

# Éléments de géométrie の 平行線に関する命題 \*

堀 井 政 信<sup>† ‡</sup>

## 1 はじめに

昨年のシンポジウム（「*Éléments de géométrie* の定義・公理・命題」）[1]では、Adrien Marie Legendre (1752-1833) の *Éléments de géométrie avec des notes*/1812, 蔵書印 École polytechnique(以下, *e.ge.notes*/1812) [2] の構成と内容について述べた。Charles Davies (1798-1876) の *Elements of geometry and trigonometry translated from the french of a.m.legendre*/1834, 蔵書印 Harvard University (以下, *e.ge.tr.translated*/1834) [3] と比較対照し、次のことを明らかにした。定義は一致するが、公理「1点を通り与えられた直線に平行な直線は、1本のみ引かれる。」が、*e.ge.notes*/1812には含まれず *e.ge.tr.translated*/1834には含まれる。命題については、*e.ge.notes*/1812 の PROPOSITION XIX, XX, ..., XXIII は、いずれも平行線に関する命題であるが、*e.ge.tr.translated*/1834 の対応する命題と図が異なったり、対応する命題がなかったりし、対応する命題の順序も入れ替わっている。そして、*e.ge.notes*/1812 の PROPOSITION XXI と PROPOSITION XXIII は互いに逆の命題であるが、用いられている図が異なっている。

\*津田塾大学 数学・計算機科学研究所 杉浦光夫先生傘寿記念第 18 回数学史シンポジウム, 2007.10.28

<sup>†</sup>e-mail : masa.horii@nifty.com, キーワード: 数学, 幾何学, 平行線, A.M. Legendre, École Polytechnique

<sup>‡</sup>メールマガジン 高校教員が始めた数学史 <http://www.mag2.com/m/0000125834.htm/>,  
ウェブサイト 高校教員が始めた数学史 <http://homepage3.nifty.com/mathhis/>

本報告では、*e.ge.notes/1812*に公理「1点を通り与えられた直線に平行な直線は、1本のみ引かれる。」が含まれないことと PROPOSITION XIX, XX, ..., XXIII の証明との関係について考える。

## 2 AXIOMES (*e.ge.notes/1812*) と *Axioms*(*e.ge.tr.translated/1834*)

*e.ge.notes/1812*の AXIOMES と *e.ge.tr.translated/1834*の *Axioms* は、公理の数が異なる。*e.ge.notes/1812*の AXIOMES は5項目であり、*e.ge.tr.translated/1834*の *Axioms* は13項目である。*e.ge.notes/1812*の AXIOME (5項目) については *e.ge.tr.translated/1834*の *Axioms* にそれぞれ対応するものがある。そして、*e.ge.tr.translated/1834*の *Axioms* には *e.ge.notes/1812*の AXIOMES にない公理が8項目ある。

その8項目の中で、12番目は「12. Through the same point, only one straight line can be drawn which shall be parallel to a given line.」である。「12. 1点を通り与えられた直線に平行な直線は、1本のみ引かれる。」を要請しており、平行線公理に相当する。これが *e.ge.notes/1812*の AXIOMES には含まれない。

## 3 『フロリアン・カジョリ初等数学史』

Florian Cajori は『フロリアン・カジョリ初等数学史』[4]において非ユークリッド幾何学以前の歴史を述べ、A.M. Legendre について次のように書いている。「あどりあん・まりー・るじゃんどる (1752-1833) ノ研究ハ、興味アルモノデアル。彼ハゆーくりつどノ公準ガ、“三角形ノ内角ノ和ハ二直角ニ等シ”ト云フ定理ト等値デアルコトヲ悟リ、之ニ解析的ノ證明ヲ與ヘタ。然シ彼ハ其ノ際相似形ノ存在ヲ假定シタノデアル。るじゃんどるハ是ヲ以テ満足シナカツタ」。この「解析的ノ證明」が本報告の主題である。

## 4 A History of Non-Euclidean Geometry

*A History of Non-Euclidean Geometry* [5]において, A.M. Legendre が *Éléments de géométrie avec des notes* の初版 (1794 年) で与えた, parallel postulate (平行線公準) の証明の問題点が述べられている. それによると A.M. Legendre は, ある直線 AB に対して垂線 BD と斜めの線 AC がある場合, 斜めの線 AC 上を点が移動するとその点から直線 AB に下ろした垂線の足はいずれ点 B と一致すると結論を下し, 垂線と斜めの直線は必ず交わるから parallel postulate (平行線公準) の一般的な場合を演繹することは難しくないことを “proved” (証明) した. しかし, Semen Emel'yanovič Gur'ev (1746-1813) は, 正の項の収束性の級数の部分和が単調増加であることが, その部分和が級数の和を越えることを意味しないように, 垂線の足と点 A との距離が単調増加であることが, その距離を任意に大きくできることを意味しないと指摘した.

## 5 *e.ge.notes/1812* の平行線に関する命題

### 5.1 PROPOSITION XIX

*e.ge.notes/1812* の DÉFINITIONS XII は 「Deux lignes sont dites *parallèles*, lorsque, étant situées dans le même plan, elles ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une et l'autre.」 であり, 平行の定義について述べている.

*e.ge.notes/1812* の PROPOSITION XV は 「D'un point A donné hors d'une droite DE, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à cette droite.」 であり, 直線の外の点からその直線への垂線の数についての命題である. この命題は, PROPOSITION VI 「2 辺と夾角が等しいとき, 2 つの三角形は合同である.」, PROPOSITION IV 「 $\angle ACD + \angle DCB = 2 \angle R \rightarrow$  辺 AC, CB は 1 本の直線」, AXIOMES 4 「1 点から他の点へはただ 1 本の直線が引ける.」 により正しく証明されている.

*e.ge.notes/1812* の PROPOSITION XIX は 「Si deux droites AC, BD, sont perpendiculaires à une troisième AB, ces deux lignes seront parallèles,

*c'est-à-dire, qu'elles ne pourront se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge.*」, すなわち「 $AC \perp AB, BD \perp AB \rightarrow AC \parallel BD$ 」である。この命題は, DÉFINITIONS XII, PROPOSITION XV により正しく証明されている。ただ, 証明に出てくる点 O が巻末の図に記載されておらず, 命題にも証明にも出てこない直線 AE が書かれている。対応する *e.ge.tr.translated/1834* の PROPOSITION XVIII の図は, 内容は共通するが別の図であり, 点 O が書かれている。

## 5.2 PROPOSITION XX

*e.ge.notes/1812* の PROPOSITION XX は「*La droite BD étant perpendiculaire à AB, si une autre droite AE fait avec AB l'angle aigu BAE, je dis que les droites BD, AE, prolongées suffisamment, se rencontreront.*」, すなわち「 $BD \perp AB, \angle BAE < \angle R \rightarrow BD$  と  $AE$  は交わる」である。 $BD \perp AB, \angle BAE$  が鋭角のとき,  $AE$  上の点が  $E$  の方向に移動すると, その点から  $AB$  上に下ろした垂線の足は  $B$  に近づくので, 直線  $BD$  と直線  $AE$  は交わるとしている。しかし, Gur'ev が *A History of Non-Euclidean Geometry* において, *e.ge.notes* の初版 (1794 年) に掲載された parallel postulate (平行線公準) の証明について指摘しているように, 証明は正しくない。巻末の図は *A History of Non-Euclidean Geometry* に掲載されている図とほぼ一致する。

*e.ge.notes/1812* は第 9 版であるが, この部分は初版と同じであることがわかる。巻末の図は PROPOSITION XIX と同じであり, 直線  $AE$  が命題と証明に出てくる。この命題は THÉORÈME でなく LEMME であり, *e.ge.tr.translated/1834* に対応する命題がない。

## 5.3 PROPOSITION XXI

*e.ge.notes/1812* の PROPOSITION XXI は「*Si deux droite AC, BD, font avec une troisieme AB, deux angles intérieurs CAB, ABD, dont la somme soit égale à deux droits, les deux lignes AC, BD, seront paralleles.*」, すな

わち「 $\angle CAB + \angle ABD = 2 \angle R \rightarrow AC \parallel BD$ 」である。PROPOSITION II「直線 AB と直線 CD が交わるとき、 $\angle ACD + \angle BCD = 2 \angle R$  である。」，PROPOSITION VII「1 辺と両端の角が等しいとき、2 つの三角形は合同である。」，PROPOSITION XIX「 $AC \perp AB, BD \perp AB \rightarrow AC \parallel BD$ 」により正しく証明されている。ただ、巻末の図には、命題にも証明にも表れない直線 AI が書かれている。対応する *e.ge.tr.translated/1834* の PROPOSITION XIX の図は、内容は共通するが別の図である。

## 5.4 PROPOSITION XXII

*e.ge.notes/1812* の PROPOSITION XXII は「*Si deux lignes droites AI,BD, font avec une troisieme AB, deux angles intérieurs BAI,ABD, dont la somme soit moindre que deux angles droits, les lignes AI,BD, prolongées, se rencontreront.*」，すなわち「 $\angle BAI + \angle ABD < 2 \angle R \rightarrow AI$  と  $BD$  は交わる」である。この命題は Euclid の fifth postulate (第 5 公準) に相当する。PROPOSITION XX を用いて証明しており、正しくない。巻末の図は PROPOSITION XXI と同じであり、直線 AI が命題と証明に出てくる。対応する *e.ge.tr.translated/1834* の PROPOSITION XXI の図は、内容は共通するが別の図である。

## 5.5 PROPOSITION XXIII

*e.ge.notes/1812* の PROPOSITION XXIII は「*Si deux lignes paralleles AB,CD, sont rencontrées par une sécante EF, la somme des angles intérieurs AGO,GOC, sera égale à deux angles droits.*」，すなわち「 $AB \parallel CD \rightarrow \angle AGO + \angle GOC = 2 \angle R$ 」である。PROPOSITION XXII を用いて証明しており、正しくない。

## 6 終わりに

*e.ge.notes/1812* の PROPOSITION XXI と PROPOSITION XXIII は互いに逆の命題であるが、用いられている図が異なっている。*e.ge.notes/1812* の PROPOSITION XXI の図は、対応する *e.ge.tr.translated/1834* の PROPOSITION XIX の図と、内容は共通するが別の図である。*e.ge.notes/1812* の PROPOSITION XXIII の図は、対応する *e.ge.tr.translated/1834* の PROPOSITION XX の図とほぼ同じである。*e.ge.tr.translated/1834* の PROPOSITION XIX と PROPOSITION XX は同じ図が用いられており、命題の順序も連続している。

F. Cajori が書いているように、A.M. Legendre は証明が十分でないことを認識していた。*e.ge.notes* はよく売れ多くの版を重ねた。その中で A.M. Legendre と C. Davies は内容を書き直したと考えられる。*e.ge.notes/1812* と *e.ge.tr.translated/1834* はその過程の 1 冊である。

## 参考文献

- [1] 堀井政信「*Éléments de Géométrie* の定義・公理・命題」『津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 28 第 17 回数学史シンポジウム (2006)』, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所, 2007 年, 374-380 頁
- [2] Adrien Marie Legendre, *Éléments de Géométrie avec des notes*, CHEZ FIRMIN DIDOT, 1812
- [3] Charles Davies, *Elements of Geometry and Trigonometry translated from the french of a.m.legendre*, HARPER AND BROTHERS, 1834
- [4] Florian Cajori, 小倉金之助責任編輯, 三上義夫校閲, 小倉金之助・井出彌門譯註増補,『フロリアン・カジョリ初等数学史』, 山海堂出版部, 1928 年, 436 頁
- [5] B.A.Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry, Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Springer-Verlag, 1988, 103-104 頁