

Henri Poincaré et les 《 Méthodes nouvelles de la mécanique céleste 》 *

堀 井 政 信^{† ‡}

1 はじめに

Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994 (以下, 1894-1994) [1] を読み進めています. “Quelque problèmes fameux enfin résolus... et les autres (ついに解かれた有名な問題...とそれ以外)” (2016.10.8) [2] では, 四色定理, 三体問題, フェルマーの定理について述べました.

三体問題では, Oscar II により設立された賞が Henri Poincaré に授与されたことと, Henri Poincaré が三体問題の《非可積分》を証明したことを取り上げました. また, ニュートンの重力理論は太陽の周りを回る惑星の軌道を説明しましたが, その場合は, 太陽と惑星という 2 つの物体しか存在しないと仮定したことに言及しました.

本報告では, “Quelque problèmes fameux enfin résolus... et les autres” [2] で, 昨年割愛した部分について述べます.

*津田塾大学 数学・計算機科学研究所第 28 回数学史シンポジウム, 2017.10.14

[†]e-mail : masa.horii@nifty.com, キーワード: ポアンカレ予想, オスカル賞, 太陽系の安定性, École polytechnique, *Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994*.

[‡]メールマガジン 高校教員が始めた数学史 <http://www.mag2.com/m/0000125834.html>,
ウェブサイト 高校教員が始めた数学史 <http://nifty3.my.coocan.jp/mathhis.htm>

2 ついに解かれた有名な問題

1894-1994 [1] が出版される前の 100 年間に、多くの有名な問題が解決されました。例えば、Appell と Haken が《四色定理》を証明しました。また、1993 年に Andrew Wiles がフェルマーの定理の証明を発表し、重要で決定的な進歩を実現しました。その後一旦主張を取り下げますが、1995 年 4 月に新しい証明を完成します [2]。

3 ポアンカレ予想

その他の有名な問題として、ポアンカレ予想が多くの数学者の注意とエネルギーを集めました [1]。ポアンカレ予想の歴史とグレゴリー・ペレルマンについて述べます。

3.1 ポアンカレ予想の歴史

アンリ・ポアンカレは、連続的な変形を扱う数学であるトポロジーの創設者の一人です。1904 年にポアンカレは、一見したところ単純なある疑問に思い至り、以前の研究でその答えを暗黙のうちに仮定していたことに気づきました。しかし、その証明を見つけることはできませんでした。ポアンカレはその問題を疑問と表現しましたが、誰もがその答えは「イエス」だろうと予想したため、《ポアンカレ予想》と呼ばれるようになりました。7 つのクレイミレニアム賞問題の 1 つであり、それにふさわしく、トポロジー全体でもっとも悩ましい問題の 1 つであることが明らかになりました。最終的に、このポアンカレの疑問に対しては、2002 年に若いロシア人グレゴリー・ペレルマンが答えを出します。その答えには新しい考え方や手法が大量に使われており、それがあまりに膨大だったため、数学界がその証明を理解して正しいことを受け入れるまでに数年かかりました。

その成功によってペレルマンは、もっとも権威ある数学賞であるフィールズメダルを授与されましたが、受賞を拒否します。《ポアンカレ予想》を証明したことで賞金 100 万ドルのクレイ賞にも選ばれたが、やはり辞退します。 [3]

3.2 ペレルマンのプレプリント

2002年、ペレルマンはリッチフローに関するプレプリントを arXiv に投稿しました。そこには、「リッチフローは勾配的である」という、注目すべき主張がなされていました。勾配的な流れにはかなりの制約があり、渦を描いて永遠に周回したり、カオス的な振る舞いを見せたりしてはならない。リッチフローがそれほど素直な挙動を示すなどとは、誰一人考えていなかったらしい。しかしペレルマンは、そのことを主張するだけでなく、証明までやってのけました。論文の最後には、「サーストンの幾何化予想」の証明となる論証の概略が記されており、さらなる詳細は arXiv への次の投稿で示すと約束されていました。そしてそれから8か月で、約束した詳細の多くを論じた2篇の続報論文が投稿されました。

最初の投稿は大騒動を巻き起こしました。続く2回の投稿によって、ペレルマンは自分が話していることをきちんと理解しており、その考え方は、おかしい論理の落とし穴や未証明の仮定を含むまことしやかな戦略の域をはるかに超えているという印象が深まりました。偉大な問題を解決したという主張に対する、数学界のいつもの懐疑的な態度は鳴りをひそめ、ペレルマンは証明に成功したに違いないという雰囲気が広がりました。[3]

3.3 arXiv 投稿後

しかし悪魔は細部に潜んでいるもので、数学では細部はとてつもない悪魔になりえます。ペレルマンの結果も、関係する分野に通じていて起こりうる間違いを把握している人が、長い時間をかけて細かくチェックしなければなりません。しかも、ペレルマンは数学と数理物理学の少なくとも4つのまったく相異なる分野を組み合わせしており、そのうち2つか3つ以上を理解している人がほとんどいなかったため、そうそう一筋縄ではいきませんでした。ペレルマンの証明が正しいかどうか判断するには、かなりのチームワークとかなりの努力が必要となりました。さらに、arXiv に投稿されたプレプリントには、通常の発表論文のレベルに比べると十分に細部までは示されていませんでした。

長々と待たされるにつれてペレルマンは、人々の傍観者的な態度に苛立ちを募らせていきました。ペレルマンは、自分の証明が正しいことを知っていました。その証明をきわめてよく理解していて、なぜほかの人が困っ

ているのか解せなかったのです。そして、結果をさらに詳細に書き上げることも、それを学術雑誌に投稿することも拒みました。細部が抜けているのではないかという質問に答えることもしなくなりました。

クレイ研究所のウェブサイトには、ミレニアム賞の受賞要件が記されています。とくに、提案された証明は査読付きの学術雑誌で発表され、その2年後も数学界に受け入れられていなければなりません。その後、特別諮問委員会が精査し、賞を与えるべきかどうかを勧告します。ペレルマンは最初の要件を満たしておらず、今後もそのつもりはなさそうです。 [3]

4 “オスカル賞” 受賞論文

4.1 三体問題

1889年、Oscar IIにより設立された賞がHenri Poincaréに授与されました（論文“三体問題と力学方程式について”）。Poincaréの著書『天体力学の新しい方法』から、力学系理論とエルゴード理論が生まれます。Poincaréが惑星運動を描写する級数（Lindstedt級数）の存在と、3つ以上の物体が関わる級数の発散を証明し、天体力学が非常に混乱しました。

より一般的に、Poincaréは三体問題の《非可積分》を証明しました。その結果、力学にトポロジーが導入されました。《小分母》が惑星運動の共振を証明したにもかかわらず、《算術の奇跡》の可能性（級数の収束と《準周期》解の存在）を予測しました。その《奇跡》とは、Kolmogorov, Arnold, Moserによる《KAM》理論です。1960年代初め、Arnoldが多数の惑星が無限小である太陽系の安定性を証明しました。 [1]

4.2 “オスカル賞”

1889年は、ノルウェーとスウェーデンの王オスカル2世の生誕60周年でした。それを祝う一環として、ノルウェー人数学者のヨースター・ミッタク＝レフラーは王に、 n 体問題を解決した人物へ賞を授けると発表するよう進言しました。受賞するには、正確な数式でなく、収束する何らかの級数を導けばよいとされました。ポアンカレは興味を持ち、きわめて単純なケースとして、天体の1つが塵の微粒子のように質量を無視できる、制限

された三体問題から考えはじめることにしました。塵粒子はほかの2つの天体の影響を受けますが、その2つの天体は塵粒子を完全に無視するというモデルを組み立てました。すると2つの重い天体は、周期的な軌道上を一定の速さで運動します。運動が複雑になるのは塵粒子だけです。

ポアンカレは、オスカル王の示した問題には答えられませんでした。その問題はあまりにも高望みでした。しかし、この方法がきわめて革新的で、かなりの進歩をもたらしたため、ポアンカレは賞を与えられました。1890年に発表されたその受賞研究は、たとえ制限された三体問題であっても、受賞要件に示されたたぐいの答えは存在しないかもしれないことを示していました。 [3]

4.3 受賞論文

懸賞の要項に明記されていたように、受賞論文は《アクタ・マテマティカ》誌上で発表されることになっていました。ミッタク＝レフラーは助手のエドヴァド・フラグメーンに論文の刊行準備にかかるように命じました。彼はすべての式をチェックし、すべての計算を検算しました。賞の授与から半年が過ぎた1889年7月、フラグメーンはよくわからない部分に出くわし、そのことをミッタク＝レフラーに報告し、ポアンカレに説明を求めました。

フラグメーンを満足させるため、ポアンカレは論文の最後に付け加える注釈を用意しました。そして、長い注釈を書きながら、論文に別の間違いが含まれていることに気がつきました。「カオス軌道」の可能性を見落としていました。数か月間、欠陥を取り除く方法を一心不乱に探しましたが、逆に欠陥の全容が明らかになり、ついに疑いの余地がなくなりました。

ミッタク＝レフラーは《アクタ・マテマティカ》を購読者に配らないよう指示しました。極秘作戦により、欠陥論文が掲載された見本刷りはすべて回収され、《アクタ・マテマティカ》第十三巻の刷了分はすべて処分されました。そして、見本刷りのうちの数部だけ、ストックホルム郊外のユースホルムにあるミッタク＝レフラー研究所にしまいこまれました。

ポアンカレは数か月間必死に取り組んだ末、論文の再提出にこぎ着けました。新しい論文はまったくもって先駆的でした。そこにはカオス理論が初めてその姿を見せ、再帰定理も盛り込まれていました。元の論文より100

ページも長くなっていました。 [4]

4.4 ミッタク＝レフラー研究所

1890年4月に《アクタ・マテマティカ》第十三巻が予定より1年遅れて発行されたとき、ポアンカレの元の論文に誤りが含まれていたという噂はすっかり忘れられており、名匠の手になる論文だけが残りました。何十年かのちに科学史家がミッタク＝レフラー研究所の書庫を調査し、元の論文と出版された論文を比べて初めて、事態の真の深刻さが明らかになりました。

当初は懸賞論文の募集を四年に一度告知する計画でしたが、この失態の後に数学界の“オスカル賞”が授与されることは二度とありませんでした。 [4]

4.5 三体問題と安定性

ポアンカレの懸賞論文は、新旧どちらも、 n 体から成る系が破綻するかどうかという究極の問いには答えていません。ポアンカレが発見したのは「バタフライ効果」です。その考え方に従えば、宇宙船のような小さな物体によって引き起こされる軌道の乱れ（摂動）によって、惑星どうしが離ればなれになることも考えられます。

1912年、フィンランドのカール・スンドマンという数学者が、一つの系を成す複数の物体の軌道を記述する、きわめてゆっくりだが収束する無限級数を発見しました。1954年には、ロシアの数学者、アンドレイ・ニコラエヴィッチ・コルモゴロフが、アムステルダムで開かれた国際数学連合の会議で、 n 体問題にかんして招待講演を行いました。テーマは、物体の周期的な軌道が小規模の摂動によってどうなるか、というやっかいな問題でした。彼の答えは、乱された軌道の多くは準周期的になる可能性があるが、ばらばらにはならない、というものでした。

ニューヨークのクーラント研究所でフルブライト招聘講師を務めるドイツ人数学者のユルゲン・モーザーが、コルモゴロフの論文で不明確な部分に出くわしてひっかかりを感じました。6年かけ、問題となった級数の各項の分子が分母より速く小さくなること、そしてそれによって級数が収束することを示し、ポアンカレも悩んだ「小分母」の問題を解決しました。

コルモゴロフの教え子の一人ウラジーミル・イーゴレヴィッチ・アーノルドが、 n 体問題に別の切り口から挑み、モーザーと同じ結論に達しました。太陽系の安定性について、われわれや子どもや孫の代までなら心配は要りません。惑星は少なくとも当面は軌道からずれません。この新しい理論は、三人の数学者（コルモゴロフとアーノルドとモーザー）の頭文字をとって KAM 理論と呼ばれています。しかし、太陽系を構成する惑星は三つではなく八つであり、太陽系の安定性が科学によって保証されたとは言えません。 [4]

5 太陽系の安定性

ポアンカレは三体問題の《非可積分》を証明し、解析的に解けないことを明らかにしました。KAM 理論により事態は改善しましたが、太陽系の安定性については解明に至りませんでした。さらなる取り組みについて述べます。

5.1 太陽系の推定年齢

太陽系の推定年齢がどんどん伸びていました。19 世紀には高々数千万年と思われ、20 世紀に入っても、1920 年代には宇宙年齢が 20 億年でした。太陽系の年齢が 45 億年となったのは 1950 年代です。これは摂動論が収束しないことにより太陽系が不安定になることに対する強力な反証です。太陽系を記述する運動方程式が非可積分であっても、惑星達の運動が準周期的であるということは、不安定性を妨げる障壁があるはずです。KAM 理論はこれに応えました。非可積分性が弱い時には、相空間のほとんどを障壁が占めます。可積分系から遠ざかるにつれて障壁がまばらになります。 [5]

5.2 太陽系惑星の長期数値積分と安定性

数値的研究の典型例のひとつが太陽系惑星の長期数値積分です。惑星系の安定性は Newton 以来の天体力学の大課題であり、現在でも研究が続け

られています。この問題に対する数値的アプローチは、世の中に計算機なるものが出現した 1950 年代から開始されました。

Sussman と Wisdom(1988) が 8.45 億年の長期数値積分を実行し、外五惑星系 [6] の運動がカオス的であることを見い出しました。Duncan と Lissauer(1998) や Ito et al.(1996) による 10^{11} 年オーダーの長期積分に於いて、外五惑星系は安定であることが確認されています。

Sussman と Wisdom(1992) の 1 億年の数値積分により地球型惑星 [7] の Lyapunov 数 [8] が数百万年と非常に短いことが示されましたが、Ito と Tanikawa(2001) では ± 50 億年にわたる数値積分に於いて、太陽系惑星はカオスであるが大局的に安定であることが明らかにされつつあります。

「太陽系は安定か？」という問いは極めて抽象的であり、その答えを私達は既に知っているとも言えるし、知らないとも言えます。これは、惑星の運動について「安定性」という用語の意味が非常に曖昧であることによります。 [5]

6 ポアンカレとペレルマン

ポアンカレの論文は、当時ヨーロッパ最高の数学者のシャルル・エルミートとカール・ワイエルシュトラスの審査を通りました。しかし受賞後に間違いに気づき、再提出しました。元の論文に誤りが含まれていたことは伏せられました。 [4]

ペレルマンのプレプリントは、専門家が長い時間をかけてチェックしなければなりません。ペレルマンは待たされることに苛立ち、結果をさらに詳細に書き上げることも、それを学術雑誌に投稿することも拒みました。 [3]

ポアンカレとペレルマンはいずれも、論文発表においてトラブルに遭遇しました。二人の最終的な対応は異なりますが、数学の論文審査が抱える課題が関わっています。審査できる人物は少なく、実験など他の手段で検証することが難しい。

7 終わりに

「ポアンカレ予想」では、ペレルマンがフィールズメダルとクレイ賞を受けなかった経緯について述べました。「“オスカル賞”受賞論文」では、論文に間違いが含まれていて、「極秘作戦」の結果再提出されたことに言及しました。「太陽系の安定性」について、ポアンカレが三体問題の《非可積分》を証明した後に定性的な研究が盛んになりました。更に、太陽系の推定年齢が伸びたことが反証となり、数値的研究により解明が進められています。

“オスカル賞”における「極秘作戦」の存在は、科学史家が書庫を調査したことにより明らかになりました。関連する史料を探して詳細を調べてみたいと考えます。

参考文献

- [1] Jacques Lesourne, *Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994*, DUNOD, PARIS, 1994, p.72-74
- [2] 堀井政信, 「Quelque problèmes fameux enfin résolus... et les autres」, 『津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 38 第 27 回数学史シンポジウム (2016)』, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所, 2017, p.39-49
- [3] 『数学を変えた 14 の偉大な問題』, イアン・スチュアート著, 水谷淳訳, SB クリエイティブ, 2013 年 10 月 25 日, p.183-191, p.235-269
- [4] 『ポアンカレ予想』, ジョージ・G・スピーロ著, 永瀬輝男・志摩亜希子監修, 早川書房, 2007 年 12 月 25 日, p.43-60
- [5] 『21 世紀の天体力学』, 伊藤考士・谷川清隆著, 天体力学 N 体力学研究会集録 33 巻, p.387-422, 2001 年 3 月 16 日
- [6] 木星・土星・天王星・海王星・冥王星. 現在, 冥王星は準惑星.
- [7] 水星・金星・地球・火星.
- [8] 近接する初期値から出発した軌道が e 倍離れるまでの平均時間.