２０世紀数学基礎論の成果と展望

倉　田　令二朗

1° 数学基礎論とは

(1) 証明論 (Proof Theory)　(2) モデルの理論 (Model Theory)　(3) 帰納的関数論 (Recursion Theory)　(4) 公理的集合論 (Axiomatic Set Theory)

(1) 証明論

(A) 成立の背景.

集合論の成果 (Cantor, Dedekind) → Paradox (基礎の危機) → 形式主義的公理主義の成立

Zermelo 集合論の公理化 Z (1908), 自然数論の公理化 N (Peano, 1889)

(B) 問題点

(i) Z の分出公理の性質 $A(a)$, N の数学的帰納法の性質 $A(a)$ とは何か？

(ii) N の $0, 1, +, \cdot, =$, Z の $\in, =$ とは何か？

ヒルベルトは (i) に対しては Z ないし N の論理式 (formula) であると答える. (ii) に対しては無定義であると答える. (すべての記号に対して)

(C) 項と論理式

はじめに記号ありき.

- 数学の特定分野に固有の言語 L (記号としての定数 c_α, 述語 p_β, 関数 f_γ のあつまり).
- すべての分野に共通な (i) 論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \forall, \exists$, (ii) 変数記号, (iii) カッコ.

言語 L が与えられると L 上の項 (term), 論理式 (formula) が定まり, 論理式の集合として公理系 T が選ばれる. T は文からなるとしてよい. 数学とはペア $\langle L, T\rangle$ のことである.

(D) 論理式 A が T で証明可能 $T \vdash A$ とは何か？

一階述語論理 (論理の公理と推論規則) が必要.

(E) $\langle L, T\rangle$ が無矛盾 $\Longleftrightarrow$ 論理式 A に対し $T \vdash A$ かつ $T \vdash \neg A$ となることはない.

$\langle L, T\rangle$ が完全 $\Longleftrightarrow$ 任意の L 上の文 A に対し $T \vdash A$ か $T \vdash \neg A$.

注）Hilbert パリ講演での第１問題は連続体問題, 第２問題は算術の無矛盾性

(2) モデルの理論

(A) 言語 $\{c_\alpha, p_\beta, f_\gamma\}_{\alpha\in A, \beta\in B, \gamma\in C}$ の解釈 $M = \langle D, c_\alpha^M, p_\beta^M, f_\gamma^M\rangle$ (D は集合, $c_\alpha \in D$, $p_\beta^M \subseteq D^n$, $f_\beta^M : D^n \rightarrow D$).

M と自由変数に対する指定 $e = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in D$, に対し e が L 上の項 t, 論理式 A を覆うとき $t^M[e]$ (M, e のもとでの t の値), $M \models A[e]$ (A は M, e のもとで真) が定義される.

２０世紀数学基礎論の成果と展望

倉　田　令二朗

1° 数学基礎論とは

(1) 証明論 (Proof Theory)　(2) モデルの理論 (Model Theory)　(3) 帰納的関数論 (Recursion Theory)　(4) 公理的集合論 (Axiomatic Set Theory)

(1) 証明論

(A) 成立の背景.

集合論の成果 (Cantor, Dedekind) → Paradox (基礎の危機) → 形式主義的公理主義の成立

Zermelo 集合論の公理化 Z (1908), 自然数論の公理化 N (Peano, 1889)

(B) 問題点

(i) Z の分出公理の性質 $A(a)$, N の数学的帰納法の性質 $A(a)$ とは何か？

(ii) N の $0, 1, +, \cdot, =$, Z の $\in, =$ とは何か？

ヒルベルトは (i) に対しては Z ないし N の論理式 (formula) であると答える. (ii) に対しては無定義であると答える. (すべての記号に対して)

(C) 項と論理式

はじめに記号ありき.

- 数学の特定分野に固有の言語 L (記号としての定数 c_α, 述語 p_β, 関数 f_γ のあつまり).
- すべての分野に共通な (i) 論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \forall, \exists$, (ii) 変数記号, (iii) カッコ.

言語 L が与えられると L 上の項 (term), 論理式 (formula) が定まり, 論理式の集合として公理系 T が選ばれる. T は文からなるとしてよい. 数学とはペア $\langle L, T\rangle$ のことである.

(D) 論理式 A が T で証明可能 $T \vdash A$ とは何か？

一階述語論理 (論理の公理と推論規則) が必要.

(E) $\langle L, T\rangle$ が無矛盾 $\Longleftrightarrow$ 論理式 A に対し $T \vdash A$ かつ $T \vdash \neg A$ となることはない.

$\langle L, T\rangle$ が完全 $\Longleftrightarrow$ 任意の L 上の文 A に対し $T \vdash A$ か $T \vdash \neg A$.

注) Hilbert パリ講演での第１問題は連続体問題, 第２問題は算術の無矛盾性

(2) モデルの理論

(A) 言語 $\{c_\alpha, p_\beta, f_\gamma\}_{\alpha\in A, \beta\in B, \gamma\in C}$ の解釈 $M = \langle D, c_\alpha^M, p_\beta^M, f_\gamma^M\rangle$ (D は集合, $c_\alpha \in D$, $p_\beta^M \subseteq D^n$, $f_\beta^M : D^n \to D$).

M と自由変数に対する指定 $e = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in D$, に対し e が L 上の項 t, 論理式 A を覆うとき $t^M[e]$ (M, e のもとでの t の値), $M \models A[e]$ (A は M, e のもとで真) が定義される.

(B) T は文のみからなるとき，

M は $\langle L,T\rangle$ のモデルである $\iff$ 任意の $A \in T$ に対して $M \models A$

(C) 恒真．L 上の論理式 A に対して

$\models A$ (A は恒真) $\iff$ 任意の M と A を覆う e に対して $M \models A[e]$

(3) 帰納的関数と述語

(A) 原始帰納的関数

(B) ゲーデルの示唆と一般のさまざまな提案

(C) Church のテーゼ

(D) Kleene の 2 定理

(4) 公理論的集合論

ZF，ZFC (Zermelo, Fraenkel, Neumann)

2° 数学基礎論の古典的成果

(1) 命題論理計算の研究 (Post 1929)．その健全性 (Soundness) と完全性 (Completeness).

(2) Löwenheim-Skolem の定理 (1915, 1920)．可算公理系 $\langle L,T\rangle$ がモデルをもてば可算モデルをもつ.

(3) 述語論理の完全性定理 (Gödel 1930)．$\models A \iff \vdash A$ in H (の $\Rightarrow$).

(4) 不完全性定理 (Gödel 1931).

(5) LK, LJ, 自然数論の無矛盾性証明 (Gentzen 1034–1938).

(6) 帰納的関数論と述語 (Gödel, Kleene 1936–1943, Church 1936).

(7) AC と GCH の ZF に対する相対的無矛盾性 (Gödel 1938).

3° 20世紀後半の発展 (算術の問題を中心に) **と今後の課題**

(1) Nonstandard model の各分野への応用 (1960 年頃はじまる).

(2) GCH の ZFC からの，AC の ZF からの独立性 (Cohen 1963).

(3) Hilbert 第 10 問題の否定的解決 (Matijasevič).

(4) NP-complete 述語の発見 (Cook 1975).

(5) Paris-Harrington Principle (1977).

(6) “Bounded Arithmetic” (Buss 1986)．Computer Science の基礎論化.

(7) Håstad, Ajtai 等．Parity や Pigeon Hole Principle 等の弱い算術からの独立性の問題.

算術内 Separation 問題の方法の開発が課題．Forcing 法の算術化によるかまったく新しい地平が要求されるか不明.

公理論的集合論では Martin-Steel-Woodin の仕事

モデル論では Shelah の仕事が大きい

Fermat 大定理はどんな公理系で証明され，どこで証明されないかの問題も面白い.