

P.レヴィの数学について（続き）

飛田武幸

平成 26 年 2 月 3 日

1 始めに

P.Lévy の数学、特に確率論について、再度報告したい。

確率論における Lévy の業績については種々の評価がある。negative な評価には、その原因も推察できるし、またそれには興味もない。一方、今後の勉強の参考になる positive な意見には熱心に耳を傾けたい。

1) L. Schwartz の Lévy 評。

i) Lévy 生誕 100 年の記念行事（実は 1 年おくれで、1987 年にパリで開催された）における L. Schwartz の講演には耳を傾けよう。

ii) また Schwartz の自伝の中の Lévy 評は、一つの見方と言わなければならない。いずれも、よく知られているのでここでは省略する。筆者の感想は、これらは fair な紹介であると思う。

2) 河田敬義先生が戦後間もなく、1948 年に「確率論」を著わされた（共立出版）。そこでは、「まえがき」で Lévy の 1937 年の書物 *Théorie de l'addition des variables aléatoires* についての所感を、述べておられる。それは、同年に刊行された H. Cramér の書物と比較して述べられた。それを引用すれば「それ（Cramér の著書）に対して Lévy の書物は、極めて直感的な考え方に従って、しかも甚だ奥深く確率理論を掘り下げている。この本は、恐らく確率論の本として、最も美しい成果を持ち、最も内容の豊

かなものではないであらうか。しかし、その解説は、時に難解且つ不十分である」。

ついでながら、蛇足を加えたい。この本には Pascal-Fermat は無いし、サイコロも影を潜めている。Laplace についての評価にも同意できる。筆者は、この書物を現代にまで活かしている貴重な文献として受け止めている。

3) Benoit B. Mandelbrot の Lévy 評。

"Lévy flight". Proc. 1994 Nice Conf. "Lévy flights and related topics in physics 1994." Springer 1995.

この報告集の巻頭に Mandelbrot が

The Paul Lévy I knew と題して4ページの特別寄稿をしている。その中のいくつかの話題を拾ってみよう。

Lévy はしばしば「私は student をもったことがない」と言っていたそうだ。Mandelbrot は「私は師匠をもったことがない」と言う。どちらからも、言外の意を汲みとりたい。

実のところ、Lévy は、結局彼を取り巻く数人の研究者にとっては良き師であり、同時に彼もその研究者グループの一人である。また Lévy の名は fractal geometry で不朽の名声を博していると言ひ、彼は安定過程を Lévy flight と呼んでいる。さらに彼は 1960 年代のことを思い出せという。Lévy の安定性の研究成果は、一般の研究者には、あまり興味持たれなかなかったが、例外的に Gnedenko-Kolmogorov の著書では、大きく取り上げられている。しかし、応用には及んでいない。

さらに、Mandelbrot は言う。Lévy が創造した数学の内容に、Lévy の名を冠することの少なさに驚き、そして「確率論の主流」と呼んでよいような解析学の一分野にも Lévy の名前がめったに出てこない。また、この巨人をよく知り、しかも彼の family に属さない（しかし近い）生存者の中で、私は最年少だと思う。だから、私には人間としての Lévy 追想が求められているのである。彼の物語りには興味がある、なぜなら、多くの人々は、それを驚きとみるからである。

1945 年パリ開放後、私の叔父は Collège de France での数学での地位を復活できた。この叔父や Loève との邂逅があって、私は結局 Ecole Polytechnique にいり、当時の確率論の主流をなす偉大な Lévy に師事することになったが、この短い期間の邂逅が私の生涯に影響をあたえるとは誰が想像できたであろうか。

M. Loève は Lévy の著作を世界的にすることに貢献し（実際はどうか?）、また Lévy を見下ろす (look down) Paris 数学界の風習を緩和することに努めた。1945 年頃は、確率論はロシアでは主要なトピックであったが、フランスではそうではなかった。

Lévy の有名な "retrouver" という言葉が用いられたエピソードは 1919 年の冬であったが、その頃から彼は確率論に転向し、1920 年代には Polytechnique の tenure professor であった。Calcul des probabilités の出版は 1925 年である。まもなく、彼はボーダーライン数学者と見られるようになった。（解析 or 物理？ わからない）。

2～3 の明らかなミス（[註] 物理の内容で、名の無い雑誌に出た論文）があって、それを忘れられることも許容されることもなかった。（[註] これには Hadamard の不評を買ったからとする説がある。） Polytechnique では、結局彼の解析のコースから確率論を排除し、それを海軍の工学教育応用数学にあてた。

Lévy は、繰り返し、Polytechnique から Sorbonne における Poincaré の占めていた古い教授の位置に代わろうとしたが、いつも不成功に終わった。晩年にいたるまで、彼の新しい結果を聞いてくれる人を熱心に探したが、Sorbonne にいただけであった。その教授職を得た名もない教授によって、non-credit research lecture が行われた。Lévy の要請は毎年続けられ、彼があきらめるまで続けられた。

ほかに、些細なことではあるが、いくつかの不名誉なことになった例を挙げよう。Lévy が 70 歳近くになった頃、彼と Fréchet のための記念行事を企画した。Fréchet は 1878 年生まれ（[註] Lévy は 1886 年生まれ）である。Fréchet は確率論学者としては大した人ではないが、かつては偉大な数学者であった。この行事は Lévy の過去を帳消しにするよい機会であると思った。しかし、

この計画は焦点がぼやけ、toothless meeting となってしまった。1971 年に Lévy が亡くなったとき、Inst. of Math. Stat. に何等かの追悼行事を実施するようによびかけた。しかし、わずかな人数の人々しか応じなかった。([註] ル・モンド誌は訃報を大きく報じた。) また、Polytechnique で 1972-3 のある時期に memorial 行事があったときも、わずかな人々しか来なかった。

しかし 1986 年の生誕百年祭 ([註] 実際は 1 年おくれで 1987 年に Polytechnique で開催) は違っていた。その時まで、Lévy の誤りやまずい所は忘れられ、且つ許されて、純粹数学者によって組織された大集会となった。私 (Mandelbrot) は、おそがけに招待されたが、私の出席に反対する人々が多いと知らされたし、また別に反対者に逢わないようにとも言われた。これを、あの世の、Lévy はどう感じるであろうか。

本題に帰る。Lévy のミニ・コースに戻ろう。私はこれに数回出席したが、それは私の生涯に影響を及ぼした。やせた、白髪の高貴な arctic-looking な人であるが、彼はカリスマ的な先生ではなかった。一面彼は弱々しく、そして引っ込み思案であった。聴講者は少なく、私は (間違っているかもしれないが) 一人だけであったと思う。勿論、当時の 全てのことは些細なことではあるが。

フランスでは、当時 intermediate analysis では大試験が要求されていた。パリ大学 (フランスでは最大、ヨーロッパにおいても大きな大学の一つ) では、1974 年において 20 人以下の合格者であった (J.P.Kahane と私を含む)。それにも拘わらず、他の大学院コースと較べて、Lévy のコースは professional または political pressure を感じるような出席者は少なかった。

Polytechnique 以来 Lévy に慣れて、私は彼の著書などを読む数少ない者の一人であったが この講義は少し違っていた。彼は考えるプロセスを経験させた。結果を理解するだけでなく、彼の motivation や、また失敗があっても後に真実に到達する過程までを経験させた。

私はまた、確率論の毎週のセミナーで Lévy を身近に見ることができた。

Mandelbrot の感想はこの辺にしておこう。

4) Bourbaki は Lévy をそれ程 意識してはいない。そして、確率論も。彼等のシリーズの出版書の中に、余り長くない 1 節があつて、確率論だというのが、それは関数空間の測度とみられる内容である。現在の解釈では、確率論を代表しているとする事には疑問がある。

5) Paris VI の若手に聞いた Lévy の評判もあまり芳しいものではなかった。しかし、それは Paris Mathematician group を代表しているかどうかわからない。

Lévy の 外部評価ではなくて、彼の思想のうち、特徴のあるものを 2~3 拾ってみよう。というのは、彼に対する negative な反応は、数学の理論に対するというよりは、その内容の presentation の tone による部分も影響しているのではないかと感ずるからである。以下、具体例を見ながら、考えてみたい。

2 Digital でなくて Analogue を

確率解析のための unified method というとき、Reductionism を第 1 に取り上げたい。その気持ちは、確率過程 $X(t)$ の研究において guiding formula として Lévy が提唱した (1953) infinitesimal equation

$$\delta X(t) = \Phi(X(s), s \leq t, \xi_t, t, dt)$$

に現れている。ここで ξ_t は時刻 t において $X(t)$ が新しく獲得する、毎時刻独立な、偶然量を表すものである。この式は [?] にあるが、アイディアの説明はない。しかし、Lévy はガウス過程の研究で、見事この理想を実現している。それは、3rd Berkeley Symp. 1955. で報告された。

この考えは N. Wiener の innovation にも通じるものがある。

こうして、理想的なものとして得られた独立確率変数の系をとり上げるが、それが有限個あるいは可算無限個からなる場合 (digital な場合) は、極限定理に関する議論を除いて興味は少

ない。時系列よりも、専ら 連続無限個 の場合、すなわち確率過程を扱う。というよりも、Lévy は analogue に強く固執するのである。例外的にその理由を述べていることもあるが、いつも言葉が足りない。

参考として Quotation from P. Lévy 1948 をあげる。

Observation importante. – Dans d'étude des problèmes relatifs aux probabilité dénombrables, pout simplifier le langage, dans les cas où cela peut se faire sans ambiguïté, si nous arrivera d'énoncer une propriété presque sûre comme si elle était sûre.

Ainsi, si nous dirons "dans une partie de pile ou face indéfiniment prolongée, chacun des deux cas possibles se présente une infinité de fois", il est bien clair que cela veut dire que l'événement contraire, théoriquement possible, a une probabilité nulle.

歴史的な事実を思い出すと、請われて確率論の講義を始めた時の有名なエピソードは 1919 年のことである。この頃から Lévy の確率論が始まる。確率論の基礎をユニークな調子で論じた著書は 1925 年のことであるが、それは別として、彼の多くの論文や、著書は主として確率過程論が中心で、正に analogue である。

[註] 愚考するところでは、digital ならば、infinitesimal equation の ξ_t, t は実数、については、その非線形関数に対する "くりこみ" も不必要であるし、その変数についての微分も単純で、迷うことなく、形式的に実行できるが、それだけに期待される所も少ない。Lévy にはそのことの説明は全くない。註終り。

さらに、analogue のとき、連続無限個の独立な通常の変数系は扱い難いので、パラメータを時間とみて、加法過程の時間微分であると理解するのが好都合である。すなわち、 $Z(t)$ を加法過程とみて $\dot{Z}(t)$ を取り上げる。これに定常性などの不変性や見本関数の第一種不連続性を要請したいので、 $Z(t)$ は Lévy 過程とする。こうして $\{\dot{Z}(t)\}$ は idealized elemental random variables (i.e.r.v.) の系としてよい。ただし、elemental の意味は定常性 (結果として i.i.d.) の他に、atomic であることも含める。これを Reduction の方法の産物としたい。

例 1. 複合ポアソン過程。時間微分しても atomic にはならない。

例 2. Multiplicity > 1 のガウス加法過程 (Hitsuda's example). 飛田・櫃田、ガウス過程 4.4. [C]

ガウス過程の標準表現を扱う場合、離散パラメータのとき、すなわち digital ならば、ほぼ自明になる。連続パラメータ、すなわちガウス過程の場合、ランダム性は複雑になり、興味深い構造が見られる。[?] 参照。これも説明はないが、そこではガウス過程に限り多重マルコフ性に言及している。

[digital 近似] analog と言え、近似するにはやはり digital に頼ることになる。しかし Lévy の近似には、背後に深い配慮がある。

例 3. ブラウン運動の内挿法による近似。causality が活かされていること、また微分すなわちホワイトノイズも同時に近似している。フーリエ級数による近似とか、Karhunen-Loève 展開とは違う。その advantage を Lévy は説明しようとはしていない。我々が努力して認識しなければならない。

例 4. 関数解析における equally dense な完全正規直交系。

ヒルベルト空間 $L^2([0, 1])$ の完全正規直交系 $\{\varphi_n\}$ は

$$\Phi_n = \frac{1}{n} \sum_1^n \varphi_j^2(t) \rightarrow 1$$

が $L^1([0, 1])$ -収束であるとき、equally dense であると言う。Lévy Laplacian の digital form から analog form に移行するとき、比較表現に用いられるなど、移行を意識した特長づけと考えられる。

勿論、ホワイトノイズ解析に直接関係する。

[参考] 空間は digital か？

Scientific American, Feb. 2012. Is space digital ?

ブラウン運動は digital な表現が適するとは到底思えない。

その他

i) 確率分布の特性量として、semi-invariant (キュミュラント、半不変係数) がある。モーメントに似てはいるが、独立性に関連して、分布の特徴づけなどに、しばしば重要な役割を果たす。Lévy は特性関数の対数をとって、それを ψ 関数と呼び、有効に活用している。それは semi-invariant の generating function に他ならない。この点に注意して、彼の仕事を更めて follow するのも意味があると思う。他に、前に取り上げた 伏見康治先生の本「確率論及統計論」にも注意したい。semi-invariant に一節が充てられている。

ii) ノイズの発生、i.e.r.v. についての Lévy の思想は [?], [?] に見られる。原文は

1. Il faut que chacune des erreurs partielles que l'on pourrait mesurer soit petite par rapport à l'ordre de grandeur de l'erreur totale.

2. Il faut que l'erreur totale elle-même soit petite par rapport aux variations de la quantité à mesurer qui seraient susceptibles de produire un changement appréciable dans les conditions de la mesure.

拙いが、邦訳は 同書の訳 p.80 にある。

追想

i) Lévy 教授宅を始めて訪問したのは、1968 年 3 月のことである (8mm の記録フィルムに収めている)。時を経て 1989 年 1 月、パリ通過の折、再び 16 区にある彼の旧居を訪ねた。所は

38 Av. Théophile, Gautier, Paris 16^e

である。お宅はマンションの最上階 (6 階か 7 階だったと思う) にあったが、その建物も、あたりの佇まいも昔のままであった。あとから入り口に取り付けられたプレートには、有名な作家 Francois Mauriac が 1930 年から 亡くなった 1970 年までここに居を構えていたと記されていた。文化薫る街の一角であった。

ii) 名古屋では、Lévy の問題提起を探究すべく「レヴィ セミナー」を何度も開催してきた。小さなワークショップ形式で、Lévy

没後 始まったが、形を整えたのは彼の 10 回忌の時であったと記憶する。このセミナーでは確率論研究者以外の方々からの報告もあって、少人数ながら活気あふれる研究会であった。数回続いて、2006 年には Lévy 35 回の命日である 12 月 15 日を挟んで開催した。やはり Lévy は今も活着していることを改めて認識した。毎回印刷物は作成したが、ほとんど散逸したのは残念である。

iii) この十数年のことであるが、ヨーロッパで、前述の Mandelbrot の会とは全く別に、Lévy の業績を評価してしばしば研究会が開かれているのは、まことに喜ばしいことである。しかし、話題は Lévy 過程が中心で、それだけに深い内容となっている。成果は Springer LNM の Lévy Matters I (2010) および II (2012) として公表されている。

ブラウン運動 (ホワイトノイズ)、関数解析などと、少し窓口を絞って、それぞれの分野で、また unified theory のスタイルで、課題探索型の workshop が望まれる。

こうして、Lévy の数学の真価は次第に明らかになっていくのである。

参考文献

- [1] P. Lévy, Sur les intégrales dont les éléments sont les variables aléatoires indépendentes. Pisa J. II III 1934. 337-366.
- [2] P. Lévy, Théorie de l'additions des variables aléatoires. Gauthier-Villars 1937. 1954.
- [3] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars, 1948. 1965.
- [4] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars 1951.
- [5] P. Lévy, Random functions: General theory with special reference to Laplacian random functions. Univ. California Pub.in Statistics. 1,no.12, 1953, 331-388.

- [6] P. Lévy, A special problem of Brownian motion, and a general theory of Gaussian random functions. Proc. 3rd Berkeley Symp. vol.II, 133-175.
- [7] P. Lévy, Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien. Blanchard, 1970. 邦訳, 一確率論研究者の回想。岩波書店、1973.
- [8] M. Shlesinger et al ed. Lévy flight and related topics. Proc. Nice, France, 1994. Springer.