

代数幾何と関連諸分野における主な発展

- 19 世紀以来のイタリア学派による (特に代数曲面の) 幾何学的研究.
- ドイツにおける不変式論の伝統. Hilbert, Dedekind, Lasker, E. Noether (1920 年代), Krull (1920 年代末から 1930 年代) 等による抽象代数, 特に可換環論, の整備. (最近までの発展に関して, 例えば [Eisenbud] 参照.)
- コンパクト・リーマン面, 1 変数代数関数体, 代数曲線の三位一体. 有限体上の 1 変数代数関数体の数論的研究. 類体論 (CFT).
- (1940 年代) Weil および Zariski による数学的に厳密な基礎付け. 抽象的代数多様体. 局所環, 位置, 生成点 (generic point).
- 位相幾何, ホモロジー代数の発展 ([Cartan-Eilenberg 1956] 等), [Grothendieck 1957] による一般化. 層の理論 (Leray).
- 多変数関数論の発展 (岡の不定域イデアル, H. Cartan による層を使った定式化).
- Gelfand による関数環の極大イデアル空間. [Serre 1955] による層・コホモロジーを使用した代数幾何の定式化 (Zariski 位相).
- [Nagata 1956/58], [Cartan-Chevalley Seminar 1955/56], [Shimura 1955] 等による可換環論的整備・定式化. 環上の代数幾何 (相対化).
- [Chevalley Seminar 1956/59] における理論整備に関する様々な試み. 代数的ファイバー束の isotriviality の発見.
- Grothendieck による scheme 理論. 圏・表現可能関手による scheme 理論の一般化. ([Grothendieck-Dieudonné EGA], [Grothendieck FGA], [Grothendieck SGA]).
- [Hironaka 1964] による特異点解消定理 (標数 0) の証明.
- [Deligne 1974] による Weil 予想 [Weil 1949] の解決.
- Hilbert の第 14 問題, 幾何学的不変式論 (Hilbert, Mumford, 永田), 代数多様体の商, moduli 理論. Lie 群論・代数群論の整備. (最近までの状況に関しては [Viehweg 1995] 参照.)
- 複素多様体理論, 複素解析空間論, 超越的代数幾何の発展 (小平, Spencer, Hirzebruch, Atiyah-Singer, 倉西).
- 代数解析の創設と発展 (佐藤幹夫, 柏原, 河合等).
- 数論的代数幾何. Arakelov 理論 (正標数代数幾何・ p 進代数幾何と超越的代数幾何との統合), [Faltings 1983] による Mordell 予想の解決. [Wiles, 1995] による Fermat 予想の解決.
- 直線束や因子の一般化であるベクトル束の本質的活用が可能となった (Bogomolov, 宮岡, 向井等).
- 対数的理論 (飯高, 川又). 対数的 scheme 理論 (Fontaine-Illusie-加藤和也).
- 高次元双有理幾何の発展 (飯高, 川又, [Mori 1988] 等).
正標数代数幾何を使った標数 0 代数幾何の定理の証明 Frobenius 写像 (森, Mehta-Ramanathan 等).

他分野との関わり

離陸・空中浮揚する開集合: Grothendieck 位相, 層, topos. エタール・コホモロジー. ほぼ同時期の 1963 年数理論理および集合論における発展. (F. W. Lawrencce および P. Cohen. 例えば [MacLane-Moerdijk] 参照). コンピュータ・サイエンスとの関連深し. (九大数理・田中俊一氏の教示.)

標準基底・Gröbner 基底: 多変数多項式環や巾級数環のイデアルの特別な生成系. 超曲面の場合の単項イデアルでは天与 (God-given) の生成元があるが, 一般のイデアルでは, 工夫が必要. [Hironaka 1964] の特異点解消で本質的役割.

ほぼ同時期の 1964 年頃, それとは独立に, W. Gröbner とその弟子である B. Buchberger による研究. コンピュータによる数式処理で重要な役割. 抽象代数を経て具象代数の復活. 消去法の復活 ([Eisenbud, §14.1, §15.6] 参照).

ソリトン: 代数曲線と Jacobi 多様体, KP hierarchy, 無限次元 Grassmann 多様体.

共形場理論 (CFT)・超弦理論・量子群: 代数曲線の moduli, Calabi-Yau 多様体, 代数群の圏的定式化 (群スキーム, Hopf 代数) から量子群.

代数的符号理論: Goppa 符号.

参考文献

- [Arakelov 1974] S. Arakelov, Intersection theory of divisors on an arithmetic surface, *Math. USSR Izvestija* 8 (1974).
- [Cartan-Chevalley Seminar 1955/56] Séminaire géométrie algébrique, (1955/56).
- [Chevalley Seminar 1956/59] Classification des groupes de Lie algébriques (1956/58); Anneaux de Chow et Applications (1958); Variétés de Picard (1958/59).
- [Cartan-Eilenberg 1956] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, (1956)
- [Deligne 1974] P. Deligne, La conjecture de Weil, *Publ. Math. IHES* 43 (1974).
- [Eisenbud] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 150, Springer-Verlag, 1994.
- [Faltings 1983] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Invent. Math.* 73 (1983).
- [Grothendieck 1957] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.* 9 (1957).
- [Grothendieck FGA] A. Grothendieck, Fondements de la géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki (1957–1962).
- [Grothendieck SGA] A. Grothendieck et al., Séminaire de la géométrie algébrique, (1960–1964)
- [Grothendieck-Dieudonné EGA] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Eléments de la géométrie algébrique*, *Publ. Math. IHES* 8 (1961), 11 (1961), 17 (1963), 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967); *Grundlehren*, Springer-Verlag, (1971).
- [Hironaka 1964] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Ann. of Math.* 79 (1964).
- [MacLane-Moerdijk] S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory*, Universitext, Springer-Verlag, 1992.
- [Mori 1988] S. Mori, Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, *J. Amer. Math. Soc.* 1 (1988).
- [Mumford 1965] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, *Ergebnisse der Math.*, Springer, (1965).
- [Nagata 1956/58] M. Nagata, A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains, I, II, *Amer. J. Math.* (1956, 1958).
- [Serre 1955] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.* 61 (1955), 9–26.
- [Shimura 1955] G. Shimura, Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the base field, *Amer. J. Math.* 77 (1955).
- [Viehweg 1995] E. Viehweg, Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds, *Ergebnisse der Math.* (3) 31, Springer, (1995).
- [Weil 1946] A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, *Amer. Math. Soc. Colloquium Publ.* 29, (1946).
- [Weil 1948a] A. Weil, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Hermann, Paris, (1948).
- [Weil 1948b] A. Weil, Variétés abéliennes et courbes algébriques, Hermann, Paris, (1948).
- [Weil 1949] A. Weil, Number of solutions of equations over finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949).
- [Weil 1958] A. Weil, *Introduction à l'étude des variétés kähleriennes*, Hermann, Paris, (1958).
- [Wiles, 1995] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, *Ann. of Math.* 141 (1995); R. Taylor and A. Wiles, Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras, *ibid.*
- [Zariski 1935] O. Zariski, *Algebraic Surfaces*, *Ergebnisse der Math.*, Springer, (1935).