med hvilkesomhelst Indices.
Oversigt over det Kgl.anske videnskabernes selskabs.
Kjobenhavn. (1876) pp.51-157.

Schäwen , Paul von　(im Naumburg a.S.)

1882　Anwendung der differentiation mit beliebigen reellen Index auf die Integration linear differentialgleichungen.
Programm des Gymnasiums zu Strasburg, Westpr. Ostern 82.

Schimpf , Ernst

1885　Untersuchungen aus der Infinitesimalrechunung
Jahresbericht des Gymnasium zu Bochum, Progr.318

Bochow, Karl

1885　Der Differentialquotient zu beliebigem Index
Dissertation , Halle

K r u g , Anton

1890　Theorie der Derivationen.
Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe. 57, pp. 151 − 228.
Wien

Lindner, Paul

1890 Ueber begrenzte Ableitungen mit komplexem Zeiger.
Programm Koeslin (= Cöslin) Nr.125.

(1908) Ueber Differentiation mit komplexem Index und ihre Beziehungen zur hypergeometrischen Funktion.
Sitzungberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft (= Sitzungsber.Berl.Math.Ges.), Vol. 7, pp.77-83.

(1909) Die Grundlagen der Differentiation mit komplexem Zeiger.
Sitzungsber.Berl.Math.Ges. Vol. 8, pp.67-70.

(1910) Hyperbel-und Keisfunktionen, eine Parallele.
Sitzungber. Berl. Math.Ges., Vol. 9, pp.56-59.

ロシア:

W a s t c h e n x o , Z (Kiev 大学, -Ukraine- , 1825-1912)

[M.Wastchenxo Zachartchenxo] = Vachtchenko-Zachartchenko, M.
= Zachartchenxo,W.= Mikhail Egorovich Vashchenko-Zakharchenko
Ващенко-Захарченко, михаил Егорович

1861 On Fractional Differentiation.
Quarterly journal of pure and applied mathematics (= Quart.J.Pure Appl.Math.), Vol.4, pp.237-243.

Letnikov, A.V. [1837-1888; Летников, Алексей Васильевич]

= Aleksej Vasil'evic Letnikov

1868 Theory of Differentiation of an arbitrary order.
Math.Sbornik. (in Russian). (= Matematicheskii sbornik = Математический сборник),Vol.3, pp.1-68.

1868 On the historical development of the the theory of differentiation of an arbitrary index (in Russian).
Math.Sbornik. Vol.3, pp. 85-112.

1872 An Explanation of the main propositions of differentiation theory with an arbitrary index .(in Russian)
Math.Sbornik. Vol. 6, pp. 413-445.

1872 Studies in the Theory of Integrals of the form on $\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)du$ (in Russian)

Math.Sbornik.Vol.7, pp.5-205.

S o n i n, Nikolay Yakovlevich [С О Н И Н, Н.Я. ,1849-1915]

1872 On differentiation with an arbitrary index (Russian)

Math.Sbornik.6, Vyp.1, pp.1-36

N e k r a s s o v [= Nekrasoff], P.A.

1888 General Differentiation (Russian.)

Math.Sbornik.Vol.14, pp.45-168

S l u d s k i i, F.

1889 A.V.Letnikov's life and works. (in Russian).

Mat.Sb.,Vol.14,Vyp.2, pp.1-34.

Ⅱ．１９世紀後期イタリアにおける研究

１８５１年から１９００年までのイタリアでの Fractional Calculus の研究について概観する。

１．イタリアで関与した数学者とその歩み

Tortolini, Barnaba［Roma, 1808-1874］

1855　Sopra g l'integrali generali di alcune equazioni a derivate parziali a coefficienti constanti.
Mem.Math.Fis.Soc.Italiana Sci.Moderna
(= Memorie di Matematica e Fisica della Società Itariana
= Memorie di Matematica e Fisica della Societa Itariana delle Scienze,
, residente in Modena.), Serie I , tomo 25, 310-341.

以下で Tortolini に沿って, その特徴的な推論のありようをみよう。

$$D_x^{\frac{1}{2}}.u = f(x) \qquad u = \frac{f(x)}{D^{\frac{1}{2}}}$$

すなわち, １／２階微分すると $f(x)$ に なる 関数 u を 求める のである.

Tortolini の論文においては、次の等式が基本になる。

$$\frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{-ar}\,dr \quad \text{，ただし } a > 0 \text{ とする.} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \text{(T1)}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2+\frac{a^2}{4y^2})}\,dy \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad \text{(T2)}$$

Ｔ２式は

著者注　Table of Integrals, Series, and Products, Sixth Edition
I.S.Gradshteyn and I.M.Ryzhik, ACADEMIC PRESS , 2000
p.334 にある公式 No.3.325, 即ち

$$\int_0^\infty exp(-ax^2 - \frac{b}{x^2})dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,exp(-2\sqrt{ab}) \qquad [\ a > 0\ ,\ b > 0]$$

で　$a = 1,\ b = \dfrac{a^2}{4}$　，$x = y$ としても出る。

なお 同公式の出典は Fikhtengol'ts,G.M. (= Fichtenholz,G.M.)
: Differential-und Integralrechnung Ⅰ－Ⅲ VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften , Berlin, 1986-1987.) (原著はロシア語、1947-1949)
である。

Ｔ１式で形式的記号的演算子的解釈による式を援用している。
すなわち,

$$a = \mathrm{D}^{\frac{1}{2}}{}_{x} = \mathrm{D}^{1/2}$$ を 代入する.

次の, 表示式を作る。

$$\frac{1}{\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\infty} e^{-\mathrm{D}^{1/2} r}\, dr \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (\mathrm{T3})$$

続いて,

$$e^{-a} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{-\frac{a^2}{4y^2}}\, dy$$

形式的・記号的・演算子的解釈によるところの意味において

$$a = \mathrm{D}^{\frac{1}{2}} r$$ を 代入 する.

次の表示式を作る。

$$e^{-\mathrm{D}^{1/2} r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} exp(-\frac{r^2\mathrm{D}}{4y^2})\, dy \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (\mathrm{T4})$$

を導き, この式をＴ３の右辺の被積分関数に代入して

$$\frac{1}{\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} exp(-\frac{r^2\mathrm{D}}{4y^2}) dy dr$$

を得ている。
この式をもって, Tortolini は　１／２階積分（１／２階積分の原始関数）演算子とする。
以上の記号（演算子）的解釈より, 最終的に

$$u = \frac{f(x)}{\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}} = \int^{\frac{1}{2}} f(x)dx^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \{ exp(-\frac{r^2\mathrm{D}_x}{4y^2})\ f(x) \}\, dy\, dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(x - \frac{r^2}{4y^2})\, dy\, dr$$

を導出した。

この論文の p.338 において, Tortolini は Liouville が１８３４年に Crelle 誌 V.１２ pp.273-287 に発表した論文「Memoire sur une formule d' analyse」の p.273 の結果にある種の不整合がでる事を指摘した。

備考： Tortolini は Professore di Calcolo Sublime all'Università di Roma を務めた（１８４５年より)。
Crelle 誌掲載論文を含め多くの論文を出版した。
雑誌 Annali di scienze matematiche e fisiche (di Tortolini), Roma.（１８５０－１８５７）を発行した。この雑誌は,その後 Annali di matematica pura ed applicata , Milano（1858-1867, , F. Brioschi e L.Cremona 監修）ならびに Annali di matematica pura ed applicata .2., Milano（1867-1897) に引き継がれた。
Napoli,Torino (トリノ), Bologna , Nuovi Lincei その他アカデミーの会員。Societā Italiana delle Scienze の会員。

一方，上記 Tortolini の論文に対してＬｉｏｕｖｉｌｌｅ は１８３０年代以降久しく離れていた任意階数微分の理論に立ち戻り Tortorini の指摘に対して, 同年直ちに下記論文（今日で云う, 数学の分野 Fractional Calculus について **Liouville** が書いた最後の論文 ）で Tortolini の疑義の考察と解決を試みている。

論 文 名 ： Sur une formule pour les differentielles a indices quelconques, a l'occasion d'un Memoire de M.Tortolini.
掲載雑誌 ： Journal de Mathematique pures et appliquees（= J.Math.Pures Appl. = Liouville's Journal = L.J.）, Vol. 20, 115-120（1855）
なお Liouville が最も精力的に当該分野の論文を発表したのは彼が２０代であった１８３０年代に集中している。
（第１１回数学史シンポジウム，津田塾大 2000-10-21，22
津田塾大学 数学・計算機科学研究所所報 22，２００１年に記述)

Ｔａｒｄｙ, PLACIDO [Genova, １８１６－１９１４]

1844　Preliminari di una Memoiria sui differenziali a indice fratto
Atti della sesta Riunione degli scienziati italiani tenuta in Milano
nel settembre del 1844. Milano, Luigi Di Giacomo Pirola, **1845.**

1858　Sui differenziali a indice qualunque.
Annali di matematica pura ed applicata du Professeur Tortolini.
(= Ann.mat.pura ed appl.= Annali di Mat. = A.D.M.), tom. I, 135-148
＝以後, この論文を Tardy の第１論文として引用する。

この第１論文でＴａｒｄｙの与えた分数階積分の定義式（Ｔａ－１）について考察する。
$\phi(x)$ の μ 階積分をＴａｒｄｙは次式を使って計算している。

$$(Ta\text{-}1)\qquad \int^{\mu} \varphi(x)\,dx^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k}{\mu+k} \mathrm{D}^k\varphi(x) \qquad , \mu>0$$

$$= \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \left\{ \frac{1}{\mu}\varphi(x) - \frac{x}{\mu+1}\varphi'(x) + \frac{1}{2\,!}\frac{x^2}{\mu+2}\varphi''(x) - \cdots \right\}$$

Tardy は p.138 において Ｔａ－１式 が
p.138（２）式 = (Ta-2)　即ち

$$(Ta\text{-}2)\qquad \int^{\mu}\phi(x)\,dx^{\mu} = \frac{\Gamma(1-\mu)}{2\pi} x^{\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x + xe^{yi})e^{\mu yi}dy$$

から出ていること、またこの式が Laplace (1749-1827) の分数階積分の定義式

$$(Ta\text{-}3)\qquad \int^{\mu}\phi(x)\,dx^{\mu} = \frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi\xi^{\mu}} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x + \xi e^{yi})e^{-\mu yi}dy$$

で　$\mu \to -\mu$ に，$x \to \xi$ に置き換えたものであると述べている.

筆者注１． Ta-2 から Ta-1 への移行をみてみよう。

$$\phi(x+xe^{yi}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, \phi^{(k)}(x)\, x^k\, e^{kyi}$$

この式を Ta-2 の右辺の被積分関数の箇所の代入して項別積分、
ガンマ関数の相補式　$\Gamma(1-\mu)sin(\mu\pi) = \dfrac{\pi}{\Gamma(\mu)}$ を使用して整理すると

Ｔａ－１式が出てくる。

Ｔａｒｄｙ は Ｔａ－１ 式を使い, 個々の基本的関数について具体的かつ
興味深い計算をして行くことで, いくつかの公式と定理を導いている。

先ず,最も基本的な関数の一つ $\phi(x)=x^{n}$ の場合：

(T*a*-4) $\int^{\mu} x^{n} dx^{\mu} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\mu+1)} x^{n+\mu}$ の導き方を

見てみよう。

$\phi(x) = x^{n}$ を T*a*-1 に 代入 すると

$$\int^{\mu} x^{n} dx^{\mu} = \frac{x^{\mu+\mu}}{\Gamma(\mu)} \left\{ \frac{1}{\mu} - \frac{n}{\mu+1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{1}{\mu+2} - \cdots \right\}$$

次に, Tardy は 途中

$\int_{0}^{1} y^{\mu-1}(1-y)^{n} dy = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}$ をへて直ちに

Ｔａ－４ 式 $\int^{\mu} x^{n} dx^{\mu} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\mu+1)} x^{n+\mu}$ を出している。

筆者補足 「Table of Integrals, Series, and Products,S ixth Edition 」
I.S. Gradshteyn and I.M.Ryzhik, ACADEMIC PRESS , 2000 年発行
p.899 の 8.382 , No.1 にある展開公式を使う。

出典は Whittaker, E.T. and Watson, G.N., Modern Analysis, 4th ed.
Cambridge University Press,1927, part II , １９３４．となっている。

著者補足 ：同書 p.260 の Miscellaneous Examples. No.9 が該当する。
すなわち、

$$B(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(y-1)(y-2)....(y-n)}{n!(x+n)} , \quad y > 0$$ がそれである。 ここで,

$B(x,y) := \int_{0}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ = The *beta function* = Euler's *integral of the first kind*

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$x = \mu \ , \ y = n + 1$ を代入する。

以上より,Ｔａ－４ が導かれる。

この結果は所謂 The derivatives of arbitary order 理論で標準的定義とされている Riemann-Liouville 定義の定積分範囲の下限を０とする, Riemann-type , 即ち

$${}_0D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t)\, dt$$ の定義を使って

得られる結果と一致している。

Tardy がどのようにして次式を導いたのか みてみよう。

(Ta-8)
$$\int^{\mu} \log x\, dx^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{\mu\Gamma(\mu)} \log x - \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \left\{ \frac{1}{1+\mu} + \frac{1}{2}\frac{1}{2+\mu} + \frac{1}{3}\frac{1}{3+\mu} + \cdots \right\} \quad \text{T-①}$$

$$= \frac{x^{\mu}\log x - x^{\mu}\mathrm{L}(1+\mu)}{\Gamma(\mu+1)} \quad \text{T-②}$$

Ｔａ－１式　で 左辺の被積分関数の所に $\phi(x) = \log_e x$ を右辺では

$(\log x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$ を考慮すると直ちに第１等式がでる。

次に第２等式を導く。

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(x) := \text{Euler psi function}$$

$$\psi(1) = -\mathrm{C}$$

$$\mathrm{C} = \text{Euler's constant} = 0.577215664901\cdots$$

$$\mathrm{L}(x) := \frac{d}{dx}\log\Gamma(x) + \mathrm{C} = \Psi(x) - \Psi(1)$$

関数 L(x) は　Abel 全集２巻論文Ⅱ (p.8) でも使われている。

良く知られた等式

$$\psi(x) = -\mathrm{C} - \frac{1}{x} + x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(x+k)}$$

著者注　　この公式は「Table of Integrals, Series, and Products,Sixth Edition 」
I.S.Gradshteyn and I.M.Ryzhik, ACADEMIC PRESS , 2000
p.893 の 8.362 No.1 にも載っている。

$$L(x) = \psi(x) + C = -\frac{1}{x} + x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(1+k)}$$

$x = 1 + \mu$ を代入する。

$L(x)$ は絶対収束するので以下の扱いは可能である。

$$L(1+\mu) = -\frac{1}{1+\mu} + \left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2+\mu}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3+\mu}\right) + \cdots\right\}$$

$$= \frac{\mu}{1+\mu} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\mu}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3+\mu}\right) + \cdots$$

$$= \frac{\mu}{1+\mu} + \mu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1+k)(k+1+\mu)}$$

すなわち

$$\frac{L(1+\mu)}{\mu} = \frac{1}{1+\mu} + \frac{1}{2(2+\mu)} + \frac{1}{3(3+\mu)} + \cdots$$

を得る。 この式を Ta- ① の右辺に代入する。

これより, 先に述べた Tardy の Ta-② 式 が導かれる。

筆者注　整数階　$\mathrm{I}\,logx := \int logx\,dx = xlogx - x$

$$\mathrm{I}^2 logx = \int\int logx\ dx^2 = \frac{x^2}{2}logx - \frac{3}{4}x^2$$

$L(n+1) = \psi(n+1) + C = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$　と数学的帰納法を使って正の整数 n について

$$\mathrm{I}^n logx := \underbrace{\int\int\cdots\int}_{n} logx\ dx^n = \frac{x^n}{\Gamma(n+1)}logx - \frac{L(n+1)}{\Gamma(n+1)}x^n$$ ----> 原始関数

が成立することは容易に確かめられる。

Tardy は続いて次式を導いている。

$$(\mathrm{T}a\text{-}9)\qquad \frac{d^{\tau}\log x}{dx^{\tau}} = \frac{\log x-\mathrm{L}(\tau)}{\Gamma(1-\tau)} + \cos(\tau+1)\pi\frac{\Gamma(\tau)}{x^{\tau}}$$

筆者注　　ここで $\tau = n$（正の整数）とすると $\mathrm{L}(n)$ は有限値，$\Gamma(1-n)$ は無限大になるので

$$\frac{d^{n}\log x}{dx^{n}} = \cos(n+1)\pi\,\frac{\Gamma(n)}{x^{n}} = (-1)^{n+1}(n-1)!\ x^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$$

で高次（整数階）微分の結果と一致している。

$$(\mathrm{T}a\text{-}13)\quad \int^{\mu} e^{mx}\,dx^{\mu} = \frac{1}{m^{\mu}}\,e^{mx} + \frac{\mathrm{A}_1}{\Gamma(\mu)}x^{\mu-1} + \frac{\mathrm{A}_2}{\Gamma(\mu-1)}x^{\mu-2} + \cdots$$

等の公式も順次導かれる。

p.146 の b.5 より最終頁である p.148 にかけては,

指数法則

$$\int^{n}\left\{\int^{m}\varphi(x)dx^{m}\right\}\,dx^{n} = \int^{m+n}\varphi(x)\,dx^{m+n}$$

m, n は 正数 を Tardy の分数階積分定義 = Ta-1 に基づいて証明している。
最終行にこの論文を仕上げた日付として Genova 18 Aprile 1858 の記述がある。
即ち, １８５８年４月１８日にジェノヴァ（イタリア）で完成させたことになる。

1868　　**Intorno ad una formula del Leibniz.**
Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche.
(= **Bull.di bibl.e di storia delle sci.mat.e fis.**
= Bullettino Boncompagni = Boncompagni Bull. = Bull.Bonc. = B.Bon ）,
tom. I , 177-186. = 以後 Trardy の第２論文として引用する。
当該論文には克明でかつ詳細な脚注が付記されているがこれは
当雑誌の発行人であり、当時一級の数学者で数学史家であった
B.Boncompagni 公（後に記述） が書き入れたもので、１８世紀の
関する克明な記述がなされており、分量は Tardy の本文の４倍
を超えている。

この第２論文において, Tardy は Liouville の１８３２年の論文
Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques.
, Journ.Ec.Polyt.13 (21.cahier), pp.71-162 について, Liouville
が（関数の積の整数階微分についての）Leibniz の公式の,
任意階数の積分・微分への拡張の公式を特別の限定された関数
について求めていたものを, 限定しない形で導いた。

Leibniz の定理：

$$\mathrm{D}^{\mu} uv = u\mathrm{D}^{\mu} v + (\mu)_1 \mathrm{D}u\mathrm{D}^{\mu-1} v + (\mu)_2 \mathrm{D}^2 u\mathrm{D}^{\mu-2} v + (\mu)_3 \mathrm{D}^3 u\mathrm{D}^{\mu-3} v + \cdots$$

μは正の整数。

$$(\mu)_r = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\mu-r+1)}{1.2.3\ldots r}$$

$$\text{(Ta-1)} \qquad \int^{\mu} \varphi(x)dx^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k}{\mu+k} \mathrm{D}^k \varphi(x)$$

$\varphi(x)=uv=u(x)v(x)$ とする.

$$\int^{\mu} uvdx^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k}{\mu+k} \mathrm{D}^k (uv)$$

$$= \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k}{\mu+k} \left[u\mathrm{D}^k v + (k)_1 \mathrm{D}u\mathrm{D}^{k-1} v + \cdots + (k)_r \mathrm{D}^r u\mathrm{D}^{k-r} v + \cdots\right]$$

この級数の一般項（ｒ番目）を求める。

ｒ番目の項

$$= \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k}{\mu+k} (k)_r \mathrm{D}^r u\mathrm{D}^{k-r} v$$

$$= \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+r}}{(k+r)!} \frac{x^{k+r}}{\mu+k+r} (k+r)_r \mathrm{D}^r u \mathrm{D}^k v$$

ここで　$(k)_r = 0, \quad k=0,1,2,\cdots,r-1$ を使用.

$$(\mu)_r = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-r+1)}{r!} \quad , \quad (k+r)_r = \frac{(k+r)(k+r-1)(k+r-2)\cdots(k+1)}{r!}$$

$$(-\mu)_r = \frac{-\mu(-\mu-1)(-\mu-2)\cdots(-\mu-r+1)}{r!} = \frac{(-1)^r\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+r-1)}{r!}$$

$$\frac{(k+r)_r}{1.2.3.\cdots.(k+r)} = \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+r-1)(k+r)}{\{1.2.3.\cdots k(k+1)(k+2)\cdots(k+r)\}r!} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

$$= \frac{1}{k!}\frac{1}{r!} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+r-1)\Gamma(\mu) =$$

$$(\mu+r-1)(\mu+r-2)\cdots(\mu+2)(\mu+1)\mu\Gamma(\mu)$$

$$= \Gamma(\mu+r)$$

$$\frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+r}}{1.2.3.\cdots.(k+r)} \frac{x^{k+r}}{(\mu+k+r)} (k+r)_r \mathrm{D}^r u \, \mathrm{D}^k v$$

$$= \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)_r}{1.2.3.\cdots.(k+r)} \frac{x^{k+r}}{(\mu+k+r)} (-1)^{k+r} \mathrm{D}^r u \, \mathrm{D}^k v \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

②、③　を使用すると

$$= \frac{x^{\mu}(-1)^r(-\mu)_r}{\Gamma(\mu+r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{x^{k+r}}{(\mu+k+r)} (-1)^{k+r} \mathrm{D}^r u \, \mathrm{D}^k v$$

$$= \frac{x^{\mu+r}(-\mu)_r}{\Gamma(\mu+r)} \mathrm{D}^r u \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{x^k}{(\mu+k+r)} (-1)^k \mathrm{D}^k v$$

$$= (-\mu)_r \mathrm{D}^r u \ \frac{x^{\mu+r}}{\Gamma(\mu+r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{x^k}{(\mu+r+k)} \ (-1)^k \mathrm{D}^k v$$

$$= (-\mu)_r \ \mathrm{D}^r u \int^{\mu+r} v(x) \ dx^{\mu+r}$$

これより, ライプニッツの公式の任意階数積分への拡張形

$$\text{(Tr-3)} \quad \int^{\mu} uv dx^{\mu} = u\int^{\mu} v dx^{\mu} + (-\mu)_1 \mathrm{D}u \int^{\mu+1} v \ dx^{\mu+1} + \cdots$$

$$+ (-\mu)_r \mathrm{D}^r u \int^{\mu+r} v \ dx^{\mu+r} + \cdots$$

が得られた。

Tardy は、続いて、ライプニッツの公式の任意階数微分についての拡張公式

$$\mathrm{D}^{\mu} uv = u\mathrm{D}^{\mu} v + (\mu)_1 \mathrm{D}u\mathrm{D}^{\mu-1} v + (\mu)_2 \mathrm{D}^2 u\mathrm{D}^{\mu-2} v + (\mu)_3 \mathrm{D}^3 u\mathrm{D}^{\mu-3} v + \cdots$$

μは正の実数で, $\quad (\mu)_r = \dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)....(\mu-r+1)}{1.2.3...r}$ を

証明しているが, その手法は解析的と言うよりむしろ算術的（数論的)、組合わせ的な推論方法で構成されている。これは関数の積の（整数階）微分のライプニッツ公式の証明が相隣る二項係数のシンプルな関係式より導かれる事とも符合していて興味深い。

1869 NOTE SUR UNE FORMULE DE LEIBNIZ（1868 の論文の仏訳)
Nouvelles annales de mathematiques (=N.A.). 7(2), 69-77 .

注 1 . 当論文は先の 1868 の論文の本文の仏訳部分のみで, Boncompagni 公の脚注の記載は無い。

注 2. P. Tardy については, 同氏自身の論文, またこの節で取り上げた, 同時期の数学者の研究、並びにイタリアの数学史家 Umberto Bottazzini の論文 Ricerche di P.Tardy sui differenziali di indice qualunque, 1844-1868.

Historia Mathematica 5(1978), pp. 411-418 , 並びに
イタリアの数学者で著名な数学史家でもあったＧｉｎｏ　Ｌｏｒｉａ
(1862-1954 , Genova)の論文（Tardy の業績の他、付録には Trady と交流
のあったスイス, Bern 大学の数学者 Ludwig Schläfli との書簡他が
含まれている)。また, この手紙の中で Schläfli 氏自身の任意階数微分
の造詣の深さが伺われる記載がある。Schläfli 氏の３巻からなる全集
が出版されているが, 同氏のこのテーマについての論文はない。
これらが有益な基本的文献である。

II Corrisp. Gino Loria （Ｇｅｎｏｖａ大学）:
legge la seguente Commemorazione del compianto Socio prof.Placido Tardy.
Atti della Real Accademia dei .Lincei.Rend.classe di sci.fis.nat.(5) 241,1915,
pp.505-531. （Ｔａｒｄｙの追悼論文）が有益な資料。
前年１９１４年にＴａｒｄｙは９８才で，Ｇｅｎｏｖａで死去、

注３．Tardy はシチリア島メッシーナ（Messina）で生まれる。Genova（
ジェノヴァ）大学学長, Academia dei Lincei 会員。

注 4. この時期, Tardy とＢｅｔｔｉ，Ｂｅｔｔｉとリーマンとの交流
は知られており, Tardy の第１論文出版（１８５８）, また
リーマンのＢｅｔｔｉ（ピサ）との特段の１８５９年から
１８６５年にかけての数回に及ぶ, 時に長期の滞在でリーマン
とＴａｒｄｙとの接点は無かったのだろうか, ６６年のリーマン
の死後の６８年になってＴａｒｄｙは１０年振りに第２論文
を発表, ここに来てイタリアでは相当の反響があった事は
本節でみたところである。リーマンはこのテーマについて全く
沈黙を続けていたのであろうか。

Ｇｅｎｏｃｃｈｉ, Angelo [Turin (= Torino), 1817-1889]

1869 DI UNA FORMOLA DEL LEIBNIZ E DI UNA LETTERA DI
LAGRANGE AL CONTE FAGNANO.
Atti della Real Accademia delle scienze di Torino. (= Atti di Torino.
=Torino Atti), Vol.IV, pp.263-278 and pp.279-284.

注 Conte ＝伯爵、Fagnanio=Giulio Carlo da Fagnano［１６８２－１７６６
Senigallia,イタリア］, pp.279-284 には 1754 年Ｌａｇｒａｎｇｅから
Ｆａｇｎａｎｏ伯爵に宛て書かれた手紙が収録されている。

1869　Ein merkwürdinger Brief des achtzehnjährigen Lagrange an den Conte Giulio Carlo da Fagnano.（mitgetheilt von dem Herausgeber）
Archiv der Mathematik und Physik. Vol.50, No.2 pp.223-231.

1871　Dimostrazione d' una formola di Leibnizio e Lagrange e di alcune formole affini.
Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino
（＝ Torino Mem. ＝　Mem. di Torino），
Serie seconda（=Serie II）,Tomo 26. pp.61-77.
筆者注　イタリア・ピアチェンツ（Piacenza）生まれ。

Ｂｏｎｃｏｍｐａｇｎｉ，Baldassarre (Roma, 1821-1894)

1869　Intorno ad uno scritto del Sig.Prof. Placido Tardy
Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche.
(= Bull.di bibl.e di storia delle sci.mat.e fis.)
(= Bullettino Boncompagni = Bull.Bonc. = B.Bon) Tom. II、
2, pp.273-274

備考　Tortolini, B に学んだ。１６世紀から１７世紀に掛けての
イタリアに於ける数学と物理学の歴史を研究した。
Leonard Fibonacci（ = Leonard of Pisa,1175?-1226?）の研究
に重要な役割を果たした。また雑誌, Bullettino Boncompagni
を１８６８年に創刊し１８８７年までの２０年間発行を続けた。
Tardy の１８６８年の論文に極めて詳細な注釈を加えた。
Tardy の研究の紹介のために尽力した。
Piombino（Pisa の南方）の領主 Boncompagni Lugi 卿
（1769-1841）の次男。

Ｂｏｒｃｈａｒｄｔ，Guglièlmo（ベルリン,１８１７－１８８０）
= C.W. Borchardt = Carl Wilhelm Borchardt

注１．以下の論文の著者名として記載されている Guglièlmo は Wilhelm にあたるイタリア名。

注２．Borchardt はドイツ生まれで、ドイツで活躍した著名な数学者であるが以下の論文は当時のイタリア数学界との交流下で書かれ、内容もＴａｒｄｙの研究の報告の意味が強くしかも内２点イタリアの雑誌に発表されていて残りも Boncompagn 公の依頼を受けて代行する形でベルリン科学アカデミーで発表を行っている点を考慮しこの節に入れる事にする。

1868 **Bemerkungen zur Note des Hernn Tardy : „ Ueber eine Leibnizsche Formel “.**
Monatsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
(= Berl. Monatsber.) , December 1868, pp.623-625. 並びに
C.W. BORCHARDT ' S GESAMMELTE WERKE. Berlin :
Druck und verlag von Georg Reimer,1888, pp.483-485

1869 **Intorno ad una formola del Leibniz.**
Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Science Matematiche et Fisiche ,
publ.da Boncompagni, T. II p.275-276
注 Filippo Keller による前述論文のイタリア語訳

1869 Sur quelques passages des lettres de Leibniz relatifs aux
différentielles à indices quelconque.
Bull.di bibl.e di storia delle sci.mat.e fis. II , p. 277-278
注. C.W.Borchardt's Gesammelte Werke, Berlin ,1888, pp.486-487.に再録。

Ⅲ. １６９５年：分数階微分の起こり (Leibniz と交友者による)

Ｊｏｈｎ Ｗａｌｌｉｓ (１６１６−１７０３, Ｌｏｎｄｏｎ)

Ｌｅｉｂｎｉｚ,G. W. (Gottfried Wilhelm, 1646 − 1716, Hannover、ドイツ)

L' Hôpital (ｌ' Ｈｏｓｐｉｔａｌ, Guillaume Fraçois Antoine Marquis de = G.F.A., １６６１−１７０４, Paris) , Johan Bernoulli に指導を受けた。

Ｂｅｒｎｏｕｌｌｉ, Ｊｏｈａｎ (１６６７−１７４８, Ｂａｓｅｌ, スイス)

---

① Leibnize から L'Hospital への手紙 (１６９５年 ９月３０日付け)
[Hanover, Germany] G.W. Leibniz Mathematishe Schriften, Band.2
1971 年版 Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York
pp.297-302 [No. ２４, Leibniz an de l'Hospital]

L'Hospital から Leibnize への手紙 (１６９５年 12 月 1 日付け)
同上図書の pp.303-304.

② Leibniz から Johan Bernoulli への手紙 (１６９５年１２月２８日付け)
[Hanover] G.W.Leibniz Mathematishe Schriften, Band.3,
Briefwechsel zwischen Leibniz und Jacob Bernoulli.
pp.226-229,1971 年版 Olms Verlag, Hildesheim, Germany

③ Leibnize から John Wallis への手紙（１６９７年 5月 28 日付け）

［Hanover］ Leibniz Mathematishe Schriften, Band.4

Briefwechsel zwischen Leibniz und Wallis. pp.23-29（特に p.２５）

1971 年版 Olms Verlag, Hildesheim・New York,

John Wallis から Leibniz の返事 （１６９７年７月 30 日付け）

は 同上図書 pp.29-40 であるが p.25 に触れた箇所は無い。

Ⅳ. 分数階微分の初期（18世紀・19世紀初頭における著名数学者の関与）

１８世紀 （Ｌ．Ｅｕｌｅｒ，Ｊ．Ｌ．Ｌａｇｒａｎｇｅ）

１９世紀初頭 （Ｐ．Ｓ．Ｌａｐｌａｃｅ，Ｓ．Ｆ．Ｌａｃｒｏｉｘ，Ｊ．Ｂ．Ｊ．Ｆｏｕｒｉｅｒ，Ｎ．Ｈ．Ａｂｅｌ）の研究を経て１８３０年代にＪ．Ｌｉｏｕｖｉｌｌｅによって本格的，集中的な研究が推進された。

Liuville 以前の Fractional Calculus 揺籃期（１８世紀）の研究については別途，稿を起こしたく考えているので今回は触れない。

Ｖ． 年譜（主要歴史背景）

１８４３年 ９月 Lucca（ルッカ、イタリア、トスカーナ地方）で開かれたイタリア科学連合の第五回会議で C.W. Borchardt Sull' integrazione di alcuni sistemi d'equazioni differenziali non lineari と題する発表を行った。この時の論文は Borchardt's Gesammelte Werke, Berlin ,1888, pp.465-466 に収録されている。

１８４３年１１月 Ｊ.Ｓｔｅｉｎｅｒ，Ｊａｃｏｂｉ，Ｄｉｒｉｃｈｌｅｔ、Ｗ.Ｂｏｃｈａｒｄｔ と L.Schläfli（通訳として参加）のローマ訪問。

１８４７年 リーマン１８才で一般階数微分について記述した草稿（１８７７年まで発表されず）を書く。

１８５１年 ２月 ヤコービ（ベルリン大学教授）４７才で死去。

１８５２年１０月 Eisenstein（ベルリン大学教授）２９才で死去。

１１月 カヴールが北イタリアの雄邦サルデーニャ王国（サヴォイア家）の首相に就く。

１８５４年 クリミア戦争勃発（１８５６年まで）

１８５３年　　スエーデンの数学者 Holmgren パリを訪問、Liouville の影響で分数階微積分の研究に入る。

１８５５年２月　　Gauss 死去（７７才)。

ローマ大学の Tortolini が 論文で Liouville の分数階微分の不備を指摘するも Liouville 直ちに, 反論の論文を発表する。

１８５７年５月　　Ｃａｕｃｈｙ死去（６７才)

１８５８年９月　　少壮の数学者 **Betti**（1823 － 1892,ピサ大学教授）, **Brioschi**（ブリオスキ, 1824-1897, 当時パヴィーア大学教授, 後にミラノ工科大学教授 , **Casorati**（カゾラティ, 1835-1890, Pavia 生まれ, Brioschi の弟子, 後に パヴィーア大学教授）の中欧（フランス,ドイツ[当時プロイセン, ハノーファー])視察（数学）旅行。 特に, Ｂｅｔｔｉ（３５才）はゲッチンゲンでリーマン（３２才）と親交を結んだ。パリ大学には、Hermite(1822-1901), ゲッチンゲン大学にはリーマンの他に教授ではディリクレ(病気)が在職。２６才だった Dedekind(1831-1916) はチューリッヒ(Polytechnikum) に職を得てゲッチンゲンを離れた。

ベルリン大学には, ４８才のクンマー(1810-1893)教授がいた。

またベルリン・アカデミーの会員で, 後にベルリン大学の正教授になるクロネッカー３４才(1823-1891), ワイエルシュトラス４２才(1815-1897) もベルリン在住であった。

Peacock 死去(英国, 解析協会, １７９１生まれ)

Ｔａｒｄｙ第一論文発表

１８５９年　　イタリア民族主義運動の高まり、北部イタリアの王国サルデーニャ（フランス・ナポレオン三世の支援を受け）とオーストリアの戦争

５月　　Ｄｉｒｉｃｈｌｅｔ 死去(５４才)

リーマン、ゲッチンゲン大学正教授に就任。

リーマンの解析数論の論文「Über die Anzhl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe」掲載される。

リーマンの病状悪化とイタリア旅行（ピサ）の開始。

１８６０年　　トスカーナ大公国（= Tuscany,フィレンツエ, ピサが含まれる）はイタリア王国の一州(イタリア中西部) になる。

１８６１年３月　　**サルデーニャ王国（首都, トリノ）によるイタリア統一**

「ローマ, ベニス（ベネチア）は含まれない」, 当時, ベネチアはオーストリア・ハンガリー２重帝国領。

カヴール死去

１８６２年	９月	ビスマルク, プロイセン首相になる。
		リーマン１１月より翌年３月にかけてイタリア(シチリア) 静養
１８６３年		リーマン冬期間ピサに滞在（翌１８６４年に掛けて)
１８６４年	１２月	Ｂｏｏｌｅ死去４９才(英, 1815 生まれ)
１８６５年		春期,リーマン, ピサに滞在。
１８６５年		**Holmgren**(スエーデン) 分数階微分についての第１論文発表
１８６６年	６月	**普墺戦争**(ドイツ統一の主導権をめぐって**プロイセン**: **首相ビスマルク と オーストリア間で争われた**)
	7月	**リーマン（１８２６年９月生まれ），４０才で死去。** **イタリアがプロイセン側に加わって参戦, ベネチアを獲得。**
１８６７年	**7月**	**北ドイツ連邦(プロイセンが盟主)の成立。** **Grünwald**（prag **の数学者**）[Ueber „Begrenzte" Derivationen und deren Anwendung ］ **を発表** **Holmgren**(スエーデン) 分数階微分についての第２論文発表
１８６８年		**Ｔａｒｄｙ 第２論文発表**
	１２月	Borchardt が Berlin の科学アカデミーで Tardy の研究を報告.
１８７０年	７月	普仏戦争［プロイセン(ビスマルク）と帝政フランス (ルイ・ナポレオン＝ナポレオン３世）間で争われた] １８７１年５月フランスは北東部の２州アルザス・ロレーヌ (ストラスブール, ナンシー市が含まれる）をドイツに割譲。 ローマがイタリア王国に併合され, 翌年に首都となる。
１８７１年	１月	ドイツ帝国の成立。(ヴィルヘルム１世がドイツ皇帝に就く １８８８年３月死去まで）以後２０年間は所謂ビスマルク体制)
	３月	De Morgan 死去６４才（英国, 1806 生まれ)
１８７３年	1月	ナポレオン三世, 亡命先のイギリスで死去。
１８７４年	８月	Ｔｏｒｔｏｌｉｎｉ 死去（伊国, ６５才)
１８７６年		**H.Weber & R.Dedekind** 監修によるリーマン全集出版。 リーマンの１８４７年に書かれていた分数階微積分についての未発表の草稿論文を収録した。
１８７９年		Kelland 死去（スコットランド, 1810 年生まれ)
１８８０年	６月	Ｂｏｒｃｈａｒｄｔ 死去（独, ６３才)
１８８２年	５月	独・墺・伊三国同盟,
１８８２年	９月	**Liouville** 死去（７３才), **ガリバルディ（イタリア統一の功労者）死去**

１８８５年	１月	Cayley 死去７３才（イギリス,１８２１年生まれ） K.Bochow, 任意階数の微分商についての学位論文を Halle 大学に提出（主査, Wangerin）
１８８８年	６月	ヴィルヘルム２世（１８５９－１９４１）がドイツ皇帝に即位する。（第一次世界大戦敗戦の１９１８年１１月退位）
１８８９年	３月	Ｇｅｎｏｃｃｈｉ死去７２才（伊）
１８９０年	３月	ビスマルク、首相を辞任。
１８９１年	１２月	Ｋｒｏｎｅｃｋｅｒ 死去６３才（独、1823 年生まれ）
１８９２年		Ｈａｄａｍａｒｄ学位論文
１８９３年	５月	Ｋｕｍｍｅｒ 死去８３才（独、1810 年生まれ）
１８９４年	４月	Ｂｏｎｃｏｍｐａｇｎｉ公 死去７２才（伊）
	１２月	Stieltjes 死去３８才（オランダの数学者、フランスでも活躍）
１８９５年	３月	Ｓｃｈｌäｆｌｉ 死去８１才（スイス）． ヒルベルトがゲッチンゲン大学正教授に就任
１８９７年	２月	Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓ死去８１才 Sylvester 死去 82 才（英国, 1814 年生まれ）
１８９８年	７月	ビスマルク死去。 同年、エルミートによってフランス語版の「リーマン全集」が刊行された（リーマンの１８４７年の草稿論文は収録されていない）。一方, ドイツ語版にはない, クラインよるリーマンの紹介論文が掲載されている。
１９０１年	１月	エルミート死去７８才（仏, 1822 年生まれ）

あとがき：

本論文は２００１年１０月２１日（日）に津田塾大学数学史シンポジウムにおいて発表した同一題名の講演に基づいて書かれている。研究調査のため一部を平成１３年度文部科学省科学研究補助金（基盤研究（B）（1），
課題番号　：１３４５００９５）
研究課題名：高分子材料の分数階微分構造とフラクタル構造の相関研究
研究代表者：いわき明星大学理工学部・教授・清水信行　先生
より助成金の配分を受けた。

＊　Wölffing リストを加えて終わりとしたい。

VI. WÖLFFING リストについて

筆者は２００１年１０月上旬、東北大学工学部図書館北青葉山分館に出向いた。この分館には、１９世紀に出版された数物関係の洋雑誌が相当種類収蔵保管されていて、筆者はこの十年ほど、年に３，４回利用させて頂いた。
当日、研究調査をしていて、当該リストを見たときは非常な驚き（ショック）を感じた。１／３頁ばかりの圧縮された形での記述であるが、充実しており、これまで、取り上げられた事が無く、筆者の知らない文献が多く含まれており一級の資料価値のある極めて有益なリストであると思う。リストの提供者である E.Wöffing 氏の、その他の業績、経歴にも関心があるがこの記事以外知ることは出来なかった。
読者の便宜と氏の仕事の紹介を兼ねて、リストに忠実な（＝手を加えない）形で記載する（見やすいように整理した他は)。
「Wölffing －リスト」には論文のタイトルが無く、雑誌の特定をする事自体難しいものもあった（近代数学・数学史研究のためには１８、１９世紀のヨーロッパの数物雑誌の収蔵が必要であるが、欧州に遠く、参入が後発であった日本国内での収集には限界がある。また、出版国の雑誌タイトルがそのままでは使われず、独、仏、英などの言語表記に変えられている事、略号が使用されていること等も検索を難しくしている)。
なお、リストの最後にある Zorawski, Franken 両氏の論文については掲載雑誌の特定は出来たが国内機関での収蔵は無く、タイトルの特定、論文の入手は間に合わなかった。
また, Zorawski, Franken 両氏の事績についても、知るべく試みたが難航していて、現在の所、新たに知ることは出来なかった。いずれ機会を見つけて補遺の形でも報告出来ればと考えている。

E.WÖLFFING(Stuttgart).
Intermédiaire des mathématiciens 6(1899), p.258.

１８１４	Simôes Margiocchi Valente Do Conto,	Lisboa Memorias, 3,II，４８
１８２４	Ｌｉｂｒｉ，	Ｔｏｒｉｎｏ Ｍｅｍｏｒｉｅ，ＸＸVIII，２５１
１８３２	Ｌｉｏｕｖｉｌｌｅ	Ｊ．Ｅ．Ｐ．，ＸＸＩ，１，７１
１８３４	Ｌｉｏｕｖｉｌｌｅ	Ｊ．Ｅ．Ｐ．，ＸＸIV，１，１７
	Ｌｉｏｕｖｉｌｌｅ	Cr., 13, 219.
１８３９	Ｊｕｒｇｅｎｓｅｎ	Cr., 19, 84.
１８４０	Ｋｅｌｌａｎｄ，	Trans.Edinb.R.Soc., XIV
１８４４	Ｓｅｒｒｅｔ，	Ｊ．Ｍ．IX、１９３
１８４６	Ｈｏｐｐｅ，	Ｃｒ．，３３，７８．
１８４８	Ｃｅｎｔｅｒ，	Ｃａｍｂｒ．ａｎｄ Ｄｕｂｌ．Ｊｏｕｒｎ．３，２７４
１８４９	Ｋｅｌｌａｎｄ，	Trans.Edinb.R.Soc., XVI

1853	Kelland,	Trans.Edinb.R.Soc., XX
1854	Liouville,	J.M., XX,115.
1858	Trady,	Annali di Mat., I,135
1859	Spitzer,	Arch. Grun., XXXIII, 116
1860	Greer,	Q. J., III, 327, 370.
1861	Vachtchenko-Zachartchenko,	Q. J., IV、237
1864	Holmgren	Mem.Ac.Stockholm, V
1866	Robert,	Q. J., VII, 316
1867	Robert,	Q. J., VIII, 52, 139
1867	Grünwald	Z. S., XII, 441
1868	Borchardt,	Berlin. Berichte, 623
	Letnikow,	S. M. M., III、1
	Tychesen,	Tidsk. f. Math., 2e série,IV, 89
1869	Borchardt,	Bull. Bonc., II, 277
	Genocchi,	Torino Atti, IV, 263. 398
1871	Most,	Z. S., XVI, 190
	Genocchi,	Torino Memorie 2e série, XXVI, 61
1872	Rutgers,	Diss.over differ. van gebroken orde en haar gebruik by de afleiding van bepaalde integralen Diss.Leiden. (Traduction française,Arch.néerl.,VII, 27)
1873	Sonine,	S. M. M., VI, 413
1875	Buchwaldt,	Tidskr. f. Math., 3e série,V,1, 95, 128.
1876	Buchwaldt,	Tidskr. f. Math., 3e série, VI, 41
	Buchwaldt,	Bull. Ac. Copenh., 51
1880	Hammond,	Am. Journ. of Math. III, 164
	Grünwald,	Sitz. böhm. Ges., 276
1884	H. Laurent,	N. A., 3e série, III, 240
1888	Nekrassov,	S. M. M., XIV、45
1889	Nekrassov,	S. M. M., XIV、410
1890	Lindner,	Ueber begrenzte Ableitungen mit komplexem zeiger. Programm Cöslin.
1893	Poincaré,	Revue de Métaphysique et de Morale, I, 26
	Zorawski,	Bull. intern. Cracovie, 242
1895	Franken,	Bull. Ac. Stockholm, LII、481