

2 次形式とその theta 級数について

難波完爾

〒 719-1117 岡山県総社市北溝手 463-3

tel/fax. 0866-90-1886

1. 平面や空間の充填と格子

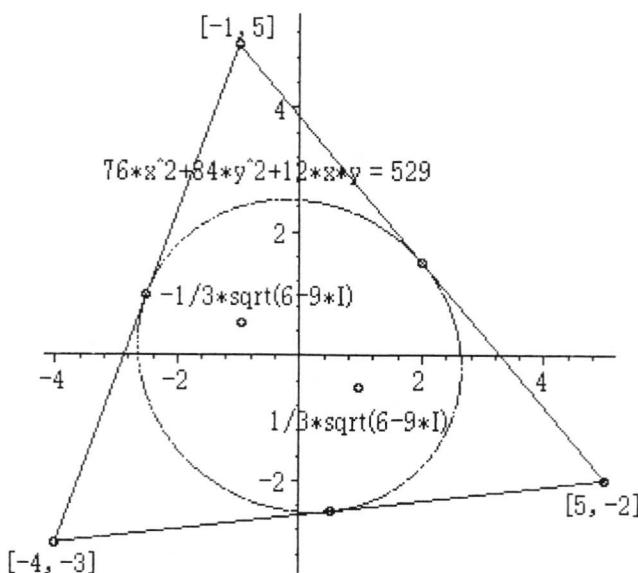
3 角形に対する単一橙円最密充填では、多項式の微分の根はもとの多項式の根で張られる多角形のなかにあるという Gauss の定理があります。3 次多項式の場合は 3 根で決定される 3 角形の最密充填橙円の 2 焦点が丁度微分である 2 次多項式の 2 根に一致します。私は Gauss はこのことに何らかの remark をしているものと思います。

例 1. $-4-3i, 5-2i, -1+5i$ の複素数を根としてもつ 3 次多項式は

$$f(x) = (x+4+3i)(x-5+2i)(x+1+5i) = x^3 + (-2+3i)x^2 - 61+123i$$

で Weierstrass form、つまり、根の和が 0 です。その微分は

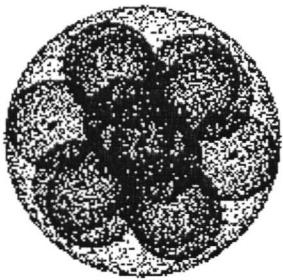
$$f'(x) = 3x^2 + (-2+3i) = 3(x-\sqrt{6-9i})/3(x+\sqrt{6-9i})/3$$



また、例えば、13 球の問題(13 tadon packing)で代表されるような球充填(sphere packing)に関する多くの問題があります。

下の絵は、直径 3 の球のなかに直径 1 の球を 13 個接点を除いて重ならないように配置したものです。この場合は原点を中心をもつ直径 1 の球と原点をとおる(水平)平面上に、他に 6 個の球が収まっています。水平面と平行な上下の二面上に 3 個づつの球が接していますが、この 3 個の位置には各々 2 種の自由さがあります。

上記のものは自然に、3 次元空間の(單一直径、最密)球充填(sphere packing)に拡張できます。つまり、平面の(單一直径)円充填から生ずる球充填の上下の平面に球を置く充填に拡張できます。



しかし、直ぐ上の平面上の球の配置には角度 60° の自由さがあり、2 層隔てた配置が同じか異なるかの二通りが可能である。結果として特定平面に平行な平面上に 2 進数を code する符号をのせることができます。現実の物質の結晶ではどのように成っているのか興味があります。異なる層の境界線とか衝撃に対してどのように変化するのかなど興味深いと思います。

例えば、この場合の格子 (lattice) の行列の一例は ($\sqrt{2}$) 倍していますが

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3}/ \end{pmatrix} \quad \text{gram}(A) = {}^t A A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

で $\det(A) = 2$ です。勿論、3-次元の場合は、この砲丸(炭団、たどん)積みが最密球充填 (spheare packing) であることが証明されています。現状では

Maria Viazovska (Notices AMS, vol.64, No.2, Feb. 2017)

による 8 次元の場合が E_8 -lattice が最密球充填を与えることが証明され、これを受けて彼女と共同研究で 24 次元の場合、Leech lattice Λ_{24} が 24 次元最密球充填を与えることが、Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Dadochenko によって証明されています。現状で証明されているのは 2, 3, 8, 24 次元

dim	lattice	density
2		$\pi/\sqrt{12} = 0.9068997$
3		$\pi/\sqrt{18} = 0.7404805$
8	E_8 lattice	$\pi^{12}/384 = 0.2536695$
24	Leech lattice Λ_{24}	$\pi^{12}/12! = 0.0019296$

であり、現在も 4-次元の場合も証明されていません。 D_4 が恐らく最密球充填の解を与えるであろうことは大方の予想です。 $d = m^2 - 1$ という意味で 15 次元の場合も興味ある対象です。尚、同記事の現在知られている密度記録は

n	density	form
1	1	
2	0.906899682	$\pi\sqrt{3}/6$
3	0.740480489	$\pi\sqrt{2}/6$
4	0.616850275	$\pi^2/16$
5	0.465257613	$\pi^2\sqrt{2}/30$
6	0.372947545	$\pi^3\sqrt{3}/144$
7	0.295297873	$\pi^3/105$
8	0.253669507	$\pi^4/384$
9	0.145774875	$\pi^4\sqrt{2}/945$

などであり、4次元では単位球の体積は

$$V = (2\pi)^2/8 = \pi^2/2 = 4.934802202$$

である。この表、現在の時点での、著者の意見での最大値

$$D = \pi^2/16$$

については、単位球との比は

$$V/D = (\pi^2/2)/(\pi^2/16) = 8$$

である。恐らく、著者の想定している例の一つは、単位球による充填を想定して、長さ 2 のベクトル(従って平方は 4)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

であろうと思われる。この場合 $|A| = \det(A) = 64 = 8^2$ である。

$$B =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の Grammian は、

$$A = {}^t B B, \quad |B| = 8$$

を充たしている。3次元の場合の、通常の「炭団、≠すしづめ」packing

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & \sqrt{3}/3 & 2\sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}$$

では、単位球の体積 $V = 4\pi/3$ に対して、基本 lattice の体積は $D = 4\sqrt{2}$ であるから、比は

$$V/D = (4\pi/3)/(4\sqrt{6}) = \pi\sqrt{2}/6 = 0.740480489$$

となっている。しかし、このような、形式的な tadan-packing は 4 次元では

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3}/3 & 2\sqrt{6}/3 & 0 \\ 1 & \sqrt{3}/3 & 1/\sqrt{6} & \sqrt{10}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{6}/3 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{10}/2 \end{pmatrix}$$

であり、基本 lattice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3}/3 & 2\sqrt{6}/3 & 0 \\ 1 & \sqrt{3}/3 & 1/\sqrt{6} & \sqrt{10}/2 \end{pmatrix}$$

の体積、つまり、B の行列式について

$$|B| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} = 8.944271912$$

であり、充填率は

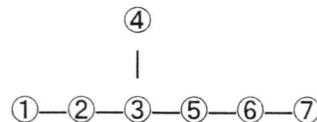
$$(\pi^2/2)/(4\sqrt{5}) = \sqrt{5}\pi^2/40 = 0.5517276588$$

となり、最初の場合の

$$\pi\sqrt{2}/6 = 0.616850275 > \sqrt{5}\pi^2/40 = 0.5517276588$$

を充たしているので、最初の方が充填率が高い。つまり、3 次元までの方針は 4 次元では通用しないのである。

E_8 -lattice は Dinkin diagram



で、これは正八面体(金剛石,diamond)の展開図のような図形で丸数字の場所に 2 を、結ばれた線の番号の成分に-1 をおいた正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

のような行列です。固有多項式(characteristic polynomial)は

$$x^8 - 16x^7 + 105x^6 - 364x^5 + 714x^4 - 784x^3 + 440x^2 - 96x + 1$$

$$\text{gal} = 4[\times]2$$

これは monic な偶数次の交代係数(alternating sign coefficient)な多項式ですから負の根はありません。対称行列の根はすべて実数ですから根はすべて正で行列は正值行列です。具体的には

$$[0.01095620926, 0.5137103490, 1.186526714, 1.584176618,$$

1.415823382, 2.813473286, 3.486289651, 3.989043791]

であり最小の固有値はおよそ 1/100 です。

従って実数の範囲では対称行列 $A = \text{gram}(T) = {}^t T T = T^2$, ${}^t T = T$ となるものは存在しますが、半整数対称行列の範囲では平方根は存在しないと思います。

この行列を grammian とする行列の例は半整数(half-integer)成分の half-parity(spin matrix)行列

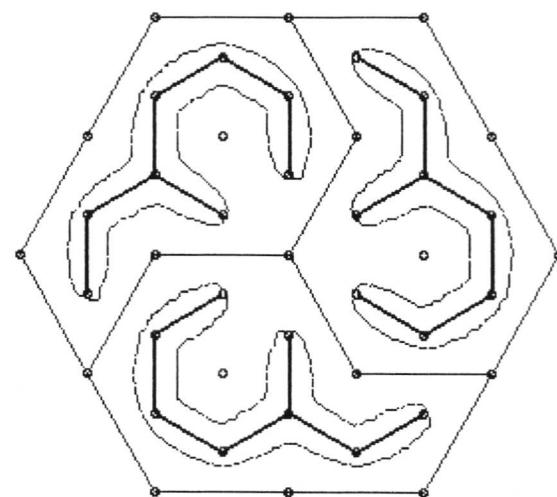
$$B = 1/2 \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \text{gram}(B) = {}^t B B$$

$$\text{charpoly}(B, x) = (x^2 - x + 1)(x - 1)^3(x + 1)^3$$

です。この場合は固有多項式の複素根は ± 1 (3重), $(1 \pm \sqrt{-3})/2$ ですが、一般にはもっと複雑です。このような行列の総数は知りませんがかなり多く存在します。 $(x-1)(x^7+2x+1)$ なども固有多項式の例です。以下の図は E_8 の Dinkin diagram をはちす(蓮、蜂巣)にデザインしたものです。



天斛八星(北斗七星からの造語、升(ます, measure)を二つ繋いでいる)これを三個繋ぐと非常に対称性の高いグラフができる。それは輪を含みもう木構造(tree structure)ではないがこの2次形式も一応検討の価値はあると思う。うつほ、藏開中では、鎖(しやう)については、(仲忠)いといかめしき鎖なり、引きくツロがして見給へば開きぬ。蜂巣については、蜂巣のごとく生みひろぐめり、で何か鎖(key, hock, chain)や充填(packing)を連想させ

る表現です。

尚、 E_8 の theta 関数

$$\Theta_{E_8}(x) = \sum_{z \in E_8} \exp(\pi i E_8[z]x) = \sum a_n q^n$$

$$a_n = \#\{z \in E_8 : E_8[z] = n\}, \quad q = \exp(\pi i x)$$

については、(行列と theta 関数の習慣的な記号が一部衝突するが)

$$E_8(x) = 1 + 240x + 2160x^2 + 6720x^3 + 17520x^4 + 30240x^5 + 60480x^6 + 82560x^7 + 140400x^8 + \dots$$

と一致する。例えば、第 2, 3 項の 2160, 6729 を得るのには $E_8[z] = z^2 E_8[z]$ の $|z|^2 \leq 10, 12$ (9, 11 では不十分) の範囲での計算が必要です。

$n = 24$ の Leech lattice Λ_{24} については

次の場合は拡張ゴーレイ・コード (extended Goray Code) やリーチ・ラティス (Leech lattice) と関係しますが

$GI =$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

が extended-Goray Code の生成元で、全体で $2048 = 2^{11}$ 個の元からなり、異なる語 (word) の間の最小距離、つまり、ハミング距離 (Hamming distance) は 8 で 3-bit の訂正能力 (error correcting power) のある符号系です。

$K =$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$K^2 = 12I, \quad 'K = K$$

これは 1980 年代初頭にボエジャー宇宙船(Voyager spacecraft)が鮮やかな木星や土星の写真を送信してきたときに用いられたものです。

この行列の最初の 12 次の正方行列の成分を ± 1 に写した、つまり、 $2x-1$ で成分ごとに変換したものは対称行列(symmetric matrix)であり I は単位行列(unit matrix)である。

$$M = 1/2 \cdot$$

$$\begin{pmatrix} K & 2I \\ 2I & K \end{pmatrix}$$

で定義される 24-次対称行列を考えると、その固有多項式は

$$(x^2-4x-8)^6(x^2+4x-8)^6 = (x+2-2\sqrt{3})^6(x+2+2\sqrt{3})^6(x-2-2\sqrt{3})^6(x-2+2\sqrt{3})^6$$

であり、勿論、正定値行列ではありません。この行列の平方は

$$M^2 =$$

$$\begin{pmatrix} 4I & K \\ K & 4I \end{pmatrix}$$

のような対称行列で対角線上の元は 4 です。固有多項式は

$$(x^2-8x+4)^{12}$$

であり、 $|M| = 2^{24}$ です。ここで主題は対称行列

$$H =$$

$$\begin{pmatrix} G & I \\ I & G \end{pmatrix}$$

です。固有多項式は

$$(x^2-4x-16)(x^2-8x-4)(x^2-2x-2)^5(x^2+2x-2)^5$$

であり、これも正定値行列ではありません。

$$L = H^2/2 =$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccc} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{ccccccccccccccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \end{array} \right|$$

$(x^2-24x+64)(x^2-36x+4)(x^2-4x+1)^{10}$

問題はこの正定値 2-次形式(positive definite binary-form)のデータ級数(theta-series)の非自明項の次数の集合が {4, 6, 8, …} のような 2 を除く偶数の全体となることです。それは

$$L[\mathbf{x}] = {}^t \mathbf{x} L \mathbf{x} = 2$$

となる整数ベクトル \mathbf{x} が存在しないことです。

24 次元空間の単位球の体積は

$$\pi^{12}/12! = 0.001929574313$$

で細密充填密度と一致している。これは Leech lattice Λ_{24} の行列式が 1 であることを意味しています。 $|L| = 256 = 2^8$ ですから Λ_{24} には遙かに及ばない場合です。

ここで、基本的 theta 関数の例を挙げておきましょう。

$$\begin{aligned} E_4(x) = & 1 + 240x + 2160x^2 + 6720x^3 + 17520x^4 + 30240x^5 + 60480x^6 + 82560x^7 + 140400x^8 \\ & + 181680x^9 + 272160x^{10} + 319680x^{11} + 490560x^{12} + 527520x^{13} + 743040x^{14} \\ & + 846720x^{15} + 1123440x^{16} + 1179360x^{17} + 1635120x^{18} + 1646400x^{19} + 2207520x^{20} + \dots \\ E_6(x) = & 1 - 504x - 16632x^2 - 122976x^3 - 532728x^4 - 1575504x^5 - 4058208x^6 - 8471232x^7 \\ & - 17047800x^8 - 29883672x^9 - 51991632x^{10} - 81170208x^{11} - 129985632x^{12} \\ & - 187132176x^{13} - 279550656x^{14} - 384422976x^{15} - 545530104x^{16} - 715608432x^{17} \\ & - 986161176x^{18} - 1247954400x^{19} - 1665307728x^{20} + \dots \end{aligned}$$

が生成元です。

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= E_4(x)^3 - E_6(x)^2 = 1728 \cdot \\ &x(1-24x+252x^2-1472x^3+4830x^4-6048x^5-16744x^6+84480x^7-113643x^8-115920x^9+534612x^{10} \\ &-370944x^{11}-577738x^{12}+401856x^{13}+1217160x^{14}+987136x^{15}-6905934x^{16}+2727432x^{17}+\dots) \\ &= 1728 \cdot x \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} (1-x^n) \right)^{24} = 1728 \cdot \eta(x)^{24} \\ \eta(x) &= x^{1/24} \prod_{n \in \mathbb{N}} (1-x^n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n x^{1/24(6n+1)^2}, \\ \prod_{n \in \mathbb{N}} (1-x^n) &= 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\dots \end{aligned}$$

であり、また、j-invariant は

$$\begin{aligned} j(x) &= 1728 \cdot E_4(x)^3 / (E_4(x)^3 - E_6(x)^2) = \\ &1/x + 744 + 196884x + 21493760x^2 + 864299970x^3 + 20245856256x^4 + 333202640600x^5 \\ &+ 425202330096x^6 + 44656994071935x^7 + 401490886656000x^8 + 3176440229784420x^9 \\ &+ 22567393309593600^{10} + 146211911499519294x^{11} + 874313719685775360x^{12} + \dots \\ x &= q = \exp(2\pi i \tau) \end{aligned}$$

で与えられ、Leech lattice Λ_{24} の theta 級数 $\Theta_{\Lambda_{24}}$ は次の式で与えられます。

$$\begin{aligned}\Theta_{\Lambda_{24}} = & (7E_4(x)^3 + 5E_6(x)^2)/12 = \\ & 1 + 196560x^2 + 16773120x^3 + 398034000x^4 + 4629381120x^5 + 34417656000x^6 + 187489935360x^7 \\ & + 814879774800x^8 + 2975551488000x^9 + 9486551299680x^{10} + 27052945920000x^{11} + 70486236999360x^{12} \\ & + 169931095326720x^{13} + 384163586352000x^{14} + 820166620815360x^{15} + 1668890090322000x^{16} \\ & + 3249631112232960x^{17} + 6096882661243920x^{18} + 11045500816896000x^{19} + \dots\end{aligned}$$

このように、 $\Delta(x)$, $\Theta_{\Lambda_{24}}$ は $E_4(x)^3$, $E_6(x)^2$ の一次結合で、初項が $0+1728x$, $1+0x$ の特別の場合に相当しています。

$$\begin{aligned}f(x) = \Delta(x)/1728 = \\ x(1 - 24x + 252x^2 - 1472x^3 + 4830x^4 - 6048x^5 - 16744x^6 + 84480x^7 - 113643x^8 - 115920x^9 + 534612x^{10} \\ - 370944x^{11} - 577738x^{12} + 401856x^{13} + 1217160x^{14} + 987136x^{15} - 6905934x^{16} + 2727432x^{17} + \dots)\end{aligned}$$

の逆関数は

$$\begin{aligned}f^{-1}(x) = x + 24x^2 + 900x^3 + 40352x^4 + 1994322x^5 + 104816880x^6 + 5747466920x^7 + 325077729600x^8 \\ + 18826860841119x^9 + 1110900168420264x^{10} + 66547088543789532x^{11} + 4036419643768799328x^{12} \\ + 247405021070280491110x^{13} + 15299980644645295780560x^{14} + 953473460271200880706424x^{15} \\ + 59817824263728235510631872x^{16} + 3774890348020603311318008523x^{17} + \dots\end{aligned}$$

です。自明なことかも知れませんが、 $f(g(x)) = x$ の解を求めれば $g(f(x)) = x$ の解でもある(当然)ですが不思議です。ついでながら、

$$\exp(\pi i \sqrt{163}) = e^{\pi i \sqrt{163}} =$$

262537412640768743.999999999999250072597198185688879353856337336990862707537410 …

と j の関係についても少し記しておく。 $j(x) = 1/x + 744 + 196884x + \dots$ に於いて、

$$n = 262537412640768000 = 2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 23^3 \cdot 29^3$$

$$n+1728 = 262537412640768000 + 1728 = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 19^2 \cdot 127^2 \cdot 163$$

はよく知られている数です。類数 1 の虚 2 次体を生成する素数や Mersenne の素数が登場します。今、 $x = 1/n$ を考えると、 $+196884$ の符号を反転して。

$$1/x + 744 - 196884x = n + 744 - 196884/n =$$

262537412640768743.99999999999925007259719818568887935385633733699086270753741 …

262537412640768743.9999999999992500725971981832518350356637482503553107361183 …

$$= \exp(\pi i \sqrt{163})$$

となり、小数点以下 26 位まで一致しています。興味深いのは、更に、高位まで整数係数で近似すると、

$$\exp(\pi i \sqrt{163}) = n + 744 - 196884/n + 167975456/n^2 - 180592706130/n^3 + \dots$$

が得られます。一般項はどうでしょうか。

勿論、2 次以上の整数係数の絶対値は

$$1/x + 744 + 196884x + 21493760x^2 + 864299970x^3 + 20245856256x^4 + 333202640600x^5 + \dots$$

のように、例えば、 $21493760 \neq 167975456$ です。

2. $\eta(x)$ と橙円曲線

$$\eta(x)\eta(qx)\eta(rx)\eta(sx), \quad k = 24/(1+q+r+s)$$

の形で表現できる橙円曲線の(実験)例を挙げておきます。これで尽くされているかどうか

検討が必要です。

$\eta(x)\eta(qx)\eta(rx)\eta(sx)$	k	$y^2 = x^3 + ax + b$	typical form	$-4a^3/27b^2$
[1, 1, 1, 1]	6	$x^3 + n^3$, $x^3 - 15n^2x + 22n^3$	$x^3 + 1$ $x^3 - 15x + 22$	$5^3/11^2$
[1, 1, 2, 2]	4	$x^3 - n^2x$ $x^3 - 11n^2x + 14n^3$	$x^3 - x$ $x^3 - 11x + 14$	$11^3/(3^3 \cdot 7^2)$
[1, 1, 3, 3]	3	$x^3 + 2n^3$ $x^3 - 120n^2x + 506n^3$	$x^3 + 2$ $x^3 - 120x + 506$	$2^9 \cdot 5^3/(11^2 \cdot 23^2)$
[1, 1, 5, 5]	2	$x^3 - 12n^2x + 11n^3$ $x^3 + 33n^2x + 74n^3$	$x^3 - 12x + 11$ $x^3 + 33x + 74$	$2^8/11^2$ $-11^3/37^2$
[1, 1, 2, 8]	2		$x^3 + 6x + 20$ $x^3 - 21x + 34$	$-2/5^2$ $7^3/17^2$
[1, 1, 1, 9]	2		$x^3 + 4$	
[1, 2, 3, 6]	2		$x^3 + 6x + 7$ $x^3 - 39x + 70$ $x^3 - 219x + 1190$	$-2^5/7^2$ $13^3/(5^2 \cdot 7^2)$ $73^3/(5^2 \cdot 7^2 \cdot 17^2)$
[1, 1, 11, 11]	1		$x^3 - 12x + 38$	$2^6/19^2$
[1, 2, 7, 14]	1		$x^3 - 75x + 506$	$5^6/(11^2 \cdot 23^2)$
[1, 3, 5, 15]	1		$x^3 - 3x + 322$	$1/(7^2 \cdot 23^2)$

3. 有限体と $\eta(x)$

有限体上の q -階乗 (q -factorial) について記す。標数 (characteristic number) 0 の体での η 関数 (η -function) については、よく知られた通り

$$x^{1/24} \prod_{n \in \mathbb{N}} (1-x^n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{1/24(6n+1)^{\wedge}}$$

である。有限(素)体 $p = F_p = GF(p)$ の定義多項式は

$$x-x^p = x(1-x^{p-1})$$

であるから、無限積

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} (1-x^n) = (1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^{p-2})(1-x^{p-1}) \cdots$$

は多項式としては意味をなさないが有限体での部分積

$$\eta(x) = (1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^{p-2}) \bmod 1-x^{p-1}$$

は意味をもっている。

例 $p = 67$

この場合、原始根 (primitive root) の一つは $q = 2$ であり、 $p-1 = 66$ の既約剰余、つまり、 $p-1$ と互いに素 (relatively prime) なものは

$$[1, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 65]$$

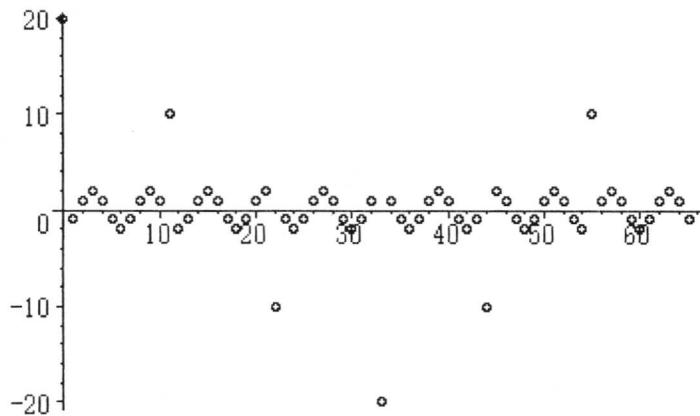
である。

$$\begin{aligned} \eta(x) &= (1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^{65}) \bmod 1-x^{66} = \\ &-x^{65} + x^{64} + 2x^{63} + x^{62} - x^{61} - 2x^{60} - x^{59} + x^{58} + 2x^{57} + x^{56} + 10x^{55} - 2x^{54} - x^{53} + x^{52} + 2x^{51} + x^{50} - x^{49} - 2x^{48} - x^{47} + x^{46} + 2x^{45} - 10x^{44} \\ &- x^{43} - 2x^{42} - x^{41} + x^{40} + 2x^{39} + x^{38} - x^{37} - 2x^{36} - x^{35} + x^{34} - 20x^{33} + x^{32} - x^{31} - 2x^{30} - x^{29} + x^{28} + 2x^{27} + x^{26} - x^{25} - 2x^{24} - x^{23} - 10x^{22} \end{aligned}$$

$$+2x^{21}+x^{20}-x^{19}-2x^{18}-x^{17}+x^{16}+2x^{15}+x^{14}-x^{13}-2x^{12}+10x^{11}+x^{10}+2x^9+x^8-x^7-2x^6-x^5+x^4+2x^3+x^2-x+20$$

以下の図は係数のグラフである：

coefficient of $\eta(x)$



以下、順次、関数の係数変換(coefficient transform, Vandemonde transform, finite Fourier transform)

$$h_1(x) = \eta(x)[2](x)$$

を求める。ここに、係数変換は、 p を素数とし、 q をその原始根(primitive root)とするとき、 $p-2$ 次多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-2} x^{p-2}$$

に対し

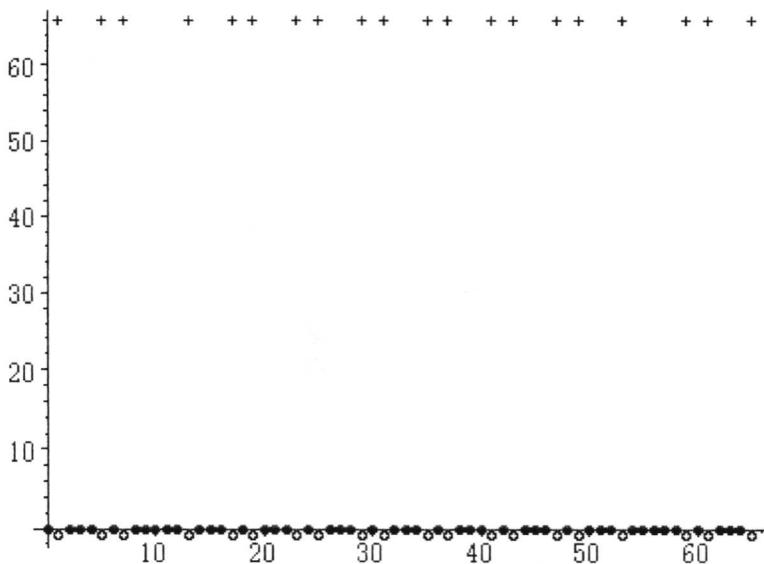
$$f(x)[q](x) = (1-x^{p-1})(a_0/(1-x) + a_1/(1-qx)x + \cdots + a_{p-2}/(1-q^{p-2}x)x^{p-2}) = f(1) + f(q)x + \cdots + f(q^{p-2})x^{p-2}$$

を対応させる線形変換で Fourier-property, つまり、4 乗して元に戻る($x^4 - 1 = 0$)作用素です。

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \eta(x)[2](x) = \\ &-x^{65} - x^{61} - x^{59} - x^{53} - x^{49} - x^{47} - x^{43} - x^{41} - x^{37} - x^{35} - x^{31} - x^{29} - x^{25} - x^{23} - x^{19} - x^{17} - x^{13} - x^7 - x^5 - x \end{aligned}$$

が得られる。これは既約剰余の次数の項のみの多項式に-1 を掛けたもので、この式(最初の計算では $p = 31$ の場合であったが…))を見たとき飛び上がるほど驚いた。2017.06.24.13:30

さなえたの さなだのもとを たずねれば こののはのさきの みずのかがやきさて、上記の関数の 1 の原始 $p-1$ 乗根(primitive $p-1$ st root of unit) $r = e^{2\pi i/(p-1)}$ での値との比較のグラフを記す。有限体の方は・で複素数の方は+で記してある。既約剰余の場所では有限体では-1 であるが、複素数では $p-1 = 66$ になっている。



10桁の精度での計算では、

$$[[0, 0], [1, 66.00000007-0.0000001770i], [2, 0.000000127-0.00000063i],$$

$$[3, -0.000000637+0.000000410i], [4, -0.000000531+0.000000446i],$$

$$[5, 66.00000031+0.000000239i], [6, -.0100000330+0.000000186i],$$

$$[7, 66.00000030-0.000000999i], [8, -0.000002083-0.000001601i],$$

$$[9, -0.000001741-0.000000613i], [10, -0.000001398+0.000000878i], \dots$$

=

$$[[0, 0], [1, 66], [2, 0], [3, 0], [4, 0], [5, 66], [6, 0], [7, 66], [8, 0], [9, 0],$$

$$[10, 0], [11, 0], [12, 0], [13, 66], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 66], [18, 0], [19, 66],$$

$$[20, 0], [21, 0], [22, 0], [23, 66], [24, 0], [25, 66], [26, 0], [27, 0], [28, 0], [29, 66],$$

$$[30, 0], [31, 66], [32, 0], [33, 0], [34, 0], [35, 66], [36, 0], [37, 66], [38, 0], [39, 0],$$

$$[40, 0], [41, 66], [42, 0], [43, 66], [44, 0], [45, 0], [46, 0], [47, 66], [48, 0], [49, 66],$$

$$[50, 0], [51, 0], [52, 0], [53, 66], [54, 0], [55, 0], [56, 0], [57, 0], [58, 0], [59, 66],$$

$$[60, 0], [61, 66], [62, 0], [63, 0], [64, 0], [65, 66]]$$

のように、実数の整数であることを意味している。現実に

$$\gcd(h(x)-66, x^{66}-1) = \\ x^{20} + x^{19} - x^{17} - x^{16} + x^{14} + x^{13} - x^{11} - x^{10} - x^9 + x^7 + x^6 - x^4 - x^3 + x + 1$$

であり、これは、原始 $p-1$ 乗根の円分多項式(cyclotomic polynomial)である。残りの因子は値 0 に応ずる訳だから

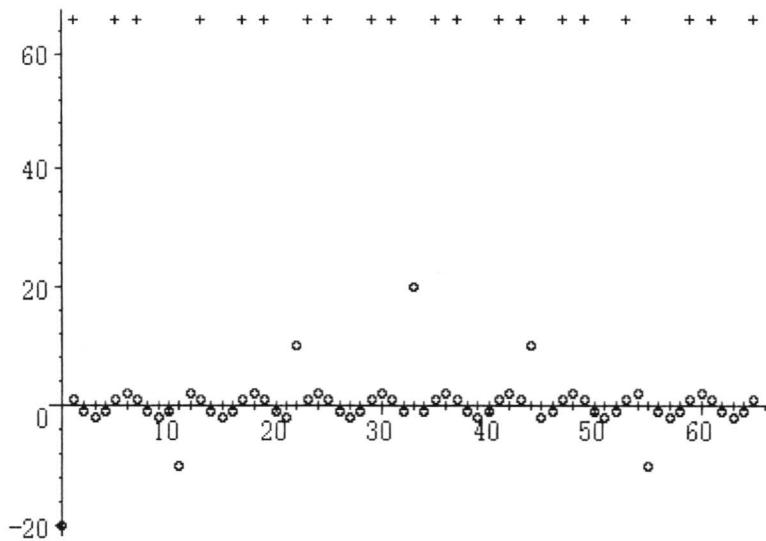
$$h(x) = (x^{66}-1)/(x^{20} + x^{19} - x^{17} - x^{16} + x^{14} + x^{13} - x^{11} - x^{10} - x^9 + x^7 + x^6 - x^4 - x^3 + x + 1)$$

あるいは、残りの円分多項式の積、つまり、非原始 $p-1$ 乗根の多項式の積である。有限体では

$$h(x) - (p-1) = h(x) + 1 = 0$$

から、絶対値最小剰余(least absolute value residue, lavr)として -1 が値になった訳である。

$$h_2(x) = \eta(x) [2]^2(x) = \\ -x^{65} - x^{61} - x^{59} - x^{53} - x^{49} - x^{47} - x^{43} - x^{41} - x^{37} - x^{35} - x^{31} - x^{29} - x^{25} - x^{23} - x^{19} - x^{17} - x^{13} - x^7 - x^5 - x^3$$



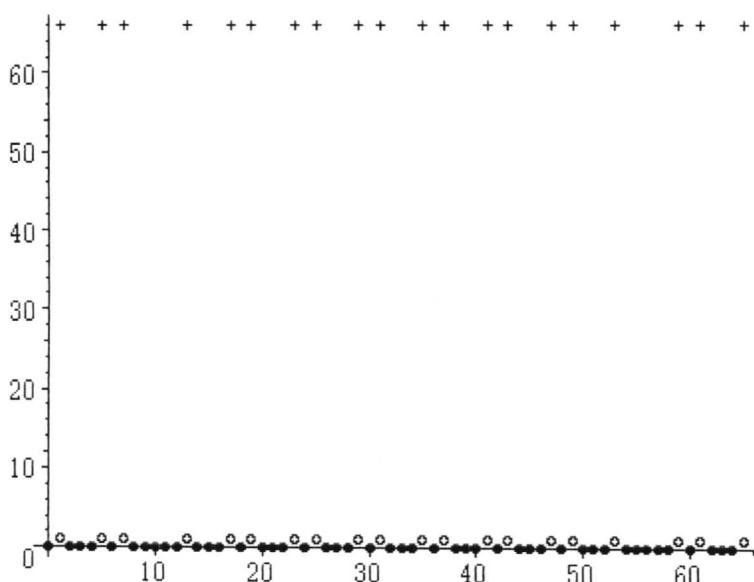
$$\begin{aligned}
 & x^{65} - x^{64} - 2x^{63} - x^{62} + x^{61} + 2x^{60} + x^{59} - x^{58} - 2x^{57} - x^{56} - 10x^{55} + 2x^{54} + x^{53} - x^{52} - 2x^{51} - x^{50} + x^{49} + 2x^{48} + x^{47} - x^{46} - 2x^{45} + 10x^{44} \\
 & + x^{43} + 2x^{42} + x^{41} - x^{40} - 2x^{39} - x^{38} + x^{37} + 2x^{36} + x^{35} - x^{34} + 20x^{33} - x^{32} + x^{31} + 2x^{30} + x^{29} - x^{28} - 2x^{27} - x^{26} + x^{25} + 2x^{24} + x^{23} + 10x^{22} \\
 & - 2x^{21} - x^{20} + x^{19} + 2x^{18} + x^{17} - x^{16} - 2x^{15} - x^{14} + x^{13} + 2x^{12} - 10x^{11} - x^{10} - 2x^9 - x^8 + x^7 + 2x^6 + x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 20
 \end{aligned}$$

従って、係数の集合は

$$[-20, -10, -2, -1, 1, 2, 10, 20]$$

である。

$$\begin{aligned}
 h_3(x) = \eta(x) [2]^3(x) = \\
 x^{65} + x^{61} + x^{59} + x^{53} + x^{49} + x^{47} + x^{43} + x^{41} + x^{37} + x^{35} + x^{31} + x^{29} + x^{25} + x^{23} + x^{19} + x^{17} + x^{13} + x^7 + x^5 + x
 \end{aligned}$$



であって、これは $h_1(x) = \eta(x) [2](x)$ の符号を変えたものである。つまり、

$$h_3(x) + h_1(x) = 0$$

である。元々、係数変換の自乗は、Vandermonde 行列の自乗であり、次数(= 番号)は原始根の指数なのだから、変数の値の側から見れば $1/x$ を代入することを意味している。した

がって、

$$\eta(1/x) = \eta(x)[2]^2(x) = -\eta(x)$$

は、反転公式を意味している。恐らく、最初の原始根 q, r の選び方に関わらず

$$\eta(x)[q](x) = \eta(x)[r](x)$$

となることが保形形式(modular form)であるとの、有限体での、対応物なのだと思う。

確かに

$$x^{65} + x^{61} + x^{59} + x^{53} + x^{49} + x^{47} + x^{43} + x^{41} + x^{37} + x^{35} + x^{31} + x^{29} + x^{25} + x^{23} + x^{19} + x^{17} + x^{13} + x^7 + x^5 + x$$

などはこの条件を満たしている。勿論、

$$h_4(x) = h_3(x)[2](x) = \eta(x)$$

と元に戻っている(確認)。

定義(definition)

$$\gcd_p(x) = \sum \{x^n : \gcd(n, p-1) = 1\}$$

$$\eta(x) = \prod_{n \in p-1} (1-x^n) = (1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^{p-2}) \pmod{(1-x^{p-1})}$$

定理(theorem)

$$\eta(x) = \gcd_p(x)[q](x), q \text{ primitive root mod } p$$

4. amalgam series

a, b の算術・幾何平均(arithmetic·geometric mean, AGM)を、ここだけの記法であるが

$$a \diamond b = \text{AGM}(a, b) = M(a, b)$$

と記す。

$$a \diamond b = b \diamond a, k(a \diamond b) = (ka) \diamond (kb)$$

等の性質がある。後半の分配法則は「平均(mean)」のもつ基本特性だと思います。

$$1 \diamond x = x(1/x \diamond 1) = x(1 \diamond 1/x), 1/\sqrt{x}(1 \diamond x) = \sqrt{x}(1 \diamond 1/x)$$

(\diamond の結合力は $+, -, \times, \div$ より弱い)、言い換えると、関数 $g(x) = 1/\sqrt{x}(1 \diamond x)$ は、関数等式

$$\diamond(x) = 1/\sqrt{x}(1 \diamond x) = \sqrt{x}(1 \diamond 1/x) = \diamond(1/x), \diamond(0) = 0, \diamond(1) = 1$$

を充たす、唯一の、1を中心、収束半径1の有理数係数幂級数表示可能な関数です。

近似式の最初の部分は

$$[1, x+1], [1+x/2, \sqrt{x+1}], [1/2+x/4+\sqrt{x+1}/2, \sqrt{(1+x/2)\sqrt{x+1}}]$$

である。これらの式の原点中心の幂級数展開は $2^{n-1}-1$ 次の項まで一致している。

$$1/2+x/4+\sqrt{x+1}/2 = 1+x/2-x^2/16+x^3/32-5x^4/256+7x^5/512-21x^6/2048+33x^7/4096+\cdots$$

$$\sqrt{(1+x/2)\sqrt{x+1}} = 1+x/2-x^2/16+x^3/32-11x^4/512+17x^5/1024-111x^6/8192+187x^7/16384+\cdots$$

であって、この場合は3番目であるから、 $2^{3-1}-1 = 4-1 = 3$ 次の係数まで、つまり、

$$1+x/2-x^2/16+x^3/32$$

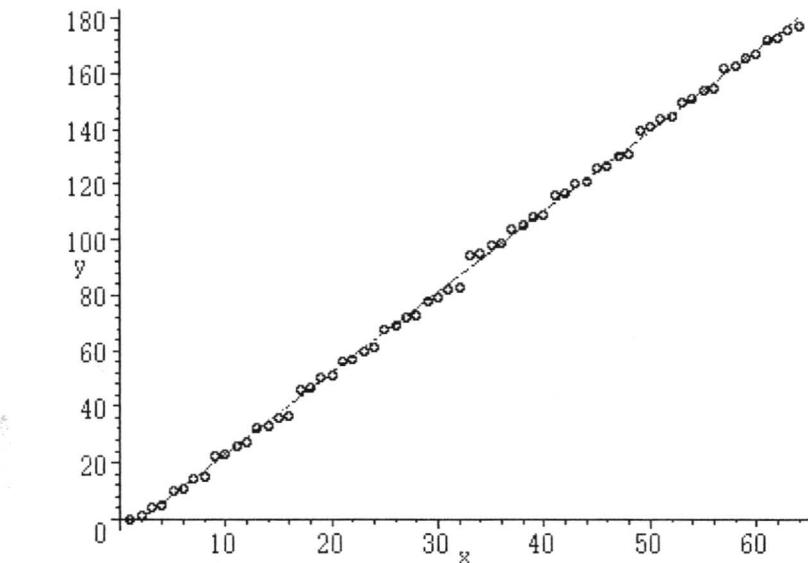
まで一致している。

以下は、 $n = 7$ の場合、つまり、 $2^7-1 = 31$ 次までの $\diamond(1+x)$ の係数を記したものである。

1, 1/2, -1/16, 1/32, -21/1024, 31/2048, -195/16384, 319/32768, -34325/4194304, 58899/8388608,
 -410771/67108864, 725515/134217728, -20723767/4294967296, 37333629/8589934592,
 -271115065/68719476736, 495514197/137438953472, -233205886357/70368744177664,
 430943899067/140737488355328, -3199978103003/1125899906842624,

5964657807435/2251799813685248, -178539994327007/72057594037927936,
 335121426695981/144115188075855872, -2523666921164889/1152921504606846976,
 4764190677167837/2305843009213693952, -577048356063146487/295147905179352825856,
 1094592245102072753/590295810358705651712,
 -8322830441317685713/4722366482869645213696,
 15851800356386516041/9444732965739290427392,
 -483941530607649649605/302231454903657293676544,
 924950347938103651879/604462909807314587353088,
 -7082478014317986390235/4835703278458516698824704,
 13577767125427748427231/9671406556917033397649408,
 -26691133705894418701925269/19807040628566084398385987584,

分子は2の幂であり、その指数は2と3の間である。



であって、回帰の直線は

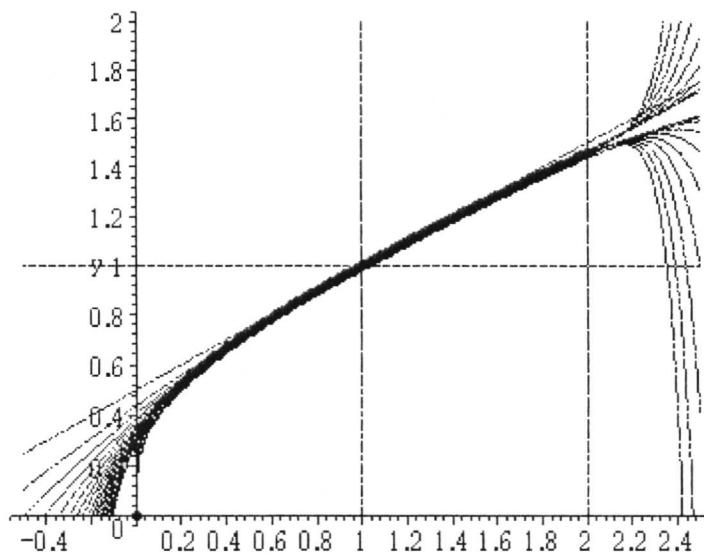
$$y = 189/65 \cdot x - 6, 189/65 = 2.907692308$$

である。以下の図は

$$f(x) = 10(1+x) = \\ 1+x/2-x^2/16+x^3/32-21x^4/1024+31x^5/2048-195x^6/16384+319x^7/32768-\cdots$$

の 20 次までの近似多項式のグラフと、算術幾何平均を定義に従って計算したものを重ねて表示したものである。1を中心には級数展開しているので、収束半径 1 の級数の $x = \pm 1$ ($1\wedge 0 = 0, 1\wedge 2 = 1.456791031$ に対応) に於ける収束は遅い。

$$f_n(x-1) = 10x, n = 1 \sim 20$$



このグラフから推察できることは、この級数の収束半径は 1 であるということです。

係数の分母は 2 の 2 の幂ですが、分子の因数については次のようにです。

[1], [1], [1], [1], [3, 7], [31], [3, 5, 13], [11, 29], [25, 1373], [3, 29, 677], [17, 73, 331],
 [5, 7, 19, 1091], [2083, 9949], [37, 81, 12457], [5, 13, 17, 73, 3361], [9, 55057133],
 [67, 103, 191, 176927], [121, 433, 557, 14767], [11, 17, 67, 255405707],
 [3, 5, 1009, 394096981], [17, 10502352607471], [103, 859, 1823, 2077711],
 [3, 41, 46399, 442199557], [43, 33757, 3282137987], [3, 13, 31, 477293925610543],
 [19, 3019, 19082516781473], [49, 729577, 232811180281], [13, 17, 71727603422563421],
 [5, 7, 9, 560767, 2739680329601], [11, 13, 31, 89, 233, 5701, 1764914699],
 [5, 19, 29, 41, 83, 1163, 262807, 2471639], [3, 19, 43, 59, 93892960503341759],
 [29, 769, 42157, 28390496349530717], [3, 17101850967129756411517529],
 [59, 761, 8229806803, 1068859005187], [17, 41, 67, 6011053, 2710848671306213],
 [3, 73, 13441986709, 7977351449132129], [10987, 1779163, 152533531, 15206507111],
 [37, 73, 129767266661626474779626773], [5, 7, 41, 61, 487, 1237, 12857138618423051977],
 [9, 41, 73, 8263887781, 377381620413315659],
 [5, 169, 2741, 268921, 368335943, 709488769511],
 [27, 41, 25540301, 276649787, 161413742379133],
 [13, 83, 2953, 923509, 992247271, 839122835669],
 [29129, 1290151, 2025629233069261096995979],
 [311, 475657066180948779275233582125457],
 [3, 5, 13, 31, 89, 48600049, 44004814406338039319647],
 [5, 13, 19, 787, 10259, 29147, 23030401, 334470970540471],
 [13, 271, 33599, 35837, 263029302317952223853887103],
 [3, 5, 11, 13, 2437, 1792269833548487, 231989935312257139],
 [79, 97, 4723, 51829, 61843353883, 146066138121981563],
 [3, 17, 1201, 151673, 39168917713, 90805626112910539723],

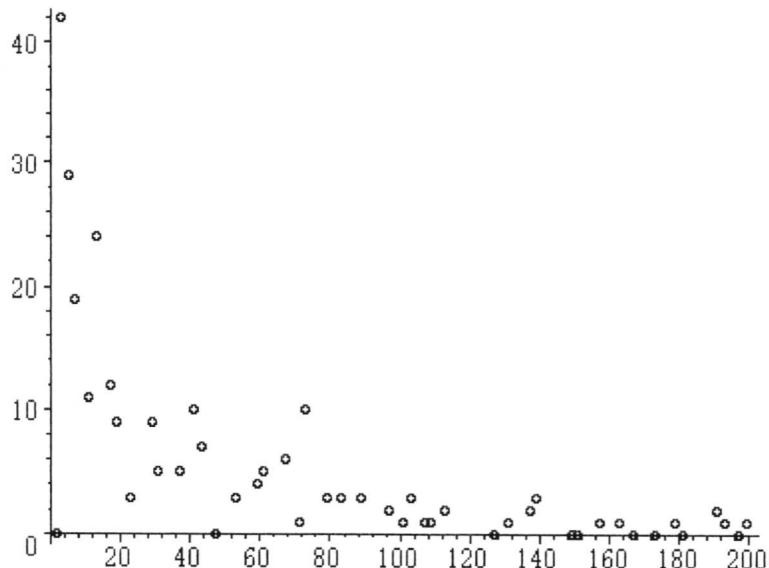
$[5, 33287, 351308010353893, 17641054745459394139643],$
 $[2521, 259517, 7995011033, 149323964809, 2577751235827],$
 $[53, 139, 243, 15014710093, 585122632271315673699789811],$
 $[59, 107, 337, 1279, 2287, 94442821373, 52282470179197727411],$
 $[5, 1361, 60624352231276922111, 9317209765750141647823],$
 $[7, 13, 73, 277, 718541782881907, 5684589301875929247830063],$
 $[3, 13, 113, 9266311, 46830124977395827, 30753030585604444609],$
 $[5, 29, 793727026002636556715796589703097100952928971],$
 $[3, 5, 7, 19, 154703292661, 924053462779, 12640314632339887540139],$
 $[7, 142309118684555680867, 7086989868235294952197518737],$
 $[11, 13, 17, 61, 112764011, 151640016499, 21817263537109344565671131],$
 $[3, 13, 41, 2027, 33482483, 999017663367614608883766096563586499]$

これらのなかには 47 次の係数

$$5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 787 \cdot 4799^2 \cdot 10259 \cdot 29147 \cdot 334470970540471/2^{131}$$

のような重複因子もあります。これは極まれな現象でしょう。勿論、これより大きな重複因子もあり得ると思います。また、素数のものは 5 番目の 31 の他は見あたりません。他のものはすべて合成数でしょうか。以下の図は級数 $1^{\diamond}(1+x)$ の n 次の項の係数の分子が素数 p で割切れるものの個数を n = 0~127 の範囲で求めたものです。

#n : numer(coeff($1^{\diamond}(1+x)$, x, n)) = 0 mod p, n = 0~127, p < 200



この範囲で、約数として現れてない素数は、

$$47, 127, 149, 151, 167, 173, 181, 197$$

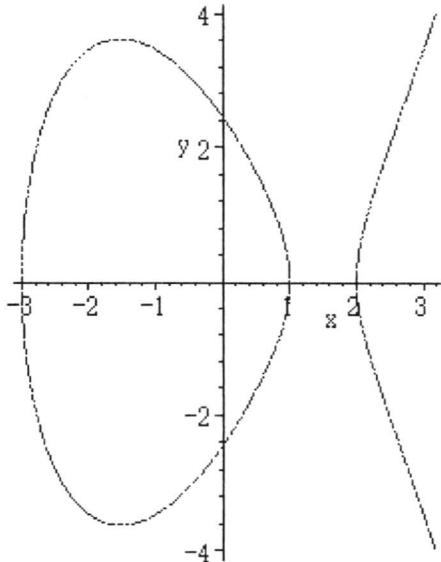
ですが、このように係数の分子の約数となり得ない素数の集合はどのようなものでしょうか。ここまで範囲ですが、p = 47 が約数として現れず、47 次の係数だけに重複因子 4799^2 があるのも印象的です。空でないとすると最小素数は何でしょうか。

私は係数を $x = 1$ を中心の級数に展開する方法で計算しましたが次数が高くなると計算が極端に困難になります。係数の効率的な計算方法の開発が期待されます。分子の素因数

分解に関しては、今は 83 次までしか知りませんが因数分解もなかなか難しい問題です。この関数は解析接続の定義域は何でしょうか。極、0 点、分岐、自然境界など興味があります。

今の立ち位置を、古典的 Weierstrass 標準形の橙円曲線

$$y^2 = (x+3)(x-1)(x-2) = x^3 - 7x + 6$$



の場合で振り返って見ましょう。Gauss によれば

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \int_a^b dx / \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)} \\ \omega_2 &= \int_b^c dx / \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}\end{aligned}$$

であり、

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 + g_2 x + g_3$$

とするとき、

$$\begin{aligned}g_2 &= \pi^4 / (3\omega_2^4) \cdot (1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} 240n^3 / (\exp(2\pi i n(\omega_1/\omega_2)) - 1)) \\ g_3 &= 2\pi^6 / (27\omega_2^6) \cdot (1 - \sum_{n \in \mathbb{N}} 504n^5 / (\exp(2\pi i n(\omega_1/\omega_2)) - 1))\end{aligned}$$

であるという。

また、数 a, b のアマルガム (amalgam, 相加相乗平均, arithmetic-geometric mean) を

$$[a_0, b_0] = [a, b], [a_{n+1}, b_{n+1}] = [(a_n + b_n)/2, \sqrt{a_n b_n}]$$

の (急速に収束する極限) として $M(a, b)$ と記す。今の記法では

$$M(a, b) = a \diamond b$$

このとき、Gauss の天才を感じる瞬間であるが

$$\omega_1 = \pi / M(\sqrt{c-a}, \sqrt{c-b}), \omega_2 = \pi i / M(\sqrt{c-a}, \sqrt{b-a})$$

であるという。従って、新たに、 π で割ったものを

$$\omega_1 = 1 / M(\sqrt{c-a}, \sqrt{c-b}), \omega_2 = i / M(\sqrt{c-a}, \sqrt{b-a})$$

とおくと、

$$\begin{aligned}g_2 &= 1 / (3\omega_2^4) \cdot (1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} 240n^3 / (\exp(2\pi i n(\omega_1/\omega_2)) - 1)) \\ g_3 &= 2 / (27\omega_2^6) \cdot (1 - \sum_{n \in \mathbb{N}} 504n^5 / (\exp(2\pi i n(\omega_1/\omega_2)) - 1))\end{aligned}$$

であることが解る。要するに、連比

$$(\sqrt{c-a} : \sqrt{c-b} : \sqrt{b-a})$$

つまり、2次元射影空間 P^2 に対応する概念なのである。今の場合は

$$a = -3, b = 1, c = 2$$

である。この場合

$$[\sqrt{c-a}, \sqrt{c-b}] = [\sqrt{5}, 1], \quad [\sqrt{c-a}, \sqrt{b-a}] = [\sqrt{5}, 2]$$

であり

$$\omega_1 = \pi/M(\sqrt{5}, 1), \quad \omega_2 = \pi i/M(\sqrt{5}, 2)$$

である。相加相乗平均の計算の経過は $[a, b, a-b]$ の形で $a-b \approx 0$ で停止という形で表示すると。収束は、所謂、自乗収束、正確な数字の桁数が倍々になる収束である：

$$M(\sqrt{5}, 1)$$

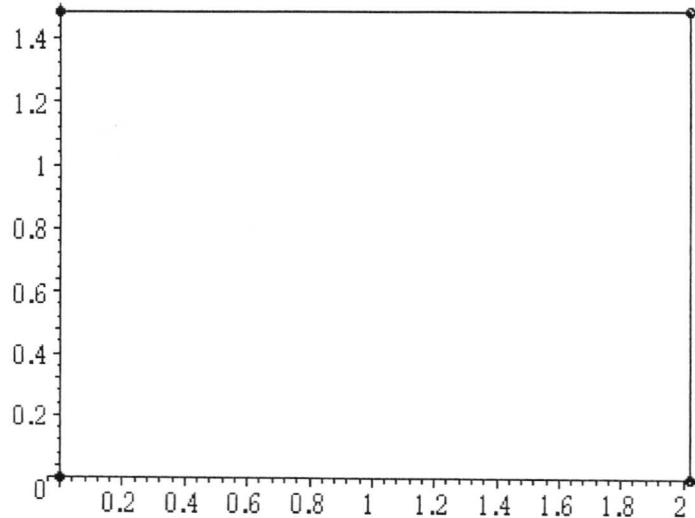
$(a+b)/2$	\sqrt{ab}	$(a+b)/2 - \sqrt{ab}$
$\sqrt{5} = [2.236067978]$	1	1.236067978
1.618033989	1.495348781	0.122685208
1.556691385	1.555482290	0.001209095
1.556086838	1.556086720	0.000000118
1.556086779	1.556086779	0.000000000

$$M(\sqrt{5}, 2)$$

$$[2.236067978, 2., 0.236067978], [2.118033989, 2.114742526, 0.003291463], \\ [2.116388258, 2.116387618, 0.000000640], [2.116387938, 2.116387938, 0]$$

であり、各々 5, 4 回で 10 桁の精度を得ている。従って

$$\omega_1 = \pi/M(\sqrt{5}, 1) = 2.018905820, \quad \omega_2 = \pi i/M(\sqrt{5}, 2) = 1.484412479i$$



が、一つの格子 (lattice) 点である。また、対の後半に、前項との差を記した形で表示する
と次のようである：

$$(1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} 240n^3 / (\exp(2\pi i n (\omega_1/\omega_2)) - 1))$$

[1, [1.046665858, 0.0466658580], [1.046738420, 0.000072561],

[1.046738468, 0.0000000476], ...]

(1- $\sum_{n \in N} 504n^5 / (\exp(2\pi i n(\omega_1/\omega_2)) - 1)$)

[1, [.9020016982, -0.0979983018], [.9013921786, -0.0006095196],

[.9013912788, -0.0000008998], [.9013912781, -0.0000000007], ...]

についても各々 3, 4 回で 10 桁の精度を得ている。従って

$$g_2 = \pi^4 / (3\omega_2^4) \cdot (1 + \sum_{n \in N} 240n^3 / (\exp(2\pi i n(\omega_1/\omega_2)) - 1)) = 6.999999912 \doteq 7$$

$$g_3 = 2\pi^6 / (27\omega_2^6) \cdot (1 - \sum_{n \in N} 504n^5 / (\exp(2\pi i n(\omega_1/\omega_2)) - 1)) = -5.999999849 \doteq -6$$

の良い近似値、つまり、元の多項式の係数が再生されている。つまり、

$$y^2 = (x+3)(x-1)(x-2) = x^3 - 7x + 6 = x^3 - g_2x - g_3$$

です。

$$E_4(x) = 1 + 240x + 2160x^2 + 6720x^3 + 17520x^4 + 30240x^5 + 60480x^6 + 82560x^7 + 140400x^8 + \dots$$

$$E_6(x) = 1 - 504x - 16632x^2 - 122976x^3 - 532728x^4 - 1575504x^5 - 4058208x^6 - 8471232x^7 - \dots$$

などの出所が、楕円積分 (elliptic integral) との (乗法的, multiplicative) 差、つまり、

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 + g_2x + g_3$$

の定数や 1 次の係数 g_2, g_3 の定数倍 (有理数, π, π^2, π^3 など π の幂) を除いたものであることが想像できると思う。勿論、

$$E_4(x) = 1 - \sum_{n \in N} 240n^3 x^n / (1-x^n) = 1 - 240 \sum_{n \in N} \sigma_3(n) x^n,$$

$$E_6(x) = 1 + \sum_{n \in N} 504n^5 x^n / (1-x^n) = 1 + 504 \sum_{n \in N} \sigma_5(n) x^n,$$

$$\sigma_m(n) = \sum_{k|n} k^m$$

である。二つの周期

$$\omega_1 = \pi/M(\sqrt{c-a}, \sqrt{c-b}), \omega_2 = \pi i/M(\sqrt{c-a}, \sqrt{b-a})$$

の関連からすると、3 根 a, b, c について、 $c-a = 1$ の形に、(線形、相似) 変換した標準形 (normal form) を考えるのが自然である。この場合は

$$\omega_1 = \pi/M(\sqrt{c-a}, \sqrt{c-b}) = \pi/(1 \diamond \sqrt{c-b}), \omega_2 = \pi i/(1 \diamond \sqrt{b-a})$$

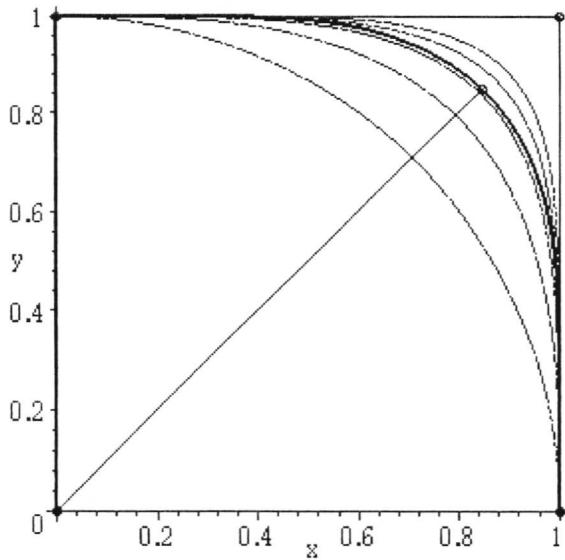
であるから、 $a < b < c, c-a = 1$ の場合は

$$\omega_1/\omega_2 = -i(1 \diamond \sqrt{b-a})/(1 \diamond \sqrt{c-b}), (\sqrt{b-a})^2 + (\sqrt{c-b})^2 = c-b+b-a = c-a = 1$$

である。

以下の図は xy -平面の第 1 象限に於ける $[1 \diamond x, 1 \diamond y]$ と、 $x^k + y^k = 1, k = 2 \sim 6$ のグラフである。

$$[1 \diamond x, 1 \diamond y], x = \sqrt{b-a}, y = \sqrt{c-b}, x^2 + y^2 = 1$$



図からは、 $x^4+y^4 = 1$ に近く、ほんの少しではあるが、明確に外側に位置するような印象である。

仮に、 $\Box(x) = 1 \diamond (1-x)$ と記すと、 $\Box(1-x) = 1 \diamond x$ である。また、 $\Box(x)$ の収束半径は 1 であり、単位円周内部では一価正則である。 $x = 1$ では値は(内部からの極限値は)0 である。有理点(実部・虚部ともに有理数の点)では $x = 0, 1$ を除いて $\Box(x)$ が有理点になることはないと思うが…。何か、様相論理(modal logic)の様相(modality)のような雰囲気です。

橢円曲線の Weierstrass 標準形表示の右辺の 3 次多項式の根の一組の差が 1 の場合は、

$$(\sqrt{c-a} : \sqrt{c-b} : \sqrt{b-a})$$

という連比を平面に射影した場合です。原点が 3 根の重心である 2 根の差が 1 の場合は

$$c-a = 1, a+b+c = 0$$

の解として、例えば、 b を助変数(parameter) として

$$c = (1-b)/2, a = (-1-b)/2$$

と表示でき、そのときの標準形を Gauss-Weierstrass 標準形と呼ぶ：

$$y^2 = x^3 + (-1-3b^2)/4 \cdot x + b(-b^2+1)/4 = x^3 + sx + t = f(x)$$

$$4s = (-1-3b^2), 4t = b(-b^2)$$

$$\det(f(x)) = f(x) \otimes f'(x) = -1/16 \cdot (3b-1)^2 (3b+1)^2$$

勿論、この場合の 1 次の項 s と定数項 t には代数的な関係

$$27t^2 = -(s+1)^2 (4s+1)$$

がある。

例 楕円曲線 $y^2 = x^3 + 31x^2 + 41x + 59$ の場合。 $x-31/3$ の変換で右辺は

$$y^2 = x^3 - 838/3 \cdot x + 49736/27$$

$$838/3 = -279.333333, 49736/27 = 1842.074074$$

になる。右辺の多項式は複素数根をもつ。それらを仮に

$$a = 9.676243189 - 1.247282427i, b = -19.35248638, c = 9.676243189 + 1.247282427i$$

とおくと、

$$\sqrt{c-a} = 1.116817992 + 1.116817992i,$$

$$\begin{aligned}\sqrt{c-b} &= 0.1157232546+5.389074266i, \\ \sqrt{b-a} &= 5.389074266+.1157232546i,] \\ \omega_1 &= \sqrt{c-a} \diamond \sqrt{b-a} = 2.970902070+.8927456049i \\ \omega_2 &= \sqrt{c-a} \diamond \sqrt{c-b} = 0.8927456049+2.970902070i \\ \omega_2/\omega_1 &= 0.5512189149+0.8343606581i \\ x &= \exp(2\pi i \omega_2/\omega_1) = 0.01583614462+0.02702464119i\end{aligned}$$

とおく。(πを含む逆数を用いた)

$$\begin{aligned}g_2 &= 1/3 \cdot \omega_2^4 \cdot E_4(x) = 279.3333352-0.0000011875i \doteq 838/3 \\ g_3 &= 2/27 \cdot \omega_2^6 \cdot E_6(x) = -1842.074092+0.0000324435i \doteq -49736/27\end{aligned}$$

であり、勿論、元の係数をよく復元している。

ここで重要なのは、1の分解(partition of unity)

$$\begin{aligned}1 &= 1/(1-x)-1/(1-x^{-1}) \\ 1/(1-x^{-1}) &= x(1+x+x^2+x^3+\cdots) = x(1/(1-x)) = 1/(1-x)-1 = (1+x+x^2+x^3+\cdots)-1\end{aligned}$$

です。要するに、

乗法の逆元を作用させて次に加法の逆元を作用させる

ということで、ユークリッドの互除法(Euclid's algorithm)の精神です。つまり、対象1を1だけ「ずらす」という、自然数の生成関数(successor, ' , +1)、つまり、作用素(operator)に変換したのです。上記の例では

$$x = \exp(2\pi i \omega_2/\omega_1) = 0.01583614462+0.02702464119i$$

の絶対値は小さいですが、 $x^{-1} = \exp(-2\pi i \omega_2/\omega_1)$ の絶対値は大きく $1/(1-x^{-1})$ の和の極限は速く収束するという仕掛けです。

これは、アマルガム(amalgam, 相加相乗平均)が解析的(analytic)なことからの結論、つまり、実数上の関数が複素数の関数に自動的に拡張されることから来ている。従って、分岐や自然境界に関する問題は魅力的な研究対象である。以下は、「見ゆ」、「聞こゆ」など、協同的視点からの連想です。

夢はゆめとて 消えるがいのち ゆめゆめ夢ゆ などかとどめむ
(dream, its life is to cease to exist, place let it free not from being in a dream)
みちなるみちに よりそいて つぼみはぐくむ ふゆにまどろむ

参考文献

- [1] 難波完爾：楕円位数多項式の有限フーリエ変換と対称巡回対合、第27回数学史シンポジウム(2016)報告集、津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 38, 2017. pp. 213-233
- [2] 難波完爾：有限フーリエ変換と有限高速フーリエ変換、2016年度応用数学合同研究集会 予稿集、龍谷大学瀬田キャンパス、主催：日本数学会応用数学分科会 協賛 日本応用数理学会、龍谷大学理工学部 2016, pp. 88-93
- [3] Henry Cohn: A Conceptual Breakthrough in Sphere Packing, Notices of the American Mathematical Society, Vol. 64, No. 2, Feb. 2017, pp. 102-115
- [4] Anthony W. Knapp, *Elliptic Curves*, Mathematical Notes 40, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992

[5] Pierre Colmez: Tate's Work and the Serre-Tate Correspondence, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 52, No. 4, Oct. 2017, pp. 559-573

[6] 高木貞治：初等整数論講義、共立出版株式会社、昭和 8 年 9 月 10 日八版印刷発行

[7] 河野多麻 校注：宇津保物語ニ、日本古典文学大系 11, 岩波書店 昭和 36 年, 藏開上中, p.259, 398

以下の資料は、先人達の遺した大切な「おもい」の歴史のひとひらです。

初等整數論講義

東京帝國大學名譽教授・理學博士

高木貞治

著

凍えし教徒

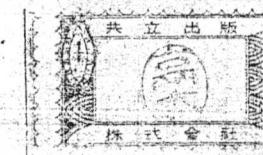
ときは五月

今咲かざれば

とはに咲かじ

初等整數論講義

定價 55 圓



昭和6年3月10日印 刷

昭和6年3月15日發 行

昭和21年9月10日八版印刷發行

著者 高木貞治

代表者

發行者 南條初五郎

東京都神田區駿河臺三丁目九番地

印刷者 大野治輔

東京都神田区駿河台三丁目九番地

印刷所 二葉印刷株式會社

東京都王子区稻荷町一ノ丁〇八番地

發行所 東京都神田區駿河臺三丁目九番地
電話 神田 (15) 1518・2624 番

共立出版株式會社

(頭定規格 A5判) 配給元 東京都神田区駿河町二ノ九 日本出版配給株式會社

谷山豊