# 黎明の多変数関数論

高瀬正仁（数学者・数学史家）

## 多変数関数論の黎明期を問うということ

多変数関数論の黎明期ということを考え始めたころを回想すると，ほとんど多変数関数論に心を寄せ始めた当初にさかのぼるように思う．すでに 40 年を越える昔日の出来事であり，当時の心情の細部まで正確に再現するのはむずかしいが，岡潔先生の数学論文集に耽溺した体験が具体的な契機になったと思う．多変数関数論は数学の一領域としてまとまった理論体系を備え，有力なテキストも何冊か存在した．日本語で書かれたテキストとしては一松信先生の著作『多変数解析函数論』（培風館）があり，英語のテキストではガニングとロシの共著の著作"Analytic Functions of Several Complex Variables"（多複素変数の解析関数）が広く読まれていた．偏微分方程式論で名高いヘルマンダーの著作"An Introduction to Complex Analysis in Several Variables"（多変数複素解析入門）もあり，翻訳も出版されていた（『多変数複素解析学入門』，訳：笠原乾吉，東京図書）．これらのテキストのほかに，今日の多変数関数論の枠組みの形成に寄与したアンリ・カルタンのセミナーの記録なども参照することができた．難解な場面が相次いでっさらさらと理解するというわけにもいかず，全容を把握するには膨大な日時を要したが，読むほどに深まっていく疑問もまたいくつも存在した．これらのテキストには多変数関数論の「理論」が記述されている．だが,「理論」が妨げている事柄もまた多いのである．

「理論」を理解することがかえって何事かの理解を妨げるというのはどのようなことであろうか．そのようなことはあるはずはないという感じは確かにあるが,「理論」が何事かを覆い隠しているということはありうるのであり，一般的に言えば，それは「理論」の形成を誘う萌芽となった「一番はじめの問題」である．それを解かなければ一歩も先に進むことができず，それを解くことができたなら，過程と帰結を通じておのずとまとまりのある「理論」が形成される問題．それが「一番はじめの問題」である．多変数関数論の場合なら，これに該当するのは「ハルトークスの逆問題」であろうと思われるが，ここには大きな疑問が伴っている．なぜなら，この問題は多変数関数論のテキストでは「レビの問題」と呼ばれていて，岡潔先生がこれを解いたと記されているにもかかわらず,「ハルトークスの逆問題」という呼称を使用しているのは「レビの問題」の解決に成功した当の本人の岡のみだからである．

岡の論文集には「ハルトークスの逆問題」と明記され，第 1 論文から第 9 論文までの 9 編の論文を通じて一貫してこの問題の解決がめざされている．ところが，各種のテキストを参照すると，その岡が解いたのは「レビの問題」であると書かれている．いかにも奇妙な光景であり，違和感を禁じえなかったものであった．

「レビの問題」と「ハルトークスの逆問題」の関係をめぐって，このような高い壁に直面して行く手をはばまれてしまったが，もし乗り越える方途があるとすればレビやハ

ルトークスの書いた諸論文を探索するほかはない．そうして実際にレビやハルトークスに立ち返ったなら，多変数関数論の形成をうながしたもっとも根源的な契機も見えてくるであろう．それはレビの問題やハルトークスの逆問題を解くということの真の数学的意義を探索することでもあり，レビやハルトークスに先行する数学的世界をこの目で見ようとする営為にもつながっていく．「理論」から出発するのではなく，「理論」が創り出す歴史の壁を越えて「理論」以前の世界に立ち返り，「理論」を生み出した「一番はじめの問題」の姿をありのままに見たいと思う．それが「黎明期を問う」ということに託された課題である．

**多変数解析関数の特異点の分布状況をめぐって**

一般に「レビの問題」と呼ばれ，岡が「ハルトークスの逆問題」と呼んでいる問題は，

擬凸状の領域は正則領域であろうか．

と表明される．領域を考える場所や正則領域の概念など，詳述を要する言葉が並んでいるが，黎明期を問うという視点に立つと，もっとも気にかかるのは領域の擬凸性という概念の出所である．擬凸状という岡の論文集に第 4 論文，第 6 論文，第 9 論文と三度にわたって登場し，第 9 論文では三通りもの異なる言葉で擬凸状領域の概念が語られている．岡に先立って，ベンケがトゥルレンの協力を得て作製した著作

『多複素変数関数の理論（Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen）』（1934 年）

にも擬凸状領域の概念が出ているが，その擬凸性はハルトークスというよりもレビの 2 論文に基づいている．

領域の擬凸性の概念の根源は 1906 年のハルトークスの論文「多変数関数におけるコーシーの積分公式からの二，三の帰結」である．ハルトークスがここで語ったのは「多変数解析関数の特異点は孤立しない」という様子を叙述する「ハルトークスの連続性定理」であり，擬凸状領域の概念を発見したわけではないが，特異点は孤立しないという様子の表現様式に著しい特徴が備わっていた．ハルトークスが関心を寄せたのは解析関数の存在領域の形状ではなく，どこまでも多変数解析関数の特異点であったことに留意しなければならないが，これに加えてハルトークスのいう特異点というのは非本質的特異点と本質的特異点を合わせたものであったことも見逃すことのできない論点である．ハルトークスの意図がどのあたりにあったのか，これだけでは必ずしも明瞭とは言えないが，レビの意図についてはレビ自身が語っていることでもあり疑問の余地はない．レビはヴァイエルシュトラスの発言に疑問を感じ，覆そうとしたのである．

ヴァイエルシュトラスはアーベル関数に関する論文の中で有理型関数の特異点の分布状況に言及し，高次元の複素数空間内のどのような領域についても，そこで有理型関数のように振舞いながら，しかもその領域のどの境界点も特異性を有する関数がつねに存在すると語ったのである．その発言それ自体はさりげないひとことにすぎないが，レビはここに疑問を抱き，ハルトークスの論文の 4 年後に書かれた論文

「2 個またはもっと多くの複素変数の解析関数の本質的特異点に関する研究 (Studi sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due e più variabili complesse)」(1910 年)

において，ハルトークスの連続性定理の力を借りてヴァイエルシュトラスの発言の誤りを示そうとした．有理型関数の非本質的特異点は存在領域の内点に組み込まれている．したがって有理型関数の特異点といえば本質的特異点のことにほかならず，レビは解析関数の本質的特異点の集まりに対してもハルトークスの連続性定理が有効であることを示したのである．この結果，本質的特異点の分布状況は任意とは言えなくなり，ヴァイエルシュトラスの発言は誤っていることとが明らかになった．ハルトークスからレビに移る際に，非本質的特異点と本質的特異点が区分けされた点に留意しておきたいと思う．

**擬凸状領域の概念をめぐって**

レビの思索は続き，複素 2 変数の空間において滑らかな超曲面で囲まれている領域，言い換えると，滑らかな曲面を境界にもつ領域に対して連続性定理を適用した．領域の外側を解析関数の特異点の海をと見る以上，必然的に連続性定理が満たされないわけにはいかず，そのために境界を形成する曲面には特殊な限定が課されることになるであろう．レビはそれを，境界を定める曲面の方程式を $\varphi = 0$ とするとき，関数 $\varphi$ のレビ形式 $L(\varphi)$ の言葉をもって言い表した．レビの創意がもっともよく発揮されたのはこの場面である．ベンケとトゥルレンの著作では「擬凸状」という言葉が提案され，滑らかな境界をもつ領域の範疇において「擬凸状の領域」という概念が定められた．滑らかな境界をもつ領域の境界が，レビが発見した限定条件をみたすとき，それを擬凸状と予防という提案である．これが擬凸状の概念の初出である．対象となるのはあくまでも滑らかな境界をもつ領域であり，任意の領域に対して擬凸性が語られたのではないことを強調しておきたいと思う．

続く論文

「2 個の複素変数の解析関数の存在領域でありうる 4 次元空間の超曲面について (Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni the possono essere frontiers del cameo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse)」(1911 年)

に移ると，レビはなお一歩を進め，逆問題を考察した．逆問題というのは，レビの擬凸性が満たされることを指して，解析関数の存在領域の必要条件と見て，逆に，擬凸性は十分条件にもなっているだろうかと問うのである．レビは「強い擬凸性」を前提として，局所的に逆問題の解決に成功し，大域的にも解けるだろうかという問いを残した．これがレビの問題である．レビの問題というのはあくまでも滑らかな境界をもつ領域を対象にして造形された問題であり，レビの段階ではまだ擬凸状領域の一般概念は現れていないのである．

擬凸状領域の一般概念が獲得されていない以上,「擬凸状領域は正則領域だろうか」という，一般の領域を対象とするレビの問題が成立することは考えられない．ここにおい

て大きな間隙が出現して，今日のいわゆるレビの問題の出所は何かという素朴な疑問に逢着するのである．

この疑問には当初から苦しめられたが，岡の第 4，第 6，第 9 論文に見られる擬凸状領域の概念を見てようやく氷解した．レビが提示して未解決のままに残した問題はいわば原型のレビの問題である．岡が解決をめざしたのは原型のレビの問題ではなく，岡はレビがそうしたようにハルトークスの連続性定理から出発し，一般の領域を対象にして擬凸状領域の概念を抽出したのである．レビと同じ道をたどったことになるが，レビのように滑らかな境界をもつ領域に限定して考察したわけではないから，獲得された擬凸性の概念は一段と高い普遍性を備えている．その代償として，逆問題の解決の可能性は極端に難度が高くなってしまう．解けるとも解けないともつかないというふうであり，逆問題を考えるという，そのこと自体がすでに奇跡のように思えるほどである．岡はレビの足跡のみに示唆を得て，決意を新たにしたことであろう．

岡の眼前に存在したのは原型のレビの問題のみであり，岡はそれをベンケとトゥルレンの著作を通じてはっきりと認識したのである．レビの研究に示唆を得たのはまちがいないが，岡の出発点はレビではなく，どこまでもハルトークスであり，擬凸状領域の概念もハルトークスの連続性定理から直接取り出したのである．第 4 論文に記されている擬凸状領域の定義を見れば，ハルトークスの連続性定理の文言から関数の一語を消しただけで浮き彫りにされる概念であることが諒解される．それゆえ，その擬凸性の概念から出発する限り「ハルトークスの逆問題」と呼ぶのがもっとも相応しく，レビの問題という呼称は不適切なのである．

岡の第 6 論文が公表されたとき，ヨーロッパの数学者の目にはこの論文で報告されたのはレビの問題の解決と映じたようで，それからレビの問題という呼称がすっかり定着した．多変数関数論の根幹を作る擬凸性の概念の由来にこのような経緯が認められる以上，上記の諸事情を精密に明らかにすることは優に多変数関数論の黎明期の基本課題になりうるであろう．

### アーベル関数論を観察して

レビによるレビの問題と岡によるハルトークスの逆問題という多変数関数論の基本問題の出所来歴が明らかになったとして，次の問題はそのような逆問題を問うことの数学的意味である．レビが解析関数の本質的特異点の分布状況を問題にして，っそこにもハルトークスの連続性定理を見ようとした動機はヴァイエルシュトラスの誤った言葉であり，レビはそれを覆そうとしたのである．それならそのヴァイエルシュトラスの言葉はどのような場に置いて語られたのかといえば，アーベル関数の考察の途次のことであった．ヴァイエルシュトラスのいうアーベル関数はだいたいにおいて今日の語法でいうアーベル関数，すなわち多複素変数の空間の全域において意味を付与された解析関数で，多重周期をもち（複素変数の個数を $n$ とすると周期の個数は $2n$ 個），本質的特異点をもたないものと同じである．ヴァイエルシュトラスは 1 複素変数関数論の基礎を構築した人物だが，そのヴァイエルシュトラスは同時に何かしら必然的な理由があってアーベル関数を語らなければならない状況に直面し，しかもそのさなかにあって多変数解析関数の本

質的特異点集合に言及したのである．

多変数関数論にはヴァイエルシュトラスの名を冠する「予備定理」も存在し，全集に収録されている論文

> 「多変数解析関数論に関する二，三の定理（Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze）」

の冒頭に記されている．この論文は 1860 年ころからベルリンで行われた講義の記録だが，予備定理はすでに一般理論に属する命題である．アーベル関数の理論を支える基礎理論の構築が企図されていたのであろうと考えられるが，ここにおいて注目されるのはアーベル関数というものの出所である．探索するとおのずと 1 変数代数関数論の世界へと誘われていく．

1906 年 9 月 18 日，ハルトークスはシュツットガルト市におけるドイツ数学者協会の集会において，

> 「多変数解析関数の領域での新しい研究について（Über neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Variablen）」(1907 年)

という講演を行い，「多変数関数の研究は総じて複素変数関数の理論の研究とほとんど同じくらいはるかな過去に及ぶと主張することもできる」と前置きに続いて，1832 年のヤコビの論文

> 「アーベル的超越物の一般的考察（Considerationes generales de transcendentibus Abelianis）」(1832 年)

を挙げた．ハルトークスは「ヤコビの逆問題」のことを語りたかったのである．ヤコビの逆問題はアーベル関数の出所である．

ハルトークスの言葉をもう少し拾うと，「多変数の場合には，これまでは知られていなかった新しい諸問題が現れる」という指摘に続き，「たとえば 1 変数の場合に現れる孤立零点に代って，多変数の場合には零点の作る連続形成体が出現する」こと，「1 変数の場合の孤立零点に代って，多変数の場合には特異点の作る連続形成体が現れる」ことが語られた．このような事情に由来して，多変数関数論の一般理論の根底に多変数解析関数の零点や特異点の作る連続体の構造の究明が横たわっているという認識が発生する．そこで「ヴァイエルシュトラスは 1 変数関数論を新たな視点から基礎づけて，長期にわたるアーベル関数の研究を通じて多変数関数についても同様に確かな基礎を与えようとした」というのである．これがヴァイエルシュトラスの予備定理の由来であり，ハルトークスの連続性定理もまたこの基礎的認識の延長線上に立ち現れるのである．

**リーマン面とリーマン領域**

こうして多変数関数論の泉は 1 変数の代数関数論であり，その主題はヤコビの逆問題である．多変数関数論の黎明期ということを考えていくうえで 1 変数代数関数論は重い

意味を担い，そのために代数関数論の形成過程の解明という課題が課せられるのである．オイラーに始まる楕円関数論，数学における虚量もしくは虚数の導入，関数の一般概念と代数関数の概念の導入，複素変数関数論の形成など，西欧近代の数学史の根幹を作る主題が次々と重ね合わされていく中で，アーベルの「パリの論文」(1826 年) と

> 「ある種の超越関数の二，三の一般的性質に関する諸注意 (Remarques sur quelques propriété générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes)」(1828 年)

が出現した．「パリの論文」という呼称は，パリに逗留中のアーベルが 1826 年の秋 10 月に書き上げてパリの科学アカデミーに提出したことにちなんだもので，

> 「ある非常に広範な超越関数族のひとつの一般的性質について (Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes)」

という表題の論文である．内容は完全に一般的なアーベル積分に対する加法定理である．もうひとつの論文「諸注意」では対象を超楕円積分に限定したうえで，加法定理が精密に書き下されている．ヤコビは「諸注意」の加法定理に示唆を受けてヤコビの逆問題を提出したが，超楕円積分の中でももっとも単純な形のものに限定すると，

> ヤコビの逆関数とその加法定理
> アーベルの加法定理
> 変数分離型微分方程式系とその代数的積分

という三つ組がヤコビの段階ですでに出揃っていた．この三つ組みを一般のアーベル積分を対象にして揃えることをめざすのがヤコビの逆問題であり，その中核はヤコビの逆関数を見つけることである．多変数関数論との類比をたどると，ヤコビが発見した模型の三つ組はレビの問題に相当し，ヤコビの逆問題にはハルトークスの逆問題が相当する．ヤコビの逆関数は多複素変数の解析関数で，しかも分岐する多価関数である．

ヴァイエルシュトラスとリーマンはいくぶん異なる仕方でヤコビの逆問題の解決をめざしたが，1 複素変数関数論を根底に据えようとするところは同じであり，そのもっとも基本的なねらいは「代数関数とは何か」という問いに答えることであった．アーベル積分は代数関数の積分として認識されるからである．この問いに対し，ヴァイエルシュトラスは代数的形成体，リーマンは閉リーマン面のアイデアをもって応じた．リーマンの立場に立つと閉リーマン面上に（定数以外の）代数関数の存在を確立することが基本定理になり，リーマンはディリクレの原理に基づいてこれを確立しようと企図したが，多変数関数論においてリーマンのアイデアを採用すると，リーマン面に該当するのは高次元の「リーマン領域」である．リーマン領域は多複素数空間上に幾重にも重なり合って広がる多葉領域で，多変数解析関数の存在領域は一般に多葉なリーマン領域になるが，任意のリーマン領域がつねに解析関数の存在領域であるわけではない．まさしくそれゆえに，存在領域でありうるリーマン領域の形状を決定することが多変数関数論の基本定

理になり，ハルトークスの逆問題の真実の意味もまたここにおいて明らかになる．リーマンがディリクレの原理に依拠して遂行したことを，岡はまったく異なる途をたどって遂行した．たとえ登攀路は異なろうとも，同じ頂点がめざされたのである．

**複素多様体の理論と多変数関数論**

岡の論文

> 「多変数解析関数について IX 内分岐点をもたない有限領域（Sur les fonctions analytiques des plusieurs variables IX Domaines finis sans point critique intérieur)」(1953 年)

により，ハルトークスの逆問題は内分岐しないリーマン領域において解決されたが，内分岐領域では未解決であり，ハルトークスの逆問題に相当する新たな問題もまた見つかっていない．そのために多変数関数論の基礎理論は今も確立したとは言えない状態が続いている．基礎理論が確定したなら，その土台の上に多変数の代数関数論の構築がめざされるべきであり，それが岡の多変数関数論研究の本来の構想であった．

夢のような多変数代数関数論について考察するのは現在および将来の課題として，黎明期の情景描写という本稿の課題に立ち返ると，アーベル関数論のほかにもうひとつ，留意しておかなければならない課題が存在する．それは複素多様体の理論と多変数関数論との関係を考察し，所見を表明することである．

リーマンとヴァイエルシュトラスのアーベル関数論を泉として，数学に二つの流れが出現した．ひとつの流れは既述のように多変数関数論である．もうひとつの流れは複素多様体論で，ここにはヘルマン・ワイルの著作

> 『リーマン面のイデー（Die Idee der Riemannschen Fläche)』(1913 年)

の影響が大きく働いている．ワイルの著作で展開されているのは複素次元 1 の複素多様体の理論だが，高次元化をめざして今日の複素多様体の理論が形成された．リーマン自身はリーマン領域の形態のリーマン面を語ったが，ワイルはこれを複素平面から切り離し，解析性という属性のみが遍在する場としてリーマン面のアイデアを語ったのである．内分岐するリーマン領域の分岐点に対応して，多様体概念の高次元化にあたって特異点が内在するように一般化が工夫され，特異点つきの複素多様体が提案されるまでになった．

ハルトークスやレビの研究と高次元複素多様体論は当初は別々の道を歩んだが，それぞれの理論の深まりに伴って融合の道が模索されるようになり，(特異点つきの）複素多様体上の複素解析の構築に向うようになった．この融合は道をまちがえているのではないかと思うが，論拠を提示するにはワイルの著作の精密な再検討が必要であり，それもまた黎明期の考察に課された課題である．

昨年はリーマンの没後 150 年の節目であり，リーマンのアーベル関数論の形成史を主題として，

『リーマンと代数関数論 西欧近代の数学の結節点（Bernhard Riemann and the Theory of Algebraic Functions – The Junction of Modern Mathematics in Western Europe）』（東京大学出版会）

という著作を刊行することができた．これに加えて，現在，多変数関数論に主題を求めて 2 冊の著作を企画しているところである．ひとつは

『多変数関数論の黎明』（仮題）

という本であり，黎明期の多変数関数論の形成史である．もうひとつは，

『岡潔に学ぶ多変数関数論』（仮題）

という本で，内容は岡潔の諸論文の形成過程の解明である．『リーマンと代数関数論 西欧近代の数学の結節点』と合わせて 3 冊の書物を土台として，多変数関数論の将来を展望することができるよう，期待したいと思う．

平成 29 年（2017 年）1 月 18 日