多重完全数とその発展

飯高 茂

2017 年 10 月 21 日

1　多重完全数

ユークリッドの完全数は $\sigma(a) = 2a$ を満たす数として定義される. $2a$ の代わりに $3a$ にしたらどうなるか? という疑問は昔から提起されてきた.

1.1　多重完全数のクラス

一般に $\sigma(a) = ka$ を満たす数を $k-$ 完全数 (k を abundancy または class と呼ぶ) といい, これらを総称して多重完全数 (multiply perfect numbers), または倍積完全数という. 興味ある例が次第に知られるようになったが完全数の場合のオイラーの定理のような美しい結果はない. 完全数と比べると多重完全数の研究にはさらなる困難があるようだ.

表 1: $[P = 2, k = 3]$ 多重完全数 (Wolfram MathWorld より)

a	素因数分解
120	$2^3 * 3 * 5$
672	$2^5 * 3 * 7$
523776	$2^9 * 3 * 11 * 31$
459818240	$2^8 * 5 * 7 * 19 * 37 * 73$
1476304896	$2^{13} * 3 * 11 * 43 * 127$
51001180160	$2^{14} * 5 * 7 * 19 * 31 * 151$

この場合は 6 個しかないという予想がある.

ここでデカルトが出てきた.

完全数の場合はその素因数分解が $a = 2^e q, q$: 素数の形であり, $q = 2^{e+1} - 1$: はメルセンヌ素数. ここに巨大な素数ができてそこに深い価値が見出された.

表 2: $[P=2, k=4]$ 多重完全数 ,36 個発見された

a	素因数分解
30240	$2^5 * 3^3 * 5 * 7$ (デカルト 1638)
32760	$2^3 * 3^2 * 5 * 7 * 13$
2178540	$2^2 * 3^2 * 5 * 7^2 * 13 * 19$
23569920	$2^9 * 3^3 * 5 * 11 * 31$

表 3: $[P=2, k=5]$ 多重完全数, 65 個発見された

a	素因数分解
14182439040	$2^7 * 3^4 * 5 * 7 * 11^2 * 17 * 19$ (デカルト 1638)
31998395520	$2^7 * 3^5 * 5 * 7^2 * 13 * 17 * 19$

表 4: $[P=2, k=6]$ 多重完全数 ,(カーマイケル 1907)

a	素因数分解
154345556085770649600	$2^{15} * 3^5 * 5^2 * 7^2 * 11 * 13 * 17 * 19 * 31 * 43 * 257$

多重完全数では, 構成する素数が小さいという特色がある. しかしこれを定量的に示した定理があるのだろうか.

完全数の一般化と同じ考えで, きわめて安易であるが底の素数 P を固定して $(P-1)\sigma(a) = ka$ を満たす数を 底 P の場合の $k-$ 完全数という.

表 5: $[P=3, k=5]$ 多重完全数 $(2\sigma(a) = 5a)$

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$

パラメータ k を取り替えて解を探したところ,

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = -m$$

の場合は解が多い.

そこで新たに別種の完全数を導入しよう.

2　底 P, 平行移動 m の劣完全数

$q = P^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を底 P, 平行移動 m の狭義の劣完全数 (subperfect number) といい, このときの q を劣素数 (subprime number) という.

ここで劣完全数の方程式の導入を行う.

劣完全数 $a = P^e q$ について

$$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(P^e q) = (P^{e+1} - 1)(q + 1) = Pa - (q + 1 - P^e)$$

$q = P^{e+1} - 1 + m$ によれば $q + 1 - P^e = m$ なので

$$\overline{P}\sigma(a) = Pa - m.$$

究極の完全数の場合と比べて簡明な式になった. この方程式の解を底 P, 平行移動 m の広義の劣完全数 (subperfect number with translation parameter m) というのである.

広義の劣完全数を簡単に劣完全数という.

$P > 2$ なら, $m = 0$ のとき $P^{e+1} - 1 + m$　は素数にならない. これを克服するために $\sigma(P^e)$ を使うことになり $q = \sigma(P^e) - 1 + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を究極の完全数が定義された.

しかし, m によっては $P^{e+1} - 1 + m$ は素数なのでこのようにしても一向構わない.

表 6: $[P = 3, m = 3]$ 広義のの劣完全数

a	素因数分解
5	5
33	$3 * 11$
261	$3^2 * 29$
385	$5 * 7 * 11$
897	$3 * 13 * 23$
2241	$3^3 * 83$
26937	$3^2 * 41 * 73$
46593	$3^2 * 31 * 167$

表 7: $[P=3, m=3]$ 狭義の劣完全数, 正規形

e	a	素因数分解
1	33	$3*11$
2	261	3^2*29
3	2241	3^3*83
7	14353281	3^7*6563
9	1162300833	$3^9*59051$
13	7625600673633	$3^{13}*4782971$
14	68630386930821	$3^{14}*14348909$
23	26588814359145789645441	$3^{23}*282429536483$
25	2153693963077252343529633	$3^{25}*2541865828331$
35	A	B

2.1 正規形の劣完全数

$a=P^fQ(Q:$ 素数$)$ と書ける解を正規形の劣完全数という.

このとき $\overline{P}\sigma(a)=(P^{f+1}-1)(Q+1)=Pa+P^{f+1}-(Q+1)$ になり

$$-m=\overline{P}\sigma(a)-Pa=P^{f+1}-(Q+1).$$

これより $Q=P^{f+1}+m-1$.

これは底 P, 平行移動 m の狭義の劣完全数のときの劣素数である.

2.2 $P=3$, 平行移動 $m=3$ の劣完全数

狭義の劣完全数の場合には $P=3$ のとき $Q=3^{e+1}-1+m$ が素数となる. だから m は奇数になる. しかし $m=1,7,10$ の場合 Q は素数にならない.

そこで 広義の劣完全数の場合 $m=3$ について調べる.

5 を除くと, $5*7*11$ の他は, 正規形と第 2 正規形 の解ばかりである. おとなしい解があるだけだ.

$A=7509466514979724904009806156256961$

$B=3^{35}*150094635296999123$

表 8: $[P=3, m=3]$ 狭義の劣完全数, 正規形

e	a	素因数分解
1	33	$3 * 11$
2	261	$3^2 * 29$
3	2241	$3^3 * 83$
7	14353281	$3^7 * 6563$
9	1162300833	$3^9 * 59051$
13	7625600673633	$3^{13} * 4782971$
14	68630386930821	$3^{14} * 14348909$
23	265888143591457896454441	$3^{23} * 282429536483$
25	2153693963077252343529633	$3^{25} * 2541865828331$
35	A	B

2.3 第２種正規形の劣完全数

$a = P^f rq (r < q :$ 素数) と書ける解を第２種正規形の劣完全数という.
このとき $\overline{P}\sigma(a) = (P^{f+1}-1)(r+1)(q+1), Pa - m = P^{f+1}rq - m$ になる.
$N = P^{f+1}-1, A = (r+1)(q+1), B = rq, \Delta = r+q$ とおくとき

$$NA = (P^{f+1}-1)(r+1)(q+1), Pa - m = P^{f+1}rq - m = (N+1)B - m.$$

$A = B + \Delta + 1$ を代入して

$$NB + N(\Delta+1) = P^{f+1}rq - m = (N+1)B - m.$$

これより

$$N(\Delta+1) = B - m.$$

$q_0 = q - N, r_0 = r - N, B_0 = q_0 r_0$ とおくと
$B_0 = B - N\Delta + N^2$. これを代入し

$$N(\Delta+1) = B - m = B_0 + N\Delta - N^2.$$

$D = N(N+1) + m$ とおけば, $B_0 = D$.

ここで話を逆転する. 与えられた f と m に対して $N = P^{f+1}-1, D = N(N+1)+m$ として D を求めそれを因数分解して, $B_0 = D$ から $q = q_0 + N, r = r_0 + N$ がともに素数となるものを探す. すると, $a = P^f rq$ が解になる.

表 9: $[P=3, m=3]$ 劣完全数, 第二正規形

e	a	素因数分解
1	897	$3 * 13 * 23$
2	46593	$3^2 * 31 * 167$
2	26937	$3^2 * 41 * 73$
5	19035755649	$3^5 * 733 * 106871$
5	6519443841	$3^5 * 743 * 36109$
6	43076441601	$3^6 * 2399 * 24631$

次の結果は小学校算数のようなものだが私は知らなかった. オイラーが使ったらしい.

補題 1 a, b, c, d が自然数で, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ が成り立つ. $\dfrac{a}{b}$ が既約分数なら, 自然数 k があり $c = ka.d = kb$ となる.

Proof.
$da = bc$, $\mathrm{GCD}(a, b) = 1$ かつ $a|bc$ より $a|c$. ゆえに $c = ka$. これから $d = kb$.
(記号 $a|c$ は a が c の約数を意味する.)

3 $P \geq 3$, 平行移動 $m = 0$ の劣完全数

狭義の劣完全数の場合, $q = P^{e+1} - 1 + m$ が素数なので, $P \geq 3$ であれば, m は奇数になる.

$\sigma(a) - a$ を $\mathrm{co}\sigma(a)$ と書きユークリッド余関数という. 以下でもよく使われることになる.

広義の劣完全数ではあえて, m が偶数の場合も考える. とくに $m = 0$ の場合は興味があり, 次の結果が得られている.

命題 1 $P \geq 3$, 平行移動 $m = 0$ の広義の劣完全数は $P = 3$ の場合の $a = 2$.

Proof.
$m = 0$ なので $\overline{P}\sigma(a) = Pa$ により

$$\frac{\overline{P}}{P} = \frac{a}{\sigma(a)}.$$

$\dfrac{\overline{P}}{P}$ は既約分数なので, 自然数 k があり $a = k\overline{P}, \sigma(a) = kP$ となる.

$$\sigma(a) = kP = k(\overline{P} + 1) = k\overline{P} + k = a + k.$$

$\mathrm{co}\sigma(a) = \sigma(a) - a$ を使うと $\mathrm{co}\sigma(a) = k$ かつ k は a の約数なので, $k = 1, a$ は素数.

なぜなら, $k > 1$ とすると, これらは a と異なる約数なので $\mathrm{co}\sigma(a) \geq 1 + k$. これは $\mathrm{co}\sigma(a) = k$ に矛盾する.

$\mathrm{co}\sigma(a) = 1$ になり, a は素数 $a = k\overline{P}$ は素数なので, $k = 1, \overline{P} = 2$. よって $P = 3, a = 2$.

水谷一氏の指摘により, 元の証明よりはるかに簡易化できた.

(この証明は オイラーが行った,「偶数完全数はユークリッドの完全数になる」証明と酷似している. そこに幾ばくかの興味がある)

4 $P \geq 3$, 平行移動 $m = P - 1$ の劣完全数

命題 2 $P \geq 3$, 平行移動 $m = \overline{P}$ の劣完全数は存在しない.

Proof.

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = -\overline{P}$ によって, $\overline{P}(\sigma(a) + 1) = Pa$ になるので,

$$\frac{\overline{P}}{P} = \frac{a}{\sigma(a) + 1}.$$

$\dfrac{\overline{P}}{P}$ は既約分数なので, 自然数 k があり $a = k\overline{P}, \sigma(a) + 1 = kP$ となる.

$$\sigma(a) + 1 = kP = k(\overline{P} + 1) = k\overline{P} + k = a + k.$$

よって,

$$\sigma(a) - a = co\sigma(a) = k - 1.$$

k は a の約数なので $k - 1 = \sigma(a) - a \geq k$. これは矛盾.

この論法によれば,$m = \nu\overline{P}, \nu > 0$ の場合は劣完全数が存在しないことがわかる.

注意 $P = 2$ のとき,$m = -1$ だけ平行移動した場合の方程式は $\sigma(a) = 2a + 1$ になる. この場合は解が存在しないと思われているが今でも証明できない. しかし劣完全数の場合 $\overline{P}(\sigma(a) + 1) = Pa$ の解を考える. 解の不存在が簡単に証明できる. これほどうまく行くと思わず 「劣完全数の素敵な世界」と叫びたくなる.

5　$P \geq 3$, 平行移動 $m = -\overline{P}$ の劣完全数

定理 1 $P \geq 3$, 平行移動 $m = -\overline{P}$ の劣完全数は $P = 3, a = 2^2$.

Proof. 定義によって $\overline{P}\sigma(a) - Pa = \overline{P}$ になるので $\overline{P}(\sigma(a) - 1) = Pa$. よって,

$$\frac{\overline{P}}{P} = \frac{a}{\sigma(a) - 1}.$$

$\dfrac{\overline{P}}{P}$ は既約分数なので, 自然数 k があり $a = k\overline{P}, \sigma(a) - 1 = kP$ となる.

$$\sigma(a) - 1 = kP = k(\overline{P} + 1) = k\overline{P} + k = a + k.$$

よって,

$$co\sigma(a) = \sigma(a) - a = k + 1.$$

$a = k\overline{P}$ に注目し場合を分ける.

1) $k = 1$. $\sigma(a) - a = 2$.
ユークリッド余関数 $co\sigma(a) = \sigma(a) - a$ の値は 2 にならないことが知られているから矛盾.

2) $k > 1$. $k \neq \overline{P}$.
$k, \overline{P}, 1$ は a の真の約数なので

$$\sigma(a) - a = k + 1 \geq k + \overline{P} + 1$$

. これは矛盾.

3) $k > 1$. $k = \overline{P}$.
$a = k^2$ なので $\sigma(a) = k^2 + k + 1$. このとき k は素数. $k = \overline{P}$ も素数なので, $P = 3, a = k^2 = 4$.

6　$P = 3$, m は 偶数の場合

$P = 3$ とする.

$2\sigma(a) - 3a = -m$ になる. m : 偶数の場合, $m > 0$ なら解はないので $-40 \geq m \geq -1$ の範囲についてコンピュータで出力してできた結果は次の通り. ここで

```
m=-40 factor(52)=2^2*13
```

これを $m = -40$ のときは解が 52 でその素因数分解は $2^2 * 13$ と読む. 以下も同じ.

```
 m=-36;factor(44)=2^2*11,factor(50)=2*5^2
 m=-30;factor(32)=2^5
 m=-28;factor(28)=2^2*7
 m=-24;factor(18)=2*3^2,factor(20)=2^2*5
 m=-20;factor(12)=2^2*3
 m=-14factor(16)=2^4
```

```
m=-6
factor(6)=2*3,factor(8)=2^3,factor(10)=2*5,factor(14)=2*7
factor(22)=2*11,factor(26)=2*13,factor(34)=2*17
```

$m = -6$ のとき $a = 2p$. $p > 2$: 素数,$a = 2^3$ の解が出てくる.
$\sigma(2p) = 3p + 3$ なので $2\sigma(a) - 3a = 6p + 6 - 6p = 6$.
これはいわゆる通常解で,B 型の解ともいう.