

(その1):デルタ18面体の非存在について

高橋鋼一

I:デルタ多面体について

デルタ多面体の定義は、全ての面が合同な正三角形である凸多面体のことをいう。デルタ多面体の面の数を n とすると、 $n=4,6,8,10,12,14,16,20$ のいずれかであり、全部で下の図1の8種類存在する。

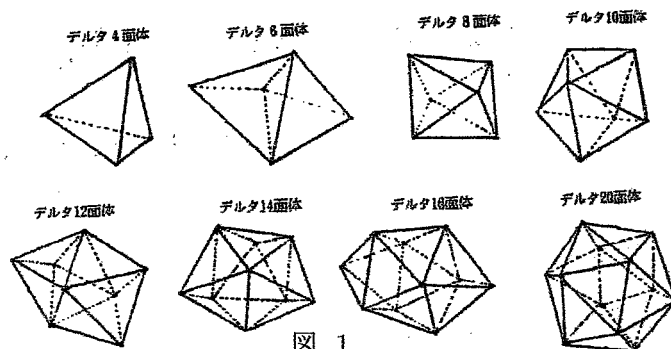


図 1

何故、奇妙なことに、 $n=18$ の場合のデルタ18面体は存在しないのか？2014年頃までは、日本語訳の多面体の本やその他の出版されている多面体の本を参照しても、デルタ18面体の非存在の証明は皆無であった。最近、(2017年7月)にインターネット上に「デルタ18面体の不存在証明」の論考が掲載された。

この論考の不存在証明はいくつかの等式と不等式を用いて、矛盾を導き出す証明であるが、多面体の面や辺、頂点等の繋がりや配置関係では、分かりづらい点がある。

1993年当時、数学教育協議会の中の 折り紙のグループから、「なぜ、デルタ18面体は折り紙で折れないのか？」という問題提起がなされていた。

私がこの問題に興味を持ち、解けるのかどうか分からない中で取り組んでみました。以下、デルタ18面体の非存在について、トポロジーを使った簡潔な証明を述べることにします。以下の I ~ IXまで準備段階を追っての解説と証明です。

私の証明はトポロジーの領域の証明で、この論考をその後、数学者:一松 信先生に送ったところ、別証明に該当するとの事でした。尚、このトポロジーを用いた証明方法は、福富節男さんとの交流の中でトポロジー関係の論文をいただき、また農工大ゼミ参加した影響を受けて、想いついた発想から得られた命題です。

II:多面体の頂点の次数について

多面体あるいは多面体の展開図やグラフについて、一つの頂点に集まる辺の数をその頂点の次数と言います。多面体の展開図では、多面体の辺に沿って

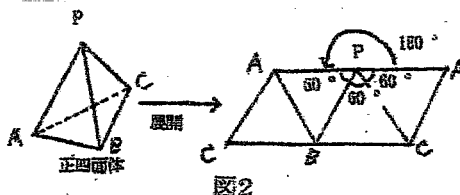


図2

切り開くので、展開の図2では、デルタ4面体の辺の数が1本増えた様に見えますが、展開図の辺PAは、2本ありますが、この2本を張り合わせると、デルタ4面体の辺PAの辺はもとと一本なので、辺の数は増減無しとします。点Pの次数は3であるが、展開図の図2では、点Pに集まる辺の数はPA, PB, PC, PAの4本に見えますが、PAが2度重複するので、実際の点Pの次数は3である。点Pの次数をdegPで表すことにすると、図2では、degP=3である。因みに、図1のデルタ10面体では、次数が4次の頂点(5個)と次数が5次の頂点(2個)が存在し、デルタ20面体(正20面体でもある)のすべての頂点の次数は、5次である。

Ⅲ:オイラーの定理について

(オイラーの定理)

(i):一般に、多面体M(球面 S^2 と位相同型な2次元組み合わせ多様体(つまり、種数 $g=0$ の組み合わせ多様体)の頂点の数、辺の数、面の数それぞれV, E, Fとおくと、オイラーの定理: $V-E+F=2$ が成り立つ。

尚、種数 $=g$ の組み合わせ多様体Mのオイラー数を $X(M)$ で表すと、 $X(M)=V-E+F=2-2g$ である。

(ii):位相変換で平面に引き延ばされるような図形や平面図形に関しては、オイラー数は1である。

Ⅳ:立体角(トンガリ度)について

立体角をトンガリ度と名付けたのは、数学者:遠山啓氏である。遠山啓氏は、数学教育者でもあったが、子供たちに分かりやすい言葉で、多面体の性質を語るためにトンガリ度を導入したのである。ほるぷ出版 数学の広場全8巻シリーズの第4巻:「3次元の世界」(遠山啓著)の中で、トンガリ度に言及している。

下の図3では、コピー用紙一枚を使って、点Pの周辺には空きの角度がないから、立体角は 0° であるが、この用紙に図4のように、点Pからコピー用紙の周囲の辺上の異なる2点A, Bに向けた線分に沿ってハサミで切り込みをつけて除くと、図4のようになり、図4のPAとPBを張り合わせると、立体角が得られます。この点Pの立体角が、図4では $\angle APB = \theta$ です。この場合、

立体角 $=360^\circ - (\text{Pの周りにある面の部分の角度}) = \text{ハサミで取り除いた部分の空きの角度}$ です。

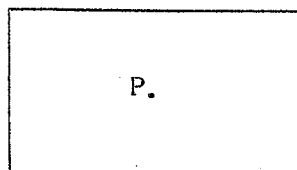


図3

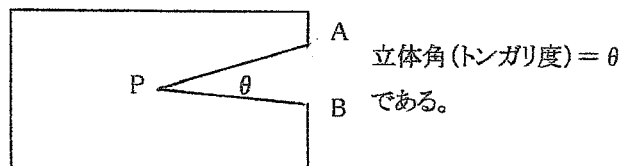


図4

図2のデルタ4面体の頂点Pの立体角は、展開図を見ると、点Pについては、この場合は、

$$\text{点Pの立体角} = 360^\circ - 60^\circ \times 3 = 180^\circ$$

である。図5の正6面体点Qの立体角は、 $360^\circ - 90^\circ \times 3 = 90^\circ$ です。つまり、多面体で考えると、頂点の立体角は、頂点の周りに集まる多角形の角度の合計を 360° から引いた差の角度のことです。

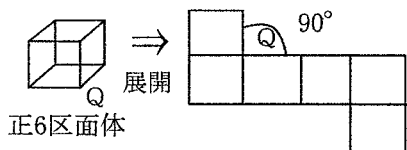


図5

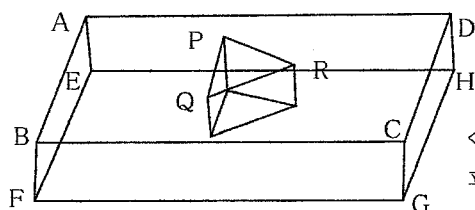


図6

直方体から正三角柱を
くりぬいて、くりぬかれた
立体のその表面の多面体

図6のトーラスと位相同型な組合せ多様体の点Pの立体角は、負の角度になります。図6は、直方体から底面が正三角形の三角柱(正三角柱と呼ぶことにする。)をくりぬいた位相同型な組み合わせ多様体の表面の多面体(種数 $g=1$)の頂点Pの立体角は、 $360^\circ - (300^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = -120^\circ$ になります。この点Pの周りはへっこんでいるので、今度は私が名付け親を自称して、へっコミ度と名づけることにします。これからは、立体角は正の立体角と負の立体角が存在するとして、論考を進めることにします。

V: デカルトの定理について

「デカルトの定理」の証明は、種数0の多面体の各面を三角形分割を行い、オイラーの定理を用いて、「3次元の世界」(遠山啓著 ほるぷ出版)の中で証明されている。

(デカルトの定理): 2次元の多面体M(球面 S^2 と位相同型な組み合わせ多様体)において、各頂点の立体角の総和は、 720° である。

(証明) 多面体Mの頂点の数Vを変えないで、Mの各面を三角形分割することができる。三角形分割後の多面体の辺の数をE、面の数をFとする。オイラーの定理により、

$$X(M) = V - E + F = 2 \quad \dots\dots\dots (V-①)$$

が成り立つ。

各面は三角形より、辺の数の2倍が3F等しいから

$$2E = 3F \quad \dots\dots\dots (V-②)$$

が成り立つ。また、各頂点の立体角は、その頂点の三角形分割前の立体角に等しい。その点の立体角

は、立体角 $= 360^\circ - (\text{その頂点の周りに集まる三角形の面の角度の総和})$ で表せるから、

$$\text{立体角の総和} = 360^\circ \times V - 180^\circ \times F \quad \dots\dots\dots (V-③)$$

である。(V-②)より、

$$E = \frac{3}{2}F \quad \dots\dots\dots (V-④)$$

だから、(V-①)に代入すると、

$$V - \frac{3}{2}F + F = 2$$

$$\therefore V = 2 + \frac{1}{2}F \quad \dots\dots\dots (V-⑤)$$

となる。(V-⑤)を(V-③)に代入すると、

$$\begin{aligned}\text{立体角の総和} &= 360^\circ \times \left(2 + \frac{1}{2}F\right) - 180^\circ \times F \\ &= 720^\circ + 180^\circ \times F - 180^\circ \times F \\ &= 720^\circ\end{aligned}$$

となる。(証明終)

(註:デルタ多面体の場合、各面は正三角形だから、(V-⑤)より、面の数Fは偶数でなければならない。)

尚、向き付け可能な種数gの閉曲面M(2次元組み合わせ多様体の多面体)についてのデカルトの定理は、オイラー数を $\chi(M)$ で表すと、 $\chi(M) = 2 - 2g$ で、立体角の総和は、

$$\text{立体角の総和} = 360^\circ \times (2 - 2g) \dots\dots\dots (V-⑥)$$

となることが、同様に証明できる。

図6は、中味が詰まった3次元の多様体で、その表面がg=1のトーラスと位相同型な2次元組み合わせ多様体の直方体から正三角柱を繰り抜いてできた立体である。この組み合わせ多様体の立体角の総和は、(V-⑥)の式にg=1を代入すると、 0° である。

実際に点A,B,C, D,E,F,G,Hの各立体角は、 $360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 90^\circ$ である。

点P,Q,R,S,T,Uの各立体角(ヘツコミ度)は、 $360^\circ - (300^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = -120^\circ$ だから、

図7の立体角の総和は、 $90^\circ \times 8 + (-120^\circ) \times 6 = 0^\circ$ となる。

(註):デカルトの定理:(genusが0の2次元の多面体において、立体角の総和= 720° である。)とタイ・アップして、微分幾何の領域でのGauss-Bonnetの定理: $\int_R K dS = 4\pi$ (ラジアン)= 720° との関連は、後述する予定である。(ただし、KはGauss曲率である。))

VI:多面体M(球面 S^2 に同相な2次元組み合わせ多様体)において、頂点の数、辺の数、面の数についての相互関係について

(定理A)多面体M(球面と同相な2次元組み合わせ多様体))において、頂点の数、辺の数、面の数をそれぞれ、V,E,Fで表すと、

$$\frac{3}{2}F \leq E \leq 3V - 6 \dots\dots\dots (VI-①)$$

が成り立つ。

(証明)多面体の各面の辺の数は3以上で、また、各辺は高々2個の面の境界だから、

$$3F \leq 2E \dots\dots\dots (VI-②)$$

が成り立つ。

$$F \leq \frac{2}{3}E \dots\dots\dots (VI-③)$$

$$\therefore \frac{3}{2}F \leq E \quad \dots\dots\dots (VI-④)$$

$$V-E+F=2 \quad \dots\dots\dots (VI-⑤)$$

より、

$$F=2+E-V \quad \dots\dots\dots (VI-⑥)$$

(VI-③)と(VI-⑥)より、

$$\frac{2}{3}E \geq 2+E-V$$

$$\therefore \frac{2}{3}E-E \geq 2-V$$

$$-\frac{1}{3}E \geq 2-V$$

$$\therefore E \leq 3V-6 \quad \dots\dots\dots (VI-⑦)$$

(VI-④)と(VI-⑦)より、

$$\frac{3}{2}F \leq E \leq 3V-6$$

が成り立つ。つまり、(VI-①)が成り立つ。(証明終)

VII: Topologiesについて

トポロジーの分野は、単数ではなく、複数の領域が存在する。

風船を膨らませても不変な性質や閉じた輪になっている紐の性質などを研究する領域がある。genusやオイラーの定理もこのトポロジーの分野の概念と命題である。一般に、ゴム膜のように伸縮自在な柔らかいものを扱う幾何学が一般のトポロジーである。この幾何の領域に、組み合わせ位相幾何の概念(PL-トポロジー)や解析学の微分等の概念を使った微分位相幾何(微分トポロジー)がある。これらのトポロジーの関係を図で表すと、高次元多様体を考慮して図7のようになる。

定理 1: n 次元多様体について、 $n=1,2,3$ の場合、
一般のトポロジー=PL-トポロジー=微分トポロジー
が成り立つ。

$n \geq 4$ の場合は、一般のトポロジー \neq PL-トポロジー
となり、

$n \geq 7$ の場合、PL-トポロジー \neq 微分トポロジー
となります。

定理 2: (n 次元組み合わせ位相幾何での三角形分割問題)

n 次元位相多様体は、組合わせ同値か？

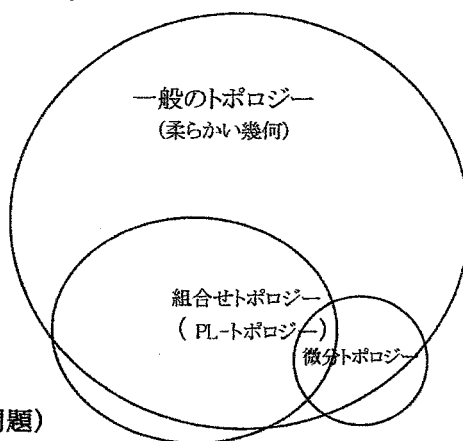


図7

1994年当時は、次に掲げる n 次元組合せ多様体の三角形分割問題と基本予想は、 $n \leq 3$ で肯定的

に解かれて、 $n=4$ では未解決、 $n \geq 5$ では、コホモロジー群の障害が消滅すれば肯定的に成立し、障害があれば成立しないことが示されています。

定理 3: (n次元組合せ多様体に関する基本予想)

同相なn次元組み合わせ多様体は、組み合わせ同値であらう。

これから扱うデルタ多面体は、2次元組み合わせ多様体で、その展開図及びその一部分も2次元以下なので、三角形分割や基本予想は成立し、角度の大きさや辺の長さ、面の大きさ等を自己交差しない限り、組合せ多面体は、球面上で三角形分割された位相多様体に同相で、位相多様体として扱っても同値であることが分かります。

VII: デルタ多面体の各辺の数、辺の数、面の数と頂点の次数について

デルタ多面体は8種類あると言われています。これらは、オイラーの定理、デカルトの定理、定理Aを使って、頂点の数、辺の数、面の数、及び頂点の次数の個数を求めてみると、以下の表1ようになります。

デルタ多面体	頂点の数	辺の数	面の数	頂点の各次数の個数について		
				3次の個数	4次の個数	5次の個数
デルタ4面体	4	6	4	4	0	0
デルタ6面体	5	9	6	2	3	0
デルタ8面体	6	12	8	0	6	0
デルタ10面体	7	15	10	0	5	2
デルタ12面体	8	18	12	0	4	4
デルタ14面体	9	21	14	0	3	6
デルタ16面体	10	24	16	0	2	8
デルタ20面体	12	30	20	0	0	12

表1

デルタ多面体の場合、頂点の次数については、3次の頂点、4次の頂点、5次の頂点のうちのいくつかに限ることを説明します。デルタ多面体は、各面が正三角形で、各正三角形の内角は 60° だから、各頂点に集まる面の数は、3面、4面、5面のいずれかである。もし、ある頂点に6面が集まっているとすると、その頂点の立体角は、 $360^\circ - 60^\circ \times 6 = 0^\circ$ となり、頂点を形成しない。また、ある頂点に7面以上の面が集まっていると仮定すると、立体角は負の角度になり、凸であることに反する。したがって、頂点の次数は、3以上かつ5以下である。

デルタ18面体の場合を除いた表1の証明の概略を説明します。デルタ多面体について、デルタ多面体の3次の頂点の個数をX個、4次の頂点の個数をY個、5次の頂点の個数をZ個、デルタ多

面体の頂点の個数をV、辺の数をE、面の数をFとする。次の命題が成り立つ。

(命題1)デルタ多面体において、 $3X+4Y+5Z=12$ が成り立つ。

(証明) 頂点の個数について、

$$X+Y+Z=V \quad \dots\dots\dots (VII-①)$$

が成り立つ。また、頂点の次数と辺の数について、隣り合った面の辺の数は次数との関係で2度ずつ計算されるから、

$$3X+4Y+5Z=2E \quad \dots\dots\dots (VII-②)$$

$$\therefore \frac{1}{2}(3X+4Y+5Z)=E \quad \dots\dots\dots (VII-③)$$

となる。(V-④)より、 $F=\frac{2}{3}E$ だから、これと(VII-③)より、

$$F=\frac{2}{3}E=\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(3X+4Y+5Z)=\frac{1}{3}(3X+4Y+5Z) \quad \dots\dots (VII-④)$$

つまり、(VII-④)は、デルタ多面体は正三角形がF個あるとすると、辺の数からみると、3Fあるが、隣り合った辺を2度ずつ数えていることになるから、 $3F=2E$ と言う等式が成立しているに過ぎない。(VII-①)と

(VII-③)と(VII-④)をオイラーの公式($V-E+F=2$)に代入すると、

$$V-E+F=(X+Y+Z)-\frac{1}{2}(3X+4Y+5Z)+\frac{1}{3}(3X+4Y+5Z)=2$$

$$\therefore \frac{1}{2}X+\frac{1}{3}Y+\frac{1}{6}Z=2 \quad \dots\dots\dots (VII-⑤)$$

両辺を6倍すると、

$$3X+2Y+Z=12 \quad \dots\dots\dots (VII-⑥)$$

となる。(証明終)

前頁の表1の各欄の数を求めるには、上記の(VII-⑥)の等式から、 $V, E, F \geq 0$, $E \geq 0$, $F \geq 0$ の下で $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$ の範囲で、(VII-⑥)の整数解を求めればよい。つまり、不定方程式の問題になる。与えられた範囲($X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$)で、この方程式の整数解(X, Y, Z)の個数は有限個であるが、(VII-⑥)の式の整数解が求められたからと言って、必ずしもデルタ多面体が得られたとは限らない。オイラー数が2で、オイラーの定理とデカルトの定理から得られた頂点の数、辺の数、面の数が求められたからと言って、それらを満たす2次元組み合わせ多様体や多面体の定理は今のところ存在していないと考えます。つまり、頂点の個数、辺の個数、面の個数が与えられた場合、これらを使って多面体が構成できるのかどうかと言う問題です。この点に関して、多面体の解剖(ある頂点に集まる面を次々に剥いで取り除いて、最後まで矛盾なく取り除くことができるのかどうか)とも想える手法でこの問題をTopologyの領域に持ち込んで解決を目指すやり方を思いついた。このアイデアは、長年、福富節男さんとの交流のなかでの解決方法の発見である。この点に関して、デルタ18面体について言及することにします。

因みに、この点の複雑さに対して若干のコメントをします。それと言うのは、デルタ多面体が8種類に限ると

いう証明を捜してみたが、どの多面体の本にも出ていないのです。この問題について、与えられた範囲内で、(Ⅶ-⑥)より、不定方程式の問題で一般解としての整数解を求めても良いが、もう少し分析を進めることにする。X, Y, Zのとりうる範囲が(Ⅶ-⑥)より、 $0 \leq 3X \leq 12, 0 \leq 2Y \leq 12, 0 \leq Z \leq 12$ でなければならないから、 $X=0, 1, 2, 3, 4$ かつ $Y=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ かつ $Z=0, 1, 2, 3, 4, \dots, 9, 10, 11, 12$ のいずれかの整数値の組み合わせになります。また、(Ⅶ-⑥)の式: $3X+2Y+Z=12$ より、左辺の各項に注目すると、 $2Y$ は偶数であり、右辺も偶数であるから、左辺の $3X+Z$ も偶数でなければならないことが分かる。 $3X+Z$ が偶数になるのは、 X と Z が同時に偶数か、奇数になる場合に限る。したがって、 X の取りうる整数値が $X=0, 2, 4$ のとき、 $Z=0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ となる。 X の取りうる整数値が、 $X=1, 3$ のとき、 $Z=1, 3, 5, 7, 9, 11$ となる。

例えば、ここで $X=4$ とすると、(Ⅶ-⑥)のより、 $3X+2Y+Z=12$ に代入して、

$$3 \times 4 + 2Y + Z = 12 \text{より、} 2Y + Z = 0 \text{が得られます。}$$

この式の整数解は与えられた範囲で、 $(Y, Z) = (0, 0)$ です。

$(Y, Z) = (0, 0)$ のとき、つまり、 $(X, Y, Z) = (4, 0, 0)$ のとき、頂点の数 V は、(Ⅶ-①)より、

$$V = X + Y + Z = 4 + 0 + 0 = 4$$

辺の数 E は、(Ⅶ-③)より、

$$E = \frac{1}{2}(3X + 4Y + 5Z) = \frac{1}{2}(3 \times 4 + 4 \times 0 + 5 \times 0) = \frac{12}{2} = 6$$

面の数 F は、(Ⅶ-③)と(Ⅶ-④)より、

$$F = \frac{2}{3}E = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(3X + 4Y + 5Z) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(3 \times 4 + 4 \times 0 + 5 \times 0) = 4$$

となり、この条件を満たす4面体は、各面が合同な正三角形で、頂点の個数は4個、辺の数は6本、面の数は4面だから、良く知られた正4面体(デルタ4面体でもある)である。

$X=3$ の場合、(Ⅶ-⑥)のより、 $3 \times 3 + 2Y + Z = 12$ より、 $2Y + Z = 3$ となり、与えられた範囲での整数解は、 $(Y, Z) = (0, 3), (1, 1)$ です。

$(Y, Z) = (0, 3)$ のとき、つまり、 $(X, Y, Z) = (3, 0, 3)$ のとき、

$$\text{頂点の数は、} V = X + Y + Z = 3 + 0 + 3 = 6$$

$$\text{辺の数は、} E = \frac{1}{2}(3X + 4Y + 5Z) = \frac{1}{2}(3 \times 3 + 4 \times 0 + 5 \times 3) = 12$$

$$\text{面の数は、} F = \frac{2}{3}E = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

となる。

V, E, F の値を、オイラーの公式の左辺に代入すると、

$V - E + F = 6 - 12 + 8 = 2$ となり、オイラーの定理が成立している。したがって、これらの V, E, F の多面体はデカルトの定理が成り立ちかどうか検証すると、3次の頂点が3個、4次の頂点0個、5次の頂点3個より、立体角の総和は、 $(360^\circ - 60^\circ \times 3) \times 3 + (360^\circ - 60^\circ \times 5) \times 3 = 720^\circ$ となり、デカルトの定理が成立している。ところで、 $(X, Y, Z) = (3, 0, 3)$ を満たすデルタ多面体は存在しない。なぜならば、5次の頂点が3個あるとすると、そのうちの一つの頂点 P の周りには、図8のように5本の辺があり、正三角形が5面集まっている。頂点 P

以外に右図8のように、5個の3次の頂点A,B,C,D,Eが存在する。すると、頂点Pと合わせると、頂点の個数は6個となり、この多面体の頂点の総数6個と等しくなる。

したがって、3次の頂点の個数は既に5個あるので、3個の個数を超えている。

さらに、5次の頂点を2個を付け加えることはできない。

もう一つの整数解 $(Y,Z)=(1,1)$ の場合、つまり、 $(X,Y,Z)=(3,1,1)$ のとき、

頂点の数は、 $V=3+1+1=5$

辺の数は、 $E=\frac{1}{2}(3 \times 3+4 \times 1+5 \times 1)=9$

面の数は、 $F=\frac{2}{3}E=\frac{2}{3} \times 9=6$

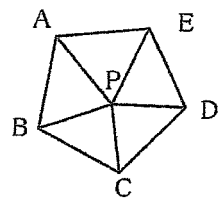


図8

となる。オイラーの公式の左辺に代入すると、 $V-E+F=5-9+6=2$ でオイラーの定理を満たしている。

また、この場合、デカルトの定理が成り立つかどうか調べてみる。3次の頂点の立体角は 180° ，4次の頂点の立体角は 120° ，5次の頂点の立体角は 60° となるから、立体角の総和は、

$$180^\circ \times 3 + 120^\circ \times 1 + 60^\circ \times 1 = 720^\circ$$

となり、デカルトの定理も満たしている。ところが、 $V=5, E=9, F=6$ を満たす多面体は存在しない。 $V=5$ から、矛盾が導き出せる。式だけに注目していると、面と面、面と辺、辺と辺の空間的な配置が見失うと誤りに陥ることになる。ここで、一つの定義を述べておきます。

(定義): 多面体 M の頂点 P に集まるすべての面の集まりをスターと呼び、 $st(P:M)$ で表すことにします。(註: 図8は、頂点 P のスターの図の一例である。)

(註: 多面体を M とし、 M のある頂点を P とする。 M から、 $st(P:M)$ を取り除いたとき、取り除かれた多面体の部分の境界は無くなり、開集合になるが、ここではもと多面体は、多面体を構成する多角形の各面のどうしを隣り合った辺で張り合わせたと見做しているので、取り残された多面体の部分にも境界が存在するものとして論を進めることにする。詳しくは、 $(M-st(P:M))$ の開包をとるということで話しを進めることにする。

ここで、(VII-⑥)の不定方程式: $3X+2Y+Z=12$ を解くと、 $m,n \in \mathbb{Z}$ を任意の整数とすると、一般の整数解は、

$$X=2+2m-n$$

$$Y=2-3m+n$$

$$Z=2+n$$

となる。整数解 (X,Y,Z) を、 $0 \leq X \leq 4$, $0 \leq Y \leq 6$, $0 \leq Z \leq 12$ の範囲で求めればよい。コメントが長くなるのでこれらの整数解を求めることを省略します。

VII: デルタ18面体が存在すると仮定すると、どのような命題が成り立つのか?

(命題1) デルタ18面体が存在すると仮定すると、辺の数 E は、 $E=27$ (本)である。

(証明) 面の数 $F=18$ で、全ての面は正三角形でできている。したがって、各正三角形に注目すると、辺の総数は、 $18F$ あるが、隣り合った正三角形の辺の数は2度ずつ数えられているから、(Ⅴ-②)より、

$$2E=3F \quad \dots\dots\dots (Ⅴ-②)$$

が成り立つ。 $F=18$ を(Ⅴ-②)に代入すると、

$$2E=3 \times 18$$

$$\therefore E = \frac{3 \times 18}{2} = 27$$

辺の数は、27本である。(証明終)

(命題2) デルタ18面体が存在すると仮定すると、頂点の個数 V は、 $V=11$ (個)である。

(証明) 命題1より、辺の数 $E=27$ で、面の数 $F=18$ だから、これらをオイラーの公式

$V-E+F=2$ に代入すると、

$$V-27+18=2$$

$$\therefore V=2+27-18=11$$

つまり、頂点の数は11個である。(証明終)

(命題3) デルタ18面体が存在すると仮定すると、11個の頂点のうち、3次の頂点の個数は0個、4次の頂点の個数は1個、5次の頂点の個数は10個である。

(証明) デルタ18面体の11個の頂点のうち、3次の頂点の個数を X 個、4次の頂点の個数を Y 個、5次の頂点の個数を Z 個とする。一つの辺について、隣り合った頂点から辺の数を数えると、2度ずつ数えられているから、辺の数の総数は、(Ⅶ-②)より、

$$\therefore 3X+4Y+5Z=54 \quad \dots\dots\dots (Ⅶ-①)$$

が成り立つ。また、3次の立体角 $=360^\circ - 60^\circ \times 3=180^\circ$

$$4次の立体角=360^\circ - 60^\circ \times 4=120^\circ$$

$$5次の立体角=360^\circ - 60^\circ \times 5=60^\circ$$

だから、デカルトの定理より

$$180^\circ X+120^\circ Y+60^\circ Z=720^\circ \quad \dots\dots\dots (Ⅶ-②)$$

(Ⅶ-②)の両辺を 60° で割ると、

$$3X+2Y+Z=12 \quad \dots\dots\dots (Ⅶ-③)$$

(Ⅶ-①)と(Ⅶ-③)を辺々加えると

$$3X+4Y+5Z=54$$

$$+) \quad 3X+2Y+Z=12$$

$$6X+6Y+6Z=66$$

この両辺を6で割ると、

$$X+Y+Z=11 \quad \dots\dots\dots (Ⅶ-④)$$

となるが、この式は命題2の結果(頂点の個数)でもある。(Ⅷ-①)から(Ⅷ-③)の辺々を引くと、

$$2Y+4Z=42 \quad \dots\dots\dots(\text{Ⅷ}-⑤)$$

両辺を2で割って、

$$Y+2Z=21 \quad \dots\dots\dots(\text{Ⅷ}-⑥)$$

(Ⅷ-⑥)より、Yは奇数でなければならない。(Ⅷ-⑥)より、

$$Y=21-2Z \quad \dots\dots\dots(\text{Ⅷ}-⑦)$$

(Ⅷ-⑦)を(Ⅷ-④)に代入して、

$$X+(21-2Z)+Z=11$$

$$\therefore X=Z-10 \quad \dots\dots\dots(\text{Ⅷ}-⑧)$$

$X \geq 0$ だから、(Ⅷ-⑧)より、 $Z-10 \geq 0$ となり、

$$Z \geq 10 \quad \dots\dots\dots(\text{Ⅷ}-⑨)$$

である。命題2より、デルタ18面体の頂点の総数は11個だから、

$$10 \leq Z \leq 11 \quad \dots\dots\dots(\text{Ⅷ}-⑩)$$

(Ⅷ-⑩)より、 $Z=10$ の仮定すると、(Ⅷ-⑦)より、 $Y=1$ が得られる。

また、 $Y=1$ と $Z=10$ を(Ⅷ-④)に代入すると、

$$X=0 \quad \dots\dots\dots(\text{Ⅷ}-⑪)$$

が得られる。

したがって、 $X=0$, $Y=1$, $Z=10$ である。

また、(Ⅷ-⑩)で、 $Z=11$ を仮定すると、(Ⅷ-⑦)の式に代入すると、 $Y=-1$ となり、矛盾が起こる。

(証明終)

IX: デルタ18面体は存在しない

閉曲面が向き付け可能なとき、種数 g で分類されます。閉曲面 M の種数を g とおくと、 M のオイラー数 $X(M)$ は、 $X(M)=2(1-g)$ の式で表される。

ところで、オイラー数が2で、頂点の数、辺の数、面の数が与えられたとき、実際にそれらを満たす向き付け可能な多面体を構成できるのかどうかという問題について、前述したように今のところ解決に至る定理はないと思われる。オイラー数が2の球面と同相な2次元組合わせ多様体の場合、(命題A)で、

$$\frac{3}{2}F \leq E \leq 3V-6 \quad \dots\dots\dots(\text{Ⅵ}-①)$$

を満たすかどうかデルタ18面体について調べると、 $V=11$, $E=27$, $F=18$ は、(Ⅵ-①)の式を等式で成立

させているので、矛盾はありません。(註: (Ⅵ-①)に代入すると、 $\frac{3}{2} \times 18 = 27 = 3 \times 11 - 6$ である。)

オイラーの定理が成立しているのかどうか調べる。

$$V-E+F=11-27+18=2$$

となり、オイラーの定理を満たしている。デカルトの定理を調べると、Ⅷの(命題3)より、3次の頂点は0個、

4次の頂点は1個、5次の頂点10個で、4次の頂点の立体角は 120° 、5次の頂点の各立体角は 60° だから、デルタ18面体も立体角の総和 $=120^\circ \times 1 + 60^\circ \times 10 = 720^\circ$ となり、デカルトの定理を満たしている。オイラーの定理やデカルトの定理ではとらえきれない、空間的に面と面とのつながりや配置の在り方、面と辺の配置や繋がり方、...等々が背景にあるのではないかと考え、「localな所では凸であるが、正三角形どうしの各面や辺を繋いでいくと、globalな曲面では凸性が失われることが起きるのではないかと、.....等々」と思いめぐらしました。そこで、私は、デルタ18面体をユークリッド空間あるいは2次元組み合わせ多様体(PL-Topology)の領域よりもっと広くして、かつ、柔らかな空間である一般の位相空間(General Topology)の領域で、多面体の面や辺が自己交叉しない、かつ絡まないという条件下で伸縮自在に変形して、元の多面体の面は曲面に変形しても面としてと見做し、多面体の辺は曲がった曲線でも辺と見做して、頂点は位置が変わっても頂点と見做して、曲面を取り除いたり、引き延ばしたりして、どこかに矛盾が見つけれられるのではないかと考えました。つまり、組合せトポロジーの条件を緩めて、各面は正三角形ではない曲がった曲面や曲がった辺の三角形でもよいとして、General Topologyの領域で、位相変換で移されたデルタ18面体を位相的デルタ18面体と呼び、その存在を仮定し、そこで矛盾が見つければ、General Topologyの部分領域である組合せトポロジーの領域でも矛盾の存在が成立するので、デルタ18面体の構成は不可能になることを示そうと考えたわけです。この問題をゴム風船膜上でできた球面上の位相的デルタ18面体の切開手術が自由にできるような領域に写すことを思いついたのです。

(命題4):デルタ18面体は存在しない。

(証明)デルタ18面体Mが存在したと仮定して、矛盾に導く。2次元組み合わせ多様体においては、3角形分割問題や基本予想は肯定的にゴム風船膜上でできたMと位相同型な位相的デルタ18面体 M_1 が存在する。 M_1 においても、点Pのスターについても、 $st(P; M_1)$ で表すことにします。 $st(P; M_1)$ を位相的デルタ18面体 M_1 から取り除いた立体や取り除かれた残りの立体の境界についても、面と面を隣り合った辺どうしの張り合わせとしての位相的デルタ18多面体と見做しているの、境界はVIIで述べた通りの解釈で存在すると見做して、論考を進めることにします。VIII章の命題1、命題2より、位相的デルタ18面体 M_1 の頂点の数は、

11(個)、辺の数は27(本)である。また、各次数についての頂点の個数は、3次の頂点の個数は0個、4次の頂点の個数は1個、5次の頂点の個数は10個である。4次の頂点をPとする。5次の頂点10個をA,B,C,D,E,F,G,H,I,Jとする。位相的デルタ18面体 M_1 上の次数が4次の点Pのスター、すなわち $st(P; M_1)$ を取り除くことにする。(正確には、頂点Pの開スターを取り除く)とすると、点Pに集まっている三角形4面が M_1 から取り除かれる。下の図9～図12は、その説明図である。

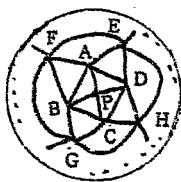


図9

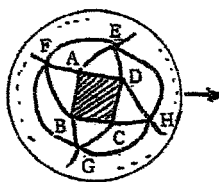


図10



図11

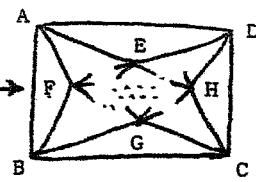


図12

図9は、点Pに集まっている4面の位相的三角形(これらを $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCD$, $\triangle PDA$ で表すことにする)の配置図である。 $st(P:M_1)$ は、これらの4つの三角形が連結して構成されている。取り除かれた方の立体的図は、 $18面-4面=14面$ で構成されている。前述したように、この14面から構成されている立体的図の境界は存在するものとする。図10は、位相的三角形の4面取り除かれた図で、取り除かれた4面の部分は斜線で表してある。図10のデルタ18面体から、三角形4面取り除いた図11では、残りの立体図では、

頂点の数=11個-1個=10個

辺の数 =27本-4本 =23本 (IX-①)

面の数 =18面-4面 =14面

となる。

4面取り除かれた図10の立体的図の頂点A,B,C,Dでの次数は、すべて4である。つまり、元の位相的デルタ18面体 M_1 の点Pに集まる辺の数は4本であるから、4面を取り除くということは、辺PA,辺PB,辺PC,辺PDの4本が頂点A,B,C,Dから頂点Pとの間でできる辺の数から、それぞれ1本ずつの辺が取り除かれることから、図10では、点A,B,C,Dの次数は、 $5-1=4$ (次)である。残りの6個の頂点E,F,G,H,I,Jの各次数は、すべて5次である。

(註:図10の立体的図を位相変換して平面上の図形として表すことができるから、三角形分割された図形のオイラー数は1である。上記の図10では、 $V-E+F=1$ を満たしている)

次に、辺AB, 辺BC, 辺CD, 辺DAを位相変換で引き延ばした図が図11である。位相変換で変形した立体の頂点の数、辺の数、面の数、各頂点の次数は不変である。この場合も、(IX-①)と同様である。図11は、図10の立体的図を位相変換(つまり、自己交叉しなく、かつ、絡まない条件下で、曲げたり、伸ばしたり縮小したりして変形する。)して、辺AB, 辺BC, 辺CD, 辺DAを伸ばして広げた図である。斜線の部分は、面が取り除かれていることの意味である。この段階でも、頂点の数、辺の数、面の数は(IX-①)で示した通りで、

頂点の数=10(個)

辺の数 =23(本)

面の数 =14(面)

である。

さらに、辺AB, 辺BC, 辺CD, 辺DAを引き延ばして、裏返しするようにして平面上の図形に近いように描いた図が、図12である。辺AB, 辺BC, 辺CD, 辺DAはこの図の境界になっている。この図12では、点E,F,G,Hのみ5次の頂点で描いてある、残りの5次の頂点I, J が描かれていない理由は、この段階では、それらの配置が未知だからである。図11および図12の立体的図は、いずれも図11の立体的図を位相変換して得られた図だから、頂点の個数、辺の数、面の数、及び各頂点の次数は、図11の立体的図で示した(IX-①)と同様で、それぞれ頂点の数は10個、辺の数は23本、面の数は14面である。

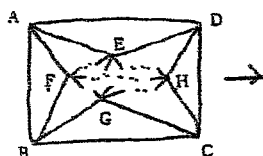


図12

⇒

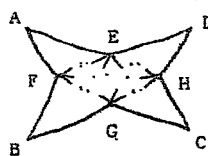


図13

⇒

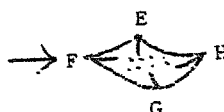


図14

図12で、三角形分割された4角形 $ABCD$ において、境界上の辺 AB , 辺 BC , 辺 CD , 辺 DA を含むそれぞれ $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$, $\triangle DAE$ を取り除く。取り除いた図が図13である。

頂点の数=10個である。(註:4面を取り除いても、頂点 A, B, C, D が残るから。)

辺の数=23本-4本=19本 (註: 辺 AB , 辺 BC , 辺 CD , 辺 DA の4本が取り除かれた。)

面の数=14面-4面=10面

この段階で、点 A, B, C, D の次数は、すべて2次である。点 E, F, G, H の次数はすべて5次である。勿論、点 I, J の次数も、すべて5次ある。

次に、図13の図形から、 $\triangle AFE$, $\triangle BGF$, $\triangle CHG$, $\triangle DEH$ を取り除いた図が、図14である。図14では、点 E , 点 F , 点 G , 点 H のそれぞれの次数は、すべて3次である。ところで、あと2つの点(頂点)である I と J は、この図14の四角形 $EFGH$ の中に存在するはずである。点 I , 点 J のそれぞれの次数は5次でなければならない。

ところで、四角形 $EFGH$ は三角形分割がなされていて、

頂点の数=10個-4個=6個

(註: 頂点 A, B, C, D の4点が取り除かれるから)

辺の数は、8本取り除かれて、19本-8本=11本

面の数は、4面減って、10面-4面=6面である。

..... (IX-②)

この図形のオイラー数は、 $6-11+6=1$ を満たしているので矛盾はない。6個の点(頂点)のうち、頂点 E, F, G, H のそれぞれの次数は、すべて3次である。残りの点 I と点 J の次数は5次である。これらの点が四角形 $EFGH$ に存在しなければならない。しかし、6面の三角形を連結させて張り合わせて、その中で5次の点(頂点)を2個(I と J)を構成することは不可能である。

何故ならば、次の図16のように、頂点 I は5次だから頂点 I の周りには、三角形が5面集まっている。したがって、頂点 I を内部に含む三角分割された五角形 K が存在しなければならない。頂点 I を内部に含む五角形 K の境界の和集合を、点 I のリンクと言い、 $lk(I:K)$ で表すことにする。

(註: 点 I のリンクとは、この場合、五角形の境界(外側の5辺の和集合のことで、太線の5辺の和集合のことである。)

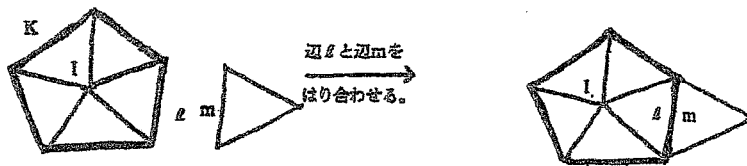


図15

⇒

図16

ところで、図15の図形は、三角形の面が6面あるだけです。5次の点 I の周りには、5面の三角形が集まっていなければならないので、あと1面の三角形を張り合わせる辺は、 $lk(I:K)$ の5辺のどれかでなければならない。仮に点 I と繋がる5本の辺と、残りの三角形のある1辺を張り合わせると、頂点 I の次数は6次になり、6次の点は存在しないので矛盾となる。

また、点 I のリンク $lk(I:K)$ の5辺のうちの1辺 l と三角形の1辺 m を張り合わせると、図16の図形になるが、この図16の中の各点の次数は、

- 2次に頂点の個数=1個
- 3次の頂点の個数=3個
- 4次の頂点の個数=2個
- 5次の頂点の個数=1個

となり、頂点の総数は、 $1+3+2+1=7$ (個)となり、(IX-②)で示された6(個)と矛盾する。さらに、5次の頂点 I の他にもう一つの残りの5次の頂点 J は、図16の中に存在しないので、矛盾である。

したがって、三角形分割されていて、頂点の個数が11個(そのうち、3次の頂点は0個、4次の頂点は1個、5次の頂点は10個)、辺の数が27本、面の数が18面の位相的デルタ18面体は、存在しない。

General Topologyの領域で位相変換された位相的デルタ18面体が存在しないならば、その領域の部分領域である組合せ位相幾何の領域(多面体などの領域)では、当然、デルタ18面体は存在しない。

(証明終)

(註:)図14で、4個の各頂点を結んで三角形を構成可能な分割は、図17で描かれた図で構成可能な図形は、位相的三角形が4面からなる図形である。18面体の存在を仮定して推論を重ねてきたが、デルタ18面体の存在が不可能であることが示されたので、この切開手術(surgery)を続行すると、その過程で4次の頂点 P のスターを上下左右の4面つづつ4回取り去ることが出来るので、しかも点 Q は、4次の頂点であり、点 Q のスターを取り除くことが出来る。つまり、切開手術は完了する。つまり、デルタ16面体の存在が言える。しかも、4面つづつ対称的に取りさったので、デルタ16面体の4次の頂点2個は、対称的に向き合っている(対称面を持つこと)が言える。

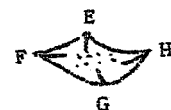


図14



図17

(その2(付記として)): Gauss-Bonnetの定理, Descartesの定理と正及び負の無限小の立体角の存在とその関係について試論

(I): Gauss曲率, デカルトの定理と立体角の関係

(1): n面角の切断に現れる立体角について

この(付記)は、「デルタ18面体の非存在について」の証明の約10年前に考えた論考で、このような立体角についての発想の延長で上記(そのI)の証明の根拠になるので、付け加えさせていただきます。

Gauss曲率は、微分幾何の分野であり、立体角や多面体は組合せ位相幾何の分野である。ここで、立体角について、角度が正の場合や負の場合も考えられるので立体角が負の場合は、(そのI)でヘッコミ度と名付けた。これからの場合、主に立体角が正の場合を扱うことが多いが、断り書きがない場合は、立体角がをすべてトンガリ度と呼ぶことにします。一方、立体角が負の場合は、ヘッコミ度と呼ぶことにします。種数が $g=0$ の多面体 M では、Descartesの定理が成り立ちますが、一方、種数が $g=0$ の滑らかな閉曲面 S ではDescartesの定理とタイ・アップして、Gauss-Bonnetの定理が成り立ちます。

(Descartesの定理): 種数 $g=0$ の多面体 M の立体角(トンガリ度)の総和 $=720^\circ$ である。

(Gauss-Bonnetの定理①): 種数 $g=0$ の滑らかな閉曲面 S において、 $\int_S K dS = 4\pi$ (ラジアン)である。

ただし、 K はGauss曲率で、 4π (ラジアン)は、 720° だから、一致するのです。つまり、Gauss写像は、曲面上で幾つかの頂点の不連続点があっても、立体角と関係していると考えたわけです。その後、この点に関して資料の有無を調べてみると、「数学のあゆみ 下」(J.スティルウ)エル著 林芳樹訳 朝倉書店 2008年3月初版)の中で多面体の各頂点にそれぞれ集まる辺に垂直な平面から構成される「外立体角」の総和とGauss全曲率との関係や滑らかな閉曲面の球面表示との関係が論ぜられています。尚、Gauss-Bonnetの定理については、① 以外に次ぎのような二つの形で定理が確立している。

(Gauss-Bonnetの定理②): 曲面 M の極座標 u, v を用いて $P(u, v)$ で表し、接平面 $T_p M$ の基底を p_u, p_v とする。その双対をそれぞれ du, dv とする。また、 $T_p M$ の正規直交基底を e_1, e_2 とし、それぞれの双対基底を θ^1, θ^2 とする。 $dP = P_u du + P_v dv = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2$ となり、曲面上の測地三角形を M とし、その内角を t_1, t_2, t_3 とすると、 $\int_M K \theta^1 \wedge \theta^2 = \sum_{i=1}^3 t_i - \pi$ が成り立つ。

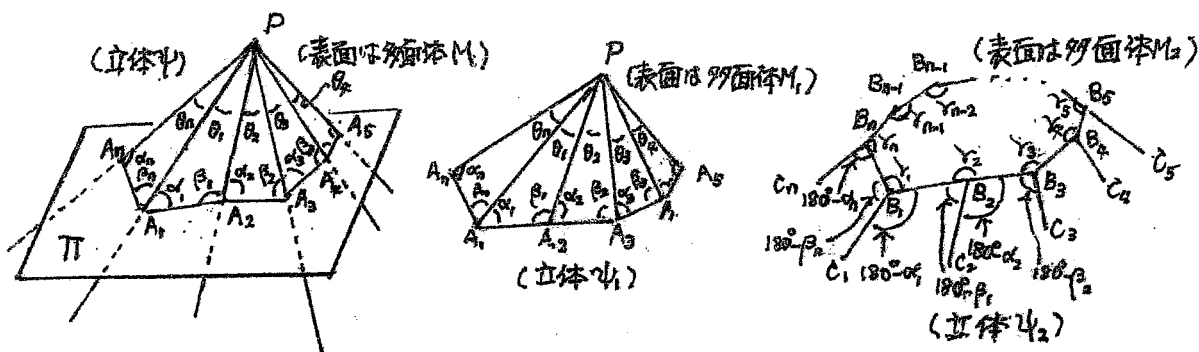
(註: 右辺の式は、いわゆる単位球面上での球面過剰の面積に該当する。)

(Gauss-Bonnetの定理③): D を区分的に滑らかな境界 $\partial D = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_{n-1} \cup c_n$ をもつ単連結領域とする。 c_i と c_{i+1} のつなぎ目の外角を ε_i とする。ただし、 ε_n は c_n と c_1 とのつなぎ目の外角とする。 ∂D の c_i の滑らかな部分の測地的曲率を k_g とすると、 $\int_D K \theta^1 \wedge \theta^2 + \int_{\partial D} k_g ds = 2\pi - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ が成り立つ。

上記の定理と試論が関係する場合、後述することにして、まず次の命題が成立することを示すことにします。

(命題1) 中身が詰まった n 面角の立体 Ψ を図1のように平面 Π で切断したとき、その表面は n 面角の多面体 M で、立体 Ψ は Ψ_1 と Ψ_2 に分かれるが、 Ψ_1 に属する表面の多面体 M_1 の頂点 P のトンガリ度は、立体 Ψ_2 の表面の多面体 M_2 において、切り口に現れた頂点のトンガリ度の総和に等しい。

(証明) 次の図1は、頂点 P を持つ n 面角の立体 Ψ を平面 Π で切断したときの図である。 Ψ の表面の多面体 M について、頂点 P に n 個の面が集まっているとする。



この表面の多面体 M_1 の一頂点 P に注目し、平面 Π で切り取られる以前は、図1において、 M_1 上の頂点 A_i ($1 \leq i \leq n$)と M_2 上の頂点 B_i (ただし、 $1 \leq i \leq n$)は一致し、 M_1 上の辺 $A_i A_{i+1}$ と M_2 上の辺 $B_i B_{i+1}$ (ただし、 $1 \leq i \leq n-1$)は一致し、さらに、辺 $A_n A_1$ と辺 $B_n B_1$ は一致しているものとする。

また、 $1 \leq i \leq n-1$ のとき、 $\angle A_i P A_{i+1} = \theta_i$, $\angle P A_i A_{i+1} = \alpha_i$, $\angle P A_{i+1} A_i = \beta_i$ とする。また、 $\angle A_n P A_1 = \theta_n$, $\angle P A_n A_1 = \alpha_n$, $\angle P A_1 A_n = \beta_n$ とする。さらに、 $1 \leq i \leq n-2$ のとき、 $\angle B_i B_{i+1} B_{i+2} = \gamma_{i+1}$ とする。ここで、 $\angle B_{n-2} B_{n-1} B_n = \gamma_{n-1}$, $\angle B_{n-1} B_n B_1 = \gamma_n$, $\angle B_n B_1 B_2 = \gamma_1$ とおくことにする。

証明したいことは、 M_1 上の頂点 P のトンガリ度と多面体 M_2 上での頂点 $B_i (1 \leq i \leq n)$ のトンガリ度の総和について、

$$\text{頂点Pのトンガリ度} = \sum_{i=1}^n (\text{頂点B}_i\text{のトンガリ度})$$

である。まず、 M_1 で頂点Pのトンガリ度は、

$$360^\circ - \sum_{i=1}^n \theta_i \dots\dots\dots (I - \textcircled{1})$$

である。一方、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\text{頂点} B_i \text{のトンガリ度}) &= (\text{頂点} B_1 \text{のトンガリ度}) + \sum_{i=2}^n (\text{頂点} B_i \text{のトンガリ度}) \\ &= [360^\circ - \{(180^\circ - \alpha_1) + (180^\circ - \beta_n) + \gamma_1\}] + \sum_{i=2}^n [360^\circ - \{(180^\circ - \alpha_i) + (180^\circ - \beta_i) + \gamma_i\}] \\ &= 360^\circ \times n - 180^\circ \times n - 180^\circ \times n + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) - \sum_{i=1}^n \gamma_i \\ &= \sum_{i=1}^n (180^\circ - \theta_i) - 180^\circ (n-2) = 360^\circ - \sum_{i=1}^n \theta_i \quad \dots\dots\dots (I-②) \end{aligned}$$

(註: 三角形の内角の和は 180° だから、 $\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=1}^n (180^\circ - \theta_i)$, n 角形の内角の和は、 $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 180^\circ (n-2)$ である。)

したがって、(I-①)と(I-②)は等しいから、命題は成立する。(証終)

(註:n面角の中味が詰まった立体を平面 Π で切断する場合、切断する平面 Π を徐々に上にあげて、 Π と立体 \mathcal{P} の共通部分が一頂点 P だけになった場合、(命題1)の結果より、多面体 M_2 のすべての頂点 B_i ($1 \leq i \leq n$)

のトンガリ度の総和は、常に頂点Pのトンガリ度に等しいことから、 $B_i (1 \leq i \leq n)$ のトンガリ度の総和が点Pに凝集しているものと考えられる。逆に、(命題1)のように切断すれば、点Pのトンガリ度は M_2 の切断面のすべての頂点に分散したと考えられる。江戸時代に仏像造りに一生をかけた円空の鉋彫りは、鉋を何回振るおうが、トンガリ度の総和は不変なのである。鉛筆削りも六角柱の頂点の立体角が芯の先に凝集したのと同様である。)

(命題2) 図1における多面体 M_1 と多面体 M_2 において、次のことが成立する。

$$(i) \sum_{i=1}^n (\text{頂点}A_i\text{のトンガリ度}) + \sum_{i=1}^n (\text{頂点}B_i\text{のトンガリ度}) = 720^\circ$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n (\text{頂点}A_i\text{のトンガリ度}) - \sum_{i=1}^n (\text{頂点}B_i\text{のトンガリ度}) = 2 \sum_{i=1}^n \theta_i$$

(証明) (i)について、

多面体 M_1 において、Descartesの定理より、

$$\sum_{i=1}^n (\text{頂点}A_i\text{のトンガリ度}) + (\text{頂点}P\text{のトンガリ度}) = 720^\circ$$

だから、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\text{頂点}A_i\text{のトンガリ度}) &= 720^\circ - (\text{頂点}P\text{のトンガリ度}) \\ &= 720^\circ - (360^\circ - \sum_{i=1}^n \theta_i) \\ &= 360^\circ + \sum_{i=1}^n \theta_i \quad \dots\dots\dots (I-③) \end{aligned}$$

一方、(命題1)の証明の中の(I-②)より、

$$\sum_{i=1}^n (\text{頂点}B_i\text{のトンガリ度}) = 360^\circ - \sum_{i=1}^n \theta_i$$

だから、(I-②)と(I-③)より、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\text{頂点}A_i\text{のトンガリ度}) + \sum_{i=1}^n (\text{頂点}B_i\text{のトンガリ度}) &= (360^\circ + \sum_{i=1}^n \theta_i) + (360^\circ - \sum_{i=1}^n \theta_i) \\ &= 720^\circ \end{aligned}$$

となる。

(ii)について

(I-②)と(I-③)より、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\text{頂点}A_i\text{のトンガリ度}) - \sum_{i=1}^n (\text{頂点}B_i\text{のトンガリ度}) &= (360^\circ + \sum_{i=1}^n \theta_i) - (360^\circ - \sum_{i=1}^n \theta_i) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \theta_i \end{aligned}$$

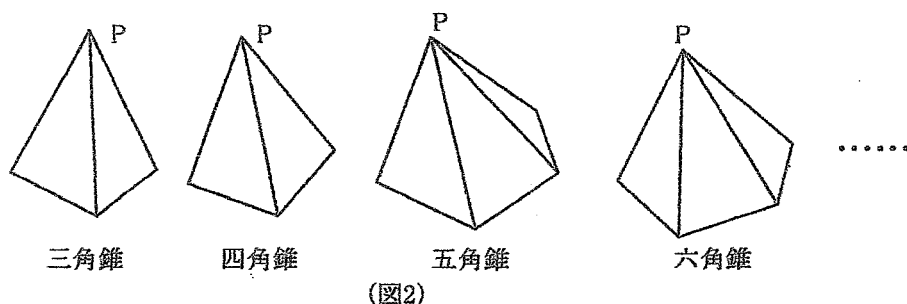
となる。(証終)

(II) トンガリ度と極限操作

(2): 無限小的トンガリ度の存在について

立体角と極限操作の関連問題を私が思いついた事例を挙げることにする。これから述べる角錐は、すべて底面が正多角形でその中心から底面に垂直な直線上に頂点Pがある角錐を扱うことにします。次の図2は、三角錐、四角錐、五角錐、六角錐、……、等々の多面体の図で、これらの多面体については、Descartes の定

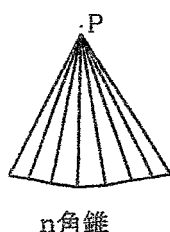
理が成り立ちます。つまり、各角錐の多面体の頂点のトンガリ度の総和は、すべて 720° になります。



次の図3は、 n 角錐の n について、 $n \rightarrow \infty$ にしたとき、 n 角形は直円錐になることでしょう。(註:ここで使う直角錐はすべて底面が正多角形の角錐は頂点 P から底面に下ろした垂直の足は正多角形の中心とします。)

このとき、直円錐の底面の円周は曲線としては滑らかなので、円周上にはトンガリ度が存在するのか、あるいは存在しないのかという問題を考えることにする。

つまり、 n 角錐の底面上の n 個の頂点



\Rightarrow
 $n \rightarrow \infty$

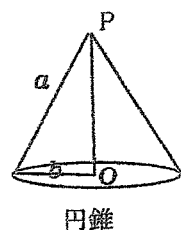
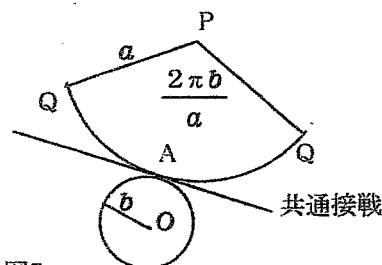
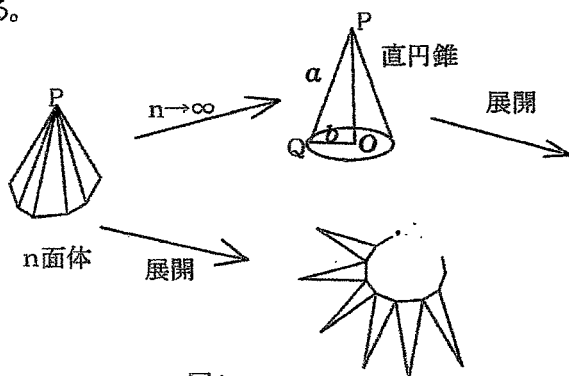


図3

のトンガリ度は、 $n \rightarrow \infty$ の操作で、何処に行ったのか、在るのか、無いのか、有るとすればどの様なトンガリ度なのかを論じることにする。これからの計算を進めやすくするために、角錐の頂点 P から角錐の底面に下した垂線の長さ PO とし、底面の n 角錐の中心 O から底面(正 n 角形)の各頂点までの距離を b 、頂点 P から底面の各頂点までの距離を a として、固定することにする。ここで、このような n 角錐を正 n 角錐と呼ぶこともある。)

ところで、正 n 角錐は、頂点 P と底面(正 n 角形)のある頂点を結ぶ線分に沿って切り、さらに、底面の正 n 角形に沿って切り開くと、図4のように平面上の展開図が得られる。一方、直円錐は可展面なので、母線 PQ (点 Q は底面の円周上のある点)に沿って切り、底面の円周に沿って切り開くと、図5のように円と扇形の展開図になる。



(問題提起) ここで、直円錐の底面の円周上の点 A のトンガリ度は存在するのであろうか? もし存在すると仮定すると、その立体角(トンガリ度)は、何ラジアンであろうか?

図5の展開図のにおける点 A では、扇形と底面の円との接点である。点 A では、共通接戦が一本引けるだけ

で点Aの周りには空きの角度は存在しない。つまり、 n 角錐のときの底面の頂点は n 個存在していたが、Aのトンガリ度はパット消えて無くなってしまったのであろうか。そして、トンガリ度は何処へ？ここで、 n 角錐の頂点 A_i が、 $n \rightarrow \infty$ としたとき、すべての A_i はトンガリ度が等しいので、その代表としてAと表すことにする。ここで、 $n \rightarrow \infty$ にする操作方法がとれる。

(命題3) 母線の長さ a 、底面の半径が b の直円錐において、底面の円周の任意の頂点 A_i (その代表として点Aで表すことにする)におけるトンガリ度について、次の事柄が成り立つ。

(i) 点Aのトンガリ度は円周上では、無限小の形で0ラジアンである。

(ii) この無限小の形で、トンガリ度の底面の円周上の総和は、 $\frac{2\pi b}{a} + 2\pi$ である。

(証明) 下の図6は、 n 角錐の展開図の一部(底面の隣り合った n 個の任意の3頂点 A_{i-1}, A_i, A_{i+1} の周りの側面と正 n 角形の頂点Pから各頂点 A_{i-1}, A_i, A_{i+1} を線分で結んだ図である。正 n 角錐について、頂点Pから底面までの距離(高さ= h とする)と底面の正 n 角形の中心Oから各頂点までの距離 b を変えないで、 $n \rightarrow \infty$ にすると、 n 角柱は直円錐になる。 n 角錐の頂点から底面の各頂点までの距離 a は、 $a = \sqrt{b^2 + h^2}$ であるから、 $n \rightarrow \infty$ にしたときの直円錐の母線の長さは、 a である。

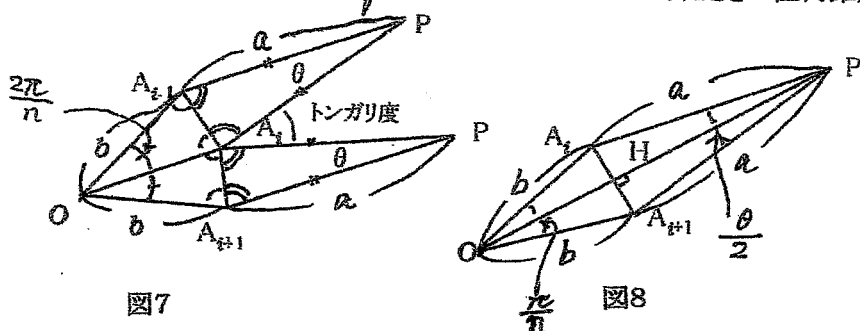
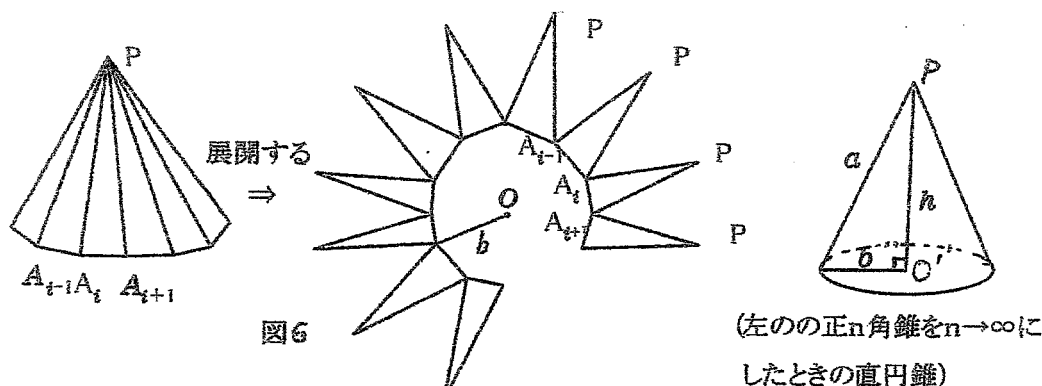


図7は、図6の n 角錐の展開図の一部を拡大した図である。図8は、 n 角錐の任意の一つの側面(二等辺三角形 PA_iA_{i+1})と底面の円の中心Oと頂点 A_i と、点 A_i の隣の頂点 A_{i+1} からなる二等辺三角形 OA_iA_{i+1} の図で、直線POと辺 A_iA_{i+1} との交点を点Hとした図である。

(i) についての証明(註:ここで、 n 角錐の底面の頂点は半径 **b** の円周上にあり、 n 等分の頂点の代表として点Aをとることにする。これ等の頂点は、極限操作で $n \rightarrow \infty$ とする場合、 n 角錐の底面の正 **n** 角形の **n** 個の頂点は正 **n** 角形の中心からの距離が半径 **b** の円周上にあるので、 n を増加させる場合に隣り合った頂点はそのままにして、隣り合った頂点を結ぶ円弧の中点を次々にとつて、それらを頂点とする正多角形をつくることができる。この場合、三角錐から始めると、 n を改めて $3 \times 2^{n-1}$ して、 $n \rightarrow \infty$ としてもよい。そうすると、頂点 **A_i** は **n** を増大させてもいつまでも底面上に存在し、 $n \rightarrow \infty$ にした場合も直円錐の底面に一般的に定義された立体角と異なる状態で存在することになる。したがって、直円錐の底面の円周上の頂点 **A_i** を改めて、それらの頂点の代表として頂点Aと見做して 図8より、 $PA_i = PA_{i+1} = a$ 、かつ、 $OA_i = OA_{i+1} = b$ (底面の円の半径)より、 $A_i A_{i+1} \perp PO$ である。

また、 $\angle A_i O A_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$ である。ここで、 $\angle A_i P A_{i+1} = \theta$ おくことにする。つまり頂点Pの集まる各面の角度(二等辺三角形の頂角の角度)は、すべて θ としたことになる。

$$\angle A_i P H = \angle A_{i+1} P H = \frac{\theta}{2}, \quad \angle A_i O H = \angle A_{i+1} O H = \angle A_i O A_{i+1} \div 2 = \frac{2\pi}{n} \div 2 = \frac{\pi}{n} \text{ である。}$$

$$AH = a \sin \frac{\theta}{2} = b \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n}$$

だから、 n を十分大きくとれば、 $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ に採れるから、三角関数の逆関数を用いて、

$$\frac{\theta}{2} = \text{Arcsin}\left(\frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n}\right)$$

$$\therefore \theta = 2\text{Arcsin}\left(\frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n}\right) \dots\dots\dots (\text{II}-①)$$

となる。点 **A_i** のトンガリ度は $\angle O A_{i-1} A_i = \angle O A_i A_{i-1} = \angle O A_i A_{i+1}$ で、かつ、 $\angle P A_{i-1} A_i = \angle P A_i A_{i-1} = \angle P A_i A_{i+1}$ だから、図7より、 $2\pi - \{(\angle O A_i A_{i-1} + \angle O A_i A_{i+1}) + (\angle P A_i A_{i-1} + \angle P A_i A_{i+1})\}$ だから、

$$\text{点} A_i \text{のトンガリ度} = 2\pi - \{(\pi - \frac{2\pi}{n}) + (\pi - \theta)\} = \theta + \frac{2\pi}{n} \dots\dots\dots (\text{II}-②)$$

したがって、 A_i のトンガリ度は、(II-①)と(II-②)より、 n で表すと、

$$\text{点} A_i \text{のトンガリ度} = \theta + \frac{2\pi}{n} = 2\text{Arcsin}\left(\frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n}\right) + \frac{2\pi}{n} \dots\dots\dots (\text{II}-③)$$

となる。 n 角錐について、 $n \rightarrow \infty$ にしたときの円錐の底面上の頂点 **A_i** のトンガリ度は、(II-③)より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{点} A_i (\text{点} A) \text{のトンガリ度}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{2\text{Arcsin}\left(\frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n}\right) + \frac{2\pi}{n}\} = 0 (\text{ラジアン})$$

つまり、トンガリ度は0ラジアンとなり、消滅した。しかし、次の(ii)で示すが、完全にトンガリ度が消滅したわけではなく、無限小の状態(点密度的状態ともとれる)で存在することを示す。

(ii) についての証明

n 角錐の底面の頂点のトンガリ度の総和は、底面には **n** 個の頂点があるから、(II-②)のトンガリ度を **n** 倍して、(II-①)を代入すると、

$$n\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) = n\theta + 2\pi = n\left(2\text{Arcsin}\left(\frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n}\right)\right) + 2\pi \dots\dots\dots (\text{II}-④)$$

となる。したがって、 \bigcirc を $\frac{\text{定数}}{n}$ とすると、 $n \rightarrow \infty$ にすると、 $\bigcirc \rightarrow 0$ となるから、極限の公式： $\lim_{\bigcirc \rightarrow 0} \frac{\sin \bigcirc}{\bigcirc} = 1$ 及び
 $\lim_{\bigcirc \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsin} \bigcirc}{\bigcirc} = 1$ を使うと、トンガリ度の総和は、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\theta + \frac{2\pi}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n\theta + 2\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \{ 2 \text{Arcsin} \left(\frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n} \right) \} + 2\pi \\ &= 2 \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Arcsin} \left(\frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n} \right)}{\frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n}} \times \frac{\frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \times \pi \right\} + 2\pi \\ &= 2 \times 1 \times 1 \times \frac{b}{a} \times \pi + 2\pi = \frac{2\pi b}{a} + 2\pi \text{ (ラジアン)} \quad \dots\dots\dots (\text{II}-5) \end{aligned}$$

つまり、直円錐の底面の円周上に、トンガリ度のトータルとして(II-5)の角度が存在する。(証明終)

(註：無限小的な状態(点密度的状態)のトンガリ度でも、「塵が積もれば山となる」と言うことなのか、トータルしてのトンガリ度が現われるのである。このように、円錐の底面の円周上に無限小の形で存在するトンガリ度を、これから無限小のトンガリ度と呼ぶことにする。)

ところで、命題3の(ii)の結果より、そのLemmaとして、次の事柄が成立する。

(Lemma1) 直円錐の底面の円周上に存在する無限小のトンガリ度のトータルと頂点Pのトンガリ度の合計は、 4π ラジアンで、Descartesの定理が成り立つ。

(証明) 図5の直円錐の展開図で、側面の扇形の中心角は、 $\frac{2\pi b}{a}$ (ラジアン)だから、頂点Pのトンガリ度は

$2\pi - \frac{2\pi b}{a}$ となる。この角度と(II-5)の角度の合計は、 $(2\pi - \frac{2\pi b}{a}) + (\frac{2\pi b}{a} + 2\pi) = 4\pi$ となり、

Descartesの定理が成り立っていることが分かる。(証明終)

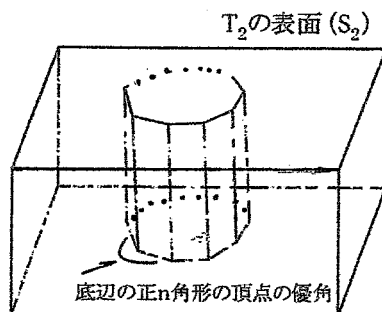
(III): 無限小的ヘッコミ度(負の無限小的立体角)の存在について

(II)では無限小のトンガリ度の存在と幾つかの命題を示しましたが、負の無限小の立体角(無限小的ヘッコミ度と呼ぶことにします。)の存在と命題に言及します。もっとも簡単な事例は、中味の詰まった直方体 T_0 から中味の詰まった底面が正 n 角形の直角柱 T_1 を繰り抜いて、繰り抜かれた方の種数 $g=1$ の多様体を T_2 とすると、 T_2 の表面上にできた多面体 S_2 には穴が開いた上面と下面の周の1頂点に集まる面の各角度の合計は

$$\left\{ \left(2\pi - \frac{(n-2)\pi}{n} \right) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right\} = 2\pi + \frac{2\pi}{n} \quad \dots\dots\dots (\text{III}-1)$$

となるから、各頂点の立体角は、 2π から(III-1)の角度を引くと、

$$2\pi - \left(2\pi + \frac{2\pi}{n} \right) = -\frac{2\pi}{n} \quad \dots\dots\dots (\text{III}-2)$$



となり、負の立体角になります。 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{2\pi}{n}) = 0$ (ラジアン) であるが、穴の開いた上面及び下面の周にはそれぞれ n 個の頂点があるから、片方の面の穴の周ではトータルとして、 $n(-\frac{2\pi}{n})$ 存在し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(-\frac{2\pi}{n}) = -2\pi$ となり、穴の開いた周 (上面と下面) は曲線として円で滑らかだが、曲面としては滑かではなく、各々に (-2π) ラジアン の無限小的ヘッコミ度が存在していることが言えます。この事例は、繰り抜いた側の n 角柱で、 $n \rightarrow \infty$ とした立体角との関連が明らかなので、次の事例で興味ある事柄を述べることにします、

中味の詰まった直方体 Φ_0 から同じ高さの n 角錐 Φ_1 を繰り抜いて、繰り抜かれた種数 $g=1$ の多様体を Φ_2 とする。 Φ_2 の表面の上面には一点 P から下面の底面に通じる穴が開いている。 Φ_2 の下面の底面には、 n 個の頂点があり、それらの立体角 (負であることは後述) はすべて等しい。この一つの負の立体角において、 $n \rightarrow \infty$ にすると、(命題3) でおこなった同様の計算で無限小的負の立体角が得られる。それを無限小的ヘッコミ度と名付けることにする。

(命題4) 上記の繰り抜かれた直方体 Φ_2 の表面で底面の円周上

には、無限小的ヘッコミ度の総和が、 $(-2\pi + \frac{2\pi b}{a})$ 存在する。

この総和は、不思議なことに、直円錐 Φ_1 の表面上の頂点 P のトングリ度 $= (2\pi - \frac{2\pi b}{a})$ に (-1) を掛けたヘッコミ度に等しい。

(証明) 直方体 Φ_0 から n 角錐 Φ_1 を繰り抜いたとき、繰り抜かれた Φ_2 の表面の底面の n 角形の穴の周辺には n 個の頂点があり、

それらの頂点を $A_i (1 \leq i \leq n)$ とする。 $1 \leq i \leq n-1$ において、

$$\angle PA_{i-1}A_i = \angle PA_iA_{i+1} = \gamma, \quad \angle PA_nA_{n-1} = \angle PA_1A_n = \gamma,$$

$$\angle A_{i-1}PA_i = \angle A_iPA_{i+1} = \theta, \quad \angle A_nPA_{n-1} = \angle A_1PA_n = \theta \text{ とする。}$$

(図9) の Φ_2 の表面の底面の穴の周りの各頂点に集まる各角度は、

$$\text{正}n\text{角形の頂点の角度} \frac{(n-2)\pi}{n} = \angle A_{i-1}A_iA_{i+1} \text{ の優角と } 2\gamma \text{ と}$$

和であるから、 $\{(2\pi - \frac{(n-2)\pi}{n}) + 2\gamma\}$ となり、 Φ_2 上の繰り抜かれた底面に現れる周上の各頂点の立体角は、

$$2\pi - \{(2\pi - \frac{(n-2)\pi}{n}) + 2\gamma\} = \pi - \frac{2\pi}{n} - 2\gamma \quad \dots\dots (III-3)$$

となる。 $2\gamma + \theta = \pi$ なので、 $2\gamma = \pi - \theta$ を (III-3) に代入すると、立体角は、

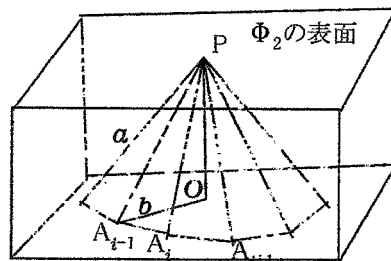
$$\pi - \frac{2\pi}{n} - (\pi - \theta) = \theta - \frac{2\pi}{n} \quad \dots\dots\dots (III-4)$$

となる。図12より、 A_iA_{i+1} と PO との交点を H とすると、 $PO \perp A_iA_{i+1}$

だから、 $\angle PA_iH = \frac{\theta}{2}$, $\angle A_iOH = \frac{\pi}{n}$ が成り立ち、

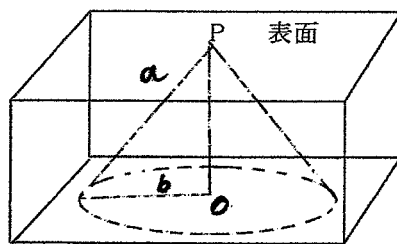
$$a \sin \frac{\theta}{2} = A_iH = b \sin \frac{\pi}{n} \text{ となる。}$$

直円錐の母線の長さ a , その底面の正 n 角形の中心から底面の頂点までの距離 b

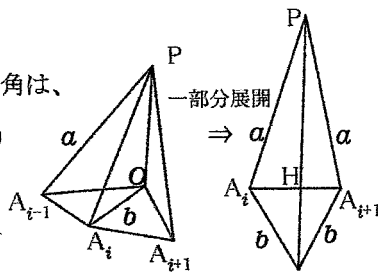


(図9)

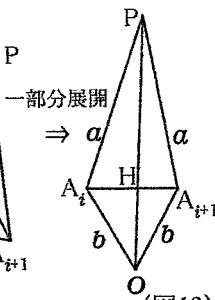
$\downarrow n \rightarrow \infty$



(図10)



(図11)



(図12)

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\therefore \frac{\theta}{2} = \text{Arcsin}(\frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n}) \text{より、}$$

$\theta = 2\text{Arcsin}(\frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n})$ となるから、(Ⅲ-④)に代入すると、頂点 A_i の立体角は、

$$\theta - \frac{2\pi}{n} = 2\text{Arcsin}(\frac{b}{a} \sin \frac{\pi}{n}) - \frac{2\pi}{n} \dots\dots\dots (Ⅲ-⑤)$$

となる。(命題3)の計算でやったように、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\theta - \frac{2\pi}{n}) = 0$ (ラジアン)となり、また、 Φ_2 の表面の底面の

$$\text{正}n\text{角形には}n\text{個の頂点があるから}n\text{倍して、}\lim_{n \rightarrow \infty} n(\theta - \frac{2\pi}{n}) = \frac{2\pi b}{a} - 2\pi \dots (Ⅲ-⑥)$$

となる。つまり、(Ⅲ-⑥)の立体角は $0 < \frac{b}{a} < 1$ より、負の立体角(ヘッコミ度)であるが、無限小的ヘッコミ度の総和が図10の底面の円周上に存在していることが示され、 $(2\pi - \frac{2\pi b}{a}) \times (-1)$ に等しい。(証明終)

(Ⅳ):(Ⅲ)で示した円錐上の底面上の無限小的トンガリ度及び無限小的ヘッコミ度の分布について

(Ⅲ)の結果について、 n 角柱の底面の正 n 角形について、 $n \rightarrow \infty$ で n 角錐は直円錐になるが、そのとき底面の円周上には、 \aleph_0 の自然数全体の濃度を持つ無限小的トンガリ度が存在する。一方、底面の円周は \aleph の実数全体の濃度 \aleph を持っている。底面の円周上に存在する無限小的トンガリ度は、自然数全体の濃度 \aleph_0 を持つ底面の円周上にどのように存在し、かつ分布しているのかという点について言及する。

(命題5)母線の長さ a 、底面(円)の半径 b の直円錐の底面の円周の弧の長さが1単位当たり存在する無限小的トンガリ度のトータルは、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ である。

(証明)命題3の(ii)の結果より、直円錐の底面の円周上にある無限小的トンガリ度のトータルは、(Ⅱ-⑤)より、 $\frac{2\pi b}{a} + 2\pi$ であった。このトンガリ度のトータルを底面の円周の長さ $2\pi b$ で割ると、

$$\frac{\frac{2\pi b}{a} + 2\pi}{2\pi b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ (ラジアン)} \dots\dots\dots (Ⅳ-①)$$

となる。(証明終)

(註:直円錐の底面の円周上では、2次元の曲面論からみれば滑らかではなく、Gauss曲率など定義できないのですが、…。尚、(Ⅳ-①)の式は、ソフィー・ジェルマン型の曲率の和の形に類似している。)

(命題6)前のp.23の(命題4)において、直方体から円錐が繰り抜かれた多様体上の表面(図10の)に現れる底面の円周上の単位当たりの円弧の長さに存在する無限小的ヘッコミ度の総和は、 $-\frac{1}{b} + \frac{1}{a}$ である。

(証明)(Ⅲ-⑥)の無限小的ヘッコミ度の総和 $= (\frac{2\pi b}{a} - 2\pi)$ を底面の円周の長さ $2\pi b$ で割れば、結果が得られる。 $b < a$ なので、単位当たりの円弧上の無限小的ヘッコミ度の総和である。(証終)

(命題7)直方体 Φ_0 から同じ高さの直円錐(頂点は P) Φ_1 を繰り抜いて、繰り抜かれた直方体 Φ_2 の上面に空いた穴の点 P のヘッコミ度は、直円錐 Φ_1 の底面の円周上に存在する無限小的トンガリ度の総和 $= 2\pi + \frac{2\pi b}{a}$ に (-1) を掛けたヘッコミ度に等しい。

(証明):組合せ多様体 Φ_2 の表面を考えると、デカルトの定理より、元の直方体 Φ_0 の8個の各頂点のトンガリ度

のトータルは $720^\circ = 4\pi$ であり、また、 Φ_2 の表面上の穴の開いた点Pのヘッコミ度をX(ラジアン)とする。

(Ⅲ-⑥)の無限小的ヘッコミ度の総和を考慮して、この Φ_2 の表面では、種数 $g=1$ で、オイラー数は0となり、

(その1)で拡張されたデカルトの定理より、 $4\pi + X + (\frac{2\pi b}{a} - 2\pi) = 0$ (ラジアン)となる。

$\therefore X = -2\pi - \frac{2\pi b}{a}$ となり、(Ⅱ-⑤)でしめた(直円錐 Φ_1 の底面の円周上に存在する)無限小的トンガリ度の総和 $= 2\pi + \frac{2\pi b}{a}$ に(-1)を掛けたヘッコミ度に等しい。(証終)

(命題8)p.23の図10において、穴が一つ空いた Φ_2 の表面上の点Pのヘッコミ度とその表面の下の円周上の無限小的ヘッコミ度の総和との合計は、 -4π である。

(証明):(命題4)の結果と(命題7)の結果より、 $(\frac{2\pi b}{a} - 2\pi) + (-\frac{2\pi b}{a} - 2\pi) = -4\pi$ となる。(証終)

(註:多面体(2次元組合せ多様体)において種数 g が与えられていて、その多面体の正の立体角の総和か、又は負の立体角の総和の一方が与えられた場合、デカルトの定理より、もう一方の立体角(正か負の立体角)の総和が求められる。無限小的トンガリ度の総和及び無限小的ヘッコミ度の総和の場合も同様である。)

(V):トンガリ度と極多角形の面積との関係

球面上の測地線は大円の円弧で、球面上の2点を結ぶ曲線の長さについて最短である。これらの円弧で囲まれた球面上の n 角形を球面 n 角形と言い、隣り合った点どうしを結ぶ円弧を辺と言うことにする。また球面 n 角形の n 個の点の角度は、それぞれその点における大円の円弧の2本の接線のなす角と定義し、すべて弧度法表示で表すことにする。したがって、球面 n 角形の面積も球面過剰の公式により、弧度法表示で表される。

これらの問題に取り組んでいる中で、以前から抱いていたある予想(トンガリ度と単位球面上の極多角形の面積が弧度法表示で等しくなる)が成り立つのではないかと想った。組合せ位相幾何と微分幾何の二つの領域にわたって、Gauss曲率とGauss写像とトンガリ度が何か関連があるのではないかという考えを抱き始めました。その理由となる根拠は、Gauss曲率は、もとの曲面の面積とそこにおける法線群のGauss写像 g によって単位球面上に写された面積との比の極限としての定義があるからで、例えばGauss写像で不連続点が存在しても、上述の予想が成り立つのではないかと考えたわけです。

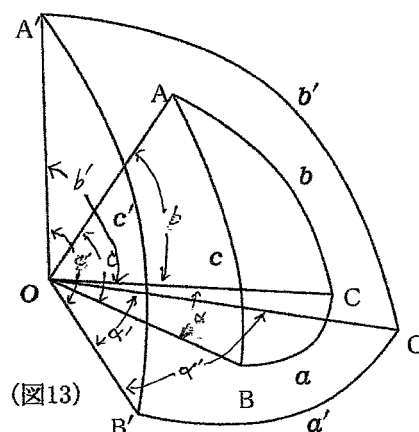
(VI):ある立体の法線群のGauss写像によって写してできる単位球面上の図形の面積とトンガリ度の関係について

(定義1):球面上において一つ大円の円弧を含む平面に垂直な球の直径をこの大円の軸と言い、軸の両端を大円の極という。

(定義2):単位球面三角形ABCで辺BC, 辺CA, 辺ABの極をそれぞれ A' , B' , C' とするとき、球面三角形 $A' B' C'$ を球面ABCの極三角形という。ただし、 A' , B' , C' はそれぞれ辺BC, 辺CA, 辺ABに関してそれぞれA, B, Cと同じ側にあるものとする。

(定理3):球面三角形ABCの極三角形が球面 $A' B' C'$ ならば、球面三角形 $A' B' C'$ の極三角形は、球面三角形ABCである。

(証明略:「三角法入門」(黒須康之介著 岩波全書)のp.235参照)



(図13)

(定理4): 球面三角形ABCと球面三角形A' B' C' が互いに他の極三角形ならば、(図13)で次の事柄が成り立つ。ただし、球の半径は1とし、球面三角形の各辺の長さも弧度法で表してある。

$$\begin{aligned} \angle A + a' &= \angle B + b' = \angle C + c' = \pi \\ \angle A' + a &= \angle B' + b = \angle C' + c = \pi \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (VI-①)$$

(証明略): 上記の「三角法入門」に証明があり、また、最近では「幾何学の散歩道(離散・組合せ幾何入門)(Peter Frankl・前原 潤著 共立出版)」のp.78~p.79にも証明がある。

以上のことを(図13)を前提として、三面角の三面にそれぞれ垂直な法線3つをGauss写像で写して、球面表示すると三面角の立体角は、極三角形の面積に等しいのではないかと言う予想を私は抱いたので、高専の先生でかつ数学教育協議会の会員である中谷太郎氏に尋ねた結果、中谷氏から(定理3と4)を用いて証明が送られてきた。その証明は、p.16で前述した「外立体角」の概念とは関連しない証明で、定理4の(VI-①)を使うと、 $\angle A' + a = \angle B' + b = \angle C' + c = \pi$ だから、辺々加えて、

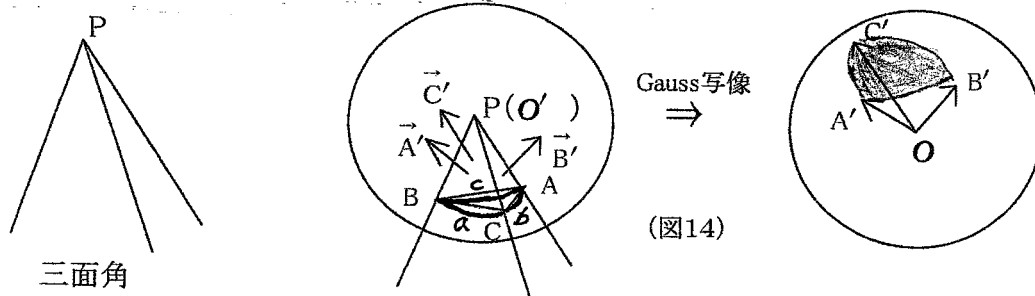
$$(a+b+c) + (\angle A' + \angle B' + \angle C') = 3\pi \text{ が成り立つ。この等式を変形して、}$$

$$\therefore 2\pi - (a+b+c) = (\angle A' + \angle B' + \angle C') - \pi \dots\dots\dots (VI-②)$$

となり、左辺は点Oを頂点とし $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OAC$ の三面角の立体角を表し、右辺は単位球面上の球面過剰の面積を表している事が書かれていた。つまり、立体角とGaussによる球面表示との関連があることが分かった。その後、私はn面角のn個の法線ベクトルをGauss写像で球面表示すると、n面角の立体角が極n角形(測地n角形)の面積であることを示しました。ところで、n面角の各辺上では曲面上としての法線が定義されず、辺上の点ではGauss曲率は存在しません。

ところで、曲面の領域内に幾つかの不連続点が存在しても、立体角とGauss写像による球面表示された極三角形の面積は弧度法で表現すると等しいという考えを抱いていましたが、中谷氏の示した(図13)は証明としては正しいと考えますが、分かり難いと思ったので、(図14)を用いて説明します。三面角の頂点Pを単位球面の中心O'に移動させて、三面角の3本の辺が単位球面と交わる交点をA, B, Cとし、測地三角形ABCを描き、また、 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ の各面に垂直な法線ベクトルをそれぞれ $\vec{C'}$, $\vec{A'}$, $\vec{B'}$ とし、 $\widehat{BC}=a$, $\widehat{AC}=b$, $\widehat{AB}=c$ とする。

$\angle BPC=a$, $\angle CPA=b$, $\angle APB=c$ による頂点P(点O'でもある)に集まる三面角となる。したがって、点Pのトンガリ度は、 $2\pi - (a+b+c)$ となる。一方、測地三角形ABCの極三角形A' B' C' となり、その面積は(定理3)と(定理4)より、球面過剰である $(\angle A' + \angle B' + \angle C') - \pi$ となり、点Pの立体角とGauss写像による球面表示による測地三角形A' B' C' の(図14)の面積に等しいことが示される。



(命題9): n面角のトンガリ度(弧度法表示)は、そのn面角の各面の法線群(n個のベクトル)をGauss写像で写

したとき、単位球面上のそれぞれ像であるベクトルの端点を大円の円弧で結んでできる極 n 多角形(測地 n 角形)の面積に等しい。(証明は、定理4の考えを n 面角に応用すれば得られるので、省略します。)

(命題10): 直円錐の頂点 P におけるトンガリ度は、点 P の近傍で、点 P を除いた領域の法線群のGauss写像 g によってできる像(球冠)の面積に等しい。

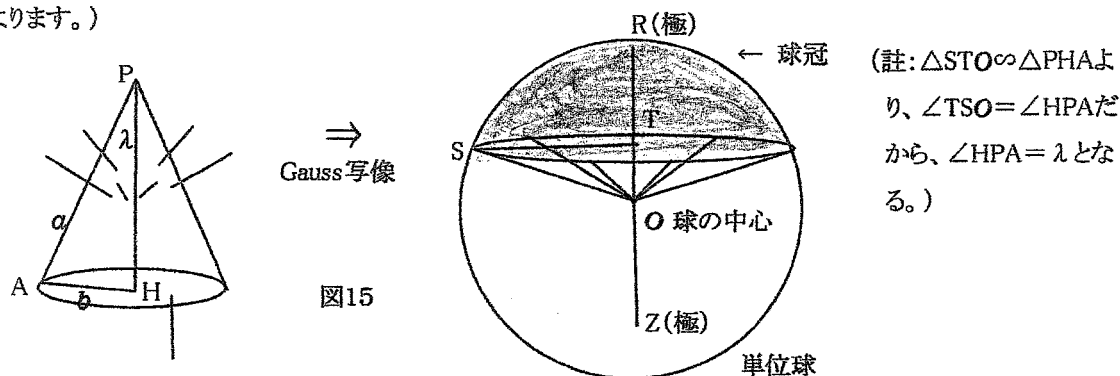
(証明) 球冠(球帽とも言う)の面積の公式は様々な本に記載されている。トンガリ度との関連つけるとすると、正 n 角形を底辺に持つ直角錐において、 $n \rightarrow \infty$ にすれば、(定理9)の応用で得られると考えます。球冠の面積の公式は、以下の通り。(図15)の右側の球冠の図と註より、球の軸と法線とのなす角 $\angle TSO = \lambda$ とすると、

球冠の面積は公式は(大円周の長さ) \times (球冠の高さ(図15の RT の長さ))である。また、 $RT = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \lambda) = 1 - \sin \lambda$ である。さらに、 λ は直円錐の側面の母線と軸とのなす角が λ になることから、 $\sin \lambda = \frac{b}{a}$ となる。

したがって、球冠の面積は、 $2\pi \times [1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \lambda)] = 2\pi \times (1 - \sin \lambda) = 2\pi (1 - \frac{b}{a}) \dots (VI-3)$

となり、p.19の図5の扇型の空きの角度 $= (2\pi - \frac{2\pi b}{a})$ と(VI-3)より、弧度法表示で点 P のトンガリ度と球冠の面積とは一致することが得られた。(証明終)

(註: ここで、得られた球冠の底面の周は円であるが、この円は大円の弧(測地線)ではない。その理由は、命題10で述べた事柄の中で、正 n 角錐の n について、 $n \rightarrow \infty$ としたとき、側面は円錐の側面になるが、正 n 角錐の頂点 P に集まる n 個の面の法線群のGauss写像による像の端点は単位球面上の n 個となるが、これらの n 個の隣り合った点どうしを単位球面上で大円の円弧で結んで、極 n 角形ができるのであるが、 $n \rightarrow \infty$ にすると、隣り合った法線の端点を結ぶ円弧の長さ $\rightarrow 0$ となり、球冠の底面の円周は必ずしも大円の弧にならないことによります。)



(命題11): 直円錐の錐面と底面(円周を除く)の法線群によってできるベクトルのGauss写像による像からできる端点(円周と底面の法線ベクトルの端点の像)を含み、円周によって切り取られる下側の球冠の面積は、元の直円錐の底面の円周上の無限小的トンガリ度の総和に等しい。

(証明略) (命題3)によって、直円錐の母線の長さ a 、底面の円の半径 b で、直円錐の軸と母線のなす角を λ とすると、底面に円周上に存在する無限小的トンガリ度の総和は、(II)で示したように、

$$2\pi (1 + \frac{b}{a}) \dots (II-5)$$

である。

前の図15は球冠で、球冠は長円錐の底面から下向きの法線ベクトルのGauss写像による像の端点を含む側だから、その高さは、 $TZ=1+\cos(\frac{\pi}{2}-\lambda)$ である。下方の球冠の面積は、

$$2\pi\{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\lambda)\}=2\pi(1+\sin\lambda)=2\pi(1+\frac{b}{a})\cdots\cdots(\text{VI}-④)$$

(II-⑤)の無限小的トンガリ度の総和と(VI-④)の球冠の面積は等しい。(証明終)

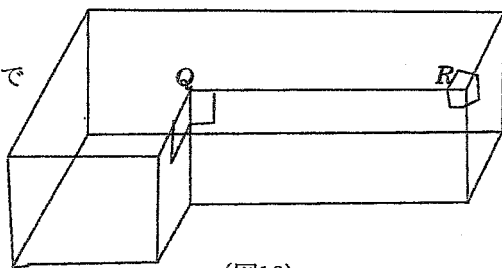
(VII):多面体のある頂点の近傍での各面の法線群(その多面体の頂点に集まる辺上での法線は定義されない)のベクトルのGauss写像 g による像の隣り合った端点どうし大円の弧で結んでできる面積の符号について

右の図16は、直角に折れ曲がった建築物の図である。頂点Qのトンガリ度を求めてみる。

頂点Qに集まっている各面の角度の合計は、

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$$

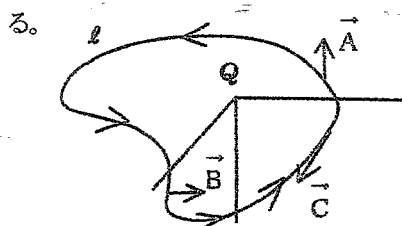
であるから、頂点Qのトンガリ度は、 $2\pi-\frac{5\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$



(図16)

となる。前に述べたヘッコミ度となる。頂点Rのトンガリ度は、 $\frac{\pi}{2}$ である。

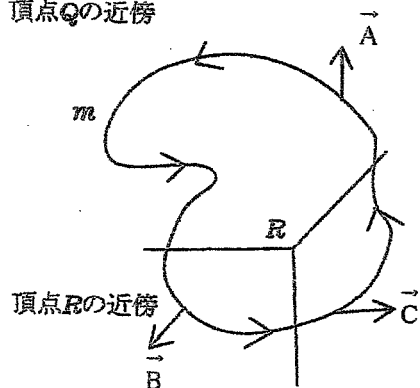
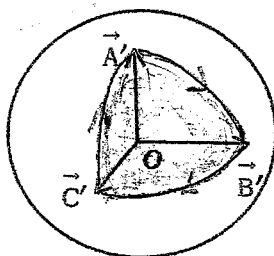
したがって、ここからは、トンガリ度は負の角度をヘッコミ度と名付けて、論を進めることにする。前に述べた様に、この建物の(トンガリ度の総和)+(ヘッコミ度の総和) $=4\pi$ (ラジアン)である。つまり、種数 $g=0$ なので、トポロジーの領域と関連している。図16の建物の頂点の個数は12個で、その一つの頂点Qの近傍での法線群ベクトルをGauss写像で写した場合、極多角形の面積が $-\frac{\pi}{2}$ になるであろうか。次の図17と図18の多面体のそれぞれの頂点Q及び頂点Rに集まる3面のそれぞれの一部分について、各3つの法線群の球面表示である。



頂点Qの近傍

g
 \Rightarrow
Gauss写像

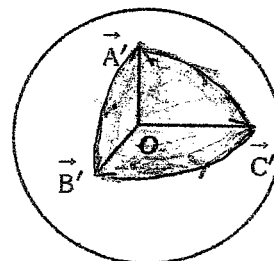
(図17)



頂点Rの近傍

g
 \Rightarrow
Gauss写像

(図18)



ここで、頂点 Q , R のそれぞれに集まっている三面角上で、頂点 Q , R の近傍上に自己交叉しない単純閉曲線 ℓ , m を描きいて左回りの向きをつけることにする。この曲線 ℓ , m 上では3つ々の法線 \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} が得られ、3つ々の法線をGauss写像によって単位球面上に写した像ベクトルを $\vec{A'}$, $\vec{B'}$, $\vec{C'}$ とする。これらの3つ々の法線を曲線の左回りの矢印に沿って周りに進めると、それらの法線のGauss写像による球面表示されたベクトルの端点どうしを測地線で結んだときに、同じ順序で左回りなのか、あるいは逆の右回りなのかによって、それぞれ測地三角形の面積を正又は負と定義する。それぞれの三面角の正の立体角又は負の立体角と測地三角形の正負の符号が付いた面積との整合性が現われる。この整合性は滑らかでない三面角や n 面角でも妥当な事と考えます。図17の頂点 Q の三面角の立体角は、 $2\pi - (\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$ となるが、頂点 Q の三面角の3本の法線ベクトルをGauss写像で写すと、図17でも分かるように単位球面の表面積 $=4\pi$ の $\frac{1}{8}$ で、 ℓ 上での法線の端点 $A \rightarrow B \rightarrow C$ の左回りの順が、球面表示での端点 $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ の順が右回りと逆になっている。したがって、この場合の測地三角形の面積は、 (-1) 倍して、 $4\pi \times \frac{1}{8} \times (-1) = -\frac{\pi}{2}$ となり、点 Q のヘッコミ度と一致して整合性が現われる。また、図18で、頂点 R の三面角では、 m 上の法線ベクトルの端点について、 $A \rightarrow B \rightarrow C$ が左回りの順なのだが、球面表示での端点 $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ の順も左回りになって同順なので、測地三角形の面積は、球面の面積 4π の $\frac{1}{8}$ で、正の面積となって、整合性がある。球面多角形の面積は正または負の面積を導入することは、微分幾何と組合せ位相幾何との懸け橋になると想っています。

*この辺で、角が立つ立体角の内容の発表を終わることにします。尚、当日の参加者の中で、講演後に「デルタ18面体の非存在について」の初めての証明が20世紀初頭に、フロイデントール&ファン・デア・ヴェルデンによってなされたことが指摘されましたが、オランダ語で書かれた論文だったとのことで理解し難いとのことでした。ご指摘、感謝します。

以上に述べた立体角は、物を削ったり研磨したり、あるいは木材や金属に穴を開けたり、彫刻や大工仕事・建築、建設、施工、工学・・・等の技術や数学の領域に関連しています。また、立体幾何が教科書から削減されてきた数学教育等にも役立てることが出来ればと願っています。幾つかの課題が残ったので列挙します。

[課題]

- (i): p.16でふれた本「数学のあゆみ(下)」の中で載っている多面体の各頂点の「外立体角」は、立体角に等しいのであろうか？
- (ii): 中味が詰まった直円錐を平面で切断したとき、切断面に現れる円錐曲線(楕円、放物線、双曲線)上の位置によって、正又は負の無限小的立体角の単位当たりの分布密度が異なるのではないか？
- (iii): 高次元正 n 多面体の著作や論文があるが、そのような多面体において、 $n \rightarrow \infty$ にすると、高次元の無限小的な立体角に相当する角度が存在するのであろうか？また、存在する場合は、どのような分布の在り方であらうか？

(参考文献及び資料): ①「トンガリ度について」(数学若手の会会報29号 1983年3月15日発行 (拙稿))

②「デルタ18面体の非存在について」(白百合学園中学・高等学校の研究紀要1994年(拙稿))