田中由真の数学

竹之内　脩

1　田中　由真

田中由真の経歴等については、[1] に、墓碑銘として、次のようにあることが述べられている。

田中十兵衛由真　　吉實　　正利　　(1651～1719)

京都椹木町に住む

早くに父を亡くし、母の死後 54 で結婚。子 3 人

門人幾三千とあるが、極めて貧であった。

師は橋本吉隆、川島由易に其の業を伝う。中根元圭、安藤吉治は門人

算学紛解、洛書龜鑑、算法明解、算法明解、雑集求笑算法、算法天元二百問、

授時暦經算法日蝕算

という稿本が伝えられている。

江戸の関孝和に対して、京、大坂で活躍していた和算家には、次の人たちがいる。

橋本正數－－橋本吉隆－－田中由真－－喜多治泊－－島田尚政－－井関知辰

古市正信　　小川市兵衛　　大島喜侍

澤口一之

さて、これらの京、大坂で活躍していた人たちと、関孝和を取り巻く人たちとは、どういう関係にあったのであろうか。関孝和を中心とする人たちについてのことは、

荒木先生茶談

に伝えられているが、この中には、上方における数学者のことは、ほとんど書かれていない。唯一、次のようにある。

中西正好は京、糀町に住して算を教えていた。天元術を関氏門人の内より得て、己が発明として流派を建て弟子を教え、大いに世に称せられた。其の門人に、藤野源四郎、河崎新右衛門、河内武太夫、中西正利、磯村十郎右衛門、久留嶋左助等がいる。

荒木先生茶談は、18 世紀にはいってから書かれたものであろうから、すでに、田中由真の名は知られていたであろうが、その名は挙げられていないのである。あるいは、関と上方の人との間には、何か確執があったのかもしれない。

本稿著者は、昨年のこの数学史シンポジウムにおいて、行列式について述べた。[?] そこでは、関と田中の行列式についての業績を述べた。両者の業績の成立はほとんど同じ時期のように思われるが、本稿著者は、田中の業績をより高く評価している。そのようなことで、関一派では、田中を除外して考えようとしたのかもしれないと憶測する。

しかし、大成算経では、田中、井関の方法は、取り入れられて記してある。

さて、田中は、関よりも若年であった。関も田中も、その先人の遺したものを研究した。関については、

闕疑抄答術、勿憚改答術、発微算法

が遺っている。田中には、

算法明解

が遺されている。

発微算法、算法明解はともに、

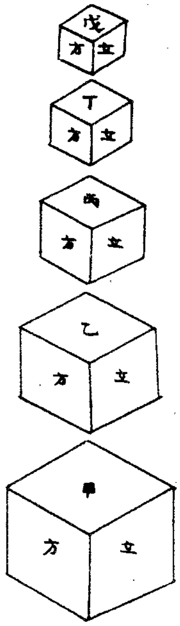
澤口一之、古今算法記、1670

の遺題の解を与えたものである。この澤口も、経歴の判然としない人で、しかし、荒木先生茶談には、その名が現れている。

關孝和、発微算法は、1674、田中由真、算法明解は、1678 に書かれたものである。算法明解は、明らかに発微算法を見て、研究して書かれたものである。本稿では、その対比を試みる。その対比を試みることは、当時の和算の手法の成立過程を知るよすがになる。その最大のポイントは、傍書術の成立にある。この 2 著には、傍書法は出てこないけれども、これだけ複雑な計算は、傍書法なしには考えられない。しかも、このような多変数の問題が扱われたのは、これが最初であろう。これは天元術では、処理できないものである。はっきりと傍書法が登場するのは、1683 年に書かれたと推定される　関、解伏題之法、田中、算学紛解　である。そして、1684 年の　建部、発微算法演段諺解　では、これが 100% 用いられている。この間にいろいろ研究されて、その成立を見たことであろう。

詳細は、他日のこととして、本稿では、最も対比の興味のあるいくつかの問題を論ずる。

2　平立重積門　四款 の四



今有甲乙丙丁戊立方各一只云其甲積乙積相和其幾数又其丙丁

戊積各三和共幾数問五個方面各幾数 乃方面差各自等

○答日甲方面如左

術日立天元一為甲方面再自之為甲積寄智位

○列只云数内減智位餘為乙積寄仁位

○列又云数加入智位三十六段寄勇位

○仁位再自乗 九十七萬二百九十九段　智位仁位巾相乗 九万四千五百段

智位巾仁位相乗 三百三十七万五千段　仁位勇位巾相乗 二百九十七段

右四位相併寄左

○智位仁位勇位相乗 九万四千五百段

仁位巾勇位相乗 二万九千四百三段　勇位再自乗 一段

右三位相併與寄左相消得開方式八乗方法開之得甲方面仍照前

術合問

問題文は次の通りである。

五つの立方体 甲、乙、丙、丁、戊 がある。

甲の一辺 x、乙の一辺 y、丙の一辺 z、丁の一辺 u、戊の一辺 v として、

$$x^3 + y^3 \quad (= a \text{ とする})$$

$$z^3 + u^3 + v^3 \quad (= b \text{ とする})$$

$$x - y = y - z = z - u = u - v \quad (= d \text{ とする})$$

が与えられているとき、それぞれの辺の長さを求めよ。

答　9 次方程式

術　(算法明解)

術の部分を、見易いように、次のような式の形に書く。

天元 $= x =$ 甲方面

天元 $^3 =$ 甲の面積　→　智位

只云数 $-$ 智位 $=$ 乙の面積　→　仁位

又云数 $+ 36\times$智位　→　勇位

$970,299 \times$ 仁位^3 $+$ $94,500 \times$ 智位 $\times$ 仁位^2 $+$ $3,375,000 \times$ 智位^2 $\times$ 仁位

$+$ $297 \times$ 仁位 $\times$ 勇位^2　→　**左**

$94,500 \times$ 智位 $\times$ 仁位 $\times$ 勇位 $+$ $29,403 \times$ 仁位^2 $\times$ 勇位 $+$ 勇位^3　→　**右**

左式と**右**式を相消して、開方式をつくる。

これを、通常の数式の形にすると次のようになる。

$$\begin{aligned}
x &= y+d \\
x^3 &= y^3+3y^2d+3yd^2+d^3 \\
\therefore \quad & d^3+3\,yd^2+3\,y^2d+(y^3-x^3)=0 \qquad ① \\
b &= (y-d)^3+(y-2d)^3+(y-3d)^3 \\
&= 3y^3-18dy^2+42d^2y-36d^3 \\
b+36x^3 &= 39y^3+90dy^2+150d^2y \qquad (=t^3 \text{ とおく}) \\
\therefore \quad & 150\,yd^2+90\,y^2d+(39\,y^3-t^3)=0 \qquad ②
\end{aligned}$$

①, ② から d を消去した終結式を作る。終結式については、[6] 参照。そこで与えられた 3 次方程式と 2 次方程式から終結式を作る方法で、下記のものを計算する。左側が＋のもの、右側が－のもの。

$(150\,y)^3(y^3-x^3)^2$	$(150\,y)^2(90\,y^2)\times 3\,y^2(y^3-x^3)$
$(150\,y)^2(39\,y^3-t^3)(3\,y^2)^2$	$2\times(150\,y)^2(39\,y^3-t^3)\times 3\,y(y^3-x^3)$
$(150\,y)(90\,y^2)^2\times 3\,y(y^3-x^3)$	$150\,y\times 90\,y^2(39\,y^3-t^3)\times 3\,y\times\,3y^2$
$3\times 150\,y\times 90\,y^2(39\,y^3-t^3)(y^3-x^3)$	$(90\,y^2)^3(y^3-x^3)$
$150\,y(39\,y^3-t^3)^2(3\,y)^2$	$2\times 150\,y(39\,y^3-t^3)^2\times 3\,y^2$
$(90\,y^2)^2(39\,y^3-t^3)\times 3\,y^2$	$90\,y^2(39\,y^3-t^3)^2\times 3\,y$
$(39\,y^3-t^3)^3$	

左側のものを加え、それから右側のものを加えたものを引くと、次の式になる。

$$970,299y^9+94,500x^3y^6+3,375,000x^6y^3+297t^6y^3-94,500x^3y^3t^3-29,403y^6t^3-t^9=0$$

これが、田中の得た最終の式である。ここで、　$y^3=a-x^3,\quad t^3=b+36x^3$ とすれば、x に関する 9 次方程式が得られることになる。

術　(発微算法)

さて、これに対して、発微算法ではどうしているかを見てみよう。

発微算法では、一番小さい戊の一辺 v に対する考察をする。

原文は省略して、現代式の数式で見ることにする。

まず、a, b を v と d で表す。

$$
\begin{aligned}
a &= x^3 + y^3 \\
b &= z^3 + u^3 + v^3 \\
u &= v + d, \quad z = v + 2d, \quad y = v + 3d, \quad x = v + 4d
\end{aligned}
$$

そうすると、

$$
\begin{aligned}
a &= 91\,d^3 + 75\,d^2v + 21\,dv^2 + 2\,v^3 \\
b &= 9\,d^3 + 15\,d^2v + 9\,dv^2 + 3\,v^3
\end{aligned}
$$

そして、この a の式からは dv^2 の項を消し、b の式からは d^3 の項を消す。v は方程式の未知数であるから、自由に出し入れしてよい。

このようにして、次の二つの式を得る。

$$
\begin{aligned}
p &= 3\,a + 15\,v^3 - 7\,b \;=\; 210\,d^3 + 120\,d^2v \\
q &= -9\,a + 91\,b - 255\,v^3 \;= 690\,d^2v + 630\,dv^2
\end{aligned}
$$

そして、p, q の右辺について、d の高次の項から、係数が等しくなるように順次調整する。

$$
\begin{aligned}
r = 30 \times 23^3\,p^2v^3 &= 16,096,941,000\,d^6v^3 + 18,396,504,000\,d^5v^4 \\
(30 \times 23^3 = 365,010) \quad & \quad +5,256,144,000\,d^4v^5 \\
s = 7^2\,q^3 &= 16,096,941,000\,d^6v^3 + 44,091,621,000\,d^5v^4 \\
& \quad +40,257,567,000\,d^4v^5 + 12,252,303,000\,d^3v^6 \\
rr = r + 177,330\,pqv^3 &= 16,096,941,000\,d^6v^3 + 44,091,621,000\,d^5v^4 \\
& \quad +43,399,827,000\,d^4v^5 + 13,406,148,000\,d^3v^6 \\
ss = s + 6,600\,v^3q^2 &= 16,096,941,000\,d^6v^3 + 44,091,621,000\,d^5v^4 \\
& \quad +43,399,827,000\,d^4v^5 + 17,990,343,000\,d^3v^6 \\
& \quad +2,619,540,000\,d^2v^7 \\
rrr = rr + 21,829,500\,v^6p &= 16,096,941,000\,d^6v^3 + 44,091,621,000\,d^5v^4 \\
& \quad +43,399,827,000\,d^4v^5 + 17,990,343,000\,d^3v^6 \\
& \quad +2,619,540,000\,d^2v^7
\end{aligned}
$$

この結果、ss と rrr の右辺が同じ式になった。そこで、この中央の辺を書くと、次の二つの式になる。

$$
\begin{aligned}
& 21,829,500\,v^6p \;+\; 365,010\,v^3p^2 \;+\; 177,330\,v^3pq \\
& 6,600\,v^3q^2 \;+\; 49\,q^3
\end{aligned}
$$

この二つの式を引き算すれば 0 となるが、この式は、v, p, q の式であり、それは v, a, b の式となるから、これによって、v についての 9 次方程式が得られたことになる。

以上によって、両者の方法が対比された。

關の方法は、自然なものといえよう。但し、この計算は、相当な量である。

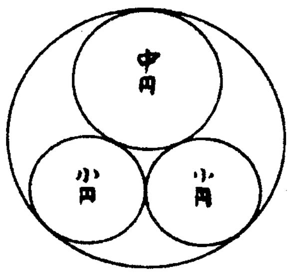
田中は、終結式を用いている。これによってみると、田中は、この時期には、ある程度、終結式に対する見識をもっていたと考えられる。すでに相当一般論をもっていたのか、あるいは、この問題を契機に、その理論を考えることになったのかはわからない。しかし、[6] に述べた算学紛解は 1683 年のものと考えられるが、それより以前、この書の 1678 年には、すでに相当のことを考えていたのではないだろうか。

関の、二つの等式で、一方の辺が同じものになるように変形していく、という方法は、関、田中両者を通じて、ほとんどの問題で見られる方法である。

次に、第 1 問について、見てみる。

3　平圓解空門　一款

大円内に中円 1 個、小円 2 個があり、互いに接している。
大円の半径 x、中円の半径 y、小円の半径 z とする。



$$\text{外餘積} = x^2 - (y^2 + 2z^2) \qquad (= a)$$
$$\text{中円の半径} - \text{小円の半径} = y - z \qquad (= b)$$

が与えられているとき、x, y, z を求めよ。

答　6 次方程式

術　(算法明解)

算法明解における解は、次のようなものである。

まず、次のように、角、徴、羽という式を定義する。

$$2\,b^2 + 24\,x^2 + 3\,a - 54\,xb \qquad \cdots \quad \text{角}$$
$$18\,ax + 32\,x^2b + 4\,ab + 4\,b^3 \qquad \cdots \quad \text{徴}$$
$$18\,x^3 + 18\,b^2x - \text{徴} \qquad \cdots \quad \text{羽}$$

そうすると、

$$\text{羽} = \text{角} \times z$$

となるという。(説明はない)　これから、

$$角 \times b + 羽 = 角 \times y$$

そこで、

$$(角 \times b + 羽)^2 + 2 \times 羽^2 \qquad \cdots \quad 左式$$
$$(x^2 - a) \times 角^2 \qquad \cdots \quad 右式$$

とし、左式 − 右式 = 0　として、x に関する 6 次の開方式を得ているのである。

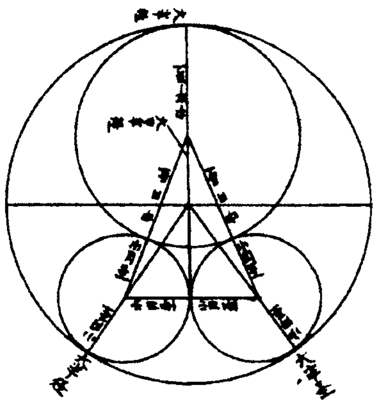
この問題は円の面積に関することなので、いちいち π との関わりが書いてあるが、実質上、それは不要なので、以下の記述では、全部それを省いて書いた。

この術の本文のあとに、解というのが書かれている。

大円、中円、小円の中心を、それぞれ O_1, O_2, O_3 とする。そして、小円二つの接点を H とするとき、解に述べているのは 、次の主張である。

$$2yz = (O_2H + (y - z))(x - y)$$

これは、次のように導かれる。



$$O_1O_2 = O_2H - O_1H$$

そして、

$$O_1O_2 = x - y$$
$$O_1H = \sqrt{(x-z)^2 - z^2)} = \sqrt{x^2 - 2xz}$$
$$O_2H = \sqrt{(y+z)^2 - z^2)} = \sqrt{y^2 + 2yz}$$

であるから、

$$O_1H^2 = (O_2H - O_1O_2)^2$$

したがって、

$$x^2 - 2xz = y^2 + 2yz - 2O_2H \cdot (x - y) + (x - y)^2$$

これより、

$$2O_2H \cdot (x - y) = 2xz + 2yz - 2xy + 2y^2 \;=\; -2(x-y)(y-z) + 4yz$$

となる。

この式は、2 乗して変形すれば、

$$
\begin{aligned}
& (x-y)^2(y^2+2\,yz)-(2\,yx-(x-y)(y-z))^2 \\
= \;& (x-y)^2(y^2+2yz)-(y^2+y*z-x*y+x*z)^2 \\
= \;& 4\,x^2y-4\,xy^2+(-x^2-2\,xy-y^2))\,z \\
= \;& 0
\end{aligned}
$$

となる。

この式は、発微算法においても、基礎としている式である。ここからが、算法明解と発微算法では異なる。

術　(算法明解)

天元 $=x$

$y=b+z$ として、基礎の二つの式

$$
\begin{aligned}
a-x^2+y^2+2\,z^2 &= 0 \\
4\,x^2y-4\,xy^2+(-x^2-2\,xy-y^2))\,z &= 0
\end{aligned}
$$

の左辺に代入する。その結果をそれぞれ p, q とする。

$$
\begin{aligned}
& a-x^2+y^2+2\,z^2 \\
= \;& b^2+a-x^2+2\,bz+3\,z^2 \\
= \;& p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 4\,x^2y-4\,xy^2+(-x^2-2\,xy-y^2)z \\
= \;& -4\,b^2x+4\,bx^2-b^2z-10\,bxz+3\,x^2z-2\,bz^2-6\,xz^2-z^3 \\
= \;& q
\end{aligned}
$$

p を使って、q の z^3 の項を消去する。消去した式を r とする。

$$
\begin{aligned}
& p\times z+q\times 3 \\
= \;& -12\,b^2x+12\,bx^2+(-2\,b^2+a-30\,bx+8\,x^2)z+(-4\,b-18\,x)z^2 \\
= \;& r
\end{aligned}
$$

さらに、p を使って、r の z^2 の項を消去する。

$$
\begin{aligned}
& 3\times r+(4\,b+18\,x)\times p \\
= \;& 4\,b^3+4\,ab-18\,b^2x+18\,ax+32\,bx^2-18\,x^3+(2\,b^2+3\,a-54\,bx+24\,x^2)z
\end{aligned}
$$

すなわち、

$$18\,x^3 + 18\,b^2x - 18\,ax - 32\,x^2b - 4\,ab - 4\,b^3 = (2\,b^2 + 24\,x^2 + 3\,a - 54\,xb)z$$

で、これが、羽 = 角 × z と書かれている式である。

術　(発微算法)

天元 = z = 小円徑

$(z+b)^2 = y^2$　$\longrightarrow$　甲位

$2\,z^2 +$ 甲位　$\longrightarrow$　乙位

$a +$ 乙位 = 大円徑$^2 = x^2$　$\longrightarrow$　丙位

$z \times$ 甲位　$\longrightarrow$　丁位

$((4\,y - z) \times$ 丙位 $-$ 丁位$)^2 = (4\,y + 2\,z)^2 \times y^2 \times x^2$　$\longrightarrow$　**左**

$(4\,y + 2z)^2 \times$ 甲位 $\times$ 丙位　$\longrightarrow$　**右**

左 と **右** と相消して、開方式 6 次方程式を得る。

この方法では、**左**式、すなわち

$$(4\,y - z)x^2 - zy^2 = (4\,y + 2\,z)yx$$

を得ることが中心になる。これは、上に算法明解の術の中で示した

$$4\,x^2y - 4\,xy^2 + (-x^2 - 2\,xy - y^2))\,z = 0$$

(この式は発微算法の中にはでてこない) から、これを x について整理して、適当に移項すれば得られる。この変形が巧みなところで、$4\,y - z$, $4\,y + 2\,z$ は、ともに z と b で表されるから、これで z に関する方程式ができる。

もとの古今算法記では、

$$a = 150, b = 0.5$$

と与えられている。これについて計算すると、

$\pi = 3.14159$ のとき、$z = 9.46932$

$\pi = 3.16$ のとき、　$z = 9.44117$

$\pi = 3$ のとき、　　$z = 9.69446$

となる。

4　三乗化と六斜術

澤口一之の古今算法記において、澤口は、いくつかの問題において、3 乗の形で条件を与えている。$x^3+y^3=a$ という形で条件を与える。そこで、出てきた関係を、この条件が使えるような形にしなければならない。最終的に得た方程式が、第 12 問では 54 次、第 13 問では 72 次、そして第 14 問では 1458 次というのはこのためで、本来 6 次、 8 次、6 次ですむところが、3 乗、3 乗を繰り返すので、このようなことになる。ちょっとくだらないことに思われるが、そのための方法が 3 乗化である。(この用語は、[3] による。)

また、第 12 問は、三角形の内部の一点を各項点と結んでできる 6 本の線分の関係を問題にしている。この関係は、六斜術として、江戸時代、何人かの和算家によって形ができたものである。関、田中の時代には、まだこの整理された形ではなかったけれども、いずれにしろこの問題は、六斜術に関するものである。

そこで、この節では、三乗化と六斜術について準備し、次の節で、第 12 問を取り上げる。

三乗化

三乗化というのは、

$$x+y+z=0$$

という式から、

$$x^3+y^3+x^3-3xyz=0$$

という式を導くことである。

z を移項して、

$$x+y=-z$$

とし、両辺 3 乗。

$$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=x^3+y^3-3zyz$$

そして右辺の $(-z)^3=-z^3$ を移項して、

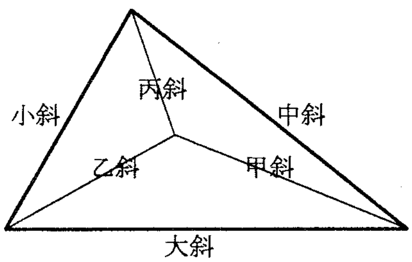
$$x^3+y^3+x^3-3xyz=0$$

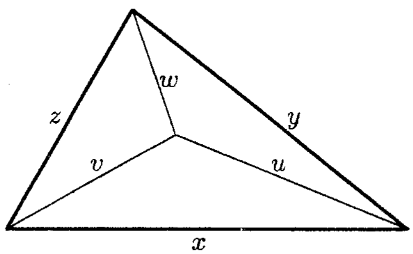
を得たものか。

簡単なことではあるけれども、どのようにしたのであろうか。何しろここに至る過程が何も示されていないので、いろいろ憶測するより仕方がない。

六斜術

六斜術は、江戸時代を通じて、いろいろな人によって確立された。いま、その一つの形を挙げれば、次のものである。(六斜術については、[5] に解説がある。)

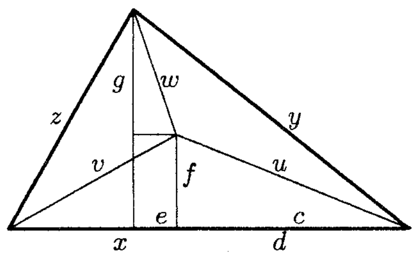




$$
\begin{aligned}
& x^2u^2(y^2+z^2-x^2+v^2+w^2-u^2)\\
+\ & y^2v^2(z^2+x^2-y^2+w^2+u^2-v^2)\\
+\ & z^2w^2(x^2+y^2-z^2+u^2+v^2-w^2)\\
=\ & x^2y^2z^2+x^2v^2w^2+y^2w^2u^2+z^2u^2v^2
\end{aligned}
$$

ここでは、[3] に従って、建部が述べている方法を示す。
図に示した記号を用いる。

$$
\begin{aligned}
2xc &= x^2+u^2-v^2\\
2xd &= x^2+y^2-z^2\\
2xe &= 2x(c-d) \ = \ u^2-v^2-y^2+z^2\\
f^2 &= u^2-c^2\\
(2xf)^2 &= 4x^2u^2-(x^2+u^2-v^2)^2\\
g^2 &= w^2-e^2\\
(2xg)^2 &= 4x^2w^2-(u^2-v^2-y^2+z^2)^2\\
& h^2w^2-e^2\\
(2xh)^2 &= 4x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)^2\\
2fg &= h^2-g^2-f^2
\end{aligned}
$$



そこで、$4(2xf)^2(2xg)^2=((2x)^2 2fg)^2$ を上に得られた式を使って計算する。

$$
\begin{aligned}
&4(4x^2u^2-(x^2+u^2-v^2)^2)(4x^2w^2-(u^2-v^2-y^2+z^2)^2)\\
&\quad =(4x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)^2-4x^2u^2+(x^2+u^2-v^2)^2\\
&\qquad\qquad\qquad -4x^2w^2+(u^2-v^2-y^2+z^2)^2)^2
\end{aligned}
$$

左辺 − 右辺 を計算する。全体が $16x^2$ で割れるようになるので、それで割ると、

$$
\begin{aligned}
&-u^2z^4+(u^2+v^2-x^2)y^2z^2\\
&\quad +\{(x^2+v^2-u^2)u^2+(x^2+u^2-v^2)w^2\}z^2\\
&\quad +\{(x^2+u^2+w^2-v^2)v^2+(x^2-u^2)w^2\}y^2
\end{aligned}
$$

$-\{(x^2+w^2-v^2)w^2+(v^2-w^2)u^2\}x^2$

$-v^2y^4=0$ となる。

これが、関が用いた六斜術の式である。

これに対し、田中は、次の式を用いている。

$$\begin{aligned}
&u^4z^2+u^2z^4+v^2w^2z^2-u^2v^2z^2\\
&\quad+x^2y^2(z^2-v^2-w^2)\\
&\quad-x^2(u^2w^2+u^2z^2+v^2w^2-u^2v^2-w^4)\\
&\quad-y^2(u^2z^2+v^2w^2+u^2v^2+v^2z^2-v^4-u^2w^2)\\
&\quad+w^2x^4+v^2y^4+w^2x^2z^2=0
\end{aligned}$$

5　平形斜積門　三款

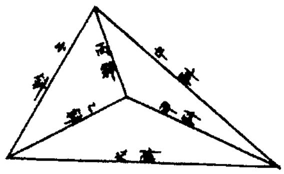
三角形内の一点と、各頂点を結ぶ。

3 辺を大斜、中斜、小斜とし、三角形内の点と各頂点を結ぶ線分を、甲斜、乙斜、丙斜とする。甲斜、乙斜、丙斜の長さは知られているものとする。

只云　(大斜)^3+(小斜)^3

別云　(中斜)^3+(大斜)^3

が与えられているとき、大斜、中斜、小斜の長さはいくらか。



術　(発微算法)

大斜 $=x$、中斜 $=y$、小斜 $=z$、甲斜 $=u$、乙斜 $=v$、丙斜 $=w$

$u,\ v,\ w$ は既知

只云　$x^3+z^3=a$

別云　$x^3+y^3=b$

$i=u^2+v^2$

$j=(x^2+v^2-u^2)u^2+(x^2+u^2-v^2)w^2$

$k=(x^2+u^2+w^2-v^2)v^2+(x^2-u^2)w^2$

$l=\{(x^2+w^2-v^2)w^2+(v^2-w^2)u^2\}x^2$

$m=3x^2u^2z^6k+6x^2z^6ij+3u^2v^2z^6j+3v^2l^2+3k^2l$

$n=3x^4z^6j+3u^2z^6ik+3v^4y^6k+3z^6i^2j$

$o=3x^2z^6j^2+3u^2z^6il+3v^4y^6l+3v^2y^6k^2$

$p=3x^2u^2z^6l+3u^2z^6jk+3z^6ij^2+3kl^2$

$q=x^6z^6y^6+3x^2z^6y^6i^2+u^6z^{12}+3u^2v^2z^6y^6i+3u^2z^6jl+v^6y^{12}+l^3$

$r=3x^4z^6y^6i+3x^2u^2v^2z^6y^6+6v^2y^6kl+z^6y^6i^3+z^6j^3+y^6k^3$

左 $= y^{12}m^3 + 3\,y^{12}mn^2 + 3\,y^6mor + 3\,y^6mpq + 3\,y^6noq + 3\,y^6npr + y^6o^3 + 3\,y^6op^2$
$+q^3 + 3\,qr^2$

右 $= 3\,y^{12}m^2n + y^{12}n^3 + 3\,y^6moq + 3\,y^6mpr + 3y^6nor + 3\,y^6npq + 3\,y^6o^2p + y^6p^3$
$+3\,q^2r + r^3$

左$-$**右** をつくると、

$$y^{12}(m-n)^3 + y^6(o-p)^3 + (q-r)^3 - 3y^6(m-n)(o-p)(q-r) = 0$$

となる。これは、

$$y^4(m-n) + y^2(o-p) + (q-r) = 0$$

の 3 乗化である。

この解は、3 段階から成っている。

第 1 段　六斜術を使って、辺の間の関係を表す。

第 2 段　只云の条件は、z^3 についての関係になっているので、z についての 3 乗化を行う。

第 3 段　別云の条件は、y^3 についての関係になっているので、y についての 3 乗化を行う。

六斜術の結果は、次の形で与えられている。

$$\begin{aligned}&-u^2z^4 + (u^2+v^2-x^2)y^2z^2\\ &\quad+\{(x^2+v^2-u^2)u^2 + (x^2+u^2-v^2)w^2\}z^2\\ &\quad+\{(x^2+u^2+w^2-v^2)v^2 + (x^2-u^2)w^2\}y^2\\ &\quad-\{(x^2+w^2-v^2)w^2 + (v^2-w^2)u^2\}x^2\\ &\quad-v^2y^4 = 0\end{aligned}$$

すなわち、

$$-u^2z^4 + (i-x^2)y^2z^2 + jz^2 + ky^2 - l - v^2y^4 = 0$$

これを、z の多項式の形に整理する。

$$(l-ky^2+v^2y^4) - (j+(i-x^2)y^2)z^2 + u^2z^4 = 0$$

そして、3 乗化。

$$(l-ky^2+v^2y^4)^3 - (j+(i-x^2)y^2)^3z^6 + u^6z^{12} + 3(l-ky^2+v^2y^4)(j+(i-x^2)y^2)z^2u^2z^4 = 0$$

この左辺を y について整理すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}&y^4(3x^2u^2z^6k + 6x^2z^6ij + 3u^2v^2z^6j + 3v^2l^2 + 3k^2l - 3x^4z^6j - 3u^2z^6ik - 3z^6i^2j)\\ &+y^2(3x^2z^6j^2 + 3u^2z^6il - 3x^2u^2z^6l - 3u^2z^6jk - 3z^6ij^2 - 3kl^2)\\ &+u^6z^{12} + 3u^2z^6jl + l^3 - z^6j^3\end{aligned}$$

$-3y^{10}v^4k$
$+3y^8(v^4l+v^2k^2)$
$+y^{12}v^6$
$+y^6(x^6z^6+3x^2z^6i^2+3u^2v^2z^6i-3x^4z^6i-3x^2u^2v^2z^6-6v^2kl-z^6i^3-k^3)$
$=0$

このうち、y^{10} の項は y^4 の項に、y^8 の項は y^2 の項に、y^{12} の項ならびに y^6 の項は定数項に組み入れたものが、

$$y^4(m-n)+y^2(o-p)+(q-r)=0$$

で、これに 3 乗化をほどこしたものが、最終式 **左− 右**$=0$ である。

術 (算法明解)

大斜 $=x$、中斜 $=y$、小斜 $=z$、甲斜 $=u$、乙斜 $=v$、丙斜 $=w$

$u,\ v,\ w$ は既知
只云 $x^3+z^3=a$
別云 $x^3+y^3=b$

$i=u^4z^2+u^2z^4+v^2w^2z^2-u^2w^2z^2-u^2v^2z^2$
$j=z^2-v^2-w^2$
$k=u^2w^2+u^2z^2+v^2w^2-u^2v^2-w^4$
$l=u^2z^2+v^2w^2+u^2v^2+v^2z^2-v^4-u^2w^2$
$m=i^3+y^{12}v^6+x^6y^6j^3+x^{12}w^6+3x^6ikw^2+3x^6iw^4z^2$
$n=3x^6y^6jv^2w^2+6y^6ilv^2+y^6l^3+3x^6kw^2z^4+3x^6k^2w^2z^2+x^6k^3+x^6w^6z^6$
$o=3y^6iv^4+3y^6l^2v^2+3x^6jw^4z^4+3x^6jk^2+6x^6jkw^2z^2$
$p=3x^6ijw^2+3x^6lw^4z^2+3x^6klw^2+3i^2l$
$q=3i^2v^2+3il^2+3x^6jlw^2+3x^6kv^2w^2+3x^6v^2w^4z^2$
$r=3x^6j^2k+3x^6j^2w^2z^2+3y^6lv^4$
左 $=m^3+3mn^2+y^6o^3+3y^6op^2+y^{12}q^3+3y^{12}qr^2+3y^6npr+3y^6mor+3y^6oqn+3y^6mpq$
右 $=n^3+y^6p^3+y^{12}r^3+3m^2n+3y^6o^2p+ey^{12}q^2r+3y^6moq+3y^6npq+3y^6mpr+3y^6onr$

左− 右 をつくると、

$$(m-n)^3+y^6(o-p)^3+y^{12}(q-r)^3-3y^6(m-n)(o-p)(q-r)=0$$

となる。これは、

$$(m-n)+y^2(o-p)+y^4(q-r)=0$$

の 3 乗化である。

ここでは、六斜術の結果は、次の形で与えられている。

$$\begin{aligned}&u^4z^2+u^2z^4+v^2w^2z^2-u^2v^2z^2\\&+x^2y^2(z^2-v^2-w^2)\\&-x^2(u^2w^2+u^2z^2+v^2w^2-u^2v^2-w^4)\\&-y^2(u^2z^2+v^2w^2+u^2v^2+v^2z^2-v^4-u^2w^2)\\&+w^2x^4+v^2y^4+w^2x^2z^2=0\end{aligned}$$

すなわち、

$$i+y^2x^2j-x^2k+y^2l+w^2x^4+v^2y^4+w^2x^2z^2=0$$

これを、

$$(i-y^2l+v^2y^4)-(x^2k-x^2y^2j-w^2x^2z^2)+(w^2x^4)=0$$

と括って 3 乗化をする。

$$\begin{aligned}&(i-y^2l+v^2y^4)^3-(x^2k-x^2y^2j-w^2x^2z^2)^3+(w^2x^4)^3\\&\quad+3(i-y^2l+v^2y^4)(x^2k-x^2y^2j-w^2x^2z^2)(w^2x^4)=0\end{aligned}$$

この結果の左辺を y について整理すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}&i^3+y^{12}v^6+x^6y^6j^3+x^{12}w^6+3x^6ikw^2+3x^6iw^4z^2\\&-(3x^6y^6jv^2w^2+6y^6ilv^2+y^6l^3+3x^6kw^2z^4+3x^6k^2w^2z^2+x^6k^3+x^6w^6z^6)\\&+y^2(3y^6iv^4+3y^6l^2v^2+3x^6jw^4z^4+3x^6jk^2+6x^6jkw^2z^2\\&\quad-(3x^6ijw^2+3x^6lw^4z^2+3x^6klw^2+3i^2l))\\&+y^4(3i^2v^2+3il^2+3x^6jlw^2+3x^6kv^2w^2+3x^6v^2w^4z^2\\&\quad-(3x^6j^2k+3x^6j^2w^2z^2+3y^6lv^4))\end{aligned}$$

この式は、まさに、

$$(m-n)+y^2(o-p)+y^4(q-r)=0$$

である。

6 結語

本稿著者は、発微算法と算法明解を対比して、田中が関の与えた解を演習課題として、いかに自分の方法を発展させたかを、論じたのである。

第 2 節の平立重積門の問題では、両者の方法は異なったものであった。関の方法は、両者の著書を通じて現れる、二つのもとになる式から同じ式になるような変形を考えて、その差として開方式を作るものであった。これは、中国の文献にでてくる如積の

法を踏襲したものであろう。しかし、田中は、この問題を、終結式を作ることによって処理している。これは、田中の新しい境地であると考えられる。

第 3 節の平圓解空門の問題では、田中は、やはり同ような方法で最終じ式に到達する計算を長々とやっている。これに対し、関の方法は、式の巧みな変形で、最終的な式を作る。この関の方法は見事なものであるといわなければならない。

第 5 節の平形斜積門の問題では、六斜術の式を得たあとは、むしろつまらない。3 乗化の変形を施すだけである。平形斜積門の問題は 3 題あって、その意味では同巧異曲。田中としても、特に手段を発明するようなものではない。ここで扱かった平形斜積門の問題は、その第 1 問であるが、第 2 問は発微算法では、ほかの問と書き方がちがっているので、弟子にでもやらせたのではないかと考えている。そして、第 3 問は、面倒なだけだ、といって、詳細な解は与えていない。これに対し、田中は、馬鹿丁寧に計算をしている。なにしろ、1,458 次方程式をつくるのであるからその計算は書くだけでも大変で、その書の半分以上を使っているのである。

いずれにしろ、全 15 問にわたって、これだけ複雑な操作をこなすのは、なみ大抵のことではない。恐らく両者は、すでにこの頃に傍書法の手段をもっていたのであろう。この古今算法記の問題が、傍書法の端緒を与えることになったと見てもよいのではないだろうか。

参考文献

[1] 日本学士院、明治前日本数学史、第 3 巻

[2] 澤口一之、古今算法記、清水布夫校注、江戸初期和算選書 第 3 巻、研成社、

[3] 小川束、関孝和「発微算法」– 現代語訳と解説 – 四日市大学教育研究叢書 5、大空社

[4] 田中由真、算法明解、学士院蔵

[5] 小寺裕・田村三郎、アポロニウスの接円問題、理系の数学、1998,10 月号

[6] 竹之内脩、田中由真の終結式について、和算研究所紀要、No.2、1999

[7] 竹之内脩、行列式について、津田塾大学 数学・計算機科学研究所報、20、2000

[8] 竹之内脩、発微算法と算法明解、大阪国際大学紀要 国際研究論叢、2001