

ガウスの電磁気学研究について

植 村 栄 治 (大東文化大学)

2013 年 10 月 12 日

1 はじめに

数学者ガウスは、物理学の分野でも多くの研究を行った。ガウスによる地磁気の研究については 2011 年の本シンポジウムで報告し(注 1)、また、彼の光学及び結晶学の研究については 2012 年の本シンポジウムで報告した(注 2)。本稿では、電磁気学に関するガウスの研究を取り上げて考察する。

(注 1) 植村栄治「地磁気に関するガウスの研究について」津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 33 第 22 回数学史シンポジウム(2011), 1 頁(2012 年)。

(注 2) 植村栄治「物理学の分野におけるガウスの研究について」津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 34 第 23 回数学史シンポジウム(2012), 73 頁(2013 年)。

2 電磁気学の歴史

静電気の現象や磁石の存在などは古くから知られていたが、18 世紀になると、クーロンの法則(荷電粒子間には電荷の積に比例し距離の 2 乗に反比例する引力又は斥力が働く)が発見され(1785 年)、ボルタ電池が製作される(1799 年頃)等、電気に関する学術的知見が次第に蓄積され始めた。

近代的な電磁気学の発展は、1820 年 4 月のハンス・クリスティアン・エルステッド(Hans Christian Ørsted. 1777 年 - 1851 年. デンマークの科学者)による電流の磁気作用の発見に始まる。この発見を受けて、早くも同年中に、ジャン・バティスト・ビオ(Jean-Baptiste Biot. 1774 年 - 1862 年)とフェリックス・サバール(Félix Savart. 1791 年 - 1841 年)によるビオ・サバールの法則の発見、フランソワ・ジャン・ドミニク・アラゴー(François Jean Dominique Arago. 1786 年 - 1853 年)による電磁石の原理の発見、アンドレ・マリ・アンペール(André-Marie Ampère. 1775 年 - 1836 年)によるアンペールの法則の発見などが立て続けになされた。

その後、1826 年には、ゲオルク・ジモン・オーム(Georg Simon Ohm. 1789 年 - 1854 年)によるオームの法則の発見が、1831 年には、マイケル・ファラデー(Michael Faraday. 1791 年 - 1867 年)によるファラデーの電磁誘導の法則の発見が、1834 年には、ハインリヒ・レンツ(Heinrich Friedrich Emil Lenz. 1804 年 - 1865 年)によるレンツの法則の発見が、1840 年には、ジェームズ・プレスコット・ジュール(James Prescott Joule. 1818 年 - 1889 年)によるジュールの法則の発見が、それぞれ行われた。

また、ジェームズ・クラーク・マクスウェル(James Clerk Maxwell. 1831 年 - 1879 年)は、1856 年に「ファラデーの力線について」(第 1 論文)を発表して電気現

象を数学的に表現し、1861年に「物理的力線について」(第2論文)を発表して電磁場理論を示し、1864年に「電磁場の動力学的理論」(第3論文)を発表して電磁波の存在を予言した。さらに彼は1873年に著書「電磁気学」において光が電磁波の一種である旨を主張した。

マクスウェルの主張通りに電磁波が空間を光と同じ速さで伝播することは、1888年にハインリヒ・ルドルフ・ヘルツ(Heinrich Rudolf Hertz. 1857年 - 1894年)が実験によって証明した。

以上のような19世紀の電磁気学発展の歴史の中でガウスはどのような役割を果たしたのであろうか。それを以下に見ていこう。

3 電磁気に関するガウスの論稿(その1)

ガウスは、地磁気あるいは磁気に関して多くの論文を発表しているが、電気あるいは電磁気に限定して考察した論稿は生前にはほとんど公表していない。しかし、彼は電気・電磁気に関する研究自体はかなり行っていた。ガウス全集の中には、電気・電磁気に関する遺稿が30数点ほど収められており、その他に、電気・電磁気について触れた彼の書簡が30数通ほど収録されている(注3)。これらを通覧し、また、(地)磁気に関する彼の諸論文を合わせ参照すると、以下に見るように、電磁気学に関してガウスがどの程度の知見や理論を有していたのかや電磁気学の発展にガウスがどの程度貢献したと言えるかが或る程度明らかになる。

(注3) ガウス全集第5巻の601頁から630頁にかけて、「電気力学的作用の数学的理論」との項目の下に、19点の草稿と1通の書簡が収録されている(他に記号の定義リストが1点ある)。また、同全集第11巻第1分冊の55頁から71頁まで及び178頁から194頁までには磁気・電流・電磁気等に関する講演や遺稿が合わせて13点収録され、また、同分冊の72頁から116頁まで及び173頁から177頁までには電気や磁気について触れた彼の書簡が計33通収録されている。

4 ガウスとウェーバーによる電信機の発明

ガウスは、1831年1月頃から地磁気の測定を行っていたが、彼が、ウェーバーと共に、大規模な電気設備を用いて電氣的現象の測定や実験を始めたのは1832年10月21日頃と考えられている(注4)。

1833年11月20日付のオルバース宛ての書簡の中で、ガウスは、前年に彼がゲッティンゲン市内に設置した大規模な電信設備について説明している(注5)。ガウスの説明によれば、ゲッティンゲン天文台から伸びた電線が聖ヨハネ教会の尖塔を経て、ウェーバーが管理している物理実験室まで届いており、その長さは約8千フィートもある。電線の両端には増幅器が取り付けられ、天文台の方の増幅器は170のコイル、物理実験室の方の増幅器は約50のコイルを有し、いずれも1ポンドの磁石の周囲を取り巻いている。電流の方向は、ガウスが転換器と名付けた装置によって瞬時に転換することができ、それによって物理実験室にある針を遠隔操作により動か

して、ベルを打つことができる。このようにこの設備は電信機として使うことができるので、かかる設備を設置すればゲッチェンゲンからハノーバーへあるいはハノーバーからブレーメンへ電信を送ることができようとガウスは述べている。

ガウスは地磁気を観測するための観測所の設置をゲッチェンゲン大学に提案して認められ、1833年秋には磁気観測所が完成して観測活動が始まる。この磁気観測所について説明した1834年8月9日付の「ゲッチェンゲン学術公告」(Göttingische gelehrte Anzeigen)の末尾において、ガウスは、天文台とウェーバーの物理実験室とをつなぐ電線についても触れている(注6)。それによると、磁気観測所が設置された後、電線は天文台から磁気観測所まで延長され、全体の長さは約9千フィートになった。なお、この電線は1845年まで残っていたが、同年12月16日の雷によって破壊された。

以上のような、ガウスとウェーバーによる電信機の発明はほとんど世界最初と評してよいものである。この発明はドイツ国内でそれなりに関心と呼ばれ、当時建設中だったドイツの鉄道への利用も検討されたが、結局、実用化されるには至らなかった。この発明はドイツ国外には余り伝わらず、また、1830年代半ば以降、欧米諸国で電信機に関する発明が相次いだこともあって、電信機に関するガウスとウェーバーの業績はほとんど忘れ去られてしまった。

(注4) 以下の記述については、ダニングトン著『ガウスの生涯』143頁以下参照。

(注5) ガウス＝オルバース書簡集 第2巻 (No.678. 1833年11月20日付), 601頁。

(注6) ガウス全集5巻519頁。

5 電磁気に関するガウスの論稿(その2)

ガウスは1833年3月にキルヒホフの分枝回路の法則を発見し(注7)、また、同じ頃に最小熱量の原理をも確立したとされる(注8)。これらの業績はいずれもキルヒホフによる発見に先立つものだが、ガウスが生前に公表しなかったもので、ガウスによる発見の事実はその死後まで世に知られなかった。

(注7) この法則は、「電気回路の接続点に流れ込む電流の和と接続点から流れ出る電流の和は等しい」というもので、現在では「キルヒホフの第1法則」あるいは「電流則」と呼ばれる。グスタフ・ローベルト・キルヒホフ(Gustav Robert Kirchhoff. 1824年 - 1887年)が学生時代の1845年に発見したとされる。ガウスの草稿については全集第5巻601頁を、その解説については全集第11巻第2分冊収録のClemens Schafferの論文 Abhandlung 2: Über Gauss' physikalische Arbeiten (Magnetismus, Elektrodynamik, Optik)の107頁を参照。

(注8) 導体の内部を電流が流れる場合、その電流分布は、発生する熱量を最小にするように定まる。これを「最小熱量の原理」といい、キルヒホフが1848年に発表した。この問題に関するガウスの草稿については、全集第5巻603頁及び全集第11巻第2分冊収録のSchafferの上記論文の109頁参照。

6 電磁気に関するガウスの論稿 (その3)

(1) ガウスは1834年に誘導コイルを製作し、誘導電流の研究や銅製磁気ダンパーの製作等を行った。そして、1835年1月23日には、誘導電流に関するノイマンの法則(ファラディ=ノイマンの法則、ファラデーの法則、電磁誘導の法則などともいう)の定式化を行っている。この法則は、電磁誘導によって生じる起電力は磁束の変化を妨げる向きに発生し、その大きさは磁束の時間的な変化に比例するというものである。1831年にファラデーがこの法則を発見し、1845年にはノイマンがその数学的な定式化を示したが、ガウスはノイマンよりも10年早くその定式化を行っていたのである。ガウスは草稿に次のような式を書き記した(注9)。

誘導の法則 (Das Inductionsgesetz)

I 或る点 P から距離 r だけ離れた伝導要素 (Rheophorelement) γ が、時間要素 dt の間に、 P においてもたらす起電力 (Stromerzeugende Kraft) は、時刻 t 及び $t+dt$ に対応するそれぞれの $\frac{\gamma}{r}$ の値の差を dt で割ったものであるが、それは明らかに、簡潔に

$$- \frac{d\frac{\gamma}{r}}{dt}$$

と表すことができる。ここで γ はその大きさ及び方向について考慮するものとする。

II 産み出される電流の強さは

$$\frac{\int p \, ds}{\theta}$$

である。ここで、 p は伝導体の各要素 ds における起電力であり、 θ は全抵抗である。

(2) 1835年7月にガウスは2個の電気要素 (Element von Electricität) が相対的に運動している場合の引力ないし斥力の大きさを次のような式で表し、これを「動電流の全相互作用を表す基本原則」(Grundgesetz für alle Wechselwirkungen galvanischer Ströme) と呼んだ(注10)。

$$\text{力の大きさ} = \frac{ee'}{rr} \left\{ 1 + k \left(\left(\frac{d(x' - x)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(y' - y)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(z' - z)}{dt} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) \right\}$$

ここで、 e, e' は各電気要素が有する電気の量、 $x, y, z; x', y', z'$ は両者の位置の座標、 r は両者の間の距離、 t は時間、 $\sqrt{\frac{1}{k}}$ は或る速度定数を表す。

(注 9) ガウス全集第 5 巻 609 頁.

(注 10) ガウス全集第 5 巻 616-617 頁.

7 電磁気に関するマクスウェルの方程式

現代の電磁気学では、電磁場の振舞いを定めるマクスウェルの方程式は、次のように書かれる (但し表記の仕方は幾通りもある).

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \cdots \cdots (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \cdots \cdots (4)$$

ここで,

\mathbf{B} : 磁束密度

\mathbf{D} : 電束密度

\mathbf{H} : 磁場 (の強度)

\mathbf{E} : 電場 (の強度)

ρ : 電荷密度

\mathbf{i} : 電流密度

である. また, div , rot は, ベクトル場の発散, 回転を表すが, 演算子 ∇ とのスカラ一積, ベクトル積の形を利用して, それぞれ $\nabla \cdot$, $\nabla \times$ という形で表記することもある.

なお, 真空中では, ϵ_0 を真空の誘電率, μ_0 を真空の透磁率として,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

が成り立つ. また, 物質中では, 近似的に次式が成り立つ.

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$$

ここで, ϵ は誘電率, μ は透磁率, σ は電気伝導率である.

8 ガウスの研究とマクスウェルの方程式の関係

上記のマクスウェルの方程式 4 個を眺めたとき, ガウスが知っていたと評価できるのはどれかを考えてみよう.

まず, 式 (2) は, 「ガウスの法則」と呼ばれ, 或る点における電場の発生量はそ

の点の電荷量に比例するということを表している。ガウスは、この法則を 1835 年に発見したとされるので、少なくとも同年以降はこの式を了知していたと考えてよい。

次に、式 (1) は、「磁化に関するガウスの法則」や「磁束保存の法則」などと呼ばれ、単一磁荷 (モノポール) は存在しないということを表している。ガウスの論稿の中に式 (1) を 1 つの法則として記述したものは見当たらないかも知れないが、磁荷は必ず正負同量のペアとなって存在するということは当時一般に承認されていたと思われるので、式 (1) についてもガウスの知見ないし了解の範囲内だったと考えてよいであろう。

式 (4) は、ファラデーの法則である。この式が示すような電磁誘導の現象自体は 1831 年にファラデーが発見していた。ガウスは、上記 6 で見たように、1835 年に余人に先んじてこの法則の定式化を行っているのであるから、式 (4) もまたガウスの知悉するところだったと言ってよい。

以上に対し、式 (3) はどうであろうか。電場が時間変化しない場合すなわち静電場においては、式 (3) は

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$$

となるが、これはアンペールの法則から導かれる式であり、ガウスも承知していた。しかし、電場が時間変化する場合には、(3) 式の右辺に第 2 項

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

を加えることが必要である。この項はいわゆる変位電流を表すもので、マクスウェルにより 1860 年代に導入されたが、ガウスはこれを知らなかったと考えられる。すなわち、ガウスはこの変位電流を考慮した式 (3) に到達しておらず、それ故、完璧な電磁気の理論を構築できなかったと言える。そのあたりの事情をマクスウェルの議論に照らしながら以下に見ていこう。

9 マクスウェルの 1864 年の諸方程式

マクスウェルは、1864 年に「電磁場の動力学的理論」(A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field) と題する論文をイギリス最古の権威ある学術論文誌フィロソフィカル・トランザクションズ (The Philosophical Transactions of the Royal Society) に発表した。その中で彼は電磁場の振舞いに関する方程式として、8 組の式を提示した。当時はまだベクトルを用いた表示は行われておらず、マクスウェルは空間における位置を x, y, z の座標で表したので、全体の方程式は 20 個になっている。

(1) 磁気力の方程式

マクスウェルは、場の或る点における電磁的なモーメント (磁石によるものも電流によるものも含む) を考えてその x 成分を F , y 成分を G , z 成分を H とし、その他の諸量も合わせて、次のように記号を定めた。

電磁的運動量 (Electromagnetic Momentum)	F	G	H
磁氣的強度 (Magnetic Intensity)	α	β	γ
起電力 (Electromotive Force)	P	Q	R
眞の誘導による電流 (Current due to true conduction)	p	q	r
◆電氣的變位 (Electric Displacement)	f	g	h
総電流 [變位の変化を含む] (Total Current [including variation of displacement])	p'	q'	r'
自由電氣の量 (Quantity of free Electricity)		e	
電氣ポテンシャル (Electric Potential)		Ψ	

なお、ここで

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt}$$

が成り立っている。

さて、マクスウェルは次のような8組・20個の方程式 ((A)~(H)) を提示した。

総電流 (Total Currents) の式 (3 個)	(A)
磁氣力 (Magnetic Force) の式 (3 個)	(B)
電流 (Electric Currents) の式 (3 個)	(C)
起電力 (Electromotive Force) の式 (3 個)	(D)
電氣的弾力性 (Electric Elasticity) の式 (3 個)	(E)
電氣抵抗 (Electric Resistance) の式 (3 個)	(F)
自由電氣 (Free Electricity) の式 (1 個)	(G)
連続の方程式 (Equation of Continuity)(1 個)	(H)

(A) 総電流 (Total Currents) の式

$$p' = p + \frac{df}{dt}, \quad q' = q + \frac{dg}{dt}, \quad r' = r + \frac{dh}{dt} \quad \dots \quad (A)$$

(B) 磁氣力 (Magnetic Force) の式

$$\mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad \mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \quad \mu\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \quad \dots \quad (B)$$

ここで μ は、媒質等によって定まる定数である。

(C) 電流 (Electric Currents) の式

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi p', \quad \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi q', \quad \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi r' \quad \dots \quad (C)$$

(D) 起電力 (Electromotive Force) の式 [導体が運動している場合]

$$\left. \begin{aligned} P &= \mu \left(\gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx} \\ Q &= \mu \left(\alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy} \\ R &= \mu \left(\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz} \end{aligned} \right\} \dots \quad (D)$$

(E) 電氣的弾力性 (Electric Elasticity) の式 [誘電体の場合]

$$P = kf, \quad Q = kg, \quad R = kh \quad \dots \quad (E)$$

ここで k は、電気変位に対する起電力の比を表す。

(F) 電気抵抗 (Electric Resistance) の式

$$P = -\rho p, \quad Q = -\rho q, \quad R = -\rho r \quad \dots \quad (F)$$

ここで ρ は、単位体積の抵抗を表す。

(G) 自由電気 (Free Electricity) の式

$$e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0 \quad \dots \quad (G)$$

ここで e は、場における単位体積あたりの正の自由電気の量を表す。

(H) 連続の方程式 (Equation of Continuity) [電荷の保存則]

$$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0 \quad \dots \quad (H)$$

10 ガウスとマクスウェルの対比

前記7で指摘したように、ガウスは変位電流という考えを持っていなかったと考えられる。マクスウェルの8組の方程式に登場する量で変位電流に直接関係があるのは、「電氣的変位」の f, g, h である。また、これらの量を含む式は、(A), (E), (G) である。これらの式はガウスの考察には現われないと言ってよい。また、式(H)の「連続の方程式」ないし「電荷の保存則」については、ガウスがこの法則をどの程度認識していたか必ずしも明瞭でないが、彼の電磁気学に関する草稿中にこの法則が積極的に取り上げられた様子は見られない。

マクスウェルは、1873年の著書「電磁気学」の中で、2個の電気要素の間に働く力についてガウスが示した式とウェーバーが示した式を比較検討している(注11)。マクスウェルによれば、2つの電流の間に作用する力学的な力の決定については、ガウスの式とウェーバーの式は一致し、その結果はアンペールの場合と同じである。しかし、2つの電荷の間に作用する力の決定については、ガウスの式はエネルギー

の保存則を満たさないで、正しくない。他方、ウェーバーの式についてはエネルギーの保存則を満たし得ると評価している。

(注 11) James Clerk Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, vol. II, 1873, art.850-866, p.428-438. ガウスの式は、6 (2) で述べた「力の大きさ」の式である。また、ウェーバーの式は、彼が 1846 年の著書「電気力学的な測定決定」(Elektrodynamische Maasbestimmungen) で示したもので、力の大きさは次の式で表されている。

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right) \right]$$

ここで c は電気の伝導に関する或る定数である。ウェーバーの場合には、電磁気力の瞬間的な伝播を仮定する立場を捨てなかったために、それ以上の理論的發展を遂げることができなかったように思われる。

11 結語

1. ガウスは、1830 年代にウェーバーと共に電磁気学に関する研究を精力的に行い、電信機の発明や電磁気理論の構築等の成果を上げた。もっとも、電信機の発明は当時のドイツ社会に広まるには至らず、またガウスの電磁気理論は、地磁気関係のものは別として、生前にはほとんど公表されなかったため、他の学者や世間に与えた影響はほとんどなかった。

2. 今日の電磁気学におけるマクスウェルの方程式 (4 個) について見ると、ガウスは、アンペール・マクスウェルの法則を表す式のうち、変位電流を表す右辺第 2 項に到達していなかった。そのためもあって、ガウスは自己の電磁気理論が完璧でないことを悟っていた模様であり、公表をしなかったと思われる。

3. ガウスの考察が変位電流にまで及ばなかった理由ないし原因としては、① 1830 年代にはまだ力の瞬間的な伝播を仮定するニュートンの重力の法則やクーロンの法則の発想が有力であり、また、電流の熱作用や磁気と光の相互作用が未発見など、電磁気学自体がそれほど発達していなかったこと、② 動電流を蓄電するようなコンデンサーはまだ実用化されておらず、コンデンサー内部のような「(直流) 電流は流れないが電位は変化する」という現象が一般的ではなく、変位電流を考えなくても説明できるケースが多かったこと、等が考えられる。

4. マクスウェルが変位電流の項を導入できたのは、電磁力を近接作用としてとらえ、その伝播のエネルギーを方程式の中に取り込もうとしたことが大きいと思われる。ガウスも 1840 年代には電磁力を近接作用としてとらえる見方に傾いた模様だが、もはや晩年を迎えていたガウスにとって他者に先んじて変位電流のアイデアやアンペール・マクスウェルの法則に到達することはできなかった。

参考文献

- 【1】 ガウス全集 : Carl Friedrich Gauss, *Werke*, Bde 1-12, 1863-1929.
- 【2】 ダニングトン著, 銀林浩他訳『ガウスの生涯』, 東京図書, 1976.
- 【3】 James Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 1873.