ヒルベルトに於ける公理的方法の形成過程

——『幾何学の基礎』前史——

坂口勝彦

ヒルベルトに於ける公理的方法の形成過程
——『幾何学の基礎』前史——

坂口勝彦

propter delicias et fastum Mathematicorum

(F. Bacon, *De Augmentis Scientiarum,* Ⅲ-6.)

ヒルベルトの『幾何学の基礎』(1) というと、今世紀初頭の数年間に持ち上がったいわゆる「基礎論論争」との絡みで想起されがちだが、彼が実際に「基礎」の問題に本格的に関与するのはこの著作を出版した後のことであった。それゆえ、集合論的なパラドックスから数学を擁護するための「基礎づけ」として『幾何学の基礎』は書かれたわけではない。とはいえ、1922年頃から形式主義的観点を自覚的に称揚し始める際に彼が依って立ったところは、『幾何学の基礎』で達成された（少なくともヒルベルトの信じているところでは達成された）公理論的方法によるユークリッド幾何学の再構築の成功であったといえる。

この小論では、『幾何学の基礎』を著す際にヒルベルトが何を意図し、またそこで何が成し遂げられたと信じていたのかを探ってみる。さらに、それらが「基礎論論争」の主題（例えば「無矛盾性」など）にどのように転化していったのかという点にも少々触れる。

◆

ヒルベルトは、『幾何学の基礎』に収斂するような講義を1890年代に三回行っている(2) 。すなわち ——

(1) 1891年： "Projektive Geometrie" (Königsberg)

(2) 1894年: "Die Grundlagen der Geometrie" (Königsberg)

(3) 1898/1899 年: "Grundlagen der Euklidischen Geometrie" (Göttingen)[3]

初めの二つはケーニヒスベルク大学で行われた射影幾何学と非ユークリッド幾何学の入門的講義である。数学的内容は特に問題にするほどのものではないが、1891年の「射影幾何学」の講義ノートの序文に見られる幾何学に対する考え方、そして彼自身の幾何学研究の意図に関する言及が注目される。

幾何学は「空間の諸性質に関する理論」であって「純粋に数学的な分野」ではない、とヒルベルトは言う。後者に属する数論や代数などは「整数の概念」に最終的に還元できるものであり、その基礎は「純粋思惟」に存する。しかし、幾何学は「単に思考だけでは究明され得ない」。それは「空間直観」に基礎づけられるべきである[4]。——— このような、算術と幾何学との原理的峻別という考えは、ユークリッドにまで遡る古いものであり歴史においてしばしば論争の要点になったことであるが、ここで特にヒルベルトが依拠しているのは、カント的空間概念(アプリオリな空間概念)を論駁する際の数学者や物理学者の常套句であったと思われる[5]。

では、なぜこの少々擦り切れた理念をヒルベルトは取り挙げたのか —— ヒルベルトは1888年にベルリンでクロネッカーと会い、当時ヒルベルトが没頭していた不変式論について意見を交わしている。クロネッカーから有用な助言を得られたものの、数学全体の「算術化」を命ずるクロネッカーの強圧的な態度には反発を感じたらしい。ことに、彼の「基底定理」の証明をも侵しかねないクロネッカーの厳格な「有限主義」は脅威とも映ったに違いない。それ故、クロネッカーが唯一認める算術とは全く別の原理に基づくといわれていた幾何学、とりわけ当時「最も進化した」幾何学と見做されていた射影幾何学の存在に、クロネッカー批判の可能性を見出したのだと思われる[6]。

実際に、ヒルベルトの幾何学研究には、幾何学を算術から分離して構成する、というモチーフが一貫してつらぬかれている。そのいわば「幻想」あるいは「信念」の実体化が『幾何学の基礎』なのである。

◆

ヒルベルトは1894年の講義から幾何学の公理論的な構成を採用してゆくのであるが、その際、主に次の三つの著書から公理的方法論を学んでいる。それはB.エルトマンの『幾何学の公理』(1877)、M.パッシュの『新幾何学ー講義』(1882)、そしてH.R.ヘルツの『力学原理』(1894)である[7]。

最初のエルトマンの著書は、リーマン・ヘルムホルツの空間理論を公理論的方法で展開したものであり、空間表象はアプリオリであるという当時のカント的空間概念の論駁を意図したものであった。彼は、空間概念を包摂する類概念の存在（リーマンに倣いそれを量一般の概念とする）、そしてその下に属する様々な幾何学＝空間の可能性（ヘルムホルツの「想像可能性」に基づく）を、公理論的演繹体系としての幾何学の特質に注目することにより論じている。空間表象がアプリオリでなく、経験的なものに制約されることを論じる際のエルトマンの議論の様式は、ヒルベルトが諸公理の「独立性」を議論する際の方法に類似している。どちらも非ユークリッド幾何学の「存在」を何らかの方法で解釈しているのである。

このエルトマンの著書は非ユークリッド幾何学のいわば哲学的受容といえるのであるが、パッシュのものは非ユークリッド幾何学の数学的受容の一連の系譜の中に位置付けられる。ここで言う「新幾何学」とは射影幾何学のことであり、当時クラインによって、ケーリーの展開した「射影計量」を用いることにより射影幾何学の中で非ユークリッド幾何学の構成が可能になっていた[8]。パッシュは公理論的な方法で射影幾何学を構築してみせることにより射影幾何学を基礎付けようとした。特に、「双対原理」の理解、「無限

遠点」の基礎付け、そして「連続性の公理」の摘出に公理的方法が威力を発揮している。ここで前二者は射影幾何学が「位置の幾何学」として台頭してきた19世紀初めからの問題であるが、最後のものはクラインが1872年に指摘したものである。つまり、射影計量を導入する際に、フォン・シュタウトが用いた「メビウスの網」の手法を使うわけなのだが、そこで直線上の「間隙」を埋めるのにどうしても「連続性」の問題に逢着してしまうため、クラインは、射影幾何学も何らかの「連続性」に関わる「公理」を仮定せずには十全に展開され得ない、と洞察したのであった[9]。この、幾何学への計量の導入の問題は、ヒルベルトにより「数の導入」と呼ばれ、それを排除することが彼の幾何学研究の中心的課題となってゆく。それは、先に見たように、算術から原理的に独立に幾何学を構築するというヒルベルトの意図から見れば当然のことであろう。1894年には、パッシュによる公理系をほぼそのまま採用して（『幾何学の基礎』においても公理の選択はパッシュに倣っている）非ユークリッド幾何学の入門的講義を行ったものの「数の導入」が不可避であることには不満が残った。この時点でヒルベルトの企図は一次頓挫する。

1888年にシュアーが連続性の公理を使わずに合同公理によりパスカルの定理を証明したことをきっかけにして、ヒルベルトの幾何学研究は再開され、同年冬学期の講義に結実する。1894年の講義では未だ補助的、部分的に用いられていたにすぎなかった公理論的方法が、1898/99 年の講義では全体の理論構築に積極的に採用されている。その際、公理論的方法の認識論的根拠を、ヘルツの『力学原理』の中に求めていることが興味深い。「公理」とは自然の対象の「精神の中の像あるいは象徴」であり、その「像」から「論理的に導いたもの」は、自然におけるその対象の必然的帰結の像になっているので、「自然においても真実なのである。」 ――― と、ヘルツの言葉を部分的

に用いつつヒルベルトは述べている[10]。要するに、公理という一点でのみ現実との絆を持ち、そこから厳密に演繹的に展開される幾何学の命題は現実の自然と整合性を保つ、というかなりナイーブな議論である。

ところでヘルツは彼の著書において、「力の本質は謎である」と主張するE.デュ・ボア=レイモンの懐疑[11]を論駁するため、「力」の概念を力学から追放しようとしたのであった。時間、空間、質量という「基本概念」とそれらの間の「基本関係」のみから厳密に演繹的に力学体系が再構築されると、そこでは「力」が単なる「数学的補助手段としてのみ現われる。」[12]——ヘルツが展開するこの議論の様式は、ヒルベルトが最終的に提示することになる幾何学の様式と構造が似ている。「数」あるいは「連続性」という幾何学にとっては本質的に異質である（とヒルベルトが信じている）概念を周到に排除して、「数」を導入せずに初等幾何学全体をいわば再構築してみせたのが『幾何学の基礎』であった。そして、その構築のために公理論的方法は実に効果的に利用され、「連続性」に関わる公理は完全に排除されて[13]、図形の要素の相互関係に関わる公理のみから幾何学が構築されたのであった。

◆

ヒルベルトは『幾何学の基礎』の序文において、公理論的方法による幾何学研究は「空間直観の論理的分析」[14]であると言っているが、実際のその内容はつまるところ射影幾何学の分析・再構成にすぎず、そこに現れる関係性とは図形と図形の関係のことである。彼の考える「空間直観」とは、計量を排除された「純粋に幾何学的な」対象の相互関係を把握する能力の謂である。要するに、算術とは原理的に異なった領域の存在の可能性を掛けて彼が採用した射影幾何学が「空間」を扱うやり方にすぎない。それ故、『幾何学の基礎』を「形式的関係性」の体系と見做すことは少なくともこの時点での彼の意図からすると正しくない[15]。「空間直観」に確実に基礎付けられた

幾何学を研究している、と彼は信じているのである[16]。

幾何学と算術を成功裡に分離したのちに、その間の「緊密な関係」についてヒルベルトは言及する。つまり ——無理数に対応する点が直線上にあると仮定せずとも幾何学は構成される。一方、クロネッカーによると、算術においても無理数は不純なものである。幾何学と算術はこうしてそれぞれ自律的に存在していられるのだが、算術において「無理数」を考え、幾何学においてもそれに対応するような「理想点」を考えれば、両者の間にいわば「無限」を仲介にして関係ができる。さらに、この「緊密な関係」を通して初めて解析幾何学が展開され、また、幾何学の諸公理の「整合性」の問題が算術に割当てられる ————[17]。これは 1898/1899年の講義での言及であり、『幾何学の基礎』の対応するところでは、この議論は幾何学の公理系の無矛盾性を実数の無矛盾性に帰着するという周知の議論にすり替えられ、「緊密な関係」に関する言及は削除される。

要するに『幾何学の基礎』は、算術と幾何学との峻別という、おそらくはクロネッカーとの間の軋轢に触発されて芽生えたと思われるヒルベルトのモチーフ（あるいは幻想）が、射影幾何学という規制理論を変形、変質させることにおいて受肉したものといえよう。ここには、ひとつの形式的演繹体系が成立する事情が見て取れる。——— ひとは「真理」という幻想に駆られて行動することがある。その幻想が現実化すること、それはすなわち、現実が幻想化してしまうことにほかならないのではないだろうか……。

註

(1) D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie,* (Leipzig, 1899) [中村幸四郎訳『ヒルベルト・幾何学基礎論』（清水弘文堂、1969）。これは第七版(1930)からの訳である]

(2) M.-M. Toepell, *Über die Entstehung von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie“,* (Göttingen, 1986) による。Toepell はゲッチンゲン大学等に保管されているヒルベルトの講義ノートを繙き、ヒルベルトの考察を丹念に跡付けている。この小論は彼の研究に依るところが大きい。

(3) この有名な三番目の講義には、ゲッチンゲンの慣習として、ヒルベルトの助手による公式の講義録も残されている。

(4) M.-M. Toepell, *op. cit.,* p.21ff.

(5) 例えばガウスやヘルムホルツが述べている空間論を想定していると思われる。

(6) D. Hilbert,- F. Klein, *Der Briefwechsel,* (Göttingen, 1985). に所収の1888年 3月16日付けのクライン宛ての書簡でクロネッカーとの邂逅のことが触れられている。また、D. Hilbert, "Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre," *Math. Ann.,*104 (1931), p.487.も参照。

(7) B. Erdmann, *Die Axiome der Geometrie,* (Leipzig, 1877)。M. Pasch *Vorlesungen über Neuere Geometrie,*(Leipzig, 1882)。 H. R. Herzt, *Prinzipien der Mechanik*, (Leipzig,1894).

(8) F. Klein, "Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (Zweiter Aufsatz)," *Math. Ann.,* 6 (1873), pp.112-145.

(9) *Ibid.*

(10) M.-M. Toepell, *op. cit.*, p.63.

(11) E. H. Du Bois-Reymond, *Über die Grenzen des Naturerkennens,* (Leipzig, 1872). 及び *Die sieben Welträtsel*, (Leipzig, 1880). [坂田徳男訳『自然認識の限界について、宇宙の七つの謎』(岩波書店、1928)]

(12) H. R.ヘルツ『力学原理』(上川友好訳、東海大学出版会、1974) 45頁

(13)「数」は単に排除されるだけではなく、幾何学の本質的部分には関わらないことが示される必要がある。それは「連続性の公理」の「独立性」の証明、つまり非アルキメデス幾何学の構成によりなされている。

(14) HIlbert, *op. cit.*, p.1.

(15)ヒルベルトが公理論のもう一つの可能性を自覚し始めるのは、1899年の暮れから翌年の年始にかけて交わされたフレーゲとの論争によるところが大きいと考えられる。 Frege, G., *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hrsg. v. G. Gabriel, u. a. (Hamburg, 1976) 参照。

(16)この素朴な数学的プラトニズムに支えられた彼の確信が、20年後に形式主義的観点を自覚的に唱道する際の自信に結びつくのであろう。彼は直観主義を主張するブラウワーを、既に彼が葬り去ったクロネッカーの亡霊と見做すのである。

(17) M.-M. Toepell, *op. cit.*, p.195, p.227.