デーデキントにおける構造概念の形成

赤堀　庸子

本稿で我々は、構造概念の祖とされるデーデキントについて、その数学思想の実際のありようをたどっていくことを試みる。

とりあげるのは、有名なイデアル論(1871)、無理数論(1872)、自然数論(1888)であるが、その前に、1854年の就任講演について検討する。(1)

デーデキントが就任講演を行ったのは、リーマンと同じ、1854年であった。非専門の聴衆を意識してか、数学のレベルはそう高いものではない。まず一般的な学問論から始まり、次に、数学の一般論について述べ、数の理論、三角関数の話題、積分の話題、という構成になっている。基本概念から応用へ、というきれいな演繹的構成になっているのがひとつの特徴である。

まず、学問論に関して。デーデキントは、学問というものを、真理を得るための体系づけ、とみなす。体系づけを行うためには、何らかのメルクマール ――概念、定義 ――が必要になる。デーデキントは、この「概念」を重要視する。学問が扱う領域を広げていくに従い、その概念は、より広い有効性を得る為に、修正発展させられることが必要になってくる。デーデキントは、これを学問自体の発展と同一視するのである。

数学においては、その概念の拡張は恣意的なものとはならない。はじめにその概念がたちあらわれたときの状況からくる、内的必然性に従わねばならない。数の場合でいえば、それは演算法則である。

デーデキントの数の理論は、まず、数えるという行為から出発する。それによって自然数が生じる。数えるという行為の繰り返しを総括して捉えることにより、乗法が生じる。同様に、乗法の繰り返しにより巾演算が生じる。しかしこの演算だけでは、算術の発展には不十分である、とデーデキントはいう。算術の発展を促進するのは、間接的演算、すなわち逆演算である。こうして我々は、負数、分数、無理数、虚数を生み出してきた。この様に数領域を拡大したあとは、この領域内で、演算を新たに定義し直す必要がある、とデーデキントはいう。

ここでデーデキントは、乗法と巾の例を挙げて説明する。たとえば、乗法は、初めは足し算の総括として自然数に対してのみ適用されていたのだが、これを負数に対して定義す

るのには、分配法則を使う、といったやり方をとる。同様に巾演算に関しては、指数法則が適用される。

デーデキントには、こうして領域を拡大し、演算を定義しなおす、こうした手続きを踏んだあとは、元の領域と新しい領域を全く同質のものとして受け入れる、という考え方があるようだ。ここでデーデキントは、おそらく複素数までの数領域の全体を現前するものとして認め、再構成を行う、という姿勢に立っていると思われる。

それでは、1871年に出版されたディリクレ『整数論講義』の第二版の付録Xにおけるイデアル論の検討に入ろう。　デーデキントの出発点は、クンマーの理想数の定義にあった。デーデキントは、クンマーの定義に関し、次の二点が不満であったと述べる。ひとつには、理想数の直接の定義ではなく、「理想数で割れること」の定義しか行っていない、ということ、もうひとつには、定義が個々の式表現に依存していること、この二点である。そして、「我々は、理想の数ではなく、現実に存在する数達の"ganze Systeme" をみることによって、クンマーの理論に新しい衣装を着せることにしよう。」という発言に引き続き、よく知られたイデアルの定義が登場する事になる。

Oを整数環としたとき、Oに含まれるSystemAがイデアルであるとは、

1. Aにおける二数の和は又Aの数になる。

2. Aにおける数とOにおける数との積は又Aの数になる。

この定義は確かに斬新である。集合論的アプローチがここで始まったとするデュガックの指摘は正しいだろう。しかし、斬新さと同時に、次の様な問題も生じている。イデアルを構成しているのはどんな数なのか、それをどう記述したらよいのか、ある数がそのイデアルに属するかを、どうやって決定するのか？(2)

我々は、デーデキントが、こうした当然とも思える問いを飛び越えてしまった理由を考察する必要がある。ここで、就任講演との比較をしてみよう。演算が領域にとって特徴的であるという発想、論理的な手続きを経ることで正当性の承認が得られるという発想、にもかかわらず、数直観が背後に控えているという点、こうした点が、就任講演と性格を同じくするといえそうだ。

それでは1872年、『連続性と無理数』についてみてみよう。デーデキントはこの序文で、自分が実数論にたどりついた経過を述べる。それは、1858年に、チューリッヒのＴＨで、微分積分学の初歩を講義したときに端を発するのであった。有界単調数列が極限を持つと

いうこと、これは無限小解析の基本となる定理なのであるが、この証明に幾何学直観が用いられているということ、これにデーデキントは不満を持った。そして、こうした議論を「数論的に」展開しようとすることが、自らの目標である、と述べる。

デーデキントは、まず有理数体から出発する。冒頭の部分は就任講演と同じである。数えるということから自然数を作り、「数える」の総括から加法が作られ、──というくだりである。デーデキントはここで、引き算によって(引き算をした結果が正になるか負になるかによって)有理数体に順序を入れ、有理数が稠密な順序体であることを示す。

ここでデーデキントは、有理数体と直線上との点とを比較し、有理数には直線上の点がもれなく対応することを述べる。しかし、直線上には、有理数に対応しない点が無数にある。そこで我々は、新しい数を創造して、数の領域が完備性ないしは連続性を有する様にしなければならない、とデーデキントは主張するのだ。

ここで奇妙なことがある。そもそもこの著書の内容は、解析学の基礎をなす「連続性の概念」が、幾何学直観による説明しかされていないことに不満を持ち、「数論的な基礎づけを行う」為に、考え出されたもののはずであった。デーデキントは、幾何学的直観を排除することを強調しておきながら、ここで幾何学的モデルを用いている。これは一体どういうことか。

ここで推測されることは、おそらくデーデキントが頭においているのは、「理論の叙述の仕方に関わる部分である」、ということである。理論を実際に叙述する場面において、幾何学的取扱いを排除する、ということである。

奇妙なことはもう一つある。直線の連続性にせよ、無理数の存在にせよ、デーデキントはこれを暗黙の内に仮定していると思えることである。ここで就任講演とイデアル論との類似を再度持ち出すならば、数領域の全体を視野に入れていると思えること、演算法則によって、全体を規定するという方法、それがここでも用いられている、と言えそうである。(順序関係も二項演算とみなせる)

とにかくも、こうした思考の枠組の上に、デーデキントは有名な連続の公理を述べる。更に「切断」により無理数を”創造”し、こうして定義された実数(そのままでは切断の形をしていて直観的には扱いにくいのだが)に対して、やはり順序が定義され、稠密な順序体であること、最後に連続であることが示される。

こうして実数の連続性が示されたわけであるが、今度は実数の演算について説明を行わなくてはならない。(就任講演のプログラムに従っていることになる。)ここでは加法に

関する証明しか行われていないが、代数演算と連続性という、本来異質なものの結びつきを強調した点は新しかったといえよう。この点は、デーデキントも相当誇りに思ったらしく、そのことは、”$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ の厳密な証明は、未だ行われたことがない”という言明にみてとることが出来る。(3)

最後に、無限小解析への応用 ──有界な単調数列は極限を持つ、の証明 ──がなされて、全体が終わる。

論理的に細かくみていくとこの様に色々問題はあったにせよ、デーデキントにとっては、イデアル、実数、この二つの「新しい概念の創造」は成功だったといえよう。この成功にのってか、以後のデーデキントの著作は、集合論的、公理論的扱いがより強くなっていく。『数とは何か』も、そうした状況のもとで書かれた。

『数とは何か』の目的は、明らかに自然数論の基礎づけにある。就任講演の出発であった、”数える”行為の数学的定式化が目的である。デーデキントは、この定式化の為に、集合や写像を持ち出してくることになる。ここで、未だ「数える」ことすらも定義されていないという世界で、集合が、事物(思考されるもの)の総括、という、あいまいで素朴な言明によって定義されることになる。だが同時に、ここでいう集合の定義が、イデアル論や実数論の時と同じ、”数領域の全体”をモデルにしているということも確実なようである。デーデキントは、ここの注で、クロネッカーの批判に言及する。それは、加群、イデアル、無理数、などの概念に対し、デーデキントを名指しで批判したものであり、そのあとに、無限級数は、有限の場合と同じように扱える時にのみ許される、というコメントがつづく。すなわち非構成的な無限に対する反対である。デーデキントはこの批判にきちんと答えていないように思われる。みずからの集合の定義が、無限に関わる問題を孕むとは認めていないようである。しばらくあとで、無限集合の定義が改めてなされることもそれを物語っているといえる。それは、「自分自身の真部分集合と一対一対応がつくもの」として定義される。デーデキントは、これを使って、単純無限集合なるものを定義し、それによって自然数を特徴づけるのである。

この様に、デーデキントの数学思想には、基本概念を先にすえ、厳格に演繹的な叙述をしていくという傾向がある一方で、数領域の全体(System)を視野にいれ、それを集合のモデルとして使うという思考様式が一方に控えた。何度か行われる『整数論講義』の改訂(4)でも、イデアル、加群は複素数領域内に留まり続け、群は置換の一部であり続ける。

この局面での意味の剥奪を行ったのは、1930年代の抽象代数学者たちであった。「構造」がはっきり提唱されたのはそこであり、デーデキントが構造概念の形成に寄与したのは理論叙述の仕方という側面であったと考えられるのである。

注

(1)Dedekind, Richard

1854, Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik , GWⅢ, 428-438

1871, SupplementX to Vorlesungen über Zahlentheorie[2] von P. G. L. Dirichlet

1872, Stetigkeit und irattionale Zahlen , Braunschweig, GWⅢ、315-334

1888, Was sind und was sollen die Zahlen?, Braunschweig, GW Ⅲ, 335-391

（河野伊三郎訳、数について、岩波文庫）

(2)Edwards, H, M.

The Genesis of Ideal Theory , A. H. E. S. 23(1980)321-378

(3)1876 年に交わされたリプシッツとの書簡でもそのことが繰り返し出てくる。

(4)1879 年（第三版）、1894年（第四版）