1999.10.24
津田塾大学　数学史シンポジウム

行列式について

竹之内　脩

1　和算における行列式

和算において、行列式のことが西洋数学より早くに研究されていることは、著名のことである。
　關 孝和：解伏題之法（1683）
がよく知られたものであり、關流数学では、これを継いで、いろいろな研究がある。
一方、關と同時代の田中由真（1651〜1719）にも、
　田中 由真：算学紛解（1690 年前後？）
という稿本がある。内容的には、關の解伏題之法よりも優れた点が多く見られる。
　井関 知辰：算法発揮（1690 年出版）
では、この田中の跡を受けて、行列式の説明をしている。
　關 孝和、建部　賢明、建部　賢弘：大成算経巻之十七（1705〜1709）
においては、理論の組み立ては、解伏題之法のとは異なり、田中、井関の方法によっている。

1.1　關孝和の解伏題之法

1.1.1　換式第四

まず、換式第四において、次の操作が述べられる。これは、帰除式（1 次式）二つから未知数を消去して一式を作り、平方式二つから 2 次の項を消して帰除式二つを作り、立方式二つから 3 次の項を消して平方式三つを作り、ということである。以下の式で、例えば

$\boxed{a \mid b}$　とは　$a + bx = 0$　という式のこと

$\boxed{a \mid b \mid c}$　とは　$a + bx + cx^2 = 0$　という式のこと

である。

帰除式

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} \longrightarrow \boxed{ad - bc}$$

平方式

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline ae - bd & af - cd \\ \hline af - cd & bf - ce \\ \hline\end{array}$$

立方式

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a & b & c & d \\ \hline e & f & g & h \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline af - be & ag - ce & ah - de \\ \hline ag - ce & ah - de + bg - cf & bh - df \\ \hline ah - de & bh - df & ch - dg \\ \hline\end{array}$$

1.1.2　生剋第五

關は、次の生剋第五において、

得換式驗芟治之後求生剋也

として、何も説明なしに、次々と表を挙げる。(図 1、図 2)

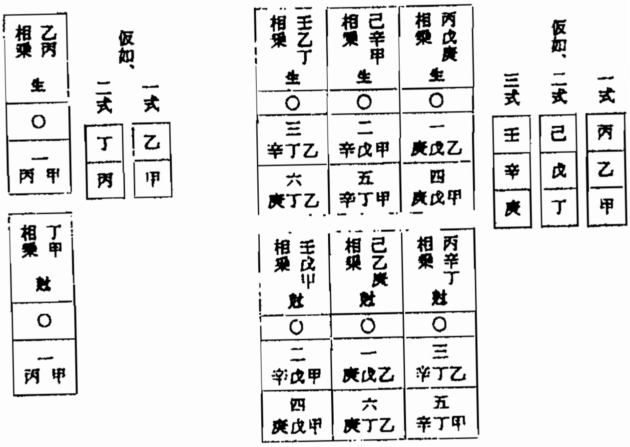

図 1

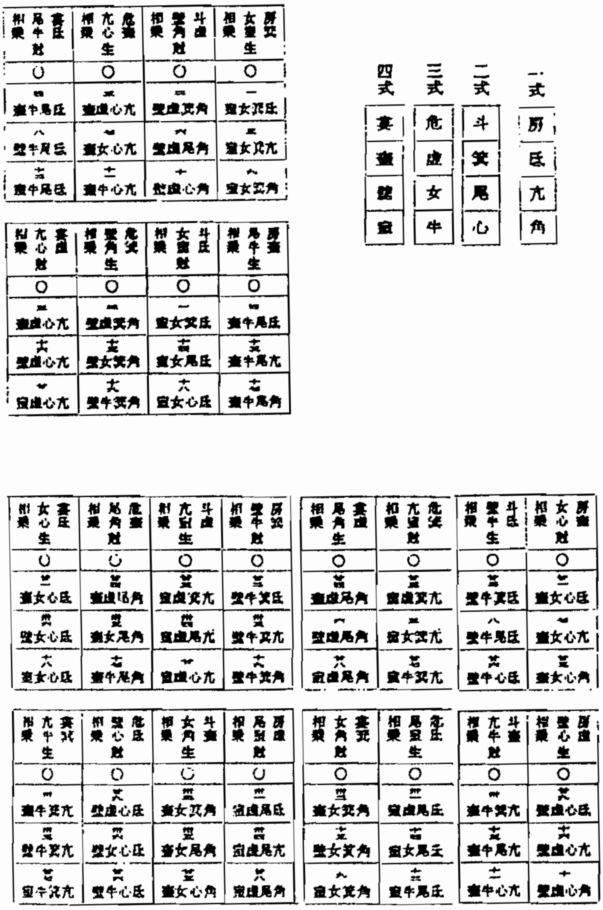

図 2

生はプラス、剋はマイナスのことである。關はていねいに未知数消去の計算をしてそれをまとめていったのであろう。

關はこのあとで、次のように述べている。

右各逐式交乗而得生剋也雖然相乗之数位繁多而不易見故以交式斜乗代之

（右おのおのの式を交乗して生剋を得る也。しかりといえども、相乗の数繁多にして見やすからず。故に、交式、斜乗を以てこれに代える。）

交式、斜乗

従換三式起換四式従換四式起換五式逐如此換二式換三式者不及交式也

順逆共通添一得而乃式数奇者皆順偶者順逆相交也

（換三式より換四式を起し、換四式より換五式を起す。逐ってかくの如し換二式、換三式は交式に及ばず

順逆共互いに一を添えて得る。而してすなわち式数が奇数ならば皆順、偶数ならば順逆相交わるなり）

交式各布之従左右斜乗而得生剋也換式数奇者以左斜乗為生以右斜乗為剋偶者左斜乗右斜乗共生剋相交也

（交式は、おのおの此の図にしたがい、左右から斜乗して正負を得る。奇数の換式のときは、左からの斜乗は正、右からの斜乗は負にする。偶数の換式のときは、左からの斜乗、右からの斜乗は交互に正負にする。）

換五式まで書いてあるが、省略する。（図 3。換五式には誤りがある。）

順	順	順	換三式
三	二	一	

逆	順	逆	順	換四式
四	三	二	一	
二	四	三	一	
三	二	四	一	

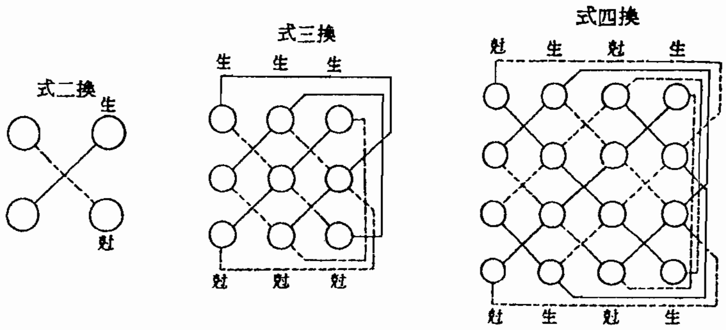

図 3

1.2 田中由真の算学紛解

田中由真は算学紛解において、行列式を与えている。彼はこれを、雙式定格術と述べている。

前式後式トモニ皈除式ノ時ハ互ニ斜乗シテ相消適等ヲ得ル解義ニ曰前ノ A ハ B ニヨル何某ナリ D ヲ乗シテハ B ニヨリ D ニヨル何某ナリ正トシテ寄左○後式ノ C ハ D ニヨル何某ナリ B ヲ乗シテハ又 B ニヨリ D ニヨル何某ナリ負トシテ相消数ヲ得ル是両式寄消ノ発端ニシテタトエハ幾乗ノ式ニテモ皆此理ヲ推察シ定格ヲ得ヘシ

このように皈除式（帰除式と同じ。1 次式のこと）からはじめて、關の換式と同様のことをして、それから直ちに行列式の計算にはいる。前後皈除式之格、前後平方式之格は省略する。

前後立方式之格

ここでは、まず關と同様に、3 次式二つから、次のように 2 次式三つを作る。

$$\begin{cases} a + bx + cx^2 + dx^3 = 0 & \cdots ① \\ e + fx + gx^2 + hx^3 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

これから、

$$\begin{cases} ②\times a - ①\times e & A + Bx + Cx^2 = 0 & \cdots ③ \\ ②\times b - ①\times f + ③\times x & D + Ex + Fx^2 = 0 & \\ ①\times h - ②\times d & G + Hx + Ix^2 = 0 & \end{cases}$$

ここで、

$$A = af - eb \quad B = ag - ec \quad C = ah - ed$$
$$D = ag - ec \quad E = ah - ed + bg - fc \quad F = bh - fd$$
$$G = ah - ed \quad H = bh - fd \quad I = ch - gd$$

という置き換えをしている。

上ノ如ク並列シテ互ニ斜乗シ陰陽率ヲ得ルコト次ノ如シ

$$\left.\begin{matrix} A & F & H & 相乗 \\ B & D & I & 相乗 \\ C & E & G & 相乗 \end{matrix}\right\} 陰率 \qquad \left.\begin{matrix} A & E & I & 相乗 \\ B & F & G & 相乗 \\ C & D & H & 相乗 \end{matrix}\right\} 陽率$$

解ニ曰皈除式ノ正負ヲ分ツニ $\begin{matrix} ① & ② \\ ③ & ④ \end{matrix}$ 此ノ如ク ① ④ 相乗ヲ正トシ、② ③ 相乗ヲ負トスルニ今立方式第一式ヲ以テ $A \quad -B \quad C$ 此ノ如ク正負ヲ記シテ是ヲ以テ右皈除ノ正負ニ乗スレハ又正負ヲ生ス其正ヲ今ノ陽率トナシ負ヲ以テ陰率トス今下ニ図ヲ布テ其斜乗正負陰陽率ノ別チヲ記ス是以テ三乗式巳上ノ陰陽率ヲ準知スヘシ

A		
	① E	② F
	③ H	④ I

AEI　相乗 同名　陽率
AFH　相乗 異名　陰率

	B	
① D		② F
③ G		④ I

BFG　相乗 同名　陽率
BDI　相乗 異名　陰率

		C
① D	② E	
③ G	④ H	

CDH　相乗 同名　陽率
CEG　相乗 異名　陰率

前ニ記ス飯除式ノ①②③④ヲ以テ図ニ記ス其正負ト今乗スル　$A\ B\ C$　ノ正負トヲ同名ヲ陽率トシ異名ヲ陰率トス図ニ依テ推テ知ルヘシ

前後三乗式之格

ここでは、前の前後立方式之格の場合と同じように、

$$\begin{cases} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = 0 \\ f + gx + hx^2 + ix^3 + jx^4 = 0 \end{cases}$$

から、3 次式四つを作る。

$$\begin{cases} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = 0 \\ E + Fx + Gx^2 + Hx^3 = 0 \\ I + Jx + Kx^2 + Lx^3 = 0 \\ M + Nx + Ox^2 + Px^3 = 0 \end{cases}$$

右四式ヲ以テ互ニ斜乗シテ陰陽率ヲ求ムルナリ

$AFLO$	相乗	$AGJP$	相乗	$AHKN$	相乗
$BEKP$	相乗	$BGML$	相乗	$BHIO$	相乗
$CELN$	相乗	$CFIP$	相乗	$CHJM$	相乗
$DEJO$	相乗	$DFKM$	相乗	$CGIN$	相乗

右一十二位相併陰率トス

$AFKP$	相乗	$AGLN$	相乗	$AHJO$	相乗
$BELO$	相乗	$BGIP$	相乗	$BHKM$	相乗
$CEJP$	相乗	$CFLM$	相乗	$CHIN$	相乗
$DEKN$	相乗	$DFIO$	相乗	$CGJM$	相乗

右一十二位相併陽率トス

此ノ如ク各斜乗シテ陰陽率ヲ求テ ⋯

○其三乗式陰陽率ヲ求ルハ右飯除式ノ格ヲ以テ立方式ノ定率ヲ求ル如ク又立方式ノ格ヲ以テ今三乗式ノ陰陽率ヲ求ルナリ其第二式三式四式ヲ以テ今假ニ立方術ノ図ニナソラヘ其第一式ヲ以テ正負ヲ記ス是ヲ斜乗ノ法トス

①	②	③
④	⑤	⑥
⑦	⑧	⑨
立方斜乗陰陽率之図		

$A \quad -B \quad C \quad -D$

サテ已前立方術ノトキ陽率ニナルモノヲ皆正トシ陰率ニナルモノヲ皆負ト見テ是ニ今ハ第一式ヲ乗スルニ其方式ノ陽率ニ第一式ノ内正ヲ乗シテハ同名相乗ニテ今ノ陽率トス又負ヲ乗シテハ異名相乗ニテ今ノ陰率トストカク其立方式ノ陰陽率ト今乗スル正負トヲ見合セ三乗式ノ陰陽率ヲ求ルコト専一ナリ上ノ立方術ノ図ニ①ヨリ⑨マテノ数ヲ記シ下ノ図ニモ九ツノ数ノ前ニ①ヨリ⑨ヲ記ス是ヲ合紋ニシテ其正負陰陽率ヲ勧知スヘシ

タトヘハ立方ノ術式ニ ①⑤⑨ 相乗ハ是陽率ナリコレニ今 A ノ正ヲ乗スル故 $AFKP$ 相乗ヲ同名ナル故今三乗ノ陽率トス又或ハ立方術ノ ③⑤⑦ 相乗ハ陰率ナルニ今 A ノ正ヲ乗スレハ異名ナル故ニ $AHKN$ 相乗ハ今三乗ノ陰率トス此ノ如ク前立方術ノ陰陽率ト今ノ正負トニ随テ又今ノ陰陽率ヲ究テ名ヲ記シテ各三乗式ノ格術ヲ求ルナリ

学者右ノ術ヲ推テ各求之記スル所ノ二十四位ノ率ニ引合テコヽロムヘシ

A			
	① *F*	② *G*	③ *H*
	④ *J*	⑤ *K*	⑥ *L*
	⑦ *N*	⑧ *O*	⑨ *P*

	B		
① *E*		② *G*	③ *H*
④ *I*		⑤ *K*	⑥ *L*
⑦ *M*		⑧ *O*	⑨ *P*

		C	
① *E*	② *F*		③ *H*
④ *I*	⑤ *J*		⑥ *L*
⑦ *M*	⑧ *N*		⑨ *P*

			D
① *E*	② *F*	③ *G*	
④ *I*	⑤ *J*	⑥ *K*	
⑦ *M*	⑧ *N*	⑨ *O*	

四乗式已上ノ術ハ文繁多ナル故ニ略之即四乗式ノ陰陽率ハ一百二十位五乗式ハ七百二十位六乗式ハ五千０四十位トナルナリ右ノ術意ヲ以テ各准知スヘシ

1.3　井関知辰の算法発揮

井関知辰(とき)は、田中由真の門に連なる者である。1690 年に算法発揮という書物を刊行している。この中に行列式が扱われている。これが、日本において、刊行された書物の中で行列式が扱われた最初のものである。上中下の 3 巻から成り、巻之上では行列式が扱われ、巻之中では、真術虚術の問題と答と術、巻之下ではその演段が述べられている。

これは、刊本であるので、その前後立方式之格の部分を示す。(表 4)

前後平方式之格、前後立方式之格、前後三乗方式之格、前後四乗方式之格が、この前後立方式之格の形式でていねいに述べられており、そして、前後五乗方式之格が、五乗陽率、五陰率まで述べて、その法は前と同じだから、これを畧す、といっている。

○前後六乗式以上ハ畧之前ノ例ニ準シ推テ知ルヘシ陰率ヲ求ル法此書ニ載スルニ品ノ外直ニ陰率ヲ得ル法アリトイエドモ初學ノ得心ニ踈シ故ニ其法ヲ載セズ此書ヲ得心シ後自ラ其理ヲ發セン

○最初ニ云フ如ク前後両式ヲ求メテ後其式ヲ得ル所ノ乗數ニ随ヒソレソレノ陽率陰率ニ見合テ本術ヲ作ルヘシ今初學ノ為メ中巻ニ本術下巻ニ演段ヲ附シ以テ豫(アラカジ)メ其旨ヲ示ス圓機ノ士ハ部ヲ調ヘスシテ自ラ此ヲ暁スベシ庸學之人ハ三教ヲ 率数術教演段教 全クストモ口(コウ)授ニ非ズンハ猶此ヲ得コト難カラン乎然リトイヘトモ得難キヲ病マズシテ旦暮ニ首尾ヲ照シ見ハ何ソ其レ此ヲ得スト云コト無哉

1.4　關、建部の大成算経

大成算経は關孝和、建部賢明、建部賢弘が共同で執筆したもので、全 20 巻から成る。1705 ～ 1709 の作とされるが、關孝和は 1707 に死去したため、完成は建部兄弟の手になるものである。ただし、刊行はされなかった。これが關流数学の原典としてどの程度浸透していたのか。あとで述べるように、不審に思われる点もある。写本が伝えられているのみである。それも、数多くあるようであるが、間違いも多い。本論文著者の手元にある 3 種の写本でも、それぞれに間違いがある。

大成算経巻之十七　後集　は 全題解 という標題がついており、見題篇、伏題篇から成る。伏題篇は、だいたい關の解伏題之法に沿ったものであるが、内容の説明があるだけ、こちらの方が解伏題之法よりよい点が見られる。

この伏題篇交乗第五に行列式が扱われている。その前の換式第四では、二つの例えば立方式から三つの平方式を導くことが述べられている。これは、關、田中以来、すべて同じようにやられている。そして、この平方式三つから、未知数を消去することを論ずるのである。

はじめに、この術が、平方を起点として立方に、立方から三乗方に、三乗方から四乗方へと進めることが述べられている。その方法は、まず第一式を主式とし、はじめは残りの式の実を除いたものに一つ前の交乗法を適用し、それに第一式実を掛ける。次に残りの式の方を除いたものに一つ前の交乗法を適用し、それに第一式方の符号を変えたものを掛ける。次に残りの式の初廉を除いたものに一つ前の交乗法を適用し、それに第一式初廉実を掛ける。このように最後までしていってそれらを加える、というやり方である。

ここでは、關の交式斜乗というものはない。ここにあるのはいわば帰納的な方法で、むしろ田中、井関のやり方に近いものである。これらのことについての考察は、後の節で述べる。

だいたい、田中のところで述べたのと同じであるが、説明の違うところに注目しながら見ていくことにする。

立方式

両式、各立方のとき、田中のように、平方式三つに置き換えて、次のようにする。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

一式を主式とし、残りの式で、実のところを取り去る。そして、残った部分に平方交乗法の名を書き入れる。

○	①E	②F
○	③H	④I

そして、①④相乗、②③相乗で、EI, FH を得る。これに主式実を乗じ、AEI は加え、AFH は減ずる。次、餘式で、方のところを取り去り、残った部分に平方交乗法の名を書き入れる。

①D	○	②F
③G	○	④I

そして、①④相乗、②③相乗で、DI, FG を得る。これに主式方を乗じ、BDI は減じ、BFG は加える。これは、B が雙級にあるからである。復た、餘式で、廉のところを取り去る。そして、残った部分に平方交乗法の名を書き入れる。

①D	②E	○
③G	④H	○

そして、①④相乗、②③相乗で、DH, EG を得る。これに主式廉を乗じ、CDH は加え、CDG は減ずる。これは、C が隻級にあるからである。

以上 6 個の項の加減で、立方交乗法が得られた。

立方交乗法

AEI	加	BFG	CDH
AFH	減	BDI	CEG

三乗方交乗法についても、このように細かく記述して、最終的に 24 個の項を与えている。

また、四乗方交乗法については、交乗法の途中の記述はなしに、最終の 120 個の項を書き上げている。

1.5 その後の文献

その後の文献としては、次のようなものがある。

松永 良弼：解伏題交式斜乗之諺解

久留島 義太：久氏遺稿

石黒 信由：交式斜乗生剋補義

菅野 元健：交式斜乗捷法

これらはいずれも關の交式、斜乗の方法について述べているもので、新しい発展はない。

2 和算における行列式の研究についての考察

(1) 和算における行列式とは何を目的としたものか。

和算における行列式の研究は、伏題というものの解決からはじまっている。伏題はもともと

澤口 一之：古今算法記、遺題

の研究から派生したと見られるが、この遺題の直接の研究は、

關 孝和：發微算法

田中 由真：算法明解

にある。前者は刊本であり、後者は稿本である。

さて、伏題とは、問題の文から、求める量に対する直接の方程式がたてられず、他の量を媒介として、その量に対する方程式を作り、その係数として真に求める量がはいってきて、媒介の量を消去することにより、真に求める量に対する方程式を得るような種類の問題である。

求める真の量に対する方程式を真術といい、それを求める為の媒介的な量に対する方程式を虚術という。媒介的な量を消去するのであるから、虚術の方程式は 2 個いることになる。(多くの媒介変数をたてなければならないこともあり、そのときはもっと数多くの方程式が必要になる。關の解伏題之法では、そのようなものもあげられているが、あまり意味があるようには思われない。)

以上のようなことから、平方式 2 個から 2 個の帰除式、立方式 2 個から 3 個の平方式、三乗方式 2 個から 4 個の立方式という形にして、それから行列式として、変数を消去した式を作るのである。したがって、行列式の形で得られたものが、真術の方程式であり、それを解いて、真に求めている量を得るのである。この方程式は通常非常に高次の方程式となる。その次数を定めるのが關の定乗と思われるが、それがわかったところで、どういう意味があるのか。不可解である。

また、この式は、2 式の終結式である。これに対する田中の議論は興味あるものであり、それについては文献 [3] において論じた。

いずれにしろ、行列式の発端となる事項は、西洋数学におけるものとは全く異なる。そして和算においては、行列式を書き下した式を求めることだけがなされているので、それ以上の研究、すなわち行列式の性質についての研究は全くない。

さらにまた、行列式はこれだけ単独に扱われ、伏題の解法に、これを活用しているようなものはない。これも奇妙な現象である。

(2) 方程式の数を増やす工夫。

まず準備的プロセスとして、平方式 2 個から 2 個の帰除式、立方式 2 個から 3 個の平方式、三乗方式 2 個から 4 個の立方式という形にする。

関の解伏題之法では、このプロセスを換式とよんでいる。どうしてこのような方法を考えたのであろうか。

2 個の式から、未知数を消去するとき、高次の項を消去し次々と次数を下げていく。ところで、平方式 2 個から 2 個の帰除式にすると、それぞれの係数になる要素は 2 次の式になる。最終の式の要素は 4 次の式になる。立方式 2 個から 2 個の平方式にすると、同様に、各要素は 2 次の式になる。それをまた 2 個の帰除式にすると、各要素は 4 次の式になる。そして最終の式の要素は 8 次の式になる。立方式のときは、同様にやっていくと、帰除式にしたときは各要素は 16 次の式になり、煩雑になる。そこで考え出した工夫であろうか。

いずれにしても、この工夫は、注目すべきものである。藤井 [5] も、このことに注意している。

(3) 複雑な式を単一の文字で置き換える操作。

換式のプロセスで得た式の要素は 2 文字の組み合わさったものであるが、これを単一の文字に直して、行列式を作る議論にはいるのである。複雑な式を単一の文字で置き換える操作は、関の解伏題之法では括という名をつけているが、代数の要素としては、これも重要なステップである。田中は、格別名前をつけていない。これが、関が先か田中が先か、という点に関係して、考慮すべき問題であろう。

(4) 展開式のつくりかた。

関にしろ田中にしろ、2 次の行列式はどうもないことであったであろう。そして、3 次の行列式が研究の発端と思われる。そのまとめ方が興味のあるところである。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

から出発して、次のものを得る。

+	AEI	BFG	CDH
−	AFH	BDI	CEG

関の場合

生	AEI BEI CEI	DHC CEH CFH	GBF BFH BFI
剋	AHF BFH CFH	DBI BEI BFI	GEC CEH CEI

これは、AEI, BFG, CDH, AFH, BDI, CEG から、第 1 行に EI, 第 2 行に CH, 第 3 行に BF、そして再び第 1 行に HF, 第 2 行に BI, 第 3 行に EC を掛けて引くと、ちょうど不要な項が打ち消し合うことを見たのであろう。各項における因子の順序が組織的にはできているが、しかし、例えば 2 番目の DHC, CEH, CFH が、なぜ CDH, CEH, CFH というようになっていないのか、つまり C と H の間に第 2 行の要素を入れていく、という書き方になっ

ていないのか、不思議である。というのも、4 次の場合には、このようにきちんと組織的な形で書いているからである。

いずれにしても、このやり方は、行列式の計算としては、随分よけいなことをしている。

田中の場合

これは、いわば、行列式の第 1 行に関する展開をしているので、大変、合理的である。

(5) 関、田中は、行列式の展開式をどのようにして導いたのであろうか。

3 次の行列式の場合、井関の算法発揮の中に次のように書かれていることから、実際、消去の過程をていねいに実行した結果である、と考えられる。(図 4)

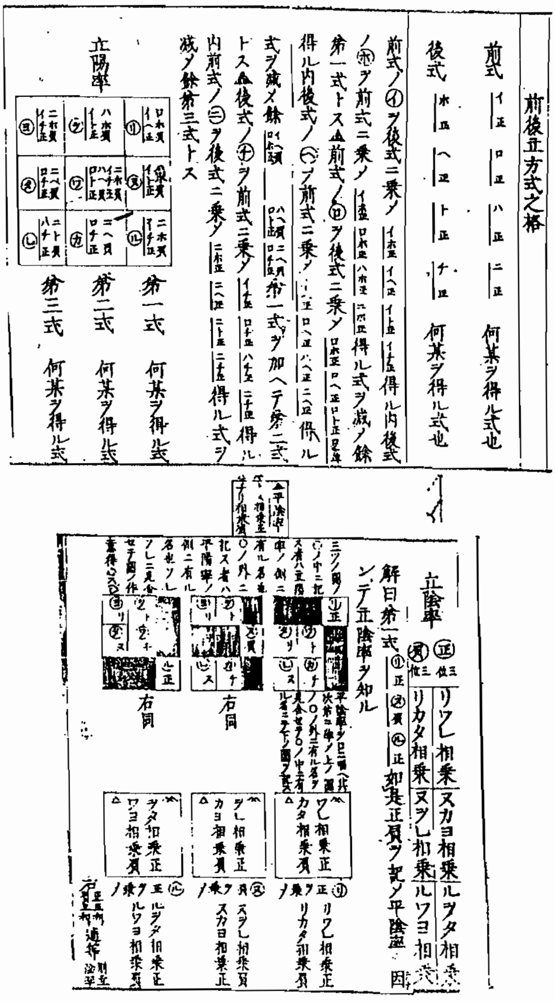

図 4

(6) 高次の行列式について、関、田中、井関、建部などの人々は、どのような意味をもったものととらえていたのであろうか。

関の解伏題之法では、この細かな展開の計算の結果を、4 次、すなわち三乗方式についてもあげている。しかるに、田中の算学紛解、井関の算法発揮、関・建部・建部の大成算経では、4 次以上は、3 次の場合を踏襲して、次数の低い行列式を使った展開の形で求めている。

これは、行列式というものからは、行列式の展開として、評価できるが、しかし、これらの人たちが目標としていた虚術から不要な未知数を消去する、という目標がこれで達成されたという論拠を、この人たちはもっていたのであろうか。

(7) 後の研究で、大成算経の方式が継続されていないのはどうしてか。

関の交式斜乗の方法は、いわゆるサラスの方法を、高次の場合にあげていくやりかたとして、一理あるものであり、注目される。

しかし、関、建部以降の関流、すなわち、

松永 良弼、久留島 義太、菅野 元健、石黒 信由

などの研究では、この方法をさらに高次の場合に追求しているが、そのもとになる式が何か、ということはなされていない。その意味では、それらの研究は、あまり価値を認められないと思われる。

以上の諸点から、和算における行列式の研究は、それを作り出したことは評価できても、その実質的な姿ということになると、ごく限られた点にしか価値を認められないものと考える。

3　西洋数学における行列式

G.W.Leibniz
Lettres à L'Hospital (1693)

Gabriel Cramer
Introduction à l ' Analyse des lignes courbes algébriques, Appendice (1750)

E.Bézout
Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanoussement des inconnus (1764)

Alexandre Vandermonde
Memoire sur l'élimination (1772)

Pièrre Simon La Place
Sur le calcul intégral et sur le système du monde (1772)

J.P.M.Binet
Mémoire sur un système de formules analytiques et leur application à des considérations géométriques (1812)

Augustin Louis Cauchy
Mémoire sur un système de formules qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment (1812)

Carl Jacobi
De formatione et proprietatibus determinantium (1841)

Arthur Cayley
On a theorem in the geometry of position (1843)

3.1 G.Cramer

Introduction à l ' Analyse des lignes courbes algébriques, Appendice (1750)

$$
\begin{aligned}
A^1 &= Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \&c \\
A^2 &= Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \&c \\
A^3 &= Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \&c \\
A^4 &= Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \&c \\
&\quad \&c
\end{aligned}
$$

これらの式から、x, y, x, v, $\cdots$ を求める。
・式が一つのとき、

$$z = \frac{A^1}{Z^1}$$

・式が二つのとき、

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1} \\
y &= \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}
\end{aligned}
$$

・式が三つのとき、

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 + \cdots}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + \cdots} \\
y &= \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 + \cdots}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + \cdots} \\
x &= \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 + \cdots}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + \cdots}
\end{aligned}
$$

分母は、ZYX に 123, 132, 213, 231, 312, 321 をつけるが、そのとき、逆位の数が偶数のとき+、奇数のとき− の符号をつける。

分子は、z のときは Z を A で、y のときは Y を A で、x のときは X を A で置き換えて作る。

分母が 0 になると、解は不定、または不能となる。

3.2 E.Bézout

Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanoussement des inconnus (1764)

Lemme 1　$ax + by = 0$,　$a'x + b'y = 0$　から x, y を消去した式は、

$$ab' - a'b = 0$$

式が三つのときは、

$$(ab' - a'b)c'' + (a''b - ab'')c' + (a'b'' - a''b')c = 0$$

式が四つのときは、……
ここで、permutation という言葉を使っている。

◆ Equation résultante

$$\begin{aligned} Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} + \&C + V = 0 \\ A'x^{m'} + B'x^{m'-1} + C'x^{m'-2} + D'x^{m'-3} + E'x^{m'-4} + \&c + V' = 0 \end{aligned}$$

この二つの式から、x を消去するというのは、二つの式

$$\begin{aligned} Mx^n + Nx^{n-1} + Px^{n-2} + Qx^{n-3} + Rx^{n-4} + \&c + T = 0 \\ M'x^{n'} + N'x^{n'-1} + P'x^{n'-2} + Q'x^{n'-3} + R'x^{n'-4} + \&c + T' = 0 \end{aligned}$$

ここで、$m + n = m' + n'$
を見いだして、それぞれに掛けて加えて 0 になるようにすることである。すなわち、

$$\begin{aligned} AM + A'M' &= 0 \\ AN + A'N' + BM + B'M' &= 0 \\ &\&c \\ VT + V'T' &= 0 \end{aligned}$$

この式は、$m + n + 1$ 個できる。

このことを、式の数が 5 個の場合にまで述べてある。

3.3 A.Vandermonde

Memoire sur l'élimination (1772)

係数を書くのに、$\overset{1}{1}, \overset{2}{1}, \overset{3}{1}; \overset{1}{2}, \overset{2}{2}, \overset{3}{2}; \overset{1}{3}, \overset{2}{3}, \overset{3}{3}$ 等、一般に $\overset{\alpha}{a}$
などとしている。

また、次のような記号を用いている。

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline a & b \end{array} = \frac{\alpha\,\beta}{a \cdot b} - \frac{\alpha\,\beta}{b \cdot a}$$

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha & \beta & \gamma \\ \hline a & b & c \end{array} = \frac{\alpha}{a} \cdot \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline b & c \end{array} + \frac{\alpha}{b} \cdot \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline c & a \end{array} + \frac{\alpha}{c} \cdot \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline a & b \end{array}$$

符号の法則

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline a & b \end{array} \quad = \quad - \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline b & a \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha & \beta & \gamma \\ \hline a & b & c \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c|c|c} \alpha & \beta & \gamma \\ \hline b & c & a \end{array}$$

$$= \quad - \begin{array}{c|c|c} \alpha & \beta & \gamma \\ \hline b & a & c \end{array}$$

もし、二つの alphabets が等しければ、$= 0$

3.4 P. La Place

Sur le calcul intégral et sur le système du monde (1772)

ラプラスの記号

$${}^1a,\ {}^1b,\ {}^1c;\quad {}^2a,\ {}^2b,\ {}^2c;\quad {}^3a,\ {}^3b,\ {}^3c$$

逆位を variation とよんでいる。

$ab - ba$ に対して、c をつけていく。

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba$$

ここで、最初の ab からできた部分を la première résultante と呼び、次の ba からできた部分を la seconde résultante と呼んでいる。

上の式に対して、indices を、

$${}^1a^2b^3c -{}^1 a^2c^3b +{}^1 c^2a^3b -{}^1 b^2a^3c +{}^1 b^2c^3a -{}^1 c^2b^3a$$

のように添えていく。

この式を、

$${}^1a[{}^2b^3c -{}^2 c^3b] +{}^2 a[{}^1c^3b -{}^1 b^3c] +{}^3 a[{}^1b^2c -{}^1 c^2b]$$

と書くのが、systematic である、としている。

五文字の式に対して、四文字の式

$$abcd - abdc + \cdots$$

から、次の法則で e を付けていく。

1° d のほうが e より先に来るものだけをとる

2° e が他の文字と入れ替わったら符号を変える

これによって、

$$abcde - abdce + abdec + \cdots$$

をつくる。

これは、

$$({}^1a^2b^3c)({}^4d^5e) - ({}^1a^2b^4c)({}^3d^5e) + \cdots$$

に等しい。

3.5 J.P.M.Binet

Mémoire sur un système de formules analytiques et leur application à des considérations géométriques (1812)

Lagrange が、1773 に書いた論文の中で、3 次元空間において、原点 O と、3 点 $\mathrm{M}(x,y,z)$, $\mathrm{M}'(x',y',z')$, $\mathrm{M}''(x'',y'',z'')$ を頂点とする四面体の体積が、

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

で与えられることを述べているが、これをさらに高次元の場合に拡張している。

3.6 A. L. Cauchy

Mémoire sur un système de formules qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment (1812)

Cauchy は、一般に、n^2 個の数

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \\ b_1, & b_2, & \cdots, & b_n \\ c_1, & c_2, & \cdots, & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_n \end{array}$$

に対して、forme symétrique alternée $S \pm a_1 b_2 c_3 \cdots k_n$ を、次のように定義する。すなわち、積 $a, b, c, \cdots k$ に対して $1, 2, 3, \cdots n$ のあらゆる順列を添え字につける。そして、その添え字が順序が反対になると符号を変えて、それら全体の和をつくる。この際、それで矛盾がおきないように、置換

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \cdots & \epsilon \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \cdots & \epsilon' \end{pmatrix}$$

についての議論をきちんと行っている。

ここで、行列式の一般の形ができたといってよいであろう。

3.7 C. Jacobi

De formatione et proprietatibus determinantium (1841)　その他

Cauchy の結果は、人々が一般に使用するものとはならなかったが、Jacobi ならびにその弟子達が積極的に活用することによって広まった。

3.8 A. Cayley

On a theorem in the geometry of position (1843)

行列式を、両脇に縦の棒を引いて表したのは、Cayley が最初である。

Cayley は、その数年後、行列の理論を作ることになる。

4　行列式の議論の一般的展開

行列式は、ライプニッツがそのもとを作ったという。
G.W.Leibniz
Lettres à L'Hospital (1693)
がその大元であるというが、これは手紙であり、これが世に知られたのは、Gerhart が 1840 にライプニッツの全集を刊行してからのことである。上のように、行列式の議論の展開には、ライプニッツの寄与はなかった、といってよいであろう。

なお、近年発見されたライプニッツの手稿から、ライプニッツは、1678 から 1713 にかけて、行列式に関することをいろいろ考えていたという。

また、
Colin Maclaurin: Treatise of algebra (1748)
には、連立 1 次方程式の解に関する議論が述べられているそうであるが、Cramer のものほど、一般性をもったものではなかった。

行列式は、はじめは resultant と呼ばれていた。これを determinant と呼ぶようになったのは、
C. F. Gauss: Disquistiones Arithmeticae (1801)
が、determinant という語を用いてからであるという。

行列式についての書物がはじめて出版されたのはイギリスで、1851 年のことという。

最終的に、行列式の議論が今日の形をとるようになったのは、1903 に出版された、
Weierstrass　ならびに　Kronecker
の書物によるという。

参考文献

[1] 関孝和全集、一四三頁〜一五八頁

[2] 竹之内 脩、關孝和の解伏題之法について、国際研究論叢、第 12 巻 pp.1–14

[3] 竹之内 脩、田中由真の終結式について、和算研究所紀要、第 2 巻

[4] 加藤平左エ門、和算の研究 行列式及円理、東京開成館 (1944)

[5] 藤井康生、連立方程式の解法について——江戸時代の数学書の問題より——、
日本数学史学会第 2 回数学史研究発表会 (1995)

[6] Moritz Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,　Bd.3

[7] Thomas Muir: A List of Writings on Determinant
Quarterly Journal of Mathematics, 1882, 1884

[8] http: //history.math.csush.edu/HistTopics/
Matrices_and_determinants.html#36

[9] Eberhard Knobloch: Determinants
Companion Encyclopedia of the History and Philosophy
of the Mathematical Sciences, vol.1, Routledge

[10] Maclaurin: A Treatise of algebra, 1748