# 多様体論的幾何学による数学の幾何学化

浪川　幸彦　（名古屋大学教養部）

幾何学というと一般の人々の多くはユークリッド幾何学のことを考える。特に４０歳台以上の世代はそうであろう。しかし今高校で「代数・幾何」として習う幾何学はいわゆる解析幾何学であり、イメージにずれが生じている。（これは特に高校教育の分野で深刻な問題を引き起こした。）両者の区別は１９世紀末に初めて明確に意識され、幾何学の二つの流れを生んだ：

◇絶対幾何学　→　公理論的幾何学
◇座標幾何学　→　多様体論的幾何学。

そして現代数学における幾何学とは、殆どの場合後者の座標幾何学から発展した多様体論的幾何学を意味する。

しかも近年この多様体論的幾何学の枠組みが幾何学を越えて、整数論、解析学の領域に及ぶようになってきた。言わば数学の「統一理論」が多様体論的幾何学の枠組によって実現される可能性が生まれている。

その一方で（というかその結果と言うべきか）図形の無い多様体論が現れ、多様体とは何かについて我々の常識の変革を迫っている。

この機会にこうした多様体論的幾何学の流れを振り返って、未来を展望する基礎としてみたい。

## §１．多様体論的幾何学の成立

### A）ギリシャ時代

ユークリッドの「原本」の後半大部分はEudoxosの比例論に当てられており、これは初等整数論と別になっている。我々の感覚で言えば、有理数は実数の一部であるが、ユークリッドにおいては前者は数論、後者は幾何学の対象であって、まったく別物であった。つまり「数」と「量」とは厳密に区別して考えられていた。正確に言えば「実数」という概念は存在しなかった。従ってそこに座標幾何学の考えが生まれようはずは無い。

しかし実数は無かったが、線分は長さを持つものであった。そして平面の位置を二つの線分で表わすという意味での座標は、（斜交座標を含め）アポロニウスの「円錐曲線論」の中で用いられている。

数を用いた座標は、むしろメソポタミアに由来する。天文学では（当然のことながら）星の位置を表わすのに座標が用いられ、現在のさまざまな用語の多くがそこに起源を持っている。そして球面三角法までもがある程度知られていた。座標幾何学の起源あるいは先史はここに求めるべきであろう。これはアラビアから中世の西欧に受け継がれた。

### B）座標幾何学（解析幾何学）の成立（１７－１８世紀）

ルネッサンスの勃興とともに近代科学が成立した。（現在これより早い１２世紀に近代科学思想の成立を見る立場が有力になっているが、ここではとりあえず現象的に明瞭になった１６世紀以降を考える。）ガリレオの「自然は数学の言葉で書かれている」という言葉に代表されるように、この近代科学には数学が不可欠であった。

デカルト（1596-1650）は中世の神学的世界観に変えて、自然科学的世界観の確立

を主張した。彼はユークリッド幾何学に倣って、それを全自然学に拡張することを企て、その具体化として、1637年に「幾何学」を「光学」、「気象学」とともに著した（これらに付けた序文が「方法序説」である）。

この中で彼は幾何学を扱う一般的方法として代数学を積極的に応用し、座標を用いれば、初等幾何の問題（例えば角の３等分問題）が代数方程式のそれに帰着されること、二次曲線が有理曲線であることなどを示している。こうした取り扱いは彼以前にもヴィエタ等によって行われているが、幾何学の方法論として代数学を用いるという思想性の故に彼をもって解析幾何学の祖と呼ぶことが相応しい。この辺はいろいろ数学史家の間に議論もあるのだが、通説に従っておいて、先へ進む。

解析幾何学による取り扱いが最も相応しいのは二次曲線である。それはWallisによって「円錐曲線」（1655）にまとめられた。また彼によって負の座標が導入されたことも付記しておく。

１７世紀後半にはニュートンおよびライプニッツによって微積分学が確立され、前者はそれを用いて一般力学を建設した（「プリンキピア」1686-87）。これは文字通り近代科学の金字塔であるが、ここでは解析幾何学が当然のこととしてその基盤になっている。ただし現代のような代数的に整備された座標幾何ではないので、非常に分かりにくい（［Y］参照）。

またニュートンによるもう一つの貢献として、（実）平面３次曲線の分類を挙げておこう。円錐曲線をその方程式によって分類することはつとにFermatが企てていたが、ニュートンはこれを３次で実行し、７２個の「型」を得た。（後更に６個が追加された。）

この時代はまだ実数論および位相的概念（連続、極限など）が整備されていないこともあって、解析幾何学と言っても非常に幾何的なものであり、また分かりにくかった。そこで１８世紀後半にはむしろ座標を用いず、幾何的対象を直接代数的記号を用いて記号論理的に取り扱う「綜合幾何学」が主流になり、この傾向は１９世紀前半まで続く。

しかしこの綜合幾何学の発展の中で、Desarguesの画法幾何学に起源を持つ射影幾何学が成立し、射影空間の概念が導入されたことは決定的に重要である（Monge, Poncelet）。さらにこの中で、射影的性質と計量的性質の区別、（空間全体の変換としての）射影変換、双有理変換の概念の導入なども後の幾何学に大きな影響を与えた。

一方座標幾何学としても、３次元空間内の曲線、曲面についての研究が進む。前者についてはつとにClairautが着手し（1731）、２種類の曲率の存在が認識されている。それはMongeによる研究（1771）を経て、Frenet-Serretの公式の発見（1847/50）をもって一応の完成を見る。曲面についての系統的研究としてはオイラーによる断面曲率のそれ（1760以降）を挙げておこう。

C）ガウスの微分幾何学（１９世紀前半）

ガウスについて述べる前に、綜合幾何学の発展について補う。

綜合幾何学、特に平面射影幾何学の一つの完成された形としてPonceletの「図形の射影的性質概論」が1822年に出版される。そして彼の弟子達（Steiner, Chasles等）によって円幾何学などさまざまの幾何学へと分化してゆく。またMöbiusは重心座標を導入し、射影同次座標導入の端緒を作った（それまでは非同次座標のみが用いられていた）。Plückerはこの同次座標をさらに発展させたPlücker座標を導入し、Grassmannによる外積代数に大きな影響を与えた。

ガウスの幾何学に対する決定的寄与は（現代的意味での）微分幾何学の創始である。1827年に出版された論文、「曲面に関する一般的研究」の中で、彼は曲面の微分幾何についての基本的諸定理を与えているが、その方法として、（曲線座標とし

ての）座標近傍、（無限小三角形の面積としての）面積要素などを実質的に得ており、それ等を用いて定理や（曲率などの）概念を定式化している。より重要なのは、曲率が曲面の基本形式のみに依存し、その属する空間には依らないことを示した点である。ガウス自身は空間内の曲面のみを考察したが、これによって図形それ自身を、全体空間を考えることなしに考察するという、リーマンへの道が開かれた。

さらに発表はしなかったが非ユークリッド幾何を知っていたこと、共形変換と複素解析関数の関係を知っていたことも注目される。

D）リーマン　ー　多様体幾何学の誕生

リーマンにおいて初めて多様体幾何学の基本概念が出揃う。ただしそれは統一された（現在のような）形ではなく、かなり年代の離れた二つの仕事に分散されて出る。その両者が本人の中でどのように結び付けられていたのかはよく分からない.

1854年6月10日、彼の提出した教授資格論文の審査が行われた。その最後に行われた公開講演は「幾何学の基礎をなす仮説について」と題されたものであった。（この題名はリーマンが前もって提出した３つの題の中からガウスによって選ばれた。）その中で彼は、「$n$次元多様体」の概念を導入し、曲率などが基本形式から出発して得られる概念であることをはっきりと述べている。さらに多様体自身の変形以外に計量の変形のパラメータが存在し、非ユークリッド幾何学は多様体を変えることなく、計量を変えることによって得られることを注意している。つまりいわゆるリーマン幾何の基本を述べている。ただし座標近傍の概念は無い。一般講演のゆえに内容は概説的で、数式もほとんど無い。数学的に厳密なリーマン幾何流の非ユークリッド幾何の展開は後のクライン、ポアンカレによる。非ユークリッド幾何学の存在を明確に主張したのはガウスの友人F.ボヤイであるが、微分幾何的モデルによってその存在を「証明」したのはリーマンが最初である。

1857年いわゆるCrelle's Journalにリーマンは「アーベル関数論」と題する（彼としては）長い論文を発表する。これは一般のテータ関数を導入していわゆるJacobiの逆問題を解いた画期的な論文であるが、その中で彼は多価関数のリーマン面の概念を導入し、複素１次元解析多様体の理論を展開する。これは多様体幾何学の初めての具体的な展開である。特に「一意化変数」の名の下に、局所座標を導入した意味は大きい。ただしその根底にある位相幾何学的諸概念がまだ無く、彼自身それを準備していたことが死後残されたノートから分かる。またリーマン面上の有理型関数の存在定理の証明の不備をWeierstrassから激しく攻撃されたことは有名な話である。後者は収束べき級数環と、解析接続の原理に基づく独特の（１次元）複素解析的多様体論を展開した。現在の環付き空間を用いる多様体の定義はこれら両者の総合と見ることも出来る（後述）。存在定理を含めた厳密なリーマン面の理論は H. Weyl によって初めて展開された（"Die Idee der Riemannschen Flächen", 1913）。

E）その後の展開　ー　１９００年前後

ポアンカレは様々の仕事をするが、特に位相幾何学の諸概念（基本群、ホモロジーなど）を整備したことは以後の展開において重要である。

またリー、クライン等によって変換群の重要性が指摘された。クラインは、リーマンの、曲率によるユークリッド、非ユークリッド幾何学の分類を拡張する形で、しかし変換群の不変量の研究として（個々の）幾何学を特徴付けた（Erlangen プログラム、1872年就任講演）。リー群論はさらに E. Cartan によって発展させられた。これは多様体の代表例を与える。

これにより解析幾何学的非ユークリッド幾何学はリーマン幾何学とクライン流のそれと二つの流れに分かれることになった．これらを統合するためには，リーマン多様体上に平行移動の概念を定義する必要がある．これは Darboux の動標構、Levi-

Cibitaの平行性などの理論を経て、E. Cartan 等による接続の概念につながっていく。
微分幾何学の諸概念を記述する代数的道具はテンソル代数および外積代数である。Christoffel 記号の導入（1869）を契機として、Ricci は一般のテンソル場を定義した（1887）、これを用いて彼や Levi-Cibita はリーマン幾何学を展開した。テンソル場は局所座標変換に対する変換性によって特徴付けられ、微分幾何学とはテンソル場の理論に他ならないことになる（テンソル解析）。これは非常に便利な道具である一方、大域的概念でありながら表示は局所的なため、その取り扱いに職人芸的な技術が必要であった。そこで諸概念を抽象化して、繁雑なテンソル解析から逃れることが次の世代の目標になる。

テンソル場の中でもベクトル場とならんで最も重要なものは微分形式である。その重要性は E. Cartan によって示された。これは外積代数を用いて記述される。後者はつとに Grassmann によって導入された（1844）ものであったが、理解の困難さによりずっと受け容れられず、Cartan の理論により初めて一般のものとなった。

アインシュタインがこうしたリーマン幾何学の発展の影響の下に、擬リーマン構造を導入して、一般相対性理論を確立する（1915）ことも忘れてはならない。擬リーマン幾何はその後 Weyl, E. Cartan 等によって発展させられる。

この辺の事情について、詳しくは［R］を参照されたい。

F）絶対幾何学　－　公理論的幾何学の成立

１９世紀後半にはユークリッドの公理的方法にも批判的検討が加えられ、近代的なより厳密な公理論が成立した。この過程で公理論的方法と解析幾何学的方法との間に優位性を巡る確執が生じたが、それは無意味であって、両者は単に方法論において異なるに過ぎず、理論としては同等であることを指摘したのは上記 Erlangen プログラムにおけるクラインである。近代的公理論幾何学は最終的にヒルベルトの著書「幾何学の基礎」（1899）に纏められる。ここでその無矛盾性の証明は解析幾何学モデルの存在によって行われ、従って実数論の無矛盾性に帰着されていることも注意してよいであろう．この前提には実数論の公理論的建設があり、それは Peano, Dedekind等によって成された．

## §２．抽象多様体論の成立（公理論化）

### A）線形代数学の抽象化

抽象ベクトル空間は Peano によって公理化された（1888）。しかし抽象線形代数学が普及するのはずっと遅く、1930年代以降関数解析学の進展により、数ベクトル空間だけでは済まなくなってからのことである（ヒルベルトではまだ可算）。

### B）微分可能多様体とファイバー束

今日の意味での微分多様体の定義，すなわちある位相空間とその上の相互に微分可能写像によって関係付けられた局所座標系という形が初めて与えられたのは Vebren-Whiteheadの"The foundation of differential geometry" (1932)あたりではないかと思われるが、原本を見る機会がなくて確かめていない。またリーマンの多様体 (Mannigfaltigkeit) がどう今日の微分可能多様体 (differentiable manifold) に接続するのかも充分跡付けていない。これらの点については調査の不備をお詫びして、後の課題とさせて頂く。

ともかく今日行われる定義および名称は Whitney の記念碑的論文、"Differentiable manifolds" (Ann. of Math., Vol.37, 1936) においては既に確立されている。この中で、彼は微分可能多様体についての基本諸概念および基本的定理、特に可算基を持つ多様体のユークリッド空間への埋め込み定理を与えている。（リーマン多様体とは限

らない）微分可能多様体の理論は（実解析的多様体を含め）彼によって基礎付けられたとしてよい。

これに続いて彼はさらにファイバー束の概念を導入した（1937）。Ehresmann は Cartan 接続に関する仕事の中でこの概念を抽象化し、これを背景にS. S. Chern は、接続がファイバー束の概念を用いて（intrinsicに）定義されることを示した。これによって微分幾何は繁雑なテンソル解析から解放され、しかも様々な接続の概念が系統的に整理されて、新しい大域的な微分幾何が生まれた。それらの成果は1951年の Steenrod の教科書 "The topology of fibre bundles" にまとめられる。

C）位相幾何と微分幾何

1848年に Bonnet によって与えられた公式（Gauss-Bonnet の公式）は、その特別な場合として、閉多様体の場合、（微分幾何的に定義される）ガウス曲率の積分が、（位相不変量である）オイラー標数に等しいことを導く（Gauss-Bonnet の定理）。ファイバー束の理論の進展の中で、Chern類などの特性類が定義されて、この等式は微分幾何学的不変量と位相不変量との様々の関係式として一般化される。

その代表的なものは、Serre によって定式化され、Hirzebruch によって証明された一般型 Riemann-Roch の定理である(1956)。それはさらに Atiyah-Singer の楕円形微分作用素に対する指数定理(1963)へと一般化されるが、これらは層、コボルディズム、K－理論といった抽象理論を用いており、思想的には次節の段階に属する。

一方1931年 DeRham は微分形式によるコホモロジーを定義し、これが位相空間としてのそれに等しいことを示した。これはさらにヒルベルト空間論の見事な応用として調和形式の理論を生む（DeRham, 小平）。また DeRhamは多様体上でのカレントを導入するが、当初はSchwarz の超関数を知らなかったので、充分に明解でなかった。DeRham の定理の証明の代数化は層の導入により始めて可能になる（後述）。

D）リー群論

1925年に H. Weyl はコンパクト・リー群の有限次元表現論を完成させる。この頃量子力学がヒルベルト空間の作用素論として定式化され、ユニタリ表現論が物理学に導入される（Weyl, "Gruppentheorie und Quantenmechanik", 1928)。これは強烈な影響を物理に与えた一方、「群ペスト（Gruppenpest）」などという陰口を生んだ。しかし物理学に「対称性」の概念をもたらした点で、現在場の量子論の進展とともに、むしろその意味はますます大きくなりつつある。

C. Chevalley はリー群論の代数的再構成を目指して、1946年以降代数幾何の基礎付けから着手してセミナーを行い、代数群の理論を半単純群の表現論とともに完成させる。その成果は彼の３巻の教科書となって結実した。後の Grothendieck における用語「概型」が Chevalley 流の代数幾何に由来する事実も見落とせない。

§３．現代多様体論の成立 － 多様体論の代数化

A）代数的位相幾何学の圏論化

それまで組み合せ論的であった代数的位相幾何学は、Eilenberg-MacLane によって導入された圏論を用いて抽象化される。その成果は Eilenberg-Steenrod による教科書 "Foundations of algebraic topology" としてまとめられた（1951）。

またこの間フランスでも H. Cartan による代数的位相幾何学のセミナーが行われ、若き Serre らが参加する（1948-49, 50-51）。ここから（位相的）ファイバー空間の理論が誕生したことの意義が大きい。

B）ホモロジー代数の導入

代数的位相幾何学において（Poincaré によって導入された）（コ）ホモロジーの

概念を Chevalley-Eilenberg はリー群に（1948）、次いで Hochschild-Serre はリー環に（1952）応用した。こうしてホモロジーが、位相幾何学のみならず、代数学の分野でも重要な道具になった。それら全体は Cartan-Eilenberg による教科書 "Homological Algebra" (1956)中に纏められる。

またこの教科書には含まれていないが、同じ頃 Serreによりホモロジー代数の局所環論への応用が開始される。

C）複素多様体－層の導入

H. Cartan は1953-54年の彼のセミナーにおいて、岡潔の一連の結果を再構成し、その中で複素多様体を「層」の概念を用いて定義した。層は Leray によって1945年頃定義されたものであるが、ここで初めてその本質的な重要性が明らかにされた。

複素多様体は、位相空間とその上の「正則関数の」層との対である、「環付き空間」として定義される。これによって多様体は遂に「局所座標」からも自由になった。これは多様体論に全く新しい次元を切り拓いたものである。

小平はつとにHodgeとともにケーラー多様体の調和解析学を展開し、その重要性を示したが，さらに層の理論を積極的に応用し、それが理論を著しく明解にすること、更にそのコホモロジー理論により困難と思われていた問題があっさり解けてしまうことを示した（1950年代）。その最も重要な例として、彼によるコホモロジー消滅定理を基礎とした、Hodge多様体と射影多様体との同値性の証明（1954）が挙げられる。

層の理論導入の意義をより具体的に言えば、次の３点にまとめられよう。

１）多様体においては、空間自身よりむしろその上の「関数」が重要であることが明白になった。位相多様体、微分可能多様体、解析的多様体という違いは、空間（それは単なる位相空間でしかない）の上でどのような関数をその「多様体上の関数」として考えるかによって決まる。標語的に言えば、「始めに空間があった」から、「始めに関数があった」という形に多様体というものの認識が逆転したのである。もっともそれが実際に起こったのはもっと後のことであり（後述）、正確には逆転することが可能になったというべきだろう。

２）「局所的」と「大域的」との関係がより明白になった。微分可能多様体ももちろん複素解析多様体同様層を用いて定義できる。それにもかかわらず後者で初めて層が導入されたのには理由がある。すなわち微分可能多様体では、大域的な微分可能関数全体（C－代数を作る）を知るだけで、多様体が決まってしまう。１の分解を用いることで局所関数を大域的に拡張できるからである。それに対し、複素解析的多様体では、充分な数の大域的正則関数が存在しない場合がある。大域的正則関数が充分沢山ある多様体（シュタイン多様体）は特別の性質を持ち、岡の定理はその形で定式化できる。一方射影空間のような基本的空間でも、大域的正則関数は定数関数しかない。そこでどうしても局所的なものをそれ自身として取り扱う道具が必要になったのである。

３）コホモロジー論が導入された。上の「局所的」と「大域的」との関係を記述する道具として、「層のコホモロジー」が重要な役割を果たす（局所関数を大域関数に拡張する「障害」を量る等）。

またこの方法論を導入することにより、理論全体が著しく代数化された。例えばDeRhamの定理はこれによって証明され、従来の高度な解析を用いる調和形式の理論にとって変わることが出来る。解析が不用になったのではない。逆にどこでどの解析が本質的に必要かが、より明瞭になったのである。例えば上のDeRhamの定理の証明では、１の分解の存在（大域的）とポアンカレの補題（局所的）とが解析的部分である．そして調和解析は小平消滅定理の証明の方で本質的役割を果たす。

D）代数幾何学とその一般化[*1]

A. Weil は数論の問題を解くために、幾何学的方法論を用いようと考えた。例えば、有名な Fermat の問題（正しくは「Fermat の最終定理」）は「曲線　$x^p + y^p = 1$　上には$p > 2$ならば有理点が無い」という形に定式化される。彼はこの問題に関連した、「種数２以上の曲線の有理点は有限個である」という Mordell 予想を考察したのである。しかし彼は代数幾何学に理論の展開に必要な代数的基礎付けが欠如していることを悟った。従来の複素数体上の代数幾何では代数的手法と位相的解析的手法が混在しており、その都度都合のいい方を使っていた。しかし例えば有限体上の代数幾何を展開しようとすれば、解析的手法は使えない。そこで彼は純代数的な抽象的代数幾何学を建設した（"Foundations of algebraic geometry", 1946, 2nd ed. 1962）。

この基礎の上に立ってWeilはさらに代数関数論、アーベル多様体論を建設し（３部作）、（有限体上の）代数曲線に対するリーマン予想の類似を解いた。そしてさらに一般の代数多様体に対する予想（Weil予想）を定式化する。これは有理点の個数を数えるものであるが、彼はそれをフロベニウス写像の不動点として幾何的にとらえ、その個数を数えるよい「幾何学的」公式（Lefschetzの不動点定理の類似）があればよいことを指摘している.

一方同じ頃、O. Zariski もまたイタリア学派の曲面分類論を再構築しようとして同様の問題意識を持ち、やはり抽象代数学の基礎付けに着手する。彼のものはより幾何的であり、特にいわゆる Zariski 位相の導入が重要である。

さてJ.P.Serreはおそらく上記の多変数関数論Cartanセミナーに影響を受けて、代数多様体を代数的連接層を用いた環付き空間として定義し、その上に代数幾何学を建設する（1953−54）。

これを継承、発展させる形で、A.Grothendieckは1950年代後半から60年代にかけて一般概型理論として代数幾何学を構築する。それらは Dieudonné との共著になる教科書（ＥＧＡ）、彼自身によって組織されたセミナー記録（ＳＧＡ）、ブルバキセミナー等様々の形で公けにされ、その全体は膨大な量にのぼるが、1973年彼の突然の実質的引退と共に未完のまま残された。

彼は理論を構築するに先立って、その主たる方法論の一つである圏論を整備し、特に層のコホモロジー論を完全に抽象化する。

さてGrothendieckは彼の幾何学の基本的対象を「概型」と名付けた。この命名はChevalleyの用語（§２Ｄ））の踏襲ではあるが、何よりも従来の代数多様体とは全く違う概念なのだという彼の自負の現われなのである（彼の筆者への私信）。

概型の基本要素（微分多様体の局所座標近傍、代数多様体のアフィン多様体に対応）はアフィン概型である。これが環付き空間として定義され、張り合わされて概型になる。さてここで本質的に重要なのはアフィン概型が任意の（１を持つ）可換環に対して定義される点である。環に対して位相空間（「スペクトル」と呼ぶ）が定義され、層が定義される。従来の代数幾何では、まずアフィン空間内に（位相空間としての）アフィン多様体が定義され、環はその上の（正則）関数全体（アフィン座標環）として現れる。（概型論でもその仕組は同じで、この対応によって可換環の圏とアフィン概型の圏とは同値になる。）つまり関数の集合がまずあって、それに対して（それらを「関数」とする）空間が定義されるという風に順序が逆転した。多様体幾何学において、空間よりも関数が本質なのだということが、初めて理論の中で明確にされたのである。

この逆転によって概型理論は完全な一般性を確立した。概型理論は抽象代数幾何学の最も完成された理論として一般に定着する。

Grothendieckはこの他にも様々の深い抽象論を築くのであるが、一つだけ例を挙げ

---

[*1]本パラグラフの内容については［N］に詳述したので、興味のある方は参照されたい。

よう。Grothendieckの目標であったWeil予想を解くためにはZariski位相とは異なる、（不動点定理を与える）「良い」位相が必要である（上述）。彼はその候補としてエタル位相の概念を得、実際に絶対値予想以外の部分をこれを用いて解いた。このエタル位相は、位相の概念を拡張したトポスの概念を用いて定義される。後にこのトポスの概念は最も一般な多値論理の概念に他ならないことが分かって、むしろ基礎論の方で重要になる。

なおWeil予想自身はP.Deligneによって最終的に解かれた(1973)。

またGrothendieckによって、複素解析幾何学も概型論的に展開されたこと（1960-1961、Cartanセミナー）、SerreのＧＡＧＡ理論（1956）によって、複素解析幾何学と代数幾何学との本質的類似（或る条件の下では同値）が明らかにされたことを補っておこう。

## §４．多様体論的幾何学による数学の統一へ

1960年代に現代的抽象数学として確立された多様体論の枠組みは、やがて70年代以降幾何のみならず、数論、微分方程式論といった他の数学、さらには理論物理学までにも用いられるものとして広がって行く。かってBourbakiの唱えた“Mathematicsから A mathematic へ”という標語が、深い意味で現実のものとなったと言えよう．この見方はYu. I. Maninによって初めて公けにされた（［M］，1984）。

### A）数論的多様体（Arakelov-Faltings理論）－　数論と代数幾何の統一

代数的整数論と（１変数）代数関数論との類似性は両者の理論が生まれて間もない１９世紀後半既に意識されていた。それは1900年の国際数学者会議における有名なヒルベルトの講演中に明言されている（［H］第１２問題）。

この関連を更に一歩進めて考えたのはA.Weilで、彼は両者の間に立つものとして、有限体上の代数関数論を置くことを考えた。これを媒介として、両者の関係が明らかになるというものである。彼のこのアイデアは当時の一般向け科学雑誌や、妹のSimoneへの手紙の中で表明された（1943頃）ため、彼の全集が出て初めて一般の目に触れることとなったが、以前より彼の仕事を見れば彼がそれを目指していることは明らかであった。

そのアイデアを更に多次元へと一般化するものとしてWeil予想があったわけであるが、これはGrothendieckの概型論を用いて解決された。

では概型論は数論と代数幾何との統一を実現したのであろうか？　答えは「否」である。それは概型論が現れて間もなく、Weil自身によって"Foundation"第２版の補遺中に明言されている(1960)。すなわち代数体および１変数代数関数体の理論では付値論が共通の基本的道具であるが、概型論は代数体のアルキメデス付値の理論を含まないのである。

この問題を、アルキメデス付値上に然るべき幾何的対象を定義することによって解決し、数論と代数幾何の完全な統一を実現しようというアイデアがArakelovによって提出された(1974)。その幾何的対象とは（複素）リーマン面に（適当な）Hermite計量を考えたものである。これにより、代数体上の１変数関数体に対し、数論と代数幾何とを統合した理論が建設出来る。これを展開して見せたのはFaltingsである(1984)。この理論は数論側と幾何側と各々１次元の広がりを持っているので、全体としては２次元になっており、数論的曲面論と呼ばれる。

そしてこれを更に多次元へと一般化するものとしてYu.I.Maninは数論的多様体の概念を提出した(1984)。ここではアルキメデス付値上の幾何的対象がケーラー・アインシュタイン計量付き複素多様体となる。最近ここでGrothendieck型Riemann-Roch定理の成り立つことが証明された(Gillet-Soulé, 1989)。特性類の定義をうまく拡張しさえすれば、（証明はずっと複雑になるとはいえ）最も一般的な形の定理がそのま

ま成立するのは驚くべきことであり、数論と代数幾何との本質的関連を示す有力な証拠の一つと言えよう。

もう一つ代数的整数論と代数関数論との深い関連を示すものとして、非可換類体論の建設を目指すLanglandsプログラムの代数関数論での類似を展開したDrinfel'dの仕事が挙げられる。ただしこの場合は並行した理論が展開出来るということであって、両者を統一出来るというわけではない。

B）*D*-加群の理論（代数解析学）　－　解析学と代数幾何の統一

つとに1950年代後半佐藤幹夫はSchwartzのそれとは全く異なる「超関数(hyper-function)」の概念を得、それを用いて線形微分方程式論を代数化する構想を得ていた。これを、Grothendieckの方法論を全面的に取り入れ、*D*-加群の理論として建設したのは柏原正樹である（1971以降）。彼は佐藤、河合隆裕等と共に壮大な理論を建設し、ここに解析的線形偏微分方程式論の概型理論的展開が実現した。特に超局所解析を用いたホロノミー系の理論は最も自然な確定特異点型線形微分方程式論の抽象一般化を与える。

この理論の最も著しい応用として、Beilinson-Bernstein, Brylinski-柏原によるKazhdan-Lustig予想の解決（1981）が挙げられる。さらに前者はこの証明の中で、半単純リー群の旗多様体が*D*-加群として、複素多様体のStein多様体に対応する性質を持つことを示した（詳細は［S］を参照）。

ここでは構造層が微分作用素の環となる（作用素の係数は解析関数）。特に環が非可換になったこと、関数への作用素であることが本質的に新しい。

C）無限次元多様体　－　物理学（場の量子論）の幾何学化

70年代後半に入って、理論物理学、特に場の量子論と幾何学との交流が生まれてくる。従来より古典解析力学等は微分幾何学と深い関わりを持っていた。力学系の理論、特に特異点理論、シンプレクティック多様体の理論等はその典型である。しかしこの新しい流れは、これらの関連をその基礎に踏まえつつも幾つかの点で全く新しい側面を持っている。

これらの動きには相互に関連した大きな三つの山がある。

C１）ゲージ理論

電磁場理論を拡張し、弱い相互作用を記述する量子場の理論を記述するために生まれたゲージ理論（Yang-Mills, 1954）が、70年代に入って強い相互作用をも含めた形で建設される（ＱＦＤ，ＱＣＤ理論）。この頃ゲージ理論がファイバー束の接続の理論と全く同等であることが見出され、微分幾何学にその量子場の方法論が導入される。つまり接続全体のなす無限次元アフィン空間の上でモース理論を展開し、（無限次元の）ゲージ群の作用を考える。

80年代に入って、Atiyah-Bottはある種の制限（平行移動不変性）を加えたYang-Mills接続を考えることにより、（代数幾何学での）リーマン面上の安定ベクトル束のモジュラス空間が構成出来ることを示した。しかもこの場合モジュラス空間上のケーラー計量も同時に得られる。これは接続空間のシンプレクティック構造をモーメント写像でゲージ群の商空間上に落とすことによる。この方法論は更に発展させられ、Donaldsonによる新しい４次元多様体不変量の定義、Uhlenbeck-Yauによる一般ケーラー多様体上の安定ベクトル束のモジュラス空間の構成（1986）からFloerコホモロジーの理論へと繋がってゆく。この流れは無限次元多様体における微分幾何学の展開という主題の下に纏められよう。

C２）ソリトン方程式論

これと並んで発展したのがソリトン方程式の理論である。ソリトン方程式とは、非線型微分方程式でありながら、（線形方程式の特徴である）重ね合わせの原理に近い性質を持つ、いわゆるソリトン解が存在する微分方程式の総称である。1965年頃Kruskal-ZabuskyはＫｄＶ方程式がソリトン解を持つことを数値計算によって示し、一躍注目を浴びた。その結果この事実の背後に深い数学理論の存在することが明らかにされ、またＫｄＶの自然な一般化であるＫＰ方程式も見出された。特にこれらの方程式は実は無限個の方程式系の最初のものなのである。その結果の一つに、ＫＰ方程式系の準周期解の時間発展が、対応するリーマン面のヤコビ多様体上の平行移動に他ならないという発見がある（Krichever, 1976）。これはリーマン面の理論と場の量子論との関連を示す最初の例になっている（後述）。

一方佐藤幹夫は無限次元グラスマン多様体を導入し、ＫＰ方程式系の解全体がここでパラメータ付けられることを示した。ここで重要なのは非線型方程式の（解析的）性質が、無限次元グラスマン多様体上では代数的関係式として見えるという点である（方程式系と同値な「広田の双１次関係式」はグラスマン多様体の Plücker座標が満たす２次関係式に他ならない）。さらに伊達－柏原－神保－三輪は佐藤理論を基礎に、ＫＰ方程式論を場の量子論の枠組みの中に実現し、諸定理を後者の方法論によって証明することに成功した（1984）。これと並ぶDrinfel'd-Sokolov理論も忘れてはならない。

Ｃ３）弦模型理論と共形場理論

量子的場の理論の成功はくりこみ理論による。素粒子の４種類の相互作用のうちゲージ場３種類はくりこみ可能であるが、重力のみはくりこみを許さなかった。ところが素粒子を点ではなく、１次元の拡がりを持った紐と考えて量子場の理論を展開する、弦模型理論によれば、理論がくりこまれた形で、しかも重力場とゲージ場が自然に組み合わされた形で出ることが分かって、一挙に注目を浴び始めた（Green-Schwarz）。弦模型理論、特に超対称性を加えた超弦理論はその後５年近くにわたって爆発的に流行して、終息する。４次元重力場理論には至らなかったものの、「オモチャのモデル」上とはいえ、摂動解とは全く異なるくりこまれた厳密解を重力場まで含む形で得たという成果は小さくない。

さてこの理論がリーマン面のモジュラス理論と密接に関連することを示したのはBelavin-Knizhnikである（1986）。彼らは期待値積分（Feynman積分）をモジュラス上の保型形式の積分に帰着させた。

ここでFriedan-Shenkerが決定的な寄与をする。彼らは弦模型理論を、一般リーマン面上の２次元共形場理論として、数学的には普遍モジュラス空間上の可積分系として定式化することを提唱した。これにより数学的に厳密なモデルの構成への道が開かれ、また共形場理論の本質的重要性が示された。

共形場理論とは、一般座標変換（ワイル変換）として共形変換のみを許すことによって得られる量子場の理論であるが、特に２次元の場合豊富な理論になる。２次元統計力学で、相転移点にこの（連続）対称性が現れることで注目され、Belavin-Polyakov-ZamolodchikovがVirasoro代数（特殊なリー代数）の表現論として一般論を作った（1984）。さらにBelavin-Knizhnikはゲージ場理論を含めた形で理論を定式化し、それによれば自然に重力場が取り込まれ、運動方程式が得られる。

彼らの理論は射影直線上の場の理論であり、これを一般種数のリーマン面上に展開すると弦模型理論に対応する量子場の理論になる。

さて定式化はこれで得られたが、具体的モデルの構成が問題になる。

まず自由フェルミ粒子の場合（可換ゲージ）の期待値計算（テータ関数が現れる）から、ＫＰ方程式論との関連が気付かれ、特に佐藤の無限次元グラスマン多様体の理論で考えれば、伊達－柏原－神保－三輪の量子論がちょうどゲージ理論であり、

これに全く自然にVirasoro代数の作用を定義する形で共形場理論を展開できることが分かった（1987）。

しかし可換ゲージの場合には基本粒子が無限個現れるという困難があって、完全な形でFriedan-Shenkerモデルの存在が示されたわけではない。これに対し、非可換ゲージでは基本粒子が相互作用の下でも有限個で閉じることが出来、この場合に数学的に厳密なモデルが初めて構成された（土屋－上野－山田、1988）。彼らの理論が代数幾何学の安定曲線のモジュラス理論、柏原のホロノミー系の理論など、先に述べた現代多様体論の精華を全面的に用いることによって得られている事実は著しい。

これらの動きはなお様々の流れとして発展しつつあり、その全体の姿は見えにくいのであるが[*2]、多様体論的幾何学の立場からこれらの流れを見ると、次のような特徴を挙げることが出来よう。

1）無限次元多様体の幾何学。理論が本質的に無限次元の多様体上の幾何学を展開することで得られている。

2）大きな対称性の存在。さらに多くの理論では、対象となる無限次元多様体にやはり無限次元の群が作用しており、その不変式論を展開することで有限次元の理論が得られるという仕組になっている。Grothendieckの、彼の数学の究極目標は最も一般のGalois理論を構築することだ、という言葉が想起される。

3）新しい様々の非可換構造が大きな役割を果たす。ただしその中心に十分大きな可換部分があり、それが構造を統制している。この最も基本的例は有限群の群環であるが、それと本質的に同じ構造が実に広範囲に見られるのである。

4）モジュラスの幾何学。理論が、ある代数構造全体をパラメータ付けるモジュラス多様体上の幾何学として展開される。量子論ではこの多様体が量子状態全体の空間に、多様体上の計量が確率測度に対応している。

## §5．新しい流れ　－　多様体無き多様体論

前節に述べた流れと密接に関連する形で、全く新しい多様体論幾何学が現れてきた。それは標語的に「多様体無き多様体論」と呼ぶことが出来よう。

§3D）で述べたが、現代多様体論の最も重要な考え方は、「多様体論幾何学で大切なのは空間ではなくて、その上の関数である」という点にある。この考え方を徹底するならば、「多様体上の関数全体」とみなし得る構造があれば、それについての幾何学を（多様体そのものはなくとも）建設できるわけである。実際そのような理論が二つの流れとして出現する。

しかもこれらの流れは突然現れたのではなく、むしろ大きな深い流れの延長上にあることも忘れてはならない。また非可換な「関数」（正確には作用素）が扱われていることも著しい事実である。

### A）非可換微分幾何学

von Neumannによって導入されたC*環は量子力学のもたらしたもう一つの重要な数学的手法である[*3]。ここでも無限次元の群とその表現が取り扱われる。すなわちC*環はあるヒルベルト空間上の作用素環（の部分環）であり、量子力学はその表現論として定式化される。

1970年代末、A.Connesは群作用を持つC*環（C*力学系）に対する微分幾何学、K－理論を建設し、Atiyah-Singerの指数理論を拡張することに成功する。ここで彼

---

[*2] 特にKontsevichの持つ統一的視点は注目に値する（例えば［Ko］）。

[*3] その歴史については例えば［T］が見やすい。

は様々の概念、不変量を（値が）非可換な場合に拡張している。このような理論が存在すること自体大きな驚きである。

彼はこの理論を（本稿で取り上げなかった）葉層理論へ応用した（葉層構造の不変量の研究）。この場合そこにあらわれる「空間」はHausdorff空間ではないため、考える「関数」はその上の連続関数よりも広いものになっている。

彼の場合まだ作用する群が有限次元であるが、これが無限次元にまで拡張されるならば、本質的に新しいものが見えてくると思われる。

B）量子群　－　可換からの変形としての非可換化

リー群（より正確には代数群）の理論を純代数的に得る二つの方法がある。一つはGrothendieck流にその上の正則関数全体のなす環を考える方法、もう一つはその上の微分作用素全体のなす包絡環を考える方法である。いずれの場合も群演算からもう１種類の構造が入り、（互いに双対的な）Hopf代数と呼ばれるものになっている。ただし関数の（値の）可換性から、これらは可換、あるいは余可換なHopf代数になる。いずれにせよこれを用いれば、リー環から（解析を用いることなく）代数的にリー群が構成される（Hochschild理論）。

さて一方古典力学理論の量子化に際しては、（可換な）物理量を（非可換な）作用素に置き換えるが、この時物理量に関するポアソン積を作用素の交換子積で置き換える。すなわち古典系での運動方程式は物理量の時間発展がその物理量のハミルトン関数とのポアソン積に等しい

$$\frac{dA}{dt} = -(H, A)$$

というものであるが、対応する量子系での（Heisenberg）運動方程式は

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{i}{h}[H, A(t)] \quad \text{（ここで } h \text{ はPlanck定数）}$$

となる。これは可換量の $h$ をパラメータとする非可換量への変形と見做せる。

この操作を上のHopf代数に対して行うことによってリー群の変形である量子群の概念が定義される（神保およびDrinfel'd、1985）。これは可解格子模型（統計力学）とモジュラー表現（整数論）という全く異なる二つの領域からの要請を統一する形で生まれた。

量子群の理論では表現論が中心であるが、古典群の変形として得られる量子群の表現論は古典群のそれと同じ形をしている。変形は１次元パラメータ $q$ を持っており、$q=1$ が古典的場合である。柏原およびLustigは $q=0$ を考えることにより、表現の「良い」基底が得られることを示した（結晶基底、1990）。これは量子群の理論が古典群に対しても新しい結果をもたらした著しい例である。

そして量子群の理論は一般のKac-Moodyリー環にまで拡張されつつある。

さらに量子群は共形場理論の中にも現れる。すなわちＫＺ理論（§４Ｃ３））の定める基本方程式のモノドロミー表現がゲージ群の量子化から得られるものに一致することが見出された（土屋－蟹江、河野、1987）。この理由はまだ解明されていない。背後には深い物理的構造が存在するものと思われる（隠れた対称性）。

その一方整数論との結び付きからDrinfel'dはガロア群 $Gal(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ との関係をも示唆している（［Dr］）が、その具体的展開もなお将来の課題である。

## 参　考　文　献


［D］デュドネ編：数学史　1700-1900，岩波書店，1985

［Dr］Drinfel'd, V.G.：Quantum groups, Proc.ICM Berkeley, 1986, 798-820;On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $Gal(\overline{Q}/Q)$, Leningrad Math. J. Vol.2 (1991), 829-860

［H］ヒルベルト：数学の問題，共立出版，1969

［Kl］クライン：エルランゲン・プログラム，共立出版，1970

［Ko］Kontsevich, K.M.：Formal (non-)commutative symplectic geometry, Proc. Gel'fand Seminar, 1993, 173-187

［M］Manin,Yu.I.：New dimensions in geometry, LNM 1111 (1985), Springer, 59-101

［N］浪川幸彦：現代代数幾何学の成立，現代数学の歩み　第３巻，日本評論社，1980，128-145

［R］リーマン他：リーマン幾何とその応用，共立出版，1971

［S］関口次郎：微分方程式の表現論への応用，上智大学数学講究録，27，1988

［T］竹崎正道：作用素環論の歴史（50年の歩みと日本の伝統），数学，35巻（1983)，158-165

［Y］山本義隆：重力と力学的世界，現代数学社


### 後　書

本稿は1991年11月に津田塾大学で開かれたシンポジウムでの講演内容に加筆したものである。筆者の怠慢からこの会の記録に間に合わず、一度は発表を諦めていたのであるが、杉浦光夫氏の御親切なお申し出により今回の記録に加えて頂くことになった。１年の遅れはいささかその後の流れを踏まえた内容を加えることが出来たと思う。整数論および確率論との関連を十分に解明できなかったことは心に残っている。それについては将来の課題としたい。

しかしながら原稿の完成が当初の予定を大幅に遅れ、再び杉浦氏に大変な御迷惑をかけてしまった。これもひとえに筆者の怠慢のゆえであり、杉浦氏および本号の著者の方々に心からお詫び申し上げる次第である。そしてこのような筆者の非礼にもかかわらず、辛抱強く原稿の完成を待って下さった杉浦氏の御厚意に心から感謝したい。


なお筆者は文部省科学研究費補助金重点領域研究「無限可積分系」および一般研究Ｃ「場の量子論的方法の幾何学および数論への応用」（課題番号05640030）より援助を受けた


---


*4)　なお筆者は文部省科学研究費補助金重点領域研究「無限可積分系」および一般研究Ｃ「場の量子論的方法の幾何学および数論への応用」（課題番号05640030）より援助を受けた。感謝と共に付記する。