ポアンカレの Analysis Situs

Analysis situs(位置解析)とは現在のトポロジーのことである。トポロジーに関するポアンカレの研究は文献表の論文1〜6がそのすべてである。

彼が何故トポロジーの研究に手を染めるに到ったかについては、彼自身が文献7の中で詳しく語っている。それによれば、彼が手がけて来た種々の研究 —— 微分方程式、多変数関数論、天体力学、群論等 —— が彼を高次元のトポロジーへと導いたというのである。2次元のトポロジーが数学の多くの分野で有効にはたらいたように、高次元のトポロジーの理論がもし作られるならば、それはこれ等の研究の有力な道具としてはたらくであろうと彼は考える。しかし高次元のトポロジーに手を付けようとする人は、リーマンとベッチ以後は一人も現われない。それならば自分自身でそれを試みてみようというのが、彼のトポロジー研究の動機である。

論文1では多様体のトポロジーの基本概念の殆どすべて —— 多様体、同相写像、多様体の向き付け、ホモロジー、ベッチ数、基本群等 —— が次々と提示され、そして今日ポアンカレの双対定理とよばれているものが証明されている。また、多面体に関するオイラーの定理が高次元へと拡張され、それに付随して一般次元のオイラー標数が登場する。

論文1が発表されてから3年後の1898年、デンマークの数学者ヘーゴールは論文9の中で、ポアンカレの双対定理は誤りであると極め付け、一つの反例を挙げる。そしてポアンカレの証明の中の推論の不完全さを指摘する。ポアンカレはこれに答えて、その翌年論文2を発表する。その中で彼は、ヘーゴールの反例はベッチ数の定義に関する誤解に基づくものであるといっているが、しかし上記の定理の証明が不完全であったことは率直に認める。このようなことが生じたのはホモロジーの定義が曖昧だったためである。これを修正するためにポアンカレはホモロジーの厳密な代数的理論を展開する。複体に関する組合せ論的トポロジーの基礎がここで築かれる。

論文3〜6を私は殆ど読んでいないので大ざっぱな紹介しかできないが、論文3ではねじれ係数が論じられているようである。また、この論文は、その中で、すべての閉曲線が0にホモローグな3次元閉多様体は球と同相である —— という(正しくない)定理が証明されていることによっても有名である。論文4,5は代数曲面に関するもので、純粋なトポロジーというよりも、やや代数幾何的な内容のものらしい。論文6では論文3で証明した上述の定理が誤りであることを自ら認め、その反例を与えている。それではホモロジーをホモトピーでおきかえたらどうなるか。すべての閉曲線が0にホモトープな3次元閉多様体で、球と同相でないものがあるのだろうか? この疑問を最後に述べて論文6は終る。この疑問が後にポアンカレ予想とよばれるに到る。

論文6を最後に、ポアンカレは二度とトポロジーには戻ってこなかった。

今回は論文1だけを紹介する。

文献

1. Analysis situs, Journ. de l'École Polytech., 2e série, 1er cahier (1895).
2. Complément à l'Analysis situs, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 13 (1899).
3. Second complément à l'Analysis situs, Proc. London Math. Soc. vol. 32 (1900).
4. Sur certaines surfaces algébriques. Troisième complément à l'Analysis situs, Bull. Soc. Math. de France, t. 30 (1902).
5. Sur les cycles de surface algébrique, Quatrième complément à l'Analysis situs, Journ. Math. pures et appl., t. 8 (1902).
6. Cinquième complément à l'Analysis situs, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 18 (1904).
7. Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même, Acta Math., t. 38 (1921)
   1° Équations Différentielles.
   2° Théorie générale des Fonctions.
   3° Questions diverses de Mathématiques pures (Algèbre, Arithmétique, Théorie des Groupes, Analysis Situs).
   4° Mécanique Céleste.
   5° Physique Mathématique.
   6° Philosophie des Sciences.
   7° Enseignement, vulgarisation, divers (Bibliographie, rapports divers).
8. B. Riemann, Fragment aus der Analysis Situs, Gesammelte Werke, Dritte Abtheilung XXIX.
9. P. Heegaard, Forstudier til en topologisk teori för de algebraiske Flaters Sammenhäng, Copenhague, det Nordiske Forlag Ernst Bojessen. (1898).
10. Sur les résidus des intégrales doubles, Acta Math., t. 9 (1887).

§1. 多様体の第一の定義 (Première définition des variétés)

$$
(1)\qquad
\begin{cases}
F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\
F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\
\quad \cdots\cdots\cdots \\
F_p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\
\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0, \\
\varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0, \\
\quad \cdots\cdots\cdots \\
\varphi_q(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0.
\end{cases}
$$

$$
(2)\qquad
\mathrm{rank}
\begin{pmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial F_p}{\partial x_1} & \frac{\partial F_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_p}{\partial x_n}
\end{pmatrix}
= p.
$$

$$
(3)\qquad
\begin{cases}
F_\alpha = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_\gamma > 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, p;\ \gamma \neq 1) \\
F_\alpha = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_\gamma > 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, p;\ \gamma \neq 2) \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_\alpha = 0, \quad \varphi_q = 0, \quad \varphi_\gamma > 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, p;\ \gamma \neq q)
\end{cases}
$$

§2. 同相写像 (Homéomorphisme)

$$
(4)\qquad
\begin{cases}
F_\alpha = 0, & (\alpha = 1, 2, \cdots, p), \\
\varphi_\beta > 0 & (\beta = 1, 2, \cdots, q).
\end{cases}
$$

$$
(4')\qquad
\begin{cases}
F'_\alpha = 0 & (\alpha = 1, 2, \cdots, p), \\
\varphi'_\beta > 0 & (\beta = 1, 2, \cdots, q').
\end{cases}
$$

$$
(5)\qquad
\begin{cases}
x'_k = \psi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \\
(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V, \quad (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \in V'
\end{cases}
$$

§3. 多様体の第二の定義 (Deuxième définition des variétés)

(6)
$$\begin{cases} x_1 = \theta_1(y_1, y_2, \cdots, y_m), \\ x_2 = \theta_2(y_1, y_2, \cdots, y_m), \\ \text{- - - - - - - - - -} \\ x_n = \theta_n(y_1, y_2, \cdots, y_m), \\ \psi_1(y_1, y_2, \cdots, y_m) > 0, \quad \cdots, \quad \psi_q(y_1, y_2, \cdots, y_m) > 0 \end{cases}$$

(7)
$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial\theta_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\theta_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\theta_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial\theta_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\theta_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\theta_2}{\partial y_m} \\ & \text{- - - - - -} & & \\ \frac{\partial\theta_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\theta_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\theta_n}{\partial y_m} \end{pmatrix} = m$$

(6')
$$x_i = \theta_i'(y_1', y_2', \cdots, y_m') \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(7)
$$V_1, V_2, \cdots, V_n, \quad V_i \cap V_{i+1} \neq \phi.$$

§4 反対向きの多様体 (Variétés opposées)

(8)
$$\Delta = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{\partial(z_1, z_2, \cdots, z_m)} \neq 0$$

(9)
$$x_i = \theta_i(y(z)) = \theta_i'(z) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(10)
$\Delta > 0$ ならば V, $\Delta < 0$ ならば $-V$

§5 ホモロジー (Homologie)

(11)
$$v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda \sim 0$$

(12)
$$k_1 v_1 + k_2 v_2 \sim k_3 v_3 + k_4 v_4$$

§6 ベッチ数 (Nombres de Betti)

(13)
$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_\lambda v_\lambda \sim 0$$

§7 積分の利用 (Emploie des intégrales)

(14) $$\int_V \sum X_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \cdots dx_{\alpha_m}$$

(15) $$\int \sum X_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m} \frac{\partial(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \cdots, x_{\alpha_m})}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)} dy_1 dy_2 \cdots dy_m$$

(16) $$\omega = \sum X_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m} dx_{\alpha_1} \wedge dx_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_m}$$

(17) $$d\omega = 0$$

(18) $$\int_{W_k} \sum X_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \cdots dx_{\alpha_m} \quad (k = 1, 2, \cdots, N)$$

§8 一面的な多様体と両面的な多様体 (Variétés unilatères et bilatères)

(19) $$v_1, v_2, \cdots, v_q, v_1$$

(20) $$y_1^i, y_2^i, \cdots, y_m^i$$

(21) $$v_1 \cap v_2 = v_1', \quad v_2 \cap v_3 = v_2', \cdots, v_{q-1} \cap v_q = v_{q-1}', \quad v_q \cap v_1 = v_q'$$

(22) $$\Delta_i = \frac{\partial(y_1^{i+1}, y_2^{i+1}, \cdots, y_m^{i+1})}{\partial(y_1^i, y_2^i, \cdots, y_m^i)} \quad (i = 1, 2, \cdots, q-1)$$

(23) $$\Delta_q = \frac{\partial(y_1^1, y_2^1, \cdots, y_m^1)}{\partial(y_1^q, y_2^q, \cdots, y_m^q)}$$

§9 二つの多様体の交叉 (Intersection de deux variétés)

(24) $$V = v_1 \cup v_2 \cup \cdots, \quad V' = v_1' \cup v_2' \cup \cdots$$

(25) $$x_i = \theta_i(y_1^j, y_2^j, \cdots, y_p^j) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(25′) $$x_i = \theta_i'(z_1^j, z_2^j, \cdots, z_{n-p}^j) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\frac{\partial(y_1^j, y_2^j, \cdots, y_p^j)}{\partial(y_1^k, y_2^k, \cdots, y_p^k)} > 0 \text{ in } v_j \cap v_k$$

(26)
$$f(M) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1^j} & \frac{\partial \theta_2}{\partial y_1^j} & \cdots & \frac{\partial \theta_n}{\partial y_1^j} \\ - & - & - & - \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial y_p^j} & \frac{\partial \theta_2}{\partial y_p^j} & \cdots & \frac{\partial \theta_n}{\partial y_p^j} \\ \frac{\partial \theta_1'}{\partial z_1^k} & \frac{\partial \theta_2'}{\partial z_1^k} & \cdots & \frac{\partial \theta_n'}{\partial z_1^k} \\ - & - & - & - \\ \frac{\partial \theta_1'}{\partial z_{n-p}^k} & \frac{\partial \theta_2'}{\partial z_{n-p}^k} & \cdots & \frac{\partial \theta_n'}{\partial z_{n-p}^k} \end{vmatrix}$$

(27)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial (y)}{\partial (\eta)} & 0 \\ 0 & \frac{\partial (z)}{\partial (\zeta)} \end{vmatrix} f(M)$$

(28)
$$\begin{cases} f(M) > 0 \text{ のとき } S(M) = 1, \\ f(M) = 0 \text{ のとき } S(M) = 0, \\ f(M) < 0 \text{ のとき } S(M) = -1. \end{cases}$$

(29)
$$N(V, V') = \sum S(M_i)$$

(30)
$$\sum k_i V_i \sim 0$$

(31)
$$\sum k_i N(V, V_i) = 0.$$

(32)
$$\sum k_i V_i \sim 0 \Leftrightarrow \sum k_i N(C_1, V_i) = \sum k_i N(C_2, V_i) = \cdots = \sum k_i N(C_\lambda, V_i) = 0$$

(33)
$$P_p = P_{n-p}$$

§10 幾何学的表現 (Représentation géométrique)

第一の例

(34)
$$\begin{cases} ABDC \equiv A'B'D'C', \\ ACC'A' \equiv BDD'B', \\ CDD'C' \equiv ABB'A' \end{cases}$$

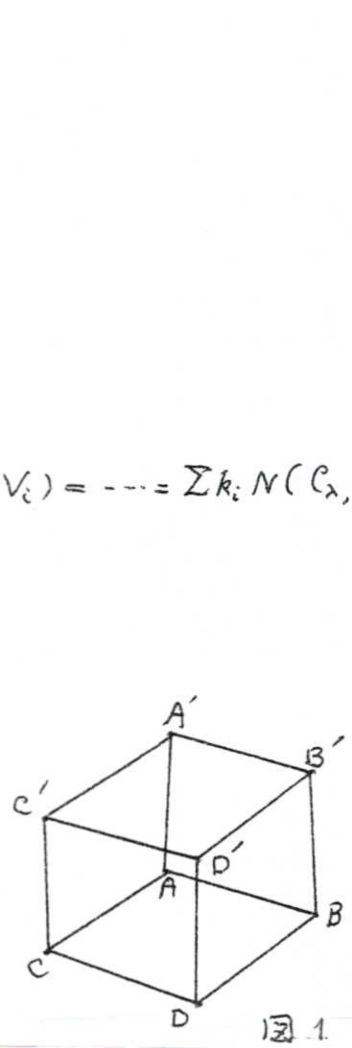

図 1.

(34') $\begin{cases} AB \equiv A'B' \equiv CD \equiv C'D', \\ AC \equiv AC' \equiv BD \equiv B'D', \\ AA' \equiv BB' \equiv CC' \equiv DD'. \end{cases}$

(34'') $A \equiv B \equiv C \equiv D \equiv A' \equiv B' \equiv C' \equiv D'.$

第二の例

(35) $\begin{cases} ABDC \equiv B'D'C'A', \\ ABB'A' \equiv DD'C'C, \\ ACC'A' \equiv DD'B'B \end{cases}$

(35') $\begin{cases} AB \equiv B'D' \equiv C'C \equiv B'A' \equiv AC \equiv DD', \\ AA' \equiv DC \equiv C'A' \equiv B'B \equiv C'D \equiv DB'. \end{cases}$

(35'') $\begin{cases} A \equiv B' \equiv C' \equiv D, \\ B \equiv D' \equiv C \equiv A'. \end{cases}$

第三の例

(36) $\begin{cases} ABDC \equiv B'D'C'A', \\ ABB'A' \equiv C'CDD', \\ ACC'A' \equiv DD'B'B \end{cases}$

(36') $\begin{cases} AB \equiv B'D' \equiv C'C, \quad AA' \equiv C'D \equiv DB, \\ AC \equiv DD' \equiv B'A, \quad CD \equiv BB' \equiv A'C'. \end{cases}$

(36'') $\begin{cases} A \equiv B' \equiv C' \equiv D \\ B \equiv D' \equiv A' \equiv C \end{cases}$

第四の例

(37) $\begin{cases} ABDC \equiv B'D'C'A', \\ ABB'A' \equiv CDD'C', \\ ACC'A' \equiv BDD'B'. \end{cases}$

(37') $\begin{cases} AA' \equiv CC' \equiv BB' \equiv DD', \\ AB \equiv CD \equiv B'D' \equiv A'C', \\ AC \equiv BD \equiv D'C' \equiv B'A' \end{cases}$

(37'') $A \equiv B \equiv C \equiv D \equiv A' \equiv B' \equiv C' \equiv D'$

第五の例

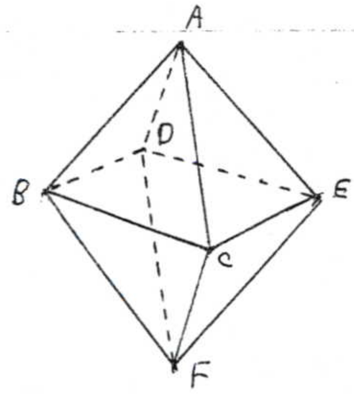

図 2

$$(38)\quad \begin{cases} ABC \equiv FED, \\ ACE \equiv FDB, \\ AED \equiv FBC, \\ ADB \equiv FCE. \end{cases}$$

$$(38')\quad \begin{cases} AB \equiv FE,\ AC \equiv FD,\ AE \equiv FB, \\ AD \equiv FC,\ BC \equiv ED,\ BD \equiv EC \end{cases}$$

$$(38'')\quad A \equiv F,\ B \equiv E,\ C \equiv D$$

$$(39)\quad q_\alpha - \varphi_\alpha + l_\alpha = 2$$

(40)

	q_α	φ_α	l_α
第一の例	8	12	6
第二の例	4	6	2
第三の例	4	6	4
第四の例	8	12	6
第五の例	2	4	4

§11. 不連続群による表現 (Représentation par un groupe discontinue)

第六の例

$$(41)\quad \begin{cases} (x, y, z;\quad x+1, y, z), \\ (x, y, z;\quad x, y+1, z), \\ (x, y, z;\quad \alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y, z+1) \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ は整数} \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1 \end{cases}$$

$$(42)\quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(43)\quad (x, y, z) \to (x_n+k, y_n+k, z+n),\quad k, n \text{ は整数}$$

$$(44)\quad x=0;\ x=1;\ y=0;\ y=1;\ z=0;\ z=1$$

§12. 基本群 (Groupe fondamental)

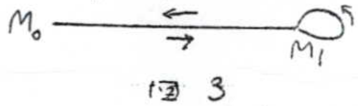

図 3

(45) $$k_1 C_1 + k_2 C_2 \equiv k_3 C_3 + k_4 C_4 \quad (k_1, k_2, k_3, k_4 \text{ は整数})$$

(46) $$dF_i = \sum_{k=1}^{n} X_{ik}\, dx_k \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

(46') $$\frac{\partial X_{ik}}{\partial x_q} + \sum_j \frac{\partial X_{ik}}{\partial F_j} X_{jq} = \frac{\partial X_{iq}}{\partial x_k} + \sum_j \frac{\partial X_{iq}}{\partial F_j} X_{jk}$$

§13 基本的同値関係 (Équivalences fondamentales)

(47) $$\begin{cases} C_1 \longleftrightarrow (x, y, z;\ x+1, y, z) \\ C_2 \longleftrightarrow (x, y, z;\ x, y+1, z) \\ C_3 \longleftrightarrow (x, y, z;\ \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, z+1) \end{cases}$$

$A : (0, y_1, z_1)$ $A' : (1, y_1, z_1)$
$B : (x_2, 0, z_2)$ $B' : (x_2, 1, z_2)$
$C : (x_3, y_3, 0)$ $C' : (x_3', y_3', 1)$

ただし

$$x_3' = \alpha x_3 + \beta y_3 + m,$$
$$y_3' = \gamma x_3 + \delta y_3 + n, \quad m, n \text{ は適当な整数}$$

とすると

$$C_1 = M_0 A A' M_0$$
$$C_2 = M_0 B B' M_0$$
$$C_3 = M_0 C C' M_0$$

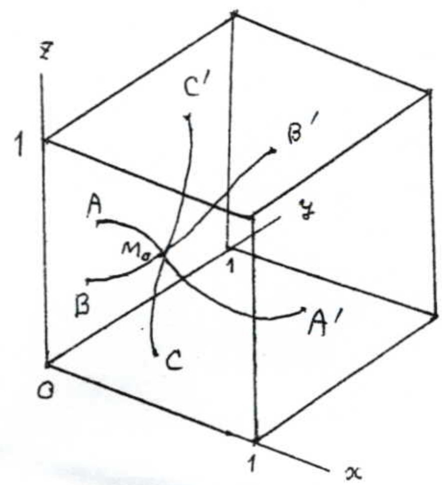

図 4

(48) $$\begin{cases} C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1, \\ C_1 + C_3 \equiv C_3 + \alpha C_1 + \gamma C_2, \\ C_2 + C_3 \equiv C_3 + \beta C_1 + \delta C_2 \end{cases}$$

(49) $$m_3 C_3 + m_1 C_1 + m_2 C_2 \quad (m_1, m_2, m_3 \text{ は整数})$$

(50) $$\begin{cases} (\alpha - 1) C_1 + \gamma C_2 \sim 0, \\ \beta C_1 + (\delta - 1) C_2 \sim 0 \end{cases}$$

§14 同相の条件 (Condition de l'homéomorphisme)

(51)
$$\begin{cases} C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1, \\ C_1 + C_3 \equiv C_3 + \alpha C_1 + \gamma C_2, \\ C_2 + C_3 \equiv C_3 + \beta C_1 + \delta C_2. \end{cases}$$

(52)
$$\begin{cases} C_1' + C_2' \equiv C_2' + C_1', \\ C_1' + C_3' \equiv C_3' + \alpha' C_1' + \gamma' C_2', \\ C_2' + C_3' \equiv C_3' + \beta' C_1' + \delta' C_2'. \end{cases}$$

(53)
$$\begin{cases} \Gamma_1 \equiv a_3 C_3 + a_1 C_1 + a_2 C_2, \\ \Gamma_2 \equiv b_3 C_3 + b_1 C_1 + b_2 C_2, \\ \Gamma_3 \equiv c_3 C_3 + c_1 C_1 + c_2 C_2 \end{cases}$$

(54)
$$\begin{cases} \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_1, \\ \Gamma_1 + \Gamma_3 \equiv \Gamma_3 + \alpha' \Gamma_1 + \gamma' \Gamma_2, \\ \Gamma_2 + \Gamma_3 \equiv \Gamma_3 + \beta' \Gamma_1 + \delta' \Gamma_2 \end{cases}$$

§15 他の生成法 (Autres modes de génération)

§16 オイラーの定理 (Théorème d'Euler)

(55)
$$S - A + F = 2$$

(56)
$$S - A + F = 3 - P_1$$

(57)
$$N = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^{p-1}\alpha_{p-1} + (-1)^p \alpha_p$$

§17 pが奇数の場合 (Cas où p est impair)

§18 第二の証明 (Deuxième démonstration)

(58)
$$f_i(\delta) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \alpha_2 + P_1 - 1)$$

(59)
$$f_{i_1} = 0, \; f_{i_2} = 0, \; \cdots, \; f_{i_k} = 0$$

(60)
$$\sum_{r=1}^{k} f_{i_r} \equiv 0.$$

(61)
$$g_i(f) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \alpha_3 + P_2 - 1)$$

(62) $\alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + (\alpha_3 + P_2 - 1) - 1$

(63) $\alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + (\alpha_3 + P_2 - 1) - (\alpha_4 + P_3 - 1) + 1$

(64) $\alpha_0 - 1 = \alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + (\alpha_3 + P_2 - 1) - 1$

(65) $\alpha_0 - 1 = \alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + (\alpha_3 + P_2 - 1) - (\alpha_4 + P_3 - 1) + 1$

(64′) $N = -P_1 + P_2$

(65′) $N = 3 - P_1 + P_2 - P_3$

(66) $N = -P_1 + P_2 - \cdots - P_{p-2} + P_{p-1}$

(67) $N = 3 - P_1 + P_2 - \cdots - P_{p-1}$

(68) $N = \sum_0^p (-1)^h \alpha_h = \sum_0^p (-1)^h B_h$