三角関数　ｖｓ（対）　LEMNISCATE関数
～懐かしさを感じた場所から、見えた景色～

TAKUMA OGAWA （小川　琢磨）

世界に … その意志を残す …
ただ、それだけのために。

1. Gauss より始まった数学の塊（懐かしさを感じた場所）

Gauss より始まった … と言うよりは、Gauss(先生) が提示した … と言った方が良いような気がします。まずは、高瀬正仁先生の論説を用いてその数学の塊について説明したいと思います。

> 「Gauss『整数論』と Hilbert の第１２問題の間にはきわめて親密な関係が認められ、Gauss『整数論』を共通の泉とするさまざまな数学の流れ（**相互に分かちがたく結ばれている５筋の流れ**がある。）は、Hilbert の第１２問題の解決をもって、ある同じ場所に合流するであろうと私は思う。現在の段階では、なお、Hilbert の第１２問題は、解けたとは言えず『整数論』以来の数学の流れは依然として流れ続けている。」[1, p415]

この、**相互に分かちがたく結ばれている５筋の流れ**(注：小川が**太字にした**) が、**ある見方により**より、数学の塊として再認識することができます。まずは、５筋の流れを説明しながら、本講演、ならびに、この研究所報で話す事柄について、明らかにする事について、触れて行きたいと思います。

1.1. 第１の流れ、相互法則（平方剰余の相互法則). p を奇素数として、a を互いに素な有理整数として、

$$\left(\frac{a}{p}\right)_2 := \begin{cases} 1 & x^2 \equiv a \pmod p \text{ が整数解を持つ}, \\ -1 & \text{それ以外}. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

AMS Mathemactics Subject Classification 2000: Primary 11C99, 33B99, 33E05. Secondary: 01-02, 01A55.

Key words and phrase: Abelian equation, Abelian extension, complex multiplication, lemniscate, lemniscate function, reciprocity law.

Date: 2004.10.16. 第１５回数学史シンポジウム (講演予定稿) +研究所報 (2005.1.31 提出).

筆者連絡先:　埼玉県　北葛飾郡　庄和町　永沼　159-3.

と定義します。この定義された剰余記号（ルジャンドル記号）に対して、p,q が互いに素な奇素数のとき

$$\left(\frac{q}{p}\right)_2\left(\frac{p}{q}\right)_2=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}. \tag{1.1.2}$$

が成立します。これが、平方剰余の相互法則です。

> 「素数というものは、自然数の乗法的構造に注目するときに、それを乗法的に生成する独立した「原子」にあたる。平方剰余の相互法則は合同関係を導入する事によって、これらの「原子」の間に明快な対称性を与えている。」[2, p212]

Gauss は相互法則という数学的現象から数学の塊を認知するに至ったのでしょうか…?ただ、数学者 Gauss について触れられている著作、例えば、[3, 4, 5, 6] … 等々を読むと、…数学者として正直、私個人へこむものがあります。実際に Gauss は、平方剰余の相互法則に関して、７通りもの証明を与えました [4]。また、この結果、その後の整数論の発展に多大な影響を与えました [7, p200–232], [8]。

何故、Gauss が、平方剰余の相互法則に関して、７通りもの証明を与えたかというと、経験的に認知していた３次、４次剰余の相互法則の証明に適用出来る手法を探していた。という事だったのです [9, 10]。

後年、Eisenstein によって、三角関数を使って平方剰余の相互法則の証明が与えられ、lemniscate 関数を使って４次剰余の相互法則の証明が与えられました [11, 12, 13, 14, 16]。

本講演、及びこの研究所報では、この Eisenstein によってなされた、２次、４次剰余の相互法則の証明を紹介し、１つの見解を示したいと思います。

補足：４次剰余の相互法則

Gauss 整数 $r,\lambda\in\mathbb{Z}[i]$ に対して、それぞれ、r を primary な素数として、λ を r で割り切れない $(\mathrm{mod}\ r)$ の代表元とします。さらに、$\alpha=a+ib\in\mathbb{Z}[i], a,b\in\mathbb{Z}$ に対して $N(\alpha):=a^2+b^2$ とします。このとき、

$$\lambda^{\frac{N(r)-1}{4}}\equiv i^k \pmod r,\qquad k=0,1,2,3.$$

となる k が一意に定まる。が成立します。そこで、これを受けて

$$\left(\frac{\lambda}{r}\right)_4:=i^k\qquad k=0,1,2,3. \tag{1.1.3}$$

と定義します。この定義された剰余記号に対して $r,s\in\mathbb{Z}[i]$ が互いに素な primary な素数のとき、

$$\left(\frac{s}{r}\right)_4=(-1)^{\frac{N(s)-1}{4}\frac{N(r)-1}{4}}\left(\frac{r}{s}\right)_4. \tag{1.1.4}$$

が成立します。これが４次剰余の相互法則です。

1.2. **第２の流れ、Abel 方程式（代数的に解く事のできる代数方程式達）.** Gauss『整数論』第７章において円周等分方程式の解法理論が述べられています [3, p419–469]。円周等分方程式とは

$$x^m - 1 = 0. \tag{1.2.1}$$

という代数方程式の事です。この代数方程式 (1.2.1) は**代数的に解く事が出来ます**。正 m 角形の作図はこの代数方程式が代数的に解けることに対応します。この代数方程式の m 個の根が、正 m 角形の頂点に対応します。Gauss がした正１７角形の作図は $x^{17} - 1 = 0$ が代数的に解けることを意味します [6]。

Abel の指摘によって ”一般 ”には５次以上の代数方程式は代数的に解く事が出来ません。（解の公式を確立することが出来ない。）”一般 ”の代数方程式に対して２次、３次 (by Cardano)、４次 (by Ferrari) は代数的に解く事が出来ます。（解の公式が確立されている。）

このような状勢の中でも、次数が５次以上の代数方程式に対して代数的に解く事が出来るものが確かにあります。上記代数方程式 (1.2.1) はその代数的に解く事の出来る方程式の１つの sample です。

Gauss が『整数論』[3] の中で展開した円周等分方程式の理論から ”２つの ”代数方程式論が誕生しました。この ”２つの ”というのは、それぞれ Abel と Galois の代数方程式に対する**接し方**の違いです。

Abel は円周等分方程式論を受けて、**代数的に解く事の出来る代数方程式には、その根どうしに特別な関係があるのでは？** という事を感知して、結果、根どうしが以下の関係に結ばれている時、その代数方程式は代数的に解く事が可能であるという結果を得ました。

> n 次代数方程式 n 個の根が、α をある１つの根、$R(x)$ をある有理関数、$R^k(x)$ を $R(x)$ の k 回合成変換とし、これらを用いて以下の (1.2.2) ように表現される場合、この n 次代数方程式は可解。[18, 19]

$$\alpha, R(\alpha), R^2(\alpha), R^3(\alpha), \cdots, R^{n-1}(\alpha). \qquad (R^n(\alpha) = \alpha) \tag{1.2.2}$$

この研究所報では、三角関数と lemniscate 関数を通じて得られる上記 (1.2.2) の条件を満たす代数方程式の sample を提示し [24, 25, 26]、関数論としての対応する意味と、その代数方程式の出所を紹介します。

補足：ガロア理論

Galois は円周等分方程式論を受けて、その解法に着眼し考察の対象である代数方程式の根どうしの置換を考察の対照として結果、ガロア理論を提示しました。結果（今日で言うガロア群を元にして）代数方程式達の（代数的に解けるもの、そして、解けないものも含んだ …）**分類**を完成させました。

本講演で言っていたAbel方程式、あるいは、この研究所報で提示されるAbel方程式はこのガロア理論に対する巡回方程式に対応します。

1.3. 第3の流れ、Kronecker青春の夢.

（この章を描くにあたり、特に [9, 10] を参照）

Gauss『整数論』第7章 [3] で述べられている円周等分方程式の解法理論の導入部で次のような示唆が与えられています。

> 「ところが、我々は今から説明を始めたいと思う理論の諸原理は、ここで繰り拡げられる事柄に対して、それよりもはるかに広々と開かれている。なぜなら、この理論の諸原理は円関数のみならず、そのほかの多くの超越関数、たとえば積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{1.3.1}$$

> に依拠する超越関数に対しても、そうして、またさまざまな種類の合同式に対しても、同様の成果を伴いつつ、適用することができるからである。」[3, p419]

上記の数式 (1.3.1) に依拠する超越関数とは、あの lemniscate 関数のことです。Gauss はこれを世界に存在中は公表をしなかったが … Gauss は既に lemniscate の曲線の等分理論を感知し、さらに lemniscate 関数が楕円関数（2つの基本周期を持つ）である事もつかんでいました [5]。じつは、ここに歴史的な意味での一つの鉱脈が見てとれます。それは、**『楕円関数の等分方程式論』**というものです [9]。この**『楕円関数の等分方程式論』**と言うものに対して、あの Kronecker 青春の夢があります。

Kronecker 青春の夢 [9, 10, 2]

> 「有理数の平方根を係数にもつAbel方程式は、特異母数を持つ楕円関数の変換方程式によってつくされる。」
> (Kronecker 青春の夢は、類体論の源流でもあります。[2] より。)
> 「虚2次体上のAbel方程式の根は、その2次体を虚数乗法に持つ楕円関数の「特異モジュライ（母数)」と周期の等分点での値ですべて与えられる。」

如何にしてAbel方程式を提示してみせるか … KroneckerはAbelが提示した代数的に解ける方程式の根どうしの関係に注目したのでした。(本原稿の数式 (1.2.2)) そういう意味では、Abel方程式の概念がKronecker青春の夢の起源です。

しかし、その手がかりはAbel方程式の中には見出せず、むしろ、Eisensteinがしたlemniscate関数を使った4次剰余相互法則の証明の中にその手がかりが見出せます。

ここで、改めて数学者、Gauss, Abel, Eisenstein, Kronecker の位置関係を明確にしたいと思います。

Gauss 整数論に対して、第７章の円周等分方程式の理論を受けて [3]、Abel は代数方程式が代数的に解く事の出来る条件を提示しました [18, 19]。しかし、Abel は、相互法則には関心を示さなかった … 。

一方、Eisenstein は Gauss 整数論の相互法則を受けて、lemniscate 関数を使った４次剰余相互法則の証明を与えました [11, 12, 13, 14, 16]。が、Eisenstein には、Abel 方程式の概念が抜けていた … 。（実は、Gauss も４次剰余相互法則と lemniscate 関数の密接な関係は感知していた。）

Kronecker は、Abel 方程式の理論を持って、何故、lemniscate 関数を使った４次剰余相互法則の証明が可能だったのかを洞察しました。この結果あの『青春の夢』が出現しました。また、この『青春の夢』の延長上に Hilbert の第１２問題があります [9, 10]。

Gauss が示唆をし、Kronecker が明らかにした数学の意識を表した文を引用します。

> 外見上の印象がどれほど離れていようとも「微分方程式と Abel 方程式と相互法則」は、どこか深い場所で緊密な仕方で結びあわされていて、全体として一つの有機体を作っているのである。この有機体こそ Gauss が真に示唆をして、Kronecker が明示したものであり、同時に我々のドイツ数学史の原型である。Abel と Eisenstein は Gauss の数論の本質の側面に光を当てたが、Kronecker はそれらの内的関連をあらしめる普遍的な場所を求めて Gauss の数論への変質へと立ち返り、ドイツ数学史の原型を純粋な形で抽出する事に成功したのだった。[9, p126]

さらに、本講演、この研究所報の主旨である、Gauss より始まった（あるいは提示された）数学の塊、あるいは魂（こころ）を表している文章を引用します。

> （前略）だが、Gauss の数論の本質は高次冪剰余相互法則や類体論の確立ということ、それ自体の中ではなく、**微分方程式と Abel 方程式と相互法則が三位一体となって織り成す有機体**「緑にかがやく３つばのクローバー」の根底にあるものに触れて心からうなずきたいと願う切実な願いの中に宿っているのである。[9, p127]

ここで述べられている微分方程式とは解析関数（三角関数や lemniscate 関数）の加法定理に他なりません。本講演、この研究所報では微分方程式という言葉を解析関数（三角関数と lemniscate 関数）に置き換えて**解析関数（三角関数と lemniscate 関数)、Abel 方程式、相互法則という視点より**改めて Gauss が示唆をして Kronecker が明らかにした三位一体の有機体を、既成の事実を加味しながら再論を試みたいと思います。

有機体を土壌として得られた三角関数と lemniscate 関数の類似性

Gauss が示唆をし、Kronecker が明らかにした有機体、あるいは三位一体の世界、この研究所報では、解析関数（三角関数と lemniscate 関数)、Abel 方程式、相互法則という視

点を土壌として**改めて、解析関数の立場から見た時に、其処に三角関数と lemniscate 関数の類似性（対称性）を見出すに至りました。**[25, 26] この研究所報でこれを紹介したいと思います。

1.4. 第4の流れ、歴史的な意味での新たな解析関数（楕円関数）の登場. 高瀬正仁先生の論説 [1] では、この第4の流れは Jacobi の逆問題となっていますが … ここでは、さらに少し時間を遡り Gauss [5, 6] や Abel [17, 19] が構成してみせた楕円関数に焦点を当てたいと思います。

現在では、二重周期有理型関数の事を楕円関数としています。・・・そして、完成されてしまったものに対して、例えば、楕円曲線 E_1 に対して、そのパラメータ表示として Weierstrass の $\wp$ 関数が対応する事をしっているから（$\wp$ 関数の詳細は省きますが）…

$$E_1 : y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \quad \begin{cases} x = \wp(u), \\ y = \wp'(u). \end{cases}$$

例えば、$\wp(nu), \wp'(nu)$ というものが具体的な E_1 から E_1 自身への写像を与えます。（複素数の加法群から3次曲線上の複素点からなる群への全射準同型写像）また、楕円関数 $\wp(u)$ の性質から同値な楕円曲線どうしの性質も解ります [29, 30]。

楕円関数という事になると最近は、この方面が流行りらしい …!?。

歴史的には Gauss [5, 6] や Abel [17, 19] の手によって**楕円積分の逆関数として楕円関数が構成されました。これが、歴史的な決定的なアイデアです。**もともとは曲線の求長問題として楕円積分が現れました。そして、長い間、多くの数学者はこの楕円積分をある種の曲線の求長によって解釈しようと試みました。楕円積分そのものも算術幾何平均や超幾何関数と密接な関係があり [31, 32]、また、様々な力学的な応用も知られています [33]。

ここでは、改めて、楕円積分の逆関数として楕円関数を構成した Abel と Gauss の違いについて触れたいと思います。

Abel はいきなり第一種楕円積分の逆関数を考察します [17, 19]。

$$\text{第一種楕円積分} \iff \text{（逆関数としての）楕円関数}$$

これに対して Gauss は、源となる lemniscate 曲線から、**三角関数の模倣品として、**あの lemniscate 関数 (lemniscate sine, $x = \mathrm{sl}(u)$.) を構成します [5, 6]。

$$\text{lemniscate 曲線} \iff \text{弧長（楕円積分）}u = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \iff \text{逆関数 } x = \mathrm{sl}(u).$$

この研究所報では、まずこの Gauss 流の解析関数（三角関数と lemniscate 関数）の構成法を再論し、そこから感知された世界（実は代数曲線として円と lemniscate の繋がりが

明らかになりました。これを**三角関数と lemniscate 関数の繋がりと主張したい。**）を紹介します [27, 28]。

補足：何故 Gauss は楕円関数を公表しなかったか ⋯

> 「Gauss に始まる、我々のドイツ数学史は相互法則と楕円関数という二本の柱に支えられて成立するが（後略）」[9, p11]

幸いにして相互法則に関するものは「Gauss 整数論」という形でこの世界に生を受けました。が、楕円関数に関しては Gauss 自身の手によってこの世界に生を受けるには至りませんでした。それは、Gauss 自身の非常に頑固な数学に対する姿勢によるものでした。

> 「ガウスは常にその研究の成果が完成されたる芸術的作品の如き形式を具えることをつとめた。形式の完備が意に満たないものは、決して発表しなかったのである。建築が落成した後に足場が残るようでは見っともないと彼は言うた。」[6, p18]

結論を言ってしまえば Gauss 自身の楕円関数の研究においては完成されたる芸術的作品の如き形式を具えるレベルには到達できなかった。Gauss 自身が頭の中で描いていた構想の中において ⋯ **Gauss は常に、数学の塊を意識していたんだと**今更ながらに感じてしまいます。これは、**今尚、我々数学者が見習うべき姿勢であると私は思います。**

> 「予告された大著述は、とうとう出ずに終わったのであるが、ガウスの計画は恐らくは第一部、超幾何関数、第二部、AgM（算術幾何平均）及び modular function、第３部、楕円関数を総括するのであったろうと Schlesinger が想像する。当たらずとも遠くはあるまい。⋯ 1828 年にアーベルの楕円関数論 (Recherches) が Crelle 誌で発表された後に、ガウスがベッセルに書いた手紙の中に、上記著述の三分の一ほどはアーベルの論文が出て不用に帰したと言っている。その外 Schumacher,Crelle への手紙の中にも、口癖のように『三分の一』が繰り返されている。[6, p51–52]

1.5. **第５の流れ、解析関数論（一変数、多変数）⋯ 夢、幻、理想郷 ⋯ 。**. オイラーの等式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

この関係式は一変数解析関数論において、より明確に認識されます。（テイラー展開＋一致の定理）。また、先に扱った楕円関数（論）も一変数解析関数論により（留数定理から）楕円関数は以下の性質を満たしている事が解ります。

定理 1.1 (Liouville). 楕円関数は以下を満たす。

(1) 二重周期を持ちかつ整関数であるものは定数に限る。
(2) 楕円関数の基本領域（基本周期平行四辺形内の）にあるすべての極の留数の和は 0（ゼロ）である。

(3) 楕円関数の基本領域（基本周期平行四辺形内の）にある零点の位数の和と極の位数の和は等しい。(これをその楕円関数の位数と定義)
(4) 楕円関数の基本領域（基本周期平行四辺形内の）にある零点の和と極の和の差は１つの周期である。(その楕円関数の)

以上の（１）～（４）は**具体的な楕円関数が解らなくても**、関数論の一般論より導かれてしまいます。… 勿論、既知の楕円関数でその検証は出来ますが …

以上は、一変数解析関数論の話です（例えば [38])。

問題は、二変数解析関数論の時に … という話になりますが …

筆者の希望ですが**何とかしてより具体的な Jacobi 関数を構成してみたい**。これが１つの目標です。(この研究所報の問題 3.4(課題①)) また、Jacobi 関数が数学に対して、どれだけ貢献をするのか … この件に関しては１０年近く前より高瀬正仁先生が業界に対して訴え続けている事でもあります。(高瀬先生のこの件に関する文献は多数のため、その総括としての文献 [1] を改めて挙げておきます。本講演、及び、この研究所報の目的は文献 [1] の姉妹版の提示です。)

夢ですか …?
理想ですか …?
馬鹿にしますか …? そして
笑いますか？
でも、そういうものに殉じなければ
何も生まれませんから …

2. 見えた景色（予告）

Gauss(先生) が提示して見せた、数学の塊を、改めて三角関数と lemniscate 関数を基準として（ベースキャンプ）本講演を展開していく予定です。小川の主張は …

『三角関数と lemniscate 関数は同じ関数なんです。』

という悲痛な叫びです。そして、このような視点に立つと、数々の数学的現象（相互法則、Abel 方程式 …）や、既知あるいは完成された理論（ガロア理論、類体論、関数論 …）こういった物が、一つ一つの項目として見る事が可能となり、全体を通じて巨大な tabular が描かれます。実際には、そこには、先人達が直面した困難の度合いも含まれますから、**地図**という方が正確であるかもしれません。

最後に、この**地図**を**表**として披露して終わりにしたいと思います。

時間の都合上、あるいは、その他もろもろの個人的事情により、本講演、ならびに提出されたこの研究所報において、**完成されたもの**を提示するまでには至れませんでした。未完の部分は今後に委ねたいと思います。

3. 三角関数 VS（対） LEMNISCATE 関数（I）

三角関数と lemniscate 関数の双方には数論的な観点から見ていくつかの**似ている性質達**があります。その**似ている性質達**を追って行きます。lemniscate 関数は**虚数乗法を持つ楕円関数**なのですが、ここでは、lemniscate 関数の持つ（三角関数と類似の性質を持つ意味での）その**特殊性**に焦点を当てます。この章での数論的な観点というものを、以下の 3 つの場所を土台として定義します。

(1) 相互法則の証明 (by Eisenstein)
(2) Abel 方程式 (by Abel)
(3) Abel 拡大体の記述 (by Kronecker and Weber, 高木)

3.1. **Eisenstein による相互法則の証明.** Eisenstein は、三角関数を用いて平方剰余の相互法則の証明を、lemniscate 関数を用いて 4 次剰余相互法則の証明を与えています。証明は、三角関数を用いてルジャンドル記号を表し、lemniscate 関数を用いて 4 次剰余記号を表すことによるものです。[11, 12] [22]

(平方剰余の相互法則の場合)　p, q は $\mathbb{Z}$ 上の奇素数とします。a を p の剰余系として、その剰余系全体（但し、単数倍で移り合うものを除く）を A と置きます。このとき、ルジャンドル記号は (3.1.1) のようになります。

$$\left(\frac{q}{p}\right)_2 = \Pi_{a\in A}\frac{\sin q(\dfrac{2\pi a}{p})}{\sin\dfrac{2\pi a}{p}}, \qquad \pi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.1.1}$$

(4 次剰余の相互法則の場合)　r, s は $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary prime とします。$\mathrm{sl}(u)$ を lemniscate sine とし、b は r の剰余系として、B をその剰余系全体（但し、単数倍を除く。）と置きます。このとき、4 次剰余記号は (3.1.2) のようになります。

$$\left(\frac{s}{r}\right)_4 = \Pi_{b\in B}\frac{\mathrm{sl}\,(s(\dfrac{2\omega b}{r}))}{\mathrm{sl}\,(\dfrac{2\omega b}{r})}, \qquad \omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{3.1.2}$$

剰余記号が上記のように表される理屈. これは、Eisensteinによる方法です。ここでは、平方剰余の場合を説明します。（4次剰余の場合も同じ理屈です。例えば上記文献以外に、[41, p519] 等で説明があります。）

素数pを法とする既約剰余系は$p-1$個あり、

$$r_1, r_2, r_3, \cdots, r_{\frac{p-1}{2}}$$

$$-r_1, -r_2, -r_3, \cdots, -r_{\frac{p-1}{2}}$$

のように表せます。単数倍で移るの省き、$(p-1)/2$個の剰余系で考えます。qをpと異なる奇素数とすると、(r_j は、pの既約剰余系として)

$$qr_j \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

が成立するので、各jに対してkが一意的に定まり

$$qr_j \equiv (-1)^u r_k \pmod{p} \qquad (j \neq k).$$

となります。ここで、周期pの三角関数を考えます。

$$\sin\frac{2\pi z}{p}.$$

この三角関数に上の $\pmod{p}$ の合同式を代入すると

$$\sin\frac{qr_j 2\pi}{p} = \sin\frac{(-1)^u r_k 2\pi}{p} = (-1)^u \sin\frac{r_k 2\pi}{p}.$$

よって

$$(-1)^u = \frac{\sin\frac{qr_j 2\pi}{p}}{\sin\frac{r_k 2\pi}{p}}.$$

これを元の合同式に代入して

$$qr_j \equiv r_k \frac{\sin\frac{qr_j 2\pi}{p}}{\sin\frac{r_k 2\pi}{p}} \pmod{p}.$$

したがってjを$1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}$まで動かした合同式を全て掛け合わせて、まとめると

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \Pi_{j=1}^{j=\frac{p-1}{2}} \frac{\sin\frac{qr_j 2\pi}{p}}{\sin\frac{r_j 2\pi}{p}} \pmod{p}$$

この合同式の右辺の値は ± 1 でありオイラーの基準

$$\left(\frac{q}{p}\right) \equiv q^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

と合わせて (3.1.1) を得ます。

Eisenstein 先生がした相互法則の証明を通じて、双方（２次の４次の）の剰余記号が同じように三角関数や lemniscate 関数を用いて表現される事、また、その与えられた証明のプロセスにおいて、これらを三角関数と lemniscate 関数の類似の性質として認める事が出来ます。証明の細部は割愛します。詳しく知りたい方は、例えば、Ｊ．Ｓ著「数論講義」や、改めて [11, 12] [22] また [40], [13] 等を御覧下さい。

Eisenstein と久保田富雄先生 ⋯ そして絶望. Eisenstein の相互法則の証明をうけて、改めて関数（ここでは、三角関数（指数関数）や lemniscate 関数、楕円テータ関数等）の対称性を見い出して、それで、相互法則の証明を与えた久保田富雄先生の論文 [15, 14, 8] 等があります。ここでは、とくに [15] について触れます。

論文 [15] の冒頭では、周期 (1) の関数 $f(z) = e^{2\pi iz} - e^{-2\pi iz}$ を与えて $f(-z) = -f(z)$ である事、及び

$$(*1) \qquad f(nz) = f(z)f(z+\frac{1}{n})f(z+\frac{2}{n})f(z+\frac{3}{n})\cdots f(z+\frac{n-1}{n}).$$

になる事を使います。関数 $f(z)$ に対して Gauss Lemma（例えば、[22, p114–116]）を用いると平方剰余の記号が

$$(*2) \qquad \left(\frac{n}{m}\right)_2 = \Pi_{a\in M_c}\frac{f(n(\frac{a}{m}))}{f(\frac{a}{m})},\ \text{同様にして}\ \left(\frac{m}{n}\right)_2 = \Pi_{b\in N_c}\frac{f(m(\frac{b}{n}))}{f(\frac{b}{n})}.$$

のように表せます（但し M_c:m の完全剰余系、N_c:n の完全剰余系)。この表された剰余記号の表現を関数 $f(z)$ の性質を用いて少し変えることによって、以下のような対称性が見出せる形になります。(*1) を用いれば

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{m}\right)_2 &= \Pi_{a\neq 0, a\in M_c}\Pi_{b\neq 0, b\in N_c} f\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}\right)\\ &= \Pi_{a\in M}\Pi_{b\in N} f\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}\right) f\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{n}\right)\\ &= \Pi_{a\in M}\Pi_{b\in N}\phi\left(\frac{a}{m},\frac{b}{n}\right)\end{aligned}$$

となります。（ただし、$\phi(x,y) := f(x+y)f(x-y)$ と定義し M, N はそれぞれ、m, n の剰余系とします。）同じようにして

$$\left(\frac{n}{m}\right)_2 = \Pi_{a\in M}\Pi_{b\in N}\phi\left(\frac{b}{n},\frac{a}{m}\right)$$

が得られます。ここで、$\phi(x,y)$ の定義と $f(-z)=-f(z)$ により、$\phi(y,x)=-\phi(x,y)$ **という対称性**が見出されます。$a\in M, b\in N$ がそれぞれ $(m-1)/2$ 個、$(n-1)/2$ 個動く事に留意すると、平方剰余の相互法則

$$\left(\frac{n}{m}\right)_2\left(\frac{m}{n}\right)_2=(-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}.$$

が得られます。

この、一連の手法を楕円テータ関数に適用する事によって一般の虚2次体上の平方剰余、$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ における4次剰余、$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ における3次剰余、6次剰余の相互法則の証明が論文 [15] で与えられています。また論文 [14] や [22, p251–p252] において、この手法を lemniscate 関数に適用することによる4次剰余の相互法則の証明が与えられています。

はっきり言って見事 … すぎます。[22, p251–p252] ではこの手法を「child play」と評しています。また話を元の Eisenstein の相互法則の証明に戻すと、[7, p204–208] に4次剰余の相互法則とその Eisenstein が与えた証明のアウトラインが与えられていて、その最後に「見事である」と評をしています。

個人的には、特に … Eisenstein がした剰余記号を表すプロセスを見事だと思い、それを改めて紹介しました。

しかし、… いざ … 講演の中で「絶望する」と言いましたが、他人の言っている事を理解する事と、自分が同じ物が描けると言う事を同等だと感じている、あるいは、錯覚、誤解している人達が実にたくさんいますが … 少し冷静になれば … 大半がその意識にすら辿りつかない事に気づきます。とても、「child play」だとか「見事である」という一言では片付けられない事実がここに在ります。私の感じた絶望とは以上のようなことです。皆様方は、同じ物が描けますか？そういう自信がありますか？

3.2. Abel による巡回方程式 (代数的に解く事の出来る代数方程式達). Abel の指摘によって "一般" に、5次以上の代数方程式は、代数的に解く事が出来ません。では、代数的に解く事のできる代数方程式の条件は？という観点から Abel は代数方程式の根どうしの関係に注目し、根どうしが以下の様式で結ばれている代数方程式は可解であるという結果を得ています。[17, 18, 19]

> n 次代数方程式 n 個の根が、α をある1つの根、$R(x)$ をある有理関数、$R^k(x)$ を $R(x)$ の k 回合成変換とし、これらを用いて以下の (1.2.2) ように表現される場合、この n 次代数方程式は可解。[18, 19]

$$\alpha, R(\alpha), R^2(\alpha), R^3(\alpha), \cdots, R^{n-1}(\alpha). \qquad (R^n(\alpha)=\alpha) \tag{1.2.2}$$

実は、Eisenstein の相互法則の証明の中にこの巡回方程式達が横たわっています。巡回方程式達が、どのような形で横たわっているのかは後程説明します。。ここでは、上記の条

件 (1.2.2) を満たす代数方程式の例を提示し、三角関数や lemniscate 関数が条件 (1.2.2) に対してどのように役割を果たしているのか、それを言及します。

（巡回方程式の例） (3.2.4) は $\mathbb{Z}$ 係数。(3.2.5) は $\mathbb{Z}[i]$ 係数。[24, 25, 26]

$$11 - 220x + 1232x^2 - 2816x^3 + 2816x^4 - 1024x^5 = 0. \tag{3.2.4}$$

代数方程式 (3.2.4) の 1 つの根は

$$\alpha := \sin^2 \frac{2\pi}{11},$$

となり、有理関数を

$$R(x) := 4x(1-x), \quad (\sin^2 2z \text{ に依る})$$

と取れば 5 つの根は

$$\alpha, R(\alpha), R^2(\alpha), R^3(\alpha), R^4(\alpha). \qquad (R^5(\alpha) = \alpha).$$

となっているのが解ります。

$$\begin{aligned}(-5+2i) - (13+76i)x - (325-246i)x^2 + (459-520i)x^3 \\ - (183-398i)x^4 + (65+148i)x^5 + (1-70i)x^6 + x^7 = 0.\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

代数方程式 (3.2.5) の 1 つの根は

$$\alpha := \mathrm{sl}^4\left(\frac{2\omega}{-5+2i}\right).$$

となり有理関数として

$$R(x) := x\frac{(3-6x-x^2)^4}{(1+6x-3x^2)^4}, \quad (\mathrm{sl}^4(3z) \text{ に依る})$$

を取れば 7 個の根は

$$\alpha, R(\alpha), R^2(\alpha), R^3(\alpha), \cdots, R^6(\alpha). \qquad (R^7(\alpha) = \alpha).$$

となっているのが解ります。

ここに、三角関数と lemniscate 関数の同じような役割を認める事が出来ます。それぞれの代数方程式の根が三角関数や lemniscate 関数の**特殊値**で書けて、有理関数にそれぞれの**加法定理**が対応しているのが解ります。

3.3. Abel 拡大体の記述（三角関数（指数関数）、lemniscate 関数の役割は？）. 先程、それぞれ $\mathbb{Z}$ 係数（$\mathbb{Q}$ 係数）、$\mathbb{Z}[i]$ 係数（$\mathbb{Q}(i)$ 係数）の代数的に解く事の出来る代数方程式の例を提示しました。これらの代数方程式達の根をそれぞれ、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{Q}(i)$ に添加する事により Abel 拡大体の記述が与えられます。このような事実を通じても改めて三角関数と lemniscate 関数の類似性を認める事が可能となります。

定理 3.1 (Kronecker-Weber). 基礎体 $\mathbb{Q}$ の *Abel* 拡大体 K に対して以下が成立する。

$$K \subseteq \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}}),\quad n \text{ は整数}.$$

定理 3.2 ([21] 高木貞治学位論文). 基礎体 $\mathbb{Q}(i)$ の *Abel* 拡大体 K に対して以下が成立する。

$$K \subseteq \mathbb{Q}(i)\Big(\mathrm{sl}\Big(\frac{2\omega}{m}\Big)\Big),\quad m \text{ は } Gauss \text{ 整数}.$$

ここでは、虚２次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-m}), (m > 0)$ の Abel 拡大体の記述の説明はしません。この研究所報の目的は三角関数と lemniscate 関数の類似点を明確にして、さらに、そのような**視点**から感知される世界を明らかにする事にあるからです。

> 個人的には虚２次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-m}), (m > 0)$ の Abel 拡大体の記述は、関数を２つ使うという視点で、上記２つの定理と比較して汚いと感じています。あくまで個人的な好き、嫌いの話です。

今後の課題として … (Hilbert 12 問題).

問題 3.3 (Hilbert 12 問題). 与えられた基礎体 K_b の Abel 拡大体 K をある解析関数 $f(z)$ を用いて、

$$K \subseteq K_b\big(f(z_0)\big),\quad z_0 \text{ は特殊値}.$$

以上のように記述出来ないか？

個人的には Hilbert12 問題に貢献する、ある解析関数 $f(z)$ を具体的に構成してみたいと考えています。しかも、三角関数や lemniscate 関数に類する関数を。ちなみに高瀬正仁先生の論説 [1] では、その最後に Jacobi 関数が Hilbert の１２問題に対して一定の貢献をするのではないのか？と予見されています。

> 「(前略) Jacobi 関数はある特定の範疇の数体に対して、有理数体に対する指数関数、虚２次体に対する楕円モジュラー関数と同じ役割を果たすであろう。もしそのような数体の範疇をみいだして Jacobi 関数が Hilbert の１２問題に対し

て一定の解決をもたらすことが明らかにされたなら、そのとき多複素変数解析関数論の得るものは多大であり … (以下略)」[1][p88(p424)]

このような流れの中、次のような問題が設定されます。今後の課題の一つです。

問題 3.4 (課題①)**.** 具体的な Jacobi 関数で、かつ、三角関数や lemniscate 関数に類するものを構成できないか？

$$\text{三角関数} \Longrightarrow \text{lemniscat 関数 (具体的な楕円関数)} \Longrightarrow \text{Jacobi 関数!?(具体的な} \cdots).$$

3.4. **対称性（新たに?! 感知された三角関数と lemniscate 関数の類似の性質）.** Eisenstein の相互法則の証明はルジャンドル記号を三角関数で表し、q:奇素数に対して $P_q(\sin u) = \sin qu/\sin u$ を満たす多項式 $P_q(x)$ の性質を用いて平方剰余の相互法則の証明を与え、同様にして、４次剰余記号を lemniscate sine $(\mathrm{sl}(u))$ で表し、s:primary prime に対して $R_s(\mathrm{sl}(u)) = \mathrm{sl}(su)/\mathrm{sl}(u)$ を満たす有理関数 $R_s(x)$ の性質を用いて４次剰余の相互法則の証明を与えるというものです。実は、この $P_q(x) = 0$ や $R_s(x)$ の分子の多項式＝０が巡回方程式で、先程の例は $P_q(x) = 0, (q = 11)$ の場合と有理関数 $R_s(x), (s = -5 + 2i)$ に対する分子の多項式＝０の物を挙げました。

ここでは、以上のような事実をうけて、さらに次のようなものも合わせて考えました。

定義 3.5. [25]

(1、三角関数の場合)　m: 正の奇数、$x = \sin u$、として以下のように定義される $\sin u$ の多項式を考える。

$$P_{s,m}(x) := \frac{\sin mu}{\sin u}, \qquad P_{c,m}(x) := \frac{\cos mu}{\cos u}.$$

(２、lemniscate 関数の場合)　n: primary 数、$x = \mathrm{sl}(u)$、として以下のように定義される $\mathrm{sl}(u)$ の有理関数を考える。$\mathrm{sl}(u)$: lemniscate sine, $\mathrm{cl}(u)$: lemniscate cosine.

$$R_{s,n}(x) := \frac{\mathrm{sl}(nu)}{\mathrm{sl}(u)}, \qquad R_{c,n}(x) := \frac{\mathrm{cl}(nu)}{\mathrm{cl}(u)}.$$

もともとは、この lemniscate 関数によって定義される有理関数について調べていました [24]。この有理関数は零点と極で**対称性**があり、この**対称性**が相互法則の証明にも作用しています。

(有理関数の例) [24] (右辺の $\mathrm{sl}(u)$ を x と置いた。)

$n = 3 - 2i$ に対する $R_{s,n}(x), R_{c,n}(x)$ の例:

$$R_{s,n}(x) = \frac{\mathrm{sl}((3-2i)u)}{\mathrm{sl}(u)} = \frac{(3-2i) + (7+4i)x^4 + (-11-10i)x^8 + x^{12}}{1 + (-11-10i)x^4 + (7+4i)x^8 + (3-2i)x^{12}};$$

$R_{c,n}(x)=\dfrac{\mathrm{cl}((3-2i)u)}{\mathrm{cl}(u)}=$
$\dfrac{1-(2-6i)x^2+(3+8i)x^4+(12-4i)x^6+(3+8i)x^8-(2-6i)x^{10}+x^{12}}{1+(2-6i)x^2+(3+8i)x^4-(12-4i)x^6+(3+8i)x^8+(2-6i)x^{10}+x^{12}}.$

$n=-5+2i$ に対する $R_{s,n}(x), R_{c,n}(x)$ の例:

$$R_{s,n}(x)=\frac{\begin{array}{r}(-5+2i)-(13+76i)x^4-(325-246i)x^8+(459-520i)x^{12}\\ -(183-398i)x^{16}+(65+148i)x^{20}+(1-70i)x^{24}+x^{28}\end{array}}{\begin{array}{r}1+(1-70i)x^4+(65+148i)x^8-(183-398i)x^{12}\\ +(459-520i)x^{16}-(325-246i)x^{20}-(13+76i)x^{24}+(-5+2i)x^{28}\end{array}};$$

$$R_{c,n}(x)=\frac{\begin{array}{r}1-(10-10i)x^2-(9-40i)x^4+(84+76i)x^6-(251+56i)x^8-(214+170i)x^{10}\\ +(323+144i)x^{12}+(408+552i)x^{14}+(323+144i)x^{16}-(214+170i)x^{18}\\ -(251+56i)x^{20}+(84+76i)x^{22}-(9-40i)x^{24}-(10-10i)x^{26}+x^{28}\end{array}}{\begin{array}{r}1+(10-10i)x^2-(9-40i)x^4-(84+76i)x^6-(251+56i)x^8+(214+170i)x^{10}\\ +(323+144i)x^{12}-(408+552i)x^{14}+(323+144i)x^{16}+(214+170i)x^{18}\\ -(251+56i)x^{20}-(84+76i)x^{22}-(9-40i)x^{24}+(10-10i)x^{26}+x^{28}\end{array}}.$$

改めてこの有理関数の零点と極の**対称性**に焦点を当てます。上に挙げた具体例から解る事ですが、実は、$R_{s,n}(x)$ と $R_{c,n}(x)$ は以下のようにかける事が解ります。($R_{s,n}(x)$ は、[22, p245]、$R_{c,n}(x)$ は [25])

$$R_{s,n}(x)=\frac{W_n(x^4)}{V_n(x^4)},\qquad x=\mathrm{sl}(u),\qquad (W_n(X),V_n(X)\in\mathbb{Z}[X])$$
$$W_n(x^4)=x^{N-1}V_n(x^{-4})\qquad (n:=a+ib, N:=a^2+b^2, a,b\in\mathbb{Z}).$$

これに対して

$$R_{c,n}(x)=\frac{K_n(x^2)}{K_n(-x^2)},\qquad x=\mathrm{sl}(u),\qquad (K_n(X)\in\mathbb{Z}[X])$$
$K_n(X)$: 相反多項式

特に有理関数 $R_{c,n}(x)$ を表す多項式 $K_n(X)$ が相反多項式になっていることから、より強い零点と極の対称性が有理関数 $R_{c,n}(x)$ に現れています。この強い対称性というのは何なのか？じつは、有理関数 $R_{s,n}(x)$ と $R_{c,n}(x)$ の間に以下の関数等式があるという事の現れでした。さらに、有理関数 $R_{s,n}(x)$ と $R_{c,n}(x)$ の間の関数等式を得るのと同様にして、多項式 $P_{s,m}(x)$ と $P_{c,m}(x)$ の間にも類似の関数等式がある事を得ました。結果、改めて、ここに三角関数と lemniscate 関数の類似の性質（対称性）を関数等式という形で見出すに至りました。

定理 3.6 (関数等式 [25]). *(1、三角関数の場合)*　m:正の奇数、$\mathbb{Z}$-係数の多項式 $P_{s,m}(x)$, $P_{c,m}(x)$ の間に以下が成立する。

$$P_{c,m}(\sqrt{1-x^2}) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} P_{s,m}(x). \tag{3.4.1}$$

(2、lemniscate 関数の場合)　*n:primary* 数、$\mathbb{Q}(i)(x)$ の有理関数 $R_{s,n}(x), R_{c,n}(x)$ の間に以下が成立する。

$$R_{c,n}\Big(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\Big) = R_{s,n}(x). \tag{3.4.2}$$

（証明）lemniscate 関数の場合をやります。n:primary 数である事に注意して、

加法定理 + 有理関数の定義 + lemniscate 関数の定義や関係式

に留意して、$y := \mathrm{cl}(u)$ とおいて計算をすると

$$\begin{aligned} R_{s,m}\Big(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\Big) &= R_{s,m}(y) = R_{s,m}(\mathrm{cl}(u)) \\ &= R_{s,m}\Big(\mathrm{sl}\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big) = \frac{\mathrm{sl}\Big(m\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big)}{\mathrm{sl}\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)} = \frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)} = R_{c,m}(x). \end{aligned}$$

同じようにして

$$\begin{aligned} R_{c,m}\Big(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\Big) &= R_{c,m}(y) = R_{c,m}(\mathrm{cl}(u)) \\ &= R_{c,m}\Big(\mathrm{sl}\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big) = \frac{\mathrm{cl}\Big(m\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big)}{\mathrm{cl}\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)} = \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)} = R_{s,m}(x). \end{aligned}$$

□

ここに $P_{s,n}(x)$ と $P_{c,n}(x)$ の $n=13$ の場合の例を提示します。この例だけから、対称性を感知できる方は御一報下さい。

$$P_{s,q}(x) = 13 - 364x^2 + 2912x^4 - 9984x^6 + 16640x^8 - 13312x^{10} + 4096x^{12},$$
$$P_{c,q}(x) = 1 - 84x^2 + 1120x^4 - 5376x^6 + 11520x^8 - 11264x^{10} + 4096x^{12}.$$

問題 3.7 (課題②). 得られた定理 3.6 の対称性を表す関数等式 (3.4.1),(3.4.2) に対してこれら、現れている対称性を**統合**しているようなものの存在を明らかに出来ないか？

この上記問題の『対称性を**統合**しているようなものの存在』という表現は観念的で理解しづらいと思われますが、後々この研究所報の後半、あるいは、終わり、に近づくにつれてその意味が伝わってくれるものと考えています。

4. 三角関数 v s LEMNISCATE 関数 (II)

先程、数論的な立場、視点、あるいは現象において三角関数と lemniscate 関数の類似性を認める事が可能な状況証拠を幾つか提示いたしました。個人的な小川の主張です。

三角関数と lemniscate 関数は同じ関数なんです !!!!!!

というものです。この主張を数学(ギョウカイ)にしっかり流布させる事を取り敢えずの目的にしています。これより、三角関数と lemniscate 関数に対して、さらなる考察を与えたいと思います。この章では、三角関数と lemniscate 関数がどのようにして構成されているか?その確認から入りたいと思います。

4.1. 双方の関数の構成法.

それぞれが、同じようにして構成されます …

(三角関数の場合). 平面代数曲線としての(単位)円

$$x^2+y^2=1, \tag{4.1.1}$$

を素にします。この(第一象限)曲線の弧長は

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}. \tag{4.1.2}$$

で与えられています。そこで(単位)円の弧長を表す関数を考えて、**その逆関数として**三角関数を定義します。

$$u:=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Longleftrightarrow x:=\sin u$$

以上のようにしてまず、$x:=\sin u$ を定義して、その上で $x:=\sin u$ と (4.1.2) を用いて

$$\cos u:=\sin(\frac{\pi}{2}-u).$$

として $\cos u$ を定義します。加法定理は ($\sin u$ の場合)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

と成っています。これは以下の微分方程式

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0.$$

によって与えられています。以上が三角関数の場合の話です。

(lemniscate 関数の場合). 平面代数曲線としての lemniscate を素にします。

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2, \tag{4.1.3}$$

この lemniscate 曲線の（第一象限）弧長は

$$\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \frac{\omega}{2}. \tag{4.1.4}$$

で与えられています。そこで lemniscate の弧長の関数を考えて、**その逆関数として** lemniscate 関数を定義します。

$$u := \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} \Longleftrightarrow r := \mathrm{sl}(u)$$

以上のようにして、まず lemniscate sine $r := \mathrm{sl}(u)$ を定義します。その上で、この $\mathrm{sl}(u)$ と (4.1.4) を用いて

$$\mathrm{cl}(u) := \mathrm{sl}(\frac{\omega}{2} - u).$$

として lemniscate cosine $\mathrm{cl}(u)$ を定義します。その加法定理は ($\mathrm{sl}(u)$ の場合)

$$\mathrm{sl}(u+v) = \frac{\mathrm{sl}(u)\,\mathrm{cl}(v) + \mathrm{cl}(u)\,\mathrm{sl}(v)}{1 - \mathrm{sl}(u)\,\mathrm{sl}(v)\,\mathrm{cl}(u)\,\mathrm{cl}(v)}.$$

となり、これは以下の微分方程式

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

によって与えられます。以上が lemniscate 関数の場合の話です。詳しくは [5] を御覧下さい。

補足＋これからの展開 ･･･. 三角関数と lemniscate 関数は同じようにして構成されます。歴史的には三角関数の模倣品として Gauss が lemniscate 関数を構成しました。さらにその加法定理に相当するものは既に Gauss より以前の Euler によって与えられています。

これからの話の展開ですが、･･･ これは、小川の‘じぶんかって’な考え方ですが、**関数の構成法が同じだからと言って、関数どうしの性質が同じになる。似たようなものになる。そんな保証は何処にも無く ･･･**

･･･とすると素になった曲線どうしに、円: $x^2+y^2=1$ **と lemniscate:** $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ **に何等かの繋がりがあるのでは ･･･? あるいは、そこに共通の性質、それら全てを統合するような視点がある !?**

これから、この**繋がり**、**視点**を明らかにしていきます。

4.2. 平面代数曲線の構成法と自然数 n に依存する代数曲線の造り方 …. [27, 28]

三角関数と lemniscate 関数の双方にはいくつかの**似ている性質達**があります。また、双方、**同じようにして構成**されます。このような、事実を受けて、平面代数曲線としての円 (4.1.1) と lemniscate(4.1.3) （それぞれが、三角関数と lemniscate 関数の素となっている曲線 … ）

$$x^2+y^2=1; \tag{4.1.1}$$

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2. \tag{4.1.3}$$

この２つの代数曲線に何らかの**繋がり**はないのか？この**繋がり**について考えていきます。

まずは、それぞれの代数曲線がどのように構成されるのか？… その構成法に焦点を当てます。（注：以下点 $P:=(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上でしか考えません。）

(円の場合 …)

$\mathbb{R}^2$ 上の点 $P:=(x,y)$、焦点 $F:=(a,b)$（固定）、$c>0$（定数）、に対して以下の条件を満足するもの。

$$|PF|=c, \qquad (|PF|:=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}). \tag{4.2.3}$$

条件 (4.2.3) に対して円:$x^2+y^2=1$ は $F=(0,0)$ で $c=1$ の場合となります。

(lemniscate の場合 …)

$\mathbb{R}^2$ 上の点 $P:=(x,y)$、焦点 $F_1:=(a_1,b_1), F_2:=(a_2,b_2)$（$F_1, F_2$ は固定、$F_1\neq F_2$）、$c>0$（定数）、に対して以下の条件を満足するもの。

$$|PF_1||PF_2|=c, \qquad (|PF_i|:=\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2} \quad (i=1,2)). \tag{4.2.4}$$

条件 (4.2.4) に対して lemniscate:$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ は $F_1=(-1/\sqrt{2},0)$,$F_2=(1/\sqrt{2},0)$ で $c=1/2$ の場合となります。

このような事を背景に次のようなものを考えていきます。ポイントは以下の３つ。

（ポイント）

1. 平面代数曲線の構成法の一般化。（複数の焦点 F_i と $c>0$ （定数）によって構成される代数曲線。各焦点は互いに異なる。）

$$|PF_1||PF_2|\cdots|PF_n|=c, \quad (|PF_i|:=\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2} \quad (i=1,2,\cdots,n)).$$

2. 上記１の構成法に対して n 個の焦点が自然数 n に依存して定まるものを考える。（自然数 n に依存して決定される代数曲線）

3. このように上記１，２によって構成された曲線達**全体**を考えていく。つまり、

$$f_n(x,y)=0\begin{cases} f_1(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_1|=c,\\ f_2(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_1||PF_2|=c,\\ \cdots, & \\ f_k(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_1||PF_2|\cdots|PF_k|=c,\\ \cdots. & \end{cases}$$

以上１，２，３が**基本的**な考え方です。

これから提示される定理の（∗）の平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ は、以下の考え方によって構成されたものです。(基本となる考え方は同じです。)

$\mathbb{R}^2$ 上の点 $P:=(x,y)$、焦点 $F_{ij}:=(a_{ij},b_{ij})$（固定で F_{ij} は自然数の i,j に依存する。)、自然数から、実数への関数 ϕ を用意して（$\phi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$)、以下のようなものを考える。(但し $|PF_{ij}|:=\sqrt{(x-a_{ij})^2+(y-b_{ij})^2}$ とした。)

$$f_n(x,y)=0\begin{cases} f_1(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{11}|=\phi(1),\\ f_2(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{21}||PF_{22}|=\phi(2),\\ f_3(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{31}||PF_{32}||PF_{33}|=\phi(3),\\ \cdots, & \\ f_k(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{k1}||PF_{k2}||PF_{k3}|\cdots|PF_{kk}|=\phi(k),\\ \cdots. & \end{cases}$$

このような考え方に対して $c>0$ 実数（定数）を用意して、具体的に焦点 F_{nk} と関数 ϕ を以下のように定めたもの

$$\begin{aligned} F_{nk} &:=\Big(c\cos\frac{2k\pi}{n},c\sin\frac{2k\pi}{n}\Big), \quad (k=1,2,\cdots,n, \quad n\in\mathbb{N});\\ \phi(n) &:=c^n. \end{aligned}$$

これが、定理の代数曲線（∗）となります。

このような考え方を基に構成した**具体的な**代数曲線 $f_n(x,y)=0$、及びその性質を紹介します。

定理 4.1 ([27, 28]). 自然数 n に依存する平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ として次のようなものを考える。*($c>0$:実数（定数）を用意して)*

$$(*)\qquad \prod_{k=1}^{n}\Big(x^2+y^2-2c\big(x\cos\frac{2k\pi}{n}+y\sin\frac{2k\pi}{n}\big)+c^2\Big)-c^{2n}=0.$$

この時、この平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ の弧長全体の長さは、次のように与えられる。

$$\sqrt[n]{2}cB\Big(\frac{1}{2n},\frac{1}{2}\Big).$$

但し、$B(p,q)$ は *Beta-function*。

$$B(p,q):=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0).$$

補足①. 定理 4.1 によって、また改めてここに提示された自然数 n に依存する代数曲線 $f_n(x,y)=0$ の構成法（視点）によって、円：一番目、lemniscate:二番目と次々に円、lemniscate、三様模様と次々に類する曲線達がみつかり、ここに円、lemniscate に始まる一連の曲線の**繋がり**が明らかになりました。そして、これらの曲線の弧長が（その与えられた曲線の全体の弧長が）その番号付けに応じた Beta-function で描けるという事実が判明し、これらの曲線達の全体を**統合**している、あるいは**制御**している物の存在が明らかになりました。

定理 4.1 における事実を、 **三角関数と lemniscate 関数の平面代数曲線からみた繋がり**と主張し、同時に『三角関数と lemniscate 関数は同じ関数なんです !!!!!! 』と私が叫び続けた根拠をここに提示致します。尚、定理 4.1 の証明は後程与えます。

補足②. ここでの話は、小川のこの研究所報の目的『三角関数と lemniscate 関数は同じ関数なんです !!!!!! 』と数学（ギョウカイ）流布させる事とはずれています。関連する話題として一つの方向性を提示致します。

最近、国際数学連合と、ユニセフの協賛を得て、「世界数学年２０００」が企画され２１世紀へのチャレンジとして

『Mathematics Unlimited 2001 and Beyond』

が出版されました。（１９００年に Hilbert が提示した２３の問題、その行為の模倣として …）この論説の日本語訳として

『数学の最先端　２１世紀への挑戦』(vol 1 ～vol 5)

がシュプリンガーフェアラーク東京から出版されています。(vol 1, vol 5 を所収）その vol 1 から論説『周期』(periods) について少し触れます。詳しく知りたい方は改めて [34, 35] をお読みください。

以下は、黒川信重先生訳の『周期』[35] の始まりの部分を文体を少し変えて、一部、小川の感情を入れた物です。

伝統的に数は以下のように分類されてきました。

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} & \subset & \overline{\mathbb{Q}} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R} & \subset & \mathbb{C} \end{array}$$

さらに、代数的でない数を**超越数**といいます。このような分類の中で、まだ欠けている、あるいは、さらに、重要な数の類が存在します。それは $\overline{\mathbb{Q}}$ と $\mathbb{C}$ の間にあり、これを**周期**と言います。この**周期**という数は数論的な性質から見て数の体系の中で、これから最も重要な物になると考えられます。（この周期の例に π が挙げられます。π のような数の事を数学者ならば、つまらない数だとは言わないと思います。一部、例外が在るかもしれませんが …）

次が周期の初等的な定義になります。

定義 4.2. ある複素数が**周期**であるとは、その実部と虚部が有理数係数多項式の不等式で与えられる $\mathbb{R}^n$ 内の領域上での有理数係数有理関数の絶対収束積分の値になっていることである。

周期の例として π や楕円積分、等があります。π の場合は …

$$\pi = \iint_{x^2+y^2\leq 1} dxdy = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$\pi :=$ **直径１の円周の長さ**

であり、楕円積分（**長径と短径が a と b の楕円の周の長さは**）

$$2\int_{-b}^{b}\sqrt{1+\frac{a^2x^2}{b^4-b^2x^2}}dx$$

となります。

以上が論説 [35] の冒頭の一部です。

小川は、**周期**というものを、与えられた図形（代数曲線）に依って決定される数（弧長、体積、等）と解釈しています。定理 4.1 では、図形の繋がりと、それぞれの図形に依って決定される数の繋がりが明らかになり、さらに、そこに一つの統一的な視点が与えられました。論説 [34, 35] に対して一石を投じたとも考えています。

さらに、直ちに次のような課題（問題）が考えられます。

問題 4.3 (課題③). 考案された平面代数曲線の構成法を用いて、あるいは応用をして、特殊な平面代数曲線（達）を構成し、それぞれに依存する数を考え、結果、定理 4.1 のような、他の現象を見出せないか？

尚、この課題は、そもそもの小川の目的（あるいは哲学、思想）に沿わないものです。近い将来？あるいは、遠い未来？において、あかの他人、もしくは、鎌田保雄氏により何らかの報告がなされると思います。

4.3. 定理の証明. 定理 4.1 は [27, 28] において予想として提示され、後に鎌田保雄氏により、本質的な証明が与えられました。証明は二段階で与えられます。

第一段. $\mathbb{R}^2$ 上の点 $P := (x,y)$、に対して $c > 0$ 実定数を用いて

$$\begin{aligned} F_{nk} :=& \Big(c\cos\frac{2k\pi}{n}, c\sin\frac{2k\pi}{n}\Big), \quad (k = 1, 2, \cdots, n, \quad n \in \mathbb{N}); \\ \phi(n) :=& c^n. \end{aligned}$$

具体的に焦点 F_{nk} と関数 $\phi(n)$ を以上のように定めて以下の条件

$$f_n(x,y) = 0 \Longleftrightarrow |PF_{n1}||PF_{n2}||PF_{n3}|\cdots|PF_{nn}| = \phi(n) \tag{4.3.1}$$

を満たす代数曲線を考えています。定理ではこの条件を具体的に計算した式で代数曲線 $f_n(x,y) = 0$ を記述しました。これを点 $P := (x,y)$ を $z := x + iy$ として**複素数平面に移植し直して考えます**。焦点 F_{nk} を

$$\alpha_k := c\Big(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\Big), \quad (k = 1, 2, \cdots, n, \quad n \in \mathbb{N})$$

と置き直します。複素数平面では $z := x + iy$ に対して

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

である事に注意すると条件 (4.3.1) は

$$|z - \alpha_1||z - \alpha_2||z - \alpha_3|\cdots|z - \alpha_n| = c^n$$

したがって

$$|(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)\cdots(z - \alpha_n)| = c^n$$

となります。ここで、実は α_k が $z^n - c^n = 0$ の根に成っている事を使えば条件 (4.3.1) は以下のように書き直されます。

$$|z^n - c^n| = c^n \tag{4.3.2}$$

今度は $z := x + iy$ を、r, θ を用いて極表示 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ として de-Moiver や Euler の等式を使う事によって条件 (4.3.2) から r と θ の関係式を以下のようにして得ます。

$$z^n - c^n = r^n e^{in\theta} - c^n = \overbrace{r^n\cos n\theta - c^n}^{\text{実部}} + \overbrace{ir^n\sin n\theta}^{\text{虚部}}$$

これより、条件 (4.3.2) と $|z^n - c^n|^2 = c^{2n}$ と合わせて考えれば

$$(r^n \cos n\theta - c^n)^2 + (r^n \sin n\theta)^2 = c^{2n}$$

となります。これを整理して

$$r^n = 2c^n \cos n\theta \tag{4.3.3}$$

という条件 (4.3.1) や (4.3.2) を満たす与えられた代数曲線の極表示を得るに至ります。

第二段. 定理 4.1 の与えられた代数曲線の極表示 (4.3.3) からその曲線の弧長が以下のようにして得るにいたります。

$$\left.\begin{aligned} x &:= r\cos\theta \\ y &:= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \text{より} \left\{\begin{aligned} dx &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \\ dy &= \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \end{aligned}\right.$$

よって線素 dL は

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

となります。今は (4.3.3) つまり $r^n = 2c^n \cos n\theta$ という代数曲線を考えているから

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{2c^n \sin n\theta}{r^{n-1}}.$$

となります。これを代入して dL を計算すると

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{r^2 + \left(\frac{2c^n \sin n\theta}{r^{n-1}}\right)^2} d\theta = \sqrt{r^2 + \frac{4c^{2n}\sin^2 n\theta}{r^{2n-2}}} d\theta \\ &= \sqrt{\frac{r^{2n} + 4c^{2n}\sin^2 n\theta}{r^{2n-2}}} d\theta = \sqrt{\frac{4c^{2n}\cos^2 n\theta + 4c^{2n}\sin^2 n\theta}{r^{2n-2}}} d\theta \\ &= \sqrt{\frac{4c^{2n}r^2}{r^{2n}}} d\theta = \sqrt{\frac{4c^{2n}r^2}{4c^{2n}\cos^2 n\theta}} d\theta = \frac{r}{\cos n\theta} d\theta = \sqrt[n]{2}c\cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta d\theta \end{aligned}$$

改めて、今考えている代数曲線の線素 dL は

$$dL = \sqrt[n]{2}c\cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta d\theta. \tag{4.3.4}$$

となります。今は $-\pi \leq \theta < \pi$ の範囲ですが $r^n = 2c^n \cos n\theta$ の関係より n 分割した

$$-\frac{\pi}{n} \leq \theta < \frac{\pi}{n}$$

の範囲で考えて後に n 倍したものを考える事にします。これは、(4.3.3) の関係式からもそうですが考えている代数曲線が回転 $(2\pi)/n$ で不変である事を意味します。さらに $c > 0$ 実定数で r はそのとり方より $r \geq 0$（詳しくは $0 \leq r \leq \sqrt[n]{2}c$）となる事が解ります。この事から

$$r^n = 2c^n \cos n\theta \tag{4.3.3}$$

の左辺が0（零）以上である事から、さらにθの範囲を特定できて

$$-\frac{\pi}{2n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2n}$$

となります。以上より与えられた代数曲線の弧長は(4.3.4)とn倍する事を留意して

$$L = \sqrt[n]{2}cn \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta d\theta.$$

で与えられている事が解ります。計算を進めると …

$$\sqrt[n]{2}cn \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta d\theta. = \sqrt[n]{2}cn2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2n}} \cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta d\theta.$$

さらに$n\theta = X$で変数変換をすれば

$$\sqrt[n]{2}cn2\frac{1}{n} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{n}-1} XdX.$$

改めて整理して

$$L = \sqrt[n]{2}c2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{n}-1} XdX. \tag{4.3.5}$$

となります。この(4.3.5)に対してBeta-functionの以下の性質を

$$
\begin{aligned}
&(\text{定義}) && B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0),\\
&(\text{性質１}) && B(p,q) = B(q,p),\\
&(\text{性質２}) && \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a\theta\cos^b\theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

適応する事により求める曲線の弧長が

$$L = \sqrt[n]{2}cB\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right) = \sqrt[n]{2}cB\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right). \tag{4.3.6}$$

とBeta-functionで与えられる事が明らかに成りました。 □

補足③. 関連する話題として、以下を紹介します。

今、定理4.1の証明が与えられました。これは鎌田保雄氏によってなされたものですが(鎌田保雄氏は、$c=1$つまり各焦点が単位円周上にある場合を証明した。)、特に、$\mathbb{R}^2$の点$P := (x,y)$の関係式として考えていた代数曲線を、**複素数平面に移植して考える**。これが決定的となりました。そして、代数曲線を複素数平面で考えるというのが自然であるという考え方もあるようです。例えば、定理4.1の代数曲線は複素数平面において

$$|z^n - c^n| = c^n. \tag{4.3.2}$$

となりますが、[37]においては$f(z)$:ある多項式を与えて、$|f(z)| < 1$という条件のもとで定義される代数曲線、その曲線の弧長の考察がなされています。複素数平面において多項

式 $f(z)$ によって定義される代数曲線、その曲線の弧長についての考察は改めて [36], [37] を御覧下さい。

5. 見えた景色（感知された世界）

これまでに、長い間蓄積されてきた数学という現象（相互法則、Abel 方程式、Abel 拡大体の記述、$\cdots$ etc）があります。そして一方ではまた、これらの数学の現象を元にして打ち立てられた数学の理論（Galois 理論、類体論、関数論 $\cdots$ etc）があります。この『数学という現象』や『数学の理論』、これらを

『三角関数と lemniscate 関数は同じ関数なんです。』

という視点（個人的には感情）を基準として、一つの枠組みの中で、あるいは表や地図として捕らえる事が可能となりました。この研究所報においては表 (最終ページ) を披露致します。

この表を眺めるにあたり注意点が３つあります。

(1)　膨大な知の蓄積を**一つの方向から強引に眺めているという事。**

(2)　三角関数や lemniscate 関数といった**特殊な媒体を通じて眺めているという事。**

(3)　特殊な現象や媒体だからこそ、このような大きな枠組みで捕らえる事が可能 !?

さて、そもそも数学の研究をするという事は、如何する事なのでしょうか？昔とある先輩からよく言われました。

「結果を出すだけでなく、数学という潮流の中での位置付けまでをしなければ $\cdots$ 」

私の場合は、確かに感じたものがあり、それを描くという事に固執してきました。主観的な色彩が強いという事です。ただ、主観的な部分だけでは、独り善がりであって、それに客観的な**形式**を具える必要があります。

「主観的存在の客観的投影」（詳しくは [43] [p395–]。）

後天的にして、数学史の文献をあたる事になりました。Euler [39]、Gauss [3, 4, 5, 6, 9, 8, 1]、Eisenstein [11, 12, 16]、Abel [17, 18, 19]、$\cdots$ 高瀬正仁 [1]、鎌田保雄（この研究所報、定理 4.1 の証明者で、私の兄弟子の一人）$\cdots$ 多くの人達の手を借りて、果たしてどこまで数学という潮流に対する位置付けや、客観的形式を備える、という事が出来たのか $\cdots$ 感じたものを描き続けてきた中で、数学の潮流の中に巨大な塊があると認識し、その事実の公表に踏み切りました。定理 4.1 はその状況証拠の一つです。

感じたものを描ききったのか？というと、表を見れば明らかですが、殿堂の落成には程遠い状態 $\cdots$ 。良く言ったとしても、ようやく足場が、土台ができ、その上に柱を１、２本立てたという状態 $\cdots$ 。Gauss（先生）はお笑いするのでしょうか？それとも、烈火の如くお怒りになるのでしょうか？時間の経過とともに、色々な事が明らかに成ると思います。いずれにしても今後を待たなければなりません。

他人の評価を気にせず、ただ、純粋に学問に対して挑戦を続け、先人達の背中を必死に追い続けている人達がいます。**そういう人達**が（私の感じる限りでは）非常に少ないのが残念です。ただ、確かに**そういう人達**は存在するし、私がもし学問を続けるというのであれば、**そういう人達**の背中を見失わないようにして、ついて行く事なんだと感じています。

学問に対する接し方というのは、人それぞれだと思います。私の場合は、確かに感じたものが在ったから、それを描く事に固執しました。

> 「数学史は、現代批判から出発して、明日の数学への道標を提示するものでありたいと思う。そうして、もし我々の究明が効を奏して、過去の遺産の中に幸いにも未開の沃野が発見されたとするならば、数学史に寄せる我々の希望は必ずや正しくかなえられる事であろう。」[9][p9]

> 「ガウスが進んだ道は即ち数学の進む道である。その道は帰納的である。特殊から一般へ！それが標語である。それは凡ての実質的なる学問において必要なる条件であらねばならない。数学が演繹的であるというが、それは既成数学の修業にのみ通用するのである。自然科学においても一つの学説が出来てしまえば、その学説に基づいて演繹をする。しかし論理は当たり前なのだから、演繹のみから新しい物は何も出て来ないのが当たり前であろう。若しも学問が演繹のみにたよるならば、その学問は小さな環の上を永遠に週期的に廻転する外はないであろう。我々は空虚なる一般論に捉われないで、帰納の一途に精進すべきではあるまいか。」[6][p57]

> 「学問の値打ちを理解する資格と力を備えているのは、学士院や大学のような組織の世俗の権威ではなく、理解する目と共鳴する心情とを合わせもつある種の特定の「人」なのである。もし学問で自信のある果実を摘んだという確信が訪れたなら、即座に理解されない事をむしろ喜んで、それを理解する力と共感しうる心情をもつ学問の仲間を探し当てて小さな精神の共同体を形成し、新しい学問の生成をめざさなければならないのである。心情と心情の共鳴こそ、学問というものの共通の基盤であり、学問の世界にただよう神秘感の、永遠に尽きることのない泉である。」[43][p238]

この研究所報を描いていて、ふと感じた事があります。“私”というものが在って、それで、こういうものが出来あがったのか … それとも、数学という何物かが（“私”に）語りかけてくれたのか … 私には良く解りません。ただ、数学という学問、あるいは文化、知の遺産を通じて、古より続く人と人の繋がりを改めて感じている次第です。あの Gauss にも Fagnano や Euler という前身が在った。これは周知の事実です。

今回、機会あり、ここに研究所報として、一連の繋がりを公表できたのは幸いです。また、改めて、この数学史シンポジウムが今後も続いて行く事を願います。この研究所報が高瀬正仁先生の [1] の姉妹版と認められ広く

『三角関数と lemniscate 関数は同じ関数なんです。』

という認識が理解される事を期待します。

以下は私の**個人的な課題**です。世の中には、私のような**馬鹿**あるいは**狂人**がいます。それをお忘れなきように。それでは。

問題 5.1 (課題)**.** 餓死を恐れず、富貴、権門に屈せず、そして媚びず、私心を押さえ、その上で尚、数学という学問を続ける事ができるか？

References

[1] 高瀬 正仁: 論説 『Gauss「整数論」と Hilbert の第１２問題』、数学（日本数学会編集）、岩波書店、第５４巻、第４号、２００２年１０月 秋季号.

[2] 足立 恒雄、三宅 克哉: 『類体論講義』 （日評数学選書）日本評論社 1998.

[3] 高瀬 正仁: 訳 『ガウス整数論』 朝倉書店 1995.

[4] 倉田 令二郎: 『平方剰余の相互法則』（ガウスの全証明）日本評論社 1992.

[5] 河田 敬義: 『ガウスの楕円関数論』上智大学数学講究録 No 24, 1986.

[6] 高木 貞治: 『近代数学史談』『数学雑談』 （復刻版）共立出版 1996.

[7] 平松 豊一: 数理情報科学シリーズ 18, 数論を学ぶ人のための『相互法則入門』, 牧野書店 1998.

[8] 久保田 富雄: 「整数論の発展をもとめて」(Gauss の第４証明をめぐる問題)、数学の歩み、8-4 (1961), 198–207 (この記事は、上記、平松『相互法則入門』217-232 にもある。)

[9] 高瀬 正仁: 『ガウスの遺産と継承者達』 ドイツ数学史の構想、 海鳴社, 1990.

[10] M. Takase: *Three aspects of the theory of complex multiplication*, The intersection of history and mathematics, Sci. Network Hist. Stud, **15** (1994), 91–108.

[11] G.Eisenstein: *Application de l'algébre à l'arithmétique transcendante*, J. fur reine u. angew. Math **29**(1845), 177–184.

[12] G.Eisenstein: *Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen, I: Ableitung des biquadratischen Fundamentaltheorems aus der Theorie der Lemniscatenfunctionen, nebst Bemerkungen zu den Multiplications- und Transformationsformeln*, J. fur reine u. angew. Math **30**(1846), 185–210.

[13] M. Yukitaka: *Entrance examination and the law of quardratic reciprocity*, Mathematical communication for mathematician, No **30**(1998), 20–23, in Japanese.

[14] T.Kubota: *Some arithmetical applications of an elliptic function*, J. Reine Angew. Math. **214/215**(1964), 141–145.

[15] T.Kubota: *Anwendung Jacobischer Thetafunktionen auf die Potenzreste*, Nagoya Math. J. **19**(1961) 1–13.

[16] K. Watanabe, Y. Miyagawa and T. Higuchi: *A remark on the analytic proof of the law of biquadratic reciprocity*, Journal of the Yokohama National University, Sec. **1**, No. 43, (1996).

[17] N.H.Abel: *Recherches sur les functions elliptiques*, J. fur reine u. angew. Math. Bd.**2** (1827), 101–181. Bd.**3**(1828), 160–190.

[18] N.H.Abel: *Mémoire sur une classe particulière d'equations résolubles algébriquement*, J. fur reine u. angew. Math. Bd.**4**(1829), 131–156.

[19] 高瀬 正仁 訳 『アーベル／ガロア楕円関数論』 朝倉書店 (1998).

[20] L.Kronecker: *Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen*, Monatsber. kgl. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1853), 365–374; Werke IV, 1–11.

[21] T.Takagi: *Über die im Bereiche der rationalen komplexen Zahlen Abelscher Zahlkörper*, J. Coll. Sci. Tokyo **19** (1903), 1–42; Collected Papers, 13–39.

[22] F. Lemmermeyer: Reciprocity Laws ; From Euler to Eisenstein, Chapter 8, Springer, (2000).

[23] K. Ireland and M. Rosen: A Classical Introduction to Modern Number Theory, New york:Springer-Verlag, (1990).

[24] T.Ogawa: *The recurrence formulas and the symmetrical relation of the rational functions defined by the lemniscate functions and primary numbers of Gaussian integers*, preprint (2000).

[25] T.Ogawa: *Similarities between the trigonometric function and the lemniscate function from arithemetic view point*, Tsukuba Journal of Mathematics. to appear

[26] 小川 琢磨 : *Similar properties betwewn the trigonometric function and the lemniscate function from some arithmetical points*, 関数論分科会アブストラクト (2004.3)

[27] T.Ogawa: *The connection of the analytic functions from a point of view to some plane algebraic curves*, preprint (2003.9).

[28] 小川 琢磨 : *The connection between the trigonometric function and the lemniscate function from some plane algebraic curves*, 関数論分科会アブストラクト (2004.3)

[29] J.H. Shlverman and J. Tate (著)、足立 恒雄、木田 雅成、小松 啓一、田谷 久雄 (訳) 『楕円曲線論入門』(第３版) シュプリンガー・ファラーク東京 (1997)

[30] J.S.Chahal (著) 織田 進 (訳) 『数論入門講義』 共立出版 (2002).

[31] 西和田公正 :「ガウスの算術幾何平均をめぐって」津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 **No.24** (2003), 59–70.

[32] 西和田公正 :「ガウスの Theorema elegantissimum」津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 **No.25** (2003), 1–12.

[33] 安藤 四郎 :「楕円積分・楕円関数入門」 日新出版 (1970).

[34] M.Kontsevich, D.Zagier: *Periods*, Mathematics Unlimited 2001 and Beyond, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2001), 771–xxx.

[35] M.Kontsevich, D.Zagier, 訳、黒川 信重: 『周期』、数学の最先端２１世紀への挑戦 vol 1, シュプリンガーフェアラーク東京 (2002), 74–125

[36] P.Borwei: *The arclength of the lemniscate* $|P(z)| = 1$, Proceeding of the American Mathematical Society vol **123**, No **3**, (1995), 797–799.

[37] P. Erdös, F.Herzog, and G.Piranian: *Metric properties of polynomials*, J. Analyse Math **6**, (1958), 125–148.

[38] 岸 正倫 藤本 坦孝 :「複素関数論」 学術図書出版社 (1994).

[39] 高瀬 正仁 『ｄｘとｄｙの解析学』(オイラーに学ぶ) 日本評論社 (2000).

[40] 渡邊 公夫 『初等超越関数の世界』(現在、宮川 幸隆氏とともに執筆中 !?)

[41] デュドネ編　『数学史　II』（１７００～１９００）　上野　健爾、金子　晃、浪川　幸彦、森田　康夫、山下　純一　訳　岩波書店　(1985)
[42] 高瀬　正仁　『評伝　岡潔（星の章）』　海鳴社 (2003).
[43] 高瀬　正仁　『評伝　岡潔（花の章）』　海鳴社 (2004).

6. 参考資料（定理 4.1 の代数曲線達と見えた景色）

定理 4.1 の代数曲線の計算結果とその外形（一部）をここに提示します [27]。また後に見えた景色として**表**を提示します。（表として認識できるのは定理 4.1 に依っています。）

n	$f_n(x,y)=0$
1	$x^2+y^2-2cx=0$
2	$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=0$
3	$(x^2+y^2)^3-2c^3(x^3-3xy^2)=0$
4	$(x^2+y^2)^4-2c^4(x^4-6x^2y^2+y^4)=0$
5	$(x^2+y^2)^5-2c^5(x^5-10x^3y^2+5xy^4)=0$
6	$(x^2+y^2)^6-2c^6(x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6)=0$

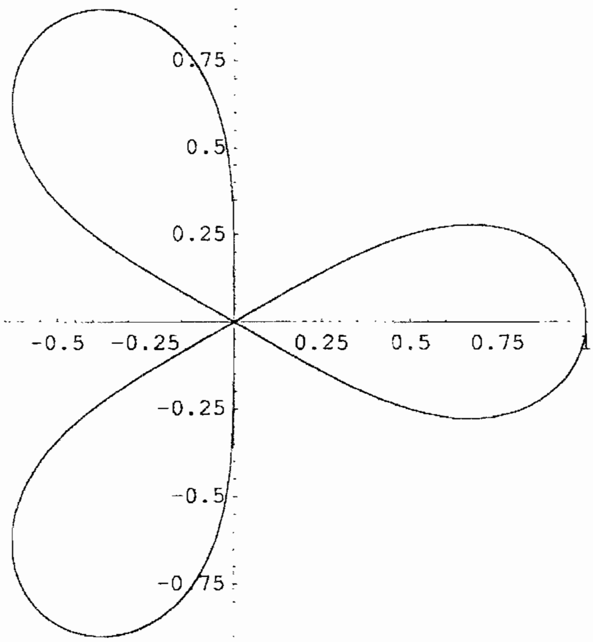

FIGURE 1. $(x^2+y^2)^3-(x^3-3xy^2)=0.$

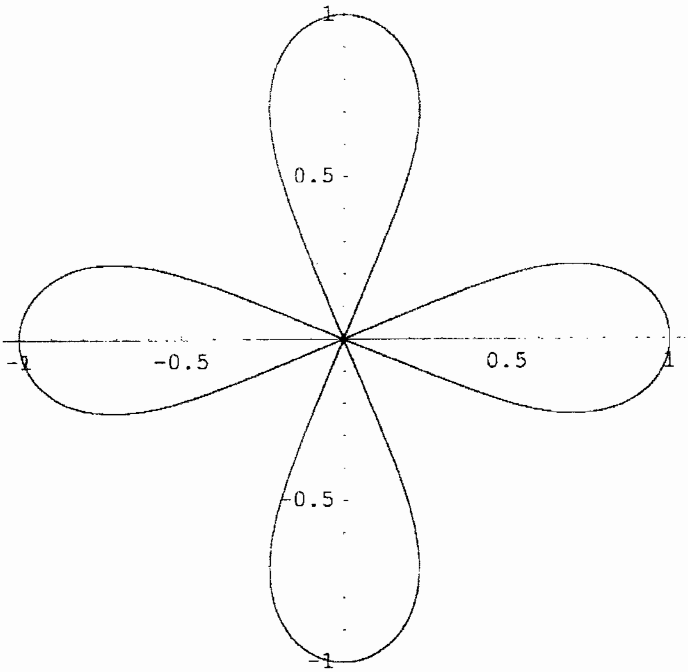

FIGURE 2. $(x^2+y^2)^4-(x^4-6x^2y^2+y^4)=0.$

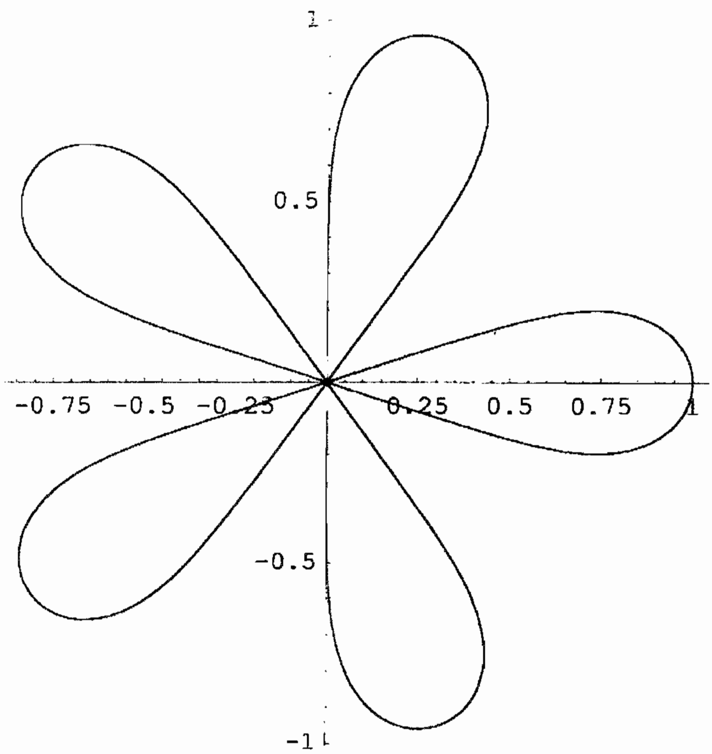

FIGURE 3. $(x^2+y^2)^5-(x^5-10x^3y^2+5xy^4)=0.$

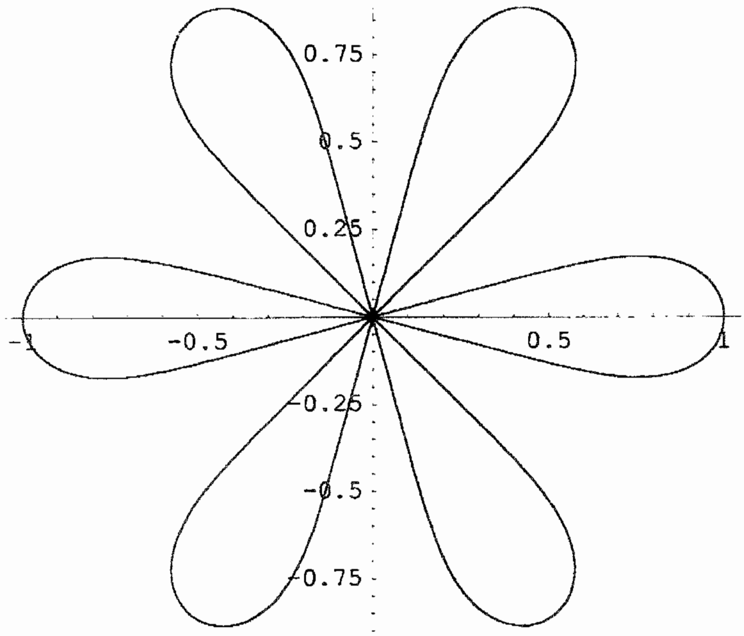

FIGURE 4. $(x^2+y^2)^6-(x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6)=0.$

何番目？(n)	代数曲線	弧長（周期）	解析関数	相互法則	Abel 方程式	Abel 拡大体	対称性（関数等式）
1 番目	円	π	**三角関数**	2 次剰余	$\mathbb{Z}$ 係数 ($\mathbb{Q}$)	Kronecker-Weber Th	定理 3.6 (3.4.1)
2 番目	lemniscate	$B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$	**lemniscate 関数**	4 次剰余	$\mathbb{Z}[i]$ 係数 ($\mathbb{Q}(i)$)	高木学位論文	定理 3.6 (3.4.2)
3 番目	三様模様	$B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$	**Jacobi 関数!?**	?	?	?	?
4 番目	四様模様	$B\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$	?	?	?	?	?
……	……	……	……	……	……	……	……
n 番目	n 様模様	$B\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right)$	?	?	?	?	?
(特殊な) 視点	小川曲線	Beta 関数	?	?	巡回方程式	**Hilbert12 問題**	**問題 3.7（課題②）**
理論	?	周期 [34, 35]	解析関数論	?	ガロア理論	類体論	?

TABLE 1. 見えた景色、感知された世界（高瀬―小川プログラム）