ガウスが行なった数値計算

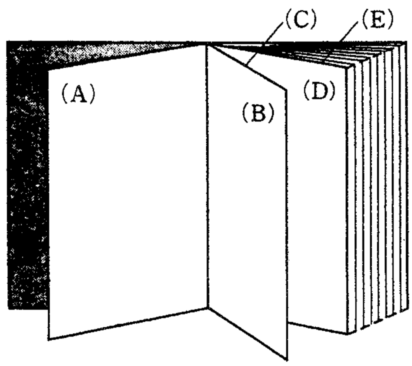
杉本敏夫

§1．ライステの教科書

［1］高木貞治『近世数学史談』（岩波文庫，1995）（以下，史談と略す）の32頁に，ガウスがライステの教科書の白頁に独創的な研究を記入した，とある．（いまや教科書としてよりもガウスの記入によって有名と言える．）

［2］ Leiste, Chr., *Die Arithmetik und Algebra zum Gebrauch bey dem Unterrichte*, Wolfenbüttel, 1790.『授業で必要な算術と代数』（ゲッチンゲン図書館手稿分室に，貴重書として保管されている．）

教科書本文の各頁の間に白紙が挟まる．白紙へのガウスの記述は，対頁の本文の頁付けによる．扉の前後の頁については，私は仮に次のように頁付けした．



灰色…見返し（模様入り）
(A) …見返しの裏（今回，取りあげる）
(B) …扉の前紙（今回，取りあげる）
(C) …扉の前紙の裏
(D) …扉 “Die Arithmetik und Algebra … von Christian Leiste”
(E) …扉の裏

これらのライステ記述は，ガウス全集X-1巻に多く採録されている．

［3］ C. F. Gauss, *Werke*, 12 *Bände*, Göttingen, 1863-1933. Reprint, Olms.

以下，ガウスの（活字に直した）記述は……で囲んだ枠内に示す．記号が輻輳するので，上記のライステ頁は（A)など，特定の定積分値は Aなど，一般の値は A，Bなどで表す．

§2．レムニスケート積分

レムニスケートの孤長に由来する定積分（上端1）は，ライステ(A)頁に，

$$\boxed{\int \frac{dp}{\sqrt{(1-p^4)}} = \left[\frac{\pi}{4}\right] \frac{2}{\int \sqrt{\sin x}\ \partial x} = 1,311031} = \mathrm{A}.$$

とある．ガウスはしばしば微分記号 d の代わりに ∂ を用いる（偏微分でない）．小数点は ，を用いる．いま一つの定積分（上端 1 ）は，ライステ(B)頁に，

$$\boxed{\int \sqrt{\sin\ x}\ \partial x = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} - \int \partial x(\sqrt{x}-\sqrt{\sin\ x}) = 2\int \frac{pp\,\partial p}{\sqrt{(1-p^4)}}} = 2\mathrm{B} = 2\cdot 0{,}59901.$$

§ 4 で引用するオイラーの論文に，オイラーの関係式：

$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = \pi/4$　　$(1{,}311031\cdot 0{,}599061 = 0{,}785388;\ \pi/4 = 0{,}785398)$

が出ている．1, 311031 や 0, 599061 はオイラーの求めた値（§ 4 を見よ）．

ライステ(A)頁に，重要な記述がある：

nach Stirling : De summatione et interpolatione serierum 1,31102877714605987	スターリングの『級数ノ総和ト補間』によれば， 1,3110287771 4605987

以下，見やすくするため，10 桁ごとに空白を入れる．スターリングがどうしてこんなに多数桁を求め得たのか，私の長年の疑問であった．（§ 3 を見よ．）

ライステ(B)頁に，不思議な記述がある．これは全集にも注解がなかった．

0,7849171 1363706 1,6337417 1794738 1,5163437 2928571 $4{,}543704 \times \frac{\pi}{12} = 1{,}189539$ Fuss　1,198 ± Euler applicata mea reductione 1,198122	$(41/140)\sqrt{\sin}\ 0° = 0,$ $(216/140)\sqrt{\sin}\ 15° = 0{,}78491717$ $(27/140)\sqrt{\sin}\ 30° = 0{,}13637059$ $(272/140)\sqrt{\sin}\ 45° = 1{,}63374161$ $(27/140)\sqrt{\sin}\ 60° = 0{,}17947379$ $(216/140)\sqrt{\sin}\ 75° = 1{,}51634354$ $(41/140)\sqrt{\sin}\ 90° = 0{,}29285714$ ふすハ 1,198 ± トシ， おいらーハ私ノ復元ニヨリ 1,198122 ヲ求メタ。

私は長い思案の後，ニュートン・コーツの公式 7 点法による数値積分であると突き止めた．（右側に私がその数値の根拠を示した．）分かってみれば，ライステの中に，ガウスはニュートン・コーツの公式を書き留め，さらに種々の値の計算を試みていたのだ．

ライステ(A)頁にある計算は，現行の記述では右側の通り．ガウスはオイラーの関係式を試していたのだ（私の発見）

6 5244124 755876 655516 100360 91772 8588 7866 722 656 66	∤ 4'57655	4,57655 1,311031) 6 5,244124 755876 6555155 1003605 9177217 858833 7866186 722144 6555155 666285

$6/\mathrm{A} = 4{,}57655$　　⟷　　$2\mathrm{B}/(\pi/12) = 4{,}543704$ ［上の引用の中の数値］

上の2Bの定義に出た中辺に，従来だれも注目しなかった．指数 2/3 は 3/2 に直すべし．私はこれも数値積分の試みと考える．ラジアン単位の x につき $\sqrt{x}$ と $\sqrt{\sin x}$ は0から $\pi/2$ まで差が小さい．そこで $\phi x = \sqrt{x} - \sqrt{\sin x}$ を0から $\pi/2$ まで，ニュートン・コーツ7点法で積分し，$(2/3)x^{3/2}$ から引けばよい．ガウス自身の計算は見当たらないので，私の復元を次に示す．

$$
\begin{array}{rl}
(41/140)\phi(0) & = 0, \\
(216/140)\phi(\pi/12) & = 0,004506 \\
(27/140)\phi(\pi/6) & = 0,003181 \\
(272/140)\phi(\pi/4) & = 0,088071 \\
(27/140)\phi(\pi/3) & = 0,017882 \\
(216/140)\phi(5\pi/12) & = 0,248861 \\
(41/140)\phi(\pi/2) & = 0,074185 \\
\hline
\text{〔和〕}\quad \Sigma & = 0,436686
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
(2/3)(\pi/2)^{3/2} & = 1,312467 \\
(\pi/12)\Sigma & = 0,114324 \\
\hline
\text{〔差〕}\quad 2B & = 1,198143 \\
\text{〔正しい値}\quad 2B & = 1,198140\text{〕}
\end{array}
$$

§ 3．スターリングによる級数加速

［4］ *Metodus Differentialis : sive Tractus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitorum. Auctore Jacobo Stirling, R.S.S. Londini : Typis Gul. Bowyer,* 1730. 『著者ヤコボ・スターリング，微分法：マタハ無限級数ノ総和ト補間ノ教程．』

表題を仮りに「微分法」と訳してみたが，実質の内容は「階差法（差分法）」しか扱っていない．その57-58頁より，前節のAの計算のみ引用する．

EXEMPLUM IV.

Proponatur Series $1 + \frac{1.1}{2.5}A + \frac{3.5}{4.9}B + \frac{5.9}{6.13}C + \frac{7.13}{8.17}D + \frac{9.17}{10.21}E + \&c.$ quæ definitur Æquatione $T' = \frac{z-\frac{1}{2}}{z} \times \frac{z-\frac{3}{4}}{z+\frac{1}{4}}T$, exiſtentibus 1, 2, 3 4, &c. valoribus indeterminatæ ſuccedentibus. Eſt vero $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{3}{4}$; & proinde

$$T2 = \frac{1.1.3}{2.z.4z+1}T,\ T3 = \frac{3.2.7}{10z+1.4z+5}T2,\ T4 = \frac{5.3.11}{18z+2.4z+9}T3,$$
&c.

$$\text{Et } S = \frac{2z-1}{1}T + \frac{2z+2}{5}T2 + \frac{2z+5}{9}T3 + \frac{2z+8}{13}T4 + \frac{2z+11}{17}T5 + \&c.$$

Summa novem Terminorum initialium eſt 1.2157.0599.7306.1360.6. $=U$
Et ut habeatur Summa reliquorum, pone 10 pro z, & decimum Terminum pro T, ac per computum obtinebis

$f=$	T = .0050.1271.8406.8834.46	.0952.4164.9730.7854.7	$=[f]$
$(g)=$	T2 = - - - 1833.9213.6837.20	8069.2540.2083.7	$=[g]$
$(h)=$	T3 = - - - - 15.5605.4494.38	43.2237.3595.5	$=[h]$
	T4 = - - - - - 2425.8219.16	5224.8472.0	
	T5 = - - - - - - 56.8742.44	103.7118.6	
	T6 = - - - - - - - 1.7922.51	2.9017.4	
	T7 = - - - - - - - - 707.95	1047.8	
	T8 = - - - - - - - - - 33.45	46.1	
	T9 = - - - - - - - - - - 1.83	2.3	
		S = .0953.2277.9839.9238.1	

Adjiciatur jam S aggregato initialium, & obtinebis
A= 1.3110.2877.7146.0598.7 pro valore Seriei, id est, pro longitudine Curvæ Elasticæ, modo in lineam rectam extensa foret. Hunc autem numerum determinavit *Bernoullius* consistere inter limites 1.308 & 1.315. Quod si longitudini Elasticæ adjiciatur sua Ordinata, habebitur numerus 1.9100.9889.4513.8559.8 qui est semiperiferia Ellipseos habentis 1 & √2 pro Axibus. Et hæc Exempla sufficiant; haud enim immoror Seriebus quæ per hanc Propositionem summari possint accurate.

スターリングは引用2行目の級数 1+… の収束が遅いので，それを加速しようとする．なおこの級数の A, B, … はいわゆるスターリングの記法であり，前項を表す．A=1, B=(1•1)•1/(2•5), … これは計算に適した記法であり，前項の計算結果に次項の係数を掛ければよい．ガウスもしばしばこの記法を用いている．

スターリングは第9項（仮に e で表す）までの和を正直に計算した．それは U=1.2157059973 0613606 になる．次項 f は e に (17•33)/(18•37) を掛ける．ここまでは普通の項の作り方であるが，次々項からは f に加速の係数 (1•1•3)/(2•10•41) を掛けて (g)とする（g を( )で挟む）．さらに (g) に係数 (3•2•7)/(10•11•45) を掛けて(h) とする，等々．係数の法則は6行目 T_2=… を見よ．加速した項の総和計算においては，f に 19/1 を掛けて加工した $[f]$，(g) に22/5 を掛けて加工した $[g]$，(h) に25/9 を掛けて加工した $[h]$ 等を加える．加工法則は7行目 S=… の係数を見よ．図式で示せば，

$$
\begin{array}{ccccccccc}
e & \rightarrow & f & \rightarrow & (g) & \rightarrow & (h) & \rightarrow & (\cdots) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & [f] & & [g] & & [h] & & [\cdots]
\end{array}
$$

こうして，中段右側の数値を足し合わせて S=.0953227798 3992381 を得て，先に求めた U と足し合わせて A=1.3110287771 4605987 を得る．

（加速公式の導き方は，難渋な方法によっている．省略する．）

§ 4．オイラーの級数計算

［5］ L. Euler, *De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequationes* $y=\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ *contenae. Acta acad. scient. Petropol., 1782– Leonhaldi Euleri pera Omnia, Vol. 20., 91-118.* 『方程式 $y=\cdots$ ニ含マレル弾性曲線ノ驚クベキ性質ニツイテ．』

なる論文に，二つのレムニスケート定積分 A と B の計算が載っている．

これは定積分の巧妙な変形によって，$\pi/2$ を（ ）の外側に括りだした級数

$$A=\quad c=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}-\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}+\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}-\text{etc.}\right),$$

$$B=\quad a=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5}{6}-\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7}{8}+\text{etc.}\right).$$

を用いる．（ ）の内側が交代級数なので，いわゆるオイラー変換が適用される．

次の引用部分に変換の説明がある（証明はない）．

15. At vero pro eodem scopo series pro a et c supra § 10 inventae optimo cum successu usurpari possunt, quanquam ipsi termini parum decrescunt, propterea quod in istis seriebus signa + et — alternantur. Hinc enim insigne subsidium nascitur ad summas harum serierum proxime inveniendas. Si enim habeatur huiusmodi series

$$A-A'+A''-A'''+A''''-A''''' \text{ etc.},$$

cuius termini A, A', A'', A''' continuo fiant minores, tum inde formetur series differentiarum

$$A-A'=B,\quad A'-A''=B',\quad A''-A'''=B'' \text{ etc.}$$

hincque porro series differentiarum secundarum

$$B-B'=C,\quad B'-B''=C',\quad B''-B'''=C'' \text{ etc.}$$

sicque hoc modo continuo differentiae capiantur, tum summa seriei propositae semper erit

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{4}+\frac{C}{8}+\frac{D}{16}+\frac{E}{32}+\text{etc.}$$

次の引用部分で各項の計算がなされるが，A と B を交互に行なう．

16. Quo nunc hanc regulam ad series § 10 applicemus, evolvamus in fractionibus decimalibus singulos terminos, qui ibi occurrunt.

$$\frac{1}{2}=0{,}500000$$

$$\frac{1^2}{2^2}=0{,}250000$$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4}=0{,}187500$$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}=0{,}140625$$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5}{6}=0{,}117188$$

〜〜〜〜〜〜〜 ［中略］ 〜〜〜〜〜〜〜

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9^2}{10^2}\cdot\frac{11^2}{12^2}\cdot\frac{13^2}{14^2}\cdot\frac{15^2}{16^2}\cdot\frac{17^2}{18^2}=0{,}034400 \quad [0{,}034399]$$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9^2}{10^2}\cdot\frac{11^2}{12^2}\cdot\frac{13^2}{14^2}\cdot\frac{15^2}{16^2}\cdot\frac{17^2}{18^2}\cdot\frac{19}{20}=0{,}032700 \quad [0{,}032679]$$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9^2}{10^2}\cdot\frac{11^2}{12^2}\cdot\frac{13^2}{14^2}\cdot\frac{15^2}{16^2}\cdot\frac{17^2}{18^2}\cdot\frac{19^2}{20^2}=0{,}031065 \quad [0{,}031045]$$

次の引用部分は A（オイラーの c）から 3/4 を左辺に移項し，残りの部分からオイラー変換のための階差表（差分表）を作る．これらを 2 の巾乗で割って足し，それに移項してあった 3/4 を足すことによって，（　）内は 0, 834627 になる．これに π/2 を掛けて，目標の A（オイラーの c ）=1, 311031 を得た．

17. His praeparatis calculum instituamus pro valore litterae c inveniendo, et cum esset

$$\frac{2c}{\pi}=1-\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}-\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}+\text{etc.},$$

binis primis terminis ad sinistram translatis erit

$$\frac{2c}{\pi}-\frac{3}{4}=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}-\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}+\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\ \text{etc.}$$

Nunc singuli huius seriei termini sibi invicem subscribantur iisque subiungantur series differentiarum litteris B, C, D etc. insignitarum hoc modo:

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
0,140625	0,042968	0,020080	0,011398	0,007249	0,004970	0,003595	0,002709
0,097657	0,022888	0,008682	0,004149	0,002279	0,001375	0,000886	0,000575
0,074769	0,014206	0,004533	0,001870	0,000904	0,000489	0,000311	
0,060563	0,009673	0,002663	0,000966	0,000415	0,000178		
0,050890	0,007010	0,001697	0,000551	0,000237			
0,043880	0,005313	0,001146	0,000314				
0,038567	0,004167	0,000832					
0,034400	0,003335						
0,031065							

18. Hinc igitur summa nostrae seriei sequenti modo colligetur:

$$\begin{array}{rlrl}
\frac{1}{2}A= & 0{,}070312 & & 0{,}084503 \\
\frac{1}{4}B= & 0{,}010742 & \frac{1}{64}F= & 0{,}000078 \\
\frac{1}{8}C= & 0{,}002510 & \frac{1}{128}G= & 0{,}000028 \\
\frac{1}{16}D= & 0{,}000712 & \frac{1}{256}H= & 0{,}000011 \\
\frac{1}{32}E= & 0{,}000227 & \text{pro reliquis} & 0{,}000007 \\
\hline
 & 0{,}084503 & & 0{,}084627 \\
 & & \text{adde } \frac{3}{4}= & 0{,}750000 \\
\hline
 & & \text{erit } \frac{2c}{\pi}= & 0{,}834627.
\end{array}$$

Hinc ergo erit

$$c=\pi\cdot 0{,}417314=1{,}311031.$$

B もほぼ同様である．各項はすでに計算してあった．そこで 1/2−3/16 を左辺に移項した残りの交代級数を作り，階差表を作る．

19. Simili modo computabitur intervallum $AB = CD = a$. Erat autem

$$\frac{2a}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5}{6} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7}{8} + \text{etc.},$$

ubi bini primi termini

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16} = 0{,}312500$$

dant ad alteram partem translati

$$\frac{2a}{\pi} - 0{,}312500 = \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5}{6} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7}{8} + \text{etc.},$$

unde calculus sequenti modo expediatur:

A	B	C	D	E	F	G	H
0,117188	0,031738	0,013580	0,007198	0,004331	0,002835	0,001969	0,001405
0,085450	0,018158	0,006382	0,002867	0,001496	0,000866	0,000564	
0,067292	0,011776	0,003515	0,001371	0,000630	0,000302		
0,055516	0,008261	0,002144	0,000741	0,000328			
0,047255	0,006117	0,001403	0,000413				
0,041138	0,004714	0,000990					
0,036424	0,003724						
0,032700							

2 の巾乗で割って足し，移項した 5/16 を足すことにより，（　）内は 0,3813747 になる．$\pi/2$ を掛けて，目標のB（オイラーの a ）=0,599061 を得る．

20. Hinc igitur seriei summa colligitur

$$\begin{array}{rl}
\frac{1}{2}A = 0{,}058594 & \\
\frac{1}{4}B = 0{,}007934 & \\
\frac{1}{8}C = 0{,}001697 & \\
\frac{1}{16}D = 0{,}000450 & \\
\frac{1}{32}E = 0{,}000135 & \\
\hline
0{,}068810 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & 0{,}068810 \\
\frac{1}{64}F = & 0{,}000044 \\
\frac{1}{128}G = & 0{,}000015 \\
\frac{1}{256}H = & 0{,}000005 \\
\hline
 & 0{,}068874 \\
\text{adde } \frac{5}{16} = & 0{,}312500 \\
\hline
\text{et prodit } \frac{2a}{\pi} = & 0{,}381374,
\end{array}$$

hinc ergo

$$a = \pi \cdot 0{,}190687 = 0{,}599061.$$

オイラーの計算は簡明であり，論文の中にすべての計算を載せているのは親切である．ただ残念なことに，労多く得る桁数は少ない．

§5．ガウスによる巧妙な計算

ガウスはスターリングやオイラーを読んでいた．しかしこれらには満足せず，もっと簡単な計算方法を目指して，レムニスケート積分の加法定理を巧妙に用いようとした．ライステ 20頁に，積分の上端が s の場合の級数がある．

$$\varphi = s + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}s^5 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}s^9 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{13}s^{13} + \cdots$$

ライステ 24頁に，加法定理によって$\phi 1$ を$\phi\sqrt{(1/2)} + \phi\sqrt{(1/3)}$ に分解する公式，その一般化した公式等が載っている．5行目の右辺には負号が落ちている．4行目と5行目を合併して，$m=4$ とおけば，$\phi 1$ を $2\cdot\phi(1/2) + \phi(1/7)$ として求める巧妙な計算方式が得られる．（それ以外の m ではうまくいかない．）

$$\begin{aligned}
\varphi 1 &= \varphi\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \varphi\sqrt{\tfrac{1}{3}} \\
\varphi\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \varphi\sqrt{\tfrac{1}{3}} &= \varphi\tfrac{1}{7} \\
\varphi\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \varphi\sqrt{\tfrac{1}{3}} &= \varphi 1 - \varphi\sqrt{\tfrac{2}{2}\tfrac{1}{3}} \\
\varphi 1 &= \varphi\sqrt{\frac{1}{m}} + \varphi\sqrt{\frac{m-1}{m+1}} \\
\varphi\sqrt{\frac{1}{m}} - \varphi\sqrt{\frac{m-1}{m+1}} &= \varphi\frac{mm-2m-1}{mm+2m-1}.
\end{aligned}$$

ライステ 61頁にある $2\cdot\phi(1/2) + \phi(1/7)$ の計算と欄外に私の注解を示そう．ガウスの計算は，いつも余白が空けてあって，後から計算が続行できる．実際，右の計算では，9行目には一旦 0,503209443169 を書いた後，8行目の余白に次の項に相当する 13 を追加し，上の数の末位に 13 を加え 0,503209443183 に直している．10行目の値 1,006418886 は直す前，下から2行目の 1,00641888636 は直した後の値である．これだけの計算により，A=1,311028777 と小数9位まで求まっている．

0,5	1/2
003125	$(1/10)\cdot(1/2)^5$
8138020833333333	$(1/24)\cdot(1/2)^9$
293438825120192	$(5/208)\cdot(1/2)^{13}$
1227154451	$(\cdots\cdots)\cdot(1/2)^{17}$
55879354	$(\cdots\cdots)\cdot(1/2)^{21}$
2699	$(\cdots\cdots)\cdot(1/2)^{25}$
[13]	[$(\cdots\cdots)\cdot(1/2)^{29}$]
0,503209443169	Σ_1
1,006418886[13]	$2\Sigma_1$ [$(\cdots\cdots)\cdot(1/2)^{29}$]
503209443183	Σ_1
0,304347826086	7/23
261126	$(1/10)\cdot(7/23)^5$
9333	$(1/24)\cdot(7/23)^9$
2[?]	$(5/208)\cdot(7/23)^{13}$
[ ]	[$(\cdots\cdots)\cdot(7/23)^{17}$]
0,30460988	Σ_2
1,00641888636	$2\Sigma_1$
1,311028777	$2\Sigma_1+\Sigma_2$

§6．ガウス所有の数表

ガウスの天才ぶりはブラウンシュヴァイクの領主フェルヂナント公爵のお耳に達し，14歳(1791)のときお目通りし，生まれて初めての数表2冊を贈られた.

［6］ Schulze, J. C., *Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonomischer und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln*, zwei Bände, Berlin, August Mylius, 1778. 『数学の応用に不可欠な対数，三角法，及びその他の数表の新・増補集成』 上下2巻.

これが「数表2冊」である．下巻は三角関数（真数，対数）表，上巻が常用対数（ブリッグズ対数）表である．上巻の後半に［1］史談56頁にも紹介されているヴォルフラムの自然対数（双曲線対数）表が採録されている．その表題は

［7］ *Natürliche oder hyperborische Logarithmen bis auf 48 Decimalstellen von Herrn* Wolfram *berechnet*. im Schulze' *Tafeln* B. I.

引数は 1～10009 の範囲の素数，素数巾，および 10, 100, … などを含めた，よく使われる合成数．8桁ごとに空白を空け，48桁（史談の50桁は誤り）．ガウスは次の素数 10037 の自然対数を得んとして<u>多様な計算</u>を試み，自然対数表の末尾に，10037 のそれを 30 桁記入している．この多様な試みそれ自体が，対数計算の手法の見本として大変興味深いのであるが，別の機会に譲る.

公爵より奨学金と生活費を与えられたガウスは，2年後に次を購入した.

［8］ J. H. Lambert, *Zusätze zu den logarithmischen und trigonomischen Tabellen zur Erleichterung und Abkürzung Anwendung der Mathematik vorfallenden Berchnungen*, Berlin, Haude und Sperner, 1770. 『数学の応用の際座右に置き，計算の軽減，短縮に資する対数表，三角関数表への補追』 1巻.

これは各種の数表と公式集を集めた誠に面白い「補追」である．前半に 101999 までの数の因数表と素数表が載っている． 102000 近辺のランベルト表には，合成数を素数と見なしたり，拾うべき素数を見落とすなどの誤りが多い．ガウスは一々検算してランベルト表に訂正を施している．素数表は1頁当たり，ほぼ1430～2500個の整数の区間に含まれる 220～215 個の素数が掲載されている．ランベルトは1も素数に含めている．例えば第1頁には 1428 個の整数の区間に 226 個の素数，第2頁には 1846 個の整数の区間に 221 個の素数，… 第44頁には 2535 個の整数の区間に 215 個の素数がある．ガウスは各頁の欄外に，<u>その区間に含まれる素数の個数と第1頁からの累計</u>を記している．少年の意図は素数の分布を知りたかったのであろう！ 晩年(1849)，ガウスが友人エンケに宛てた手

紙に，「…それ［素数の頻度］の研究を始めたのは，はるか昔，1792年か1793年頃，私がランベルトの『対数表への補追』を入手したときです［数表に1793と記す］．…私は素数の減少する密度に気づき，それを確かめるため千個ごとの区間の中の素数を数え，結果を閉じ付けた白紙に記入しました［後述］．間もなくこの頻度の動揺を平均すると対数の逆数に近似的に比例する，従って或る与えられた限界 n までの個数は，双曲線対数を既知として，積分 $\int dn/\log n$ によって表されることを知りました．…」と書いたことは有名である．

私（杉本）は，厳密な数学史の立場からは，この手紙の内容にいささか注釈が必要と思う．1793年に少年がやったのは，各頁の欄外に，その区間ごとの素数の個数と，第1頁からの累計を記入することであった．上記の数値から比をとれば，1428/226＝6.319, 1846/221＝8.353, …2535/215＝8.353，$\log n$ の n として何を選ぶか問題が残るが，区間の中位数をとって自然対数を求めても，素数の減少する密度からは程遠いように思われる．一方，「千個ごとの区間…」は確かにランベルト『補追』の白頁（ガウスが自から 212 と頁付けた）に「各千個中の素数の個数」の表題で，1000～100000 を 1000 個ごとの区間に分けて，そこに含まれる素数の個数が一覧表の形で記されている．また，シュルツェ上巻の白頁（ガウスが 308 と頁付けた）に，『日記』第9項(1796年5月31日）の記事と対応する，“ Primzahren unter $a(=\infty)$ a/la ”が記入されている．そこで私は，晩年の手紙には錯誤が含まれていて，(1)少年期(1793)，ランベルトの欄外への記入と，(2)青年期(1796)，千個ごとの区間の中の素数の個数の表とは，区別が必要ではないかと考えている．
（ガウスの記入を含む上記3冊の数表も図書館の貴重書として保管されている．）

§7．高精度計算の実際

ガウスは（そして先人も）普通の掛け算・割り算には，［6］シュルツェの常用対数表（または匹敵する表）を用い，比例部分を用いて7桁の計算を行なった．現行の『丸善7桁対数表』の使用に匹敵する（実例は後述）．7桁より高精度の計算は級数計算に頼らざるを得ない．ガウスの先生は誰か？　［2］ライステはガウスの記入によって有名だが，少年がこの教科書の著者から多くを学んだことは，あまり知られていない．挟まれた白頁は実は本来，教科書の例題を演習するための余白であった．

教科書の本文40～45頁に，(1)自然（双曲線）対数が級数で求められること，

(2)常用（ブリッグズ）対数は自然対数に率(Modulus) K＝2, 3025850929 の逆数 M＝1/K＝0, 4342944819 を掛けて得られることが，実例入りで詳しく説明されている．本文44頁に対する白頁に，少年ガウスの微笑ましくしかも著者ライステを凌駕するほど巧妙な演習が記入されている．l (ｴﾙ)が 1 (ｲﾁ)と紛らわしいので，代わりにLで印刷する．

$$L(1-x) = -\frac{1}{K}(x+x^2/2+x^3/3\cdots\cdots)$$

Exempel

1,	$x=1/10$		
	$(1/K)x$	=	0,043429448
	$(1/K)x^2/2$	=	0,002171472
	$(1/K)x^3/3$	=	0,000144765
	$(1/K)x^4/4$	=	0,000010857
	$(1/K)x^5/5$		$\cancel{1}\cancel{1}\cancel{3}869$
	$(1/K)x^6/6$		$\cancel{3}72$
	$(1/K)x^7/7$		$\cancel{4}6$
			−0,04575749
		=	0,95424251−1,
		=	L9/10
	L9	=	0,95424251
	L3	=	0,47712125

例題

分数は $\frac{1}{K}\ \frac{x^2}{2}$ のような形に書かれているが，印刷の都合でこのように組んだ。これらミセケチの意味は，たとえば6の前の $\cancel{4}$ を例にとると，末位の和

8＋2＋5＋7＋9＋2＋6＝39

を40と見なして，くり上がりの4を上の位の

4＋7＋6＋5＋6＋7＝35

に足して39と計算したのである。72の前の $\cancel{3}$ は，くり上がりの3を上の位の

4＋4＋7＋8＋8＝31

に足して34と計算した。他も同様。さいごに$\sqrt{9}=3$を使っている。

計算の達人ガウスも，くり上がりを一々ミセケチの形で書きながら計算している．少年時代だけでなく，青年時代にも例えば2桁の数による割り算の場合，余りの数を次の桁の上方に小さな数で記入しながら計算する例が，しばしば見られる．

2,	$x=1/100$			
			0,0043429448	
			0,0000217147	
			0,0000001448	
			0,0000000010	
			$\cancel{1}\cancel{1}\cancel{2}$	
	L99/100	=	−0,0043648053	ミセケチの意味は，上記と同じ。
		=	0,9956351946−1	
	L99	=	1,99563519$\cancel{4}\cancel{6}$…5	46を丸めて5とした。
	L9	=	0,95424251	99/9＝11を用いた。
	L11	=	1,041393685$\!\!\!\!\!\!\!$ $\cancel{5}$	末位の5を切り捨てた。

その続き．

3, $x=1/1000$			
		0,00043429−	
		0,00000022−	
L999/1000	=	−0,00043451	
L999	=	2,99956548	
L27	=	1,4313638	ここでは $999/27=37$ を使っている。
L37	=	1,56820168	

これで，L 3，L 11，L 37 が得られたが，L 2 などはどう求めるのだろうか？

次は逆数の計算.

［9］ Maennchen, Ph., *Gauss als Zahlenrechner*, Gauss' sche *Werke*, Band X-1, Abh. 6. 『計算家ガウス』

なる論文でメンヒェンが指摘したのであるが，次の原理に依る．高精度の数値 K の逆数 $M=1/K$ を求めるには，K に順々に巧い数 g，h 等を掛けて，なるべく 1 に近い数 $Kgh=1+x$ に直し，級数 $1/(1+x)=1-x+x^2-x^3+-\cdots=1/Kgh=B$ を計算する．この B に再び g，h 等を掛ければ $Bgh=1/K=M$ が求まる．上記の数値を用いて，ガウスが別の数値で実行した方法を模擬してみよう.

K	2,3025850930	
$K\cdot 0{,}4$	0,92103403720	
$K\cdot 0{,}03$	0,06907755279	
$K\cdot 0{,}43$	0,99011158999	
$K\cdot 0{,}0043$	0,00990111590	
$K\cdot 0{,}4343$	1,00001270589	$=1+x$ とおく。
$1-x$	0,99998729411	
x^2	16	
$1-x+x^2$	0,99998729427	$=B$ とおく。
$B\cdot 0{,}4$	0,39999491771	
$B\cdot 0{,}03$	0,02999961883	
$B\cdot 0{,}43$	0,42999453654	
$B\cdot 0{,}0043$	0,00429994537	
$B\cdot 0{,}4343$	0,43429448191	$=1/K$ となる。

次は開平の計算.

これは§10で引用する計算例であるが，$\sqrt{2}$ をさらに開平して $\sqrt[4]{2}$ を求める．その前に私たちが通常 2 桁づつ実行する計算をお目にかけよう．右側には，余り 2735241 を 2378414 で割る計算を，ガウスが別の箇所でやっているのを真似て，［6］シュルツェの 7 桁対数表を用いて計算した．比例部分の計算を一々記入したので，ゴタゴタしているが，ガウスは慣れていてしかも暗算で実行するから，もっと省略されたスッキリした計算となる.

	1, 1 8 9 2 0 7
1	√1, 41 42 13 56 23 73 09
1	1
21	41
1	21
228	20 42
8	18 24
2369	2 18 13
9	2 13 21
23782	4 92 56
2	4 75 64
2378407	16 92 23 73
7	16 64 88 49
23784140	27 35 24 09

log 2, 7352	=0, 4369891	
p. p. 4 →	64	
p. p. 1→	2	
log 2, 735241	=0, 4369957	←
log 2, 3784	=0, 3762849	
p. p. 1 →	18	*
p. p. 4→	7	
log 2, 378414	=0, 3762874	←
diff. *	=0, 0607083	
log 1, 1500	=0, 0606978	
p. p. 2 →	75	
p. p. 7→	26	
log 1, 150027	=0, 0607079	

∴ ∜2 =1, 18920711150027

ガウスはライステの他にも膨大な量の紙片を残した．それらの紙片は『全集』編集の際，内容によって整理され，1枚ごとに Math21-(2) 等の番号が振られ，同じく貴重書類として保管されている．私は紙片にオモテ，ウラを付加した．次は Math21-(2)ウラの引用である．この計算は，脈絡を辿ることが甚だ難しい．（それは当然であって，ガウスは自家用に計算を記しただけであり，他人が読むことなど全く予想しなかったからである．）┈の中はガウスの記述，欄外の計算は私が注記した．注記をしてもなお難しい．そこで後に計算の経過を解説した．

$\sqrt{2}$ =	1, 4142135623 7309504880 168872423
u^2 =	1, 4142135623 66623225
	647182380 168872423
$2uv\cdot10^6+v^2$ =	647166511 9837403841
$\sqrt{2}-(u\cdot10^6+v)^2$ =	15868 1851320389
$12(u\cdot10^6+v)$ =	14270 4853800326
	1597 6997520063
$1,2(u\cdot10^6+v)$ =	1427 0485380033
	170 6512140030
$0,14(u\cdot10^6+v)$ =	166 4889961004
(0, 14/4=0, 035)	* 4 1622179026
$0,035(u\cdot10^6+v)$ =	4 1622249025
	69999**
294315☆ (w=11892) $4w$ =	47568
	22431
$u\cdot10^6+v$= 1189207115002721 $1,8w$ =	21405
	1026
$2(u\cdot10^6+v)$ =	2378414230005442
$6(u\cdot10^6+v)$ =	7135242690016326
$12(u\cdot10^6+v)$ =	14270485380032652

u=1189207115, v=2721　とおく

$2u$=	237841423	
$-0,2u$=	237841423	
$1,8u$=	2140572807	
$5,4u$=	6421718421	
$0,04u$=	475682846	
$0,002u$=	237841423	
$5,442uv$=	64217166511983	
$=2uv$		
(2721=3•907)		
907^2=	822649	
9•822649=	7403841	27
$=v^2$		21
		27
2700^2+21^2=	7290441	54
2•2700•21=	1134	←1134
v^2=	7403841	

計算の経過　√2 から 1, 189207115002721 の自乗を引いた残りは 158681851320389，これで5行目まで済んだ．1, 189207115002721 に (12+1, 2+0, 14)/10=1, 334 を掛けて引いた残りは * の行の 41622179026．これを 1, 189207115003 で割れば 34999411137 になる筈だが，ガウスはその代わりに 1, 189207115003 の 3, 5倍が 4, 1622249025 であると考えて，強引に引いた．よって引いた

残り** 69999 は負の数である．これが**の計算の意味である．その後 699990+10, 26＝700000, 26 を 11892 の2倍 23784 で割ると，2, 94315 ☆になる．これが脇に書かれた修正値である．さて上記の 1, 334 を用いて， 1, 334+0, 00035＝1, 33435 を 2 で割ると 0, 667175．これから修正値☆0, 000000000294315 を引いて 0, 667174999705685 を得る．以上をまとめて

$\sqrt[4]{2}$ ＝1, 1892071150 0272106671 7499970568 5 となる．

ガウスが平方根$\sqrt{2}$ や$\sqrt{23}$ などを連分数に展開したり，立方根$\sqrt[3]{2}$ を変形して $(10/8)\cdot(1+0.024)^{1/3}$ なる級数に展開した例がある．ここでは彼独自とも思われる，公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ を巧妙に用いた例を紹介した．

§8．算術幾何平均

正数 $a>b$ から $a'=(a+b)/2$, $b'=\sqrt{ab}$, $a''=(a'+b')/2$, $b''=\sqrt{a'b'}$, … によって決められる数は $a>a'>a''>\cdots>\mu>\cdots>b''>b'>b$ となり，a と b から共通の極限値μが得られることは周知である．ガウスはμを算術幾何平均と呼び， agM(a, b) と書いた． Math21-(60)オモテに記された agM($\sqrt{2}$, 1) なる実例を次に掲げる．彼自身が枠を作っている．欄外は私の注記である．ガウスは常用対数と自然対数を区別せず，その時どきに l あるいは log. と書いている．そこで私は二つの対数を log と ln で区別することにした．

Math25-(60)オモテ

a	1, 4142135623 7309504880 1688724210	0, 3465735902 7997265470 8616060729	ln a
b	1,	0,	ln b
a'	1, 2071067811 8654752440 0844362105	0, 1732867951 3998632735 4308030365	ln b'
b'	1, 1892071150 0272106671 7499970560	0, 1882264064 5959771581 5377203523	ln a'
a''	1, 1981569480 9463429555 9172166333	0, 1807566007 9979202158 4842$\dot{6}$96944	ln b''
b''	1, 1981235214 9312012260 6585571821	0, 1807844995 3864214593 8 [1]	ln a''
a'''	1, 1981402347 9387720908 2878869077	0, 1807705501 6921708376 1	ln b'''
b'''	1, 1981402346 7730720579 838378	0, 1807705502 6650953	ln a'''
a''''	1, 1981402347 3559220744 063132	0, 1807705502 17863310	ln b''''
b''''	1, 1981402347 3559220743 921$\underset{\dots}{691}$[365]		
μ	1, 1981402347 3559220743 992411		

ln b'' の 9 は 1 に，b'''' の 691 は 365 に修正すべきである．これを見ると，左側の a' に右側の ln b' が対応して奇妙である．これには理由がある．彼は二つの数値を桁を揃えて並べると，足して 2 で割ることが暗算でできた．そこで a' と b' から直ちに a'' が次の行に書き込める．同様に ln b'と ln a' から直ち

に ln b'' が次の行に書き込める．もちろん ln b'' は a' と b' の幾何平均の自然対数である．この表を見ると，真数の欄の二つの数値が３段目で小数４位まで，４段目で小数９位まで，５段目で小数19位までと，ほぼ２倍の桁数で一致することが分かる．μ の段は，記入された数値が全部一致する（自乗収束の例！）．

さて真数 a'' が計算しやすいのに比べて，その自然対数 ln a'' は計算しにくい．また自然対数 ln b'' が計算しやすいのに比べて，その真数 b'' は計算しにくい．ガウスがこの点をどう切り抜けたか，それを以下に紹介したい．

§９．真数から自然対数へ

$a' = (\sqrt{2}+1)/2 = 1.2071067811\ 86547\cdots$ を知ってその自然対数 ln a' を求めよう．次の計算例は紙片 Math21-(2)オモテから取った．

Quaeritur logarithmus hyperbolicus ipsius

$$[a' =]\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2} = 1{,}2071067811\ 86547\cdots$$

a' 自身ノ双曲線対数ガ要望サレル

$$\frac{1}{1}\quad\frac{5}{4}\quad\frac{6}{5}\quad\frac{29}{24}\quad\frac{35}{29}\quad\frac{169}{140}\quad\frac{204}{169}\quad\frac{985}{816}\quad\frac{1189}{985}$$

a' は連分数（しかも循環連分数）＝[1, 4, 1, 4,…] に展開される．次々に近似分数を求めると右側の引用になり，９番目の 1189/985＝1,2071065989… は小数６位まで a' と一致し，a' より僅かに小さい．この近似分数は分子・分母とも因数分解されるので都合がよい．1189/985＝(29•41)/(5•197)．ガウスは２桁の数の掛け算・割り算が暗算でできるので，a' を 1189/985 で割るには

(√2+1)/2＝	1, 207106 781186 547524 400844 362104 84904
×197)＝	237, 800035 893749 862306 966339 334655 26074
÷ 41)＝	5, 800000 875457 313714 804057 056942 81124
× 5)＝	29, 000004 377286 568574 020285 284714 05619
÷ 29)＝	1, 000000 150940 916157 724837 423610 82052

のように計算したと思われる．その計算紙片が見当たらないので，彼が他で実行した計算を私が真似てみた．６桁ごとに区切ったのはヴォルフラムの自然対数表に合わせるためである．a' を 1189/985 で割った結果，後者が前者より僅かに小さいので，１よりも僅かに大きい数が得られた．これを $1+\varepsilon$ と書く．すなわち ε＝0, 000000 150940 …．次に紙片 Math21-(2)オモテの続きを引用する．

ln 1189＝	7, 080867 896690 781831 050035 405399
ln 985＝	6, 892641 641172 088881 380556 662389
ln(1189/985)＝	0, 188226 255518 692949 669478 743010
＋ε＝	150940 911254 051125 127
	9364
ln(1189/985)＋ε－ε²/2＝	406459 59734

ln 1189 と ln 985 をヴォルフラム表から求め，ln(1189/985) を得，ln(1+ ε) を級数にして加える．ガウスは+ ε のところで誤っていて，その続きも中断した．計算の名手である彼も，その自家用の計算においてはしばしば誤る！　しかし彼は計算を中断しても，後述のように，どこかで同様な，または経路を変えた計算を実行する．それ故，上の引用部分が未完であっても，彼は何ら意に介しない．次に，私が彼に代わって「彼がそう進めたであろう」計算を実行しよう．

ln(1189/985)＝	0,188226 255518 692949 669478 743010 30
$+\varepsilon$＝	＋ 150940 916157 724837 423610 83
＝	0,188226 406459 609107 394316 166621 13
$-\varepsilon^2/2$＝	− 11391 580085 266659 45
＝	0,188226 406459 597715 814230 899961 68
$+\varepsilon^3/3$＝	＋ 1146 303689 70
＝	0,188226 406459 597715 815377 203651 38
$-\varepsilon^4/4$＝	− 129 77
ln a'＝	0,188226 406459 597715 815377 203521 61

この節の計算のまとめ　求める値 A を近似値 B で割れば，誤差（比）$1\pm\varepsilon$ が得られる（ε は正数とする）．その自然対数 $\ln(1\pm\varepsilon)$ は級数展開できる．近似値 B の自然対数 $\ln B$ に $\ln(1\pm\varepsilon)$ を加えれば，A の自然対数 $\ln A$ が得られる．近似値 B が小さい因数に分解され，しかも A に近いことが望ましい．

§１０．自然対数から真数へ

$b'=\sqrt[4]{2}$ の自然対数 $\ln b'$ は ln 2 の 1/4 であるから容易に求まる．$\sqrt[4]{2}$ の真数は $\sqrt{2}$ を開平すればよい．実際ガウスが開平計算により $\sqrt[4]{2}$ を求めた実例を，先に§7で引用した．そこで本題に戻り，自然対数 $\ln b'$ から真数 b' を求める計算を Math21-(2)ウラから引用しよう．

$\sqrt[4]{2}$ obiter　＝ 1,189207115
118920711 ＝ 3·7·13·435607
435607 ＝ 7＋660² ＝ 7·249²＋40² ＝ 53·8219

$\sqrt[4]{2}$　ハホボ ＝ 1,189207115

118920711 が近似値に選ばれ，3·7·13 まで分解されて，大きな因数 435607 が残る．ガウスは二次形式によって分解している．その解説は次の第６章を見よ．

[10] C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmetiae*, Leipzig, Fleischer, 1801. 高瀬正仁訳『ガウス整数論』，朝倉書店，1995.

上記の場合には，$435607\cdot(40^2-660^2)=7\cdot(1\cdot40-249\cdot660)\cdot(1\cdot40+249\cdot660)=7\cdot(-164300)\cdot164380$，435607 は 164300 と共通因子 53 をもち，164380 と共通因子 8219 をもつので，435607＝53·8219 と分解される．

Math21-(2)ウラの続き

log. 8219 =	9, 0142038261 4850001243 42426
log. 159 =	5, 0689042022 2023152553 97144
log. 91 =	4, 5108595065 1685004115 88402
Colog. 9•lg10 =	1, 5793192560 4763452785 60684
ln 1, 18920711 =	0, 1732867909 3321610698 88656
(1/4)•ln 2 =	0, 1732867951 3998632735 43080
δ =	− − − − −42 0677022036 54424
(1/2)•δ^2 =	884 84582
ε =	42 0677022921 39006
0, 1•ε =	4 2067702292 139006
1, 1•ε =	46 2744725213 529066
1, 1•0, 08•ε =	3 7019578017 082325
0, 0012•ε =	504812427 505668
1, 1892•ε =	50 0269115658 117059
10^{-6}•7•ε =	2944739 160449
10^{-8}•11•ε =	46274 472521
$\sqrt[4]{2}$ =	1, 1892071150 0272106671 ~~750029~~
	74999705685

計算は二つの部分から成る.

第一. $\sqrt[4]{2}$ の近似値として B=1, 18920711 が選ばれた. これは小さな因数に分解されるから, 因数の自然対数が求まる（ガウスは 3•53=159, 7•13=91 とまとめてヴォルフラム表を引く）. B は整数 118920711 を 10^8 で割った数値である. $1/10^8$ の自然対数は負数 −18, 42068… となるが, 対数計算の常識として 10 の整数倍（ここでは 20）を足した 1, 57931… を Colog. 9•log. 10 として足して, 後から 20 を引くことになっている. こうして ln 1, 18920711 が得られた. そこで既知の ln$\sqrt[4]{2}$=(1/4)• ln 2 と差し引きして, 誤差 δ（ここでは正数）が得られる.

第二. δ は自然対数としての誤差であるから, 真数としての誤差に直す. それには級数展開 $e^{\delta}=1+\delta+(1/2)\delta^2+(1/6)\delta^3+\cdots$ （$=1+\varepsilon$ とおく）を作って B に掛けてやればよい. ガウスは$(1+\varepsilon)$•B を $B+B$•ε とおく. 上の引用部分が分かりくいのは, B•ε の計算を B のほうを 1, 1892=1, 1+0, 088+0, 0012 と分解して ε を掛けて足し 1, 1892•ε とし, さらに 0, 00000711•ε を作って足している. 最後に 1, 18920711 に足して $A=B+B$•ε =1, 1892071150 0272106671 750029 を得た. 750029 をミセケチして 74999705685 に直したのは, § 7 で引用した直接 $\sqrt{2}$ を開平する計算, 特に紙片 Math21-(2)ウラの最終段階の結果による.

ガウスが同じ数値を得るため, 全く別の経路で計算して検算とする傾向が, ここにも現れていて興味深い.

ε を11892 倍するため 1 桁ずらして足した 11•ε を作り, 8 倍した 88•ε を作り, 11•ε に ε を足して 12•ε を作り, 次々に桁をずらして足していく. このよ

ような計算方法は，Welsche Rechnung(仮にイタリア勘定と訳す）と呼ばれる．(welsche はドイツから見て外国，特にイタリアを指す．)「塩梅勘定」と訳すほうが適切かもしれない．暗算が得意なガウスはこの算法を愛好した．次を見よ．

[11] J. Tropke, *Geschichte der Elementalmathematik*, 4.Aufl., B. 1, *Arithmetik und Algebra*, Berlin, Walter de Gruyter, 1980.

この節の計算のまとめ　ln A を知って精密な A を求めたい．ここで近似値 B であって，しかも小さな因数に分解されるような B を探す．ln B は因数の自然対数の合計から求められる．そこで ln A との誤差 $\pm\delta$ が検出される（δ を正数とする)．$e^{\pm\delta}$ を Bに掛ければよいが，$e^{\pm\delta}$ は級数展開される．これを$=1\pm\varepsilon$ とおいて，Bに掛けて $B\pm B\cdot\varepsilon$ を求めればよい．

§１１．$A=e^{-\pi}$ の計算

［１］史談 56 頁に，表記の計算が載っている．これはレムニスケート関数の展開に出てくる或る係数に因む．ガウスの原文を Math25-(14)オモテから引用しよう．ただし史談 57 頁の下方「さて Wolfram の表に由ってδを計算する．」までの部分は史談の解説に譲り，いくつか補足する．近似値 4321391826377 をそのまま使えばよいのに，11 倍して 4753531008… にするのは，…9182637… を１桁ずらして足すと …10090… が得られることから，11 倍の近似値 …1008 を導く技巧である．近似値 N＝0,043213182545454… を自然対数に直そう．

$$\begin{aligned}\ln N &= \ln 4753531008-\ln 11-10\cdot\ln 10\\ &=\ln 128+\ln 243+\ln 67+\ln 2281-\ln 11-10\cdot\ln 10\\ &=\ln 972+\ln 2144+\ln 2281-\ln 11-10\cdot\ln 10\end{aligned}$$

（ただし 972＝4•243，2144＝32•67，　これはウォルフラム表を引く回数を減らすためのガウスの常套手段である．）そこで ln N を求めて，$-\pi$ との誤差δを検出する．$\ln A=\ln N+\delta$ であるから，§10と同様な筋道で $A=N\cdot e^{\delta}$ を求めればよい．以下ガウスの数値計算の部分をできるだけ忠実に引用しようと思う．ただし彼は例えば 0,0000000002 1351… を 0, - - - $\overset{10}{2}$ 1351… のように２の上に小字で２の桁を書いて示す．ここでは上記のように０を必要だけ並べて表すか，または変則的な $0,0^{9}21351\cdots$ のような表示を用いることにする．また彼は計算を省略して書くので，私が中間の計算経過，例えば②と③の行などをイタリクで示した．彼自身の罫は実線－で，私が補った罫は破線--で示した．

①	δ	=0, 0000000002	1351443240	1825645533	4644317407	12548181	
②		-2	135	-3	2439367916	66666667	
③			+2	2791125	+5	19435379	
④	$\delta - l1, 0^{9}2135$	=0, 0000000000	0001443242	4616770530	2204949495	65316893	$=\delta'$
⑤			-1443			-100156176	
⑥				+104	11245		
⑦	$\delta' - l1, 0^{13}1443$	=0, 0000000000	0000000242	4616770634	3329449495	6431533124	$=\delta''$
⑧	$\frac{1}{2}\delta''\delta''$	=0, 0000000000	0000000000	0000000000	0000029393	8324222063	
⑨	$e^{\delta''}$	=1, 0000000000	0000000242	4616770634	3329478889	4755755187	
⑩	※		+1443		+349872037	6377573058	※
⑪	※ $e^{\delta'}$	=1, 0000000000	0001443242	4616770634	3679350927	1133328245	※
⑫	$e^{\delta''}$	=1, 0000000000	0000000242	4616770634	3329478889	4755755187	
⑬	$[e^{\delta''} \times 1, 0^{13}1443]$		+1443		+349872200	0025342445	
⑭	$e^{\delta'}$	=1, 0000000000	0001443242	4616770634	3679351089	4781097632	
⑮	$[e^{\delta'} \times 1, 0^{9}2135]$	+2	135	+3081322	6556805304	3755414579	
⑯	e^{δ}	=1, 0000000002	1351443242	4619851957	0236156393	8536512211	
⑰	×0, 972)	0, 9720000002	0753602831	6730496102	2269544014	8257489869	
⑱	×0, 2144)	0, 2083968000	4449572447	1107018364	3174590346	7786405828	
⑲	×2, 281) 11A	=0, 4753531009	0149474751	8595108889	0081240330	0920791693	5
⑳	÷11) A	=0, 0432139182	6377224977	4417737171	7280112757	2810981063	

②と③の２行は $\ln 1, 0^{9}2135 = 0, 0^{9}2135 - (0, 0^{9}2135)^{2}/2 + (0, 0^{9}2135)^{3}/3 \cdots$ なる級数を①の行から引くための補助的計算である．⑤と⑥の２行も同様である．⑨行目は $e^{\delta''} = 1 + \delta'' + \frac{1}{2}\delta''\delta'' + \cdots$ なる級数計算の結果である．※印を付けた⑩と⑪の２行は彼の誤った計算であり，⑫行目に⑨行目を再記した．⑬行目は

$$e^{\delta''} \times 1, 0^{13}1443 = 1, 0^{17}242461 \cdots \times 1, 0^{13}1443$$
$$= 1, 0^{17}242461 \cdots + 0, 0^{13}1443 + 0, 0^{17}242461 \cdots \times 0, 0^{13}1443$$
$$= 1, 0^{17}242461 \cdots + 0, 0^{13}1443 + 0, 0^{31}349872 \cdots$$

なる計算のための補助的計算であり，⑭行目がその結果である．⑮行目も同様．そこで⑯行目で $e^{\delta} = 1, 0^{9}2135144324 \cdots$ できると，これを 0, 04753531008倍する代わりに，ガウスがしばしば実行したのを真似て，×0, 972，×0, 2144，×2, 281と計算して⑲行目 11Aを得た．これを 11 で割れば⑳行目，目標のAが得られる．

この計算を指して，史談の著者は「ガウスの…計算はその方法が独特であり，且つ又このような計算は恐らく空前絶後とも思われる…」と述べている．

スターリング(1692-1770) やオイラー(1707-1783) は，ガウス(1777-1855) の前の世代に属する．§３と§４で見たように，彼らは（ガウスよりも能率が劣った）膨大な量の高精度計算を実行していた．彼らの著作に採録されたのは，ごく

一部に過ぎない．（計算機と無縁な時代には）このような計算は日常の作業であった．空前絶後という評価は，どうも大袈裟に思われる．

7桁より高精度の計算のためには，級数計算に頼らざるを得ない．自然対数に持ち込めるならば，例えばヴォルフラムの表を利用して計算すればよい．ガウスはそれを所有したから当然用いた．§9と§10で見たように，近似値と真値との誤差を検出し，誤差を加工して近似値に足したり掛けたりするのは常套手段である．$A=e^{-\pi}$ の計算の場合も，ln N を求めて，これと $-\pi$ との誤差 δ を検出してから，$A=N\cdot e^{\delta}$ を求めるまでの計算手続きは§10で見てきた域を出ない．ただし級数の項を得るため δ の自乗や立方を求める際，δ の桁数が大きかったために，補助的に δ' などを使用した．そのため見かけの上で計算が甚だ不透明になっだけである．

ガウスに独特という評価も，どうも当たらないように思われる．

§3への補足

最近［4］の英訳が出た．まだ詳細な検討は未着手だが，スターリングに近づきやすくなった．定積分Bを扱った Exemplum Ⅲ は英訳 73 頁を参照．

［4'］Ian Tweddle, James Stirling's *Methodus Differentialis* : An annotated translation of Stirling's text, Springer, 2003.

後記

杉本敏夫(1929 生まれ)　東京大学大学院修士課程を終了(1956)，明治学院大学(1968-90)，日本女子大学(1990-97)において心理学を講じた．専攻は思考心理学，特に発見の心理を主題とする．鹿取廣人・杉本敏夫編著『心理学』（東大出版会，1996）7章に「思考」を執筆した．次の紀要の連載最終回に，「(5)数学における発見の心理学」を載せた．日本女子大学紀要・人間社会学部，創刊号(1991)に「ガウスと対数表」，第2号(1992)に「ガウスと暗算」を載せ，第3号(1993)から連載「ガウスの発見と数値計算のはざまで－(1)正多角形の作図」，第4号(1994)に「　…　(2)連珠形の積分」，第5号(1995)に「　…　(3)代数方程式の数値解法」，第6号(1996)に「　…　(4)算術幾何平均および二三の補足」を載せた．退職のため第7号(1997)が連載最終回となった．今回のシンポジウムの講演のため，紀要論文から資料を取り，それに新しい見解を加えた．明治学院論叢には，和算に関する論文を連載した．