(1)

いたる所微分不可能な連続関数の話題

鹿野　健（山形大学・教育）

B. Rieman の論文（1854; Habilitationsschrift [9]）おいて，彼が後にリーマン積分とよばれることになる積分論を，主としてフーリエ級数との関連において展開していることは良く知られている。　前回の講演[4]において指摘したことの1つは，上の論文においてリーマンはその積分の限界についてもハッキリと認識していて，具体例によってそれを示していることであり，その方法が完全に数論的であることを併せて注意した。　そして，その考察が，Weierstrass の論文（1895; [10]）の冒頭の，リーマンによると伝えられている三角級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \tag{1}$$

につながっているという説を述べた。　特に，(1)は後年 Gerver（1970; [3]）が示したように，いたる所で微分不可能（な連続関数）ではなく，リーマン自身がすでに上

記の論文中で述べているように，Gauss和と関連していることからの帰結として，実はある種の x/π の有理数値では可微分となるのであった。ワイエルシュトラスの所に入った情報が正しくなかった(?)ため，彼は(1)の微分不可能性を証明できずに，その替りに独自の例

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

に到達したのも皮肉である。そして更に幸運(!)な事に，(1), (2)のような級数と，いたる所で微分不可能な関数の問題とはその後の数学に興味あるテーマとして多くの研究を生み，予想外の成果をも与える事となったのである（e.g. cf. [5] [8]）

さて，続編としての本論では，前回の講演の際には分っていなかった新しい情報に基いた関連する結果について簡単に述べよう。

まず最初に注意したいのは，リーマンが上述の論文で目指したもの，すなわち，収束する三角級数

$$(3) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

によって表わすことのできる関数とは何か，という基本問題が実は最近ようやく1つの解決を得た，ということ

である。　リーマン自身が上記論文中で述べている事は（言い方を，少々不明確な表現なので，現代風にアレンジすると），『$(0, 2\pi)$ の任意の部分区間上で有限でない関数は（リーマン）可積分でなく，従って収束級数(3)によって表すことはできない』というようなものになろうが，これをルベーグ積分の立場から考察すると次のように完全に解明されるのである。

［定理］(*Konyagin* 1988, [6]) $[0, 2\pi]$ 上の関数 $f(x)$ が，概収束する三角級数（3）によって表わされるための必要十分条件は，$f(x)$ が可測でかつほとんどいたる所で有限となることである。

実はこの定理中の十分性の部分は，1941年に Menšov [7] ですでに証明されていたものであるが，このK+M定理を見ると，上のリーマンの主張がいかに真実をついているかを知って，改めて驚くのである。

次に述べるのは，(1)，(2)のように，三角級数で表される（連続）関数でいたる所微分不可能な例の新しいものについてである。

C. R. Fröberg (1966；[2]) は，リーマンの ζ 関数 $\zeta(s)$ についての"等式"

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

（μ は，Möbius の関数）

に関する研究から，Uppsala 大学の CD3600 計算機を援用する数値実験を経て，次の（複素）三角級数

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e^{2\pi i n x}$$

が，いたる所で微分不可能な連続関数の例である事を述べている。(4)がすべての点で収束して連続関数を表すことは (1)，(2) のように簡単ではなく，Bateman と Chowla (1963；[1]) の中で初めて示されたのであるが，肝心の微分不可能性について Fröberg は "it is perfectly clear" とその「信念」(?)を述べているばかりで，数学的な証明は与えていない。ただ，私見ではその証明は $\zeta(s)$ のリーマン予想と同じか，あるいはそれ以上の深い解析を必要とするように思われるのである。

〈参考文献〉

[1] P.T. Bateman & S. Chowla ; J. of London Math. Soc., 38 (1963) 372～374.

[2](*) C.E. Fröberg ; BIT, 6 (1966) 191～211.

[3] J. Gerver ; Amer. J. of Math., 92 (1970) 33～55.

[4] T. Kano ; Progress in Math., No. 70, 283～290, Birkhäuser, 1987.

[5] T. Kano & H. Tokunaga ; 津田塾大数学・計算機科学研究所報 No. 6, 65～76, 1993.

[6] S.V. Konyagin ; Mat. Zametki 44 (1988) 770～783 = Math. Notes 44 (1988), 910～920.

[7] D.E. Menšov ; Mat. Sb. 9 (1941), 667～692.

[8] H. Tokunaga ; Master Thesis, Okayama Univ., 1990.

[9] B. Riemann ; Collected Works of B. Riemann, 228～264, Dover, 1953.

[10] K. Weierstrass ; Math. Werke, Bd. II, 71～76, Mayer & Müller, 1895.

(*) この論文の存在は，佐藤憲一氏(日大・工)に教えられた。