カオスを巡って

津田塾大学２０世紀シンポジウム(1995.11.9-12) 予稿
京都大学数理解析研究所　　高橋　陽一郎

「神はサイコロをふらない」とはアインシュタインが量子力学に対して言った言葉であるが、確率論という現代数学の一分野が今世紀に成立したことについて、とくにカオスの問題に遭遇して夢中になっていた頃、ときに、ふと、大それたことがなされたのではないかと思ったことがある。長い歴史の中で人類は数の概念を獲得し、図形を認識し、そして、数学が誕生した。その数学の中で、数や図形や方程式から、微分積分、連続性、また、群、環、体などさまざまな概念が獲得され、一般位相、関数解析、多様体、・・・　そして、確率論と呼ばれる「でたらめさの数学(Mathematics of randomness)」まで創り出した。さらには、カオスという言葉まで、数学の用語になろうとしている。

１．カオス

今日、カオスの典型例と考えられているものは、双曲型力学系である。これに関しては既に、１８９８年公表のアダマールの論文「負定曲率空間上の測地流」がある。まだこの時代の数学の論文は（著者にもよるが）、定理、証明の羅列ではなく、「含蓄のある」文章表現であり、この論文を読んでいると、今世紀の第３四半世紀における力学系に関する成果の大半を既に知っていたのではないかという錯覚に陥る。

決定論的な力学系は、（自己相似的な）フラクタル構造と共に、ランダムネスが内蔵されているとき、カオス的であるという。カオス的であることが数学的に保証されているのは双曲型の力学系であり、この意味で、カオスは系(system)として安定、即ち、構造安定なものである。さらに、カオスはそのランダムネス故に統計的記述が可能である。

ある時系列が与えられたとき、例えば、太陽の黒点数の年次変化、株価の変動、気象の変化、渦潮、蛇口から滴り落ちる水の量などを観察するとき、われわれは何を考えるだろうか。おそらくは、先ず、太陽の黒点に周期があるのではないか、株価や気象の中にある長期的な趨勢は何かなどと考える。数学の世界から一歩踏み出したとき、われわれの「常識」は意外に共通のものであり、与えられた時系列の中に先ず何らかの規則性を見ようとし、不規則性に目を転じるのはかなり後になってからである。また、乱流などのもつ複雑さは有限自由度の世界では存在し得ないものであり、「乱流は次々と無限個のモードが励起されて生ずる」(Landau-Hopf)という描像[1)]は、Ruelle-Takens の定理[2)]の前に、そのドグマ性を露呈することになる。この意味では、カオスはパラダイムの転換をもたらしたといえよう。この際、ロレンツ・プロットなどの発見はランダムネス抽出のための支点を提供した。そして、力学系のカオスは、”決定論的なランダムネス”の存在を広く認知させることとなった。

[1)] 例えば、ランダウ＝リフシッツ「流体力学」第３章。なお、力学系の分岐としてみれば、
$\mathbb{T}^1\to\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^3\to\cdots\to\mathbb{T}^n\to\mathbb{T}^{n+1}\to\cdots$ の極限の意。

[2)] D.Ruelle and F.Takens, Comm. Math. Physics 20(1971) によれば、少なくとも$\mathbb{T}^3$上の準周期運動からは、generic に、双曲型力学系への分岐が生ずる。

２．現代確率論の成立

古典確率論は１８世紀に既に成立していた。そして、確率というと、必然と偶然、決定論と非決定論などという二律排反(dichotomy)を想起してしまいがちである。哲学あるいは倫理学におい

てはそのような議論は重要であろうが、これは確率論の成立を若干遅らせたように思える。１９３０年代までに、ランダムネスの由来を問うことを放棄することにより、現代確率論は誕生した。もう少し詳しく言えば、古典的な確率論、統計力学、数論等の諸結果を踏まえて、測度論の完成により、大数の法則[1)]などの極限定理の定式化が可能となり、確率空間の公理をもとにして推移確率と拡散方程式の関係が見出されたとき[2)]、現代確率論は確立したといえよう。「始めに確率空間ありき」と宣言したとき、確率論は、経験科学的な側面、哲学的な呪縛から解放されて、数学の一分野として歩み始める。「確率変数の独立性を確率空間の直積である」と考えたときに、ランダムネス故の法則性は確かな定理となり、微分方程式やポテンシャル論などの解析の諸分野との関係が明確となる。その後、マーチンゲールの導入(Doob)、確率微分方程式の発明(K.Ito)、関数空間での積分という認識(M.Kac)、ウィーナー測度に関する部分積分の発見(P.Malliavin)等々を経て、確率解析は大きな展開を見せることになる。

[1)] 正規数定理が大数の弱法則の原型(E.Borel 1909)。大数の強法則は、A.N.Kolmogorov の著書「確率論の基礎概念」(1933)で明確になる。

[2)] A.N.Kolmogorov，確率論における解析的方法について，Math. Ann. 104(1931), 415-458)
さらに、「極限定理を支配する偏微分方程式」という視点が確率論（その主対象は極限法則や漸近挙動）を現代数学たらしめたように思う。（'コルモゴロフの数学'の断片，「数学」42(1990), 177-182)

３．エントロピーと大偏差原理

力学系のカオスの問題は、当初から非平衡統計力学のモデルとして位置づけられた。上述のリュエル＝ターケンスの仕事も、倍周期化分岐に関する Feigenbaum の臨界現象もその例である。さらに、カオス的な力学系（Ｍ，ｆ）のアトラクタを記述する確率分布も、ギッブスの変分原理と類似の変分原理

$$I(\mu) := \chi^{+}(\mu) - h(\mu) \rightarrow \min\ (=0)$$

で特徴づけられる。ここで、$h(\mu)$ は不変確率測度 μ に関するｆのエントロピー、$\chi^{+}(\mu)$ は正のリャプノフ指数の和である。これを数学的に証明するために大偏差理論[1)]の力学系版[2)]を用いたが、それを見直してみると、シャノンのエントロピー概念から、さらに、ボルツマンによるエントロピーの導入まで遡ることになる。

[1)] １９７０年代後半に Donsker と Varadhan により確立された。次の２つは名著である。
S.R.S.Varadhan, Large Deviations and Applications, SIAM, 1984
M.Kac, Integration in Function Spaces and Some of Applications, Acad.Naz. Lincei Scuola Normale Superiore, Pisa, 1980

[2)] Y.Takahashi, Taniguchi Intern. Symp. on Stoch. Analysis, Katata and Kyoto 1982, pp. 437-467, Kinokuniya/North Holland, 1983

ボルツマンは、今に至るも解決を見ていない夢「多粒子（無限粒子）系の運動から熱力学の諸法則、とくに、非可逆性を導出すること」を実現するために、気体分子の運動からある仮説(assumption of molecular chaos)のもとに、ボルツマン方程式を導出し、Ｈ定理を証明してみせた。しかし、これは、Zermelo その他の人々から手痛い反論を受ける。その強力な論拠は、不変確率分布をもつ力学系に対するポアンカレの再帰定理(reccurence theorem)であった。再反論するためにボルツマンは、ある分布が平衡分布として実現するのは、その等エネルギー面に入る状態の数Ｗが多いからであると主張し、Ｗを Anzahl der Komplexitionen と呼び、有名な公式

$$S = k \log W$$

の原形を与えた。[3)]大偏差原理は、この考え方の延長線上にあるものと考えられる。

[3)] L.Boltzmann, Wiener Berichite 76(1877), 373-435 物理学古典論文叢書６「統計力学」（東海大学出版会 1970）所収。同叢書５「気体分子運動論」も参照されたい。