級数論小史

── リーマンと"いたる所"微分不可能な連続関数について ──

鹿野 健（岡山大学・理）

Weierstrass の与えた3角級数 (cf. [8])

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

$0 < a < 1$, b : 奇数

(2) $$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

は，すべての実数 x に対して微分不可能な連続関数の具体例として良く知られているが，彼がなぜ (1) を得たかについては，その論文の冒頭で少しく背景が説明されている。それによれば，1861 年あるいはその少し以前，Weierstrass は Riemann の講義を聴いていた者から，Riemann が表題のような関数の例として3角級数

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

を挙げたことを聞いたという。Weierstrass によれば，(3)がそのような例であることの証明を Riemann がその後どこかに発表したということを聞かないので，私は(1)がやはりそのような例であることをここで示す，というように述べている。Weierstrass のこの言い方はかなりあいまいで，誰からいつ(3)について聞いたのかが明確にされていない。そして，本当に Riemann は(3)が「いたる所で」微分不可能な連続関数だと言ったのかどうか，Weierstrass 自身はそう信じているようであるが，これが実は大問題であることが後になってわかった。

その詳細に入る前にちょっと注意すると，歴史上で最初にこのような関数，すなわち，いたる所で微分不可能な連続関数，というのを考えたのは Riemann でも Weierstrass でもなく，Cellérier が 1830年頃に与えたという3角級数

$$(4)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \sin(a^n x), \quad (a：正の偶数)$$

であるという (cf. [4] p. 402). ところが，なぜか Cellérier はその証明を 1890 年になってから発表しているので，Weierstrass の方が早いことは事実であるが，両者の例は形がほとんど同じである． しかし，Weierstrass の証明法では $ab = 1$ の場合（つまり Cellérier の例）がうまく行かない（sin と cos の違いは問題にならない）ので，両者の証明法は少し異なる． 条件 (2) は明かに証明の都合上現われた不自然な条件で，正しい条件は実は

$$(2') \qquad ab \geqq 1$$

である，と Weierstrass も気付いていたようで，du Bois-Reymond へそう述べているという．

(4) の a についてはどうかというと，Cellérier ははっきりと示していないが，a はかなり大きな偶数でないと彼の証明法ではうまくない。

一方，Bolzano は 1834 年頃に，ある区間内の稠密集合上で微分不可能な連続関数の例を与えているというが，これら Cellérier や Bolzano の研究は Riemann，Weierstrass 等には知られていなかっ

であろう。

(1) について，(2′) が正しい条件であることを初めて証明したのは Hardy [3] であり，彼は

$$(1') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(b^n \pi x)$$

についてもやはり (2′) が正しい条件であること，およびいずれの場合においても，b は必ずしも整数でなくとも良いことを示しているが，Hardy の証明法は複雑で，初等的ではない。Hardy はさらに Riemann の3角級数 (3) についても研究していて，(1) と同様の方法で，(3) がすべての無理数 $\frac{x}{\pi}$ およびある種の有理数 $\frac{x}{\pi}$ に対して，確かに微分不可能であることを示した。Hardy のこの結果はほとんど決定的に (3) を極めたものであり，誰もがこれで Riemann，Weierstrass の言う通りであった，と思い，長らくこれ以上の研究はなかった。ところが全く意外にも，1970年になって，Gerver [2] は，(3) が

$$(5) \qquad x = \frac{a}{b}\pi, \quad (a, b \text{ は互に素な奇数})$$

のときにのみ微分可能で，そこでの微係数は $-\frac{1}{2}$ に

なることを証明して，それまでの(3)についての信仰を打ち砕いたのである。 しかも，その証明法は初等的なもので，Weierstrassの方法と大差ないものである。聞くところによれば，Gerverは当時Langの学生で，講義中にWeierstrassの例を教わり，興味をおぼえて(3)について考えたところ出来てしまったという。 数学では，余り知識などない方が偉大な新しい結果を生むことがあるが，Gerverの場合も正にこの好例である。所が皮肉にも，後に明らかとなったのであるが，Gerverと同じ結果を既に1967年にMohrが得ていたという(cf. [5] p.103)。Mohrは Stuttgart大学での談話会でその年の7月14日にその結果を発表していたのだそうで，しかし論文としては1978年になって発表し，しかも不思議なことにそのときになってもなお彼はGerverが1970年に発表していることも知らないのである！ちなみに，Mohrの証明法は関数論的なもので，初等的なGerverの方法とはまったく異なる。

ここで初めにもどって，そもそもRiemann自身は(3)についてどのような事実(結果)を得ていたのだろうか，

という問題を考察してみよう。

Neuenschwander [6] によれば，“いたる所で微分不可能”＝“nowhere differentiable” というのは，ドイツ語の “nichtdifferentiirbarkeit” や “keine Ableitung besitzen” の「誤訳」であるという。そして，正しい訳語は，“微分不可能”＝“nondifferentiable” という程度のもっとあいまいな（ゆるい）意味であるといい，du Bois-Reymond の論文の1つ（1875年）を例として挙げて説明している。つまり，Neuenschwander によれば，例えRiemann がその講義中で (3) について “keine Ableitung besitzen (haben)” 等と言っても，それは今日の意味の“いたる所で微分不可能”というような強いものではない，という訳である。

しかし，私見によればこの Neuenschwander の見解もその通りとは言えないように思われるのである。まず，上記の du Bois-Reymond と同時代の論文，例えば彼の他の論文や Weierstrass のもの etc. の幾編かで，「微分不可能」に関する言い方を調べてみると，実に色々な表現があり，同じ人でも論文が異なると違う言い方をしていたりしていて，一定していないのである。

要するに，「すべての点で微分不可能」という内容を言葉通りに表わす数学用語はその当時少なくともドイツ語圏では定着，固定化していなかったと思われるのである。その上に，「すべての点で微分不可能な連続関数」という関数のイメージ，数学的意味というようなものが十分広く認識されているという時代ではなかったから，増々このような数学用語の必要性，需要は乏しかったと言わざるを得ないのである。この時代のドイツ語で書かれた論文にはかなり頭を悩ませるものがあるようで，上記の Hardy の論文中でも彼は脚注でこのような点についての彼の苦心，疑問を述べている。

それでは一体 Riemann の真意，発見は何であったのか，それは果して彼の講義中で正確に聴衆に伝わったのか否か，という核心について以下私の考えを述べよう。

結論から先に言えば，Riemann は (3) はもちろんのこと，似たような他の3角級数についても同様な研究をしていて，(3) については Gerver，Mohr が示したように，(5) のような点で実際微分可能であることを知っていたと思われる。これに関する唯一の彼の論文は，Habilitationsschrift である [7] であるが，その

最後の2ページが極めて示唆的で重要である。まず彼はガウス和

(6) $$\sum_{n=0}^{m-1} \cos(n^2 x), \quad \sum_{n=0}^{m-1} \sin(n^2 x)$$

の性質から，3角級数

(7) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n^2 x),$$

は $c_n \downarrow 0$， $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \infty$ のときは，(5) のような x に対して (7) は，対応するガウス和 (6) が 0 になるとき収束し，0 にならないとき発散すると述べている。

これは，(3) とは異なり $\sum c_n = \infty$ の場合について，3角級数の収束性を述べただけであるが，実は これが (3) の可微分性と関係することを Riemann は見ているのである。 それは，上記論文中 §7 にある定理で，次のようなものである。

「$a_n, b_n \to 0$ であるような3角級数

(8) $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

に対して，連続関数

$$F(x)=c_1+c_2x+\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

[これは(8)を形式的に2回項別積分したものに等しい。]

が定まり，さらにもし(8)が1点 $x=x_0$ で有限値 $f(x_0)$ に収束するならば，

$$(9)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\{F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)\}=f(x_0)$$

が成り立つ。[(9)の左辺は，もし $F(x)$ が2回微分可能ならば $F''(x_0)$ に等しい。]』

Riemann のこの定理を，3角級数(7)に適用すると直ちに得られるのは，「3角級数

$$(10)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^2}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n^2x)$$

は，$c_n\downarrow 0$，$\sum c_n=\infty$ のとき，対応するガウス和(6)が0になるような $\frac{x}{\pi}$ の有理数値に対して，(9)の意味で微分可能となる」という興味深い結果である。もちろん(10)では $c_n\downarrow 0$ で，微分の意味も通常の微分よりも広い意味のものであるから，問題の(3)そのものの結果ではないけれども，上のような一般的な定理からこのような関連する事実が直ちに得られることは極め

ておもしろい．Göttingen大学の中央図書館に保存されているRiemannの草稿を見てみると，この論文の下書や計算用紙などが若干残っていて，問題のこの辺の個所についてRiemannがもっと多くの研究をしていたらしいことがうかがわれるのである。例えば，論文の最終ページにある，一見奇妙な3角級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n!x\pi) \tag{11}$$

について，Riemannはこれがxの有理数値以外でも，

$$x = \frac{2}{e},\ e,\ \sin 1,\ \cos 1 \tag{12}$$

等々の無理数値に対しても収束すると述べているが，その実際の証明は上記の計算用紙の中に一部を見ることができる．明かに(11)の例も，上記の定理と併せることによって，3角級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!x\pi)}{n!} \tag{13}$$

の可微分性の問題と関連している。実は，(13)はすべてのxに対して微分不可能な連続関数であることが，例えば(4)のCellérierの方法で証明できるので，(13)は

(3) とは異なるが，それでもやはり $c_n \downarrow 0$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\cos(n!x\pi)}{n!}$$

は (12) のような点で（広い意味で）微分可能となることが Riemann の定理からの結論である。

Genocchi [1] は，Riemann のこの論文を再検討していて，特に上記の２ページに現われる特殊な３角級数に関連する Riemann の主張に証明を与えているが，私見ではその書き方はかなりあいまいで，真意が計りかねる個所もあり，果してどの程度 Riemann の結果を follow できているか，疑問の点もあるようである．

Riemann の講義は，恐らくこの論文の内容を含むものであったと想像されるが，残念ながら聴衆の中には Riemann の講義を正しく理解できた者がいなかったようで，それがあいまいな情報となって広まり，Weierstrass の所まで及んだものであろう。Riemann が Göttingen で正式に講義したものについては，そのタイトル，年月の記録とともに，一部のものの講義録も残っているのだが，残念ながら本稿に関するものはまだ発見されていないようである。

〈文　献〉

[1] A. Genocchi ; Atti d. R. Accad. d. Sci. di Torino, 10 (1874) 985-1016.

[2] J. Gerver ; Amer. J. M. 92 (1970) 33-55.

[3] G. H. Hardy ; Trans. A. M. S. 17. (1916) 301-325.

[4] E. W. Hobson ; The Theory of Functions of a real variable, vol. II. (2nd ed.) 1926, Cambridge Univ. Press.

[5] E. Mohr ; Ann. Math. Pura Appl. (4) 123, (1980) 93-104.

[6] E. Neuenschwander ; The Math. Intelligencer, 1 (1978) 40-44.

[7] B. Riemann ; Collected Works of B. Riemann, Dover ed. 1956, 228-264.

[8] K. Weierstrass ; Math. Werke, Bd. II, 1895, Mayer & Müller, Berlin.