Henri Poincaré
et les 《 Méthodes nouvelles de la mécanique céleste 》 [*]

堀 井 政 信 [†]

2017年10月14日

Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994 を読み進めています. "Quelque problèms fameux enfin résolus⋯ et les autres (ついに解かれた有名な問題⋯とそれ以外)" (2016.10.8) では, 四色定理, 三体問題, フェルマーの定理について述べました.

本報告では, "Quelque problèms fameux enfin résolus⋯ et les autres" と "Henri Poincaré et les 《 Méthodes nouvelles de la mécanique céleste (天体力学の新しい方法)》" で昨年割愛した部分について述べます.

1. Quelque problèms fameux enfin résolus⋯ et les autres

⋯

> D'autres problèmes fameux ont mobilisé l'attention et l'énergie de nombreux mathématiciens, comme les 《 23 problèmes 》 proposés par David Hilbert lors du congrès international des mathématiciens à Paris, en 1900. Ou encore la 《 conjecture de Poincaré 》, visant à caractériser la sphere. dans un espace à trois dimensions, comme le seul espace lisse compact dont tout 《 lacet 》 peut être déformé continûment sur un point. Une généralisation de cette problématique dans les espaces à quatre dimensions a montré combien ces espaces à trois et quatre dimensions sont riches (et subtils) dans l'étude de la topologie. Mais restent non résolues bien d'autres conjectures fameuses chez les mathématiciens. Donnons-en un seul exemple : en théorie des nombres, la 《 conjecture de Riemann 》 affirme que les seuls zéros non triviaux de la fonction $\zeta\ (s) = \sum_n n^{-s}$ ont pour partie réelle 1/2. Si on en apportait la preuve, cela ne concernerait pas seulement la théorie des nombres ; il y aurait des retombées dans bien d'autres parties des mathematiques.

[*] 津田塾大学 数学・計算機科学研究所第28回数学史シンポジウム, 2017.10.14〜15

[†] ウェブサイト　高校教員が始めた数学史　http://nifty3.my.coocan.jp/mathhis.htm, メールマガジン http://archive.mag2.com/0000125834/index.html

(a) *Henri Poincaré et les 《 Méthodes nouvelles de la mécanique céleste 》*

En 1889, le prix fondé par le roi Oscar II de Suède et de Norvège est décerné à Henri Poincaré pour son mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.* Le sujet principal en est le mouvement de trois masses ponctuelles soumises à l'attraction newtonienne. Développé dans les trois volumes des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, parus respectivement en 1892, 1893 et 1899 et récemment réédités, ce travail constitue l'une des sources majeures des mathématiques du XX^e siècle. Deux théories en sont directement issues : la théorie des systèmes dynamiques, qui est l'étude qualitative des équations différentielles, et la théorie ergodique, qui décrit les propriétés probabilistes des transformations. La vision théorique de la mécanique céleste en est sortie bouleversée : Poincaré prouve l'existence de séries décrivant les mouvements planétaires dans lesquelles le temps n'apparaît que dans des termes périodiques - les 《 séries de Lindstedt 》 qui, contrairement aux 《 anciennes 》 séries de perturbation, ne contiennent aucun 《 terme séculaire 》 croissant indéfiniment avec le temps - et, dans le même temps, il prouve la divergence de ces séries dès que plus de trois corps sont en jeu.

Plus généralement, il démontre, dans un sens restreint il est vrai, la 《 non-intégrabilité 》 du problème des trois corps. C'est une rupture radicale avec la philosophie des mécaniciens du XIX^e siècle, car cela oblige le mathématicien à substituer à la recherche d'une expression analytique des mouvements une description qualitative de ceux-ci, introduisant ainsi la topologie dans le bastion de la mécanique. Il laisse cependant entrevoir, bien que n'y croyant sans doute pas, la possibilité de 《 miracles arithmétiques 》 qui, malgré les 《 petits diviseurs 》 provenant des résonances approchées entre mouvements planétaires, forceraient la convergence de certaines des séries en jeu et impliqueraient l'existence de solutions 《 quasi périodiques 》. Ces 《 miracles 》 ont eu lieu : c'est la célèbre théorie 《 KAM 》 de Kolmogorov, Arnold et Moser. Arnold a pu ainsi prouver, au début des années soixante, la stabilité d'un système solaire dont les masses planétaires seraient infinitésimales.

…