Fractional Calculus（定義と展開）
－フラクタルとの接点－

佐 藤 憲 一(日本大学工学部)

はじめに

２０００年１０月２２日（土）に上記の題で、講演をさせて頂きました。１９世紀の数学者であるリユービル、そしてリーマンが取り組んだ任意階数の微積分とは一体どのような学問であるのか、これまでにも数千に及ぶおびただしい数の論文が生まれ、とりわけ、この分野の研究に携わった少なくない数の時代を代表する巨匠達が２００年の間受け継ぎ、培ってきたものは何なのか、この７年ばかり、努めて文献の収集に当たって来ましたので、そのあたりのことを少しまとめてみる良い機会と考えました。これとてまだ道半ばで十分なものでは有りません。文献入手とその解析の難しさなど課題は山積ですが当分野についての関心と理解に少しでもお役に立てればと存じます。
先の講演では今日 Riemann-Liouville の分数階微分定義として一括して捉うことになっている定義を敢えて Riemann, Liouville の定義として別仕立てにすることで、それぞれの定義の特徴や制約と言うような点を明確にしたいと思いました。とくに、講演では１９１７年の Weyl の論文にある分数階微分の定義と理論について,その後の Zygumnd や Mikoras の仕事を援用しながら展開しようと試みました。また,近年著しく発展しているフラクタル数理と分数階微分の接点についての議論をみたいと思いましたが講演では時間の問題もありほんの少し言及したに止まりました。
当日お出で頂いた方には申し分けなく存じます。本稿に於いても,やはり文献の紹介に近い構成になりましたが機会が有りましたら改めて考察したいと存じます。本稿においては、Fractional Calculus の比較的初期（１９世紀前半）の研究事情を幾分詳しく見たいと考えております。当面は、先人がどのような目的でこれら課題に取り組んだのか、その時代状況と彼らの問題認識がどのようなものであったのかを色々な文献をつき合わせ、繋ぎ合わせながら少しでも解明できるように務めたいと思っています。後発の定義の一つである Weyl の分数階積分定義と理論についても言及したいと存じます。
即ち、本稿では Fractional Calculus の多数ある定義の中から、最も重要で基本的と思われる３つの定義、Liouville, Riemann, Weyl の定義とこれら纏わる歴史的な事項の幾つかについて検証していく事にします。

I．１８００年～１８５０年期における Fractional Caluculusの展開

（1） Fractional Calculus の誕生（１６９５）

１６９５年から１６９７年にかけて Leibniz と L'Hopital, John Wallis, Johan Bernoulli との書簡のやりとり の中で分数階微分について議論が交わされたのが資料として残る最初のものとされている。

(2) F.C.の萌芽期 (L.Euler, P.S.Laplace, S.F.Lacroix, J.B.Fourier, N.H.Abel)

Euler,L (Leonhard ,1707-1783,スイス生まれ、ロシア（ペテルブルグ）、ベルリン等で活躍)

1738 the Petersburgh Commentaries,Vol.v. for 1730. 、１７３８年
De progressionibus transcentibus, sev quarum termini generales algebraice dari nequent.
Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Scientiarum Petropolitanae 5, pp.38-57 (p.55)
後述の Lacroix の著作の中にみることができる。

(3) フランスを中心にした状況（リュービル活躍以前）

[F-1] Lagrange, J.L. (Joseph Louis, ラグランジュ 1736-1813,フランスの数学者)

1772 Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables. Nouv.Mém.Acad.Roy.Sci. Belles-Lett.Berlin 3,185-206 (1772). この論文は全集に収録. Ouvres de Lagrange,Vol.3, pp.441-476.GauthierVillars,Paris,1849.

[F-2] Lacroix, Sylvestre François (1765-1843.5.25,ラグランジュの理工科学校の教授(解析学) の後任、コーシーの先生)

「Traite du calcul differentiel et du calcul integral」3vols. Courcier. Paris. ただし Vol.3 は「Traité des differences et des séries」の書名で１８００年に出版された。Fractional Culculus に関する記載が p.390 から p.393 にある。1810 － 1819 年にかけて第２版（増補版）が出版された。第２版（Vol.3 は１８１９年に出版された）では Fractional Calculus に関する記載は p.409 より p.411 に掛けて記述されていて B.Ross の論文「The Development of fractional calculus 1695-1900」Hisoria Mathematica 4(1977), pp.75-89,また,「The Fractional Calculus」By Keith B.Oldham , Jerome Spanier 1974 の p4 ,更に「An introduction to the fractional calculus and Fractional differential equations」by Kenneth S.Miller, Bertram Ross.A Wiley-Interscience publication. 1993 ,1-3 頁にかけて Lacroix のＦ-Ｃに関する記載があるがいずれも１８１９年をもって Lacroix の研究の原典とする立場をとっている。事実 B.Ross が 1975 年 Fractional calculus and its applications(Proceedings of the International Conference Held at the University of New Haven, June 1974) Lecture notes in mathematics; 457 Springer-Verlag Berlin・Heidelberg・New York , Edited by Bertram Ross の巻頭論文「A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus」p1(b.2)－p.2(t.2) において

"In 1819 the first mention of a derivative of arbitrary order appears in a text. The Franch mathematician, S.F.Lacroix [2], published a 700 page text on differential and integral calculus in which he devoted less than two pages to this topic."

続いて,１９７７年に出版された Ross の論文「Fractional Calculus」the Mathematical Magazine ,Vol.50,No.3,May 1977 pp.115-122 の１頁には

" In 1812 Laplace defined a fractional derivative by means of an integral, and in 1819 there appeared the discussion of a derivative of fractional order in a calculus text written by S.F.Lacroix [2]." との記述がなされていて、1975 年、1977 年の論文とも、References には [2] S.F.Lacroix, 「Traité du Calcul Différentiel et du Calcul intégral 」Paris(Courcier) 3.sec.ed., 1819, pp.409-410. の記述がなされている。

しかしながら, 先に指摘したように、本来は原典として該当記述のある初版（１８１０年）を挙げるのが適当であり、Lacroix の仕事は次の Laplace の仕事の前に位置ずけるのが妥当である。

[F-3] Laplace, P.S.(Pierre Simon,ラプラス、1749-1827,フランスの数学者)

Theorie analytique des Probabilites(1812 年初版、確率の解析的理論)

troiseme edition, Paris: Courcier. Paris,1820.

邦訳：現代数学の系譜１２「ラプラス確率論」－確率の解析的理論－
共立出版１９８６年初版１刷、訳・解説者：伊藤　清／樋口順四郎

[F-4]　Ｆｏｕｒｉｅｒ，J.B.J.(Jean-Baptiste-Joseph,フランスの数学者,1768-1830)

1822　Théorie Analytique de la Chaleur(1822年初版、熱の解析的理論)
復刻版「Theorie Analytique de la Chaleur」1988, ISBN 2-87647-046-2,
がJACQUES　GABAY社より出ている。また
英訳 The Analytical Theory of Heat . New York:Dover publ., 466p.1955
も出ている。

$$\frac{d^{\mu}f}{dx^{\mu}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a^{\mu}\, da \int_{-\infty}^{\infty} f(p)\, cos(px - pa + \frac{\mu\pi}{2})\, dp$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} da f(a) \int_{-\infty}^{\infty} dp\ cos(px - pa\ )$$

[F-5] Cauchy, A.L.(Augustin Louis,フランスの数学者,1789-1857,
68歳で死去)

１８１６年よりエコール・ポリテクニクの解析学と力学の教授。
１８２１年「代数解析学」
Cauchyの生涯については1998年３月に出版された　評伝　コーシー
－フランス革命の大波とともに生きた数学者の生涯－
訳者　辻　雄一　(原著者 Bruno Belhoste , 1985) が詳しい。

＊［Ｓ－１］　Ａｂｅｌ, N. H.(Niels Henrik,1802-1829, ノルウエーの数学者)

<u>1823</u>　Oplosning af et Par Opgaver ved Hjelp af bestemte Integraler,
Magazin for Naturvidenkaberne,Aurgang,1,no 2,Christiania)
French traslation : Solution de quelques problemes a l'aide d'integrales
defines.　Oeuvres Completes ,ser.1,11-27.Vol.1,
Edition publiee par M.M.L.Sylow et S.Lie,
tome I-II、Grondahl, Christiania, Norway,pp.16-18.
In Gesammelte mathematische Werke. Leipzig:1881 Teubner,I.11-27.
Fractional Calculul の応用事例,　積分方程式の解法に使った。

1826　Auflosung einer mechanischen Aufgabe.
Journ.fur reine und angew. Math.,1,153-157.
(French version : Resolution d'un probleme de mecanique,
Oeuvres complete de Niels Henrik Abel,Vol.1, pp.97-101.
the tautochrone ＝等時曲線：摩擦がないとして、重力場で質点が

the classical Abel's integral equation $(0<\alpha<1)$
一般 Abel の積分方程式、

II. Liouville と Fractional Calculus

(1) Fractional Calculus の構築者：J. Liouville

Liouville Joseph(1809.3.24 – 1882.9.8 ,フランスの数学者、)
リュービルは、１８３０年代(Liouville ２０才代)
本格的な任意階数の微積分の理論（今日的には Fractional Caluculus）
の構築に取り組んだ。その時代の主な数学者の動静を見るため次の
年表挙げておく事にする。

１８１３年 ラグランジュ死去(７７歳)
１８２７年 ラプラス死去（７８歳）
１８２９年 ４月アーベル死去（２７歳）
１８３０年 ７月革命、ルイ・フィリップ国王になる。
　　　　　フーリエ死去（６２歳）
１８３２年 ガロア死去（２１歳）
１８３３年 ルジャンドル死去（８２歳）
１８４０年 ポアソン死去（５９歳）
１８４３年 ラクロア死去(78 歳)
１８４８年 ２月革命でフランス第２共和政府が樹立
　　　　　国王ルイ・フイリップ[1773-1850]イギリスに追われる。
１８５１年 １２月２日ルイ・ナポレオンのクーデタ発生
１８５２年 ナポレオン三世[1808-1873]皇帝（１８７１年まで）に就く。
１８５５年 ガウス死去（７８歳）
１８５７年 コーシー死去（６８歳）
１８５９年 ディリクレ死去（５４歳）
１８６６年 リーマン死去（４１歳）

Saint-Omer(サント・メール,Pas de Calais 、生まれ,1809)
the École Polytchnique(エコール・ポリテクニク、理工科学校)
１８２５－１８２７ 修学、卒業。その後
the École des Ponts et Chaussèes (国立土木専門学校卒業、1830)
the Collège de France (コレージュ・ド・フランス、パリ、国立の高等
教育・研究機関) à la Faculté des Sciences, Proffessor of
Mathematics (正教授 1851-1882)
The Astronomy section of Institute de France, the Faculté des sciences of Paris
the École Polytchnique（理工科学校）

the Bureau des Longitudes (黄経局＝経度調査局,暦作成局）委員
（ポアソン死去後の１８４０年よりメンバー）
メンバーとしてラプラス、ラグランジュ、ルジャンドルらが席を置いた。
1836 年数学雑誌「the Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 」＝
「Liouville 's Journal」を創刊、Ser.1.t.1 (1836) －t.20(1855)

Liouville の分数階微分の特徴

$$D^{m} e^{ax} = a^{m} e^{ax}$$

$$\frac{d^{\mu}\frac{1}{x^{n}}}{dx^{\mu}} = \frac{(-1)^{\mu}\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)}\frac{1}{x^{n+\mu}}, \quad n+\mu > 0$$

に依拠して、理論を展開している。

B.Ross は　それぞれを Liouville's first formula , Lioville second formula と呼んでいる。

Liouville の Fractional Calculus 関係論文１０編（Li-1 ～ Li-10）を挙げておく。

[Li-1]　1832 年 (a)　Mémoire sur quelques questions de geometrie et de mecanique, et sur un nouveau genre de calcul pour resoudre ces questions. Journ.Ecole Polytech.13,Section 21,pp.1-69.

p 3 において　$\frac{d^{u}y}{dx^{u}} = \sum A_{m} m^{u} e^{mx}$,　u は 任意の実数,複素数.

を考察している。 力学と幾何の問題を fractional operations を使って解いた。

[Li-2]　1832 (b)　Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques. Journal des l' École Polytechnique, tome 13, 21 cahier, pp.71-162.
p.117 で２つの関数の積について the fractional derivative を適用した。

[Li-3]　1832 (c)　Mémoire sur l'intégration de l'equation à

$$(mx^{2}+nx+p)\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+(qx+r)\frac{dy}{dx}+sy=0$$

l'aide des différentielles à indices lconques.
Journ. École Polytech.13, Section 21, pp.163-186.

[Li-4]　1834　Mémoire sur une formule d'analyse.
Journal für die reine und angewandte Mathematik.v.12,273-287.
この論文で Liouville は the tautochrone problem　を論じた。
p.284 t-7 Abel, p.284b-4

[Li-5]　1834　Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires.
Journ.Reine Angew.Mathematik. v.11,1-19.

補関数について研究した。分数階（任意階数）積分・微分した際の所謂積分定数の概念の拡張について考察している。

[Li-6] 1835(a) Mémoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de Fourier, dans le calcul des différentielles à indices quelconques.
Journal fur die reine und angewandte Mathematik.13,219-232.[p.224]
分数階の微分のフーリエの変換の類推的な Fourier's formula を考察した。

[Li-7] 1835(b) Mémoire sur le changement de la variable dans le calcul des différentielles à indices quelconques.
Journal de l'Ecole Polytechnique.Tome15,cahier 24,pp.17-54.
ここでは,合成関数の分数階微分について検討している。

[Li-8a] 1836 Mémoire sur l'intégration des équations à indices fractionnaires.
Comptes Rendus de l'Academie des Sciences,2,167-168.

[Li-8b] 1837 Mémoire sur l'intégration des équations différentielles à indices fractionnaires.
Jorn.Ecole Polytech.15,Section 25, pp58-84.

[Li- 9] 1844 Sur une équation différentielle à indices fractionnaires,
Journal de Mathematiques pures et appliquees.9, p.294.
（ペンネーム Besge を使った）

[Li-10] 1855 Note sur une formule pour les différentielles à indices quelconques à l'occasion d'un Mémoire de M.Tortolini.
Journal de Mathématiques pures et appliquées.20, pages 115-120.
(L.J.=Liouville's Journal)
Liuville のＦＣに関しての最終論文（４７才）

(2) **Serret,J.A. (Joseph Alfred, 1819−1885)**

フランスの数学者、パリ生まれ.
空間曲線論の基本定理であるフレネー・セレーの公式で知られる。

1844 Memoire sur l'intégration d'une équation différentielle à l'aide des différentielles à indices quenconques,
Journal de Mathématiques pures et appliquées.9(1844), pp. 193-216.

Ⅲ 19世紀前半期に於ける英国数学者の寄与

１８３０年代の Liouville の怒濤の研究の後、Liouville を含めてフランスでは僅かの進展はあるものの研究は凪の状態に入った。
これに対して英国においては、非常に早くかつ強烈に反応した。
ある者は強く反発し、ある者は強く共鳴した。影響は長く今日まで続いて

いると言っても過言ではない。１９世紀の数学の世界の尾根を二分するドイツの無反応さに対して、英国・スコットランドのそれは誠に対照的であり興味をそそられる。J.Lützen の著書（実に 884 頁ある）の p.348 には次の記述がある。

"Soon after Liouville left the field, however, interest in fractional calculus arose , mainly in Great Britain."

[E-1] Gregory, D.F. (Duncan Farquharson. **1813-1844)**

スコットランドの数学者、エジンバラ大学、ケンブリッジ大学トリニチ・カッレジ卒業、ケンブリッジ大学、ロンドン大学教授, 著名な数学者 Gregory, James（1638-1675）を祖父に持つ。

1838.「Cambridge Mathematical Journal」を創刊

1841.「Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus」,
J.J.Deighton, Cambridge, first edition p.350,
2nd ,ed. by William Walton, 1846, p.354.
the Calculus of operations の創始者

[E-2] Peacock, G. (George , イギリスの数学者、１７９１－１８５８)

Denton 生まれ、ケンブリッジ大学、Trinity College卒業
後にケンブリッジ大学教授（１８３７より）

1816 ラクロア(Lacroix)のフランス語の微分積分法の著書, 即ち
Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral
を英語に翻訳して以下の書名で出版した。

「An elementary treatise on the differential and integral calculus」:
by S.F.Lacrox; tranlated by C.Babbage,G.Peacock and Sir J.F.W.Herschel.
Cambridge:Printed by J.Smith for J.Deighton and Sons, 1816.
当時の英国のニュートン以来の伝統的で古色な解析学を進んだフランスの解析学を紹介した。

1833 Report on the recent progress and present state affairs of certain branches of analysis. (general differentiation) .3rd annual report of the British Association.,206-225,240-247. Report to the British Association for the Advancement of Science,pp.185-352.
この時期の肩書は、Fellow and Tutor of Trinity College,Cambridge. となっている。この総合報告の中で前年（１８３２年）に発表されたばかりの Liouville の３部構成の論文を厳しく批判している。その一つを p.220 の脚注で見る事にする。

"Most of the rules which M.Liouville has given for the differentiation of algebraical functions are erroneous partly in consequence of his fundamental error in the theory of complementary arbitrary functions, and

partly in consequence of his imperfect knowledge of the constitution of the formula $\dfrac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-r)}$:

thus, after deducing the formula

$$\frac{d^r \dfrac{1}{(ax+b)^n}}{dx^r} = \frac{(-1)^r a^r}{1\cdot 2\cdots(n-1)} \frac{\Gamma(n+r)}{(ax+b)^{n+r}}$$

which is only true when n is a whole number, he say that no difficuluty presents itself in its treatment, whilst n+r is > 0, but that Γ(n+r) becomes infinite, when n+r < 0, in which case he says that it must be transformed into an expression containing finite quantities only, by the aid of complementary functions; whilst, in reality, Γ(n+r) is only infinite when n+r is zero or a negative whole number,and the forms of the complementary functions, such as he has assiggned to them, are not competent to effect the conversion required."

Peacock の Liouville 攻撃は手厳しいが, ほぼ 100 年後の１９３６年に Harold T.Davis は著書 の pp.71-72 にかけて Peacock の Fractional Calculus の仕事の一部について p.72 で言及している
"His (=Peacock) arguments are ingenious but often misleading and occasionally erroneous, as in the present instance."

1842 「A Treatise on algebra」(初版<u>１８３０，</u>１８４２)

Vol. I 副題： Arithemetical Algebra.（算術的代数）

Vol.II 副題： On Symbolical Algebra and its Applications to the Geometry of Position.（記号的代数学と,それの位置の幾何学への応用について）

Reprinted from the 1845 Edition

Published by Scripta Mathemtica yeshiva college,

New York, N.Y.1940

記号代数の確立,「Principle of the permanence of equvalent form」

（ 同値形存続(不易) の原理）

代数学のケンブリッジ学派(ヘンケルが名付けた) の一人

Analytical Society（解析学協会、１８１５)立ち上げた。

有力なメンバーには、バーベジ（Charles Babbage,１７９２－１８７１)、

ジョン・ハーシェル（John Hershel、１７９２－１８７１）がいた。

Memoires of the Analytical Society の発行

ライブニッツ導関数の記号法の導入
後継者ハミルトン（１８０５－１８６５），

［E-６］ S.S.Greatheed （生没年不詳）

1839 年　On General Differentiation. Nos 1 and 2.

Cambridge Mathematical Journal.,v.1, 12-23 and 109-117.

" The idea of differential coefficients with general indices is not modern, for it occurred to Leibnitz , who has expressed it in his correspondence with Jean Bernouilli. Euler has written a few pages on this subject, which Lacroix has copied into his large work on the differential calculus. Formulae for expressing the general differential coefficients of functions by means of definite integrals, has been given by Laplace (Theorie des Probabilites, p.85,3rd edit.), by Fourier (Theorie de la Chaleur,p.561), and by Mr.Murphy (Cambridge Phil. Trans.,vol.v.). But it appears that the only person who has attempted to reduce the subject to a system, is M.Joseph Liouville; three memoires by whom,— one on the principles of the calculus, and two on applications of it, — are inserted in the 13th volume of the Journal de l'Ecole Polytechnique, for the year 1832. Professor Peacock, in his valuable and interesting Report on certain branches of Analysis, which forms a part of the Report of the British Association for 1833, has sporken of M.Liouville's system as erroneous in many essential points, and has given a sketch of one very different. But after referring to M.Liouville's memoirs, and bestowing consideable attention on the subject, we have come to a contrary opinion, at least with respect to his conclusions, which are the same for the most part as will be found in this article. Some points in his theory we admit to be objectionable, and these we have altered.

Lützen の本の p.121 に Liouville の論敵であった Libri の Peacock の批判を受けての攻撃にたいし、Liouville の反論ついて次のように書いている。

"Now,Liouville could easily reject the criticism by referring to other British mathematicians (e.g., Greatheed[1839]) , who had defended Liouville's work agaist Peacock."

[E-4] P. Kelland(1810-1879, 英国の数学者)

Professor of Mathematics at Edinburgh,1838-79

物理学者マクスウェルは１８４７年冬学期より

エジンバラ大学に入学、１８５０年夏学期まで

の３年間をここで送った。ケーランドの講義を

聞いる。当時他には高名な論理学者のハミルトン

（四元数で有名なハミルトンとは別人）もここで

教授として論理学を教えていた。

Kelland は Liouville の定義の熱心な信奉者であった。

1840 (a) On General Differentiation, Part I
Transactions Royal Society of .Edinburgh v.14, 567-603.

1840 (b) On General Differentiation, Part Ⅱ.
Ibid.14, 604-618.

論文(a)の p.586 において

"EULER, in the Petersburgh Commentaries,vol.v.for 1730, give the following result as the basis of general differentiation.

$$d^n z^e = z^{e-n} dz^n \frac{\int dx(-\log x)^e}{\int dx(-\log x)^{e-n}} \therefore$$

and obtains from it,by putting $e = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $d^{\frac{1}{2}} z = \sqrt{\frac{zdz}{A}}$,

where A is a constant. If $A = \infty$,this result conincides with that which we have dedeced."

1849 年 On General Differentiation,Ⅲ
Ibid., v.16, no 2-3, 241-303. (1849)

1850/1851 On a process in the differential calculus , and its application to the solution of certain differential equations,Ibid.,20, no 1,39-55.

[E-5] Center, W. (William ; 生没不詳, Longside,Mintlaw)

1839 On the expansion of a function of a binomial.
Cambridge Math. J.,1,67 — 74

1848 On the Value of $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\theta} x^0$ when θ Is a Positive Proper Fraction.

Cambridge and Dublin Mathematical v.3,163-169.

1848 On Differentiation with fractional Indices, and on General Differentiation.

Ibid. 3, 274-285.

この論文の p.275 で Center は次の記述を残している。

" On examining this expression, Liouville was the first to observe that it must necessarily extend to fractional values of θ the index of differentiation , in order that the equation might embrace all the values of m and θ within the amplitude of the function $\Gamma(m+\theta)$. Here he proposed it as a formula of differentiation most likely general, and verified it very extensively . Thus one case of general differentiation,limited only by the necessary condition $m > 0$ and $(m+\theta) > 0$, was fairly deduced in continuty with the common Calculus. But the immediate generalization of this differential expression into

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\theta} x^{m} = (-1)^{\theta} \frac{\Gamma(-m+\theta)}{\Gamma(1-m)} x^{m-\theta},$$

included the passage per saltum over the proper limits $m > 0$ and $(m+\theta) > 0$ of the definite integral from which the primary derivation is made; and apparently involved such tency in logical deduction,as induced Dr.Peacock, in his well known Report on Analysis , to propose a distinct system, and to give the formula

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\theta} x^{m} = \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-\theta)} x^{m-\theta}.$$

The irreconcilable character of these two proposed formula disposed Professor De Morgan (Diff.Cal.p.599) to admit them both as particular cases of a yet more general system, but to exclude either from any pretension to generality. The subject has been lately resumed by Professor Kelland (Transaction of the Royal Society of Edinburgh,1847), who has pushed his investigations in the subject of general differentiation to a very great extent, on the assumption of the generality of Liouville's formula. The subject, therefore,demands a rigorous investigation."

1849 (a) On Differentiation with fractional Indices, and on General Differentiation, II : On General Differentiation.
Ibid., 4, 21-26.

1849 (b) On the symbolical value of the $\int x^{-1}\,dx$. integral
Ibid., 4,261-264.

1850 On General Differentiation. Part III
Ibid. ,5, 206-217.

[E-6] De Morgan, Augustus(1806-1871)

スコットランドの数学者、数理論理学者

ケンブリッジ大学トリニテイカッレジの出身、

The London University(後にUniversity Collegeに改称された)の教授

1844　著書「The Differential and Integral Calculus」 Combining Differentiation,Integration, Development, Series, Differential Equations, Differences, Summation, Equations of Differences, Calculus of Variations, Difinite Integrals,- with Applications to Algebra, Plane Geometry, Solid Geometry , and Mechanics. を著す。

Baldwin and Cradock, London; 47, Paternoster-Row.

p.599 の脚注に次の記載がある。

"***The subject has been mentioned by Leibniz,Euler,&., and has been systemalized by M.Liouville, in the Journal de l'Ecole Polytechnique for 1832, and after him by S.S.*, p.573 in the first and third numbers of the Cambridge Mathematical Royal Society of Edinburgh. Professor Peacock has proposed another and a distinct system in his well-known report on the state of analysis(Proceedings of the British Association, third meeting).***

To avoid perpetual reitertion of names, we may here state that the system of MM.Liouville, &c. takes as the fundamental function e^x ***and Dr.Peacock takes*** x^n "

*について、p.573 にある等式の証明に関して脚注に次の様な記載がある。

"***For this proof ,which is much shorter than the one usually given , I am indebted to a writer who signs S.S. in the Cambridge Mathematical Journal, (Vol, i. p.17.)***"

S.S. = Greatheed,S.S.のこと

1849　「Trigonometry and Double Algebra」＝「三角法と二重代数学」

* 二重代数学＝複素数の代数学の意

[E-6] Boole, G（George、1815-1864)

イギリスの数学者、論理代数

Lincoln リンカーン（England 東部 Lincolnshire リンカーンシャ州の州都）生まれ。1849 年　Cork（アイルランド共和国南部コーク県主都）の the Queen's College の 数学主任に任命される。

1844　On a General Method in Analysis.

Philosophical Transactions Royal Society.London v.134 (1844), pp.225-282

1847　「The Mathematical Analysis of Logic」=「論理学の数学的解析」

1854 「An Investigation of the Laws of Thought」＝「思考法則の探求」
1859 「Treatise on Differential Equations」演算子法

[E-7] Cayley,A (Arthur, ケーレー,1821-1895)

ケンブリッジ大学、トリニテイの卒業、代数学、幾何学で功績
１８６３年～ケンブリッジ大学サドラー教授職,

1880 年　Note on Riemann's paper "Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation , Werke , p.331-344 . Mathematische Annalen,Vol.16,pp.81-82.

において、Rieman の定義に付随する補関数（特に任意定数の無限付くこと）について批判した。シルベスターと親交.

Ⅲ. リーマンと分数階微分

1. Riemann の大学１学年の論文

Riemann, B (1826-1866)

年代期:

1842-1846 年 リューネブルク(Lüneburg)のヨハネ・ギムナジュウムで学ぶ。

1844-1846 年 リューネブルクのアウフ・デン・カウフ通り・ゼッファー家に居住..

1846 年　ゲッチンゲン大学に入学、Sommersemester(夏学期)
は M.A.Stern（シュテルン,1807-1894)の方程式の数値解法、
Wintersemester(冬学期,１０月から翌年３月）では
シュテルンの定積分の講義とガウスの最小２乗法の講義を聴く。

1847 年　ベルリン大学でディリクレ[教授：1831-55]、ヤコビー、
アイゼンシュタインの講義を聴く。

*ヤコビーは１８５１年2月１８日に死亡[47 才]。

*アイゼンシュタインは１８５２年１０月１１日に死亡[29 才]。

*ディリクレは１８５５年からはゲッチンゲン大学教授（ガウスの後任）１８５９年5月５日死亡

１８４７年の1月１４日日付の草稿（リーマン２０才, ゲッチンゲン大学の第一学年の時に書かれた事になる）
「Versuch einer Auffassung der Integration und Differentiation 」を残す。
死後は発表された。

Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass. Heinrich Weber 1876.ed.publ.pp.331-344.

において漸く収録公表された。リーマンがどうして任意位数（分数）階微分を研究テーマに選んだのか。

どのような経緯で書かれたのか、どのような予備的な情報を持ち合わせていたか。すでに１８４０年頃にはリュービルは、ほぼ、Fractional Calculus の一連の研究を終えていた。

しかも、内の３件は、クレル誌（１８３４年２件、１８３５年１件）に掲載されている。それらの研究とは無縁であったのか。論文では僅かにラグランジュの名前が記号の導入に際して使われているだけで他の名前も文献も見あたらない。ゲッチンゲンの解析学の教授 Stern に何か関連がないのか。リーマンの独創の翼は遙かに時空を超えているとはいえ興味深い。

1848 年　　引き続きベルリン大学で学ぶ。

1849 年　　夏学期開始のためゲッチンゲンに戻る。

Bernhard Riemann's Lebenslauf. p.544 に次の記載がある。

" ***Er bezog daher Ostern 1847 die Universitat Berlin,*** ***wo Jacobi, Lejjeune Dirichlet und Steiner durch den Glanz ihrer Entdeckungen, welche sie zum Gegenstande ihrer Vorlesungen machten, zahreiche Schuler um sich versammelten . Er blied dort zwei Jahre, bis Ostern 1849, und horte unter Anderem bei Dirichlet Zahlentheorie, Theorie der bestimmten Integrale und der partiellen Differentialgleichungen, bei Jacobi analytische Mechanik und hohere Algebra."***

Harold T.Davis は 著書 ***The Theory of Linear Operators . The Principia Press, Bloomington,Indiana , 1936 , p.20*** においてつぎの記述を残している。

" ***New impetus was given to the study of fractional operators by a paper written by B.Riemann in 1847 while he was still a student but which was not published until 1876, ten years after his death. His approach to the subject was through a generalization of Taylor's series, but as has already been stated ,he found himself in difficulties over the interpretation of the complementary function. An account of the Riemann theory will be found in section 9, chapter 2*.***

* (***Davis*** の 本の ***pp.72-76*** が該当)。

The editors of Riemann's works, who are responsible for the appearance of this paper, remark that the manuscript was probablenever intended for publication since the author would not have recognized in his later work the validity of the principles upon which it rested."

また、ラウグヴィッツ[1932-]はその著書（下記の[DL] 邦訳の p.138 において次の記述をしている。

”若き日のリーマンは１８４７年に出版する可能性について、家に書き送っている。 W.354-366 についてのものである. なぜ実現しなかったのかはわからない. また, なぜ彼が, 新しい研究を出版しようという,ヤコビーの申し出に従わなかったのかもわからない. 彼は、若い頃の方が勇気があったのであろうか, あるいは,出版するには余りに乏しい内容だったのであろうか,あるいは,それ以上の結果を発見するために,自分の方法を使いたかったのであろうか. 最後のものが、最も可能性が高く思われる.”*

* 同書 参考文献 p.403 に Neuenschwander,E.1981c《Lettres de Bernhard Riemann ā sa famille.》Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques 2,pp.85-131.

[DL] １９９８年に邦訳 リーマン 人と業績 シュプリンガー・フェアラーク 東京株式会社 訳者 山本 敦之, 著者 D.Laugwitz が出版された。 p.59-p.62 にかけてこの 1847 年の論文について興味ある記述がある。
原書は「Detlef Laugwitz: Bernhard Riemann 1826-1866: Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik（Vita Mathematica, Bd.10)）, Birkhäuser Verlag AG . 1996.」

R.Dedekind -H.Weber 編 B.Riemann's gesammelte mathematische Weke und wissenschaftlicher Nachlass,Teubner,第２版 1892.,pp.353-366.
Nachträge, M.Noether-W.Wirtinger 編、1902
Collected Works（H.Weber,ed),pp.354-360. Dover reprint,New York,1953.
R.Narasimhan Springer & Teubner

Ⅳ. もう一つの潮流 ： Kelvin卿と Heaviside そして Hardy へ

(1). Thomson ,W（William,トムソン, 1824-1907、Lord Kelvin ケルビン卿）
グラスゴー大学の数学教授 James Thomson の子供として生まれる。ケンブリッジ大学卒業（１８４５)、グラスゴー大学教授（１８４６－１８９９)、熱力学、電磁気学、数理物理学の業績の他に、大西洋の海底電線の敷設に理論的貢献。１８４５年から１８４７年にかけて Liouville と親交があった。コペンハーゲン大学の数学史家 Jesper Lützen は著書「 Joseph Liouville 1809-1882: Master

of Pure and Applied Mathematics」、Springer-Verlag ,1990 の p.134 において　次のように述べている。

"However, Liouville's closest British friend and most talented foreign protége was William Thomson."

Thomson,W. and Tait, P.G. 「Treatise on natural philosophy 」(1.ed.Oxford 1867), 2.ed　2Vols　Cambridge 1879-1883.

(2)　Heaviside, O (Oliver, オリバー・ヘビサイド、1850-1925)

Heaviside's operational calculus (ヘビサイド演算子法) の考案者

$$\frac{d}{dt} = p\,, \quad \frac{1}{p} = p^{-1} \qquad p^{n} f(t)H(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

$$p^{n} H(t) = 0 \quad (n \text{ は　正の整数})$$

$$p^{-n} f(t)H(t) = \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t)\,(dt)^n$$

$$p^{-n}\ H(t) = \frac{t^n}{n!} \quad (n : 0 \text{ または　正の整数})$$

ここで、 H(t) は ヘビサイドの単位 *step* 関数 .

1. Electromagnetic Theory, London 1(1893);,2(1899);, 3(1912).
2. On Operators in Physical Mathematics. Part I
   pp.504-529 Proc.Royal Soc., vol.52(1893),p.516
3. On Operators in Physical Mathematics. Part II
   pp.105-143 Proc.Royal Soc., vol.54(1893),

上の文献の２の p.516 において Heaviside は次のように書いている。

The sum total of the subject of generalized differentiation is contained in the remark made on p.197 of the second part (誤り、正しくは ***the first part***) ***of Thomson and Tait's ' Natural Philosophy,' paragraph (n),relating to the process by which sphrical harmonics of any degree may be derived from the reciprocl of a distance:***
—"The investigation of this generalized differentiation presents difficulties which are confined to the evaluation of, and which have formed the subject P_s ***of interesting mathematical investigations by Liouvile, Gregory,Kelland and other."***
I was somewhat struck with this remark when I was first read it, inng to plough my way through the fertile though rather

heavy field of <u>Thomson and Tait,</u> but as the subject was nosoonermentiond than it was dropped, it passed out of inind. Nor did the absence of any refrence to the subject in other mathematical works, and in papers concerning mathematical physics generally, tend to preserve my recollection of the remark. Only when the subject was forced upon my attention in the above manner did I begin to investigate it, and not having access to the autorities quoted, I was compelled to work it out myself. I cannot say that my results are quite the same, though there must, I think, be a general likeness. I can, however, say that it is a very interesting subject, and deserves to be treated in woks on the Integral Calculus, not melely as a matter concerning differentiation, but because it casts light upon mathematical theory generally, even upon the elements thereof. And as regards the following brief sketch, however imperfect it may be, it has at least the recommendation of having been worked out in a mind uncontaninated by the prejudices engendred by prior knowledge acquired at second hand. I do not say it is the better for that, however.

(n) It is worthy of remark that these,and every other spherical harmonic, of whatever degree, integral, real but fractional, or imaginary,are derivable by a general form of process, which includes differetiation as a paticular case.

Thus if $\left(\frac{d}{d\eta}\right)^S$ *denotes an operation which,when s is an integer ,constitutes taking the* s^{th} *differential coefficient, we have clearly*

$$\xi^s = r^{2s+1} \mathrm{P}_s \left(\frac{d}{d\eta}\right)^S \frac{1}{(\xi\eta+z^2)^{1/2}} ,$$

where P_s *denotes a function of s, which, when s is a real integer, becomes*

$$(-)^s \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots(s-\frac{1}{2}).$$

<u>The investigation of this generalized differentiation</u> presents difficulties

which are confined to the evaluation of ,and which have formed the subject of highly interesting mathematical investigations by Liuville, Gregory, Kelland, and others.

If we set aside the factor P_s ***, and satisfy ourselves with determinations of forms of spherical harmonics,we have only to apply Leibnitz's and other obvious formulae for differentiation with any fractional or imaginary number as index,to see that the equivalent expressions above given for a complete spherical harmonic of any degree,are derivable from*** $\frac{1}{r}$ ***by the process of generalized differentiation now indicated,so as to include every possible partial harmonic,of whatever degree,whether integral,or fractional and real,or imaginary. But,as stated above, those expressions may be used,in the manner explained, for partial harmonics,whether finite algebraic functions of*** ξ, η, z, ***or transcendents expressed by converging infinite series;quite irrespectively of the manner of derivation now remarked.***

(3) Hardy,G.H.(Godfrey Harold,1877-1947)

イギリスの数学者、ケンブリッジ大学卒業、１９１９－１９４２年
オックスフォード 大学教授,解析的整数論,リットルウッドとの共同研究。

Hardy の関連論文

1917 Notes on some points in the integral calculus. X L Ⅷ.
On some properties of integrals of fractional order.
Messenger Math.,47, no10, 145-150.

1922 Notes on some points in the integral caluculus LV.
On the integration of Fourier series.
Ibid.,51,no 12,186-192.

1925 Some properties fractional integrals.
Proc. London.Soc. Ser.2, 24, 37-41

1926 Notes on the theory of series,V: On Parseval's theorem.
Ibid,26, 287-294.

1928 Some properties of fractional integrals (I)
Mathematische Zeitschrift,vol.27, no.4, pp.565-606 .

1928 A convergence criterion for Fourier series,
Ibid.,28,no 4, pp.612 − 634.

1932 *Some properties of fractional integrals,* Ⅱ

Ibid,34, pp.403-439.

1936 Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series.
Duke Math.J.,2, no 2,354-382.

1943 Notes on Fourier series. I ; On sine series with positive coefficients.
J.London Math.Soc.,18,no1,pp.50-57.

1945 Riemann's form of Taylor series
Ibid, 20, no 1, 48-57.

最晩年（７８歳）に書かれた１９４５の論文

Riemann's form of Taylor series pp.48-57.

J..London Math.Soc.,20(1945), no.1,48-57 の冒頭の記述を見よう。

1. In his fragment "Vesuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation" [Werke (1976) ,331-344],

Riemann gives the formula

$$(1.1) \qquad f(x+h) = \sum \frac{h^{m+r}}{\Gamma(m+r+1)} D^{m+r} f(x)$$

Here r is fixed, and in general non-integral; m (as always when there is no indication to the contrary)runs through all, positive or negative, integers and D^{m+r} is an operation of generalized differentiation. If r is an integer then the terms for which m <-r disappear, and we obtain the usual form of Taylor's series. The most noteworthy special cases are those in which $f(x) = e^{cx}$ and $f(x) = x^n$

then (1.1) reduces in the first case to

$$(1.3) \qquad e^z = \sum \frac{z^{m+r}}{\Gamma(m+r+1)}$$

and in the second to

$$(1.4) \qquad (x+h)^n = \sum \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+r+1)\Gamma(n-m-r+1)} x^{n-m-r} h^{m+r} ,$$

generalizations of the exponential and binomial series respectively. Riemann writes down (1.4), but not (1.3), explicitly. Both series appear, much later, in the work of Heaviside, and (1.3) is usually reffrred to as " Heaviside's exponential series". Neither Riemann, nor Heaviside attempts any discussion of the "validity" of the formulae . Riemann's point of view is avowedly heuristic, his object being to define D in such a way as to secure formal agreement with (1/1), and Heavisides, as always in his work, deliberately avoids definitions of any kind $.

The "exponential" series (1.3) has attracted some attention from mathematics.

Thus Ingham and Jaffreys have shownthat it is valid asymptotically ‖,
i.e., that

$$\sum_{-M}^{\infty} \frac{h^{m+r}}{\Gamma(m+r+1)} = e^{z} + O(z^{r-M-1})$$

for large positive z, and I have shown that the series is summable to e^{z} by a method of the Borel type †

But nothing seems to have been written about the validity of the general formula (1.1), which I shall consider here. I shall not aim particularly at generality, which would hardly be appropriate; my object is merely to show that the formula is valid, with suitable definitions, in a few of the most obviously interesting cases.

Ⅴ. Weyl と Fractional Calculus

Weyl, H (Hermann,1885-1955)

１９０８年　ゲッチンゲン大学卒業
１９０８年　学位論文
１９０８－１９１３年 ゲッチンゲン大学
１９１３－１９３０年 チュリッヒ工科大学教授
１９３０－１９３３年 ゲッチンゲン大学教授
１９３３年　ヒットラードイツ首相に就任
１９３３年　アメリカに移住プリンストン高等研究所教授（１９５１）

Weyl は 1917 年に重要論文「Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung」を Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in.Zürich 62, 296-302 (1917) に発表した。

この論文は Hermann Weyl Gesammelte Abhandlungen , Band I Springer-Verlag Berlin・Heidelberg・New York , 1968 , pp.663-669. に 収録されている。

全集 pp.663-669

$f(x)$ は $x \geqq 0$ で定義されている連続関数

$f_1(x) = \int_0^x f(x)dx$, $f_2(x) = \int_0^x f_1(x)dx$,… , $f_n(x) := J^n f(x)$, J は積分

$$J^{n+1} f(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-\xi)^n f(\xi) d\xi \quad (n=0,1,2, \cdots)$$

Weyl は $\alpha > 0$ の任意の実数、$f(x)$ の " α-malige Integration" として p.664 の上から3行目において $J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi$.
を与えている。

$$(*) \qquad \varphi(x) = J^\alpha f(x)$$

$\varphi(x)$ が 与えられていて，先の 式 (*) を 満たす 連続関数 $f(x)$ が

が存在するとき，f を "α^{te} *Differetialquotient von* φ "，そして φ は

α-mal stetig differentiierbar であると言う.

the Weyl fractional integral of f of order ν は次式で(ただし、積分変換が存在する関数の族Sに対して)

$$W^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_t^\infty (\xi - t)^{\nu-1} f(\xi) d\xi \ , \qquad \mathrm{Re}\ \nu > 0 \ , t > 0$$

定義される。Miller & Ross の本のp.238 では 族・の定義として
the class of all functions f which are infinitely differentiable everywhere and are such that f and all its derivatives are of order t^{-N} *for all* N, N=1,2,⋯
Lighthill calls such functions " good functions." For example , if Re a >0, then $P(t)e^{-at}$ is of class S for any polynomial P. From our discussion above we see that

if f is of class S, $W^{-\nu} f(t)$ $(\mathrm{Re}\ \nu > 0)$.

(具体的な変換の式については、多数の公式が記載されている)

the Wey Fractional derivative of f order ν は、the Weyl fractional integral の定義より 次の式で与えられている。
$\upsilon > 0$ で n を υ 以上で最小の整数とする

$$W^{\upsilon} f(x) = (-1)^n \left(\frac{d}{dt}\right)^n [W^{-\nu} f(t)], \qquad \upsilon > 0 \ , t > 0$$

[参考]
Editor:A.Erdélyi, Research Associates :W.Magnus, F. Oberhettinge, F.G.Tricomi
Tables of Integral Transforms , Volume Ⅱ.McGRAW-HILL BOOK COMPANY,INC. 1954 の Capter Ⅷ(pp.181-212) は Fractinal Integrals に当てられていて、pp.181-183 にかけて優れた要約があり p.184 には References として，１９１７年

から１９５３年にかけて出版された20編の文献が載っている。Hardy のもの（Littlewood との共著を含む） ５件、Kober ,H の論文３件, A. Erdélyi の論文２編等が含まれている。続いて、８章は、次の構成になっている。

13.1 Riemann -Liouville fractional integrals (pp.185-200)

$$g(y;\ \mu)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^y (y-x)^{\mu-1}f(x)dx$$

を定義としていて９７個の関数の変換式並びに公式が挙げられている。

13.2 Weyl fractional integrals (pp.201-212)

$$h(y;\ \mu)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_y^\infty (x-y)^{\mu-1}f(x)dx$$

を定義としていて

７９個の関数の変換式並びに公式が載せられている。

この Weyl の論文は S.Bernstein［ロシアーソ連の数学者、1880-1968］ の１９１４年の論文 Sur la convergence absolute des séries trigonométriques, Comptes rendus, t.158,pp.1661-1663, seance du 8 juin 1914 の定理,原文を引用すると

Theoreme - Si la fonction f (x) satisfait à une condition de Lipschitz de degré $\alpha > \frac{1}{2}$, *son développement trigonométrique est absolument convergent; au contraire, quel que soit le nombre* $a_1 < \frac{1}{2}$, *il existe des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschiz de degrê* α_1, *dont le dèveloppement trigonomètrique n'est pas absolument convergence.*

の別証を分数階解析（Weyl 積分）を使って見事な証明を与えた。

Weyl の論文の最終定理として以下の様に与えられている。

Satz 4 Die Fourierreihe einer Funktion, die einer Hölder'schen Bedingung mit einem Exponenten $\frac{1}{2}$ *genugt, konvergiert absolut.*

a) Satz 2. Sind c_ν die Fourierkoeffizienten von f, so sind $e^{\frac{\pi i a}{2}}(2\pi\nu)^a c_\nu$

bdiejenigend des a^{ten} *Differentialquotienten von f,* und also konvergiert,wenn f α-mal steitig differentiierbar ist,

die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\nu^{\alpha} c_{\nu}|^{2}$;

b) Ist α ein positiver Exponent $\leqq$ 1 und β < α, so ist f gewiss dann β-mal stetig differentiierbar, wenn es einer Hölder'schen Bedingung der Ordnung α genügt (Satz 1),

ところで Satz1 .は Weyl の論文の p.665 に次の形で与えられている。

Satz 1. Ist α *f(x)* α*-mal steitig differentiierbar, so genü gt f* einer Hölder'schen Bedingung der Ordnung α :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq Const.\,|x_1 - x_2|^{\alpha} .$$

Umgekehrt: ist f eine (für x = 0 verschwindende) Funktion, die einer solchen einer Hölder'schen Bedingung genügt, so ist f (wenn nicht α-mal, so doch) β-mal steitig differentiierbar, wenn β irgendeinen Exponenten $<$ α bedeutet.

そして、p.668 には

Satz 3. Genügt die Funktion f von der Periode 1 einer Hölder'schen Bedingung der Ordnung α und ist β irgendein positiver Exponent $<\alpha$, so konvergiert die Quadratsumme $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\nu^{B} c_{\nu}|^{2}$;

in der c_{ν} *die Fourierkoeffizienten von f bedeuten.*

以上の定理１から４が Weyl の 論文にある全定理である。

$f(x)$ を周期１, (0,1) で連続な関数とする.

$$J^{a} f(x) = \int_0^1 \Psi_{a}(x-\xi) f(\xi)\, d\xi$$

これを ワイルの第２定義と呼ぶことにする。

ここで、 $\psi_0 = -1;\ \psi_n' = \psi_{n-1},\ \int_0^1 \psi_n\, dx = 0 \qquad (n=1,2,3,\cdots\ )$

より，順次 $\psi_n(x)$, $0 \leqq x < 1$ が得られる.

$\Psi_n(x)$ を 区間 $0 < x \leqq 1$ で $\psi_n(x)$ と 一致する周期１の関数とする.

より

$$\Psi_1(x) = -x+\frac{1}{2} \quad , 0 < x < 1,\ 周期\ 1$$

$$\Psi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin 2n\pi x}{n\pi} \quad ,(0 < x < 1)$$

とフーリエ展開できる。

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2in\pi x}}{2n\pi i}$$

一般に、

$$\Psi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2n\pi)^k} cos(2n\pi x - \frac{\pi k}{2}) \quad (0 < x < 1;\ r=1,2,\cdots)$$

並びに

$$\Psi_k(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2in\pi}}{(2n\pi)^k \quad i^k}$$

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}$$

n 回積分してみる．(ただし n は正の整数) とする．

$$J^n f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-\frac{\pi i n}{2}} (2\pi\nu)^{-n} e^{2\pi i\nu x} \quad , n\ が正の整数のとき． \quad i = e^{\frac{\pi i}{2}}$$

$$= \int_0^1 \Psi_n(x-\xi) f(\xi) d\xi \ .$$

ここで、よく知られた定理（たとえば, Zygmund の本の p.36 にある定理）を使っている。

定理　*If f(x) and g(x) are integrable and periodic (=1) , so the function (the convolution of the functions f and g)*

$$h(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^1 f(x-t)g(t)dt$$

$$If\ f \sim \sum c_\nu e^{i2\pi\nu x},\ g \sim \sum d_\nu e^{i2\pi\nu x},\ then\ h(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu d_\nu e^{i2\nu\pi}$$

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}$$

$$J^n f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{-\frac{\pi i n}{2}} (2\pi\nu)^{-n} e^{2\pi i\nu x}$$, n が正の整数のとき. $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$

n を実数αに拡大する。これでは、先の Weyl の定理2が使える。

$$J^\alpha f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}} (2\pi\nu)^{-\alpha} e^{2\pi i\nu x}$$

ただし、ここでは所謂 Weyl の分数階積分定義が使用されて（ $0< x < 1$ ）いることに留意しなければならない。

即ち、

$$J^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi .$$

$$J^\alpha e^{cx} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-\xi)^{\alpha-1} e^{c\xi} d\xi = c^\alpha c^{cx}$$

$$J^\alpha f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}} (2\pi\nu)^{-\alpha} e^{2\pi i\nu x}$$

Lerch's (generalized) zeta function

$$\zeta(\Theta;x,\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2m\pi i\omega}}{(x+m)^\Theta} , \quad \Theta > 0, \quad 0 < x < 1, \ 0 < \omega < 1 .$$

$$\zeta(\Theta;x,\omega) e^{2\pi i\omega x} = \Gamma(1-\Theta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [2\pi i(k-\omega)]^{\Theta-1} e^{2k\pi i\nu x} ,$$

この式　を使って

１８８７年に Lerch, M が証明した等式（１９７１、Mikolas 簡便なる別証を与えた）

$$(2\pi)^\theta \Gamma(\theta)^{-1} \zeta(1-\theta;x,\omega) = e^{-\frac{i\pi\theta}{2}} \cdot e^{2\pi i(1-\omega)x} \zeta(\theta;1-\omega,x)$$

$$+ e^{\frac{i\pi\theta}{2}} \cdot e^{2\pi i(-x)} \zeta(\theta;\omega,1-x) ,$$

$$(0 < \theta < 1, 0 < x < 1, 0 < \omega < 1).$$

が導かれる。

また、
$$\frac{\zeta(\Theta;x,\omega)e^{2\pi i\omega x}}{\Gamma(1-\Theta)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}[2\pi i(k-\omega)]^{\Theta-1}e^{2k i\gamma x} ,$$

ここで、$\omega=0$ 、$\Theta= 1-a$ とおくと

先の
$$\Psi_k(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2in\pi}}{(2n\pi)^k i^k}$$

$$\frac{\zeta(1-a;x,0)}{\Gamma(a)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}[2\pi ik]^{-a}e^{2k i\gamma x} \quad , 0 < a < 1.$$
$$= \Psi_a(x)$$

Zygmund , A. :
Trigonometric series , Volume I ,
Second edition Cambridge University Press 1959
Reprinted with corrections and some additions 1968
Reprinted 1990
Miklós Mikolás :
Real Functions , Abstract spaces and orthogonal series 、
Akadémiai Kiadó, Budapest 1994

Ⅵ．最近出版の書籍（Fractional Calculus 関係）

Fractional Caluculus について、近年、専門書の出版（海外）が続いている。主要な物を以下の挙げる。

① An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations / by Kenneth S.Miller,Bertram Ross / John wiley & Sons,Inc/ 1993/ ISBN 0-471-58884-9

② Fractional Integrals and Derivatives :Theory and Applications/ by Stefan G.Samko,Anatoly A.Kilbas, Oleg I.Marichev/ Gordon and Breach Science Publishers /1993/ISBN:2-88124-864-0

③ Fractional Differential Equations / by Igor Podlubny / ACADEMIC PRESS / 1999/ISBN 0-12-558840-2

④ Fractional Calculus and Its Applications / Edited by Bertram Ross / Lecture notes in mathematics （Berlin）; 457 /Springer/1974/ISBN0-387-07161-X

⑤ The Fractional Calculus / By Keith B.Oldham, Jerome Spanier / ACADEMIC PRESS, INC / 1974 /ISBN 0-12-52550-0

⑥ Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / Edited by A.Carpinteri, F.Mainardi, Springer-Verlag Wien New York, 1997

また、工学、物理学の分野でも、関係の研究論文が多数発表されてきている。併せて最近、インドの物理学者（Kiran M. Kolwankar & Anil D. Gangal）によって提出された新定義: Local Fractional Calculus を紹介する。次に、Claude Tricot, Salim Salem,Kiran M. Kolwankar & Anil D. Gangal 等による Fractional Calculus と所謂、微分不可能関数理論（Weierstrass's non-differentiable function, Takagi-function, Riemann's function 他）との関わりの研究を通して、そのグラフの曲線として生じるフラクタル図形についての論議を検討する。

Ross,B.,Samko,S., and Love,E. による共著論文 Functions that have no first order derivative might have fractional derivatives of all order less than one. Real Analysis Exchange/20/140-157.1995 を格別参考にした。当論文の著者３名はいずれも近年の Fractional Calculus 研究の発展に顕著な功績をなしていて、３氏とも１９８９年、日本大学１００周年記念の工学部主催の Fractional Calculus 国際研究集会に来日されている。また Bertram,Ross 氏は、１９８１年５月に日大工学部海外客員教授として来郡されている。当該論文は氏の遺作（論文投函の数日後に心臓発作で死去）となった論文であり、同氏（1917/Oct.18 ～ 1993/Oct.27）のご貢献に対し敬意を表したい。

Ⅶ **Local Fractional Calculus by Kolwankar-Gangal**

$$\mathbb{D}^q f(y) := \lim_{x\to y} \frac{d^q(f(x)-f(y))}{d(x-y)^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \lim_{x\to y} \int_y^x \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{q+1}} dy \quad , \ 0<q<1$$

K.M.Kolwankar & Gangal の f －定義　：

K.M.Kolwankar & Gangal は **the local fractional derivative (LFD) of order q (0<q<1) at x = y** と名付けた。

同時に、K&G は critical order $\alpha=\alpha(y)$ at y を次の様に定義した。

$$\alpha(y)=sup\{all\ \text{LFD}s\ of\ order\ less\ than\ q\ exist\ at\ y\}$$

一方、Hölder exponent h = h(y) of a function f(x) at y とは,

$|f(x)-f(y)|=O(|x-y|^h)$, x は y の近傍の点， $0 < h < 1$

K-Gの 定理1

連続関数 f（x）が x=y で Hölder exponent α, 0 ＜ α ＜ 1 を持つ

⇔ $\mathbb{D}^q f(y)$ = 0 が 全ての q＜α で成り立ち、

1＞q＞α なるqでは $\mathbb{D}^q f(y)$ が 存在しない。

K －G定理１の系

連続関数 f（x）が全ての点 x で critical order が α (共通)であるとき

$dim_B f$ = 2－ α (所謂,モノフラクタル曲線，$dim_B f$ は 関数 f のグラフの *box dimension.*

Kolwankar は、よく知られている、連続－微分不可能関数の一つ Weierstrass 関数（略してW－関数)

$W_{\lambda,s}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} sin(\lambda^k t)$, λ, sパラメータで, $\lambda>1$, $1<s<2$ とする.

t は実数 ,$W_{\lambda,s}(0)=0$ の各点での the critical order が 2－s であることを

証明した。W－関数 のグラフの the box dimension が s であることは知られている。(the Hausdorff 次元は未決定)

備考：以前はλの値が十分大きいと言う制限があった。(たとえば、Fractal Geometry/ K.Falconer/ John Wiley&Sons/1990,Reprinted June 1999/ISBN 0471 9677 7)。

K.M. Kolwankar and A.D.Gangal の引用論文：

① Hölder exponents of irregular signals and local fractional derivatives//Pramana-J.Phys.,Vol.48,No.1,1997

② Fractionl differentiablility of nowhere differentiable functions and dimension/Chaos /Vol.6,No.3/1996

Ⅷ．Ｒｉｅｍａｎｎ関数　$R(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(n^2x)}{n^2}$

この関数のグラフの曲線はマルチフラクタルと呼ばれるもので、取り扱いは格段に複雑、難解なものになるが、Jaffard 氏（フランス）等により精力的に研究が続けられている。Ｒ－Ｓ－ＬはＲ(x)は order 1/2 のヘルダー条件を満たす。即ち $R(x)\in H^{1/2}([0,2\pi])$ を証明している。　ここで、

$$H^{\lambda}([0,2\pi])=\{f(x):|f(x+h)-f(x)|\leqq|h|^{\lambda},\ ^{\forall}x,\ x+h\in[0,2\pi]\ ,\ c\text{は } x,\ h \text{ に依存しない}\ \}$$

$f(t)\in H^{\lambda}([0,2\pi])$, $0<\lambda\leqq1$ で 2π－周期関数とする.このとき $\nu<\lambda$ に対し

$W_D^{\nu}f(t)\in H^{\lambda-\nu}([0,2\pi])$, 同時に $L_D^{\nu}f(t) = W_D^{\nu}f(t)$ をみたす. [Samkoの結果]

ここで, $L_D^{(\nu)}$ は リュービル の ν－微分 .

一方、　$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\, cos(nx) + b_n\, sin(nx)\}$　であるとき

$$W_D^{(\nu)}f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}n^{\nu}\{a_n\, cos(nx+\frac{\nu\pi}{2}) + b_n\, sin(nx+\frac{\nu\pi}{2})\}$$ であった。

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{m^2} & ,\ n=m^2 \\ a_n = 0 & ,\ \text{その他の } n \end{cases}$$ とおく.

$$W_D^{(\nu)}R(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(n^2x+\frac{\nu\pi}{2})}{n^{2-2\nu}}$$ が, $0<\nu<\frac{1}{2}$ で成立.

Ross-Samko-Love（ＲＳＬ）予想：

Ｒ（ｔ）は ν 階Ｗ－微分可能、ただし、$\frac{1}{2}\leqq\nu\leqq\frac{3}{4}$ とする。

備考：G.H.Hardy の１９１６年の論文結果を使うと、
$\nu>3/4$ では少なくとも、π のあるタイプの有理数倍の点では、微分出来ないことが分かる。