

# Gauss の地磁気ポテンシャル

吉田晴代

## 1 はじめに—Gauss の地磁気研究

GAUSS の地磁気研究は、1830 年代初めから 40 年代初めにかけて約 10 年間にわたって行われた。Weber がゲッティンゲン大学の物理学教授に就任したのを契機に、Weber と協力して、Gauss は電気・磁気を中心に物理学の研究に没頭した。地磁気研究もその一部と考えられる。Faraday の電磁誘導の発見には強い刺激を受けたようである。Gauss の物理学への関心は、主にいろいろな現象を数学的に表現することにあつた。他方、この時期の Gauss はゲッティンゲン大学哲学部長を務めたり、ロンドンのロイヤル・ソサエティーからコプリー・メダルを贈られるなど功成り名を遂げた学者であつた。数学の研究はあまりしていないようだし、生涯の仕事だつた測地学研究も途絶えがちであつた<sup>1)</sup>。

Gauss が地磁気を研究した<sup>2)</sup>のは、数学史においては一つのエピソードにすぎないかもしれない。しかし地磁気学の歴史にははかり知れない影響を与えた。地磁気学における Gauss の主な業績は 3 つある。

- 第一に、Humboldt, Weber と協力して、地磁気観測のネットワークを確立したことである。“magnetische Verein” とよばれたそのネットワークは、ヨーロッパを中心に、ロシア、それから大英植民地をも巻き込む当時としては、大規模なものだつた。Gauss の地磁気理論にとって世界各地から広く観測データを集めることが重要だつたからである。“magnetische Verein” は、毎年、年報 *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins* を発行し、観測データの交換や研究の交流を図つた。Gauss の『地磁気的一般理論』<sup>3)</sup>はもちろん『ポテンシャル論』<sup>4)</sup>も最初はこの年報に掲載されたのである。
- 第二に、これも Weber と共同で、磁気の絶対単位と、それから地磁気観測法を確立したことである。とくに地磁気水平成分の絶対測定法

は、このおかげで地磁気の定量的研究が可能になるという画期的なものだった。

- 第三に、地磁気の数学的解析法を確立したことである。これが、Gauss の『地磁気的一般理論』である。この報告では、Gauss のこの仕事に焦点をあてる。

これら三つのどれをとっても見事なもので、まさに、近代地磁気学は Gauss に始まるといってよい業績である。したがって、その後の地磁気学の展開に重大な影響を与えたことは言うまでもない。

## 2 Gauss の地磁気理論

Gauss の『地磁気的一般理論』は1839年に公刊された。現代の地磁気学の古典である。そのなかで地磁気ポテンシャルというアイデアは今日でも有効である。ここでは、Gauss のもともとの着想に立ち戻って検討する。彼の考えの要点は四点にまとめられる。それを順に見ていく。

第一に、地球内部の地磁気の分布について特別な仮定をせずに、地磁気的一般理論を考察したことである。Gauss によれば、彼以前に、仮想的な無限小磁石の作用をいくつか組み合わせて、地磁気分布の説明を試みた学者はいた。例えば、18世紀に天文学者の Tobias Mayer は、磁石を地球の中心から地球の半径の $\frac{1}{7}$ 程離して置いたモデルを考えた。また Gauss とほぼ同時代の Hansteen は、2個の磁石を組み合わせて地磁気のモデルをつくろうとした。けれどもいずれも複雑な地磁気分布を説明することができなかった。いっそのこと無限個の磁石を組み合わせるという方策も考えられなくはないが、それでは計算が難しくなる。[『地磁気的一般理論』序節.] そこで、Gauss が考えたのは、ポテンシャルを使うことである。そうすれば、地球内部の磁気分布に関係なく、空間の各点に地球からどのように磁力が作用するかを簡単に明らかにできる。[同上第4節.] だが、この Gauss のアイデアについて F.Klein が鋭い指摘をしている<sup>5)</sup>。

扱っているのは物理的理論ではなく、観測結果を球函数によって補間的に表現することであり、したがって、たとえば惑星運動をプトレマイオス的に表現することに相当する。不思議なことに、Gauss は自分の研究の意義についてまったく別の評価をしている。彼は—ニュートンの法則のような意味で—磁力

の本性を解明したと信じていて、以前トビアス・マイヤーが行ったような、個々の磁石の重ね合わせによって地磁気を表そうとする考えに対して序文で強く異議を唱えている。しかし実際には彼のやりかたもマイヤーと同一である。というのは、いかなる球函数も、微小次元に移行する場合には、磁気多極子の作用と解釈できるからである。この極限法を遂行したため、ガウスの展開は有限個の磁石の重ね合わせによって得られたものよりはるかに便利ではあるが、原理的にはこれと異なるものではない。

第二に、地磁気の原因は地球内部にあると仮定したことである。当時も日周変化のような変動磁場に関心をもつ学者はいた。だが、それより何十倍も大きなそして地球内部に原因をもつ主磁場の研究の方が重要であると、Gaussは考えた。[同上第1節.] それに地球外部に地磁気の原因があるとすると、それは電流しか考えられないが、当時はそのメカニズムがうまく説明できなかったからである。そうはいっても、地球外部にも地磁気の原因がある可能性を頭から否定せず、その場合の数学的解析の方法をも示した。[同上第36節—第40節.]

第三に、地磁気は地球表面ではポテンシャルをもつ力（保存力）であることを仮定したことである。[同上第4節.] もしその仮定が正しければ、地磁気の水平成分を地球表面上の任意の閉曲線に沿って線積分するとその値は0になる。そこでGaussは、証明というよりは、むしろ例としてゲッチェンゲン、ミラノ、パリの三地点を結ぶ球面三角形に沿って水平分力を線積分してみせたのである。[同上 第9節—第10節.]

最後に、地磁気ポテンシャルの球函数展開の係数を観測値から決定したことである。[同上第17節—第35節.] まず、地磁気ポテンシャルを、球函数、つまりルジャンドル陪函数を使って展開する。そしてその第4次項までの係数を観測データから決定した。そのために世界中の約100地点から観測データを集めて、最小2乗法で計算した。それらのデータには、観測精度や観測時期がまちまちで、北極や南極のデータはほとんどなく、南半球での観測データも少ないなどの問題点があった。そのわりには計算値は観測値とよく一致すると、Gaussは満足した。磁気北極や南極の位置なども計算してみせた。南極の位置は当時発見されていなかったが、間もなくそれに近い位置に発見されGauss理論は評判になった。そのようなこともあり、よりよい精度の観測データが世界中から偏りなく集められれば、地

球全体の地磁気の分布が自分の確立した地磁気ポテンシャルの式でより正確に表せる、Gaussはそう確信した。その信念がその後の地磁気学の発展の原動力の一つになった。

さて、以上のようなGaussの理論は、地磁気の理論としては画期的であった。けれどもポテンシャル論の応用としてみるとどうだろう。それ以前のポテンシャルに関する議論—Newton, Lagrange, Legendre, Laplaceの重力理論, Poissonの静電気理論等—と比べてどこが違うのか？ それらの成果を地磁気に応用しただけではないか？ Gaussの独自性はどこにあるのか？ そういったことが気にかかる。

### 3 ポテンシャル論との関係

どうしてこんなことを問題にするかといえば、実は、この『地磁気の一般理論』を発表した翌年の1840年に、Gaussは『ポテンシャル論』を発表しているからである。この著作は、1828年のGreenの理論とともにポテンシャル論の古典とされる。このGaussのポテンシャル論と地磁気理論との関係はどうなっているのか？そういう視点からGaussの『ポテンシャル論』を検討する。

Gaussの『ポテンシャル論』の構成はおおよそ次のようになっている。まず第1章から第18章までで、Gauss以前のポテンシャル論の成果が紹介される。ポテンシャルや平衡表面の定義から始まり、Laplace方程式、Poisson方程式、面上に分布する質量により生じるポテンシャルの性質、その微分係数と力との関係、等である。それらには厳密な証明が付されている。『ポテンシャル論』の中核は第29章から第34章までである。その前の第19章から第28章まででは、その中核となる一連の問題を解くための予備定理が述べられ証明されている。それらの多くはGauss独自のものであり、算術的平均値の定理、現在の電磁気学でGaussの法則（積分形）と呼ばれる定理等が含まれている。それでは中核となる第29章から第34章まででは、どんな問題が論じられているかと言えば、それは、19世紀にはDirichlet問題と等価と考えられた問題である。デンマークの数学史家Lützenによると<sup>6)</sup>、Gaussが考えた問題とは次のようなものである。

$V$ を表面 $S$ 上の各点におけるポテンシャル、 $U$ を $S$ 上の所与の有界連続な函数とする。表面 $S$ 上の質量分布 $M$ （質量密度を

$m$ とする) が, 全表面に関する積分

$$\Omega = \int (V - 2U) m ds$$

を最小にするならば,  $S$ 上で  $V - U$  は定数となる. しかもそのような質量分布はただ一通り存在する.

この問題こそ, Gauss の『ポテンシャル論』の中心であり, そしてその後の数学研究に大きな影響を及ぼした. したがって数学的な関心からすれば, ここまで見れば十分である. だが, この問題を定理として証明した後で, Gauss は第 35 章から第 36 章までを続けている. そこに述べられているのは, 第 34 章までで証明した中心的な定理を応用した系であって, それらのうち 2 つの系が『地磁気の一般理論』で応用されている. そこで以下それらの関係をさらに詳しく検討することにする.

『ポテンシャル論』第 35 章の系はおおよそ次のようなものである.

$U$  の形を与えた上で, 任意の表面上の質量分布を求めるのは, 一般には難しい. しかし球面あるいはそれと少し異なる表面であれば, 簡単に求まる.

とくに球面の場合, 球の半径を  $R$  とし,  $U$  の球面調和函数による展開を  $P^0 + P' + P'' + \dots$  とすると, 求める質量密度は,

$$m = \frac{1}{4\pi R} (P^0 + 3P' + 5P'' + \dots)$$

となる.

同じく第 36 章の系 [等質量移動の定理] は次のようである.

任意の質量分布  $D$  に対し, 閉曲面  $S$  上の別の質量分布  $E$  をもって次のようにできる.  $D$  が閉曲面  $S$  に囲まれた空間の全く内部にある場合,  $E$  によって外部の空間すべての点において,  $D$  の分布と同一の作用をさせる. [ $D$  が閉曲面  $S$  の外部にある場合については, 地磁気に直接関係がないと思われるので省略する.]

さてこれらの系が地磁気の考察にどう使われているか見てみよう. まず『地磁気の一般理論』第 32 節である. ここは地球内部に原因を持つ地磁気について考察した部分である. Gauss はここでおおよそ次のようなことを主張している.

質量分布が空間 $T$ の内部のみに存在し、 $T$ の外部空間に作用を及ぼす場合を考える。するとそういう作用を生じる、空間 $T$ 内部での実際の質量分布 $D$ には無数の種々の可能性がある。だがそれらは空間 $T$ の表面 $S$ 上の仮想の質量分布 $E$ で置き換えることができ、その分布は一意的に定まる。

ここで先程の『ポテンシャル論』第36章の系の前半が応用されていることがわかる。

とくに地球表面（球面と考える）のような単純な形状に対しては、磁気流体の密度は簡単に求まり、

$$m = -\frac{1}{4\pi}(3P' + 5P'' + 7P''' + 9P'''' + \dots)$$

となる。但し、地磁気ポテンシャルを、地球の半径を $R$ として、

$$\frac{V}{R} = P' + P'' + P''' + \dots$$

とおく。

ここで、今度は『ポテンシャル論』第35章の系が応用されているのは、明らかである。磁気密度は地球表面上の位置の函数なので、Gaussはこの結果を利用して密度が極大になる場所や極小になる場所を求めている。

次に地磁気理論にとって、いっそう注目されるのが、『地磁気の一般理論』第40節である。ここに至る10節ほどでGaussは、地磁気の原因が地球外部にある場合についても考察している。そしてこの第40節で、内部・外部の両方に原因がある場合の地磁気ポテンシャル $W$ の式を求めている。

地球内部に原因をもつポテンシャル $V$ は球面調和函数 $P^0, P', P'', \dots$ で、地球外部に原因をもつポテンシャル $v$ は同じく $p^0, p', p'', \dots$ で展開されるものとする。すると

$$V + v = W, P^0 + p^0 = \Pi^0, P' + p' = \Pi', P'' + p'' = \Pi'', \dots$$

となる。とくに地球表面では、地球の半径を $R$ とすると、

$$\frac{W}{R} = \Pi^0 + \Pi' + \Pi'' + \dots$$

となる。ここで鉛直成分

$$Z = Q^0 + Q' + Q'' + \dots$$

を考慮すると、最終的に次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} 3P' &= \Pi' + Q', & 3p' &= 2\Pi' - Q' \\ 5P'' &= 2\Pi'' + Q'', & 5p'' &= 5\Pi'' - Q'' \\ 7P''' &= 3\Pi''' + Q''', & 7p''' &= 4\Pi''' - Q''' \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

それらの式に、『ポテンシャル論』第35章の系を利用すると、ポテンシャル $V$ 及び $v$ を生じる磁気分布の密度が計算できる。この結果について Gauss は、これで地球外部に原因を持つ部分に大きな値を与えるべきか否かを判定する方法が得られた、と述べている。この方法は後に、地球内部のみならず、地球外部にも地磁気の原因があると考えられるようになったとき、重要な意義をもつことになった。

以上のように、Gauss は地磁気の考察にポテンシャル論の定理を利用していた。そして、『ポテンシャル論』発表以前に磁気や地磁気の考察に使っていたそれらの Gauss 独自の定理を、最後に『ポテンシャル論』のなかに位置づけ厳密に証明を与えたといえる。その際に注目したいのは、後の数学研究にも大きな影響を及ぼした「19世紀には Dirichlet 問題と等価と考えられた問題」が、地磁気の数学的解析に必要な定理の基礎でもあったことである。

## 4 Gauss 以後の展開

Gauss の地磁気研究は『ポテンシャル論』でほぼ完了した。それから半世紀近くになつて Gauss 理論は地磁気学をリードした。だが1880年代になって、一方で観測データが蓄積し、他方で電磁気学が急速に発展すると、両者あいまって、Gauss 理論に修正を迫る動向が現れた。その代表的なものとして次の二つをとりあげる。それらは各々、第2節で述べた Gauss の地磁気理論の第二の仮説および第三の仮説と関係があるからである。

一つは、Stewart, Schuster による日周変化の理論<sup>7)</sup>(1882—)である。その理論は、地磁気の原因が地球外部にもあると主張し、そのメカニズムを説明する説(ダイナモ説)<sup>8)</sup>を提示した。しかし Gauss もその可能性をまっ

たく否定したわけではない。数学的解析という点では、Gauss の地磁気ポテンシャルの枠内で解決する問題だった。

もう一つは、Schmid の鉛直電流<sup>9)</sup>の理論<sup>10)</sup>であった。その理論によると、地磁気にはごくわずかだがポテンシャルを持たない部分があり、その部分は地球表面を垂直に横切る電流により生じると解釈できる。これは Gauss 理論の成否に関する重大な問題であった。その問題を考察する鍵は、Gauss 理論の中にあった。地球表面上の閉曲線に沿って地磁気力を線積分するという方法である。もしその閉曲線に囲まれた部分に鉛直電流が存在すれば、積分の値は 0 にならず、その値から電流密度もわかる。そこで当時のいろいろなデータに基づいていろいろな閉曲線に沿った線積分の計算が行われた。そして鉛直電流の存在や根拠をめぐる論争が起きた。この論争に日本の物理学者田中館愛橘<sup>11)</sup>も加わった。田中館の鉛直電流の研究<sup>12)</sup>についてここで詳しく述べることは、紙数の都合で割愛する。そこで、ここでは 19 世紀末から 20 世紀初頭にかけて Gauss 理論の成否をめぐる論争が生じたとき、日本の物理学者がその論争に関与したことを指摘するにとどめたい。

以上のように 19 世紀末になって Gauss の地磁気理論に修正を迫る動きが生じた。その原因は何かといえ、ちょうどそのころ地磁気研究は転換期にあったことによる。Gauss 理論のおかげで地磁気現象の数学的解析は非常に進歩した。それとは対照的に地磁気現象の物理学的解析は立ち遅れが痛感されていた。Gauss の地磁気ポテンシャルの球函数展開の各項が物理的には何を意味するのかさえ、解明しきれていなかった<sup>13)</sup>。さらに複雑な地磁気現象の物理的メカニズムを解明するにはそれ以上に多くの困難があった。だが、同時に観測データの蓄積と、電磁気学のような近接分野の発展が、そうした物理学的側面への研究の気運を促進した。もちろん本格的な地磁気現象の物理学的研究の発展ためには、よりいっそう多方面の観測データとよりいっそう新しい物理学理論が必要だったのだが、この時期に地磁気学はそういう方向に歩みだしていた。上に挙げた 2 つの事例はそれを象徴する出来事だった。そしてそういう紆余曲折をへて、Gauss の地磁気ポテンシャルは、地磁気学のなかで、地磁気分布の数学的解析手段という今日の地位を確立した。

#### 【文献と註】

- 1) ダニングトン著、銀林浩、小島毅男、田中勇訳『ガウスの生涯』、東京



図書, 1976. とくに第11章から第13章. Kenneth O. May “Carl Friedrich Gauss”, C.C.Gillispie ed. *Dictionary of Scientific Biography*, vol.5, 1970, pp.298—315.

2) G.D.Gerland, “The Contribution of C.F.Gauss to Geomagnetism”, *Historia Mathematica*, 6(1979), pp.5-29.

3) C.F.Gauss “Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus”, Heraus. v. Gauss u. Weber, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Verins im Jahre 1838*, Leipzig 1839. *Werke*, vol.5, pp.119-180. 邦訳, 山田幸五郎訳「地磁気要論」, 長岡半太郎校閲『東北帝国大学蔵版 科学名著集』第4冊(大正3年), pp.77—184. 以下『地磁気の一般理論』と略称.

4) C.F.Gauss, “Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung Wirkenden Anziehungs- und Abstossungs- Kräfte”, Heraus. v. Gauss u. Weber, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Verins im Jahre 1839*, Leipzig 1840. *Werke*, vol.5, pp.197—242. 邦訳, 愛知敬一, 大久保準三訳「ポテンシャル論」, 長岡半太郎校閲『東北帝国大学蔵版 科学名著集』第4冊(大正3年), pp.1—75. 以下『ポテンシャル論』と略称.

5) Felix Klein 著, 弥永昌吉監修, 足立恒雄・浪川幸彦監訳, 石井省吾・渡辺弘訳『クライン:19世紀の数学』, 共立出版, 1995, p.22. 原著 *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I*は, 1926年に出版された. なお, ここで引用したKleinのような見方に, Gaussが思い至らなかったからといって, 文字通り「不思議なこと」とはいえない. Kleinのような認識は, 地磁気学がある発展段階に達したとき初めて可能になる. それは本報告の第4節で述べたように, 19世紀末から20世紀初頭以後のことであると, 筆者は考える.

6) J.Lützen, *Joseph Liouville 1809—1882 Master of Pure and Applied Mathematics*, 1990, pp.581—9.

7) B.Stewart, “On the Cause of the Solar Diurnal Variation of Terrestrial Magnetism”, *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 5th series, vol.xxi(1886), pp.435-45. A.Schuster, “On the Diurnal Period of terrestrial Magnetism”, *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 5th series, vol.xxi(1886), pp.349—59.

8) 大気上層中に導電層があり, その大気が太陽により熱せられ, 対流により地球磁場の磁気指力線を横切って動く. そのため起電力が生じ電流が流

れるというメカニズムである。20世紀になって電離層の発見により証明された。

9) 最終的には観測誤差のせいとされ、地磁気学から姿を消すが、19世紀末から20世紀初頭にかけて、非常な議論の的となった。こういう考えが生じた直接のきっかけは、1880年代の最新のデータを利用して Gauss の地磁気ポテンシャルの式の係数を計算しなおしても、Gauss の時代に比べ、計算値と観測値との差がいつこうに縮まらなかったことによる。

10) A.Schmidt, "Mitteilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetisch Potentials", *Abh.d.II.CL.d.k.Ak.d.Wiss.*, XIX.Bd., I Abth., 1889, pp.2-66.

11) 田中舘愛橘(1856-1952)は、お雇い外国人教師の後を継いで最初の東大物理学科教授となった。震災予防調査会、東大航空研の設立などで貢献したことで知られる。主な専門分野は地磁気研究で、1880年代から20世紀初頭にかけて、地磁気測定機器の開発、日本の地磁気測量、さらに鉛直電流等の地磁気の理論的研究に活躍した。しかし、それらの学問的業績はあまりよく知られていない。

12) Tanakadate, "A Magnetic Survey of Japan reduced to the epoch 1895.0 and A.the sea level carried out by order of the Earthquake Investigation Committee", *Journal of the College of Science, Imperial University of Tokyo, Japan*, vol.XIV, 1904. 鉛直電流の考察については, pp.122—9.

13) L.A.Bauer, "The Physical Decomposition of the Earth's Permanent Magnetic Field—No.1. The Assumed Normal Magnetization and the Characteristics of the Resulting Residual Field", *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity*, vol.IV(1899), No.1, pp.33—52.