特異点解消定理－広中の証明は非構成的か－

前田博信

X を代数多様体とする．代数多様体とは，体 K 上の有限型のスキームであって被約かつ既約かつ K 上分離的なものをいう．この X を，双有理変換，すなわち可逆な有理写像，によって，どの点も非特異点であるような代数多様体 $\tilde{X}$ に変換できるか，というのが古典的な特異点解消問題である．この問題は K の標数が零の場合に広中平祐[1]) が肯定的に解決した．１９６３年のことである．このときの証明を「広中の証明」とよぶことにする．

広中の証明は以下で述べるような多くの利点をもっているにもかかわらず論法が非常に複雑であるため，ごく最近になっても次のような評価をされている．Joseph Lipman[2]) によれば

「広中の証明は長くて難解で非構成的である」

また近年，正標数における代数多様体の特異点解消問題に新しい展開をもたらした Herwig Hauser[3]) も

「(広中の) 帰納法による証明は入り組んでいて，なぞめいているとさえいえる．いずれにしても (特異点解消の) 存在は示されているが具体的な構成方法は与えられていない」

と言明している．

これらはいずれも１９８９年以降[4]) に相次いで発表された特異点解消定理の構成的別証明のレビューにおけるコメントである．しかしながら

---

[1]) H. Hironaka, Resolution of singularities of algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math., Vol. 79 (1964), 109–326.

[2]) "Hironaka's proof is lengthy, difficult and non-constructive." J. Lipman, Math. Rev. 98e:14010, p.2810.

[3]) "The induction itself is very involved and to some extent even mysterious. In any case, it shows existence without give an effective construction." H. Hauser, Math. Rev. 99i:14020, p. 5992.

[4]) Orlando E. Villamayor U., Constructiveness of Hironaka's resolution, Ann. scient. Èc. Norm. Sup., t. 22 (1989), 1-32.

広中の特異点解消の方法には選択公理に頼る部分は1つもないし，むしろ，数学的帰納法を用いて全く自明な場合に帰着させる証明である．そこで，広中の証明は本当に B. L. van der Waerden [5] のいうような非構成的存在証明（独 nicht konstruktiver Existenzbeweis）か，ということを考えてみることにした．

1．広中の証明の特徴

広中は代数多様体の特異点解消が可能であることを，特異点解消の手続きを定めることにより証明した．それによると，特異点の解消は，より精密に，許容単項変換とよばれる単純な双有理変換を有限回続けることにより達成される．しかも与えられた代数多様体 X の非特異点は変換をうけずにそのまま保たれる．

広中の証明ではどの単項変換も許容（permissible）であることを要請する．この条件は強い制約であると同時に，どこを中心に単項変換したらよいかを示す道しるべの役割りを担っている．許容性は特異点解消データに応じて自然に定められる追加的条件である．なお単項変換は幾何学的操作ではなくて，中心を表すイデアルを単項イデアルに変換するという代数的操作であることに注意する．

広中の証明の核心は，許容単項変換の中心の選び方が正しいことを示すことである．そのために特異点の特異性や正規交叉とのずれを4種類の解消データとして表現し，次の2つのことを示す．

（a） 許容単項変換では特異性は悪くならない．

（b） 特異性が改善されないような許容単項変換は無限回続けることはできない．

この（b）のところで解消データの次元に関する数学的帰納法を用いる．特異性が改善されないという状況と，（a）を示すところでは代数多様体の完備局所的な定義方程式を考察する必要がある．

---

[5]） Moderne Algebra 初版の§２３「有限回の手続きで因数分解を実行すること」や§３７「有限回の手続きで体を構成すること」，あるいは Moderne Algebra の第２版への序文を参照．

さてその特徴であるが，広中の方法では代数多様体に限らずより一般的な代数的スキームや連接イデアル層の特異点解消も可能である．解消データが帰納法の証明が進むように弱い条件で設定されているので一般の場合にも適用できるのである．とはいっても代数的手法のため代数幾何学の範囲に限られる．例えば，局所スキーム $S = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ を考察する．S は次元がゼロでない限り体の上に有限型のスキームにならない．しかし A が剰余体の標数が零のエクセレントな局所ネータ環ならば S は広中の方法で，すなわち有限回の許容単項変換により，特異点解消が可能である．なお，エクセレントな局所ネータ環は永田環（仏 anneaux universellement japonais）であるから，S の次元が1のときは，広中の定理を持ち出すまでもなく正規化が特異点解消となるが，この正規化が有限個の許容単項変換の合成になることは自明ではない．また連接イデアル層であって埋没因子をもつようなものの特異点解消も可能である．

2．どこが非構成的か

代数幾何学では証明を簡単にするため，1つの点を考察する場合でもその点の剰余体を代数閉包や分離閉包まで（無限次）拡大することがよくある．広中の証明においてもそのような箇所があるが，それは本質的ではない．煩わしくはなるが，代数閉体，いいかえると超限帰納法を避ける方法が B. L. van der Waerden の代数幾何学の教科書[6]）の§２７には書いてある．

結論からいうと，広中の証明においては少なくとも次の３点が構成的であることの障害になっていると思われる．

（A） 非閉点における局所化を用いて低次元に帰着させる．

（B） 完備局所的に低次元に帰着させる．

（C） 低次元の解消手続きを何回も呼び出す４重の帰納法になっている．

（A）については代数幾何学に固有の手法であり，実あるいは複素解析多様体の特異点解消問題に広中の証明が適用できない理由の１つでも

[6]) B. L. v. d. Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie, Springer, Berlin 1939.

あった．この困難は後に広中自身[7]により解決された．

局所化はイデアルの生成元が計算可能ならば計算可能な操作である．問題は，局所化した解消データの特異点解消の手続きを，たとえそれが具体的に構成できたとしても，大域的に広げる操作，つまり局所化する前の解消データの解消手続きにもどす操作，が存在は証明できても具体的に構成できないことである．

（B）については，局所ネータ環の忠実平坦拡大である完備化が非常に便利であるため，代数幾何学の証明ではよく使われる．しかし実際の計算においては，最初に与えられたデータが有限個の多項式であっても，途中でベキ級数の計算が必要になる．広中の証明ではベキ級数環におけるワイエルシュトラスの準備定理やその一般化である割り算定理を用いる．これらはユークリッド互除法の拡張であって，本来は構成的な定理である．しかしベキ級数を多項式にもどす操作，つまりデサントが構成的ではない．

（C）については，広中の証明の最大の特徴である．この方法で問題になるのは，大域的な解消データの特異点を解消する場合でも，解消データを分解して局所的な解消データに帰着させ，それぞれの解消手続きを次々と呼び出すことにある．この呼び出しが入れ子になっているため許容単項変換の中心を実際に閉集合として構成することが難しい．近年の構成的別証明では，自動的に大域的な中心が定まるような上半連続局所不変量が定義できることが示されていて，格段にわかり易くなっている．

また広中の証明では，ある解消データに対する許容単項変換がいつまでも続けられると仮定すると帰納法で仮定する低次元の解消結果と矛盾する，という論法において，何回続けたらよいかの評価が得られない．このことも証明が構成的でないことの理由になる．

なお多重帰納法については，2重帰納法で定義されるアッケルマン関数[8]が，帰納的ではあるが原始帰納的ではない，つまり計算可能ではあるが有限の立場では定義できない，という古典的な結果を思いおこさせる．

---

[7]) 広中平祐, 代数多様体の研究について, 学術月報, Vol. 23 (1970), No. 5, pp. 286-290.

[8]) Wilhelm Ackermann, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, Math. Ann., Bd. 99 (1928), 118-133.

3．生成点と長所と短所

代数幾何学では，他の幾何学にはない特徴として，「生成点」という「点」を使っていろいろな定理を証明することができる．代数幾何学のイタリア学派で直感的に使われていた生成点（伊 punto generico）の概念を代数的に厳密に定義し直して，一般零点（独 allgemeiner Nullpunkt）の概念を導入したのは van der Waerden [9]) である．古典的な代数幾何学では生成点すなわち一般零点は特別な存在であったが，１９５０年代後半のスキーム論を経た今日の代数幾何学では生成点は普通の点の 1 つである．むしろ古典的な点の方が「閉点」とよばれて特別な扱いをうける．例えば正則写像 $\mathrm{Spec}(\mathbf{Q}[X]) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[X])$ による閉点 (X) の像は 1 つの「生成点」ではあるが閉点ではない．

さてその生成点は広中の証明において本質的な役割りを果たす．代数多様体 X を閉点でない点 x のまわりで局所化して得られる局所スキーム $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ は次元が下がることに注意する．S の関数体は X の関数体と同じであるから双有理構造は変らない．S の特異点解消写像はザリスキ位相に関する閉包をとれば X の x の回りの局所的な特異点解消を引き起こす．大域的な解消を得るには x の特殊化である閉点 y での特異点解消写像を x のまわりの特異点解消写像に挿入しなくてはいけないが，その方法は具体的ではない．

例 1．次数が 9 の 3 変数の既約多項式

$$f(x, y, z) = z^2 + (x^2 + y^3)^3$$

は 3 次元のアフィン空間 $X = \mathrm{Spec}(K[x, y, z])$ の中の 2 次元の代数曲面 $W = \mathrm{V}(f)$ を定義する．W は素イデアル $J = (z, x^2 + y^3)$ で定義される空間曲線 C に沿って 2 重点をもつ．しかし C 自身にも特異点があるので C を中心とする単項変換は許容ではない．さて X を非閉点 J において局所化たスキームを S とする．S は 2 次元の非特異なスキームであって，$t = x^2 + y^3$ とおくと (z, t) が S の点 J における正則パラメータ系と

---

9) B. L. van der Waerden, Nullstellentheorie der Polynomideale, Math. Ann., Bd. 96 (1926), 183-208.

なる．W の S への制限 W' は $z^2+t^3=0$ で定義される「平面代数曲線の芽」となる．広中の方法では，点 J の近傍において，X の中の W の特異点解消と S の中の W' の特異点解消が同型になるようになっている．

(例終り)

「生成点」で局所化して次元を下げる方法は明快である．しかし近年の特異点解消定理の構成的別証明では，生成点における計算は全く不要である．生成点を用いて代数幾何学の基礎付けを試みた van der Waerden が構成主義者であったことを考えるとやや皮肉な感じがする．

4．完備化とデサント

代数多様体の局所的な考察をする場合はまずアフィン近傍を選ぶ．これは多項式を有限個選ぶことと同じである．これで不十分な場合は局所化して局所環の中で考察する．それでも不十分なら完備化する．完備化では環が大きくなりすぎるのでヘンゼル化で止めることもある．しかしヘンゼル局所環はエクセレントとは限らないが完備局所環はエクセレントであるし，完備局所環の代数的構造はよくわかっているので完備化した方が証明が楽になる．

広中の証明においても完備化はいたるところで用いられている．特異性を表す局所不変量，ν^* や τ^* など，の単項変換における追跡や，次元の低い解消データを構成するときに完備化を用いる．

完備化は便利ではあるがベキ級数から多項式にもどるのが難しい．この困難はその後，Jean Giraud [10] が微分作用素を用いることによりザリスキ開集合の範囲で解消データの次元を下げることに成功して解決された．なお解消データを運ぶ低次元の包含空間は最大接触空間とよばれる．

微分作用素を用いると，最大接触空間の大域的な定義方程式を具体的に計算することができる．したがって広中の証明における完備局所的な部分は構成的な方法に置き換えることができる．

例2．K の標数はゼロとする．既約で次数が5の2変数多項式

$$g(x,y)=xy^4+y^3+x^4$$

---

[10] Jean Giraud,Sur la théorie du contact maximale, Math. Zeitschr., Bd. 137 (1974), 285-310.

を考える．$g(x,y)=0$ で定義される平面代数曲線は原点が３重点である．この３重点に最大接触する非特異な代数曲線を求めてみよう．まず広中の方法では平面を原点において完備化する．すなわち g を形式ベキ級数環 $R=K[[x,y]]$ の元とみなす．ここでワイエルシュトラスの準備定理を用いると g を次の形に表すことができる．

$$g(x,y)=u(x,y)\{y^3+a_1(x)y^2+a_2(x)y+a_3(x)\},$$

ただし $u(x,y)$ は R の単元で，$a_i(x)$ の位数 $\geq i$ である．右辺は擬多項式とよばれているものである．このとき $y+a_1(x)/3=0$ が完備局所的な最大接触曲線の定義方程式になる．

一方 Giraud の方法によれば g を微分して $g_x=y^4+4x^3$, $g_y=4xy^3+3y^2$, $g_{xx}=12x^2$, $g_{xy}=4y^3$, $g_{yy}=12xy^2+6y=y(6+2xy)$ となるから，アフィン平面から曲線 $6+2xy=0$ を取り除いたアフィン開集合において，位数が１の元 y が最大接触曲線の定義方程式になる．

（例終り）

この例における x のベキ級数 $a_i(x)$ を計算するのは手間がかかるが，収束を気にしなくてよいので，未定係数法を用いて指定された位数までの係数を順番に計算することができる．この意味では非構成的な方法とはいえないが，無限級数は避けることができればより構成的であるといえる．

５．多重帰納法の非構成的性格

さてこうしてみると，特異点解消の手続きが４重の帰納法になっていることが，広中の証明が非構成的であるといわれることの最大の理由であることが分かる．

例３．次数が１５の３変数の多項式

$$f(x,y,z)=z^3+(x^2+y^3)^3z+(x^2+y^3)^5$$

で定義される代数多様体 W を考える．W は３次元のアフィン空間 X の中の２次元の超曲面であるから $\mathrm{R}_1^{3,2}$ 型の解消データ $\mathcal{R}_1$ を定める．$\mathcal{R}_1$ の特異点集合 C はイデアル $J=(z,x^2+y^3)$ で定まる被約な空間曲線であ

る．J は余次元 2 の素イデアルであって，C の生成点である．$\mathrm{ord}_J f = 3$ であるから J は W の 3 重点である．

W は C のどの点においても重複度が 3 であるが C 自身が非特異でないため許容単項変換の中心に選ぶことができない．まず X の中の C の特異点を解消する必要がある．X と C から新しく $\mathrm{R}_{\mathrm{I}}^{3,1}$ 型の解消データ $\mathcal{R}_2$ が定義される．ここで帰納法の仮定を用いて $\mathcal{R}_2$ が解消可能であるとしてよい．すなわち許容単項変換の列 $X \leftarrow X_1 \leftarrow \cdots \leftarrow X_r$ により C の強変換 C_r が非特異になり，X_r 上の例外因子 E は C_r と正規交叉しているとしてよい．このとき W の強変換 W_r に沿って C_r が法平坦（今の場合は等重複度と同じ）であるから C_r を単項変換の許容中心として選ぶことができる．このような操作は 3 次元の非特異な X と 2 次元の W と 1 次元の C とに対していつでも行えるとしてよい．

さて C の生成点 J は W の 3 重点である．X を J において局所化したスキーム S は次元が下がって 2 次元の非特異なスキームになる．W の S への引き戻し W' は 1 次元で J は S の唯 1 つの閉点（極大イデアル）になる．しかも J は W' の孤立 3 重点である．これらは $\mathrm{R}_{\mathrm{I}}^{2,1}$ 型の解消データ $\mathcal{R}_3$ を定める．再び帰納法の仮定により $\mathcal{R}_3$ は特異点解消可能であるとしてよい．$\mathcal{R}_3$ の特異点解消は平面曲代数線の特異点解消と同じである．ここで J に無限に近い特異点は C の強変換の生成点であるから $\mathcal{R}_3$ を解消する各許容単項変換ごとに上の操作，すなわち C の変換が非特異かつ W に沿って法平坦になるようにする操作，を挿入する．こうして W' の特異点解消と平行して W の特異点が解消される．

（例終り）

この例のように 2 次元の超曲面の特異点解消は，より余次元の大きい空間曲線の特異点解消と，より次元の小さい平面代数曲線の特異点解消とに分解される．しかしこれらをつなげて 1 列の単項変換を構成するのは容易ではない．

広中の解消データを 1 つにまとめて，4 重帰納法を単純な帰納法に帰着させることはできるだろうか？

$\mathrm{R}_{\mathrm{I}}^{N,n}$ 型の解消データは，考えている代数多様体 W の次元 n と，W を（局所的に）含む非特異な包含空間（ambient space）の次元 N との 2 つの自然数に依ることに注意する．N と n は解消データの幾何学的状況

を反映しているので情報を失わずに1つの自然数にまとめることはできない．また例3のように非閉点における局所化を用いて次元を下げる方法では，この N と n はどちらかを固定してしまうと帰納法が進まなくなってしまう．

では4種類の解消データを統合して1つにすることはできるだろうか？

実は何もかもまとめて「大きな荷物を持ち運びながら」特異点解消の旅をすることは可能である．最近の別証明では，過去の許容単項変換の歴史が分かるように，特異点集合に追加されている古い例外因子と新しく生じた例外因子とを，それぞれ余次元ごとに記録しておいて大きな解消データを定義し，特異点の意味も拡張する．これは強変換よりも全変換の特異点解消に着目し例外因子を新旧の2つに分けるという Abhyankar のアイデア[11]に基づいている．このような解消データは，その特異性が最悪の部分を中心に許容単項変換を行うと，特異性が必ず改善される．特異性が拡張されているので必要以上に解消されてしまうこともあるが，ともかく有限回の手続きで特異点は解消される．

6．その後の発展

「広中の証明」は数学的帰納法を用いていながら具体的な計算の方法を与えないため，これに対する不満が構成的別証明へのきっかけとなった．両者を比較してすぐ気付くのは，特異点集合がより広く設定されたことにより特異点解消の証明がより簡単になった，ことである．広中の証明の成功の理由の1つも，それ以前の方法に比べて特異点集合がより一般に定義されていることにあった．そこでは非閉点を扱いやすくしたり，解消データの単項変換による変換を純代数的に記述できたりするスキーム論の利点が活かされていた．

最初は難解であった「広中の証明」も，よく整理された現在から過去へさかのぼって見直してみると，その骨格がよく見えてくる．証明の簡易化に成功したその後の発展を知ることにより，まだ未解決の特異点解消問題，つまり基礎体 K の標数が正の場合や K がエクセレントなデデキント環の場合など，の解決のヒントになればと思う．

---

[11]) Shreeram S. Abhyankar, Good points of a hypersurface, Advances in Mathematics, Vo. 68 (1988), 87-256.