津田塾大学　数学・計算機科学研究所報

37

Reports of Institute for Mathematics and Computer Science

37

第 26 回
数学史シンポジウム
(2015)

26th Symposium on the History of Mathematics

(2015)

2016

津田塾大学　数学・計算機科学研究所

Institute for Mathematics and Computer Science

Tsuda College

まえがき

津田塾大学 数学・計算機科学研究所主催の「数学史シンポジウム」も回を重ね，第26回が2015年10月10日、11日の両日，津田塾大学 5号館で開催された。この研究所報37号はその報告である。浦川肇さんからは原稿がいただけなかった。次回に期待したい。

講演をし，原稿を書いて下さった方々に厚く御礼申し上げます。

2016年3月1日

津田塾大学

数学・計算機科学研究所

三宅 克哉

佐藤文広

長岡 一昭

目次

戦後の日本における数学史の形成と数学者たち[1]

中根美知代

1.はじめに

「数学史」という学問分野がある.数学ときわめて近い関係にあるが,数学とは異なる学問上のきまりごとがあり,今日では数学とは独立な分野として確立している.1970 年,東京大学理学系研究科に大学院課程として科学史・科学基礎論専攻が置かれたのに引き続き,いくつかの大学院で科学史を専攻できるようになった.以降,数学史の研究者は,数学科ではなく科学史という枠のなかで専門的に研究・教育されるようになる.1971 年には,国際数学史委員会が活動を始め,国際的にも数学史の研究体制が確立したが,同時期に日本でも制度が整っていくことになる.

もちろんそれ以前に,日本での西欧数学史の研究はあり,「数学史研究」の歴史も調べられている.戦前から西洋数学史に取り組み,戦後は民主主義科学者協会・日本科学史学会・日本数学史学会の会長を歴任した小倉金之助の活動については,すでにまとめられている.[2] 近藤洋逸など,何人かの数学史家や,戦後の大学での数学史の授業の状況なども一通り考察されている.[3] しかし,既存の分野を融合させたり見直したりして,数学史という新たな分野の研究体制が確立としたという視点からの歴史研究はまだない.

この考察の対象とするべきなのは,なんといっても数学者であろ

[1] 本研究は,科学研究費助成事業基盤研究(C)(課題番号 24501251)「理系専門課程における科学史の歴史研究に基づく教育カリキュラムの提言」の補助を受けたものである.

[2] たとえば,阿部博行『小倉金之助:生涯とその時代』,(1992),法政大学出版.数学史のみならず数学教育の視点から小倉について書かれた記述も多い.

[3] Tamotsu Murata, “Certain Aspect of Japanese Studies on the History of Mathematics”, *Historia Scientuarum,* No.33, 1987, pp.43-59. Chikara Sasaki, “Japan,” in J.Dauben and C.Scriba eds. *Writing the history of mathematics : its historical development*, 2002, Birkhäuser, pp.289-295.

う．いつも直面している対象に向けて「この概念や着想は誰がどうやって得たのだろうか」と問いかけたくなるのは自然である．「他の部門の人にも分かるように叙述するのは歴史的な方法によるしかない」「歴史を学ぶことによって，どこが数学の幹で枝葉なのかがわかる」とする数学者の発言も見聞きする．哲学その他文系出身で数学史に興味を持つ人々もいるが，人数として，数学者のほうが圧倒的に多いし，数学の知識が必要な以上，数学から数学史へと入っていくのが現実的でもある．

ところが，数学者による数学史の研究については，『日本の数学100 年史』で簡単に述べられる程度にとどまっている．[4] 本報告では，科学史の大学院ができる 1970 年をひとつの区切りと捉え，戦中・戦後から 1970 年頃までの数学者による西欧の数学史の取り組みについて，焦点を絞って考察していく．

数学者が古典を読んで数学への理解を深めるということは実際にあった．著作や論文も発表している．今日からみれば，それらが「数学史」としての学問的な体裁を整えていないのは当然である．しかし,そのような試みがあったこと自体が専門化への助走として十分に評価できる．しかも，制度化された今日から見ても，十分な体裁を整えている著作が,大阪大学教養部で数学を教えていた中村幸四郎（1901-1986）により 1950 年代には発表されている．数学の古典論文を「数学」としてではなく「数学史」として読み，分析し，新たな知見を導く．独学では難しいこのような作法を中村はいかにして身に着けたのか．実は，中村は大阪大学仏文科と上手に交流し，必要な事柄を学んでいたのである．それが具体的にどのようになされていたのかを見ていきたい．

2．戦中・戦後から 1970 年頃までの数学者の活動

日本数学会での口頭発表

日本数物学会から独立した日本数学会は，戦後ほどなく年に 2

[4] 日本の数学 100 年史編集委員会編『日本の数学 100 年史』（上・下），（1983・84），岩波書店．

回の年会を再開するが，その一分科会として「数学基礎の会」が置かれ，数学基礎論・数学の哲学・数学史の口頭発表がなされていた．その分科会では，

1947年春：下村寅太郎（東京文理大）「数理哲学の方法について」・末綱恕一（東大理）「数学的存在について」・彌永昌吉（東大理）「**Leibniz** の或手紙について」

1948年春：近藤洋逸（六高）「数学史の話題について」

といった報告がなされている．出身学科や就職先が文系学部であれば文系研究者，出身学科や教えている科目が数学であれば数学者と称すると，下村・近藤は文系研究者で，彌永や末綱は数学者である．つまり戦後の一時期，文系研究者の成果が数学会で発表されたという事実があった．

「数学基礎の会」は，分科会の名称が不安定であったが，やがて「数学基礎論分科会」に落ち着き，数学史の報告もひきつづきその分科会でなされる．ただし，数学基礎論という学問分野が徐々に自立してくると，この分科会は数学基礎論の報告が主流になってきたが，数学史の報告はこの枠で細々と続けられていた．なお，1996年秋に，この分科会は再度名称変更し「(数学) 基礎論および歴史」となっている．

数学史関係の出版物

戦中から戦後にかけての刊行物を見ていこう．

1942年：中村幸四郎訳：ヒルベルト『幾何学基礎論』
菅原正巳訳：リーマン『幾何学の基礎をなす仮定について』
サリヴァン著（須藤利一訳）『近世数学史』

1943年：ブートゥルー著（河野伊三郎訳）『数学思想史』

1944年：下村寅太郎『無限論の形成と構造』
末綱恕一『数学と数学史』
彌永昌吉「パスカルの自然科学的業績について」

1946年：近藤洋逸『幾何学思想史』

1947年：近藤洋逸『数学思想史序説』

1948 年：松浪信三郎・安井源治訳『パスカル科学論文集（下)』[5]
1949 年：河野伊三郎訳：『デカルトの幾何学』
1954 年：吉田洋一・赤摂也『数学序説』
1959 年：武隈良一『数学史』
といった具合である．

数学史の本の邦訳というと，小倉金之助が訳したカジョリ『初等数学史』がしばしば言及されるが，サリヴァン，ヴートルゥーの本が訳されていたことは見落とせない．数学者武隈の『数学史』は，欧米の，2 次文献と呼ばれる数学史に関する記述を多数集めて整理し，彼なりの数学史通史を描いたものである．原論文を検討していないという物足りなさはあるが，片手間ではできない著作である．複数の数学史書の翻訳があったからこそできた仕事であろう．

1940 年代であれば，リーマンやヒルベルトは，歴史研究の対象というよりも，数学研究のために読まれたものであろう．しかし，デカルトの『方法序説』の付録として位置付けられた *La Géométrie* が『デカルトの幾何学』と題して刊行され，またパスカルの「円錐曲線試論」や数三角形の理論，サイクロイドの一般論がこの時点で翻訳されているのは，注目に値しよう．前者は，数学出身で数学上の仕事もあるが，むしろ数学の哲学などの領域で，重要な翻訳・著作を残した河野伊三郎によるものである．後者は，文系研究者の松波信三郎と安井源治である．なお，『パスカル科学論文集』刊行にあたっては，彼らが翻訳したシュヴァリエ著『パスカル』の解説として収められた，彌永の「パスカルの自然科学的業績について」が大きな影響を及ぼしている．数学者と人文系研究者の相互作用をここにも見ることができる．

今回は詳しく取り上げないが，1930 年代にはニュートンの『プリンシピア』やラプラスの『確率論の哲学的考察』も訳されている．逝去後数年しかたっていない時期のポアンカレの邦訳など歴史研究の対象とはいえないものも含めて，終戦前の原著の翻訳は予想以

[5] この論文集の上巻には自然科学の，下巻には数学の論文が収められている．

上に多く,数学史への動機づけを与えるに十分であった.ここにも,田辺元など,文系研究者の寄与があった.

この時期の日本人による数学史の著作は,下村寅太郎,近藤洋逸など,田辺元の影響下にある文系研究者になるものが目に付くが,末綱は,48 年の東大数学科での数学史講義草稿を『数学と数学史』で出版している.また,吉田洋一・赤摂也著『数学序説』も注目される.文系学生向けの数学の教科書としてかかれたものであるが,豊富な歴史的記述は,理系学生の数学史への関心を高めるうえで,大きな影響を与えた.[6] 吉田は著書『零の発見』(岩波新書)で知られ,赤もまた数学史の論考を試みたことがある.[7]『数学序説』の歴史記述については,もちろん言い出せばいくらでも注文を付けられるが,まず第一歩を踏み出す学生には十分な内容と容認できる程度の正確さを持っていた.

学部数学科での数学史の講義

数学史の講義の状況についてみていこう.主として文系学生を念頭においた一般教育科目で「数学」そのものよりも,歴史の要素を入れて親しみやすくした科目としての「数学史」という講義がある.たとえば近藤洋逸が岡山大学で講義していた「数学史」は,一般教育科目である.しかし,数学を専門とする学生に,文学部に「文学史」,芸術系学部には「音楽史」「美術史」,建築学科には「建築史」があるように,数学科生にその歴史を教えようとする授業をここでは問題にする.ただし,大学によっては,「数学特別講義」といった科目名で,ある年に限って,あるいは集中講義で数学史の講義を設置するという状況なので,重要な見落としがあるかもしれない.とりあえず,1949 年の新制大学設立時以降の,学部に設置された数学史の状況を確認しよう.

---

[6] 1970 年代に長らく『数学セミナー』編集長を務めた亀井哲治郎氏,コンピュータサイエンス誌『bit』の編集長を経て,共立出版編集部長であった小山透氏からうかがった.編集者の数学史への見識は,その普及にきわめて大きな影響力を持つので,ここに記した.

[7] たとえば「原論第 II 巻の原形について」『科学基礎論研究』, 14(3), (1979),117-125.

立教大学に日本初の私立大学理学部数学教室が設置された．その整備に尽力した吉田洋一は，教員に数学史を学ぶことを薦めた．設立と同時に数学史の講義が置かれ，数学科の教員複数名が年度ごとに交代して講義を担当した．その後 65 年あまり，時々休講になったり，科目名を変更したりしたとはいえ，今日まで講義を安定的に継続している唯一の数学教室である．

東京工業大学では遠山啓が 51 年度に半年だけ数学史の講義を行った．その後も半年の授業を隔年ごとに開講となっているが，それ以降に開講された記録はない．**東京教育大学**では，細井淙が 57 年から 61 年まで数学科で数学思想史と題する講義を行っている．数学講究も設置され，卒業研究も可能だった．また，**東北大学**では，1958 年から 1966 年まで開講され，担当者は平山諦であった．講義は置かれることはあるがそれは比較的短く，担当者がいなくなると止めてしまう，という状況がいずれの大学にも見られる．

なお，1980 年近くになると，数学者ばかりでなく科学史の大学院出身者が担当するようになってくる．**神戸大学**（1978－1982 年）・**津田塾大学**（1978-97 年）・**東海大学**（1979－2009 ないしは 2010 年）・**東京大学数理**（1995 年から断続的に継続）・**早稲田大学**（1995 年-）・**東京理科大学 II 部**（2009 年-）などで開講したが，安定的に置かれているという印象はない．

論文発表の場

当時，邦語による数学史の研究成果が発表できる学術誌として，

- 『科学史研究』（日本科学史学会（1941 年設立）学会誌）
- 『基礎科学』（1947 年から 1953 年）（弘文堂）
- 『科学基礎論研究』（科学基礎論学会（1954 年設立）学会誌・『基礎科学』の後継誌と位置付けられる場合もある．）

が挙げられる．

- 『数学史研究』（日本数学史学会（1958 年前身の算友会が発足，62 年名称変更）

もあるが，和算に重点がおかれているため，ここでは取り上げない．

これらの雑誌を発行する学会の年会では口頭発表もできる．数学史の研究というと，日本科学史学会の活動に注目することが多いが，この時期は，科学基礎論学会もまた重要な活動の場であったことは，『日本の数学 100 年史』でも指摘されている．

3. 数学から数学史へ：中村幸四郎をめぐって

中村の先駆性

このような状況のなかで，もっとも熱心に数学史に取り組んだのは中村幸四郎であろう．1932 年，ヨーロッパ留学から帰国した中村は，東京文理大学で幾何学を教えるようになる．ここで，下村寅太郎と出会い，留学中に触れた数学史への興味を膨らませることになった．[8] 下村の『科学史の哲学』[9]に見られるような，「形成において考える」というものの見方に，中村は大きく影響を受けた．戦中，武蔵高校に移ったが，1949 年，新制大阪大学教養部に着任する．その後，関西学院大学，兵庫医科大学の教授を歴任した．

本報告では数学史の研究を重点的に取り上げるが，中村は 1930 年代には幾何学の著作も複数ある．トポロジーを「位相幾何学」と訳したのも彼である．数学教育関係の著作も多い．制度化以前に数学から数学史に転身し，成功した例として，検討していこう．

数学会では，

「幾何学的代数について」(48 年秋)・「位相幾何学の形成について」(50 年春)・「代数学の史的段階」(50 年秋)・ 「歴史的に見た‘自然数全体’ということについて」(51 年秋)・「函数概念についての史的注意」(52 年春) 「近世数学の形成にお

---

[8] 中村幸四郎・佐々木力『数学史対話』，(1987)，弘文堂．本報告では中村の研究歴の紹介の多くを本書によっている．中村が東京教育大に提出した学位論文「近世数学の基礎にある二・三の問題について」の主査は下村で，1961 年に文学博士が授与されている．

[9] 下村寅太郎『科学史の哲学』，(1941)，弘文堂．科学の歴史を出来上がった科学を前提にしてはなく，それが作られていく過程，すなわち「科学への歴史」とするのが下村の立場である．

ける2，３の問題」(52年秋)「無限小幾何学について」(53年春)「Leibnizの連続律について」(53年秋)

など，多数の口頭発表をしている．1957年から61年春に阪大を退官するまで，理学部兼担の形で大学院数学専攻向けに数学史の講義も担当している．いくつかの数学史書の翻訳にかかわり，また『ユークリッド：原論の背景』(玉川大学出版部，1978年)，『近世数学の歴史：微積分の形成をめぐって』(日本評論社，1980年)，『数学史：形成の立場から』(共立全書，1981年)などを著している．戦中から読み進めていたユークリッド『原論』の邦訳にも加わっている．ユークリッドの『ストイケア』訳語を『原論』としたのは，中村の提案であった．

中村を「数学史に深くかかわっている数学者」ではなく，「数学史家」と称するのは，著作の量もさることながら，制度化された今日から見ても受け入れられる，数学史のスタイルに則った著作を発表しているためである．このことは，デカルトの『幾何学』を題材にして，ほぼ同時期にかかれた２本の論文

1949年　小堀憲　「デカルトの幾何学」『科学史研究』[10]

1950年　中村幸四郎　「デカルトの幾何学について」　『基礎科学』[11]

を比較してみるとよくわかる．

ふたりともデカルトの『幾何学』を読んでいる．小堀は，デカルトの記述に即して，「そこにはこのように書いてあった」，「そのように読める」という指摘にとどまっている．一方中村は，デカルトとフェルマーを対比させる形で，デカルトの座標の着想を位置づけ，ヴィエトからの発展としてデカルトの代数学を特徴づけている．また，『幾何学』のみならず，『精神指導の規則』も射程に入れて，デカルトの着想を論じている．

デカルトが『幾何学』で何をやったのかを歴史で問うとき，彼が何をやったかを解説しても不十分である．他者との対比の中でデカ

10　『科学史研究』，11，(1949),58-62.

11　『基礎科学』，20,(1950), 12-19 および 35.

ルトの独自性を示されなくてはならない．また，数学の研究のために数学の論文を読むときと歴史研究では論文の読み方が違う．数学の研究では，誰かの論文の中に自分自身の問題を解決するためのヒントをつかめば十分である．論文の著者の意図を問題にする必要はなく，「自分はこのように読めた」でよい．しかし，歴史研究で問題になるのは，あくまでも，論文の著者が何を考えていたかである．この点が，数学と数学史の決定的な違いである．『幾何学』を検討しようとするならば，それだけでなく，それに関連するデカルト自身の論考や彼が影響を受けた著作まで検討しないとデカルトが考えていることが捉えられない．中村の論考では，このことがなされているのである．

中村は，誰かの解説ではなく，信頼できる原典をしっかり読んだ上で，研究を進めることをもっとも重んじ，それを「私の原典主義」と称している．[12] 本人はどのくらい自覚しているかはわからないが，「著者の意図をとらえるべく」原典を読むことまで含めて，そのように称していることが彼の著作からうかがわれる．

小堀は複数本の論文を『科学史研究』に寄稿している．[13] 1956年，フィレンツェでの第8回国際科学史会議に日本人としてただ一人参加している．その帰りにヨーロッパ・米国とめぐり，複数の科学史研究者と面談している．[14] また，1957年には，京大の人文研のグループと一緒に科研費を獲得し，その報告集も出版している．[15] 小堀は意欲的に数学史にかかわった数学者のひとりではあるし，原典も読んではいるが，彼の著作は「数学史」の研究スタイルをとっているとは言い難いのである．しかし，それは小堀に問題があるというよりも，中村が突出していると見たほうがよい．大阪に移った中村は，どのようにして数学史の研究を発展させていったのだろうか．

---

[12] 前出，中村・佐々木．
[13] 小堀憲「計算機」，『科学史研究』，22，(1952)，3-6，小堀憲「18世紀の関数論」，『科学史研究』，32，(1954)，1-5．
[14] 小堀憲　「欧米周遊の記」，『数学』，9-2，(1957)，110-115．
[15] 小堀憲編，『18世紀の自然科学』，(1957)，恒星社厚生閣．

大阪大学数学教室と数学史

大阪帝国大学では，1934 年から塩見理化学研究所との協定のもとで，小倉金之助が数学科で講義を行っていた．1937 年，東京に転居してからも，小倉は 1943 年頃まで春秋 2 回の講義を続け，数学史も取り上げた．そこには，武谷三男・近藤洋逸・静間良次など，戦後日本で科学史・数学史の研究に携わった人々が来聴した．[16]

その伝統との関連はわからないが，1949 年に新制大阪大学が開校したとき，数学科の講義のなかで，原典を重視するということがなされた．功力金二郎（くぬぎ・きんじろう）が「集合論」でカントールの論文を，南雲道夫がカラテオドリやコッホの論文を紹介する形で講義が進められた．中村も，数学科教育法で，戦中から読んでいたというユークリッド『原論』を取り上げていた．[17]

中村は，寺阪英孝ともに幾何学講座の予算を使ったが，その大部分は，中村の図書購入費に充てられていた．なお，理学部併任時の中村の専門は「近世数学史」となっており，数学史を専門とする理学部教員が認められている．数学史を学部ではなく，大学院生向けに開講したのも阪大の特徴であった．

中村の阪大退職後も功力・寺阪らは引き続き数学史に取り組んだ．のちに見る，『ユークリッド：原論』の翻訳，原典翻訳集『現代数学の系譜』，それに引き続く『数学の歴史』シリーズにも彼らはかかわっていた．

当時の大阪大学では，数学教室として，数学史に一定の位置づけを与えていたといえるだろう．

中村と仏文学者たちの交流

数学教室以上に重要なのは，中村と大阪大学フランス文学科との交流である．中村は，フランス哲学を専門とする文学部の教授，澤瀉久敬と交友を持つ．澤瀉の助言のもとで，中村は，まずデカルト

---

16 前出，阿部．

17 新制大阪大学第 1 期生の，安藤洋美桃山学院大学名誉教授よりうかがった．

の研究をすすめた．澤瀉は京都帝大哲学科に学び，大阪大学医学部で「医学概論」と名付けた講義をした人物である．ベルグソンの研究者として有名であるが，デカルトの研究にも取り組み，その成果は著書『医学概論』にも取り込まれている．

澤瀉は中村と出会った頃，1950 年に「デカルトの著作」という一文を書いている．澤瀉は，著者自身の手によって公刊された著作・死後出版された著作・それ以外の短編や断章・書簡を「著作」とする．この全体を射程におさめないとデカルトの思想は把握できないとし，この論文でデカルトの著作に一通りの説明を付した．結論部分に「余りにも文献的叙述に終ったこの紹介を，思索的な諸氏はもの足らなく感じられよう．併し，日本の過去の哲学は，一般的に行って，余りにも文献を無視し過ぎたのではなかろうか．一人一人が独創的哲学者になることのみを念じて，人類の偉大な思想家たちの思想を着実に科学的に検討する労を厭いすぎたのではなかろうか．しかも自ら原典に接することなくしてヘーゲルを語り，サルトルを論じ，ベルグソンを非難することが多きに過ぎたのではないか」[18]と記す．ここに，中村の標榜する「原典主義」がまさにここに見られるのである．中村が澤瀉の強い影響のもとに「原典主義」をとったのか，あるいは独立に考えていて共感したのかまでは判断ができない．しかし，澤瀉の考え方が中村をして「原典主義」を貫くための強い推進力となったことは間違いないだろう．もちろん澤瀉は，しっかり原典を読んでも歴史を学んだだけであるから，その上で，哲学的考察へと進むことを示唆している．中村の場合は歴史研究だから，それだけでよい．しかし，そうであればこそ，より徹底したものが求められと中村は考えたのではないか．

澤瀉らが中心となった，1950 年の阪大文学部での「デカルト 300 年祭記念講演会」[19]での中村の講演が，先にのべた，『基礎科学』に収録されているものである．澤瀉は，自身の問題関心もあって，

18　澤瀉久敬「デカルトの著作」(1950 年付)，『フランス哲学研究』(第 3 刷，1981)，勁草書房所収．

19　澤瀉久敬「デカルトの 300 年祭を迎えて」，『基礎科学』20, (1950), 1-11.

デカルトの自然学については論じているが，数学についての言及はわずかしかない．その部分が中村にゆだねられたのであろう．

やがて中村は，仏文科のパスカル研究会に加わるようになる．そこで，阪大仏文学講座初代教授の和田誠三郎から，「ポール・ロワイヤルの論理学」などの入手しにくい文献を見せてもらうことができた．中村のパスカル研究の成果は，

1951 年「歴史的に見た自然数全体ということについて：パスカル場合」『基礎科学』[20]

1962 年「パスカルの数学の性質について」『理想』[21]

1964 年「いわゆるポール・ロワイヤルの三部作「論理学」「文法」「幾何学」について」『論攷』[22]

しばらく時間が空くが

1980 年「数学史からみたパスカル」『理想』[23]

といった論文となってまとめられている．中村はパスカルの数学についても，「原典主義」に則って研究を進めていった．

原亨吉(1918-2012)との出会い

1955 年，原亨吉が阪大仏文学講座に着任する．日本の数学史家で，国際的に一番影響力のある仕事をしたと評価されることもある人物であるが，もちろん，ポール・ヴァレリーの著書の翻訳や研究など「普通の」フランス文学の業績もあるし，「普通の」話題で講義・研究指導も行っていた．[24]

原が古代と近世のヨーロッパ数学史に取り組み始めたのは，阪大着任後，中村に出会ってからであった．中村から「手ほどきを受けながら」，人文書院が計画中の『パスカル全集』のために，数学論

---

20 『基礎科学』，27，（1951），847－852.

21 『理想』，352，(1962)，42-48.

22 『論攷』(関西学院大学一般教育諸学研究)，11，(1964)，75-86.

23 『理想』，578，(1981)，93-105.

24 原の研究業績目録が，大阪大学フランス語フランス文学会刊行の年刊雑誌 *Gallia*,52（2013)，6-10 に収められている．

文を訳しながら勉強していったのである.[25] ブランシュヴィック版全集を底本とし,シュヴァリエ版を底本とした松波・安井のものより収録した論文数も多い.特に,中村が「無限小幾何学」と称する求積法の部分が充実している.なお『パスカル全集』の数学論文の解説を書いたのは中村である.

原は,1963年からフランスへ留学し,1965年,ロベルヴァルの運動学の研究で第3博士 doctorat de 3e cycle の学位を取得する.原は,65年の帰国後も,15年以上,中村の自宅に足しげく通い,教示を受けた.『デカルト全集:幾何学』の翻訳,伊東俊太郎,村田全ともに刊行した『数学史』で「近世」を分担執筆,『数学史』学術誌や阪大仏文科が出している *Gallia*, さらに『数学セミナー』や『数理科学』にも多数の著作を残している.1982年には『パスカルの数学的業績』で恩賜賞・日本学士院賞を受賞している.中村は,これらの仕事を見守っていたということであろう.

旧制高校理科を卒業している原は,近世の数学を扱うために必要な知識はもっていたはずである.帰国後は,中村から取り立てて学ぶべきことはなかっただろう.原が中村に求めたものは,中村の数学者として素養,そして中村自身が積み上げてきた数学史の全体像ではないだろうか.広い範囲まで見渡したうえでの研究の意味,たとえば,その後のライプニッツの積分法まで射程にいれてパスカルの仕事の意義を提示され,それが今日の数学にどのように反映されているかを中村から示唆されたとすれば,歴史研究を継続する上で,大きな励みとなったことは容易に想像できる.

フランスにおけるパスカル研究の第一人者,ジャン・メナールは,和田誠三郎・原・赤木昭三と続く阪大仏文科を「パスカル研究の大阪学派」と称し,「パスカルの数学的著作については世界で最も精通しておられる原亨吉教授」と記している.[26] この「大阪学派」

---

[25] 原亨吉「下村先生へのお礼とお詫び」,『みすず』,409号,(1995-4),39-41.

[26] 『生涯の軌跡』(パスカル全集第1巻)(1993),白水社.メナール版のパスカル全集を底本とした翻訳で,メナールが序文を寄せている.

の形成に中村が大きく寄与していたことは間違いない.

数学者と文系研究者の有機的な相互協力が阪大を舞台になされて,それが日本の数学史研究を支える重要な要素となっていたのであった.

4. 数学史の制度化へ

戦後から1960年代前半まで，数学のほうでは，先に見たような活動が淡々として続けられていた.しかし,1970年前後に,「事件」が集中して起きている. 1967年3月に『思想』に特集「数学の思想」が，1968年5月『数理科学』が特集「数学の思想」が組まれている.「現代数学」について論じることを目的とし，その文脈のなかで数学者が，数学の歴史について発言している.赤の論考の中に「現代数学の系譜」という表現が見られることが，それを象徴している.[27]

1970年に「数学教育の現代化」が実施されるにあたって,「現代数学」は多くの人々の関心を惹くキイ・タームであった.「現代数学とは何か」という問いに，明確に答える有効な方法として，歴史的経緯から説き起こす，ということが取られたのである.

1968年6月号から1970年6月『数理科学』にかけて，村田全による「数学史散策」が連載される. 1969年には，共立出版が，18世紀末から20世紀初めまでの重要な原典の,数学者の手による翻訳を収集した『現代数学の系譜』[28]の刊行を開始する. 完成は1997年だった. この続きとして企画されたのが，同社の『数学の歴史』シリーズ[29]で，1979年に刊行が開始された.

このような状況のなか,1970年に,東大理学研究科に「科学史・科学基礎論専攻」設置されるのである.制度を整えても，学生が来

---

[27] 赤摂也「現代数学の思想と数学教育の現代化」,『思想』,(1967-3), No.513, 273-283.

[28] このシリーズでは，功力金二郎がカントールを，寺阪英孝がヒルベルトおよびF. クラインの著作を翻訳している.

[29] 寺阪が『19世紀の幾何学』の巻を分担し，ガウスの曲面論の論文を邦訳したうえで解説している.

ないのでは大学院は維持できない．しかし，数学関係者を科学史の大学院への導くための準備は十分に整っていた．

1971年，ユークリッド『原論』の邦訳が刊行された．19世紀まで，ヨーロッパで聖書に次いで読まれたとされる本の邦訳がついに出版されたのである．ギリシア語が専門の池田美恵，数学者・寺阪英孝，文系の連絡のある数学者・中村幸四郎に，米国で科学史を学んだ伊東俊太郎が加わっている．[30] これを契機に科学史の枠で数学史にとりくんだ人々が，数学史の研究へ徐々に加わってくるのだった．

5．おわりに

数学史を専門的に研究できるようになったのは，一つの進歩である．1990年，国際数学者会議のサテライトとして，東京で数学史のシンポジウムを開くといったことは，制度化されない状態では難しかったと思う．しかし科学史の中で制度化したということは，原則として，数学と数学史は独立，数学関係者とかかわらなくても数学史はできるということになる．

日本数学会の発表件数・内容から見ても，日本での数学史研究は危機的な状況にある．その原因の一端をこの制度化に見ることもできるが，それについては別の機会に報告したい．

謝辞

本報告の作成にあたり，亀井哲治郎（亀書房），小山透（近代科学社）の諸氏から，重要な示唆を受けた．また，赤摂也元立教大学教授からも，適切な助言をいただいた．ここに記して感謝いたします．

[30] 当初の翻訳の計画には功力も加わっていたが，最終的に訳者として名前を連ねなかった．

戦後の日本における数学史の形成にかかわるおもな出来事

	数学史の講義の状況	数学史関係の出来事	重要な数学史の出版物	関連学会関係の出来事
1940(S15)	小倉金之助、阪大数学科で数学史を講義(1943年まで)	[氏名学位に続く( )内は、学位授与機関と主査名]		[この列では、特に断りのない限り、学位取得者は物理学史の分野]
1941(S16)				日本科学史学会結成
1942(S17)				
1943(S18)				
1944(S19)			末綱恕一『数学と数学史』 下村寅太郎『無限論の形成と構造』	
1945(S20)		下村寅太郎文博(京大:田辺元)		
1946(S21)				民主主義科学者協会設立
1947(S22)		米ブラウン大・数学史学科設立 日本数学会「数学基礎の会」設置、何回かの変遷の後、「数学基礎論分科会」となる		
1948(S23)				
1949(S24)	立教大数学科に数学史の講義設置(科目名変更したが、継続中)			新制大学発足 東工大化(1988年まで)・立教大化(2009年まで)に化学史の講義設置
1950(S25)				
1951(S26)	遠山啓が東工大数学科で半期だけ講義、隔年開講が計画されたが実現せず			東大教養部に教養学科、 科学史・科学哲学分科設立

1952(S27)	中村幸四郎が阪大の「数学科教育法」でユークリッド『原論』を講義(阪大での原典主義) 近藤洋逸(法文学部所属)が岡山大で教養科目数学史を講義(1976年停年)			
1953(S28)				
1954(S29)		科学基礎論学会結成	吉田洋一・赤摂也『数学序説』	
1955(S30)				
1956(S31)				『物理学史研究』創刊
1957(S32)	細井淙、東教大学数学科で数学思想史を講義(1961年まで) 中村幸四郎阪大数学科大学院で数学史を講義(1961年まで)	近藤洋逸文博(京大:三宅剛一)		
1958(S33)	東北大学数学科数学史講義設置 (1966年まで)	算友会発足		板倉聖宣理博(東大:玉木英彦) 日大理工物理に科学史研究室・理学史の講義設置、現在継続中
1959(S34)		『和算研究』(算友会)創刊	武隈良一『数学史』	
1960(S35)				
1961(S36)	中村阪大退職	中村幸四郎文博(東京教育大:下村寅太郎)		田中実・八杉龍一文博(東京教育大:下村寅太郎)
1962(S37)		日本数学史学会(算友会改め)結成 小倉金之助没		クーン『科学革命の構造』邦訳 広重徹理博(名大:高林武彦)
1963(S38)				湯浅光朝理博(名大:高林武彦)
1964(S39)				

1965(S40)		原亨吉第3博(パリ大学)		八木江里理博(東大:玉木英彦)
1966(S41)				
1967(S42)			『思想』特集「数学の思想」	民主主義科学者協会解体
1968(S43)			『数理科学』特集「数学の思想」	
1969(S44)		新指導要領告示	『現代数学の系譜』(共立出版)刊行開始(1997年完了)	
1970(S45)		村田全文博(慶大:松本正夫)	数学セミナー座談会「数学史学よ興れ」	東大理学系大学院に科学史科学基礎論専攻設置
1971(S46)		国際数学史委員会結成	ユークリッド『原論』邦訳	
1972(S47)		「数学教育の現代化」=新指導要領開始		お茶大物理で物理学史の講義設置、断続的に1990年まで継続。 東理大化で化学史講義設置、1994年まで継続
1973(S48)				化学史研究会発足 『物理学史研究』最終号
1974(S49)		Historia Mathematica 誌創刊		『化学史研究』創刊 西尾成子理博(名大・高林武彦) 国際科学史会議日本開催
1975(S50)		共立出版「数学文献を読む会」開始(推定)	『数学史』(伊東・原・村田:筑摩書房)刊行	
1976(S51)				『物理学史通信』発刊
1977(S52)				

1978(S53)	神戸大学理学部に数学史講義設置(1982年まで) 津田塾大数学科に数学史講義設置(1997年まで断続的に開講)	A.Weil :ICMでHistory of Mathematics: Why and Howを講演		
1979(S54)	東海大数学科に数学史授業設置(2009か2010年まで継続)		『数学の歴史』シリーズ(共立出版)刊行開始	
1980(S55)		現代数学史研究会開始		
1981(S56)				
1982(S57)				東工大社会工学専攻内で科学史・技術史大学院課程設置
1983(S58)			ボイヤー『数学の歴史』翻訳刊行開始　1985年終了	
1984(S59)				化学史研究会、化学史学会に名称変更
1985(S60)			デュドネ編『数学史:1700 －1900』(岩波書店)刊行	山口宙平学博取得(東工大・道家達将:化学史)
1986(S61)				『19世紀物理学史』創刊
1987(S62)				茨城大物理、物理学史講義設置、1994年まで継続。
1988(S63)				
1989(H1)				
1990(H2)		東大にてICM90 サテライトコンファレンス 津田数学史シンポジウム開始(継続中)	高橋憲一理博(東大) 斎藤憲理博(東大) (左隣の出来事ですが、スペースの関係でここに記載)	
1991(H3)		中根美知代学博(東工大:山崎正勝)		お茶大生物で生物学史の講義設置、2006年まで残続的に開講 大綱化
1992(H4)				

1993(H5)		高瀬正仁博理(九大)		大学院重点化
1994(H6)				
1995(H7)	早大理工数学科に数学史の講義設置(継続中) 東大数理に数学史の講義設置(断続的に継続中)		『数学史叢書』(朝倉書店)刊行開始	東大大学院が、理学系研究科から広域科学専攻相関基礎科学系内の科学技術基礎論コースへと改組
1996(H8)		日本数学会の基礎論分科会が「基礎論および歴史」と名称変更		
1997(H9)		京大数理研で数学史の研究集会開始(継続中)		『物理学史』(前掲『19世紀物理学史』)最終号
1998(H10)				
1999(H11)		現代数学史研究会終了		
2000(H12)				
2001(H13)				
2002(H14)				
2003(H15)				
2004(H16)				
2005(H17)			『カッツ:数学の歴史』(共立出版)刊行	
2006(H18)		ブラウン大数学史学科解散		
2007(H19)				
2008(H20)				
2009(H21)	東理大II部数学科に数学史の講義設置 九州大学数理学研究科に数学史の講義設置			
2010(H22)				
2011(H23)		九州数学史シンポジウム開始(2013年までは継続)		
2012(H24)				

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

21

Cent ans de mathématiques *

堀井政信 † ‡

1　はじめに

Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994 [1] は École polytechnique（エコール・ポリテクニク）の創設200周年記念誌で，1894年から1994年の100年間が対象です．現代につながる，あるいはほぼ現代の科学の歴史を各分野の専門家が考察しています．記事の執筆者が明記されており，参考文献も示されています．科学の歴史を考えるために貴重な史料です．

“ École polytechnique と *Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994* ”（2011.10.30） [2] では，*Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994* [1] の史料としての特徴について説明しました．Comité d'orientation（委員長 Jacques Lesourne，委員25名），Comité éditorial（委員4名）が組織され，“ Les auteurs ” にある執筆者は30名です．

“ De la science à la technologie ”（2012.10.14） [3] と “ L'après-guerre : un renouveau de l'enseignement et de la recherche à Polytechnique ”（2013.10.12） [4] では，“ Les sciences de la matière（物質の科学．物理学・化学・力学と数学）” について述べました．サン・シモン主義の影響で研究が停滞しました．その後，原子核関連（CERN など）・固体力学と動的気象学（École polytechnique）が発展しました．

---

*津田塾大学 数学・計算機科学研究所第26回数学史シンポジウム，2015.10.10

†e-mail : masa.horii@nifty.com，キーワード : École polytechnique，*Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994*，数学，100年，大発展，数学教育，基礎の危機，異種交流，確率論，科学計算．

‡メールマガジン 高校教員が始めた数学史 http://archive.mag2.com/0000125834/，ウェブサイト 高校教員が始めた数学史 http://homepage3.nifty.com/mathhis/mathhis.htm

本報告では“Cent ans de mathématiques（数学の100年）”（Jean-Pierre Bourguignon氏）について述べます.

2 数学の100年

“Cent ans de mathématiques”の執筆者はJean-Pierre Bourguignon氏です.“Les auteurs”によると，École polytechniqueを卒業し，CNRSを経てÉcole polytechnique教授（1986-）．フランス数学会会長（1990-1992）やIHÉS所長（1994-）を歴任.

20世紀の間に数学は前代未聞の発展を体験しました．そのことは，数学者の数，研究出版物の数，国際的なレベルの研究をする数学の学校を持つ国の数でわかるとしています．数学は多くの分野で豊かになり，その様子を「tour de Babel」で表現しています.

3 Un essor sans précédent dans l'histoire de l'humanité

数学は人類の歴史において前代未聞の発展をしました．量的・質的な発展の結果，社会における数学の影響力が大きくなりました．工業化した国々では，情報循環社会で決定的な役割を果たし，数学が関与できる領域が目覚ましく拡大しました．特に，抽象科学の分野において顕著でした.

一方，ナチのドイツから多くの人々が逃れ，ゲッチンゲンやヒルベルトで象徴されるドイツの数学学校の優位が終わりました．そして，アメリカ合衆国とソ連の2大国が台頭しました.

4 Enfin des mathématiciennes !

女性の人材育成について述べています．フランスでは100年間（出版時[1]），女性が数学の学位論文を出すことはありませんでした．例として，Sophie GermainとSonia Kowaleskaiaを挙げています.

今日（出版時 [1]）でも数学を研究する女性の数は僅かなままとしています．フランスにとって逆説的な状況として，「学校における数学の成績は，女の子の方が男の子より良い」と書いています．

“ Introduction ” でも監修者の Jacques Lesourne 氏が女性の人材育成について述べています．「エコール・ポリテクニクは次の半世紀の移行に参加する男性と女性を準備する責任を自覚している」．敢えて「女性」と書いていることは注目に値します．

5 Une place majeure dans l’enseignement de nombreux pays

5.1 教育における主要な地位

数学教育は世界のすべての国で一般化しました．特に工業化が進んだ国々では技術教育の基礎となりました．多くの国では，数学の問題を限られた時間で解く能力でエリートを選抜しました．フランスは特にその傾向が強い．また，多くの仕事において抽象的概念の取扱を一般化することに，数学が重要な役割を果たしました．その結果，多くの教育プログラムで数学が主要な地位を占めました．

5.2 *Henri Poincaré*(1854-1912)

Henri Poincaré は最初の数学論文を 1873 年，École polytechnique に入学した年に出版しました．Mines（パリ国立高等鉱業学校）に首席で入学し，次席で卒業．学位論文《偏微分方程式により定義された関数の特性について》．代数位相幾何学の基礎を築き，『天体力学の新しい方法』により力学体系の幾何学理論の必要性を明らかにしました．

6 La permanence des objets et des méthodes

数学の目的と方法について述べています．最近 100 年の数学の発展において注目すべきことは，目的が変わらなかったことです．その中心は数全

体・構造・関数変換でした．そして，目的が互いに対をなす新しい方法を発見しました．そのことにより，数学の一貫性が生まれました．

主要な方法は新しい寄与により豊かになりました．例えば，代数では理論的情報処理や論理学との比較，解析では数値近似による仮説の検証，幾何では物理学の幾何化です．

7 Un siècle de révisions fondamentales et de progrès fulgurants

7.1 基礎の危機

数学はこの100年間一定の経過で発展したのではなく，一律でもありませんでした．19世紀終わりから20世紀初めに《基礎の危機》が発生しました．その結果，誤って答えが自明であるとみなされていた基礎の問題に戻ることを余儀なくされました．そして，一層の抽象化とさらに体系的な公理的方法により対応しようとしました．

ブルバキ・グループが1930年代の終わりごろから数学理論の回復に取り掛かりました．彼らは一般的な構造の研究に重点を置きました．その影響は特にフランスで大きい．

7.2 戦後の進歩

戦争直後に多くの分野で衝撃的な進歩が生まれました．関数空間の分野で関数解析が発展し，一般的な偏微分方程式を解けるようになり，応用科学の広大な分野において数学モデリングへの道が開けました．また，幾何学問題の解決が容易になりました．代数幾何は代数と数論の融合により変化しました．

最近20年（出版時[1]）の進歩は，数学の学科間の異種交流の結果です．確率論と幾何学，群論と量子力学，理論物理と代数幾何，数論と微分幾何の出会いです．

8　ヒルベルトと非ユークリッド幾何学

“ヒルベルトと非ユークリッド幾何学”(2010.10.10) [5] において，ヒルベルトと非ユークリッド幾何学の関わりについて，幾何学公理の無矛盾性の問題を中心に述べました．そこで，ヒルベルトの著書の邦訳 2 冊の「訳者序」「解説」に言及しました．原著はいずれも David Hiibert, *Grundlagen der Geometrie* 7. Aufl. (Berlin 1930) であり，邦訳は『幾何学基礎論』(中村幸四郎訳，1969 年) [6] と『ヒルベルト 幾何学の基礎，クライン エルランゲン・プログラム』(寺阪英孝・大西正男訳，1970 年) [7] です．

「ヒルベルトの理論によってもこの「(数学の基礎の) 危機」の打開は現在に至っても成就しえられない」(中村幸四郎,『幾何学基礎論』，1969 年，訳者序) [6].「現今ではヒルベルトの考え方が支配的であることは，数学者誰もが認めることであろう．このことは，ヒルベルトの主張どおりに彼の考え方が最も妥当なものであるということの証拠には必ずしもならないけれども，少なくとも現代数学の構成を考えるには，彼の考え方の核心にふれる必要があることは確かであろう」(大西正男,『ヒルベルト 幾何学の基礎，クライン エルランゲン・プログラム』，1970 年，解説) [7].

いずれも危機の打開が成就されていないことを述べています．ヒルベルトの公理の理論は現代の数学一般に対して特有なる研究方法を与え，かつこれを思想的に裏付けるものとなっています．しかし，ヒルベルトの考え方が支配的であるものの，彼の考え方が最も妥当なものとは言えない．数学基礎論には大きな未解決問題が残っています．

9　Des champs nouveaux ou profondément renouvelés

19 世紀終わり以降に新しい分野が誕生しました．最も重要なのは，確率論・数値計算・自動制御・力学体系理論・《特異性》理論です．

確率論は Paul Lévy と Kolmogorov の影響の下で基礎が生まれ，数学の他分野の寄与により重要な地位を掴みました．解析では確率的な手法による関数空間の構造の研究，幾何では確率積分の形をした方程式の解答の記

述，数理物理では固体物理における量子効果の研究のためのイジング模型です．

数値計算（科学計算）は，コンピューターが提供する強力な計算方法により，作用分野と解決方法を著しく拡大しました．

自動制御と制御理論は，リアルタイムの測定結果により複雑な体系を制御するために生まれました．計算方法とアルゴリズムの統合を必要としました．

力学体系理論は微分方程式の定性的研究から発展しました．それは *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*（『天体力学の新しい方法』）における，Henri Poincaré の予見に依ります．そして，多くの数学理論（測定理論など）と豊かな関係を結びました．

《特異点》理論はそもそも《フラクタル》の分野で研究されていました．Marston Morse と René Thom が特徴的な情報が特異点に集中することを示し，強力な道具であること明らかになりました．

9.1 *Paul Lévy et le mouvement brownien*

Paul Lévy は確率の現代理論の創設者です．ブラウン運動を詳細に研究し，確率理論と解析理論の主要な分野を生み出しました．ブラウン運動の継続係数を計算し，消滅運動の時間集合がカントール集合であることを示しました．

Paul Lévy の研究は同時代の人々には少ししか理解されませんでした．K. Itô とその後継者が再興し仕上げました．

Paul Lévy は《確率積分》理論と《確率微分方程式》の概略を示しました．K. Itô が 1950 年代に《確率微分方程式》を創設し発展させました．

9.2 *Le calcul scientifique*

科学計算はコンピューターと共に生まれました．当初は原子核の起源と亜音速・遷音速流れの問題を解くために開発されました．微分方程式や偏微分方程式の基礎に基づき，モデルを解くことが重要です．1960 年代初めにフランスでは，CEA，EDF などの大きな組織において，数値解析が定量

的な解を得る道具になると考えられました．若いポリテクニクの学生が貢献し，後に素晴らしい飛躍を生みます．

1970年代には有限要素法が構造計算に導入され，偏微分方程式の一般的解法として認められます．そして，多くの科学分野に適用されます．フランスの応用数学の学校が卓越した役割を担いました．

科学計算の理論と応用の早い発展に並行して，新しい世代のスーパーコンピューターの開発が進みました．それはベクトル構造や並列に基づき，大規模な科学ソフトウェアが生まれました．1980年代には高性能な道具を使い，複雑な問題に取り組むことができるようになりました．科学計算は産業界のすべての分野に導入されました．実験の代わりにコンピューターシミュレーションを用い，より少ない費用で定量的な応答を得られるようになりました．

科学計算は研究に欠くことができない構成要素です．非線形物理学と力学体系理論の発展は，数値シミュレーションの貢献がなければ不可能でした．

新しいコンピューターに適合した数値アルゴリズムが研究され，並行計算コンピューターにより大量の情報を処理出来るようになりました．また，数学モデリングの進歩により，手頃な費用でシミュレーションできるようになりました．

科学計算は数学・情報科学・応用の合流点に位置する学科です．その進歩は科学知識と技術の向上に大きな役割を担っています．

10　終わりに

“Cent ans de mathématiques”では，100年間（1894年～1994年）の数学のダイナミックな動きを解説しています．数学が関与できる領域が目覚ましく拡大し，20世紀に数学は前代未聞の発展を体験しました．数学教育は世界のすべての国で一般化し，多くの教育プログラムにおいて数学が主要な地位を占めました．

《基礎の危機》に遭遇しますが，抽象化と公理的方法により対応しました．完全な解決には至らなかったものの，一貫性を失うことなく，その後も大きな発展を遂げています．

確率論により，それまで扱えなかった現象に新しい観点から取り組むことができるようになりました．コンピューターの出現により科学計算の分

野が生まれ，シミュレーションで実験を代行できるようになりました．現在では産業のすべての分野において用いられています．

有名な未解決問題の話などについては，次回の課題とさせていただきます．

参考文献

[1] Jacques Lesourne, *Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994*, DUNOD, PARIS, 1994

[2] 堀井政信,「École polytechnique と *Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994*」,『津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 33 第 22 回数学史シンポジウム (2011) 』，津田塾大学 数学・計算機科学研究所，2012，p.224-232

[3] 堀井政信,「De la science à la technologie」,『津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 34 第 23 回数学史シンポジウム (2012)』，津田塾大学 数学・計算機科学研究所，2013，p.427-433

[4] 堀井政信,「L'après-guerre : un renouveau de l'enseignement et de la recherche à Polytechnique」,『津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 35 第 24 回数学史シンポジウム (2013)』，津田塾大学 数学・計算機科学研究所，2014，p.59-65

[5] 堀井政信,「ヒルベルトと非ユークリッド幾何学」,『津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 32 第 21 回数学史シンポジウム (2010)』，津田塾大学 数学・計算機科学研究所，2011，p.264-271

[6] 『幾何学基礎論』，D. ヒルベルト著，中村幸四郎訳，筑摩書房ちくま学芸文庫，2005 年，p.5-6

[7] 『ヒルベルト 幾何学の基礎，クライン エルランゲン・プログラム』D.Hilbert,F.Klein 著，寺阪英孝・大西正男訳・解説，共立出版，1970 年，p.396

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

オイラー関数の歴史と現在

飯高 茂

平成 27 年 11 月 12 日

1 オイラー関数の歴史

L.E.Dickson 著の The history of Theory of Numbers I,1919/20(Chelsea Publishing Company 版 1992) の第 1 章を参考にしてオイラー関数の歴史について書いて簡単にふれる.

オイラー関数は Leonhard Euler によって 1763 年に導入された. 導入の動機はフェルマーの小定理を非素数の場合に拡張することであった.

ただし, 記号 $\varphi(n)$ は Gauss の Disquisitiones Arithmeticae で初めて使われ広まった.

$\varphi(n)$ は Euler's phi function と呼ばれる.

1879 年に J. J. Sylvester が totient という言い方を導入しそのため, Euler's totient function と呼ばれることもある.

n の cototient は $n-\varphi(n)$ で定義され, これは 1 以上で,1 になるのは n が素数の場合だけである.

2 高次オイラー関数

2015 年に都内の私立高校 2 年生の三谷樹さんがはじめて高次オイラー関数の公式を見出した. 次のその紹介を行う.

自然数 n を素因数分解して

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$$

とおく.

集合 $S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ について n の素因子 p に対して p の倍数になる S_n の元の集合を $S_n(p)$ で表す.

$S_n(p) = pS_{\frac{n}{p}}$ と書くことができる.

たとえば

$n=6, p=2$ のとき $S_3 = \{1,2,3\}, S_6(2) = 2 * S_3 = 2\{1,2,3\} = \{2, 4.6\}$.

$n=6, p=3$ のとき $S_2 = \{1,2\}, S(_6 3) = 3 * S_2 = 3\{1,2\} = \{3,6\}$.

2.1 オイラー関数

$W_n = S_n - \cup_{j=1}^s S_n(p_j)$ は $a < n$ かつ a, n:互いに素な a の集合である.
その個数を $\varphi(n)$ と書く. これがオイラー関数である.
S_n の部分集合 T についてその元の個数を $|T|$ で示すと $|S_n(p_j)| = \frac{n}{p_j}, |S_n(p_j p_k)| = \frac{n}{p_j p_k}, \cdots$ が成り立つ.

2.2 包含関係の公式

一般に集合 S の部分集合 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ について

$$| \cup_{j=1}^s A_j| = \sum_{j=1}^s |A_j| - \sum_{j<k}^s |A_j \cap A_k| + \cdots$$

証明は s についての数学的帰納法でできる.

2.3 オイラー関数の表示式

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= |W_n| \\
&= |S_n - \cup_{j=1}^s S_n(p_j)| \\
&= |S_n| - | \cup_{j=1}^s S_n(p_j)| \\
&= n - \sum_{j=1}^s |S_n(p_j)| + \sum_{j<k}^s |S_n(p_j p_k)| - \cdots \\
&= n - (n/p_1 + n/p_2 + \cdots + n/p_s) + n/(p_1 p_2) + \cdots + n/(p_{s-1} p_s) - \cdots \\
&= n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \cdots (1 - 1/p_s).
\end{aligned}$$

と書ける.
そこで $A = (1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \cdots (1 - 1/p_s)$ とおくと

$$\varphi(n) = nA.$$

2.4 和の場合

$a < n$ かつ n と互いに素な a の和を $\psi(n)$ と書き, S_n の部分集合 T についてその元の和を $|T|_1$ で示すと

$$|S_n|_1 = \frac{n(n+1)}{2}, |S_n(p)|_1 = p\frac{n/p(n/p+1)}{2} = \frac{n^2}{2p} + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(\frac{n}{p} + 1).$$

$0 = (1-1)^s = 1 - s + s(s-1)/2 - s(s-1)(s-2)/6 + \cdots$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
\psi(n) &= |S_n - \cup_{j=1}^s S_n(p_j)|_1 \\
&= |S_n|_1 - |\cup_{j=1}^s S_n(p_j)|_1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{j=1}^s |S_n(p_j)|_1 + \sum_{j<k}^s |S_n(p_j p_k)|_1 - \cdots \\
&= \frac{n}{2}(n+1-n\sum_{j=1}^s \frac{1}{p_j} - s + n\sum_{j,k}\frac{1}{p_j p_j} + \frac{s(s-1)}{2} - \cdots) \\
&= \frac{n}{2}(nA) \\
&= \frac{n\varphi(n)}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\psi(n) = \frac{n\varphi(n)}{2}.
$$

これは Wikipedia の英語版に出ている公式である.

2.5 平方和

平方和について考える. $a < n$ かつ n と互いに素な a の平方和を $\psi^{(2)}(n)$ と書く. 一般に部分集合 T についてその元の平方和を $|T|_2$ で示すと

$$
|S_n|_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n}{6}(3n+2n^2+1), |S_n(p_j)|_2 = \frac{n}{6}(3n + \frac{2n^2}{p_j} + p_j)
$$

$$
\begin{aligned}
\psi^{(2)}(n) &= |S_n - \cup_{j=1}^s S_n(p_j)|_2 \\
&= |S_n|_2 - |\cup_{j=1}^s S_n(p_j)|_2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \sum_{j=1}^s |S_n(p_j)|_2 + \sum_{j<k}^s |S_n(p_j p_k)|_2 + \cdots \\
&= \frac{n}{6}(3n+2n^2+1-(3ns+2n^2\sum_{j=1}^s\frac{1}{p_j}+\sum_{j=1}^s p_j) \\
&+ (3n\frac{s(s-1)}{2} + 2n^2\sum_{j,k}\frac{1}{p_j p_k} + \sum_{j,k} p_j p_k)\cdots) \\
&= \frac{n}{6}(2n^2+1-(2n^2\sum_{j=1}^s\frac{1}{p_j}+\sum_{j=1}^s p_j)+(2n^2\sum_{j,k}\frac{1}{p_j p_k}+\sum_{j,k}p_j p_k)\cdots) \\
&= \frac{n}{6}(2n^2 A + B).
\end{aligned}
$$

ここで $B=(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_s)$ とおいた．よって

$$\psi^{(2)}(n)=\frac{n}{6}(2n^2A+B).$$

2.6 n の根基

n の根基 $\mathrm{rad}(n)=p_1p_2\cdots p_s$ を用いると，
$\frac{B}{\mathrm{rad}(n)}=(-1)^sA=\frac{\varphi(n)}{n}$ が成り立つ．

$$\frac{B}{\mathrm{rad}(n)}=(1/p_1-1)(1/p_2-1)\cdots(1/p_s-1)=(-1)^sA.$$

$$nB=\mathrm{rad}(n)(-1)^snA=\mathrm{rad}(n)(-1)^s\varphi(n).$$

$$\psi^{(2)}(n)=\frac{1}{6}(2n^2\varphi(n)+nB)=\frac{\varphi(n)}{6}(2n^2+(-1)^s\mathrm{rad}(n)).$$

abc 予想の定式化で登場した n の根基がここにも出てきた．

$$\psi^{(2)}(n)=\frac{\varphi(n)}{6}(2n^2+(-1)^s\mathrm{rad}(n))$$

これは広尾学園の高校生三谷樹さんがはじめて見出した公式で簡明な美しい式である．私はとても感心した．

2.7 立方和

三谷さんは立方和についても公式を与えた．
$a<n$ かつ n と互いに素な a の立方和を $\psi^{(3)}(n)$ と書く．
T についてその元の立方和を $|T|_3$ で示すと
$|S_n|_3=\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$ が成り立ち $|S_n(p_j)|_3=\frac{n^2}{4}(2n+\frac{n^2}{p_j}+p_j)$．

$$\begin{aligned}\psi^{(3)}(n)&=|S_n-\cup_{j=1}^sS_n(p_j)|_3\\&=|S_n|_3-|\cup_{j=1}^sS_n(p_j)|_3\\&=\frac{n^2}{4}(n^2+2n+1-\sum_{j=1}^s(\frac{n^2}{p_j}+2n+p_j)-\sum_{j,L}^s(\frac{n^2}{p_jp_L}+2n+p_jp_L))\cdots\\&=\frac{n^2}{4}(n^2A+B).\\&=\frac{n\varphi(n)}{4}(n^2+(-1)^s\mathrm{rad}(n)).\end{aligned}$$

よって

$$\psi^{(3)}(n) = \frac{n\varphi(n)}{4}(n^2 + (-1)^s \mathrm{rad}(n)).$$

このようにしてやり方がわかると順調に次数をあげていくらでも調べることができる．それでは, m 乗和についてはどうなるか．ここでベルヌーイ数が出てくる．

2.8 m 乗和 の公式

集合 $S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ とおく．S_n の部分集合 T についてその元の m 乗和を $|T|_m$ で示す．

$$S_m(n) = |S|_m = \sum_{k=1}^{n} k^m = 1 + 2^m + \cdots + n^m$$

とおく．$S_m(n)$ の式はベルヌーイ数 B_k を用いると表すことができる．

3 ベルヌーイ数 B_k

一般に数列 $\{c_n\}$ について $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ を母関数,$h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!} x^j$ を指数型母関数という．

$\dfrac{t}{e^t - 1}$ を指数型母関数とするときの展開係数としてベルヌーイ数 B_k が定義される．すなわち

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

以後も指数型母関数がいろいろ使われる．

ベルヌーイ数 B_k を一般に明示的に与えることは困難だが簡単な場合は次のようになる．

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0.$$

($B_1 = \frac{1}{2}$ とする場合もあり, この場合 m 乗和 の公式は微妙に違う)
$k > 1$, 奇数なら $B_k = 0$.

$$B_8 = \frac{-1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6},$$

$$B_{16} = -\frac{3617}{510}, B_{18} = \frac{43867}{798}, B_{20} = -\frac{174611}{330}.$$

3.1 B_k の諸性質

1. 漸化式

$$B_k = -\sum_{q=0}^{k-1} \binom{k}{q} \frac{B_q}{(k-q+1)}$$

2. ベルヌーイ多項式

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!}.$$

3.

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} B_{2n} \frac{(2\pi)^{2n}}{2 \times (2n)!}.$$

これより $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$(Euler) など

4.

$$\zeta(-n) = \frac{-B_{n+1}}{n+1}, n > 0$$

$n = 2k$ なら $B_{n+1} = 0$. よって $\zeta(-2k) = 0 : -2k$ をゼータ関数の自明な零点という.
$n = 1$ とすると $\sum_{k=1}^{\infty} = -\frac{1}{12}$ (Euler) これは最近物理で人気のある式.

3.2 $B_{2k+1} = 0$ の証明

$\dfrac{t}{e^t-1} = 1 - \dfrac{t}{2} + F(t)$ により　$F(t)$ を定義する.
$c_k = B_k/k!$ を使うと

$$F(t) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k t^k.$$

これが偶関数になることを以下で確認する.

$$F(t) = \frac{t}{e^t-1} - 1 + \frac{t}{2} = \frac{2 + t + (t-2)e^t}{2(e^t-1)}$$

により

$$F(-t) = \frac{2 - t - (t+2)e^{-t}}{2(e^{-t}-1)} = \frac{(2-t)e^t - (t+2)}{2(1-e^t)}.$$

$X = e^t - 1$ とおけば $X + 1 = e^t$ によって,

$$\frac{(2-t)e^t - (t+2)}{2(1-e^t)} = \frac{(2-t)(X+1) - (t+2)}{-2X} = \frac{t}{2} - 1 + \frac{t}{X} = F(t).$$

$F(-t) = F(t)$ になり $F(t)$ が偶関数になる. よって $c_{2k+1} = 0$. したがって,$c_{2k+1} = B_{2k+1}/(2k+1)! = 0$

4　べき和 の公式

$a_{k,m}=(-1)^k\binom{m+1}{k}B_k$ を定める.
たとえば

$$a_{0,m}=1, a_{1,m}=\frac{m+1}{2}, a_{2,m}=\frac{m(m+1)}{12}, a_{3,m}=0, a_{4,m}=-\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{24\times 30},$$

m 乗和 $S_m(n)=|S_n|_m=\sum_{k=1}^{n}k^m$ は n について $m+1$ 次式であり次の公式が成り立つ.

$$S_m(n)=\frac{n}{m+1}\sum_{k=0}^{m}a_{k,m}n^{m-k}.$$

はじめの数項は次のようになる.

$$S_m(n)=\frac{n}{m+1}(n^m+\frac{m+1}{2}n^{m-1}+\frac{m(m+1)}{12}n^{m-2}-\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{24\times 30}n^{m-4}+\cdots$$

$m=3$ のとき検算

$$S_3(n)=\frac{n}{4}(n^3+2n^2+n)=\frac{n^2}{4}(n+1)^2.$$

4.1　べき和公式の証明

以下英語版 Wikipedia を参考に証明を与える.
$\{B_j\}$ について その指数型母関数は簡単になる.

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{j=0}^{\infty}B_j\frac{z^j}{j!}$$

これより

$$\frac{1}{e^z-1}=\sum_{j=0}^{\infty}B_j\frac{z^{j-1}}{j!}$$

m 乗和 $S_m(n)$ について その指数型母関数を $G(z,n)$ とおくとき

$$G(z,n)=\sum_{m=0}^{\infty}S_m(n)\frac{z^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}k^m\frac{z^m}{m!}$$

和の順序を入れ替えて

$$G(z,n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(kz)^m}{m!}=\sum_{k=1}^{n}e^{kz}.$$

$W=e^z$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n} e^{kz} = \sum_{k=1}^{n} W^k = \sum_{k=0}^{n} W^k - 1 = \frac{W^{n+1}-1}{W-1} - 1 = W \times \frac{W^n - 1}{W-1}$$

これより

$$G(z,n) = W \times \frac{W^n-1}{W-1} = \frac{e^{nz}-1}{1-e^{-z}} = (e^{nz}-1) \times \frac{1}{1-e^{-z}}.$$

$e^{nz}-1 = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!}(nz)^q$ と $\frac{1}{1-e^{-z}} = -\sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{(-z)^{j-1}}{j!}$ と
を代入すると

$$\begin{aligned} G(z,n) &= -\sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{(-z)^{j-1}}{j!} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!}(nz)^q \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} B_j (-1)^j \sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^{q+j-1} n^q}{j! q!}. \end{aligned}$$

ここで $m = q + j - 1$ とおくとき $j = m + 1 - q \leq m$ により $m \geq j$.
q を m で置き換えて式を整理する:

$$\frac{B_j(-1)^j z^{q+j-1} n^q}{j! q!} = \frac{B_j (-1)^j z^m n^{m+1-j}}{j!(m+1-j)!}$$

$\binom{m+1}{j} = \frac{m!(m+1)}{(m+1-j)!j!}$ に注意すると

$$\frac{B_j(-1)^j z^m n^{m+1-j}}{j!(m+1-j)!} = B_j(-1)^j z^m n^{m+1-j} \binom{m+1}{j} \frac{1}{m!(m+1)}.$$

これを用いて $G(z,n)$ を求める.

$$\begin{aligned} G(z,n) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} B_j (-1)^j n^{m+1-j} \binom{m+1}{j} \right) \frac{z^m}{m!(m+1)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{n}{m+1} \sum_{j=0}^{m} B_j (-1)^j n^{m-j} \binom{m+1}{j} \right) \frac{z^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n}{m+1} \sum_{j=0}^{m} a_{j,m} n^{m-j} \frac{z^m}{m!} \end{aligned}$$

よって $G(z,n) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(n) \frac{z^m}{m!}$ により

$$S_m(n) = \frac{n}{m+1} \sum_{j=0}^{m} a_{j,m} n^{m-j}.$$

5　$\psi^{(m)}(n)$ の公式

n の素因子 $p = p_j$ について

$$|pS_n(\frac{n}{p})|_m = p^m \frac{n/p}{m+1}\sum_{k=0}^{m} a_{k,m}(n/p)^{m-k} = \frac{n}{m+1}\sum_{k=0}^{m} a_{k,m}n^{m-k}p^{k-1}$$

に注意すると，

$$|pS(\frac{n}{p})|_m = \frac{n}{m+1}\sum_{k=0}^{m} a_{k,m}n^{m-k}p^{k-1}$$

これを展開すると $a_{3,m} = 0$ によって

$$\frac{n}{m+1}(\frac{n^m}{p} + a_{1,m}n^{m-1} + pa_{2,m}n^{m-2} + p^3a_{4,m}n^{m-4}) + \cdots$$

n の素因子 $p = p_j, q = p_L$ について

$$|pqS_n(\frac{n}{pq})|_m = \frac{n}{m+1}\sum_{k=0}^{m} a_{k,m}n^{m-k}p^{k-1}q^{k-1}$$

$n = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_s^{e_s}$ について $\Gamma(r,n) = \prod_{j=1}^{s}(1-p_j^r)$ とおく.
強いて言えば, $\Gamma(-1,n) = \prod_{j=1}^{s}(1-1/p_j) = A$,$\Gamma(1,n) = B$.

$$\begin{aligned}
\psi^{(m)}(n) &= |S_n - \cup_{j=1}^{s} S_n(p_j)|_m \\
&= |S_n|_m - |\cup_{j=1}^{s} S_n(p_j)|_m \\
&= S_m(n) - \sum_{j=1}^{s}|S_n(p_j)|_m + \sum_{j<L}^{s}|S_n(p_jp_L)|_m + \cdots \\
&= \frac{n}{m+1}(\sum_{k=0}^{m} a_{k,m}n^{m-k} - \sum_{j=1}^{s}(\sum_{k=0}^{m} a_{k,m}n^{m-k}p_j^{k-1}) + \sum_{j<L}^{s}\sum_{k=0}^{m} a_{k,m}n^{m-k}p_j^{k-1}p_L^{k-1} + \cdots \\
&= \frac{n}{m+1}(An^m + a_{2,m}Bn^{m-2} + a_{4,m}\Gamma(3,n)n^{m-4} + a_{6,m}\Gamma(5,n)n^{m-6} + \cdots)
\end{aligned}$$

以上により,m 乗和についての高次オイラー関数の公式をえる (S.Iitaka).

$$\psi^{(m)}(n) = \frac{n}{m+1}(An^m + a_2Bn^{m-2} + a_{4,m}\Gamma(3,n)n^{m-4} + a_{6,m}\Gamma(5,n)n^{m-6} + \cdots).$$

ここで $A = (1-1/p_1)(1-1/p_2)\cdots(1-1/p_s)$, $B = (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_s)$ とおいた.

$m = 5$ として検算
$a_{2,m} = \frac{m(m+1)}{12} = \frac{5}{2}, a_{4,m} = -\frac{m(m+1)(m-1)(m-2)}{30} = -\frac{1}{2}$ により

$$\psi^{(5)}(n) = \frac{n^2}{12}(2\varphi(n)n^3 + 5Bn^2 - \Gamma(3,n)).$$

$$\psi^{(5)}(n) = \frac{n^2}{12}(2\varphi(n)n^3 + (-1)^s 5\varphi(n)\mathrm{rad}(n)n - \Gamma(3,n)).$$

$m=6$ とすると新しい公式をえる.
$a_{2,m} = \frac{m(m+1)}{12} = \frac{7}{2}, a_{4,m} = \frac{m(m+1)(m-1)(m-2)}{4!}B_4 = -\frac{7}{6}$,
$a_{6,m} = \frac{m(m+1)(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{6!}B_4 = \frac{1}{6}$ により

$$\psi^{(6)}(n) = \frac{n}{7}(An^6 + a_{2,m}Bn^4 + a_{4,m}\Gamma(3,n)n^2 + a_{6,m}\Gamma(5,n)).$$

$$\psi^{(6)}(n) = \frac{n}{7}(\varphi(n)n^5 + (-1)^s\frac{7}{2}\varphi(n)\mathrm{rad}(n)n^3 - \frac{7}{6}\Gamma(3,n)n^2 + \frac{1}{6}\Gamma(5,n)).$$

6 完全数

a を自然数とするときその約数の和を $\sigma(a)$ と書く.

$\sigma(a) = 2a$ を満たす数を 完全数といい, 6,28,496,8128 などがあり古代の数学者ユークリッドによって考えられた.

これらを素因数分解すると $6 = 2*(2^2-1), 28 = 2^2*(2^3-1), 496 = 2^4*(2^5-1), 8128 = 2^6*(2^7-1)$ などとなる.

$a = 2^e q(q = 2^{e+1}-1:$ 素数) と書かれる数は完全数になることはユークリッドによって知られていた. そこでこれらをユークリッドの完全数という.

7 究極の完全数の探究

P を素数とし $\sigma(P^e)$ が素数 q のとき $a = P^e q$ を底が P の **究極の完全数**と呼ぼう.

このとき $q = \frac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}$ となる. 言葉ができると諒解しやすくまた研究したくなるという効果がある.

究極の完全数を整数 m だけ平行移動しよう.

$q = \frac{P^{e+1}-1}{\overline{P}} + m$ は素数として $a = P^e q$ を m だけ平行移動した底が P の完全数と呼ぶ.

平行移動も許した究極の完全数の満たす方程式を求めよう.

$q = \frac{P^{e+1}-1}{\overline{P}} + m$ であって

$$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(P^e q) = (P^{e+1}-1)(q+1)$$

になり, $q+1 = \frac{P^{e+1}+P-2}{\overline{P}} + m$ を用いて次のように式変形する.

$$
\begin{aligned}
\sigma(a) &= \frac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}(q+1) \\
&= (q-m)(q+1) \\
&= q(q+1) - m(q+1) \\
&= \frac{q}{\overline{P}}(P^{e+1}+P-2) + mq - m(q+1) \\
&= \frac{Pa+q(P-2)}{\overline{P}} - m.
\end{aligned}
$$

これより $q = \mathrm{Maxp}(a)$ を用いて

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\mathrm{Maxp}(a) - m(P-1). \tag{1}$$

これを m 平行移動した究極の完全数の基本方程式という.
例えば $P=2$ なら

$$\sigma(a) = 2a - m.$$

$P=2$ に限って不愉快な $\mathrm{Maxp}(a)$ が消えた.
$P=3$ なら

$$2\sigma(a) = 3a + \mathrm{Maxp}(a) - 2m.$$

m 平行移動した究極の完全数の基本方程式を解くことは究極の課題である. この解決は一般的にはできるはずがない.

8 φ 完全数

究極の完全数の定義を参考にユークリッド関数の代わりにオイラー関数を使って究極の完全数に類似した概念を定義しよう.

素数 $P, e \geq 2$ に対して $\varphi(P^e)$ は合成数なので完全数の定義をそのままは使えない.

そこで, 1 を加えて $\varphi(P^e)+1$ が素数 q になるとき $a = P^e q$ をもって P を底とする **φ 完全数**と定義する.

φ 完全数は次の方程式を持つ:

$$P\varphi(a) = \overline{P}a - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}.$$

これはとくに微小解 ($a = Pq, P > q : q$: 素数) をもち, 微小解は φ 完全数ではない.

$P=2$ の場合は微小解がない. この場合 φ 完全数の方程式を満たす解は φ 完全数に限ることが示される.

$P \geq 3$ の場合は φ 完全数の方程式を満たす解は微小解または φ 完全数に限ることが示される.

9 P を底とする φ 完全数の例

$P=2$ なら $q=2^{e-1}+1$ が素数の場合なので, これらはフェルマー素数である.

9.1 2 を底とするとき

表 1: 2 を底とする φ 完全数

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	12	2^2*3	4
3	40	2^3*5	16
5	544	2^5*17	256
9	131584	2^9*257	65536
17	8590065664	$2^{17}*65537$	4294967296

$e>4$ なら $q\equiv 7; a\equiv 4\ ; \varphi(a)\equiv 6 \bmod 10$ が成り立つ.

5 つのフェルマー素数に応じて 5 つの φ 完全数ができた. これらはフェルマー φ 完全数 と呼ぶこともできる. 後で本物の φ 完全数がでてくる.

9.2 3 を底とするとき

$$q=2*3^{e-1}+1, a=3^eq.$$

表 2: 3 を底とする φ 完全数

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	63	3^2*7	36
3	513	3^3*19	324
5	39609	3^5*163	26244
6	355023	3^6*487	236196
7	3190833	3^7*1459	2125764
10	2324581983	$3^{10}*39367$	1549681956
17	11118121262251209	$3^{17}*86093443$	7412080755407364
18	100063090585419903	$3^{18}*258280327$	66708726798666276

- $e\equiv 2 \bmod 4$ のとき $q\equiv 7, a\equiv 3 \bmod 10$.

- $e \equiv 1 \bmod 4$ のとき $q \equiv 3, a \equiv 9 \bmod 10$.
- $e \equiv 3 \bmod 4$ のとき $q \equiv 9, a \equiv 3 \bmod 10$.

10 φ 完全数の平行移動

m だけ平行移動した φ 完全数の定義は次の通り.

$\varphi(P^e)+1+m$ が素数 q になるとき $a = P^e q$ を (P を底とする) m だけ平行移動した φ 完全数の定義とする.

特にこれを満たす a を (φ, m) 完全数とも言う.

10.1 $[P = 2, m = 2]$

表 3: $P = 2, m = 2$

$e \bmod 4$	e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	2	20	$2^2 * 5$	8
3	3	56	$2^3 * 7$	24
0	4	176	$2^4 * 11$	80
1	5	608	$2^5 * 19$	288
3	7	8576	$2^7 * 67$	4224
0	8	33536	$2^8 * 131$	16640
1	13	33579008	$2^{13} * 4099$	16785408
0	16	2147680256	$2^{16} * 32771$	1073807360
1	17	8590327808	$2^{17} * 65539$	$--$
3	19	137440526336	$2^{19} * 262147$	$--$
1	29	144115189686468608	$2^{29} * 268435459$	$--$

$q = 2^{e-1} + 3$ が素数の場合である.

$e > 2$ のとき a の末尾 1 桁が 6,8 になっている.

11 φ 完全数の平行移動の方程式

$q=\varphi(P^e)+1+m$ が素数になるとき $a=P^eq$ とすると,

$$\begin{aligned}\varphi(a)=\varphi(P^eq)&=P^{e-1}\overline{P}\overline{q}\\&=P^e\overline{P}(q-1)/P\\&=P^eq\overline{P}/P-P^{e-1}\overline{P}\\&=\overline{P}a/P-(q-1-m).\end{aligned}$$

かくして $\mathrm{Maxp}(a)=q$ に注意し

$$\varphi(a)=\frac{\overline{P}}{P}a-\overline{\mathrm{Maxp}(a)}+m. \tag{2}$$

が得られた. 分母を払った次の式もよく使われる.

$$P\varphi(a)=\overline{P}a-P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}+Pm. \tag{3}$$

が得られた.

これが m だけ平行移動した φ 完全数の方程式 $(*)$ である.

φ 完全数の方程式 $(*)$ で定義された数は必ずしも φ 完全数になるわけではない.

φ 完全数においては $q=\varphi(p^e)+1+m$ が素数になると仮定されているので $1+m$ は p で割れない.

φ 完全数の方程式 $(*)$ 自身を扱うとき $1+m$ は p で割れない, などのことにこだわらない. 実際に $m=p-1$ の場合が重要な結果を与えるのである.

11.1 微小解

$m=0$ のとき $p=Maxp(a)$ とおくと $a=Pq(P>q)$ は

$$\varphi(a)=\frac{\overline{P}a}{P}-\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

の解になることは一般的に証明できる.

実際, $\varphi(a)=\overline{P}\overline{q}$, $\mathrm{Maxp}(a)=P$ によって

$$\frac{\overline{P}a}{P}-\overline{\mathrm{Maxp}(a)}=\overline{P}q-\overline{P}=\overline{P}\overline{q}=\varphi(a).$$

よって $\varphi(a)=\frac{\overline{P}a}{P}-\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$.

$m=0$ のときの解 $a=Pq(P>q)$ を微小解という. 微小解は φ 完全数の方程式 $(*)$ に特有の解である.

12 定理と証明

次の補題に注目する.

補題 1 $a>1$ が素数でないとき

$$a-\varphi(a)\geq Maxp(a)$$

Proof. $a=P^e,(e>1)$ のとき $\mathrm{Maxp}(a)=P$ なので
$a-\varphi(a)-P=P^{e-1}-P\geq 0$ となり正しい.

$s(a)\geq 2$ なら $\mathrm{Maxp}(a)=P$ とすれば $a=\alpha P^e(e>0,\mathrm{Maxp}(\alpha))<P)$ と書けて

$$\begin{aligned}
a-\varphi(a)&=\alpha P^e-\varphi(\alpha)P^{e-1}\overline{P}\\
&=P^{e-1}(\alpha P-\varphi(\alpha)\overline{P})\\
&=P^{e-1}(\alpha P-\varphi(\alpha)P+\varphi(\alpha))\\
&=P^{e-1}((\alpha-\varphi(\alpha))P+\varphi(\alpha))\\
&>P^{e-1}(P+\varphi(\alpha))\\
&>P^e\\
&\geq \mathrm{Maxp}(a).
\end{aligned}$$

定理 1 $m\geq 0$ のとき

$$P\varphi(a)=\overline{P}a+Pm-P\overline{Maxp(a)}$$

を満たす解は

1. $m=0$ のとき微小解 $a=Pq(P>q)$.
2. $m=P-1$ のとの微小解 $a=P^e$.
3. $e>1$ のとき a は $(\varphi,m)-$ 完全数
4. $e=1$ のとき $a=Pq$, $q=P+m$ は素数.

Proof.
a は定義式より P の倍数なので $a=P^eL$　(P,L は互いに素)　と書ける. よって次式を満たす:

$$P\varphi(a)=P^e\overline{P}\varphi(L),\overline{P}a=P^e\overline{P}L.$$

(i) $L=1$ のとき $a=P^e$, $P\varphi(a)=P^e\overline{P}=\overline{P}a,\mathrm{Maxp}(a)=P$ なので

$$P\varphi(a)=P^e\overline{P},\overline{P}a+Pm-P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}=\overline{P}P^e+Pm-P\overline{P}$$

により $Pm - P\overline{P} = 0$. P で除して,$m = P-1, a = P^e$.

(ii) $L \geq 2$ のとき $a = P^e L$.
$P\varphi(a) = P^e \overline{P}\varphi(L), \overline{P}a = P^e\overline{P}L$ なので

$$P\varphi(a) - \overline{P}a = P^e\overline{P}(L - \varphi(L)) = Pm - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}.$$

P で除して

$$\overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P}(L - \varphi(L)) + m.$$

(1) L が素数でないとき.
$L - \varphi(L) \geq \mathrm{Maxp}(L)$ を用いて

$$\overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P}(L - \varphi(L)) + m \geq P^{e-1}\overline{P}(\mathrm{Maxp}(L)).$$

(a) $P > \mathrm{Maxp}(L)$ の場合,$\mathrm{Maxp}(a) = P, \mathrm{Maxp}(L) \geq 2$.

$$\overline{P} = P - 1 = \overline{\mathrm{Maxp}(a)} \geq P^{e-1}\overline{P}(\mathrm{Maxp}(L)) \geq 2\overline{P}.$$

(b) $P < \mathrm{Maxp}(L)$ の場合,$\mathrm{Maxp}(a) = \mathrm{Maxp}(L) \geq 2$.

$$\overline{\mathrm{Maxp}(L)} = \overline{\mathrm{Maxp}(a)} \geq P^{e-1}\overline{P}(\mathrm{Maxp}(L)) \geq \mathrm{Maxp}(L).$$

かくて矛盾.
(2) L が素数 q のとき.

$$\overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P}(L - \varphi(L)) + m = P^{e-1}\overline{P}(q - \varphi(q)) + m \geq P^{e-1}\overline{P}.$$

$a = P^e q$ なので $\mathrm{Maxp}(a) = P$ または $\mathrm{Maxp}(a) = \mathrm{Maxp}(q) = q$.

(a) $\mathrm{Maxp}(a) = P$ とすると,

$$\overline{P} = \overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P} + m.$$

これより, $e = 1, m = 0, P > q$. $a = Pq$ は微小解.

(b) $\mathrm{Maxp}(a) = q$ とすると,

$$\overline{q} = \overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P} + m.$$

これより, $q = P^{e-1}\overline{P} + 1 + m$. $e > 1$ のとき a は $(\varphi, m)-$ 完全数.
$e = 1$ のとき $q = P + m, a = Pq$.

m 平行移動した究極の完全数の基本方程式を解くことはできるはずがない.

しかし,φ 完全数の場合 $m \geq 0$ のとき

$$P\varphi(a) = \overline{P}a + Pm - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

を満たす解は完全に決定できた. これはひとつの奇跡であろう.

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

48

津田塾大学数学史シンポジウム　2015 年 10 月 10 日 (土)

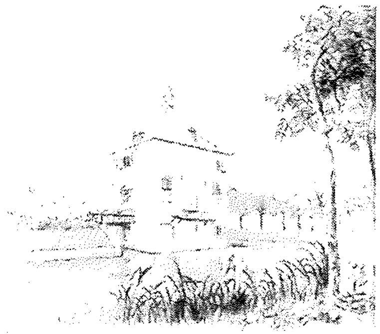
懸垂線が放物線と異なることの証明

ホイヘンスよりメルセンヌへ 1646 年 11 月

埼玉県立坂戸高等学校　田沼晴彦

ガリレオは『新科学対話』(1638) の中で、“懸垂曲線は放物線によく似た形になる” と書いている [1]。しかしその 8 年後の 1646 年 11 月、まだ 17 歳だったクリスティアン・ホイヘンス (1629-1695) は、この 2 つの曲線が異なることの証明をメルセンヌへ書き送っていた [2]。常々この逸話の詳細を知りたいと思っていたが、最近 Bukowski の論文 [5][6] を Web 上で見つけ、その証明の背景をホイヘンスのアーカイブ ‘*Oeuvres complètes*’ その他の資料から調べることができた。そこからは、17 世紀中頃の力学と幾何学の流れと若いホイヘンスの方法の関わりが明らかになってくる。

1　懸垂線問題の歴史



ホイヘンスが研究に従事した家
ホイヘンス自身のデッサン

ガリレオの主張は、当時の懸垂線の理解を代弁していた。それは、デカルトがベークマンへ「それは円錐曲線となる」と書き、ジラールは、懸垂線と放物線が一致することを証明したと主張していた[*1]事実からも理解できる。

1646 年ホイヘンスは、懸垂線と放物線が一致しない証明をメルセンヌに書き送ったが、それは 2 年後のメルセンヌの死により広く知られることはなかった。その後、1669 年にはドイツのユンギウスが、また 1673 年にはフランスのパルディエ[*2]が、それぞれ独立してこの 2 曲線の不一致を主張している。さらに 1690 年この懸垂線は、Acta Eruditorum 誌のヤコブ・ベルヌーイの挑戦問題へとつながっていった[*3]。

懸垂線は、円錐曲線でも有限次数の曲線でもない力学的 (超越的) 曲線であり、デカルトの代数学の範疇にはない。それゆえその決定には、微積分法を待たねばならなかった。そのような曲線に対し 1646 年という早い段階で、ホイヘンスはその違いを明らかにした。そこからは、力学と幾何学から極限を考察する彼のスタイルの萌芽を見ることができる。

2　ホイヘンスよりメルセンヌへ

ホイヘンスは、家庭教育の後ライデン大学でスホーテンに学び、ステヴィンやデカルトの理解からガリレオとは独立して、落体法則を証明していた[*4]。そのことを父コンスタンティンは文通相手のメルセンヌに自慢し[*5]、メルセンヌとホイヘンスの交流は始まった。

若いホイヘンスは、どのようにしてこの懸垂線問題に出会い研究しようとしたのだろうか。Yoder は ‘*Unrolling Time*[3]’ で、彼がステヴィンの著作のジラールの注釈を読み、実際に懸垂鎖と放物線を比較しその違いに気づくこができたと書いている。

1646 年 10 月 13 日、メルセンヌはホイヘンスに落体法則発見の驚きを伝えその詳細を求めてきた。10 月 28 日の返信の最後で、ホイヘンスは懸垂線の証明をメルセンヌへ切り出している。

---

*1 フランスの数学者 Albert Girard(1595-1632)。ステヴィンの著作の出版し、その注釈で主張していた。
*2 パルディエの方法は、1690 年の懸垂線の決定問題でライプニッツらが利用している。
*3 1691 年 6 月の Acta 誌上に、ライプニッツ、ホイヘンスそしてヨハン・ベルヌーイの 3 つの解答が掲載され、この曲線が満たす微分方程式が導かれその作図方法が示された。双曲余弦関数が導かれたのではない。
*4 ホイヘンスは、まだガリレオの『新科学対話』の出版を知らなかった。
*5 クリスティアンの投射体の議論を読んだメルセンヌは、「ご子息は、新しいアルキメデスになるでしょう」と褒め、父コンスタンティンを喜ばせた。その後コンスタンティンはクリスティアンを「私の小さなアルキメデス」と呼んでいる。

つぎの手紙で、吊るされたロープがつくる曲線が放物線でないことの証明を送ります。大切なのは、重力の下で数学的なロープは別の曲線を作ることです。私は、最近その証明を発見しました。

11月16日、メルセンヌは少し興奮気味に返信している。

神のご加護によるものです。ガリレオの予想と異なるだけでなく、彼を凌ぐ発見です。早くその証明を見たいものです。

その後の手紙で、ホイヘンスはその発見を書き送った。

一昨日ハーグに戻り、あなたからの親切な手紙を受け取りました。あなたの音楽の問題 (弦の張力と音程) については、少し時間をください。今は鎖の問題に集中しましょう。

ホイヘンスの手紙は、すぐに懸垂線の議論となる。彼の手紙の下書き[*6]を読んでみよう。それは最初に力学的な前提から始められている。

1. 自由に曲がるロープは、地球の中心へ向かう重力の影響を受けている。その力は、ロープに平行に働いている。
2. C, D で固定されたロープ $CABD$ の2箇所以上の A, B に錘が吊り下げられているとき、その形は1つに定まる。
3. ロープ ADF にいくつかの錘が下げられているときの形は、支点を B, E に変えても C, D の位置そしてロープの形も変わらない。
4. ロープ $ABCDE$ の B, C, D に錘が吊るされている。錘 G の代わりに D で支えてもその形は変わらない。そして、点 D から手 P が離れ D の位置を変化させないように、手 Q が端を (適切な位置)E で支えることはできる。

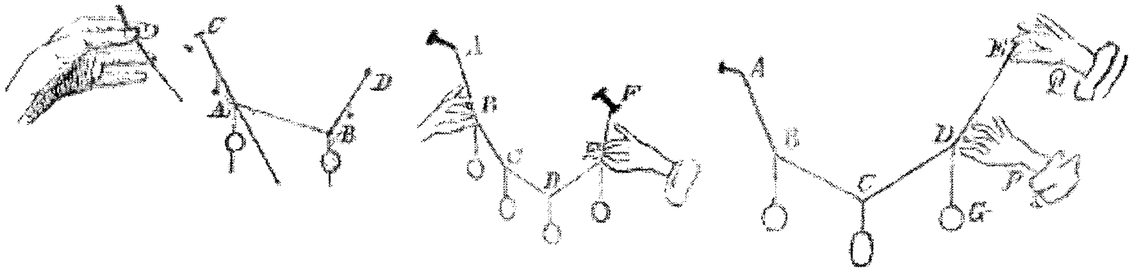


図1　ホイヘンスの描画

資料とした '*Oeuvres Complètes*[2]' には、4つの前提に続いて命題5から命題12が書かれてある。ここでは証明の骨格となる命題5、命題6および命題8を中心に読んでいく。ただしそれらの命題は証明なしで記されているため、ここでは簡単な力学証明とアポロニオス幾何学との関係も加えていくことになる。

2.1　重さのない糸に等しい重さのおもりが架かっている

命題5においてホイヘンスは (図2)、等しい重さのおもりをに重さのない糸の支点 A, B, C, D から吊るす。これらの支点の間隔は限定していない。

命題5

おもり S, R, P, Q が点 A, B, C, D から吊るされているとする。直線 MD と BC の交点を L とするならば、それはおもり P と Q の懸垂直径上にある。また直線 AB と DC の交点を K とするならば、それはおもり R と P の懸垂直径上にある。このように残りおもりについても同様となる。

ここで懸垂直径 '*au diametre pendule des gravitez*' とは、各おもりの支点の中点を通る鉛直線を指している。すなわち各区間の糸の延長、例えば BC と MD は CD 間の中点を通る鉛直線上に交点を持つとホイヘンスは主張して

[*6] アーカイブには、メルセンヌに送られた手紙ではなくその下書きが保存されている。

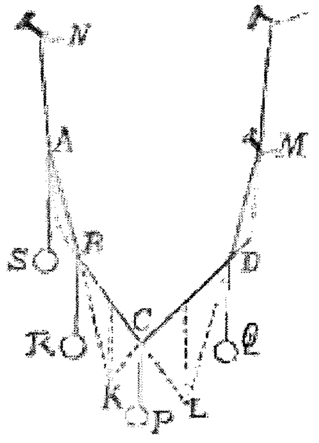


図 2　ホイヘンスの命題 5 の描画

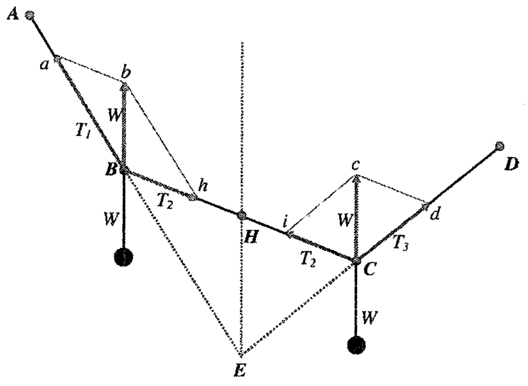


図 3

いる。ただ証明は書かれていない。彼が学んだステヴィンの原理と糸の 2 点の張力の釣り合いから導いたことは想像できる[*7]。ここでは、簡単な証明を付しておく。

証明

2 点 B, C に吊るされたおもり W および張力 T_1, T_2, T_3 を図 3 のようにとる。釣り合っているため、それぞれの点 B, C において力の平行四辺形 $\square aBhb$ および $\square iCdc$ が成り立つ。

$$\triangle Bhb \sim \triangle BEH \quad \rightarrow \quad W : T_2 = EH : BH$$

$$\triangle Cci \sim \triangle ECH \quad \rightarrow \quad W : T_2 = EH : CH$$

$$\rightarrow \quad EH : BH = EH : CH \qquad \therefore\ \underline{BH = CH}$$

この命題は、等しいおもりを 任意の間隔 で吊るした議論となっている。この間隔の任意性が、水平方向に一定間隔でおもりを吊るした場合に放物線となると主張する命題 12 に利用されていく。

2.2　等しい長さと重さの棒が連結した鎖

続いてホイヘンスは、糸に吊るされた錘から、等しい長さと重さ の棒が連結した鎖の場合へと議論を進めていく[*8]。

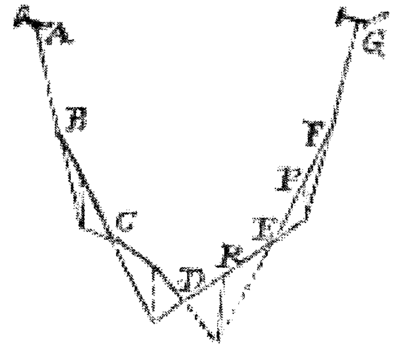


図 4　ホイヘンスのスケッチ（命題 6）

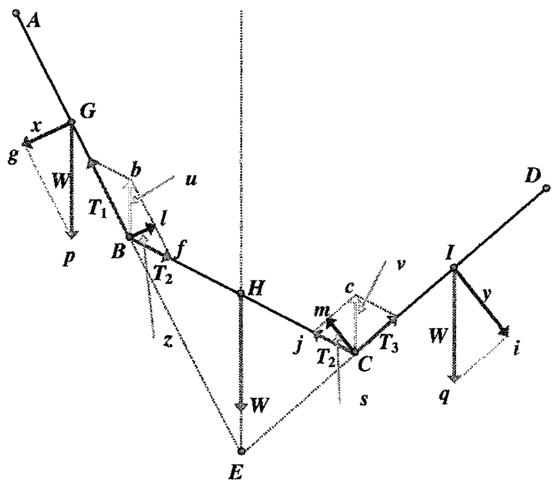


図 5　命題 6 の証明

[*7] Bukowski の論文 [6] によれば、'*Les Oeuvres mathématiques de Simon Stevin*'pp.454-455 に同様な議論がある。

[*8] ここで彼の下書きは、議論が込み入ってきたためだろうか、フランス語からラテン語に切り替えられている。

命題 6

同様な方法により、(鎖)AB, BC, CD など等しい重さの部分の延長線の交点は、例えば CD と FE の場合、それらの懸垂直径上すなわち DE の中点の鉛直線上で交わる。それゆえ、すべての部分の重さが等しいならば、RE, EP そして PF も等しくなる。

この命題 6 も命題 5 と同様、連続した節点 A, B, C, D において、直線 AB と CD の交点 E が BC の中点を通る鉛直線上にあると主張している。

この証明も、ホイヘンスの下書きでは示されていない。簡単な証明はつぎのようになるだろう (図 5)。

証明

この剛体系はつり合っている。ならば棒 BC に働く力のつり合いより

$$T_1, T_2\text{の上向き合力} + T_2, T_3\text{の上向き合力} = W \quad \rightarrow \quad u + v = W$$

棒の長さを $2L$ とすれば、A を中心とするてこの原理より

$$Lx = 2Lz \quad \rightarrow \quad x = 2z$$

また $\triangle Ggp \sim \triangle Blb$ より

$$W : x = u : z \quad \rightarrow \quad Wz = xu = 2zu \quad \rightarrow \quad W = 2u$$

同様に、D を中心とする梃の原理から、$W = 2v$ を得る。よって、

$$u = v$$

となる。また、

$$\triangle Bbf \sim \triangle HBE \quad \rightarrow \quad u : T_2 = HE : HB$$
$$\triangle Ccj \sim \triangle HEC \quad \rightarrow \quad v : T_2 = HE : HC$$
$$u = v \quad \rightarrow \quad \therefore\ HB = HC$$

つぎの命題 7 では、このような等しいおもりや棒からなる形は、前提 4 よりそれが唯一であると主張している。

命題 7

等しい重さのいくつかの錘または棒が、例えば BC, ED の延長した交点がそれらの間の CD の重心となるようにつながれているとする。このとき、それは可能な状態であり、そのように吊るされると主張する。

2.3 等しい長さと重さの棒からなる鎖は放物線とは異なる

ホイヘンスはつぎの命題 8 において、命題 6 の懸垂鎖が放物線と異なることを明らかにする。それは懸垂鎖上の 3 点から決定される放物線上に、つぎの懸垂鎖の接続点がないことを主張し、その根拠を明らかにした。

命題 8

懸垂鎖 $HGABCDK$ は、等しい長さと重さと形を持つ棒から成り立っている。このとき、接続点 G, A, B, C, D, K は同時に同じ放物線上にあることはない、と主張できる。

証明

命題 6 より、このような懸垂鎖において、H を BC の、P を CD のそれぞれの中点とすれば、点 A, B, C で決まる放物線 $RABCF$ 上に点 D その他の鎖の点があることはないと主張できる。なぜなら、ECD を延長し、$FC : CE = AB : BE$ とし AF を結ぶ。ならば BC に平行となり、EL により AF が L で半分に分けられる。ならば、F は A, B, C を通る放物線上にある。なぜなら EL は B の直径となっている。それは D の直径ではない。もしそうであるならば、直線 $ECDF$ は放物線と 3 点で交わることになるだろう。それは矛盾し、D は F と一致しなければならない。しかしそれは CE が BE より大きいため、FC すなわち DC は AB より大きいことになり、不可能である。

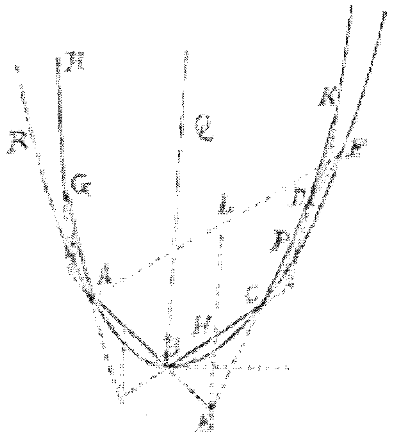


図 6　ホイヘンスのスケッチ（命題 8）

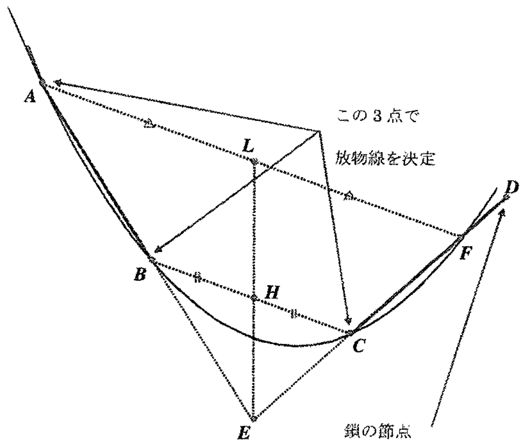


図 7　命題 8

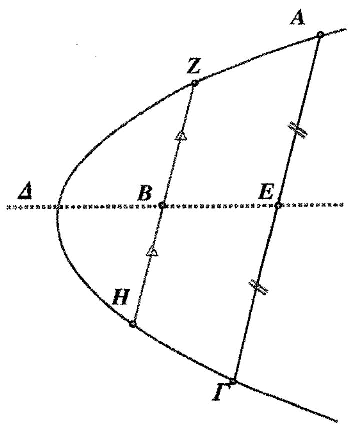


図 8　アポロニオス 共役直径

彼の草稿のスケッチは、不鮮明な部分が多い。ここでは図 7 のように書きかえ、彼の証明を考えていきたい。

この図 7 においてホイヘンスは、懸垂された等しい重さと長さの棒からなる鎖 A, B, C, D のうち、最初の 3 つの節点 A, B, C を通る放物線を考える。

命題 6 より、2 直線 AB, CD の交点を E とするならば、鉛直線 HE は線分 BC を 2 等分している。ここで 3 点 A, B, C で決定される放物線に対し、直線 CD 上の点 F が、$AB : BE = CF : EC$ を満たしているとする。ならば、$\triangle AEF \sim \triangle BEC \;\rightarrow\; AF // BC$ かつ $BH = HC \;\rightarrow\; AL = LF$ となる。すなわち、アポロニオスの命題より鉛直線 EL が放物線 ABC の共役直径となる。ならば点 F はこの放物線上にある。このようにホイヘンスは主張した。

続いて彼は、直線 EFD 上の 懸垂鎖の節点 D がこの放物線上にある と仮定したときの矛盾を導き、点 D が 3 点 A,B,C で定まる放物線上にないことを明らかにしていく。すなわち

1) 点 D と点 F が異なる場合

　→　直線 EDF が放物線と 3 点 C, D, F で交わるため、　矛盾

2) 点 D と点 F が一致する場合

　→　図 7 において、明らかに $EC < BE \;\rightarrow\; CF = CD < AB \;\; \therefore AB > CD$ 、しかし棒の長さは等しい $AB = CD$　矛盾

このように、3 点 A, B, C で決まる放物線上に、懸垂鎖の節点 D は載らない。よって鎖の接続点が形作る曲線は放物線と異なる。

ホイヘンスは、このように棒状の鎖が放物線を形作らと主張した。彼にとって、有限な範囲での議論こそが重要であり、基本的な静力学と幾何学による背理法でそお証明は組み立てられていた。

彼の手紙の草稿は、さらに続いている。つぎの命題 9 は、懸垂鎖の形状を記述している。

命題 9

同じ長さと重さの棒が連結した鎖が吊るされ、最初の点 A, B, C で定められる放物線からは、他の点は外れることは明らかである。B と C の外の部分は放物線の下に、内の部分は上に上になる。そのように懸垂鎖は放物線とはならない。

続く命題 10 では、限りなく小さく多数の棒から懸垂鎖が構成される場合に、連続的な重さのある糸を吊るした場合との違いがなくなり、放物線と異なることを証明したと述べている。

命題 10

しかし、それらが小さな棒状の鎖で作られ、すなわち無限個の小さな鎖が $ABCDEFGHI$ のような吊るされたとき、(中略) 無限個の小さな棒で作られた鎖は糸と大きな違いはないと考えられている。(中略) そのような吊るされた鎖はある曲がり方をしている。それを私は証明した。

ホイヘンスは、直観的予想から有限な棒からなる鎖の極限として、一様な線密度を持つしなやかな糸の懸垂線を考えていた。このように物理的問題を古典的幾何学とその極限として扱う手法は、'*Horologium Oscillatorium*'(1673) に代表される彼の数学言語の萌芽と見ることができる。またその後のホイヘンスによる無限小幾何学の物理問題への応用は、 ニュートンの '*Principia*' へも強い影響を与えていくことになる [14]

2.4 懸垂された糸が放物線となるのは ··· そしてホイヘンスの誤り

このようにして懸垂線と放物線の違いを示したホイヘンスは、つぎにどのような条件のもとで懸垂された糸が放物線となるかについて、命題 11 および命題 12 で論じていく（図 9)。

命題 11

$ABCDEFG$ は、PD を水平に対し垂直な直径とする。HM は頂点 D の接線であり、それらは D から K, L, M と等間隔に分けられている。そして点 B, C, E, F, G から CI, KE, LF, MG の線で結ばれ、等しい錘 H, I, R, K, L, M が吊るされている。ならば錘に引かれている B, C, E, F は放物線上にある。もしこの鎖が A と G で固定され自由に吊り下げられても、点 B, C, D, E, F は前の位置と変化はない。CD と EF を延長した交点 Q、DE と GF の交点を S とすれば、以前に述べたが Q は D と E のそして S は E と F のそれぞれの懸垂直径上にある。命題 7 よりそれらの位置からは動かない。そして放物線であることから、水平線から KE は 1,LF は 4,MG は 9 の長さとなっている。

ただし参考にした Bukowski は命題 11 を

このようにおもりが吊るされた点 A, B, C, D, E, F, G は放物線上にあることは確かだ。このようなおもりの吊るし方は、数値的に放物線となることが知られている。KE が 1、LF が 4、MG が 9 となることであり、よって正しい。

と読んでいるが、原典とは少し異なっている。ホイヘンスの草稿も、なぜ放物線となるかはっきりと書いていない。しかし、つぎの命題 12 において、ホイヘンスは明確に放物線となる証明を明らかにする。

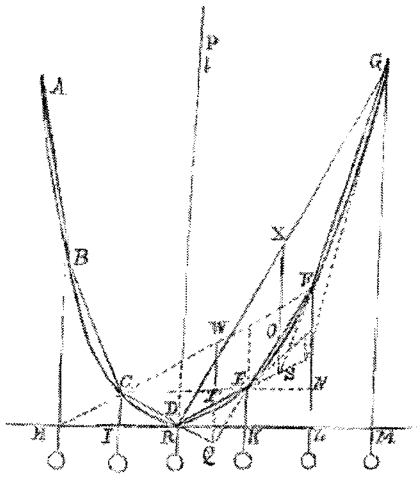


図 9 ホイヘンスのスケッチ（命題 11）

命題 12

$GCFH$ から等しい錘が吊り下げられ、間隔 AB, BC, CD, DE も等しい。ならば点 I, C, F, H は同じ放物線上にあると主張する。なぜなら、それらは吊り下げられ、命題 5 より明らかに、C と F の懸垂直径は GC と HF の延長線は L で交わる。LM は CF の中点 M で、さらに GH を中点 K で切る。それゆえ BR と RE は等しい。$\triangle GLH$ において、GL, LH が $\angle L$ から伸び、同じ比で切られている。それらは平行である。または点 G, C, F, H は、KL を直径とする放物線上にある。例えば、点 I は G, C, F と同じ放物線上にある。それらが同じ放物線上にあることは証明されている。

このように水平方向に等間隔で等しい重さのおもりを吊るした場合、それはつり橋に架けられたケーブルの形に相当し、ホイヘンスはそれが放物線となることを証明している。その論点はつぎのようになる。

糸に等しい錘が吊り下げられている。ならば命題 5 より、

→ GC と FH の交点を通る直径は CF の中点 M を通る。

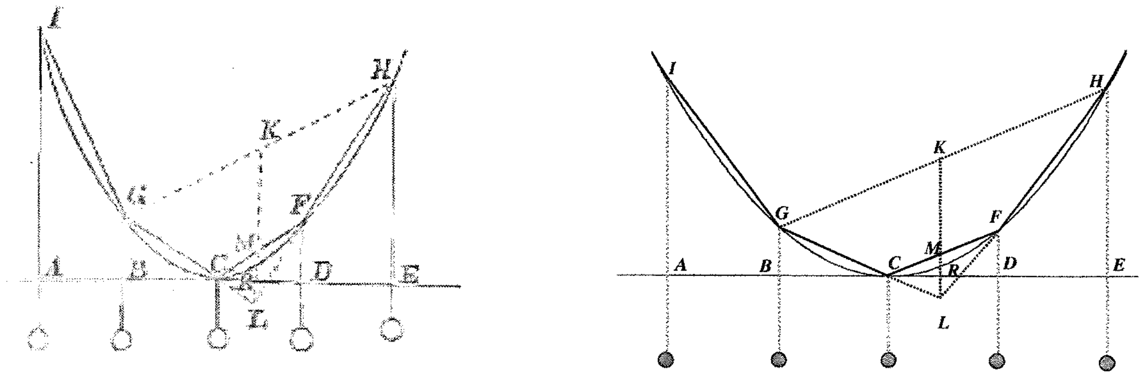


図 10　ホイヘンスのスケッチ（命題 12）

$BC = CD = DE$ より、$RC : CB = RD : DE$

　$\rightarrow$　$LC : CG = LF : FH$　よって、3 点 G, C, F により定まる放物線 (LK を共役直径) 上に点 H はある。

さらにホイヘンスは命題 12 の応用として、図 11 のように、形と重さが等しく摩擦のない直方体を糸に載せた場合も放物線となると主張していた。

> それゆえ綱の上に、等しい重さと大きさと形を持つ小さな梁または直方体をのせるならば、それらが綱を押す点 A, B, C,... は同じ放物線上にあるだろう。ならば、帆の風をはらんだ形や水中で引かれる網の形も放物線となるだろう。

しかし、この主張は間違っている。Bukowski[6] によると、22 年後 (1668)、ホイヘンス自身もこの誤りに気づき、"non sequitur neque est verum "(その議論が続けられないだけでなく間違っていた) と書いていた。

おそらくホイヘンスは、この直方体の重さがすべて等間隔に下向きに働くと考えたに違いない。しかしその力は曲線の法線方向である。Truesdell[7] が指摘しているように、この曲線の形は円となる。

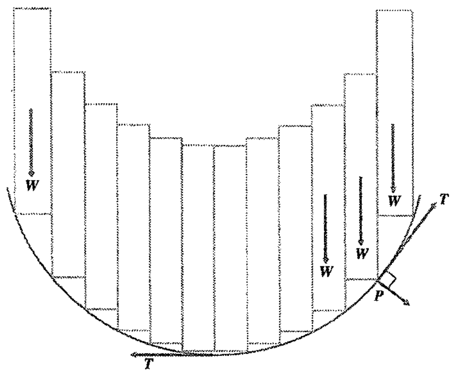


図 11

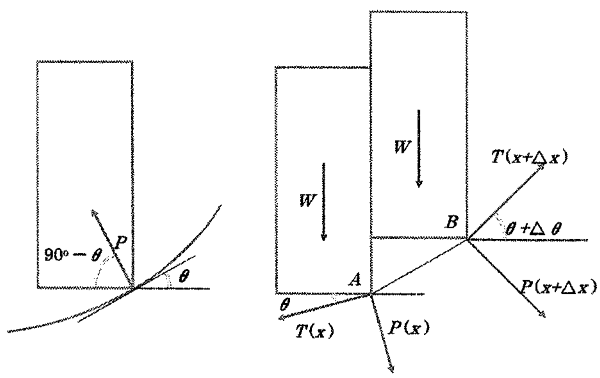


図 12

簡単な微分法を使った導出は、つぎのようになる。

最初に重さ W と法線方向の圧力 P の関係を考えてみよう。図 12 のように、糸の接線の水平方向となす角を θ とするならば、直方体の重さ W と糸の法線方向の力 P の間には、つぎの関係が成り立つ

$$P \sin(90^\circ - \theta) = W \quad \rightarrow \quad P \cos\theta = W \tag{1}$$

ここで、2 点 A, B 間におけるつり合いを考えてみよう。このとき張力 T および糸の法線方向の力 P は、水平方向に一定の間隔で直方体が載せられているため、これらは x の関数となっている。

$$\begin{cases} \text{水平方向のつり合い} & T_x(x + \Delta x) + P(x + \Delta x)\sin(\theta + \Delta\theta) + P(x)\sin\theta = T_x(x) \\ \text{鉛直方向のつり合い} & T_y(x + \Delta x) = P(x + \Delta x)\cos(\theta + \Delta\theta) + P(x)\cos\theta + T_y(x) \end{cases}$$

平均変化率の形に変形し、さらに式 (1) を用いるならば

$$\begin{cases} \dfrac{T_x(x+\Delta x)-T_x(x)}{\Delta x} = -\dfrac{1}{\Delta x}\left\{P(x+\Delta x)\sin(\theta+\Delta\theta)+P(x)\sin(\theta)\right\} = -\dfrac{W}{\Delta x}\left\{\tan(\theta+\Delta\theta)+\tan(\theta)\right\} \\ \dfrac{T_y(x+\Delta x)-T_y(x)}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\left\{P(x+\Delta x)\cos(\theta+\Delta\theta)+P(x)\cos(\theta)\right\} = \dfrac{1}{\Delta x}(W+W) = 2\dfrac{W}{\Delta x} \end{cases}$$

さらに $\Delta x \to 0$ の極限をとる ($\Delta\theta \to 0$)。このとき $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{W}{\Delta x} = \sigma$ とすれば、

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}T_x(x) = -2\sigma\tan\theta \\ \dfrac{d}{dx}T_y(x) = 2\sigma \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} T_x(x) = -2\sigma\displaystyle\int\tan\theta dx = -2\sigma\int\frac{dy}{dx}dx = -2\sigma\cdot y \\ T_y(x) = 2\sigma\cdot x \end{cases}$$

ならば $\dfrac{T_y(x)}{T_x(x)} = \dfrac{T(x)\sin\theta}{T(x)\cos\theta} = \tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$ より、円の方程式が得られる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sigma x}{-2\sigma y} = -\frac{x}{y} \quad\to\quad \int y dy = -\int x dx \quad\to\quad y^2 = -x^2 + c \quad\to\quad \therefore\ x^2+y^2 = c$$

若いホイヘンスの書き急ぎであったのかもしれない。ただ接線を含むこの問題は、有限な力学と幾何学からの極限として、この曲線が放物線とは異なることを示すことはできたことだろう。ただそれが円であることを示すことは困難であるように思える。

以上が、ホイヘンスの懸垂線についての手紙の草稿である。懸垂鎖が放物線と異なる証明の骨格をなす命題 5 と命題 6 などは、その根拠 (証明) が書かれていない。“それらは動く理由がない” として釣り合っているという彼の主張に対し、メルセンヌは、つぎのように書いている*9。

> 理由が示されなくとも、それらを受け入れましょう。しかし、ただ原因とみえるだけで、何もないと考えるのは同意できません。一見しただけで我々は全てを見ているわけではないのです。表面的に我々には見えないことが、よく別のときに現れてくるものです。すなわち原因がないかどうか十分に疑うことが大切です。

ここには、ホイヘンスがステヴィンやベークマンの力学の知識を背景とした推論を組み立てているのに対し、メルセンヌはガリレオを疑ったように、慎重な姿勢を崩していない。またメルセンヌがこの懸垂線問題の出版を考え、ホイヘンスにその証明の詳細を求めていた事情もあったようだ*10。しかしその出版は、同年 9 月のメルセンヌの死によりなされることはなかった。

このように 17 才のホイヘンスと晩年のメルセンヌの手紙の往復は、メルセンヌの死とともに終わった。ホイヘンスは 10 年後に友人の P. カルカヴィに、このときのメルセンヌとの交流をつぎのように回想している ([4])。

> メルセンヌ神父は手紙で私を褒めてくださいました。彼のおかげで、私は数学への集中と努力ができたのです。またフランスの著名な数学者からも手紙をいただきました。例えばフェルマー氏です。そのような体験は私に、さらに困難な問題への進むことを可能にしてくれました。

このように、17 歳のホイヘンスにとってメルセンヌとの出会いは、単に懸垂線の問題に限らずその後の彼の方向を決定付けた大きな出来事であった。

---

*9 1647 年 1 月 24 日の手紙。[7]

*10 1648 年 5 月 15 日にメルセンヌは、その出版をしてよいかとホイヘンスに質している。そしてホイヘンスはその数学的証明をすぐに書き上げることを約束していた。

3 Pardiesの証明方法

懸垂線と放物線の不一致の研究は、その後1669年にドイツの数学者ヨアヒム・ユンギウスにより、1673年にはフランスのイエズス会士イグナス.G. パルディエによりなされている。ここでは、パルディエの方法を紹介する*11。

パルディエはこの証明を、彼の著書‘*La Statique ou la Science des Forces Mouvantes*’(1673) で展開した。彼の方法は、初めから一様な重さを持つしなやかなロープで考えている (図13)。それは、ホイヘンスの展開した有限な部分から構成される懸垂鎖ではない。Rikey[13] はシンプルで説得力があると評価しているが、パルディエは同時代の数学者からの評価は芳しくない*12。ただしベルヌーイとライプニッツは、カテナリーの問題をパルディエのモデルから出発して解決したのも事実であった。パルディエの証明は、つぎのように書かれている。

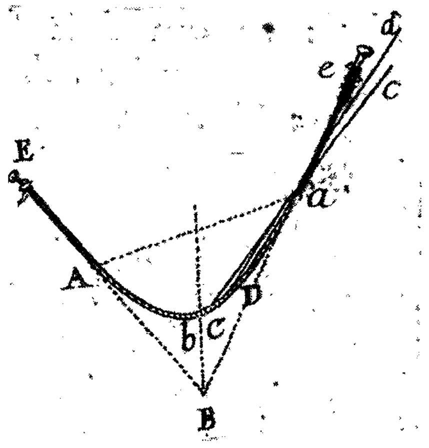


図13　パルディエ『静力学』

> 図14において、鎖の端 a と最下点 b の間の部分を考える。点 a と点 b における接線の交点を D とするならば、この部分の重心は C' となるだろう。それは点 D の鉛直線上にある。ここでもし鎖が放物線であるとするならば、鉛直線 $DC'E$ は線分 aF を2等分することになる。しかし放物線であるならば、その曲線上の aC' の重さ（長さ）は $C'b$ の重さ（長さ）より大きいので C' は重心とはならない。それゆえ懸垂曲線は放物線ではないことがわかる。

すなわち、図15において、懸垂曲線が放物線ならば、放物線上の2点 a, b における2つの接線の交点 $\underline{D}$ を通る鉛直線は、2点 a, b の水平方向の中点 $\underline{C'}$ を通る性質を持つ。

しかし懸垂曲線の2つの接線は、その2点間の重心、すなわち2点の曲線の長さの中点 C' を通らなければならない。図15において、もし懸垂されたロープが放物線であるとすれば、水平方向の中点 $\underline{C'}$ に対し明らかに

$$\text{弧長 } a\underline{C'} > \text{弧長 } \underline{C'}b$$

となっている。よってこの点は重心とはならない。すなわち懸垂曲線は放物線とは異なる。

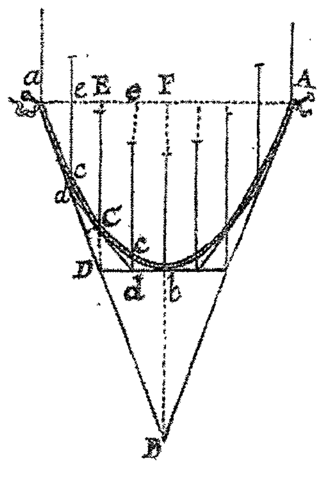


図14　パルディエの原図

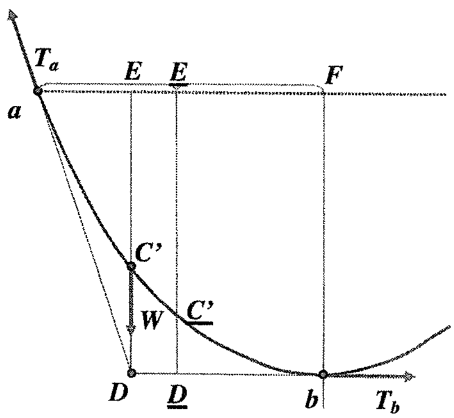


図15

パルディエは、懸垂曲線の弧の長さを求めることなく推論している。それは、懸垂曲線の最下点 b と1つの支点 a をとり、それら2点間のロープ重心（2点間の弧の長さの中点）が、放物線の2接線が水平方向の中点で交わる性質から直観的に導いていた。興味深いことがTruesdell[7] に書かれてある。

*11 J.Jungius の資料は入手できていない。パルディエについては、Truesdell[7]、ヨハンベルヌーイの『積分学講義』[12]、F.Rickey[13] を参照。

*12 Truesdell[7] は、「パルディエの無限小の議論は数学的に説得力がなく、推測で済ませていた」と述べている。

> ホイヘンスのこの問題についての結果を、パルディエは知っていた可能性がある。それはメルセンヌを通してか、あるいはホイヘンスがパリにいたときに直接聞き出した可能性もある。なぜなら静力学の最後で、パルディエはサイクロイドの運動の等時性の証明を与え、「ホイヘンス氏が彼の証明を出版した後であり、彼のような偉大な人物と競うことができたのは幸運なことだと感じた。」と書いている。パルディエのその証明は正しくまた、ホイヘンスの同年に公表したそれ (上記の pp.47-48) とは異なっていた。

そして Truesdell は、パルディエの証明をつぎのように評していた。

> しかし、彼の考えはホイヘンスとは異なり、あの（ホイヘンスの）時代でもっとも単純で正確な証明となっている。

ただこの証明を正確であるとするためには、後にヨハン・ベルヌーイが着目した弧の長さを求める線積分がなされなければならないだろう。

4 まとめ

17 世紀科学革命に大きな足跡を残したホイヘンスの、初期の力学研究を調べることができた。今日、彼により懸垂曲線と放物線の異なることが証明された事実は、逸話として広く知られている。しかし、その詳細はほとんど不明であったのではないだろうか。

若いホイヘンスにとって、晩年のメルセンヌは彼のメンターであったろう。この証明の経緯を調べることは、二人の知的交流のドラマをまのあたりする経験ともなった。そして何よりも彼の草稿からは、知的外の世界へ躍り出ようとするホイヘンスの高揚感が伝わってくる。それは、高校数学の話題としても十分に価値があると思っている。

ホイヘンスの証明に関してその結果だけを見るならば、「つり橋のケーブルが放物線となる事実から、力の条件の異なる懸垂曲線は放物線とはならないとすれば、それで十分だ。」(カッツ [15]) といえるかもしれない。さらに、「パルディエの証明は、張力（曲線の接線方向）と重力（曲線の長さの中点）のつり合いと、直観的な放物線の性質との矛盾からその違いをきれいに示していた（Bukowski[6])」と、パルディエの推測を支持する意見もある。

しかしホイヘンスは、直接当時の懸垂線と放物線の一致という誤った理解を、力学と幾何学から組み立て反駁した点において意味がある。推測も多分に挿入されがちな自然哲学に、彼は厳密な幾何学的力学で論理を組み立てるというガリレオの手法を発展させていた。そこにおいて力学は、必然的に有限な幾何学と密接に結びついていた。この事実は、メルセンヌがホイヘンスを‘新しいアルキメデス’に例えていたことからも、彼の方法の立ち位置は理解できる。それゆえ極限としての曲線への移行では、推測という域をでない形ではあるにせよ、それは 17 世紀中頃のガリレオの流れをくむ自然な考え方であった。

すべてを調べているわけではないのだが、このホイヘンスの草稿を考えるうえで、筆者の推測により補った証明も入れた。しかし彼の方法は、この時代の数学および力学のあり方をよく体現しているといえるだろう。繰り返しになるが、アルキメデス流の有限なレベルでの力学と厳密な幾何学による論証であり、それを通して極限を推論する手法である。それはその後の彼のスタイルとなり、1673 年の‘*Horologium Osilatorium*’に連なっていった。

ただホイヘンスは、この変革する時代にあって注目されることの少ない数学者でもある。デカルトとニュートンやライプニッツの間に隠れ、その穏やかな風貌はある意味希薄な印象さえただよう。しかし彼は大陸を代表する科学者であり、その力学 (力や運動量、仕事などの概念) への幾何学的方法は、ニュートンの‘*Principia*’に強い影響を与え、さらに微積分法やニュートン物理学へと続く発展の礎石になった。その意味でも、ガリレオやデカルトの方法と 17 世紀末の革新の間を繋ぐミッシングリンクのように思えてくる。

高校での数学 (あるいは物理) で学ばれる知識は、この懸垂線の証明もそうなのであるが、かつての人々の営為を通して形作られたものであり、それを知ることを通してこれらを学ぶことの価値は理解される。これからも個々の教材の背後にある歴史的事実を調べ精進していきたい。

[参考資料]

[1]『新科学対話』上下　ガリレオ・ガリレイ (著)　今野武雄, 日田節次 (訳)　岩波文庫 1948 下巻 p.217

[2] Oeuvres complètes. Tome I. Correspondance 1638-1656 Christiaan Huygens http://www.dbnl.org/tekst/huyg003oeuv01_01/

[3] Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature: Joella G.Yoder Cambridge University Press (2004)

[4] Huygens: The Man Behind the Principle: C. D. Andriesse (著), Sally Miedema (訳) Cambridge University Press (2011)

[5] Huygens,Holland,and Hanging Chains: J.F.Bukowski Bookend Seminar Feb.8, 2006 Juniata College Pennsylvania USA
http://www.juniata.edu/services/jcpress/voices/voices/2006_john_bukowski.pdf

[6] Christiaan Huygens and the problem of the hanging chain: J.F.Bukowski The Colleage Mathematics Journal vol.39 No.1 Jan.2008 pp.2-11

[7] The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638-1788, as Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series II, Volume 11, Part 2, Fiissli, 1960.: Clifford Truesdell

[8]『円錐曲線論』アポッロニオス, ポールヴェル・エック (訳), 竹下 貞雄 (訳) 大学教育出版 2008

[9] 科学革命の先駆者 シモンステヴィン Jozef T.Devreese, Guido Vanden Berghe 中澤聡 (訳) 朝倉書店　2009

[10] Stevin, Huygens and the Dutch republic: Fokko Jan Dijksterhuis June 2008 http://doc.utwente.nl/85537/1/Dijksterhuis_naw5-2008-09-2-100.pdf 54

[11] Christian Huygens : E.A.Bell Nabu Press (First Edition 1947)

[12] "Lectures on the Integral Calculus" Johann Bernoulli trans. W.A.Ferguson Jr. www.21stcenturysciencetech.com/translations/Bernoulli.pdf

[13] "The Bridge and the Catenary" Frederick Richkey http://www.math.usma.edu/people/Rickey/hm/CalcNotes/bridge-catenary.pdf

[14] Reading the Principia: The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736 : Niccolò Guicciardini Cambridge University Press (2003)

[15]『カッツ 数学の歴史』: ビクター・カッツ　共立出版 (2005)

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

60

対称群の線形表現の性質，スピン表現の性質に関する Schur の２論文について

平井　武　（京都）

ここでは Schur の次の２つの論文について検討する：

[S11, 1908] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1908, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.664–678.

[S58, 1927] J. Schur, Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **158** (1927), 63–79.

[S11, 1908] では，対称群 $\mathfrak{S}_n$ の線形表現について次を示した：

（１） $\mathfrak{S}_n$ の既約線形表現が整数環 $\boldsymbol{Z}$ 上の行列で与えられる．

19 年後の論文 [S58, 1927] では，$\mathfrak{S}_n$ のスピン表現（＝射影表現）について次を与えた：

（２） $\mathfrak{S}_n$ の既約スピン表現が $\boldsymbol{R}$ 上の行列で与えられるための必要十分条件．

この２論文を比較研究する．線形表現とスピン表現とでは，何故これらの違った結果が出るのか？ 結果が出るのに何故そんなに時間差があるのか？

それと同時に，先行する Frobenius の「有限群の表現論」に関する数論的結果，Frobenius-Schur [F75] の共著論文における同方向の結果，についても並行して論ずる．

Contents

1 Frobenius による有限群の指標と表現の一般理論における数論的側面

[F53] F. Frobenius, Über Gruppencharaktere, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896, pp.985–1021.
[F54] —, Über die Primfactoren der Gruppendeterminante, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896, pp.1343–1382.
[F56] —, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1897, pp.944–1015.
([F54] は Frobenius 全集における論文番号 54 を表す)

(1) Frobenius は論文 [F53, 1896] で，一般の有限群 $\mathfrak{H}$ に対して，Charakter（現代用語では既約指標）を方程式で定義した．それを現代風に解釈すると，群環 $\boldsymbol{Z}[\mathfrak{H}]$ で，不変元（共役類上の関数に対応）の生成する部分環が可換になるが，その可換多元環の（1 次元）表現を指標と定義している．

そして（可換多元環の理論を使って）その方程式の解の個数が，$\mathfrak{H}$ の共役類の個数 k に等しいことを示した．

また，$\mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}_5$, および $\mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{Z}_p)$ (p 奇素数) に対して，すべての指標を具体的に計算した．

(2) 論文 [F54, 1896] では，群行列式の研究を通して，既約指標の性質，例えば，直交性，ℓ^2 ノルムなど，を示した．その最終節 §12 で，一般の有限群 $\mathfrak{H}$ に対して，「その既約指標 $\chi^{(\kappa)}$ $(1 \leq \kappa \leq k)$ の値 $\chi^{(\kappa)}(A)$ $(A \in \mathfrak{H})$ をすべて $\boldsymbol{Q}$ に添加した体は何か」を問うて研究し，次の定理を示した．

定理 1.1. 有限群 $\mathfrak{H}$ の $\boldsymbol{C}$ 上の線型既約表現 π に対して，商 $|\mathfrak{H}|/\dim\pi$ は整数である（すなわち，次元 $\dim\pi$ は位数 $|\mathfrak{H}|$ を割る)．

(3) 論文 [F56, 1897] では，群の線形表現を導入し，[F53] で方程式で定義した指標が，既約線形表現のトレースに他ならないことを示した．

定理 1.1 の証明. Frobenius のもともとの証明 [F54] は，その §12 (pp.1369–1362) にあるが，これをコンパクトに再現するのは難しい．

そこで，後に **Schur** が表現論の基本を再構成した論文

[S7, 1905] I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharactere, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.406–432.

の §5, pp.413–417, から該当部分を抜き出して意訳してみよう．まず命題(p.416)は，

(XV) *Der Grad jeder irreduziblen Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{H}$ *ist ein Divisor der Ordnung der Gruppe.*

証明. 非常に簡明な証明である．χ を任意の既約指標とする．χ は p.425 (VIII.) により，次を満たす．$E \in \mathfrak{H}$ を単位元とすると，$f := \chi(E)$ は χ に対応する既約線形表現 π の次元 $\dim \pi$ であり，

$$\text{(VIII.)} \qquad \sum\nolimits_{R\in\mathfrak{H}} \chi(SR^{-1})\chi(R) = \frac{h}{f}\chi(S), \;\; h := |\mathfrak{H}|, \quad (S \in \mathfrak{H}).$$

ε_S を $E \in \mathfrak{H}$ で値 1 をとる $\mathfrak{H}$ 上の δ 関数とし，上を書き直すと，

$$\sum_{R\in\mathfrak{H}} \Big(\chi(SR^{-1}) - \frac{h}{f}\,\varepsilon_{SR^{-1}}\Big)\chi(R) \;=\; 0.$$

従って，$S, R \in \mathfrak{H}$ を動かしたときの $h \times h$ 型の係数行列式をとって，

$$\left|\chi(SR^{-1}) - \frac{h}{f}\,\varepsilon_{SR^{-1}}\right| = \left|\big(\chi(SR^{-1})\big)_{S,R\in\mathfrak{H}} - \frac{h}{f}\,E_h\right| = 0,$$

ここに，E_h は $h \times h$ 型単位行列．よって，$x = h/f$ は方程式

$$x^h + c_1 x^{h-1} + \cdots + c_{h-1}x + c_h = 0 \tag{1.1}$$

の解である．ここに，係数 $c_1, \ldots, c_h$ は $\chi(R)$ の多項式で表される．

補題 1.2. 任意の $R \in \mathfrak{H}$ に対し，指標値 $\chi(R)$ は代数的整数である．

証明. $R^m = E$ とすると，$\pi(R)^m = E_f$. $\pi(R)$ は対角化可能だから，対角化すると $\mathrm{diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_f)$, $\rho_j^m = 1$, である．各 ρ_j は代数的整数であり，その和 $\chi(R) = \rho_1 + \cdots + \rho_h$ もそうである． □

Schur の証明が拠り所としている初等数論の命題は次である：

命題 1.3 (根拠命題). 変数 x の方程式 (1.1) において，係数 $c_1, \ldots, c_h$ が代数的整数とすると，その根は代数的整数である．

この命題により，$x = h/f$ は代数的整数である．しかも有理数でもある．従って整数である． 【定理 1.1 証了】

2 Frobeniusの証明[F54]の根拠，Dedekind の定理

定理1.1の，Frobeniusのもともとの証明（[F54], §12）の根拠は下のDedekindの論文に現れる **Satz V** である：

[Dede] R. Dedekind, Über einem arithmetischen Satz von Gauß, Mitteilung der Deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag, **1892**, pp.1–11 (Werke **2**, 28–38).

この論文はなかなか面白いので，原文を意訳してみよう（なお以下で H1, H2, ... は Hirai が勝手に作った見出しである）.

2.1 Gauß, Disquisitiones Arithmeticae, Art. 42

まず，Gaußの次の定理の観察から始める.

Satz I. *Wenn die Koeffizienten der beiden ganzen Funktionen*

$$P = x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \cdots + p_m,$$
$$Q = x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \cdots + q_n$$

der Variablen x rationale, aber nicht sämtlich ganze Zahlen sind, so können auch die Koeffizienten ihres Produkts

$$PQ = x^{m+n} + r_1x^{m+n-1} + \cdots + r_{m+n}$$

nicht sämtlich ganze Zahlen sein.

対偶. P, Q を最高次係数が1の $\boldsymbol{Q}$-係数多項式とする.
積 PQ が $\boldsymbol{Z}$-係数 $\Longrightarrow$ P, Q ともに $\boldsymbol{Z}$-係数.

証明. p_i を既約分数に書いて，$p_i = p_i''/p_i'$，としたときに，分母 p_i' の最小公倍数（すなわち，共通分母）をとって，a_0 とする．Q および PQ についても同様の共通分母をそれぞれ b_0, c_0 とする．共通分母を払うと，

$$A := a_0P = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m,\ a_i = a_0p_i\ (i \in \boldsymbol{I}_m),$$
$$B := b_0Q = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_m,\ b_i = b_0q_i\ (i \in \boldsymbol{I}_n),$$
$$C := c_0PQ = c_0x^{m+n} + c_1x^{m+n-1} + \cdots + c_{m+n}.$$

主張 H1. A, B, C はいずれも原始多項式である.

定義 H1. $\boldsymbol{Z}$-係数多項式

$$A = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_m$$

が原始的 (ursprüngliche, primitive) とは，$a_0, a_1, \ldots, a_m$ に共通因数が無いこと．

証明．A につき述べる．素因数 r に対し，a_0 は，r^ν $(\nu > 0)$ で割れるが $r^{\nu+1}$ では割れないとする．このとき，どれかの分母 p_i' が r^ν で割れるが $r^{\nu+1}$ では割れない．

$a_i = a_0 p_i = \dfrac{a_0}{p_i'} \cdot p_i''$ において，$\dfrac{a_0}{p_i'}$ にはもはや素因数 r は現れない．また，p_i'' は p_i' と互いに素なので，r を含まない．よって，この $i \in \boldsymbol{I}_m$ に対し，a_i は素因数 r を含まない． □

主張 H2. $a_0 b_0 = c_0$.

証明．$a_0 b_0$ に入っている素因子の冪 r^κ をとる．多項式 A の係数を mod r で考えると，

$$A \equiv \alpha_0 x^a + \alpha_1 x^{a-1} + \cdots + \alpha_a,$$
$$B \equiv \beta_0 x^b + \beta_1 x^{b-1} + \cdots + \beta_b,$$

とおくと，$\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$．すると，

$$AB \equiv \alpha_0\beta_0\, x^{a+b} + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)x^{a+b-1} + \cdots + (\alpha_{a-1}\beta_b + \alpha_a\beta_{b-1})x + \alpha_a\beta_b \neq 0.$$

従って，$a_0 b_0$ の任意の素因子 r に対し，多項式 AB の係数でそれを含まないものが 1 つはある．AB は $\boldsymbol{Z}$-係数であり，

$$PQ = \frac{1}{a_0 b_0} \cdot AB$$

よって，$c_0 = a_0 b_0$ を得る． □

Satz I の証明．仮定により，$c_0 = 1$. 主張 H2 により，$a_0 b_0 = c_0 = 1$ $\therefore$ $a_0 = b_0 = 1$. □

Satz II. 2 つの原始多項式の積は，また原始的．

主張 H3. Satz II $\Longleftrightarrow$ 「主張 H2」

定義 H2. $\boldsymbol{Z}$-係数多項式

$$A = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m$$

の共通因数（Teiler）とは，係数 $a_0, a_1, \ldots, a_m$ の共通因数のことである．

Satz III. (Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie)

２つの $\boldsymbol{Z}$-係数多項式 P, Q の積 PQ の共通因数は，P, Q それぞれの共通因数の積である．

証明．A, B それぞれの共通因数を横に除ければ，Satz II になる． □

Satz IV. ２つの多項式 A, B の係数 a, b は有理数とする．積 AB の係数 c がすべて整数ならば，積 ab はつねに整数．

証明．主張 H2 による． □

2.2 代数的数と代数的整数の場合，Satz V

定義 H3. 代数的数とは，$\boldsymbol{Q}$-係数多項式の根，代数的整数 (ganze algebraische Zahl) とは，整係数で最高次係数=1 の多項式の根．

(1) 代数的整数の全体は環をなす．

(2) ある数 a に対して，$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ $(\exists\mu_j \neq 0)$ と整数行列 $Z = (z_{ij})_{i,j\in\boldsymbol{I}_n}$ が存在して，

$$a\mu_i = \sum_{j\in\boldsymbol{I}_n} z_{ij}\mu_j \quad (i \in \boldsymbol{I}_n),$$

となっているならば，a は代数的整数．

$(\because)$ $\det\big(Z - aE_n\big) = 0.$ □

Satz V. *Wenn das Produkt AB aus zwei Funktionen A, B lauter ganze algebraische Koeffizienten besitzt, so ist jedes aus einem Koeffizienten von A und einem Koeffizienten von B gebildeten Produkt eine ganze algebraische Zahl.*

意訳．多項式 A, B の積 AB の全ての係数が代数的整数だとすると，A の任意の係数と B の任意の係数との積はつねに代数的整数である．

【この定理が，定理 1.1 の根拠定理である．】

これの簡単な，拡張可能な証明を与えるのが本論文 [Dede] の目的．

2.3 代数的数・代数的整数の場合の証明

特別な場合として，次を示し，それから Satz V を出す (難しいことを使わない)．

Satz VI. *Wenn die ganze Funktion $f(x)$ lauter ganze algebraische Koeffizienten hat, und wenn ω irgendeine Wurzel der gleichung $f(\omega) = 0$ bedeutet,* *so hat auch die ganze Funktion*

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x-\omega}$$

lauter ganze algebraische Koeffizienten.

証明.

$$f(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \cdots + c_k = (x-\omega)f_1(x),$$
$$f_1(x) = a_0x^{k-1} + a_1x^{k-2} + \cdots + a_{k-1},$$

とおくと，$c_0 = a_0$, $c_1 = -a_0\omega + a_1$, $c_2 = -a_1\omega + a_2$, $\ldots$, $c_k = -a_{k-1}\omega$.

$$a_r = c_0\omega^r + c_1\omega^{r-1} + \cdots + c_r \quad (0 \le r \le k-1), \tag{2.2}$$
$$c_0\omega^k = -c_1\omega^{k-1} - \cdots - c_k, \tag{2.3}$$
$$\therefore \quad a_r\omega^s = c_0\omega^{r+s} + c_1\omega^{r+s-1} + \cdots + c_r\omega^s \qquad (r+s<k),$$
$$a_r\omega^s = -c_{r+1}\omega^{s-1} - c_{r+2}\omega^{s-2} - \cdots - c_k\omega^{s-(k-r)} \quad (r+s \ge k).$$

故に，§2, (3) により，a_r は代数的整数. □

$$f(x) = c_0(x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_k)$$

を勝手な，$(x-\omega_{i_1})$, $(x-\omega_{i_2})$, $\ldots$ で逐次割ると，勝手な $c_0\,\omega_{j_1}\omega_{j_2}\cdots\omega_{j_p}$ が代数的整数であることが分かる.

主張 H4. $c_0(1+\omega_1)(1+\omega_2)\cdots(1+\omega_k)$ の勝手な展開項が代数的整数.

◆主張 H4 による Satz V の証明.

$$A = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m),$$
$$B = b_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n),$$

と分解し，$k := m+n$, $c_0 := a_0b_0$,

$f(x) := AB = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \cdots + c_k$ とおく.

このとき，$f(x) = a_0b_0 \prod_{i\in \boldsymbol{I}_m}(x-\alpha_i)\cdot\prod_{j\in\boldsymbol{I}_n}(x-\beta_j)$

であるから，任意の積

$$c_0\cdot\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}\cdot\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_q} = \big(a_0\,\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}\big)\cdot\big(b_0\,\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_q}\big)$$

は，代数的整数である．他方，任意の２つの係数の積 a_ib_j はこれらのものの和であるから，代数的整数である. **【Satz V の証明終わり】**

注．Satz V のこの証明では，A, B の一次因子への分解を使っている．論文 [Dede] ではこの「分解可能性」を使わない証明をこの後で与えている．それは代数関数の場合にも使える.

3 Frobenius による $\mathfrak{S}_n$ の既約線形表現と指標に対する数論的側面

[F60] F. Frobenius Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1900, pp.516–534.

[F68] —, Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1903, pp.328–358.

3.1 論文 [F60, 1900] での結果

Frobenius は論文 [F60] で，対称群 $\mathfrak{S}_n$ に対し，その既約指標を分類し，既約指標の計算法も与えた．まず，n の分割

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m > 0,\ \sum_i \lambda_i = n,$$

をとり，その全体 P_n が既約表現の同値類を径数付けする．$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in P_n$ に対して，直積群

$$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} := \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_m} \tag{3.1}$$

を標準的な方法で $\mathfrak{S}_n$ に埋め込み，これと同一視する．$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の自明表現を $\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}$ とおき，誘導表現を作る：

$$\Pi_{\boldsymbol{\lambda}} := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}} \tag{3.2}$$

これは，$\boldsymbol{\lambda} = (n)$, $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathfrak{S}_n$, $\Pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_n}$, 場合以外は可約である．$\boldsymbol{\lambda} \in P_n$ の逆辞書式順序に従って，帰納的に証明されるのだが，$\Pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ には既約成分のうちのトップのものが重複度 1 で入っている．これを既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ とよぶ．$\boldsymbol{\lambda} \in P_n$ に対する逆辞書式順序を具体的に書くと，

$$(n) < (n-1,1) < (n-2,2) < (n-2,1,1) < (n-3,3) < (n-3,2,1) < \ldots$$
$$\ldots < (2,1,1,\ldots,1) < (1,1,1,\ldots,1,1).$$

定理 3.1. n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約指標の値はつねに整数である（すなわち，$\boldsymbol{Z}$-valued）．

原文： [F54, 1896], §12, p.77, ↓ 8 – 10:

$\cdots$. Daher sind die Charactere der symmetrischen Gruppe sämtlich ganze rationale Zahlen (vergl. die Beispiele $n = 4$ und 5, [F53, 1896], §8).

3.2　論文 [F68, 1903] での結果

論文 [F68] で，$\mathfrak{S}_n$ に対し，次の結果を得た：

(3.2.a) $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ に対し，$\boldsymbol{\lambda}$ および その転置 ${}^t\boldsymbol{\lambda}$ を用いて，$\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ の指標 $\chi_{\pi_{\boldsymbol{\lambda}}}$ を計算する第 2 の方法（[F60] における第 1 の方法より簡単な第 2 の方法），を与えた．

(3.2.b) 群環 $\boldsymbol{C}[\mathfrak{S}_n]$ 内の，$\boldsymbol{\lambda}$ に対応する不変原始冪等元（charakteristische Einheit, 現在で言う Young symmetrizer）を与えた．

それには A. Young の論文 [You1,1901], [You2, 1902] を大いに参考にした．[F68], §8, p.265, ↑9–6, に次のように書かれている：

Die Eigenschaften der in Satz III definirten Function $\zeta(R)$ hat Hr. A. Young untersucht in zwei sehr beachtenswerthen Arbeiten *On Quantitative Substitutional Analysis*, Proceedings of the London Math. Soc., vol. 33 und 34, im Folgenden *Y.* I und *Y.* II citirt. $\cdots\cdots\cdots$

定理 3.2. *n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の任意の既約表現の行列要素をすべて有理数に出来る．*

原文： [F68, 1903], in Introduction, p.245 ↓ 5–6,

$\cdots$. Wie sich dabei zeigt, kann man die h linearen Substitutionen jeder primitiven Darstellung der symmetrischen Gruppe so wählen, dass ihre Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen sind.

《旧正書法にて，sämmtlich = sämtlich》

4　有限群の線形表現における数論的問題

上の論文 [F60], [F68], あとで論評する論文 [S9], [S11] に見るように, Frobenius や Schur は数論的な視点からも表現や指標を見ている．Schur はとくに，論文

[S9, 1906] I. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1906, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.164–184.

において，有限群の線形表現の数論的局面を論じている．

有限群 $\mathfrak{H}$ の $\boldsymbol{C}$ 上の既約線形表現 π をとり，その指標を χ とする．指標値 $\chi(R)$ $(R \in \mathfrak{H})$ を有理数体 $\boldsymbol{Q}$ に添加した代数的数体を $\boldsymbol{Q}(\chi)$ と書く．指標 χ の（または表現 π の）**Schur index** とは，$\boldsymbol{Q}(\chi)$ の m 次の拡大体 L で，π が L 上実現出来る，すなわち，基底をうまくとればすべての $\pi(R)$ $(R \in \mathfrak{H})$ の行列要素が L から取れる，ような m の最小値 $m(\chi)$ である．

(一般の基礎体 Ω の場合も同様である.)

$\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_n$ の場合には，上述のように，Frobenius [F68] により，つねに $\boldsymbol{Q}(\chi) = \boldsymbol{Q}$, $m(\chi) = 1$, である.

上の Schur index の定義をより現代的に述べよう．有限群 G の体 K 上の既約線形表現 ρ が K の任意の拡大体においても既約であるとき，絶対既約という．G の K 上の任意の既約線形表現が絶対既約であるとき，K を G の分裂体 (splitting field) という．K を G の分裂体とすれば，K の任意の拡大体 L に対して，L 上の G の任意の既約表現は K 上で実現可能である.

定義 4.1. G を有限群，K をその分裂体，χ を K 上の既約線形表現の指標，k を指標値 $\chi(g)$ $(g \in G)$ で生成される K の部分体，とする．χ の **Schur index** $m(\chi)$ は，次の互いに同値なやり方で定義される：

(1) k の m 次の拡大体 L で π が L 上実現出来るような m の最小値,

(2) k 上の既約表現を K 上で考えたとき，π を既約成分に含むときの重複度.
(Cf. Schur index of irreducible character - Groupprops)

さらに，ここまでのこの報文の流れで次のような問題が提起されている.

問題 A (既約表現の実現に関して) 次の条件を満たす最小の体 K を求めよ.
「G の体 K 上の（有限次元）線形表現がすべて完全可約であり，K の任意の拡大体の上の線形表現は K 上の線形表現に同値である.」

問題 B (指標環に関して) 次の条件を満たす最小の体 K を求めよ.
「指標の $\boldsymbol{Z}$ 線形結合全体を指標環と呼ぶ．体 K 上の（有限次元）線形表現がすべて完全可約であり，体 K 上の表現の指標環が K の任意の拡大体の上の指標環に等しい.」

標数 0 の場合では，体の代わりに，$\boldsymbol{Z}$ の拡大環を問題にすることも出来る.

問題 a 既約表現 π の行列表示 T_π をうまく実現したとき，その全ての行列要素を含む $\boldsymbol{Z}$ の有限次拡大環，または有理数体 $\boldsymbol{Q}$ の有限次拡大体，で最小のものは何か？

問題 b 各既約表現 π $([\pi] \in \widehat{G})$ の指標の値 $\chi_\pi(g)$ $(g \in G)$ をすべてを含む $\boldsymbol{Z}$ の有限次拡大環，または $\boldsymbol{Q}$ の有限次拡大体は何か？

注. M. Benard は，論文 [Bena, 1976] において，unitary reflection groups (本書では複素鏡映群という) G に対して，次の結果を与えた.

Theorem 1. *Let G be a unitary reflection group and let F be the field generated over $\boldsymbol{Q}$ by the values of the characters of G. Then each representation of G is similar to an F-represenation.*

5 $\mathfrak{S}_n$ の既約線形表現は $\boldsymbol{Z}$ 上の行列で表し得る [S11]

[S11, 1908] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1908, Physikalisch-Mathematische Klasse, 664–678.

Schur はこの論文 [S11, 1908] で，次を証明した：

「$n \geq 3$ のとき，対称群 $\mathfrak{S}_n$ のどの既約表現も，すべての行列要素が整数であるような行列表示を持つ」（ただしこれはユニタリ行列による表示ではない）

Frobenius は [F60, 1900] で，各 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{1 \leqslant j \leqslant m} \in P_n$ に対して，誘導表現

$$\Pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}, \quad \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_m} \hookrightarrow \mathfrak{S}_n,$$

のトップ既約成分として，既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ を与えたが，$\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ の表現空間は，$\Pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ の表現空間の商空間であり，使いやすい基底を厳密には書き下せない．

そこで，Schur は $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ の表現空間を，ある多項式の空間の商空間として実現し，良い性質を持つ基底を具体的に構成し，その基底に関して，単純互換 s_i ($i \in \boldsymbol{I}_{n-1}$) の作用が整数係数で表されることを示した．

[S11] の **Introduction**, 1〜4行目，11〜13行，14〜23行，の原文を引用する．

(1) Eine genaue Übersicht über die irreduziblen Gruppen linearer homogener Substitutionen $\mathfrak{G}_n$, die der summetrischen Gruppe n^{ten} Grades $\mathfrak{S}_n$ isomorph sind, hat zuerst Hr. Frobenius durch Bestimmung der Charactere von $\mathfrak{S}_n$ gewonnen. [F60, 1900]

意訳． Frobenius は [F60] で，対称群 $\mathfrak{S}_n$ と同型な既約線形群 $\mathfrak{G}_n$ についての詳しい結果を，$\mathfrak{S}_n$ の既約指標の研究を通じて，与えた．（これは既約表現の分類を意味する）

(2) Eine weitere Methode zur Berechnung der Charaktere von $\mathfrak{S}_n$ und der Gruppen $\mathfrak{G}_n$ hat Hr. Frobenius in seiner Arbeit [F68] gegeben. In dieser Arbeit, hat Hr. Frobenius auch zuerst den Satz ausgeprochen, daß

jede der Gruppen $\mathfrak{G}_n$ bei passsender Wahl der variabeln als eine Gruppe mit rationalen Koeffizienten geschreiben werden kann. [F68, 1903, p.328]

意訳． さらに，論文 [F68] において，Frobenius は，$\mathfrak{S}_n$ の既約指標と（行列）群 $\mathfrak{G}_n$（平井注．対応する既約表現による $\mathfrak{S}_n$ の像）の別の計算法を与えた，また初めて次の定理を証明した： 既約表現は適当な基底を選べば，有理数係数（有理数行列）で書ける．

(3) In der vorliegen Arbeit soll nun genauer gezeigt werden, daß sich jede der irreduziblen Gruppen $\mathfrak{G}_n$ bei geeingner Wahl der Variabeln auch als eine Gruppe mit *ganzzahligen* rationalen Koeffizienten darstellen läßt. ...., so ergibt sich zugleich der Satz:

Jede Gruppe linearer homogener Substitutionen, die der symmetrischen Gruppe n^{ten} Grades isomorph ist, läßt sich durch eine lineare Transformation der Variabeln in eine Gruppe mit ganzzahligen rationalen Koeffizienten überführen.

意訳. 当論文では，より詳しく，「$\mathfrak{S}_n$ の任意の既約表現は適当な基底に関して，$\boldsymbol{Z}$ 係数で書ける」を示した．（平井注．$\mathfrak{S}_n$ の任意の既約線形表現は $\boldsymbol{Z}$ 上の行列で書ける．）

[11, 1908] の記号に関する注意. n の分割 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ に対して，[11] では，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の多項式の空間に具体的な基底を決める都合で，成分 λ_j の大小順を $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m$ としてある（ここでは Schur 方式という）．これを，Frobenius 方式 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m$ に従って書き直して行くことを試みたが，途中で断念せざるを得なかった．Frobenius 方式の (λ_j) と Schur 方式とを移り合うには，λ_j の添字を $j \leftrightarrow m+1-j$ $(1 \leq j \leq m)$ と付け換えればよい（すなわち，成分の並べ方＝添字の付け方，を左右反転すればよい）．

5.1 $\mathfrak{S}_n$ の既約指標

n の分割 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ に対して，$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m$ (Schur 方式) としておく．

$R \in \mathfrak{S}_n$ の共役類 $[R]$ は R のサイクル分解におけるサイクルの長さの組 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots n^{\alpha_n}$ により決まる．表現 Π に対して，指標 $\chi_\Pi(R) =: \chi_\Pi(\alpha)$ の **Charakteristik**（指標の母関数ともいう）とは，

$$\Phi_\Pi(s) := \sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n=n} \frac{\chi_\Pi(\alpha)}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}\left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{s_n}{n}\right)^{\alpha_n}. \tag{5.1}$$

$\boldsymbol{\lambda} \in P_n$ に対応する既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ の指標を $\chi^{\boldsymbol{\lambda}}_\alpha := \chi_{\pi_{\boldsymbol{\lambda}}}(R)$ とおく．その **Charakteristik**（母関数）は，

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}(s) := \sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n=n} \frac{\chi^{\boldsymbol{\lambda}}_\alpha}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}\left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{s_n}{n}\right)^{\alpha_n}, \tag{5.2}$$

であり，$\quad \Phi_{\boldsymbol{\lambda}}(s_1, 0, \ldots, 0) = \dfrac{\chi^{\boldsymbol{\lambda}}_{[n,0,\ldots,0]}}{n!}s_1^{\,n} = f_{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \dfrac{s_1^{\,n}}{n!}, \quad f_{\boldsymbol{\lambda}} := \dim \pi_{\boldsymbol{\lambda}}.$

$$f_{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{n!}{\lambda_1!(\lambda_2+1)!\cdots(\lambda_m+m-1)!}\prod_{\alpha<\beta}(\lambda_\beta+\beta-\lambda_\alpha-\alpha).$$

(5.3) $p_n := \displaystyle\sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n=n} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}\left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{s_n}{n}\right)^{\alpha_n} \quad (n \geq 1),$

[$\mathfrak{S}_n$ の自明表現 $\boldsymbol{1}_{\mathfrak{S}_n}$ の指標 $1_{\mathfrak{S}_n}$ の Charakteristik]

$p_0 := 1$, $p_n := 0$ $(n<0)$, とおけば,

(5.4) $\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}(s) = \begin{vmatrix} p_{\lambda_1} & p_{\lambda_1-1} & \cdots & p_{\lambda_1-m+1} \\ p_{\lambda_2+1} & p_{\lambda_2} & \cdots & p_{\lambda_2-m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{\lambda_m+m-1} & p_{\lambda_m+m-2} & \cdots & p_{\lambda_m} \end{vmatrix}$ (Schur の学位論文).

$\dfrac{\partial p_\nu}{\partial s_1} = p_{\nu-1}$ であるから, 上式の両辺を微分して,

$$\frac{\partial\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}}{\partial s_1} = \Phi_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m} + \Phi_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3,\ldots,\lambda_m} + \cdots + \Phi_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{m-1},\lambda_m-1},$$

(5.5) $f_{\boldsymbol{\lambda}} = f_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m} + f_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3,\ldots,\lambda_m} + \cdots + f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{m-1},\lambda_m-1}.$

◆ 誘導表現 $\Pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}^{\mathfrak{S}_n}\boldsymbol{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}$ の Charakteristik は $p_{\boldsymbol{\lambda}} = p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_m}$ であると言ってよい (実際にはこれからすぐ決まる).

<<§2, §3 は省略>>

5.4 既約表現の実現(表現空間の基底の選定)のための補題

$\boldsymbol{C}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ の $\mathfrak{S}_n$-部分環

$$(5.6)\quad \begin{aligned} \Gamma^{(p)} &:= \big\langle\, x_1x_2\cdots x_{p-1}(x_p+x_{p+1}+\cdots+x_n)\,\big\rangle_{\boldsymbol{C}[\mathfrak{S}_n]} \\ &= \big\langle\, x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{p-1}}(x_{j_1}+x_{j_2}+\cdots+x_{j_{n-p+1}})\,; \\ &\qquad \{i_1,\ldots,i_{p-1},j_1,\ldots,j_{n-p+1}\} = \{1,2,\ldots,n\}\,\big\rangle_{\boldsymbol{C}}. \\ \Gamma^{(1)} &= \boldsymbol{C}(x_1+x_2+\cdots+x_n). \end{aligned}$$

$$(5.7)\quad \begin{aligned} C^{(p)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r} &:= \sum_{\{i_1,\ldots,i_p\}\subset\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r\}} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_p} \quad (r \geq p), \\ C^{(p)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r} &:= 0 \qquad (r<p). \end{aligned}$$

補題 5.1. $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p,\beta_1,\ldots,\beta_{n-p}\} = \{1,2,\ldots,n\}$ とすると,

$$(5.8)\quad x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\cdots x_{\alpha_p} \equiv (-1)^p C^{(p)}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-p}} \pmod{\Gamma^{(p)}}.$$

証明. $p=1$ では, $\Gamma^{(1)} = \boldsymbol{C}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$, $C^{(1)}_{2,3,\ldots,n} = x_2+x_3+\cdots+x_n$, なので OK.

あとは, Induction on p. □

5.5 誘導表現 $\Pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}$ の空間の基底の選定

$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{1 \leqslant j \leqslant m} \in P_n,\ 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m$, に対し,

$$X = X(\boldsymbol{\lambda}) := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = (x_1 \cdots x_{\lambda_1})^{m-1} (x_{\lambda_1+1} \cdots x_{\lambda_1+\lambda_2})^{m-2} \cdots ,$$

$(\alpha_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ は始めの λ_1 個が, $\alpha_j = m-1$, 2 番目の λ_2 個が $\alpha_j = m-2$, ..., m 番目の λ_m 個が $\alpha_j = 0$. この X を $\mathfrak{S}_n$ で動かしたもの全体

$$X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(N)}, \quad N = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_m!}, \tag{5.9}$$

の張る $\mathfrak{S}_n$-module (symmetric module) を $\mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}}$ と書く. これが誘導表現 $\Pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}$ の表現空間である. その表現作用素全体を $\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\lambda}} := \Pi_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathfrak{S}_n)$ と書く.
$\Pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ のトップ既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ が働くのは $\mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の商空間である.

◆ $\mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}}$ には, 次の元が含まれている:

$$Y_1 := \frac{X(\boldsymbol{\lambda})}{x_{\lambda_1}} (x_{\lambda_1} + x_{\lambda_1+1} + \cdots + x_{\lambda_1+\lambda_2}),$$

[x_{λ_1} 1 個を $(x_{\lambda_1} + x_{\lambda_1+1} + \cdots + x_{\lambda_1+\lambda_2})$ で置き換える]

$$Y_2 := \frac{X(\boldsymbol{\lambda})}{x_{\lambda_1+\lambda_2}} (x_{\lambda_1+\lambda_2} + x_{\lambda_1+\lambda_2+1} + \cdots + x_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}),$$

$$\ldots := \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_{m-1} := \frac{X(\boldsymbol{\lambda})}{x_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1}}} (x_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1}} + x_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1}+1} + \cdots + x_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1}+\lambda_m}).$$

Y_1 の固定化群は, $\mathfrak{S}_{\lambda_1-1, \lambda_2+1, \lambda_3, \ldots, \lambda_m}$,
Y_ν の固定化群は, $\mathfrak{S}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}, \lambda_\nu-1, \lambda_{\nu+1}+1, \lambda_{\nu+2}, \ldots, \lambda_m}$,
Y_{m-1} の固定化群は, $\mathfrak{S}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-2}, \lambda_{m-1}-1, \lambda_m+1}$,
従って, それらは $\mathfrak{S}_n$-module $\Pi_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}, \lambda_\nu-1, \lambda_{\nu+1}+1, \lambda_{\nu+2}, \ldots, \lambda_m}$ を生成する.

$Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ の生成する $\mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の部分 $\mathfrak{S}_n$-module を $\mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ と書き,

$$\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}} := \mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}} \bmod \mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}},$$

とおく. 各 $\Pi_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}, \lambda_\nu-1, \lambda_{\nu+1}+1, \lambda_{\nu+2}, \ldots, \lambda_m}$, 従って, $\mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ は既約成分として, $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ を含まないので, quotient module $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}}$ が $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ を含む: $\dim \mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}} = f_{\boldsymbol{\lambda}} =: f$.

◆ そこで, $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}} := \mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}} \bmod \mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の基底のために,
(5.9) の N 個の単項式の中から $f_{\boldsymbol{\lambda}}$ 個を選ぶ. そのために, 正整数係数の多項式 $F^{\boldsymbol{\lambda}}$ を帰納的に作り, それに現れる単項式を拾う.

公式 5.1. 変数 x_1 の現れ方：

$$F^{\boldsymbol{\lambda}} = F_1^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)} := x_1^{m-1}F_2^{(\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)} + x_1^{m-2}F_2^{(\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3,\ldots,\lambda_m)} + \cdots + x_1F_2^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}-1,\lambda_m)} + F_2^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1},\lambda_m-1)}, \tag{5.10}$$

ここに，$\lambda_1 = 1$ のとき，$F_2^{(\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)} := F_2^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_m)}$

$\lambda_{\kappa-1} = \lambda_\kappa$ のとき，$F_2^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{\kappa-1},\lambda_\kappa-1,\ldots,\lambda_m)} := 0$,

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

変数 x_{n-2} の現れ方：

$F_{n-2}^{(3)} := 1,\ \ F_{n-2}^{(1,2)} := x_{n-2}F_{n-1}^{(2)} + F_{n-1}^{(1,1)} = x_{n-2} + x_{n-1},$

$F_{n-2}^{(1,1,1)} = x_{n-2}^{\ 2}F_{n-1}^{(1,1)} = x_{n-2}^{\ 2}\,x_{n-1},$

変数 x_{n-1} の現れ方： $F_{n-1}^{(2)} := 1,\ \ F_{n-1}^{(1,1)} := x_{n-1}.$

変数 x_n は現れない．

例 5.1. $F^{(1,n-1)} = x_1+x_2+\cdots+x_{n-1},\quad \mathrm{A}^{(1,n-1)} = \langle x_1+x_2+\cdots+x_n\rangle_{\boldsymbol{C}}$,

$f_{(1,n-1)} = n-1,\quad \big\langle x_j\,;\,1\le j\le n-1\big\rangle_{\boldsymbol{C}} \quad \mathrm{mod}\ \mathrm{A}^{(1,n-1)}.$

$$F^{(2,n-2)} = x_1(x_2+\cdots+x_{n-1}) + x_2(x_3+\cdots+x_{n-1}) + \cdots + x_{n-3}(x_{n-2}+x_{n-1}),$$

$\mathrm{A}^{(2,n-2)} = \big\langle x_i(x_1+\cdots+x_n) - x_i^2\,;\,1\le i\le n\big\rangle_{\boldsymbol{C}}$,

$f_{(2,n-2)} = \dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-1 = \dfrac{1}{2}n(n-3),$

$\big\{x_\alpha x_\beta\,;\,1\le\alpha<\beta<n,\ \alpha\le n-3\big\} \quad \mathrm{mod}\ \mathrm{A}^{(2,n-2)}.$

補題 5.2. 多項式 $F^{\boldsymbol{\lambda}}$ に現れる単項式を $X_1, X_2, \ldots, X_{f'}$ とすると，$f' = f_{\boldsymbol{\lambda}} = \dim\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$.

証明． $F^{\boldsymbol{\lambda}}$ の帰納的構成法から f' の帰納公式を書き下すと，

$$f' = f_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m} + f_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3,\ldots,\lambda_m} + \cdots + f_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1},\lambda_m-1}.$$

(5.5) 式により，$f' = f_{\boldsymbol{\lambda}} = f$ を得る． □

Satz I (§5, p.674). 単項式 $X^{(\alpha)}$ は mod $\mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ によって，$X_1, X_2, \ldots, X_f$ の整係数 1 次結合に合同である．

5.6 Satz I の証明のための主定理

主定理（Satz IV, §6, p.677）. $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ ($\boldsymbol{\lambda} \in P_n$) は次のように実現出来る．$\mathfrak{S}_n$-module $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}} := \mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}} \bmod \mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の基底は，多項式 $F^{\boldsymbol{\lambda}}$ に現れる単項式を $X_1, X_2, \ldots, X_f$ ($f = f_{\boldsymbol{\lambda}}$) を mod $\mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ で考えれば得られる．このとき，任意の $R \in \mathfrak{S}_n$ に対して，整数 $c_{\alpha\beta}$ が存在して，

$$\pi_{\boldsymbol{\lambda}}(R)X_\alpha \equiv c_{\alpha 1}X_1 + c_{\alpha 2}X_2 + \cdots + c_{\alpha f}X_f \pmod{\mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}}.$$

上でいろいろ準備してあるが，この定理の証明を最後まで書くのは，長くなり過ぎるので省略する．

6 Frobenius-Schur の共著 [F75, 1906] の結果

[F75] G. Frobenius und I. Schur, Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin 1906, pp.186–208.

序文．表現 $\pi(R)$ ($R \in \mathfrak{H}$) の共役表現（**konjugierte Darstellung**）とは，$\pi^t(R) := {}^t\pi(R^{-1})$ ($R \in \mathfrak{H}$) である．

（平井注．π がコンパクト群の有限次元行列表現のとき，$\overline{\pi}(R) := \overline{\pi(R)}$ ($R \in \mathfrak{H}$) [各行列要素の複素共役] とおけば，$\pi^t \cong \overline{\pi}$ である．）

(1) 群 $\mathfrak{H}$ の $\boldsymbol{C}$ 上の既約表現は次の 3 種に分けられる [F75, §2].

1. $\boldsymbol{R}$ 上の既約表現に同値なもの（1 種とよぶ），

2. $\boldsymbol{R}$ 上の既約表現に同値でないが，$\pi^t \cong \pi$ のもの（2 種とよぶ），

3. $\boldsymbol{R}$ 上の既約表現に同値でなく，$\pi^t \ncong \pi$ のもの（3 種とよぶ）．

(2) 有限群 $\mathfrak{H}$ の既約表現 π に対して，

(2a) $\chi_\pi(\mathfrak{H}) \subset \boldsymbol{R} \iff \pi$ は 1 種または 2 種，

(2b) (§4) π が 1,2,3 種に従って，$c_\pi = +1, -1, 0$ とおくと，

$$\sum_{R \in \mathfrak{H}} \chi_\pi(R^2) = c_\pi h, \quad h = |\mathfrak{H}|. \tag{6.11}$$

(2c) (§4) $\zeta(R) := \sharp\{S \in \mathfrak{H};\, S^2 = R\}$ とおくと，

$$\sum_{[\pi] \in \widehat{\mathfrak{H}}} c_\pi \chi_\pi(R) = \zeta(R), \tag{6.12}$$

7 $\mathfrak{S}_n$ の既約スピン表現が $\boldsymbol{R}$ 上で実現出来るための必要十分条件 [S58]

[S58, 1927] J. Schur, Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **158** (1927), 63–79.

対称群 $\mathfrak{S}_n$ のスピン既約表現 π が実数体 $\boldsymbol{R}$ 上での行列表示 T_π を持つための必要十分条件を与えている.

Shifted Young diagram of degree n (= strict partition of n):

(7.1) $\quad \boldsymbol{\nu} = (\nu_j)_{1\leqslant j\leqslant m},\ n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m,\ \nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_m > 0$

その全体を SP_n とおく. $\boldsymbol{\nu} \in SP_n$ に対応する ([S16, 1911] での) スピン既約表現を $\tau_{\boldsymbol{\nu}}$ と書く. $\mathrm{sgn}_{\mathfrak{S}}$ を $\mathfrak{S}_n$ の符号表現とするとき, $\mathrm{sgn}_{\mathfrak{S}} \cdot \tau_{\boldsymbol{\nu}} \cong \tau_{\boldsymbol{\nu}}$, または, $\not\cong \tau_{\boldsymbol{\nu}}$, に従って, $\tau_{\boldsymbol{\nu}}$ を自己同伴または非自己同伴という. $\pi_{\boldsymbol{\nu}}$ が自己同伴であるための必要十分条件は, “$n-m$ が偶数” である.

序文. $\mathfrak{S}_n$ の線形既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ ($\boldsymbol{\lambda} \in P_n$) は, 整数環上の行列で, 実現出来る [S11]. しかし, スピン既約表現については, この種の研究は非常に難しい. そこで, $\tau_{\boldsymbol{\nu}}$ ($\boldsymbol{\nu} \in SP_n$) に対しては, 実数体上で実現出来るかどうかを問う. そこでは Frobenius-Schur [F75, 1906] の判定法 (2b) を使う.

Satz I (in Introduction). $\tau_{\boldsymbol{\nu}}$ が実数体上実現可能であるための必十条件は, $n-m \equiv 0, 1, 2, 6, 7 \pmod 8$, である.

系. $\mathfrak{S}_n$ のすべてのスピン既約表現が実数体上で実現可能であるのは, $n = 1, 2, 3, 9, 10, 11, 19$, に限る.

Satz V (in §7). 交代群 $\mathfrak{A}_n$ のスピン既約表現で, $\boldsymbol{\nu} \in SP_n$ に対応するものが, 実数体上実現可能であるための必十条件は, “$n-m \equiv 0, 1, 7 \pmod 8$” である.

例 7.1.

n	SP_n （n の厳格分割）
5	$(5),\ (4,1),\ (3,2)$
6	$(6),\ (5,1),\ (4,2),\ (3,2,1)$
7	$(7),(6,1),(5,2),(4,3),(4,2,1)$
8	$(8),(7,1),(6,2),(5,3),(5,2,1),(4,3,1)$
9	$(9),(8,1),(7,2),(6,3),(6,2,1),(5,4),(5,3,1),(4,3,2)$
10	$(10),(9,1),(8,2),(7,3),(7,2,1),(6,5),(6,4,1),(6,3,2),(5,4,1),(5,3,2),(4,3,2,1)$
11	$(11),(10,1),(9,2),(8,3),(8,2,1),(7,4),(7,3,1),(6,5),(6,4,1),(6,3,2),(5,4,2),$ $(5,3,2,1),(5,4,2),(5,3,2,1)$
12	$(12),\ldots,(5,4,2,1)$
13	$(13),\ldots,(5,4,3,1)$
14	$(14),\ldots,(5,4,3,2)$
15	$(15),\ldots,(5,4,3,2,1)$
16	$(16),\ldots,(6,4,3,2,1)$
17	$(17),\ldots,(6,5,3,2,1)$
18	$(18),\ldots,(6,5,4,2,1)$
19	$(19),(18,1),(17,2),(16,3),(16,2,1),(15,4),(15,3,1),(14,5),(14,4,1),(14,3,2),$ $(13,6),(13,5,1),(13,4,2),(12,7),(12,6,1),(12,5,2),(12,4,3),(12,4,2,1),(11,8),$ $(11,7,1),(11,6,2),(11,5,3),(11,5,2,1),(11,4,3,1),(10,9),(10,8,1),(10,7,2),$ $\ldots,(9,4,3,2,1),(8,5,3,2,1),(7,6,3,2,1),(7,5,4,2,1),(6,5,4,3,1)$
20	$(20),\ldots,(6,5,4,3,2)$
21	$(21),\ldots,(6,5,4,3,2,1)$

参考文献

Frobenius 全集での論文番号 53 は [F53] と記し，Schur 全集での論文番号 4 は [S4] と記す．

[Bena,1976] M. Benard, Schur indices and splitting fields of the unitary reflection groups, J. Algebra, **38**(1976), 318-342.

[Dede] R. Dedekind, Über einem arithmetischen Satz von Gauß, Mitteilung der Deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag, **1892**, pp.1–11 (Werke **2**, 28–38).

[F53] F. Frobenius Über Gruppencharaktere, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896, pp.985–1021.

[F54] —, Über die Primfactoren der Gruppendeterminante, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896, pp.1343–1382.

[F56] —, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1897, pp.944–1015.

[F60] —, Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichle der Königlich Preußifchen Akademie der Wissenshaften zu Berlin 1900, pp.516–534.

[F61] —, Über die Charaktere der alternierenden Gruppe, Sitzungsberichle der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin 1901, pp.303–315.

[F68] —, Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1903, pp.328–358.

次の **[F75], [F76]** は，**Schur** との共著（**Frobenius** 全集第 **3** 巻より）

[F75] —, Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin 1906, pp.186–208.

[F76] —, Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1906, pp.209–217.

[S1] J. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen (Inaugural-Dissertation), 1901, Berlin, Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, Band I, pp.1–71.

[S4]=[Sch1] J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **127** (1904), 20-50.

[S6] J. Schur, Über eine Klasse von endlichen Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.77–91.

[S7] I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharactere, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.406–432. [§2 に **Schur** の補題 あり]

[S9] I. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1906, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.164–184. [**Schur index** の研究]

[S10]=[Sch2] J. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **132** (1907), 85-137.

[S11] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1908, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.664–678.

[S14] I. Schur, Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, American Mathematical Society Transactions, **10** (1909), 159–175.

[S16]=[Sch3] J. Schur, Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **139** (1911), 155-255.

（注： [S4], [S10], [S16] は射影表現三部作である）

[S58, 1927] J. Schur, Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind, ibid., **158** (1927), 63–79.

[You1, 1901] A. Young, Quantitative substitutional analysis, Proc. London Math. Soc., **33**(1901), 97–146.

[You2, 1902] A. Young, Quantitative substitutional analysis (2nd paper), Proc. London Math. Soc., **34**(1902), 361–397.

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

80

彗星に関するガウスの研究について

植　村　栄　治　（大東文化大学）

２０１５年１０月１０日

1　はじめに

夜空にどこからともなく尾を引いて現れる茫洋とした星＝彗星は古代から人々の関心を集めてきたが，近代的な自然科学の対象として考察されるようになったのは17世紀頃からである．18世紀にはハレー彗星の回帰が予言・確認され，楕円軌道を描く周期彗星の存在が明らかになった．また，18世紀末までには放物線軌道を描く彗星についてその軌道計算を行うことが可能となっていた．

ガウスは，1801年に小惑星ケレスの楕円軌道を正確に計算することに成功し，その再発見に貢献した．ガウスが1809年に刊行した著書「天体運動論」には，楕円軌道あるいは双曲線軌道を描いて太陽を周る天体の軌道を計算する方法が詳述されている．

彗星には，再び太陽近辺に戻ってくる周期彗星と，二度と戻ってこない非周期彗星とがある．彗星と太陽の２体問題として考える限り，周期彗星の軌道は楕円（円を含む）であり，非周期彗星の軌道は放物線または双曲線である．もっとも，実際には木星その他の諸惑星の重力の影響等によって途中で全く違った軌道に変化することも珍しくない．

周期彗星であっても，その公転周期が概ね200年以上のものは非周期彗星に分類されるのが通例である．彗星の場合，太陽からある程度離れると観測できなくなるので，軌道計算も太陽近辺（近日点の周辺）に重きが置かれる．

たとえ楕円軌道を描く周期彗星であっても，彗星が発見された当初は，放物線軌道で近似した方が精度のよい軌道が得られると言われている．つまり，彗星の軌道計算に関しては，小惑星の場合と異なり，ガウスが「天体運動論」で明らかにした軌道計算方法は必ずしも必要でなく，18世紀末までに知られていた放物線軌道の計算方法で十分だった可能性が高い．

以上のような状況を背景に，本稿では，19世紀前半に欧州で目撃された諸彗星に関して，その観測や軌道計算につきガウスがどの程度の貢献をしたのかを具体的・個別的に探ることにする．

2　18世紀末までの彗星研究について

彗星についての古い記録としては，古代バビロニアの記録があるとされる．欧州では，彗星は「遠くにある星」でなく「上空で生じる気象現象」と考えられたため，彗星の古い記録はそれほど多くない．中国では彗星に対する関心が深く，史記には紀元前５世紀から紀元前１世紀にかけて現れた幾つかの彗星の記録がある．そのうち，ＢＣ240年の彗星はハレー彗星の確実な記録として世界最古とされている．日本では，

日本書紀にある634年の彗星の記録が最古とされている．

アリストテレスは，彗星は惑星の一種だとする従来の説を否定し，大気の上層部で生じる気象現象だと主張した．彼のこの考えの影響力は大きく，その後の西洋の天文学を長く支配することになった．

デンマークの天文学者ティコ・ブラーエ(Tycho Brahe, 1546-1601)は，1577年の彗星を観測して地球からの距離を測定し，彗星は少なくとも月より４倍以上遠くにあって宇宙空間を移動する天体であることを立証した．ヨハネス・ケプラー（Johannes Kepler, 1571-1630）は，1609年に，惑星は太陽を焦点とする楕円軌道を描くという「ケプラーの第１法則」を発表したが，同法則は彗星の軌道については触れていない．ケプラー自身は，彗星は直線運動をしていると考えており，これを支持する天文学者もいたが，楕円あるいは放物線を描くと主張する者もおり，両者が対立していた．

アイザック・ニュートン(Isaac Newton, 1642-1727)は，1687年刊行のプリンキピアにおいて，天体の軌道は楕円，双曲線，放物線のいずれかになることを示し，この論争に決着をつけた．

3　彗星の概念と構造

古くから，洋の東西を問わず，「彗星」と言えば，先頭部にぼんやりとした「コマ」を持ち後部に長い「尾」を持って天空に現れる天体を指していた．

現代の天文学では，太陽の周りを回る天体のうち，惑星・準惑星・衛星以外のものはまとめて「太陽系小天体」と呼ばれる．そして「太陽系小天体」は，「小惑星」，冥王星より遠くに位置する「太陽系外縁天体」，「彗星」，「惑星間塵」に分類される．

「小惑星」と「彗星」の区別については，観測をしたときに質量放出（例：ガスや塵の噴出）の兆候があるものは「彗星」，そうでないものは「小惑星」とされる．一般に小惑星の軌道帯（火星と木星の間にあり，黄道面との傾斜角が小さい）と彗星の典型的な軌道（遠日点は木星より遠く，公転面は黄道面とほぼ無関係）とはかなり異なるが，最近では，標準的な小惑星の軌道帯にありながら質量放出が見られる天体や，彗星のような軌道を持ちながら質量放出が見られない小惑星も発見され，両者の厳密な区別は困難になってきている．

彗星であっても，太陽から遠く離れている所では，全体が凍って質量放出が行われず，小惑星と区別できない．しかし，多くの場合，太陽に３天文単位（ＡＵ．地球と太陽の平均距離を１とする）程度まで近づくと，太陽からの熱によって蒸発が始まる．

彗星のコマは希薄な球状の大気でその中心部は明るく光っている．コマの中には「核」と呼ばれる固体が存在するが，コマにさえぎられてその姿は見えない．太陽と反対側には彗星の「尾」が形成される．尾には，彗星の核から放出された塵によって形成される「ダストテイル」のほか，イオン化されたガスによって形成される「イオンテイル（又はプラズマテイル)」があり，また，中性ナトリウム原子によって形成される尾が観測される場合もある．

核の大きさは直径数百メートルから数キロメートル程度だが，コマはそれよりずっと大きく，直径百万キロメートル以上になることもある．尾も，長い場合には，１Ａ

Uに達することがある.

4　彗星の軌道

ニュートンの証明したところによれば，太陽を周る彗星の軌道は楕円（円を含む），双曲線，放物線のいずれかになる．もっとも，これは木星その他の天体が彗星に及ぼす影響を無視した場合の話であり，太陽光線や太陽風による圧力等の非重力的効果も考慮していない．また，彗星の質量放出に伴う質量減少や反動作用の効果，あるいは太陽の引力による彗星の分裂や崩壊等も考えていない．

彗星が木星や土星に接近したためにその軌道が全く変化してしまう現象は決して珍しくない．したがって，彗星の軌道計算に当たっては単純な円錐曲線の当てはめで済まない可能性があることを常に念頭に置く必要がある．

天体が太陽を中心とする円軌道を描く場合，その天体の観測データから軌道を決定する方法はガウス以前から知られていた．また，天体が太陽を焦点とする放物線軌道を描く場合，その天体の観測データから軌道を知る方法はまずニュートンが考案し，18 世紀末にはオルバースが精密な計算方法を確立した．

これに対し，天体の軌道が太陽を焦点の１つとする楕円（円を除く．以下同じ）である場合については，1801 年にガウスが３個の観測データから軌道を決定する方法を編み出してケレスの再発見を可能としたことがよく知られている．また，ガウスが 1809 年に刊行した「天体運動論」では，天体が楕円軌道のほか双曲線軌道を取る場合の軌道決定方法についても述べられている．

ところで，彗星の軌道は，多くの場合，円，楕円，双曲線，放物線のいずれになるのだろうか．19 世紀前半頃までに発見された彗星に関して言えば，若干の周期彗星が楕円軌道であるのを除くと，ほとんどは放物線軌道として計算されていた．円軌道と双曲線軌道は実例としては皆無だったと考えてよい．

19 世紀前半においては，観測可能な彗星の位置は，木星の軌道よりもずっと内側の範囲に限られていた．したがって，周期彗星の場合の公転周期を別とすると，太陽周辺の近日点を中心として，そこから 1～2ＡＵ以内程度の範囲で良い近似を与える計算方法があれば一応事足りた．つまり，実際には楕円軌道であっても，その遠日点が例えば 10ＡＵを超えるような場合には，太陽から遠い軌道部分を計算しても観測によってその当否を確認することはできない．そして，太陽に近い軌道部分だけ求めるのであれば，放物線軌道を仮定して計算しても――その結果さえ良好なら――何ら差し支えない．

このように考えると，彗星の軌道については――特に彗星が発見された直後に太陽周辺におけるおおよその軌道を知りたいときは―― 放物線軌道を仮定して計算すれば足りるので，1809 年の「天体運動論」の刊行以前でも天文学者たちは軌道計算ができたわけである．

このように，彗星の軌道計算については，ケレス等の小惑星の軌道計算と異なり，ガウスの独壇場とは言えなかった．では，ガウスは彗星の観測や軌道計算についてどのような貢献をしたのであろうか．それを以下に見ていこう．

5　ガウスが観測又は軌道計算に関与した彗星

ガウスは若いときから天文学に関心を持っていた．小惑星ケレスの軌道計算に成功したのは 1801 年のことだが，既に 1798 年７月には「彗星の理論を，より完成されたものにした」とガウス日記に記している（後記８参照）．

1802 年頃からガウスは質素な観測器械で天文観測を行っていた．また，1807 年にゲッチンゲン大学の天文台長に就任した後は，次第に高性能の望遠鏡をそろえながら天体観測を行っていた．

当時の彗星に関する研究は，望遠鏡による位置や形状の観測と軌道の計算が主だった．ガウスはゲッチンゲン大学の天文台において彗星を観測する一方，自己あるいは他人が取得した観測データに基づいて彗星の軌道を計算する，という２つの面で彗星の研究に貢献していたわけである．そこで，まず，ガウスが実際に観測又は軌道計算に関与した記録がガウス全集に記載されている彗星について，ガウスがどのような寄与をしたのかを調べてみよう．

観測又は軌道計算についてガウスが関与した彗星としては，ガウス全集によれば，次のものが挙げられる．

[以下のリストについての注記：/の前のＣは非周期彗星(公転周期 200 年以上の周期彗星を含む)を，また，Ｐは周期彗星を，Ｄは発見後に消滅した彗星をそれぞれ表す．ＰとＤについてはまとめて 18 世紀以来の通し番号が付される． /の後は彗星の発見時期を表す．すなわち，４桁数字は発見年を示し，アルファベットはＡが１月前半，Ｂが１月後半，Ｃが２月前半を意味して以下同様に続くが，Ｉは使用しないので，Ｙが 12 月後半となる．末尾の数字は当該半月の間で何番目に発見された彗星かを示す．（　）の中は発見者の名前又は当該彗星の一般的な名称．［　］の中は周期彗星について今日算定されている公転周期．]

★ガウスが関与した彗星（延べ 18 個）の一覧表

発見年	符号	発見者又は名称	公転周期	（後出６の番号）
1805 年	2P/1805 U1	(Encke)	[3.30 年]	【1】
1805 年	3D/1805 V1	(Biela)	[6.54 年]	【2】
1807 年	C/1807 R1	(Great comet)	[1714 年]	【3】
1811 年	C/1811 F1	(Flaugergues)	[3096 年]	【4】
	C/1811 W1	(Pons)		
1813 年	C/1813 C1	(Pons)		
1815 年	13P/1815 E1	(Olbers)	[69.5 年]	【5】
1817 年	C/1817 Y1	(Pons)		
1818 年	2P/1818 W1	(Encke)	[3.30 年]	【6】
	C/1818 W2	(Pons)		
1819 年	C/1819 N1	(Great comet)		
1821 年	C/1821 B1	(Nicollet-Pons)		

1823 年	C/1823 Y1	(Great comet)	
1826 年	3D/1826 D1	(Biela)	[6.54 年]
1827 年	C/1827 P1	(Pons)	
1844 年	54P/1965 M1	(de Vico-Swift-NEAT)	[7.34 年]
	C/1844 Y2	(d' Arrest)	
1845 年	C/1845 L1	(Great June comet)	

6 いくつかの彗星についての具体例

【1】エンケ彗星［2P/1805 U1］(1805 年 10 月 20 日フートら発見)

1805 年 10 月 20 日早朝にフランクフルト・アン・デル・オーデル在住のヨハン・フート(Johann Sigismund Gottfried Huth, 1763-1818)は彗星を発見した. マルセイユ天文台のジャン=ルイ・ポン(Jean-Louis Pons, 1761-1831)とパリ天文台のアレクシス・ブヴァール(Alexis Bouvard, 1767-1843)も同じ日にこの彗星を発見した。フランツ・フォン・ツァハ(Franz Xaver von Zach, 1754-1832)はこれらの情報を直ちに自分が編集・発行していた月刊誌「月報」(注１)の 1805 年 11 月号に掲載した。なお, この彗星は, 公転周期 3.3 年の周期彗星であることが 1819 年にヨハン・フランツ・エンケ(Johann Franz Encke, 1791-1865)によって確認され, 以後, エンケ彗星と呼ばれるようになる。

オルバースは, この彗星の軌道要素の計算をフリードリヒ・ヴィルヘルム・ベッセル(Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846)に依頼しその結果を 1805 年 12 月 7 日付の書簡でツァハに送った。ガウスは, 自身の計算した軌道要素を 12 月 5 日付の書簡でツァハに送った. 両者の放物線軌道の軌道要素は 1806 年 1 月の月報に掲載された(月報 13 巻 79-83 頁(1806 年 1 月), ガウス全集(以下「全集」)第 6 巻 265-266 頁)。ガウスは, フートやテュリの観測データの精度が低いようだと感じており, 自分の算出した軌道要素も余り当てにならないと断っている。

以上のように, この彗星の観測は何人もの天文学者によって行われたが, 1805 年末頃までにこの彗星の放物線軌道要素を計算してツァハに報告できたのは, ベッセルとガウスのみであった。

(注１) この「月報」は, ツァッハが編集・発行していた月刊誌「地球及び天空に関する学問の発展のための月刊報告」(Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels- Kunde)を指す.

【2】ビエラ彗星［3D/1805 V1; Biela］(1805 年 11 月 10 日ポンス発見)

1805 年 11 月 10 日にポンが前月のエンケ彗星とは別個の彗星を発見した。続いて, 11 月 16 日にはブヴァールが, また 11 月 22 日にはフートが同じ彗星を発見した。なお, この彗星については, 1826 年に至りヴィルヘルム・フォン・ビーラ(Wilhelm von Biela, 1782-1856)が周期 6.6 年の周期彗星であることを発見し, それ以後はビエラ彗星と呼ばれるようになる。以下, この彗星に関してガウスが執筆した書簡や論

稿で全集に収録されているものの概要を見ていこう。
a)［月報 13 巻 83-91 頁(1806 年 1 月)，全集第 6 巻 266 頁］

1805 年 12 月 8 日のガウス自身の観測データと，11 月 16 日および 12 月 2 日の他者の観測データに基づき，この彗星の放物線軌道の昇交点=250° 33’，軌道傾斜角=16° 33’等と計算した．

b)［1809 年度用天文年鑑 137-140 頁(1806 年)，全集第 6 巻 267-269 頁，ガウスよりボーデ宛の 1806 年 3 月 14 日付書簡］

その後の他者の観測データをも利用して修正計算したところ，昇交点=250° 33’ 34″.9，軌道傾斜角=16° 30’ 31″.9，近日点距離=0.8919284ＡＵ等となった．この軌道要素に基づく計算値と全 19 個の観測データとの誤差を調べると，赤経については＋2’12″ ～－2’30″，赤緯については＋2’44″ ～－1’12″の範囲に収まっている．この彗星の軌道は 1772 年発見の彗星と似ているが，特に近日点距離等においてかなりの相違がある。

c)［月報 14 巻 75-86 頁(1806 年 7 月)，全集第 6 巻 270-275 頁：ガウスよりツァッハ宛の 1806 年 5 月 20 日付書簡］

23 個の観測データを示す．これを楕円軌道で計算すると，昇交点=251° 28’，軌道傾斜角=12° 43’，公転周期=4.74 年となる．これだと諸データと数十秒程度しか違わない．この軌道は，1772 年の彗星の軌道(昇交点=263° 24’，軌道傾斜角=13° 39’と計算される)と似ているが，同一とまで断定はできない．

d)［月報 14 巻 181-186 頁(1806 年 8 月)，全集第 6 巻 275-277 頁：ガウスよりツァッハ宛の 1806 年 7 月 8 日付書簡］

新たに入手したフランスの観測者の 6 個の観測データをこれまでに算出された軌道要素と照合すると，「この彗星の軌道を楕円と見た方が放物線と見た場合よりも観測データと良く一致する」とは言えない．なお今後の観測を待つ要あり．（注２）

【参考】この彗星と 1772 年の彗星は同一であることを 1826 年にビエラが確認した．今日の計算では，昇交点=250.669°，軌道傾斜角=13.2164°，公転周期=6.6454 年，離心率=0.751299，軌道長半径=3.534658ＡＵだったとされている．ビエラ彗星は 1845 年に２つに分裂し，1852 年を最後に以後は観測されていない．なお，ガウスの示した公転周期 4.74 年は実際とかなり違っている．1772 年と 1805 年の彗星を同一とした場合，33 年間の間にガウスによれば 7 回周回したことになるが，実際には 5 回だった．ガウスの示した軌道要素がこれほど実際と違っていたのは珍しい．

（注２） この頃，ツァッハは最小二乗法についてのルジャンドルの最新の著作のことを書簡でガウスに知らせた模様である．それに対し，ガウスはこの 1805 年 7 月 8 日の書簡で，自分は最小二乗法の原理を 12 年前から種々の計算で使用していたこと，及びその原理は自分の方法(Methode)の本質に属するものではないが，自分の仕事において(今後)使用するであろう(den ich auch in meinem Werke mit gebrauchen werde)旨を述べている(全集第 6 巻 276 頁)．ここで″gebrauchen werde″と未来形になっている点が注目される。ガウスが 1801 年にケレスの軌道計算を行った際に最小自乗法を

用いて精確な軌道を得たとの記述が一部の書物に見られるが，それが正しくないことはこの文章からもうかがえる．

【3】1807 年の大彗星 ［C/1807 R1］（1807 年 9 月 9 日パリジ発見）

a）［月報 16 巻 562-567 頁(1807 年 12 月)，全集第 6 巻 292 頁］

ガウスは，ブレーメンとリリエンタールにおける 1807 年 11 月 5 日までの観測データに基づき，この彗星の放物線軌道を昇交点=266° 38'，軌道傾斜角=63° 12'，近日点距離=0. 6478772ＡＵ等と計算した．この軌道要素は，編者ツァッハやベッセルが計算して得たものとそれほど違わない．

b）［1811 年度用天文年鑑 135-139 頁(1808 年)，全集第 6 巻 293-294 頁：ガウスより編集者宛の 1808 年 1 月 24 日付書簡］

ガウス自身が観測した 1807 年 12 月 17 日，29 日および 1808 年 1 月 4 日の計 5 個の観測データと同僚ハーディング教授の観測データ 1 個を掲載．軌道要素については上記 a)の内容を紹介．放物線軌道からのずれは，あったとしてもわずかだろうとした．

c）［ゲッチンゲン学術公報 32 号 313-315 頁(1808 年 2 月 25 日)，全集第 6 巻 298-299 頁］

上記 b)の観測データが示され，さらにガウス自身による 1808 年 1 月 31 日の観測データが追加された．

d）［ゲッチンゲン学術公報 53 号 521-523 頁(1808 年 4 月 2 日)，全集第 6 巻 300-301 頁］

ベッセルが 3 月 18 日付でガウスに送った書簡によれば，この彗星を 2 月 24 日まで計 8 回観測できた．オルバースの 2 月 14 日の観測データを付記．ベッセルの計算した放物線軌道は上記 b)のガウスの結果とほぼ一致する．さらにベッセルは楕円軌道の場合を計算して，公転周期 1953 年等とした．

e）［ゲッチンゲン学術公報 180 号 1793-1795 頁(1808 年 11 月 10 日)，全集第 6 巻 308-309 頁］

ペテルスブルグではこの彗星が 3 月 1 日・22 日・27 日にも観測された．

【参考】この彗星に関して，ベッセルは，上記 d)で見たように，1808 年 4 月の時点で 1953 年という公転周期を算出した．彼は 1810 年に著書『1807 年に現れた大彗星の見かけ上の及び真の軌道に関する研究』（参考文献【４】）を刊行してその計算方法を説明している．なお，現在では，この彗星の昇交点=269. 48370°，軌道傾斜角=63. 17620°，近日点距離=0. 646124ＡＵ，離心率=0. 995488，公転周期=1714 年とされている．

【4】1811 年の大彗星（フロジェルグ大彗星）［C/1811 F1; Flaugergues］（1811 年 3 月 25 日フロジェルグ発見）

この彗星は肉眼で 8 ヶ月以上に渡って見ることができた．見かけの明るさは約 0 等級にまで達した．尾は 90° 以上の長さに見えたとも言われる．トルストイの小説「戦争と平和」にも登場することで知られている．

a）［月報 24 巻 180-182 頁(1811 年 8 月)，全集第 6 巻 326-327 頁：ガウスからリンデ

ナウ宛の 1811 年 8 月 3 日付書簡]

ツァッハとリンデナウの観測データに基づき，放物線軌道を昇交点=141° 4’ 59″，軌道傾斜角=73° 48’ 02″，近日点距離=0. 980686ＡＵ等と計算した．また，1811 年 8 月～10 月の位置と光度及び 1812 年 7 月 2 日の位置と光度を予測した．

b) [ゲッチンゲン学術公報 130 号 1289-1293 頁(1811 年 8 月 17 日)，全集第 6 巻 327-330 頁]

内容は，上記 a)とほぼ同じ．

c) [1814 年度用天文年鑑 254-256 頁(1811 年)，全集第 6 巻 333-334 頁：ガウスより編集者宛の 1811 年 9 月 10 日付書簡]

ガウスが観測した 9 月 4 日，6 日，7 日のデータとツァッハの得た新しい観測データに基づいて，放物線軌道を昇交点=140° 24’ 13″，軌道傾斜角=73° 7’ 17″，近日点距離=1. 040064ＡＵ等と修正した．また，1811 年 9 月 12 日から 12 月 21 日までの 10 日ごとの位置，地球からの距離及び光度を予測した．

d) [月報 24 巻 304-307 頁(1811 年 9 月)，全集第 6 巻 335-337 頁：ガウスからツァッハ宛の 1811 年 9 月 8 日付書簡及び同年 9 月 16 日付書簡]

上記 c)と同じ観測データ及び修正した軌道要素を示す．楕円性の確認はまだできない．彗星の尾は２本はっきり見える．前例のない彗星で，核は見えない（以上 9 月 8 日付書簡)．9 月 9 日～16 日までのガウス自身の観測データに基づき，12 月 31 日までの軌道を 10 日ごとに予測した．これまでの実測データと予測値を見ると赤経のずれが急速に増大しているので，楕円性が存在するかと思われる（以上 9 月 16 日付書簡)．

e) [ゲッチンゲン学術公報 151 号 1497-1499 頁(1811 年 9 月 21 日)，全集第 6 巻 337-338 頁]

上記 c)，d)と概ね同じ内容で，特に新規の情報はない．楕円性はまだ認定できないとしている．

f) [月報 24 巻 406-411 頁(1811 年 10 月)，全集第 6 巻 338-340 頁：後半ではガウスからツァッハ宛の 1811 年 10 月 14 日付書簡を紹介]

計６名の観測者から得られた 8 月 22 日～10 月 11 日の全観測データについて放物線軌道とのずれを示す(最大 20’ 程度)．ガウスからの 10 月 14 日付書簡の内容：これまでの計算中に書き間違いが発見された．それを修正した後の放物線軌道は，昇交点=140° 21’ 40″，軌道傾斜角=73° 4’ 18″，近日点距離=1. 015530ＡＵ等となる．この軌道と観測結果とのずれは概ね 1’ 以内に収まるので，楕円軌道の確かな証拠はまだ認められない．もし楕円軌道だとすると，公転周期は千年以上になると思われる．

g) [月報 24 巻 507-517 頁(1811 年 11 月)，全集第 6 巻 341-342 頁：ガウスからツァッハ宛の 1811 年 11 月 15 日付書簡]

ガウスの計算した最新の放物線軌道を，オルバース(ブレーメン)，ニコライ（ゼーベルク）(Friedrich Berhard Gottfried Nicolai, 1783-1846)の 10 月・11 月の観測データと比較した．どちらも赤経は計算値より 2～3’ 程度小さく，赤緯は 2～6’ 程度大きい．また，この彗星の発見直後の 1811 年 3 月 26 日から 4 月 1 日までのフロジェルグの観測データと上記軌道との差をニコライが計算したところ，赤経は＋14’ ～－6’ 程度，

赤緯は＋3'～＋5'程度の差があった.

h) ［ゲッチンゲン学術公報 19 号 185-189 頁(1814 年 1 月 31 日), 全集第６巻 373-375 頁：ベッセルがガウスに宛てた 1813 年 12 月 30 日付書簡の紹介］

1812 年 8 月にコーカサスで Vincent Wisniewski がこの彗星の数か月ぶりの観測に成功した. その５回の観測データを, ベッセルが計算した楕円軌道と比較すると, 赤経・赤緯のずれは 1' から 2' 程度に収まる.

【参考】現在では, この彗星の昇交点は 143.30°, 軌道傾斜角は 73° 5' で, 公転周期 3096 年程度の楕円軌道とされている.

【5】オルバース彗星 ［13P/1815 E1; Olbers］ (1815 年 3 月 6 日オルバース発見)

a) ［ゲッチンゲン学術公報 45 号 441 頁(1815 年 3 月 20 日), 全集第６巻 382 頁：オルバースのガウス宛て 1815 年 3 月 7 日付書簡の紹介］

オルバースは, 新彗星を 1815 年 3 月 6 日に発見した旨をガウスに 3 月 7 日付の書簡で知らせた. それによると, 3 月 6 日 10 時 55 分(ブレーメン平均時)には赤経 49° 32', 赤緯北 32° 7' にあり, 3 月 7 日 7 時 40 分には赤経 49° 22', 赤緯北 32° 32' にあった. 今後かなり長い間観測できるであろう. この彗星は非常に小さく, ぼんやりした核と淡いもやを有している.

b) ［ゲッチンゲン学術公報 55 号 537-538 頁(1815 年 4 月 8 日), 全集第６巻 382-383 頁］

1815 年 3 月 20 日から 30 日までに４回の晴れた夜があり, 新彗星について５個の観測データが得られた. そのうちの１つはエンケの観測による. 実地天文学における彼の有能さは既にしばしば示されている. 他所からの観測結果の報告はまだない. 上記の観測データに基づいてガウスが暫定的に求めたこの彗星の軌道要素は, 近日点通過時刻=1815 年 4 月 24 日 16 時 37 分 34 秒(ゲッチンゲン平均時), 昇交点=82° 43' 4″, 軌道傾斜角=45° 8' 55″, 近日点距離=1.24738ＡＵ等である. この彗星は終始肉眼では見えず, ６月には観測できなくなると予測される.

c) ［1818 年度用天文年鑑 167-173 頁(1815 年), 全集第６巻 383-385 頁：後半にガウスより編集者宛の 1815 年 4 月 24 日付書簡を含む］

内容は上記 b) とほぼ同じ. ７月まで観測できれば楕円軌道を計算できそうとしている.

d) ［ゲッチンゲン学術公報 105 号 1041-1043 頁(1815 年 7 月 3 日), 全集第６巻 385-387 頁］

ガウスは 3 月 6 日・4 月 25 日・6 月 12 日の３個の観測データに基づき, 放物線軌道を昇交点=82° 43' 6", 軌道傾斜角=44° 43' 13", 近日点距離=1.23024ＡＵ等と計算した. もし楕円軌道とすると, 昇交点=83° 26' 21", 軌道傾斜角=44° 30' 43", 近日点距離=1.21349ＡＵ, 遠日点距離=35.0911ＡＵ, 公転周期=77.5 年となって, この方が観測データにより良く合致する. 公転周期は, たとえ今後のより精確な計算により増大することがあったとしても, 100 年を超すことはないと思われる.

e) ［1818 年度用天文年鑑 229-232 頁(1815 年), 全集第６巻 387-389 頁：ガウスよりボ

ーデ宛の 1815 年 8 月 9 日付書簡]

内容は d) とほぼ同じだが，軌道計算者としてニコライとベッセルの名を挙げ，計算のさらなる緻密化は彼らの手に委ねたいと述べ，また，公転周期については，遠からず分かるだろうが，おそらく 77.5 年より小さいだろうとしている．

f) ［ゲッチンゲン学術公報 149 号 1437-1476 頁(1815 年 9 月 18 日)，全集第 6 巻 389-391 頁］

3 月 20 日から 8 月 25 日までの12個の観測データをまとめ，ベッセルおよびニコライが楕円軌道として計算した場合のそれぞれの結果を紹介した．ベッセルによれば，昇交点= 83° 28’ 46”，軌道傾斜角=44° 29’ 54”，近日点距離=1.21282ＡＵ，離心率=0.93113，長軸半径=17.60964ＡＵ，公転周期=73.8968 年となり，ニコライによれば，昇交点=83° 28’ 52”，軌道傾斜角=44° 29’ 46”，近日点距離=1.21269ＡＵ，離心率=0.93029，長軸半径=17.39704ＡＵ，公転周期=72.564 年となる．

【参考】オルバース彗星は，現在では，昇交点=86° 6’，軌道傾斜角=44° 37’，近日点距離=1.17845ＡＵ，離心率=0.930297，長軸半径=16.90678ＡＵ，公転周期=69.5 年とされている．次回の太陽接近は 2024 年 7 月の予定．

【6】エンケ彗星 ［2P/1818 W1; Encke］（1818 年 11 月 27 日ポンス発見）

a) ［ゲッチンゲン学術公報 28 号 273-278 頁(1819 年 2 月 18 日)，全集第 6 巻 417-419 頁］

1818 年 11 月にマルセイユのポンスが発見した２つの彗星のうちの１つにつき，マンハイムのニコライは 12 月 22 日から 29 日までの間に 5 回観測し，その観測データ及び自分の計算した軌道要素を 1819 年 1 月 8 日付の書簡でガウスに送った．ニコライは，近日点距離=0.52933ＡＵ，昇交点=330° 14’ 17″，軌道傾斜角=14° 59’ 6″等と算定した．その他，ハーディングやエンケが得た観測データもある．エンケのガウス宛 1819 年 2 月 5 日付書簡によれば，エンケは公転周期 3 年 7 月の楕円軌道を算出した．この楕円軌道と観測値とのずれは 30″以内であり，昇交点=334° 18’ 8″，軌道傾斜角=13° 42’ 30″，長軸半径=2.3430189ＡＵ，離心率=0.8567776 等となる．すると，この軌道は 1805 年の第 1 彗星と似ている．その彗星については，当時，ベッセルが，放物線軌道として，昇交点=344° 37’ 19″，軌道傾斜角=15° 36’ 36″，近日点距離=0.37862ＡＵ，等を算出していた．この２つの彗星が同一かはさらに注意深く調べる要あり．

b) ［ゲッチンゲン学術公報 83 号 825-829 頁(1819 年 5 月 24 日)，全集第 6 巻 420-422 頁］

これら２つの彗星が同一であることは，その後のエンケの計算で明白になった．木星の引力の影響につきエンケはガウスの方法を用いて計算した．この彗星の公転周期は 3.42 年で，昇交点=334° 43’ 37″，軌道傾斜角=13° 38’ 42″，離心率=0.8490883 等となる．

【参考】この彗星は，1786 年にピエール・メシャン(Pierre François André Méchain, 1744-1804)によって発見され，その後 1795 年と 1805 年にも観測されたことが分かっている．公転周期は次第に短くなっているとされる．周期性が確認された彗星として

は，ハレー彗星に次いで２番目である．なお，上記【2】のビエラ彗星の周期性確認は 1826 年である．

7　放物線軌道の計算について

彗星の放物線軌道を計算で求める方法を最初に示したのはニュートンである．彼はプリンキピアの第３篇中の「命題」の中で彗星に関する命題・問題・補助定理・系・実例等を述べ，彗星の運行・軌道・構造等について詳しく論じた．その中には，例えば,「放物線上を運動する彗星の軌道曲線を，与えられた三つの観測から決定すること」という問題もあり，ニュートンは自分の案出した幾何学的な解法（作図を含む）を３頁ほどにわたって記している．但し，ここでの「三つの観測」は全く任意に取れるわけではなく，二つの時間間隔がほぼ等しい等の制約がある．ニュートンは 1680 年の彗星を例にとって，その軌道を計算し，観測値との差が経度は２分以内，緯度は１０分以内程度に収まっていることを示した．

1797 年にオルバースは『数個の観測から彗星の軌道を計算するための最も容易にして快適な方法に関する論文』（参考文献【２】）を著し，その中で彗星の放物線軌道を計算する方法を示した．この方法は，３個の観測から放物線軌道を決定する一般的なやり方であり，理論的にも優れたものであった．

ガウスは 1809 年刊行の「天体運動論」において放物線軌道の計算については基本的に取り上げなかった．その理由は，オルバースの上記書物によって放物円軌道の計算問題は解決済みと考えたからと推測されている．しかし，ガウスは，オルバースの計算方法には不十分な点があると考えていた模様である．1813 年頃から 1815 年頃にかけてガウスは彗星の放物線軌道に関する論文を手がけていた．その論文は「天体運動論」を補完しつつ放物線軌道についての完成した理論を提供するはずのものであった．その論文は結局発表されないままに終わったが，その骨子と思われる草稿はガウス全集第７巻に収められている．

8　ガウス日記の第 94 項目について

ガウス日記の第 94 項目は 1798 年７月に書かれ，次のように述べている．
「彗星の理論を，より完成されたものにした．」(Cometarum theoriam perfectiorem reddidi.)

従来，この「彗星の理論」が何を指すかは不詳とされてきた．この問題に関する明確なノート，遺稿，書簡等は発見されていないので，この「彗星の理論」の内容を立証することはほとんど不可能である．もっとも，当時はまだ彗星の構造や起源等についての理論的考察はほとんど皆無だったのだから,「彗星の理論」が「彗星の軌道に関する理論」を指すことは確かと考えてよい．

ここで筆者は，或る事実を指摘して，１つの推測ないし仮説を提示しておきたい．それは，上記７で述べたように，1797 年にオルバースが彗星の軌道（すなわち放物線軌道）の決定方法を述べた著書を刊行したという事実である．ガウスはこの著書を読んだ上で，その放物線軌道の決定方法に何らかの不十分な点を見出し，その修正を図

ったのではないかと思われる．オルバースの著書は放物線軌道の計算方法のほぼ完成版と言えるものであり，だからこそガウスも 1809 年の「天体運動論」では放物線軌道について詳説しなかった．

ガウスがオルバースの著書の不十分さをいつから認識していたかは明確でない．しかし，その不十分な個所は或る 1 つの節に関してであり，比較的限定されている．1798 年に当時 21 歳のガウスがそれまで天文学をほとんど勉強していなかったとしても，オルバースの記述の不十分さに気づくことは十分可能だったと思われる．

オルバースが示した軌道計算法は，ニュートンのものと比べて格段に進歩しており，一応，「完成された」（perfectus）ものと言って差し支えない．ただ，1 個所だけ不十分な点を見つけてその修正方法を考案したので，放物線軌道決定の理論は「より完成された」（perfectior[= perfectus の比較級]）ものになった，というのがガウス日記第 94 項目の趣旨ではないか．これが筆者の仮説である．

9　まとめ

1．ガウスがその観測や軌道計算に関与した彗星は，全集で確認できるものだけでも 18 個に上る．但し，ガウス自身が発見した彗星はなく，ガウスの手による観測データも他の天文学者に比べてそれほど多くはない．

2．ドイツの有力な天体観測者が彗星の観測データをガウスに送った例は多く，ガウスはそれらのデータを検討して速やかに彗星の軌道計算を行い，その結果を頻繁に各種の雑誌に発表していた．

3．彗星の放物線軌道は，1797 年以降，天文学者の多くが(その精確さは別として)計算しているが，周期彗星の楕円軌道をガウス以外の者が計算するようになるのは，若干の例外を除き，1810 年以降のことである．

4．周期彗星の公転周期算出についてガウスはかなり慎重であり，自分の計算結果を安易に公表しなかったように見える。その理由は必ずしも明確でないが，彗星のように離心率が小惑星より相当に大きい場合には周回軌道の正確な計算は非常に難しくなることをガウスはよく承知していたのではないかと思われる。彼が 1806 年にビエラ彗星の周期の計算を間違えたことも彼を慎重にさせた一因かも知れない。

5．結局のところ，彗星の研究に関してガウスの果たした役割として目に付くのは，彗星発見直後にいち早く観測データに接してその軌道を計算・公表し，観測者たちのその後の追跡・観測を容易ならしめたことである．1810 年代の後半以降，天文学に対するガウスの熱意は次第に薄れていくように思われるが，その頃までに発見された短期周期彗星はごくわずかだったこともあり，小惑星の軌道計算において見られたようなガウスの圧倒的な存在感は彗星の軌道計算の場合には余り感じられないと言ってよい．

参考文献

【１】ガウス全集：Carl Friedrich Gauss, *Werke*, Bde 1-12, 1863-1929.
【２】Wilhelm Olbers, *Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen*, 1797.
【３】*Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels- Kunde*, hrsg. von Freyherrn von Zach, Bd.4, 1801.
【４】Friedrich Wilhelm Bessel, *Untersuchungen über die scheinbare und wahre Bahn des im Jahre 1807 erschienenen grossen Kometen*, 1810.
【５】*Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss*, Erste Abteilung, hrsg. von Dr. C. Schilling, 1900.
【６】Guy Waldo Dunnington, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, 1955 (2004).
【７】ダニングトン著，銀林浩他訳，『ガウスの生涯』，東京図書，1976.
【８】高瀬正仁訳・解説，『ガウスの《数学日記》』，日本評論社，2013.
【９】長谷川一郎著，『天体軌道論』（改訂版），恒星社厚生閣，1986.

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

概完全数に関する決定手続き

長岡一昭

2015 年 12 月 27 日

概要

$\sigma(a) = 2a - 1$ をみたす正の整数は概完全数と呼ばれている。$\sigma(2^e) = 2 \cdot 2^e - 1$ であるが、概完全数は 2 の冪に限られるかという問題を概完全数の問題ということにする。この論文では n が与えられたとき、異なる素因数の個数が n の奇の概完全数が存在するかどうかを決定する手続きを定義し、その手続きを用いて新しい結果が得られることを示す。

1 概完全数に関する決定手続き

以下では a の異なる素因数の個数を$\omega(a)$ と表し、$\omega(a) = n$ である概完全数を n-**概完全数**という。
$\omega(a) = 1, 2$ の場合については 飯高茂「完全数について」 第２５回数学史シンポジウム報告集 参照。
また、奇の完全数を OP、擬完全数を QP、奇の概完全数を OAP で示す。

まず関連する今までに知られている結果と今回得られた結果について述べる。
今までに知られている結果
$a = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$, $p_1 < \cdots < p_n$とする。

- OP について O.Grun(1952) $p_1 < 2 + 2n/3$
- OP について C.Pomerance(1977) $p_i < (4n)^{2^{i(i+1)/2}}$ $(1 \leq i \leq n)$
- OP/QP について M.Kishore(1981) $p_i < 2^{2^{i-1}}(n - i + 1)$ $(2 \leq i \leq 6)$
- OAP について M.Kishore(1981) $p_i < 2^{2^{i-1}}(n - i + 1)$ $(2 < i \leq 5)$, $p_6 < 23775427335(n - 5)$
- Sylvester(1888), Dickson(1913), Kanold(1949) a が OP ならば $\omega(a) \geq 5$
- Gradštĕin(1925), Kühnel(1949), Webber(1951), Kishore(1978) a が OP ならば $\omega(a) \geq 6$
- Pomerance(1971), Robbins(1972) a が OP ならば $\omega(a) \geq 7$
- Hagis(1975) a が OP ならば $\omega(a) \geq 8$
- Nielsen(2006) a が OP ならば $\omega(a) \geq 9$

- Kishore(1978) a が QP ならば $\omega(a) \geq 6$
- Kishore(1978) a が OAP ならば $\omega(a) \geq 6$
- Kishore(1978) a が OAP かつ $3 \not| a$ ならば $\omega(a) \geq 7$

今回得られた結果 (2015)
- a が OAP ならば $\omega(a) \geq 7$
- a が OAP かつ $3 \not| a$ ならば $\omega(a) \geq 10$

命題 1 (1) p を素数とする。$\dfrac{\sigma(p^e)}{p^e}$ は e に関しては増加関数であり、p に関しては減少関数である。さらに、

$$\frac{p+1}{p} \le \frac{\sigma(p^e)}{p^e} < \frac{p}{p-1} \qquad (左辺は\ \frac{\sigma(p^e)}{p^e} の上限)$$

が成立する。

(2) $a = p_1^{e_1}\cdots p_n^{e_n}$ とする。a が概完全数で p_i が奇素数なら e_i は偶数である。

証明

(1) $\dfrac{\sigma(p^e)}{p^e} = \dfrac{p^{e+1}-1}{(p-1)p^e} = \dfrac{1}{p-1}\left(p - \dfrac{1}{p^e}\right)$ だから e に関して増加関数であり、$\dfrac{p+1}{p} = \dfrac{\sigma(p)}{p} \le \dfrac{\sigma(p^e)}{p^e} < \dfrac{p}{p-1}$ が成り立つ。さらに、$\dfrac{p}{p-1}$ は $\dfrac{\sigma(p^e)}{p^e}$ の上限である。また、$\dfrac{\sigma(p^e)}{p^e} = 1/p^e + \cdots + 1/p + 1$ だから p に関して減少関数である。

(2) $\sigma(a) = 2a-1$ だから、$\sigma(p^{e_1})\cdots\sigma(p^{e_n}) = 2a-1$ であり、p_i が奇素数ならば $\sigma(p^{e_i}) = 1 + p_i + \cdots + p_i^{e_i} \equiv e_i + 1 \pmod 2$。したがって、$e_i$ が奇数なら、$\sigma(p^{e_1})\cdots\sigma(p^{e_n})$ は偶数となり矛盾する。 □

a の素因数分解を $a = p_1^{e_1}\cdots p_n^{e_n},\ p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ とする。a が概完全数のとき、$\sigma(a) = 2a-1$ より、

$$\sigma(p_1^{e_1})\cdots\sigma(p_n^{e_n}) = 2p_1^{e_1}\cdots p_n^{e_n} - 1 \tag{$\sharp$}$$

したがって、

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma(p_1^{e_1})}{p_1^{e_1}}\cdots\frac{\sigma(p_n^{e_n})}{p_n^{e_n}} = 1 - \frac{1}{2p_1^{e_1}\cdots p_n^{e_n}} \tag{$\flat$}$$

が成立する。以後、($\flat$) 式左辺を $H(p_1^{e_1},\ldots,p_n^{e_n})$ と表し、右辺を $M(p_1^{e_1},\ldots,p_n^{e_n})$ と表す。また、$\dfrac{\sigma(p^e)}{p^e}$ を $\mathrm{hi}(p^e)$ と表す。以下では奇の概完全数のみを考える。

命題 2 $p_1,\ldots,p_n$ $(p_1 < \cdots < p_n)$ を奇素数、$e_1,\ldots,e_n$ を正の整数とする。さらに、$1 \le m \le n$ とする。

(1) $H(p_1^{e_1},\ldots,p_m^{e_m}) \ge 1$ ならば、任意の $f_1 \ge e_1,\ldots,f_m \ge e_m$ と任意の整数 $f_{m+1},\ldots,f_n$ (≥ 1) に対して上記の等式 ($\flat$) 式は成立しない。

(2) $\dfrac{1}{2}\mathrm{hi}(p_1^{e_1})\cdots\mathrm{hi}(p_{m-1}^{e_{m-1}})\dfrac{p_m}{p_m-1}\cdots\dfrac{p_n}{p_n-1} < M(p_1^{e_1},p_2^{e_2},\ldots,p_{m-1}^{e_{m-1}},p_m,\ldots,p_n)$ ならば任意の $q_m \ge p_m,\ldots,q_n \ge p_n$ と任意の整数 $f_m,\ldots,f_n$ (≥ 1) に対して ($\flat$) 式は成立しない。

証明 (1) 命題 1 より、
$H(p_1^{f_1},\ldots,p_n^{f_n}) \ge H(p_1^{e_1},\ldots,p_m^{e_m}) \ge 1 > M(p_1^{f_1},\ldots,p_n^{f_n})$。

(2) 命題 1 より、

$$\begin{aligned}
&H(p_1^{e_1},\ldots,p_{m-1}^{e_{m-1}},q_m^{f_m},\ldots,q_n^{f_n}) < \frac{1}{2}\mathrm{hi}(p_1^{e_1})\cdots\mathrm{hi}(p_{m-1}^{e_{m-1}})\frac{q_m}{q_m-1}\cdots\frac{q_n}{q_n-1}\\
&\le \frac{1}{2}\mathrm{hi}(p_1^{e_1})\cdots\mathrm{hi}(p_{m-1}^{e_{m-1}})\frac{p_m}{p_m-1}\cdots\frac{p_n}{p_n-1} < M(p_1^{e_1},p_2^{e_2},\ldots,p_{m-1}^{e_{m-1}},p_m,\ldots,p_n)\\
&\le M(p_1^{e_1},\ldots,p_{m-1}^{e_{m-1}},q_m^{f_m},\ldots,q_n^{f_n})。
\end{aligned}$$

□

命題 3 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ を相異なる素数とし、$1 \le m \le n$ とする。

$\mathrm{Hsup}(m) = \dfrac{1}{2}\mathrm{hi}(p_1^{e_1})\cdots\mathrm{hi}(p_{m-1}^{e_{m-1}})\dfrac{p_m}{p_m-1}\cdots\dfrac{p_n}{p_n-1}$ とおき、$\mathrm{Hsup}(m) < 1$ と仮定する。このとき、

$$\mathrm{Hsup}(m) < M(p_1^{e_1},\ldots,p_{m-1}^{e_{m-1}},p_m,\ldots,p_n)$$

証明 証明すべき不等式の左辺の分母を払うと、

$$\sigma(p_1^{e_1})\cdots\sigma(p_{m-1}^{e_{m-1}})p_m\cdots p_n$$
$$< 2p_1^{e_1}\cdots p_{m-1}^{e_{m-1}}(p_m-1)\cdots(p_n-1) - \frac{(p_m-1)\cdots(p_n-1)}{p_m\cdots p_n}.$$

したがって、仮定のもとで

$$(2p_1^{e_1}\cdots p_{m-1}^{e_{m-1}}(p_m-1)\cdots(p_n-1) - \sigma(p_1^{e_1})\cdots\sigma(p_{m-1}^{e_{m-1}})p_m\cdots p_n) - \frac{(p_m-1)\cdots(p_n-1)}{p_m\cdots p_n} > 0$$

を示せば良い。上式左辺の第 1 項は整数だから仮定より 1 以上であり、第 2 項は 1 未満だから、不等式が示せた。 □

系 命題 3 の不等式が成立するとき、$p_1^{e_1}\cdots p_{m-1}^{e_{m-1}}$を Hall 約数としてもち、$p_1,\ldots,p_n$を素因数にもつ n-概完全数は存在しない。

証明 任意の $e_m,\ldots,e_n\ (>0)$ に対して、

$$\frac{1}{2}\mathrm{hi}(p_1^{e_1})\cdots\mathrm{hi}(p_n^{e_n}) < \frac{1}{2}\mathrm{hi}(p_1^{e_1})\cdots\mathrm{hi}(p_{m-1}^{e_{m-1}})\frac{p_m}{p_m-1}\cdots\frac{p_n}{p_n-1} < M(p_1^{e_1},\ldots,p_{m-1}^{e_{m-1}},p_m,\ldots,p_n) \leq M(p_1^{e_1},\ldots,p_{m-1}^{e_{m-1}},p_m^{e_m},\ldots,p_n^{e_n})$$ □

上の系の応用例としてつぎの命題を示す。

命題 (M.KIshore(1978))

a が OAP かつ $3 \nmid a$ ならば $\omega(a) \geq 7$

証明 $\frac{1}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\frac{19}{18} = 0.9745\cdots$ だから

$3 < p_1 < \cdots < p_6$ をみたす 6-概完全数 $a = p_1^{a_1}\cdots p_6^{a_6}$ は存在しない。したがって、a が 3 で割れない OAP ならば $\omega(a) \geq 7$。 □

注意 この証明は M.Kihore(1978) の証明より簡潔なものになっている。

定義 1 整数 $a(>0)$ の素因数分解を $a = p_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m}\cdots p_n^{e_n}$ とし、$\max\{p_1,\ldots,p_m\} < \min\{p_{m+1},\ldots,p_n\}$ $(1 \leq m \leq n)$ とする。このとき、a を $p_1,\ldots,p_m$**を延長した素因数をもつ整数**という。また、$a = bc,\ (b,c) = 1$ のとき、b を a の Hall **約数**ということにする。

定義 2 相異なる素数 $q_1,\ldots,q_m,p_{m+1},\ldots,p_{m+k}$ $(m \geq 0, k > 0)$ と正の整数 $e_1,\ldots,e_m$に対して、$H(q_1^{e_1},\ldots,q_m^{e_m},p_{m+1}^{e_{m+1}},\ldots,p_{m+k}^{e_{m+k}}) \geq 1$ をみたす整数の組 $(e_{m+1},\ldots,e_{m+k})$ を整数 $q_1^{e_1}\cdots q_m^{e_m}$と素数 $p_{m+1},\ldots,p_{m+k}$に関する**上界指数**という。

定義 3 実数 x より大きな最小の素数を x^+と表す。$p_{i+1} = p_i^+$ $(i = 1,\ldots,n-1)$ をみたす素数列 $p_1,\ldots,p_n$ を**連続した素数列**という。

定義 4 以下では、有限列 $a_1,a_2,\ldots,a_m$を $[a_1,a_2,\ldots,a_m]$ と表し、有限列 $[a_1,\ldots,a_m]$ と有限列 $[b_1,\ldots,b_n]$ を連接した有限列を $[a_1,\ldots,a_m] \smile [b_1,\ldots,b_n]$ ど表す。また、有限列 $as = [a_1,\ldots,a_m]$ から i 番目の要素を取り除いた有限列を $\mathrm{drop}(as,i)$ と表す。

つぎの定理は Dickson(1913) の結果と a が OAP で、p が $a < p < 2a$ をみたす奇素数 ならば ap は原始豊数であることを用いて示すことができる。ここでは決定手続きを定義する方法による別証明を与える。

定理 1 $n > 0, m \geq 0, k \geq 0$ とする。$q_1,\ldots,q_m,p_{m+1},\ldots,p_{m+k}$を相異なる奇素数とし、$e_1,\ldots,e_m$ を正の

整数とする。このとき、

$q_1^{e_1}\cdots q_m^{e_m}$ を Hall 約数としてもち、$q_1,\ldots,q_m,p_{m+1},\ldots,p_{m+k}$ を延長した素因数をもつ n-概完全数が存在するかどうか決定可能である。

証明 述語 *kettei* を

$kettei(n,[[q_1,e_1],\ldots,[[q_m,e_m]],[p_{m+1},\ldots,p_{m+k}])$

$\Leftrightarrow$ $q_1^{e_1}\cdots q_m^{e_m}$ を Hall 約数としてもち、$q_1,\ldots,q_m,p_{m+1},\ldots,p_{m+k}$ を延長した素因数をもつ n-概完全数は存在しない

によって定義する。述語 *kettei* が再帰的述語として定義できることを以下で示す。以下、$qes = [[q_1,e_1],\ldots,[q_m,e_m]]$, $ps=[p_{m+1},\ldots,p_{m+k}]$ とおく。

$n-(m+k)$ に関する帰納法。

$n-(m+k)=0$ のとき。k に関する帰納法で示す。

$k=0$ の場合は $a=q_1^{e_1}\cdots q_n^{e_n}$ とし、$kettei[n,qes,ps]\Leftrightarrow\sigma(a)\neq 2a-1$ で定義する。

$k>0$ の場合。

$\frac{1}{2}\mathrm{hi}(q_1^{e_1})\cdots\mathrm{hi}(q_m^{e_m})\frac{p_{m+1}}{p_{m+1}-1}\cdots\frac{p_n}{p_n-1}<1$ の場合は命題 3 系より、条件をみたす n-概完全数は存在しない。したがって、$kettei[n,qes,ps]\Leftrightarrow true$ で定義する。

$\frac{1}{2}\mathrm{hi}(q_1^{e_1})\cdots\mathrm{hi}(q_m^{e_m})\frac{p_{m+1}}{p_{m+1}-1}\cdots\frac{p_n}{p_n-1}\geq 1$ の場合。$(g_{m+1},\ldots,g_n)$ を $q_1^{e_1}\cdots q_m^{e_m}$ と素数 $p_{m+1},\ldots,p_n$ に関する上界指数とする。また、$E_i=\{f|2\leq f<g_i\}$ $(i=m+1,\ldots,m+k)$ とする。$f\in E_{m+1}$ を任意に選ぶ。k に関する帰納法の仮定より、

$kettei(n,qes\smile[[p_{m+1},f]],[p_{m+2},\ldots,p_{m+k}])\Leftrightarrow q_1^{e_1}\cdots q_m^{e_m}p_{m+1}^{f_{m+1}}$ を Hall 約数としてもち、

$q_1,\ldots,q_m,p_{m+1},\ldots,p_{(m+1)+(k-1)}$ を素因数にもつ n-概完全数は存在しない

をみたすように定義できている。他の $f\in E_i$ に対しても同様である。そこで、

$kettei[n,qes,ps]\Leftrightarrow\bigwedge\{kettei(qes\smile[[p_{m+i},f]],\mathrm{drop}(ps,i))\mid 1\leq i\leq k, f\in E_i\}$

によって $kettei[n,qes,ps]$ を定義する。

$n-(m+k)>0$ のとき。

$p_{\max}=\max\{q_1,\ldots,q_m,p_{m+1},\ldots,p_{m+k}\}$ とする。

$\frac{1}{2}\mathrm{hi}(q_1^{e_1})\cdots\mathrm{hi}(q_m^{e_m})\frac{p_{m+1}}{p_{m+1}-1}\cdots\frac{p_{m+k}}{p_{m+k}-1}<1$ のとき。

$\frac{1}{2}\mathrm{hi}(q_1^{e_1})\cdots\mathrm{hi}(q_m^{e_m})\frac{p_{m+1}}{p_{m+1}-1}\cdots\frac{p_{m+k}}{p_{m+k}-1}\frac{p_{m+k+1}}{p_{m+k+1}-1}\cdots\frac{p_n}{p_n-1}<1$ かつ $p_{m+k+1}>p_{\max}$ をみたす連続した素数列 $p_{m+k+1},\ldots,p_n$ が存在する。そのような p_{m+k+1} の最小のものを r とし、r より小さい最大の素数を $p_{m+k+1,ub}$ とする。さらに、$P_{m+k+1}=\{p|p_{\max}<p\leq p_{m+k+1,ub}$ かつ p は素数 $\}$ とする。有限個の $p\in P_{m+k+1}$ に対しては、$n-(m+k)$ に関する帰納法の仮定より、

$kettei(n,qes,ps\smile[p])\Leftrightarrow q_1^{e_1}\cdots q_m^{e_m}$ を Hall 約数としてもち、

$q_1,\ldots,q_m,p_{m+1},\ldots,p_{m+k},p$ を延長した素因数をもつ n-概完全数は存在しない

をみたすように定義できている。そこで、

$kettei(n,qes,ps)\Leftrightarrow\bigwedge\{kettei(n,qes,ps\smile[p]\mid p\in P_{m+k+1}\}$

によって、$kettei(n,qes,ps)$ を定義する。

$\frac{1}{2}\mathrm{hi}(q_1^{e_1})\cdots\mathrm{hi}(q_m^{e_m})\frac{p_{m+1}}{p_{m+1}-1}\cdots\frac{p_{m+k}}{p_{m+k}-1}\geq 1$ のとき。

k に関する帰納法で示す。

$k=0$ のときは命題 2 より $q_1^{e_1}\cdots q_m^{e_m}$ を Hall 約数としてもち、$q_1,\ldots,q_m,p_{m+1},\ldots,p_{m+k}$ を延長した素因数

をもつ n-概完全数は存在しない。したがって、$kettei(n, qes, ps) \Leftrightarrow true$ と定義する。
$k > 0$ の場合。$(e_{m+1}, \ldots, e_{m+k})$ を約数 $q_1^{e_1} \cdots, q_m^{e_m}$ と素数 $p_{m+1}, \ldots, p_{m+k}$ に関する上界指数とし、$E_i = \{f_i | 2 \leq f_i < e_i\}$ $(i = m+1, \ldots, m+k)$ とする。そこで、$n - (m+k) = 0$ の場合と同様に
$kettei[n, qes, ps] \Leftrightarrow \bigwedge\{kettei(qes \smile [[p_{m+i}, f]], \mathrm{drop}(ps, i)) \mid 1 \leq i \leq k, f \in E_i\}$
によって $kettei[n, qes, ps]$ を定義する。

□

定理1の証明で述べた決定手続きは改良することができる。
計算機 (Mac Air 4GB) を用いて、改良された決定手続きを実行することによりつぎの結果が得られた。

定理 2
(1) a が OAP ならば$\omega(a) \geq 7$.
(2) a が OAP かつ $3 \nmid a$ ならば$\omega(a) \geq 10$.

□

命題 a が OAP かつ $3 \nmid a$ ならば$\omega(a) \geq 8$.
は計算機を用いないで示すことができる。以下でこの命題の証明を行う。
証明
$3 \nmid a$ ならば$\omega(a) = 7$ をみたす 7-概完全数は存在しないことを示す。

$\frac{1}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\frac{19}{18}\frac{23}{22} = 1.0188\cdots$, $\frac{1}{2}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\frac{19}{18}\frac{23}{22}\frac{29}{28} = 0.84416\cdots$ であり、

仮定より、$p_1 \neq 3$ だから $p_1 = 5$.

$\frac{1}{2}\frac{5}{4}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\frac{19}{18}\frac{23}{22}\frac{29}{28} = 0.90446\cdots$ したがって、$p_2 = 7$.

以下同様にして、$p_3 = 11,\ p_4 = 13,\ p_5 = 17,\ p_6 = 19$ が確かめられる。

また、$\frac{1}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\frac{19}{18}\frac{37}{36} = 1.0015\cdots$, $\frac{1}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\frac{19}{18}\frac{41}{40} = 0.99888\cdots$.

したがって、$p_7 = 23,\ 29\ ,31,\ 37$ のいずれかである。
よって、$[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7]$ は
$[5, 7, 11, 13, 17, 19, 23]$, $[5, 7, 11, 13, 17, 19, 29]$, $[5, 7, 11, 13, 17, 19, 31]$ または $[5, 7, 11, 13, 17, 19, 37]$ である。

$[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7] = [5, 7, 11, 13, 17, 19, 23]$ の場合。
$H(5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2) = 1.0060\cdots$ だから $pes = []$, $ps = [5, 7, 11, 13, 17, 19, 23]$ は解をもたない。
$[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7] = [5, 7, 11, 13, 17, 19, 31]$ の場合。
$H(5^4, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 31^2) = 1.0066\cdots$ より、$(4, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ は素数 $5, 7, 11, 13, 17, 19, 31$ に関する上界指数である。
$H(5^2, 7^\infty, 11^\infty, 13^\infty, 17^\infty, 19^\infty, 31^\infty) = 0.9989\cdots$ より、$pes = [[5, 2]]$, $ps = [7, 11, 13, 17, 19, 31]$ は解をもたない。
したがって、$pes = []$, $ps = [5, 7, 11, 13, 17, 19, 31]$ は解をもたない。

$[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7] = [5, 7, 11, 13, 17, 19, 29]$ の場合。
$H(5^2, 7^4, 11^2, 13^4, 17^2, 19^2, 29^2) = 1.00005$ だから $(2, 4, 2, 4, 2, 2, 2)$ は $5, 7, 11, 13, 17, 19, 29$ に関する上界指数である。
そのため、$pes = [[7, 2]]$, $ps = [5, 11, 13, 17, 19, 29]$ の場合と $pes = [[13, 2]]$, $ps = [5, 7, 11, 17, 19, 29]$ の場合を調べる。

$pes = [[7, 2]]$, $ps = [5, 11, 13, 17, 19, 29]$ の場合。
$H(7^2, 5^\infty, 11^\infty, 13^\infty, 17^\infty, 19^\infty, 29^\infty) = 1.0063\cdots$ であり、$H(7^2, 5^4, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 29^2) = 1.0044\cdots$ だから、
$(4, 2, 2, 2, 2, 2)$ は 7^2 と素数 $5, 11, 13, 17, 19, 29$ に関する上界指数である。
しかし、$H(7^2, 5^2, 11^\infty, 13^\infty, 17^\infty, 19^\infty, 29^\infty) = 0.9983\cdots$ だから、$pes = [[7, 2], [5, 2]]$, $ps = [11, 13, 17, 19, 29]$ は解をもたない。
したがって、$pes = [[7, 2]]$, $ps = [5, 11, 13, 17, 19, 29]$ は解をもたない。

$pes = [[13, 2]]$, $ps = [5, 7, 11, 17, 19, 29]$ の場合。
$H(13^2, 5^\infty, 7^\infty, 11^\infty, 17^\infty, 19^\infty, 29^\infty) = 1.0286\cdots$ であり、$H(13^2, 5^2, 7^4, 11^4, 17^2, 19^2, 29^2) = 1.0003\cdots$ だから、
$(2, 4, 4, 2, 2, 2)$ は 13^2 と素数 $5, 7, 11, 17, 19, 29$ に関する上界指数である。
そのため $pes = [[13, 2], [7, 2]]$, $ps = [5, 11, 17, 19, 29]$ の場合と $pes = [[13, 2], [11, 2]]$, $ps = [5, 7, 17, 19, 29]$ の場合を調べる。

(13.1) $pes = [[13, 2], [7, 2]]$, $ps = [5, 11, 17, 19, 29]$ の場合。
$pes = [[7, 2]]$, $ps = [5, 11, 13, 17, 19, 29]$ の場合は解なしであったから、解をもたない。

(13.2) $pes = [[13, 2], [11, 2]]$, $ps = [5, 7, 17, 19, 29]$ の場合。
$H(13^2, 11^2, 5^\infty, 7^\infty, 17^\infty, 19^\infty, 29^\infty) = 1.0081\cdots$ であり、$H(13^2, 11^2, 5^2, 7^6, 17^4, 19^4, 29^2) = 1.0583\cdots$ だから、
$(2, 6, 4, 4, 2)$ は $13^2 7^2$ と素数 $5, 7, 17, 19, 29$ に関する上界指数である。
そのため、$pes = [[13, 2], [11, 2], [7, 2]]$, $ps = [5, 17, 19, 29]$ と $pes = [[13, 2], [11, 2], [7, 4]]$, $ps = [5, 17, 19, 29]$ と $pes = [[13, 2], [11, 2], [17, 2]]$, $ps = [5, 7, 19, 29]$ と $pes = [[13, 2], [11, 2], [19, 2]]$, $ps = [5, 7, 17, 29]$ の場合を調べる。

(13.2.1) $pes = [[13, 2], [11, 2], [7, 2]]$, $ps = [5, 17, 19, 29]$ の場合。
$pes = [[7, 2]]$, $ps = [5, 11, 13, 17, 19, 29]$ の場合は解なしであったから、解をもたない。

(13.2.2) $pes = [[13, 2], [11, 2], [7, 4]]$, $ps = [5, 17, 19, 29]$ の場合。
$H(13^2, 11^2, 7^4, 5^4, 17^2, 19^2, 29^2) = 1.0073\cdots$ だから、$(4, 2, 2, 2)$ は $13^2 11^2 7^4$ と素数 $5, 17, 19, 29$ に関する上界指数である。
しかし、$H(13^2, 11^2, 7^4, 5^2, 17^\infty, 19^\infty, 29^\infty) = 0.999985$ だから $pes = [[13, 2], [11, 2], [7, 4], [5, 2]]$, $ps = [17, 19, 29]$ の場合は解をもたない。したがって、$pes = [[13, 2], [11, 2], [7, 4]]$, $ps = [5, 17, 19, 29]$ の場合は解をもたない。

(13.2.3)　$pes = [[13,2],[11,2],[17,2]],\ ps = [5,7,19,29]$ の場合

(13.2.4)　$pes = [[13,2],[11,2],[19,2]],\ ps = [5,7,17,29]$ の場合

上の 2 つの場合は (13.2.2) と全く同様にして解をもたないことが確認できる。

したがって、(13.2) $pes = [[13,2],[11,2]],\ ps = [5,7,17,19,29]$ の場合は解をもたない。

以上より、$[p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7] = [5,7,11,13,17,19,29]$ の場合は解をもたないことがわかる。

$[p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7] = [5,7,11,13,17,19,37]$ の場合も同様である。

□

注意 上の証明は定理 1 で述べた手続きにしたがって行った。しかし、$3|\sigma(7^2)$, $3|\sigma(13^2)$ だから、以下の命題 4 を用いることにより、7^2 または 13^2 を Hall 約数にもつ OAP は存在しないことが容易に分かる。

命題 4 (M.Kishore[3]) a を奇の n-概完全数とし、p^e を a の Hall 約数とする。このとき、$\sigma(p^e)$ およびその素因数はすべて 8 を法として ± 1 である。

証明 $q|\sigma(p^e)$ とする。このとき、$q|2\sigma(a) = 4a - 2$ であり、$4a$ は平方数だから $\left(\dfrac{2}{q}\right) = (-1)^{\frac{q^2-1}{8}} = 1$。したがって、$q \equiv \pm 1 \pmod 8$。したがって、$\sigma(p^e)$ の素因数はすべて 8 を法として ± 1 だから、$\sigma(p^e)$ も 8 を法として ± 1 である。 □

2　$\omega(a) = 7$ かつ $p_1 = 3$ の場合

$n = 7$ とし、a を OAP, $a = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$,　$p_1 < \cdots < p_n$ とする。$\frac{1}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\frac{19}{18}\frac{23}{22} > 1$ かつ $\frac{1}{2}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\frac{19}{18}\frac{23}{22}\frac{29}{28} < 1$ だから p_1 は 3 または 5 である。p_1, p_2, p_3 が $[3,5,7]$, $[3,5,11]$, $[3,5,13]$ の場合はいずれも $\frac{1}{2}\frac{p_1}{p_1-1}\frac{p_2}{p_2-1}\frac{p_3}{p_3-1} \geq 1$ であり、これらを延長した素因数をもつ 7-概完全数が存在しないことは $p_1 = 5$ の場合と同様にして確かめられる。これら以外の場合、p_1, p_2, p_3, p_4 の組み合わせは以下の表のように 422 通りある。各場合に p_1, p_2, p_3, p_4 を延長した素因数をもつ 7-概完全数が存在しないことが確認されているものを以下の表で示す。

	p_1, p_2, p_3, p_4			p_1, p_2, p_3, p_4			$p_1, p_2, p_3 \cdot p_4$			p_1, p_2, p_3, p_4	
1	3 5 17 19	✓	41	3 5 17 223	✓	81	3 5 17 457	✓	121	3 5 17 719	✓
2	3 5 17 23	✓	42	3 5 17 227	✓	82	3 5 17 461		122	3 5 17 727	✓
3	3 5 17 29	✓	43	3 5 17 229	✓	83	3 5 17 463	✓	123	3 5 17 733	✓
4	3 5 17 31	✓	44	3 5 17 233	✓	84	3 5 17 467	✓	124	3 5 17 739	✓
5	3 5 17 37	✓	45	3 5 17 239	✓	85	3 5 17 479	✓	125	3 5 17 743	✓
6	3 5 17 41	✓	46	3 5 17 241	✓	86	3 5 17 487	✓	126	3 5 17 751	✓
7	3 5 17 43	✓	47	3 5 17 251	✓	87	3 5 17 491	✓	127	3 5 17 757	✓
8	3 5 17 47	✓	48	3 5 17 257		88	3 5 17 499	✓	128	3 5 17 761	✓
9	3 5 17 53	✓	49	3 5 17 263		89	3 5 17 503	✓	129	3 5 17 769	✓
10	3 5 17 59	✓	50	3 5 17 269		90	3 5 17 509	✓	130	3 5 17 773	✓
11	3 5 17 61	✓	51	3 5 17 271		91	3 5 17 521	✓	131	3 5 17 787	✓
12	3 5 17 67	✓	52	3 5 17 277		92	3 5 17 523	✓	132	3 5 17 797	✓
13	3 5 17 71	✓	53	3 5 17 281		93	3 5 17 541	✓	133	3 5 17 809	✓
14	3 5 17 73	✓	54	3 5 17 283		94	3 5 17 547	✓	134	3 5 17 811	✓
15	3 5 17 79	✓	55	3 5 17 293		95	3 5 17 557	✓	135	3 5 17 821	✓
16	3 5 17 83	✓	56	3 5 17 307		96	3 5 17 563	✓	136	3 5 17 823	✓
17	3 5 17 89		57	3 5 17 311		97	3 5 17 569	✓	137	3 5 17 827	✓
18	3 5 17 97	✓	58	3 5 17 313		98	3 5 17 571	✓	138	3 5 17 829	✓
19	3 5 17 101		59	3 5 17 317		99	3 5 17 577	✓	139	3 5 17 839	✓
20	3 5 17 103	✓	60	3 5 17 331		100	3 5 17 587	✓	140	3 5 17 853	✓
21	3 5 17 107	✓	61	3 5 17 337		101	3 5 17 593	✓	141	3 5 17 857	✓
22	3 5 17 109		62	3 5 17 347		102	3 5 17 599	✓	142	3 5 17 859	✓
23	3 5 17 113	✓	63	3 5 17 349		103	3 5 17 601	✓	143	3 5 17 863	✓
24	3 5 17 127	✓	64	3 5 17 353		104	3 5 17 607	✓	144	3 5 17 877	✓
25	3 5 17 131	✓	65	3 5 17 359	✓	105	3 5 17 613	✓	145	3 5 17 881	✓
26	3 5 17 137	✓	66	3 5 17 367	✓	106	3 5 17 617	✓	146	3 5 17 883	✓
27	3 5 17 139	✓	67	3 5 17 373	✓	107	3 5 17 619	✓	147	3 5 17 887	✓
28	3 5 17 149	✓	68	3 5 17 379		108	3 5 17 631	✓	148	3 5 17 907	✓
29	3 5 17 151	✓	69	3 5 17 383		109	3 5 17 641	✓	149	3 5 17 911	✓
30	3 5 17 157	✓	70	3 5 17 389		110	3 5 17 643	✓	150	3 5 17 919	✓
31	3 5 17 163	✓	71	3 5 17 397		111	3 5 17 647	✓	151	3 5 17 929	✓
32	3 5 17 167	✓	72	3 5 17 401		112	3 5 17 653	✓	152	3 5 17 937	✓
33	3 5 17 173	✓	73	3 5 17 409		113	3 5 17 659	✓	153	3 5 17 941	✓
34	3 5 17 179	✓	74	3 5 17 419		114	3 5 17 661	✓	154	3 5 17 947	✓
35	3 5 17 181	✓	75	3 5 17 421		115	3 5 17 673	✓	155	3 5 17 953	✓
36	3 5 17 191	✓	76	3 5 17 431		116	3 5 17 677	✓	156	3 5 17 967	✓
37	3 5 17 193	✓	77	3 5 17 433		117	3 5 17 683	✓	157	3 5 17 971	✓
38	3 5 17 197	✓	78	3 5 17 439		118	3 5 17 691	✓	158	3 5 17 977	✓
39	3 5 17 199	✓	79	3 5 17 443		119	3 5 17 701	✓	159	3 5 17 983	✓
40	3 5 17 211	✓	80	3 5 17 449		120	3 5 17 709	✓	160	3 5 17 991	✓

	p_1,p_2,p_3,p_4			p_1,p_2,p_3,p_4			$p_1,p_2,p_3.p_4$			p_1,p_2,p_3,p_4	
161	3 5 17 997	✓	201	3 5 19 199	✓	241	3 5 23 73	✓	281	3 5 29 107	✓
162	3 5 17 1009	✓	202	3 5 19 211	✓	242	3 5 23 79		282	3 5 29 109	✓
163	3 5 17 1013	✓	203	3 5 19 223	✓	243	3 5 23 83	✓	283	3 5 29 113	✓
164	3 5 19 23	✓	204	3 5 19 227	✓	244	3 5 23 89	✓	284	3 5 29 127	✓
165	3 5 19 29	✓	205	3 5 19 229	✓	245	3 5 23 97	✓	285	3 5 31 37	✓
166	3 5 19 31	✓	206	3 5 19 233	✓	246	3 5 23 101	✓	286	3 5 31 41	✓
167	3 5 19 37	✓	207	3 5 19 239	✓	247	3 5 23 103	✓	287	3 5 31 43	✓
168	3 5 19 41	✓	208	3 5 19 241	✓	248	3 5 23 107	✓	288	3 5 31 47	✓
169	3 5 19 43	✓	209	3 5 19 251	✓	249	3 5 23 109	✓	289	3 5 31 53	✓
170	3 5 19 47	✓	210	3 5 19 257	✓	250	3 5 23 113	✓	290	3 5 31 59	✓
171	3 5 19 53	✓	211	3 5 19 263	✓	251	3 5 23 127	✓	291	3 5 31 61	✓
172	3 5 19 59	✓	212	3 5 19 269	✓	252	3 5 23 131	✓	292	3 5 31 67	✓
173	3 5 19 61	✓	213	3 5 19 271	✓	253	3 5 23 137	✓	293	3 5 31 71	✓
174	3 5 19 67	✓	214	3 5 19 277	✓	254	3 5 23 139	✓	294	3 5 31 73	✓
175	3 5 19 71	✓	215	3 5 19 281	✓	255	3 5 23 149	✓	295	3 5 31 79	✓
176	3 5 19 73	✓	216	3 5 19 283	✓	256	3 5 23 151	✓	296	3 5 31 83	✓
177	3 5 19 79	✓	217	3 5 19 293	✓	257	3 5 23 157	✓	297	3 5 31 89	✓
178	3 5 19 83	✓	218	3 5 19 307	✓	258	3 5 23 163	✓	298	3 5 31 97	✓
179	3 5 19 89	✓	219	3 5 19 311	✓	259	3 5 23 167	✓	299	3 5 31 101	✓
180	3 5 19 97		220	3 5 19 313	✓	260	3 5 23 173	✓	300	3 5 31 103	✓
181	3 5 19 101		221	3 5 19 317	✓	261	3 5 23 179	✓	301	3 5 31 107	✓
182	3 5 19 103		222	3 5 19 331	✓	262	3 5 23 181	✓	302	3 5 31 109	✓
183	3 5 19 107		223	3 5 19 337	✓	263	3 5 23 191	✓	303	3 5 31 113	✓
184	3 5 19 109		224	3 5 19 347	✓	264	3 5 29 31	✓	304	3 5 37 41	✓
185	3 5 19 113	✓	225	3 5 19 349	✓	265	3 5 29 37		305	3 5 37 43	✓
186	3 5 19 127		226	3 5 19 353	✓	266	3 5 29 41		306	3 5 37 47	✓
187	3 5 19 131		227	3 5 19 359	✓	267	3 5 29 43	✓	307	3 5 37 53	✓
188	3 5 19 137		228	3 5 19 367	✓	268	3 5 29 47	✓	308	3 5 37 59	✓
189	3 5 19 139		229	3 5 19 373	✓	269	3 5 29 53	✓	309	3 5 37 61	✓
190	3 5 19 149	✓	230	3 5 23 29	✓	270	3 5 29 59	✓	310	3 5 37 67	✓
191	3 5 19 151	✓	231	3 5 23 31	✓	271	3 5 29 61	✓	311	3 5 37 71	✓
192	3 5 19 157	✓	232	3 5 23 37		272	3 5 29 67	✓	312	3 5 37 73	✓
193	3 5 19 163	✓	233	3 5 23 41		273	3 5 29 71	✓	313	3 5 37 79	✓
194	3 5 19 167	✓	234	3 5 23 43	✓	274	3 5 29 73	✓	314	3 5 37 83	✓
195	3 5 19 173	✓	235	3 5 23 47	✓	275	3 5 29 79	✓	315	3 5 37 89	✓
196	3 5 19 179	✓	236	3 5 23 53		276	3 5 29 83	✓	316	3 5 37 97	✓
197	3 5 19 181	✓	237	3 5 23 59	✓	277	3 5 29 89	✓	317	3 5 37 101	✓
198	3 5 19 191	✓	238	3 5 23 61	✓	278	3 5 29 97	✓	318	3 5 37 103	✓
199	3 5 19 193	✓	239	3 5 23 67		279	3 5 29 101	✓	319	3 5 41 43	✓
200	3 5 19 197	✓	240	3 5 23 71	✓	280	3 5 29 103	✓	320	3 5 41 47	✓

	p_1, p_2, p_3, p_4			p_1, p_2, p_3, p_4			$p_1, p_2, p_3.p_4$			p_1, p_2, p_3, p_4	
321	3 5 41 53	✓	346	3 5 47 79	✓	371	3 7 11 43	✓	396	3 7 13 67	✓
322	3 5 41 59	✓	347	3 5 47 83	✓	372	3 7 11 47	✓	397	3 7 17 19	✓
323	3 5 41 61	✓	348	3 5 53 59	✓	373	3 7 11 53	✓	398	3 7 17 23	✓
324	3 5 41 67	✓	349	3 5 53 61	✓	374	3 7 11 59	✓	399	3 7 17 29	✓
325	3 5 41 71	✓	350	3 5 53 67	✓	375	3 7 11 61	✓	400	3 7 17 31	✓
326	3 5 41 73	✓	351	3 5 53 71	✓	376	3 7 11 67	✓	401	3 7 17 37	✓
327	3 5 41 79	✓	352	3 5 53 73	✓	377	3 7 11 71	✓	402	3 7 17 41	✓
328	3 5 41 83	✓	353	3 5 53 79	✓	378	3 7 11 73	✓	403	3 7 17 43	✓
329	3 5 41 89	✓	354	3 5 59 61	✓	379	3 7 11 79	✓	404	3 7 17 47	✓
330	3 5 43 47	✓	355	3 5 59 67	✓	380	3 7 11 83	✓	405	3 7 19 23	✓
331	3 5 43 53	✓	356	3 5 59 71	✓	381	3 7 11 89	✓	406	3 7 19 29	✓
332	3 5 43 59	✓	357	3 5 59 73	✓	382	3 7 11 97	✓	407	3 7 19 31	✓
333	3 5 43 61	✓	358	3 5 61 67	✓	383	3 7 11 101	✓	408	3 7 19 37	✓
334	3 5 43 67	✓	359	3 5 61 71	✓	384	3 7 13 17	✓	409	3 7 19 41	✓
335	3 5 43 71	✓	360	3 5 61 73	✓	385	3 7 13 19	✓	410	3 7 19 43	✓
336	3 5 43 73	✓	361	3 5 67 71	✓	386	3 7 13 23	✓	411	3 7 23 29	✓
337	3 5 43 79	✓	362	3 5 67 73	✓	387	3 7 13 29	✓	412	3 7 23 31	✓
338	3 5 43 83	✓	363	3 7 11 13	✓	388	3 7 13 31	✓	413	3 7 23 37	✓
339	3 5 43 89	✓	364	3 7 11 17	✓	389	3 7 13 37	✓	414	3 7 29 31	✓
340	3 5 47 53	✓	365	3 7 11 19	✓	390	3 7 13 41	✓	415	3 11 13 17	✓
341	3 5 47 59	✓	366	3 7 11 23	✓	391	3 7 13 43	✓	416	3 11 13 19	✓
342	3 5 47 61	✓	367	3 7 11 29	✓	392	3 7 13 47	✓	417	3 11 13 23	✓
343	3 5 47 67	✓	368	3 7 11 31	✓	393	3 7 13 53	✓	418	3 11 13 29	✓
344	3 5 47 71	✓	369	3 7 11 37	✓	394	3 7 13 59	✓	419	3 11 17 19	✓
345	3 5 47 73	✓	370	3 7 11 41	✓	395	3 7 13 61	✓	420	3 11 17 23	✓
									421	3 11 19 23	✓
									422	3 13 17 19	✓

参考文献

[1] L.E.Dickson, Finiteness of the Odd Perfect and Primitive Abundant Numbers with n Distinct Prime Factors, Amer.J.Math., Vol.35, No.4, 1913, pp.413-422.

[2] 飯高茂, 完全数について, 第２５回数学史シンポジウム報告集, 2015, pp.38-61

[3] M.Kishore, Odd Integers N With Five Distinct Prime Factors for Which $2 - 10^{-12} < \sigma(N) < 2 + 10^{-12}$, Math.Comp.,Vol.32,1978,pp.303-309.

[4] M.Kishore, On Odd Perfect, Quasiperfect, and Odd Almost Perfect Numbers, Math.Comp.,Vol.36,1981,pp.583-586.

[5] C.Pomerance, Multiply Perfect Numbers, Mersenne Primes, and Effectiv Computability, Math.Ann. Vol.266, 1977, pp.195-206.

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。