

ライプニッツの「動力学」からオイラーの「力学」へ

有賀暢迪*

1. はじめに

古典力学の歴史において、18 世紀は力学理論の解析化と体系化の時代として特徴づけられる。これは通常、ニュートンの『プリンキピア』(1687) からラグランジュの『解析力学』(1788) へと至る過程として描かれ、その中の重要な一里塚として挙げられるのがオイラーの『力学』(1736) である。しかしながら、オイラーの力学構想の特質を真に理解するためには、ニュートンと肩を並べた数学者・哲学者であるライプニッツが 18 世紀初頭のヨーロッパ大陸に与えた影響を踏まえることが欠かせない。

本稿では、拙著『力学の誕生』に基づき¹、ライプニッツの「動力学」からオイラーの「力学」へと至る過程を素描する。第 2 節で 18 世紀力学史の概要を説明したあと、第 3 節でまず「動力学」と「力学」という言葉について述べる。続く第 4 節と第 5 節では、この時代の微積分法との関連にも触れながら、「力」の概念という観点からオイラーの力学構想の核心を説明する。以下では煩雑になるのを避けるため、『力学の誕生』で用いた文献・史料については書誌の記載を省略する。

2. 18 世紀力学史の概要

18 世紀に先立つ 17 世紀において、力学、特にその数理的な側面の発展に貢献したのは、ガリレオ、ホイヘンス、ニュートンの 3 人であった。ガリレオは自由落下や投射体の運動を数学的に論じたほか、今日でいう材料力学に相当するテーマにも取り組んだ。ホイヘンスは振り子の理論で最もよく知られ、遠心力や物体の衝突についても非凡な考察を残した。ニュートンは、よく知られる通り中心力（万有引力）による運動の理論を展開したほか、抵抗媒質中での運動という問題を開拓した。これらが 17 世紀力学の到達点であったと言える。

* 一橋大学大学院言語社会研究科

本稿は、第 34 回数学史シンポジウムでの特別講演（2024 年 10 月 13 日、津田塾大学）をもとにしているが、原稿化にあたって構成を変更し、一部の内容を省略した。

¹ 有賀暢迪『力学の誕生：オイラーと「力」概念の革新』名古屋大学出版会、2018 年。

これらを踏まえ、18 世紀に入ってから新たに取り組まれた問題としては、以下のようなものが挙げられる。回転運動（剛体力学）、水の流れ（流体力学）、拘束のある運動、弦の振動、三体問題である。すなわち、今日の枠組みで言えば質点系と連続体の力学に該当する問題群が、この時代における先端的なトピックをなしていた。

18 世紀においてこうした力学の問題を論じたのは、主としてヨーロッパ大陸の数学者たちであった。とりわけ著名な人物としては、ヨハン・ベルヌーイ、ダニエル・ベルヌーイ（ヨハンの息子）、レオンハルト・オイラー、ジャン・ダランベール、ジョセフ＝ルイ・ラグランジュの名前を挙げることができる。彼らは、大学や、この時代の科学を特徴づける組織であった科学アカデミーに所属していた。研究成果の多くは前世紀までと同じく本として出版されたほかに、それぞれのアカデミーが刊行する年次論文集にも収められた。

本稿の中心人物であるオイラーは、当時も現在も、18 世紀を代表する「数学者」として知られている。スイスのバーゼルの出身で、バーゼル大学の数学教授ヨハン・ベルヌーイによって才能を見出されたが、生涯にわたる学術活動の舞台となったのはロシアのペテルブルク帝室科学アカデミーとプロイセンのベルリン王立科学・文学アカデミーであった。オイラーはいわゆる純粋数学だけでなく数理科学の諸分野にわたって膨大な量の著作を残しており、内訳では力学・物理学・天文学関係が約 4 割を占める。このように広範な分野で研究をおこなうことは、この時代の「数学者」にとって奇妙なことではなかった。なぜなら 18 世紀には、量を探究する学問全般が「数学」と呼ばれたからである²。

力学史においてオイラーの最大の業績と言えるのは、運動方程式を用いて物体の運動を考察するという、いわゆる「ニュートン力学」の方法を確立したことであろう。これは 18 世紀のあいだに力学理論に生じた二つの大きな変化、すなわち解析化と体系化を象徴している。解析化とは、17 世紀までの幾何学的手法に代わり、数式にもとづく解析学的手法によって運動の分析がなされるようになったことを指す。体系化は、問題によって異なるアプローチを採ったり現象ごとに法則を見出して満足したりするのではなく、それらを束ねる「一般原理」が志向されるようになったことを意味する。このように大きな変化がオイラーひとりによってもたらされたわけでは決してないが、力学理論の解析化と体系化に対して最も大きな貢献をした人物がオイラーであったと言うことは許されるだろう。

² 18 世紀において「数学」が何を意味したかという問題については、次も参照していただきたい。有賀暢迪「数学」、日本 18 世紀学会啓蒙思想の百科事典編集委員会編『啓蒙思想の百科事典』（丸善出版、2023 年）、298–299 頁。

3. 「動力学」から「力学」へ

「力学」とは、一般的には、力と運動を扱う物理学の一部門であると言える。英語では“mechanics”（メカニクス）であり、これはラテン語の“mechanica”（メカニカ）に由来する。実際、オイラーの主著の一つは 1736 年に出版された『力学あるいは解析的に提示された運動の科学』（*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*）であり、これは今日の言葉で言えば、微積分を用いて質点の力学を体系的に議論した初めての著作であった。しかしながら、このような「力学」という語の用法は、むしろ新しいものであったことに注意しなければならない。

例えば、ガリレオが 1638 年に出版した通称『新科学論議』は、落下法則（自由落下による落下距離が落下時間の 2 乗に比例すること）が最初に公表された本として有名であるが、その完全な題名はイタリア語で『機械学と位置運動にかんする二つの新しい科学についての論議と数学的証明』（*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed i movimenti locali*）となっていた。ここで「機械学」と訳した“meccanica”は、物体の運動の理論である「位置運動」とは明示的に区別されている。また、ニュートンの『プリンキピア』（初版 1687 年）は、正式な表題を『自然哲学の数学的諸原理』（*Philosophiae naturalis principia mathematica*）といい、“mechanica”の語は現れない。

オイラーの『力学』が世に出た時点でも、運動の科学としての「力学」という表現は、決して自然なものではなかった。このことを最もよく表しているのは、オイラーの師であったヨハン・ベルヌーイがオイラーに送った書簡（1737 年 11 月 6 日付）である。ドイツ語で書かれているこの手紙の中で、ベルヌーイは言葉の選択について次のように記している。

貴方はご自分の著作に Mechanik という表題を冠され、それを序文の中で根拠付けていますが、しかし Dynamik という表題のほうがいっそう適してはいなかったかと思わなくもありません。というのも Mechanik の語はすでに古来から、死力を扱う科学を呼び表わすのに受け入れられているからです。その部門の一つは、Statik と呼ばれているものです。私には、名称を変更して、それに何かしら別の意味を結び付けるのが、大胆なことであるともまったく必然性を越えたこととも思われません。とりわけ、新しい物事を十分に呼び表している新しい名前が、たとえば Dynamik という言葉が手元にある場合にはそうです。その言葉にライブニッツは初めて、彼が「活力」と名付けているあの力を扱う科学という意味を与えました。もっともこれはついでに言われるべきことにすぎませんが。

すなわちベルヌーイによれば、Mechanik（ラテン語では mechanica）とは「死力」を扱う科学であって、古くから存在するものである。他方で、ライプニッツは「活力」を扱う科学に Dymanik（ラテン語では dynamica、本稿では「動力学」と訳す）という名前を与えた。後述するように、「活力」や Dynamik は運動に関わる。したがって、わざわざ Mechanik という言葉の意味を変更し、運動の科学とするのはあまり適切と思えない、というのがベルヌーイの意見であった。このことは、オイラーの「力学」の何が革新的だったのかを、ライプニッツの「動力学」に照らして理解すべきであるという示唆を与えていると思われる。

4. 「活力」「死力」とその解析化

今日の力学において「力」と呼ばれているのは、物体の運動状態や形状を変化させる何らかの作用のことである。しかし 18 世紀前半の力学、というよりむしろ運動論や自然哲学の文脈では、そうであるとは限らなかった。

この時代における力概念を子細に検討したドイツの哲学史・科学史研究者のプルテは、18 世紀における「力」と運動の理論には三つの「プログラム」があったと論じた。すなわち、(1) デカルト的プログラム——運動している物体の相互作用に基づき、「力」を含まない、(2) ニュートンのプログラム——物体に対して外から作用する「力」に基づく、(3) ライプニッツ的プログラム——物体の中にある「力」に基づく、という三つである³。本稿で問題となるのはこのうち第三のプログラムの存在であり、その根幹をなすライプニッツ流の力概念である。次の引用は、その種の理解の一例を示している。

任意の物体の力とは、力学のあらゆる著述家の一致しているところでは、この能力が内在していると理解された当の物体そのものにおいてであれ、それから離れた別の物体においてであれ、ともかく『運動を生む能力』を指す。

この文章を書いたヤーコプ・ヘルマンは、ライプニッツの微積分法を積極的に擁護し、その

³ Helmut Pulte, *Das Prinzip der kleinsten Wirkung und die Kraftkonzeptionen der rationalen Mechanik: eine Untersuchung zur Grundlegungsproblematik bei Leonhard Euler, Pierre Louis Moreau de Maupertuis und Joseph Louis Lagrange*. Stuttgart: Steiner, 1989, § A-4.

手法を用いてニュートンが『プリンキピア』で提示した中心力による運動を論じた数学者である。ここでの論点は、そのようにして力学の解析化に貢献した人物が、「物体の力」というライプニッツ流の力概念を受け入れていたということにある。

「力」が物体の中にある、というライプニッツの考えをよく伝えるテキストとして、1695年に公刊された『動力学提要』（*Specimen Dynamicum*）と題する論考がある。本稿に直接関わることだけ記せば、ライプニッツはこの中で「活力」（*vis viva*）と「死力」（*vis mortua*）という一対の概念を提示した。「活力」とは現実に運動している物体に備わっているもので、ほかの物体に衝突したときの衝撃力として現れる。これに対して「死力」とは、運動しようとする物体の傾向性を言い当てたもので、物体の重み（手に持っているとき手が押されるように感じる）や、縮めた状態のばね（元に戻ろうとする）などがその例である。加えてライプニッツは、この二つを数学的な観点からも区別した。すなわち、「活力」が質量と速度の2乗（ mv^2 ）に比例するのに対し、「死力」は質量と速度（ mv ）に比例するのである。このような活力の概念は、一般に、今日の運動エネルギーの祖と見なされている。

このライプニッツの力概念を強く支持していた一人が、すでに登場したヨハン・ベルヌーイであった。1727年の有名な論考『運動の伝達法則についての論議』の中では、「活力」と「死力」を次のように定義している。

「活力」とは、物体が一様運動〔引用者注：等速直線運動を指す〕にあるときにその中にある力である。また「死力」とは、静止している物体が運動するようにと、あるいはこの物体がすでに運動しているときにはより速くまたはより遅く運動するようにと、働きかけられたり押されたりする際、この物体が運動なしに受け取る力である。

この説明によれば、物体は「死力」を受け取ることによって速度を増したり減らしたりする。これはつまり、「死力」によって物体の「活力」が増減するということである。このような加速（減速）のプロセスについて、ベルヌーイは同じ論考の中で次のように述べている。

活力は、物体が静止しているとき、それに少しずつ、段階的に位置運動を刻印するときに、この物体中に継起的に生み出される……この運動は、無限小の諸段階を経て獲得され、そして有限で確定した速度にまで到達する。

ここに見られる「無限小」「有限」といった言葉遣いは、微積分法を我々に想起させるのに十分であろう。ただしここで言う微積分法は、現在とは少し（あるいはかなり）異なるものであったことに注意しておかねばならない。

今日から見た場合、18 世紀前半の微積分法（特にライプニッツ流のそれ）の大きな特徴は、関数の概念を欠いていた点にある。この時代の微積分法は、ごく大づかみに述べれば、無限小の量の計算であった。例えば、最初の教科書の著作として知られるロピタルの『無限小解析』（1695 年）を見てみると、まず「変量」が「連続的に」増減する量として定義され、この変量が増減する「無限小部分」が「微分」と呼ばれている。また、この意味での「微分」（＝有限量の無限小部分）のさらに無限小部分が「2 次の微分」であり、以下同様に考えていくことができる。ライプニッツ流の記号法では、変量 x の微分は dx と書かれ、2 次の微分は dx^2 である。このように有限量の無限小要素として微分を考え、微分の無限和（すなわち積分）を有限量と考えるのが、この時期の基本的な発想であった。

ヨハン・ベルヌーイは最初期から、このような微積分法のレンズを通してライプニッツの力概念を受容していたと考えられる。なぜなら、ライプニッツの『動力学提要』が出版された直後の時期に、ライプニッツに宛てた手紙の中で次のような感想を記しているからである（1695 年 6 月 8/18 日付）。

それから……活力と死力などについて貴方の言っていることは、我々の馴染みある幾何学〔引用者注：ライプニッツの微積分法を指す〕を通じて次のことを知っていた人々にとっては、極めて本当らしく思われるに違いありません。すなわち、どんな量も無限に多くの微分からなり、どんな微分もまた別の無限に多くの微分からなり、どんな高次の微分もさらにまた別の無限に多くの微分からなり、そして無限にそうになっているということが、どのような理によって理解されるべきかを知っていた人々にとっては、ということです。

このようにベルヌーイは、ライプニッツ流の微積分法と力概念の双方を受け継ぎ、それらを結び付けていた。ベルヌーイが「動力学」として念頭に置いていたものは、このように理論化され、解析化された運動の科学であったと考えられる。

5. 「動力」——オイラーの力学構想の核心

オイラーはヨハン・ベルヌーイから数学を学んだが、同時に、ライプニッツ流の「活力」「死力」といった概念や、「動力学」についても学んでいたと思われる。オイラーの経歴の中で最初期に書かれたと見られる草稿類には、現にこうした概念の支持が見られるからである。そのようなテキストとしては、バーゼル時代の 1724～27 年頃の作と推定される『力を見積もるための真の論理』や、ペテルブルクに移ったあと、1728～31 年頃に書かれたと見られる『死力と活力について』などがある。

しかしながら 1736 年に出版された『力学』では、オイラーは「活力」「死力」とは異なる基礎に立って運動を論じている。それは「動力」という概念である。ラテン語では *potentia*（フランス語では *puissance*、英語では *power*）であり、多義的に使われる言葉であるが、ここでは特に、この語が機械を動かすために加えられる作用を指していたことに注目したい。つまりそれは、おそらくは機械学に由来する概念であったと思われる⁴。

「動力」の語は、『力学』に先立つ草稿『死力と活力について』ですでに登場していた。この中ではオイラーは、「動力」を「押しまたは引き」とした上で、それを「死力」と同一視している。具体例として挙げられるのは、ばねや磁石、そして物体の重みである。ライプニッツの理解をなぞってはいるものの、元々は「物体の力」として規定されていた「死力」の意味が変更され、「押しまたは引き」という作用に置き換わっているように見える。

このように理解された「動力」とは、要するに、今日の力学において「力」と呼ばれているものである。このことは、『力学』における次の説明からも見て取れる（定義 10 の系）。

それ自体で放置された物体はすべて、静止にとどまるか、均等〔すなわち等速〕な運動によって直線上を進むであろう。したがって、静止していた自由な物体が動き始めるか、または、動いていた〔物体〕が均等に進まなかったり直線上を進まなかったりするたびに、原因が何らかの動力に帰されなくてはならない。実際、物体をその状態から追い出すことのできるものならば何であれ、それを我々は動力と呼ぶ。

⁴ この点は、『力学の誕生』で追究できなかった問題の一つである。実のところ、オイラーの膨大な著作の中には、今日でいう機械力学に属するような論文も一定数存在する。17 世紀から 18 世紀にかけての機械学の展開については今後の研究に俟ちたい。

つまりそれは、物体の運動状態の変化をもたらす「原因」なのである。オイラーはさらに、動力と運動状態の変化について、次のような数学的関係も与えている（命題 20・定理）。

点の運動の向きと動力の向きとが合致しているとき、速度の増分 $[dc]$ は、動力 $[p]$ に微小時間 $[dt]$ をかけて物質あるいは点の量 $[A]$ で割ったものに比例するであろう。

これをライプニッツ流の微積分法の記法で表すと、 $dc = npdt/A$ となる（ n は比例定数）。これはオイラーが実際に書いている形であるが、さらに書き換えて $A \, dc/dt = np$ とすれば、我々にも馴染み深い式になる。すなわちこれは、運動方程式 $ma = F$ である。

それゆえ、この「動力」という概念こそが、オイラーの力学構想の核心であったと言える。オイラーはこの概念を導入することで、「機械学」を意味していた *mechanica* を、運動の科学として再定義した。これが「力学」にほかならない。

さらに、ライプニッツやベルヌーイは「機械学」(*mechanica*) を「動力学」(*dynamica*) と対比させていたが、オイラーは「力学」(*mechanica*) を「静力学」(*statica*) と並列させた。『力学』と同じく 1730 年代に書かれたと思われる未刊の草稿『静力学』には次のような文章がある。

……力学の前にもう一つの学科が、すなわち『静力学』が前提される必要がある。これは動力とその比較および釣りあいについて論じるものである。というのもこれが無くては、物体の運動の説明においてわずかしかな前進できないのであるから。なぜなら運動の生成は動力の本性から導かれるべきだからである。

したがって我々にとっては、二つの科学、静力学と力学が、詳細に考察されるべきである。このうち前者は、動力とその比較および釣りあいについて、言わば運動の原因について論じ、対して後者は動力による運動の生成と変化について論じる。

このようにして、「動力による運動の生成と変化」を扱う科学としての「力学」が誕生したのであった。

6. おわりに

オイラー以前には、mechanica は運動の科学を意味していなかった。そしてオイラー以前には、「力」は物体に内在するものであるという理解が広く見られた。実際、「力」(vis) という語が物体に対する外的な作用として使われている用例は、当時の力学関係の文献にほとんど見出すことができない。こうした意味において、18 世紀初頭には、誰も「ニュートン力学」を実践していなかったとすることができる。

このように述べると、多くの読者は、それではニュートンはどうなるのか、という疑問を持つに違いない。確かに、ニュートンは『プリンキピア』の定義 4 で、「刻印力 (vis impressa) とは、物体の静止または一様直進運動の状態を変えるべく、それに及ぼされる作用のことである」と述べている（強調は引用者）。この定義は、今日の理解に照らして正しい内容であると言えるだろう。しかしここでの論点は、ニュートンが近代的な力概念にすでに到達していたのだとしても、そのことは、それがすぐに一般的な理解になったことを意味しない、ということにある。この事態を同時代の人々による誤読と呼ぶことは簡単だが、そう断じてしまえば、オイラーの貢献を歴史的に理解することはできなくなるだろう。

オイラーは、物体に内在するもの（一種の能力）と捉えられていた「力」を物体の外側にある変化の原因として定義し、このように理解された「力」を、静力学の概念である「動力」（押し引きの作用）と同一視した。オイラーの新しい理解によれば、「力」とは釣りあいをもたらす作用であり、かつ運動の変化の原因となるものである。1736 年の『力学』は、「動力による運動の生成と変化」としての力学を初めて提示した著作であった。

このような意味での「力学の誕生」は、オイラーひとりの功績に帰されるものではない。本稿では立ち入ることができないが、物体に内在する「力」の批判は、同時代のダランベールやモーペルテュイなども行っていた。また、運動の変化をもたらす主体として「圧」(pressio) を考えることは、ス・グラーフエサンデやベルヌーイにも見られる。ただし、この両者を自覚的に結合したのはオイラーだけであり、それゆえ最も重要な貢献をしたとすることができるだろう。

本稿では、「力学」なるものが最初から存在していたと想定するのではなく、むしろそのような理解の仕方そのものがどのように形作られてきたかを問題にしてきた。この立場から見て、今後さらに追究されるべき事柄の一つは、力学の誕生と発展の過程における物理的概念と数学的概念の共進化のプロセスである。数学史においても、微積分法あるいは解析学の歴史的形成が、力学との関わりを通じて深く考究されていくことを期待したい。