ガウスが行なった数値計算（続）

杉本敏夫

〔前回（2003年10月25日）の講演を踏襲し，節番号を通しとし，
文献番号も前回のを用い，それに新しい文献番号を追加する．〕

§12．数値計算と整数論

［1］高木貞治『近世数学史談』（岩波文庫，1995）（以下，史談と略す）の54頁に「計算家ガウスに於いて著しい特徴は彼が数字的の計算に整数論を応用する点である」とある．彼の主著

［10］C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmetiae*, Leipzig, Fleischer, 1801. 高瀬正仁訳『ガウス整数論』，朝倉書店，1995．（以下，D. A. と略す）

は当時も今も純粋数学としての価値が高いが，その第6章は「これまでの研究のさまざまな応用」と題し，循環小数，二次不定方程式，因数分解を扱っている．彼はそれらを書中で紹介したのみならず，日常の計算に常に応用していたのだ．

数 31831 の由来

史談55頁に引用された部分分数分解 $\frac{2}{31831}=\frac{a}{139}+\frac{b}{229}$ は，前回§6で指摘した ln 10037 に関連している．すなわちシュルツェの数表

［6］ Schulze, J. C., *Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonomischer und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln*, zwei Bände, Berlin, August Mylius, 1778. 『数学の応用に不可欠な対数，三角法，及びその他の数表の新・増補集成』 上下2巻.

の上巻の後半に付載された，ヴォルフラムの自然（双曲線）対数表

［7］*Natürliche oder hyperborische Logarithmen bis auf 48 Decimalstellen von Herrn* Wolfram *berechnet*. im Schulze' *Tafeln* B. I.

は「砲兵将校ヴォルフラムが不撓不屈の労苦により小数 48 位まで（史談の50桁は誤り）計算した」(［9］メンヒェンの論文7頁)．引数は 1～10009 の範囲の素数，素数巾，および 10, 100, … などを含めた，よく使われる合成数であり，素数 10009 までで終わっている．

ガウスは次の素数 10037 の自然対数を得んとして多様な計算を試みた. 実は 10037 は面白い素数で, 27 を掛ければ 270999≒271000になる. 10037 に次々に 81, 49, 17, 71, 331 を掛ければ 1591550000001＝3183100000002/2 に到達する.

$$\ln 3183100000002 = \ln 31831 + 8 \cdot \ln 10 + \ln(1 + 2/(31831 \cdot 10^8))$$

の末項の級数計算のため, 2/31831 の部分分数分解が必要になったのだ. 彼は

［2］ Leiste, Chr., *Die Arithmetik und Algebra zum Gebrauch bey dem Unterrichte*, Wolfenbüttel, 1790. ライステ『授業で必要な算術と代数』

の79頁および紙片Math24-(27)-オモテ(Febr. 97 の日付けをもつ）などに計算を行なって, ヴォルフラム表の欄外に 9,214033 543813 800306 050024 451685（小数 30 位まで）を記入した. これに比べれば, ヴォルフラムの 48 桁の自然対数表は対数表の歴史上偉大である. この自然対数表を駆使して数々の計算を行なったガウスも, ヴォルフラムは正確であると讃えている（［1］史談59頁）.

§13. 数値計算と整数論（続）

ガウスは整数論の中で利用できる手段は何でも使っていた. 素因数分解のために, 「ネイピアの棒」に倣ったと言う「ガウスの棒」なる器具まで作っている. 彼は単なる机上の思索家ではなかったのだ. 数学史からは離れるが,

［12］ G. W. Dunnington, *Carl Friedrich Gauss, Titan of science, A study of his life and work*, Exposition Press, 1955. 銀林浩・小島穀男・田中勇訳 ダニングトン『ガウスの生涯』. 東京図書. 1976.

によると, 熟年の彼は陸地測量に明け暮れた(1822-32). 天文台長の彼は, 星の高さを測る六分儀に小鏡を取り付けた回光器を発明し, 日光を反射させた光を望遠鏡で覗き, 85キロ遠くの山と山の角度を測った. （陸地測量の意図を越えて, 非ユークリッド幾何学の成立の可否を決めるためだったとも言われる. ）ドイツの 10 マルク紙幣にガウスの肖像と回光器が印刷された（いまはユーロに切り替わって無い）. 1833年にヴェーバー(W. E. Weber)と共に. 世界最初の電信機械を発明した. ゲッチンゲン天文台のテラスには, その記念板が嵌まっている.

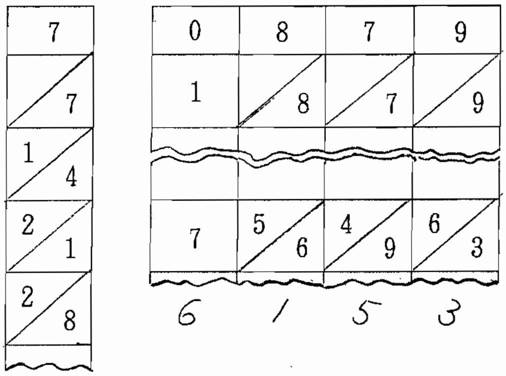
ネイピアの棒

ガウスが倣ったと云う「ネイピアの棒」(Napier Rods）を簡単に説明しよう. それは, 対数の発明で有名なネイピア(John Napier)が, 掛け算（特に途中の暗算）が不得意なヨーロッパ人のために考案した(1617). スミス

［13］ D. E. Smith, *A source book in mathematics*, McGraw-Hill, 1929, Dover, paperback-edition, 1959. の原典紹介(182-185頁）により，その原理のみ簡単に紹介する．１本の棒には，例えば７の段の九九

1×7=7, 2×7=14, 3×7=21, …

の十位を斜め左上，一位を斜め右下に記入してある（左図）．さて右図：



掛け算 7×879=6153 の場合，

上端が０の棒の右に，８の段，７の段，９の段の棒を並べて，０の棒の７の高さを横に見る．右端の棒の一位は３だから下に３と書く．右端の棒の十位は６だから，右から二番目の棒の一位の９と足して，15 になる．そこで 15 の一位の５を二番目の棒の下に書く．十位の１は三番目の棒の下に書くべき 4+6=10 に足し込んで 11 になる．その一位の１を三番目の棒の下に書き，そのときの繰り上がりの１を，7×8=56 の十位の５に足し合わせて，最後に左端の下に６と書く．（説明すると煩わしい．日本人にはスラスラとできる計算なのに．）

ガウスの棒

［10］D．A．331条に，ガウスの整数論の実用的な性格を示す，桁数の大きな数を素因数分解するための「棒」が提案されている．これは同書付表Ⅱ（平方指標を示す表）から作られた．私達にはルジャンドル記号が馴染みであるから，すべてをルジャンドル記号に置き換えて説明する．左端縦列には 3, 5, 7, … なる「分母の素数」が，上端横列には -1 に続けて 2, 3, 5, 7, … なる「分子の素数」が並び，交差点にはルジャンドル記号の符号が並んだ表と考えればよい．この表を厚紙に貼って，縦の短冊に切って棒を作る．

まず $n=37469$ の因数分解を求めよう．ヤコービ記号 $(-1/n)=+1$, $(2/n)=-1$ 等は mod. 4, mod. 8 で n の剰余を考えればよい．$(3/n)$ などはヤコービ記号の相互律で $(n/3)$に直し，n の mod. 3 での最小剰余を r とすれば $(r/3)=-1$ となる．このように計算していって，ヤコービ記号 (r/n) の符号が＋になるのは，「分子」r が -1, 5, 11, 13, 17, …の場合である．いま左端の棒と上端がこれに該当する棒を選んで，左図のように並べる．≈≈ 印は棒の一部の省略を示す．左端縦列の素数ごとに見て行く．そのうち＋記号の多いのは 89 であり，89 が因数の候補となる．実際割り算してみれば，$37469=89\cdot421$ と分解できた．（この計算の原理は，n の非素因子を掃き出すことである．）

	-1	5	11	13	17
3	−	−	−	+	−
5	+	0	+	−	−
7	−	−	+	−	−
83	−	−	+	−	+
89	+	+	+	−	+
97	+	−	+	−	−

	-1	2	3	7	11
3	−	−	0	+	−
5	+	−	−	−	+
7	−	+	−	0	+
83	−	−	+	+	+
89	+	+	−	−	+
97	+	+	+	−	+

次に $n=42001$ の場合，ヤコービ記号が＋になるのは右図の上端の「分子」r が -1，2，3，7，11，…の場合である．素数のうち＋記号の多いのは 97 で，因数の候補となる．実際割り算してみれば，42001＝97•433 と分解できた．

なお例えば 42001 の場合（7/97)＝-1 なのに（7/42001)＝+1 となる理由は，(7/433)＝-1 であり，(7/97)•(7/433)＝(-1)•(-1)＝+1 となるからである．一般にヤコービ記号が＋でも，「分母」の因数についてのヤコービ記号が－になることはあり得る．この棒で探っているのは，非素因子を掃き出した残り，あくまで与えられた n の可能な素因子の候補である．

なお，ガウスは勿論，ルジャンドル記号やヤコービ記号は使わずに．彼独自の記号と表現を用いた．この辺は［10］D．A．の第４章，第６章を参照せよ．

§１４．精密な平方根計算

これも整数論の応用で，初版刷りの［10］D．A．第６章317条から引用する．２行目の　$F=\dfrac{6099380351}{1271808720}$＝4，7958315233 1271954166 17 は *）の注釈によれば√23の近似分数で，√23＝4，7958315233 1271954159 74380… である．

ガウスは引用の中で，Ｆの分母は 16，9，5，49，13，47，59 の積だから，上述した（309～311条に述べた）方法で部分分数に分解でき，各々の分数は付表Ⅲ（分数を小数に化する表）により小数に直し，全部を足せばＦの小数に直せると言う．（［１］史談53-54頁によると，少年ガウスは娯楽として分数を小数に化する表を作成していた．循環節は無限軌道の上を走るように終わりがない！）

引用文の続きで，Ｆの末位の７はその桁での誤差が±５以内であり，実は末位の 17 は 1893936…に置き換わる．さらに *）注釈で，近似分数Ｆの平方根√23との誤差は 20 桁目の数字が±７以内である，と述べている．

quam fractio proposita iusta desideratur. Exempli caussa considerabimus fractionem $\frac{6099380351}{1271808720} = F$ *), cuius denominator est productum e numeris 16, 9, 5, 49, 13, 47, 59. Per praecepta supra data inuenitur $F = 1 + \frac{11}{16} + \frac{4}{9} + \frac{4}{5} + \frac{22}{49} + \frac{5}{13} + \frac{7}{47} + \frac{52}{59}$, quae fractiones particulares ita vt sequitur in decimales conuertuntur:

1	$=$	1		
$\frac{11}{16}$	$=$	0, 625 ［0, 6875に訂正すべし］		
$\frac{4}{5}$	$=$	0, 8		
$\frac{4}{9}$	$=$	0, 4444444444	4444444444	44
$\frac{22}{49}$	$=$	0, 4489795918	3673469387	75
$\frac{5}{13}$	$=$	0, 3846153846	1538461538	46
$\frac{7}{47}$	$=$	0, 1489361702	1276595744	68
$\frac{52}{59}$	$=$	0, 8813559322	0338983050	84
F	$=$	4, 7958315233	1271954166	17

Defectus huius summae a iusto certo minor est quinque vnitatibus in figura vltima vigesima secunda, quare viginti primae inde mutari nequeunt. Calculum ad plures figuras producendo, pro duabus figuris vltimis 17 prodit 1893936 . . .

*) Haec fractio est vna ex iis, quae ad radicem quadratam ex 23 quam proxime appropinquant, et quidem excessus est minor quam septem vnitates in loco figurae decimalis vigesimae.

ガウスが主張したことを確かめてみよう．$\sqrt{23}$の連分数（平方根の場合は循環する）を求めると，$\sqrt{23} = [4, 1, 3, 1, 8, \cdots]$ で 1, 3, 1, 8 が循環する．そこで連分数から，普通のやり方で次々に近似分数を計算してみると，

4	1	3	1	8	1	3	1	…	1	…	1	…	1
$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{19}{4}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{211}{44}$	$\frac{235}{49}$	$\frac{916}{191}$	$\frac{1151}{240}$		$\frac{55224}{11515}$		$\frac{2949601}{552480}$		$\frac{6099380351}{1271808720}$
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	…	⑫	…	⑯	…	㉔

となる．途中を … で省略したが，実際に計算すれば，24番目にＦに到達する．

疑問１　ガウスは（私が計算したように）順々に近似分数を求める普通のやり方でＦを求めたのであろうか？

疑問２　ガウスはどのようにして$\sqrt{23}$の精密な値を計算したのであろうか？

疑問１への答え　ガウスは連分数を加速する方法をもっていた．これは

［９］ Maennchen, Ph., *Gauss als Zahlenrechner*, Gauss'sche *Werke*, Band X-1, Abh. 6.　メンヒェン『計算家ガウス』

なる論文が指摘した．$\sqrt{n}$ の近似分数 a/b が $a^2 - 1 = nb^2$ なる関係を満たすと

き，一挙に2倍番目の近似分数 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{a^2+nb^2}{2ab}$ が得られる，と．私はこれは a/b にニュートン法を施した $\dfrac{A}{B}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{nb}{a}\right)$ のに相当する，と考える．実際，④から出発して計算してみると，2段階で⑯に達する．⑥から出発すると同じく2段階で㉔に達する．まさに中間を飛ばして，特急のように早い．

24/5＝④ → 1151/240＝⑧ → 264961/55248＝⑯

235/49＝⑥ → 110448/23030＝55224/11515＝⑫（分母・分子を約した）

→ 6099380351/1271808720＝㉔

疑問2への答え　これもメンヒェンが指摘した．a/b が $a^2-1=nb^2=t$ を満たせば，a/b に次々の係数を掛けた級数になる．これをガウスの補正法と呼ぶ．

$$\sqrt{n}=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{nb^2}{a^2}}=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{1+1/t}}=\frac{a}{b}\left(1-\frac{1}{2t}+\frac{3}{8tt}-\frac{5}{16t^3}\cdots\right)$$

特に分母の b が，小さな因数に分解されるときに，非常に有効である．

ガウスの補正法の実際をお目にかけよう．

	1＝	1	
	1/16＝	0, 6875	
	4/5 ＝	0, 8	
	4/9 ＝	0, 4444444444 4444444444 4444444444 4444444444 444444	
	22/49＝	0, 4489795918 3673469387 7551020408 1632653061 224490	
	5/13＝	0, 3846153846 1538461538 4615384615 3846153846 153846	
	7/47 ＝	0, 1489361702 1276595744 6808510638 2978723404 255319	
	52/59＝	0. 8813559322 0338983050 8474576271 1864406779 661017	
→	$F=a/b$ ＝	4, 7958315233 1271954166 1893936377 4766381535 739116	
	$-(a/b)/2t$＝	－ 6 4455872214 7827181581 662980	*
		59 7438064162 6939199954 076136	
	$+3(a/b)/8tt$＝	＋ 12 994283	**
	√23＝	4, 7958315233 1271954159 7438064162 6939199967 070419	

⇨	$F=a/b$ ＝	4, 7958315233 1271954166 1893936377 4766381535 739116	
	÷46) ＝	0, 1042572070 2853738134 0475955138 6407964815 994329	
	÷100)＝	10425720 7028537381 3404759551 3864079648 159943	
	÷64) ＝	・ 162901 8859820896 5834449367 9904126244 502499	
	÷81) ＝	・ 2011 1343948406 1306598140 3455606496 645710	
	÷49) ＝	・ ・ 41 0435590788 7985848941 6397053193 813178	
	÷49) ＝	・ ・ 8376236546 6081343855 9518307208 037004	
	÷13) ＝	・ ・ ・ 644325888 2006257219 6886023631 387462	
	÷13) ＝	・ ・ ・ 49563529 6815865939 9760463356 260574	
	÷47) ＝	・ ・ ・ 1054543 1885443956 1697031135 239587	
	÷47) ＝	・ ・ ・ ・ 22437 0891179658 6419085768 834885	
	÷59) ＝	・ ・ ・ ・ 380 2896460672 1803713318 115846	
	÷59) ＝	・ ・ ・ ・ ・ 6 4455872214 7827181581 662980	*
	÷92) ＝	・ ・ ・ ・ ・ ・ 700607306 6824208495 452858	
	÷100)＝	・ ・ ・ ・ ・ ・ 7006073 0668242084 954529	
	÷64) ＝	・ ・ ・ ・ ・ ・ 109469 8916691282 577415	
	÷27) ＝	・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ 4054 4404321899 354719	
	÷49) ＝	・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ 82 7436822895 905198	
	÷49) ＝	・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ 1 6886465773 385820	
	÷13) ＝	・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ 1298958905 645063	
	÷13) ＝	・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ 99919915 818851	
	÷47) ＝	・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ 2125955 655720	
	÷47) ＝	・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ 45233 099058	
	÷59) ＝	・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ 766 662696	
	÷59) ＝	・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ 12 994283	**

彼の$\sqrt{23}$の計算の紙片は見当たらないので，代わりに上半は彼が$\sqrt{2}$や$\sqrt{5}$でなした計算を模倣した．下半は［9］メンヒェンの計算例（全集 X-2, S.17-18)を参考にして，私が計算を試みた．ガウスの「$\sqrt{23}$との誤差は 20 桁目の数字が±7 以内である」という主張を裏付けるためならば，小数 28 桁で計算しても$\sqrt{23}$の値は求まる．しかしながら，ここでは見本として補正の実際，すなわち２回目の補正までが見られるようにするため，小数 46 桁までの数値を用いた．

→ $F=a/b$ と書いた行までは，D.A.に書かれた計算例と同じであり，私のはただ桁数を増やしたに過ぎない．彼の言う通り，21～27桁の数値が 1893936 なることが裏付けられている．補正項のための計算は，⇨ $F=a/b$ と書いた行から下の半分である．分母 b が小さな数の因数 16•9•5•49•13•47•59 に分解されたので，$n=17$ と共に次々に割っていく．ガウスは２桁の数値による割り算ができた．それに倣って因数を幾つかまとめて割った．下半の＊の所，＊＊の所にできた補正項を，上半の＊の所で引いたり，＊＊の所で足したり，修正する．

２度の補正で小数 46 桁までの$\sqrt{23}$の精密な平方根が得られた．上述のガウスの主張はすべて確かめられた．ガウスの計算は数値が整然と並んでいて，印刷されたノートと見紛うばかりである．

§１５．円周１７等分

「1796年３月30日の朝，十九歳の青年ガウスが目ざめて臥床から起き出でようとする刹那に正十七角形の作図法に思い付いた．」で始まる［１］史談の印象的な文章は，多くの青年に感銘を与えた．彼の「発見の歴史」の詳細は同書７～19頁に譲り，後文に必要な事項をまとめる．ここで（幾何学的）作図法とは，平方根しか含まないことを言う．具体的には方程式 $x^{17}-1=0$ の根が，平方根の積み重ねによって表されることを言う．複素数となる根の実部は余弦で表される．$\phi=360°/17$ とおけば，$\cos k\phi$（$k=1, 2, \cdots, 8$）が実部である．ガウスは

$$\cos\phi+\cos 4\phi=a,\quad \cos 2\phi+\cos 8\phi=b,\quad a+b=e$$

と置いたが，e は後に示すように二次方程式の根で，$(-1+\sqrt{17})/4$ に等しい．

ガウスは［6］シュルツェの数表の下巻の巻末に，円周１７等分の「計算のまとめ」を記入した．それは

［14］Karin Reich, *Carl Friedrich Gauss 1777-1855*, 2. Aufl., Moos, 1985.

の58頁に，写真版で採録されたので，ガウスの筆跡を見ることができる．これを活字化して次に掲げる．右方の［　］の中に，私が正しい値を補った．

$\sqrt{17}$	$=4,1231056256\ 1766054982$	$=\mathrm{A}$	[⋯1766054982 1⋯]
$\sqrt{2(17-\sqrt{17})}$	$=5,0748190853\ 2360175$	$=\mathrm{B}$	[⋯2360184868 0⋯]
$\sqrt{2(17+\sqrt{17})}$	$=6,4997085512\ 533037807$	$=\mathrm{C}$	[⋯5330378068 0⋯]
$\sqrt{(68+12\sqrt{17}+4\sqrt{2(17-\sqrt{17})}+8\sqrt{2(17+\sqrt{17})})}=$	$13,7758561352\ 3648$	$=\mathrm{D}$	[⋯3648715365 1⋯]
$\sqrt{(68+12\sqrt{17}-4\sqrt{2(17-\sqrt{17})}-8\sqrt{2(17+\sqrt{17})})}=$		E	[6,7216309595 2843047466 7⋯]
$\sqrt{(68+12\sqrt{17}-4\sqrt{2(17-\sqrt{17})}+8\sqrt{2(17-\sqrt{17})})}=$ [−] [+]		F	[5,7552107667 8896904748 4⋯] Ｆの符号の誤りを訂正すべきである.
$\sqrt{(68-12\sqrt{17}+4\sqrt{2(17+\sqrt{17})}-8\sqrt{2(17-\sqrt{17})})}=$		G	[1,9806599948 0286210364 4⋯]

$16\cos\frac{1}{17}$ Periph.	$=-1+\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{E}=$	$16\cdot 0,9324722294\ 043558550$	[⋯0435580457 3⋯]
$16\cos\frac{2}{17}$ Periph.	$=-1+\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{D}=$	$16\cdot 0,7390089172\ 20659104$	[⋯2065911592 4⋯]
$16\cos\frac{3}{17}$ Periph.	$=-1-\mathrm{A}+\mathrm{C}+\mathrm{F}=$	$16\cdot 0,4457383557\ 76540$	[⋯7653826739 6⋯]
$16\cos\frac{4}{17}$ Periph.	$=-1+\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{E}=$	$16\cdot 0,0922683594\ 633019605$	[⋯6330199523 9⋯]
$16\cos\frac{5}{17}$ Periph.	$=-1-\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{F}=$	$-16\cdot 0,2736629900\ 720846$	[⋯7208286353 9⋯]
$16\cos\frac{6}{17}$ Periph.	$=-1-\mathrm{A}-\mathrm{C}+\mathrm{G}=$	$-16\cdot 0,6026346363\ 79255$	[⋯7925638917 8⋯]
$16\cos\frac{7}{17}$ Periph.	$=-1-\mathrm{A}-\mathrm{C}-\mathrm{G}=$	$-16\cdot 0,8502171357\ 2961321$	[⋯2961415213 4⋯]
$16\cos\frac{8}{17}$ Periph.	$=-1+\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{D}=$	$-16\cdot 0,9829730996\ 8390179115$	[⋯8390177828 1⋯]

彼の方法は，先ず $\mathrm{A}=\sqrt{17}$，$\mathrm{B}=\sqrt{(2(17-\sqrt{17}))}$ 等の部品を作っておき，

$$-1+\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{E}=16\cdot\cos\phi,\quad -1+\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{D}=16\cdot\cos 2\phi,\ \cdots$$

のように，部品の組み合わせで根の実部を表す，と言う甚だ巧妙なやり方である．Ｅ，Ｆ，Ｇ などの数値は，どこか別の場所で計算しておいたのであろう．この一覧表には記入されていない．［１］史談 11 頁に引用された式は，正に

$$\cos\phi=(-1+\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{E})/16$$

であって，他人に手紙を出す際（引用された手紙は 1819 年），ガウスはシュルツェの数表を開いて，秘蔵の式や数値を書き写したと思われる．

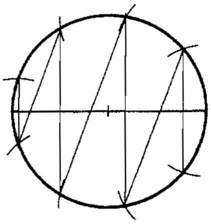
この「計算のまとめ」は，シュルツェの数表に麗々しく書かれているので，私たちには決定版と思われるが，見れば精粗混淆であって，20 桁正しいのもあれば，辛うじて 14 桁正しいのもある．これは恐らく［10］D．A．の第７章，円分論 354節の例題の基礎になった計算であろう．同所に示された余弦は小数 10 位までであるから，これで十分である．なお同所には，根の虚部（$\pm\sin k\phi$ に虚数 $i=\sqrt{-1}$ を掛けたもの）も書かれている．

§16．円周17等分（続）

ガウスにおいて著しいのは，同じ数値を全く別の経路で計算して，その一致を確かめる例である．その適例は小紙片Math21-(23)ウラである．

$$\mathrm{Cosin.}\,\frac{180^\circ}{17}\ \left[10^\circ 35'\frac{5}{7}\right] =$$

$$\frac{1}{16}\left\{\begin{array}{lrr} 1 = & & +1 \\ -\sqrt{17} = & -4,1231056256 & \\ +\sqrt{2(17-\sqrt{17})} = & & +\ 5,0748190853 \\ +\sqrt{[68+12\sqrt{17}+4\sqrt{2(17-\sqrt{17})}+8\sqrt{2(17+\sqrt{17})}]} = & & +13,7758561351 \\ \hline & -4,1231056256 & +19,8506752204 \\ & & -\ 4,1231056256 \\ \hline & & +15,7275695948 \end{array}\right.$$



$$16\,)\,0,9829730994 \quad \leftarrow$$

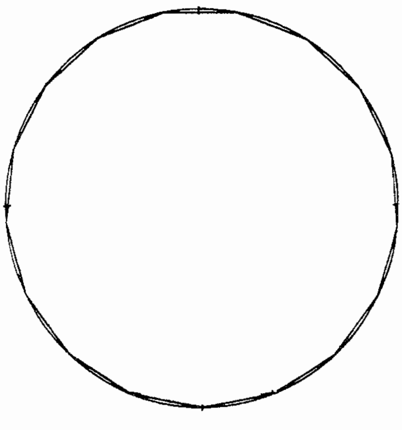
die Tafeln geben 0,9829731 ⇦

←印までは，前節と同様に根号の式を計算する．⇦印「数表は…を与える」は，［6］シュルツェ下巻の三角関数表から比例部分を含め cos(10°35'+(35/17)")を求めたものである．彼はこの二つの数値を見比べて一致を確かめている．

$\sqrt{17}$ を積み重ねた値 → 0,9829731
三角関数表の余弦の値 → 0,9829731

なおこの小紙片に描かれた図は，正17角形ではなく正9角形である．円周等分を概念的に描いた図であろう．因みに［14］K.ライヒの本に掲げられた正17角形の図は，外接した円と殆ど区別できない．

ガウスの生まれ故郷ブラウンシュヴァイクに彼の銅像がある．台座の裏側に，彼の業績を讃えるため正17角形の図が描かれていると言う．私は慌ただしい旅行の中で，迂闊にも台座の図を見逃してしまった．どんな図であろうか．



§１７．円周１７等分（参）

(17)97年９月１日付け（日付け入りは希有）と「計算のまとめ」の表題を持つ一連の小紙片 Math24-(31)～(35)は，円周１７等分の計算であることは分かるが，その内容把握に時間が掛かった．

Sammlung von Rechnungen		1. Sept. 97
$\sin. 5^\circ 17'30''\frac{15}{17}.\left(\cos\frac{4}{17}\cdot 2\pi\right)$	482746 38050 .15	216885 .15
	241373 19025	1084425
09222.57641.83181		
4.25952.68867,65	724119 57075 :17	3253275 :17
11257,01	42595 26886,7,65	191369,12 :17
−2,18		11257,01
	113..95 : 4913	
09226.83594.63303,48	10735	
	909	
	4177	

$\phi=(360/17)^\circ$ と置いて，

$$\cos 4\phi=\sin(\phi/4)=\sin[5^\circ 17'30''+(150/17)'']=\sin(g+h)$$

を正弦の加法定理によって計算しようとする意図，h が小さい値なので，$\cos h$ や $\sin h$ を級数展開する意図も分かる．その計算のためにはラヂアン単位の

$10''=0{,}00004\ 84813\ 68110\ 95\cdots$，$h=15(10'')/17=0{,}00004\ 27776\ 77744\ 959\cdots$，

$h^2=0{,}00000\ 00018\ 29929\ 713\cdots$，$h^3=0{,}00000\ 00000\ 00078\ 280\cdots$

などを用いて，

$$\sin(g+h)=\sin g\cdot\cos h+\cos g\cdot\sin h$$
$$=\sin g-\frac{h^2}{2}\cdot\sin g+h\cdot\cos g-\frac{h^3}{6}\cdot\cos g$$

と置くであろう．

ところがガウスのは全く違う．すなわち 15 を一般化して k とおくとき，

$$h=\frac{k\cdot 10''}{17},\quad \frac{h^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{k\cdot 10''}{17}\right)^2=\frac{k}{17}\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{17-k}{2\cdot 17}\right]\cdot(10'')^2,$$

$$\frac{h^3}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{k\cdot 10''}{17}\right)^3=\frac{k}{17^2}\cdot\left[\frac{k-17}{2}+\frac{867-51k+k^2}{102}\right]\cdot(10'')^3.$$

のように変形する．彼は $(867-51k+k^2)=(34-k)(17-k)$ と考えたが誤り，分解不能である．上の式は訂正してある．訂正も含めて，級数公式は次のようになる：

$$\sin(g+h)=\sin g+\frac{k}{17}\left[10''\cdot\cos g-(10'')^2\cdot\frac{\sin g}{2}\right]$$

$$+\frac{k}{17^2}\cdot\frac{17-k}{2}\cdot[(10'')^2\cdot\sin g+(10'')^3\cdot\cos g]-\frac{k}{17^3}\cdot\frac{867-51k+k^2}{6}\cdot(10'')^3\cdot\cos g$$

引用部分のうち右側の 42595…や 1125…等は左側の級数の項の計算であり，左側の級数に組み込まれる．こうして

$$\cos 4\phi=0,09225\ 83594\ 63303\ 48=\sin(\phi/4)$$

が得られた．

ところで，$\sin g=\sin(5°17'30'')$ や $\cos g=\cos(5°17'30'')$ などは三角関数表から求めなくてはならない．昔(1600 頃)，ピチスクスが計算した 10"刻みで，15 桁の三角関数表がある．さらに [12] ダニングトンのガウス伝の巻末には，ガウスがゲッチンゲン図書館から借りだした図書の目録（邦訳では削除された）が載っていて，その1797年 8 月21日に， Pitiscus, *Tablae trigonometricae* を借りだしたことが記録されている．上記の小紙片の日付けを見よ．その十日前！彼がピチスクスの 15 桁の正弦表を参照したことが実証された．

ゲッチンゲンから帰国後にこのことを知った私は，ぜひピチスクスの三角関数表を見たいと思って，東京天文台の友人に尋ねたら，

① 天文計算では昔から，15桁位の三角関数表（ピチスクスに類似の）はよく使われていた．

② 東京天文台の古い図書を探しても，ピチスクスの数表はない．恐らく日本中を探してもないだろう．

とのこと．（日本に居て西洋数学史を研究することの不利を思い知らされた．）

この紙片の計算で，$\cos 4\phi$ が得られた．ガウスはこの紙片と同様な計算を，彼はあと 7 枚の紙片に残した．そのうち $\cos\phi$ は 0,93247 22294 04353 34 となる．§15で述べたように，彼は

$$\cos\phi+\cos 4\phi=a,\qquad \cos 2\phi+\cos 8\phi=b,\qquad a+b=e$$

と置いた．e は $xx-{}^1\!/_2x-1=0$ の根で，$(\sqrt{17}-1)/4$ となる筈である．また

$$a-b=(\sqrt{(34-2\sqrt{17})})/4$$

となる筈である．次の小紙片は，上で引用した部分の続きに相当する．彼は$\sqrt{17}$ や$\sqrt{(34-2\sqrt{17})}$ を別の場所（§15参照）で計算済みなので，ここで得た $a+b$ や $a-b$ の値と比べて，Deberet esse（トナルベキデアラウ）などと書いた．

$\cos\phi=$	93247.22294.04353.34	+.49	
$\cos 4\phi=$	09226.83594.63303.48	+.48	
$a=$	1,02474.05888.67656.82		(Deb. 57.79
$-b=$	24396.41824.63242.81		$=-\cos\frac{2}{17}\ -\cos\frac{8}{17}$
			(Deb. esse 42,65)
$a+b=$	0,78077.64064.04414.01		
	Deberet esse... 15.14		$=\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)$
$a-b=$	1,26870.47713.30899.63		
	D. esse 900.44		

§15で引用したシュルツェ下巻末の計算が，AやBなどの部品から順々に $\cos\phi$ などを求めて行ったのに対して，ここでの計算は逆の順序である．$\cos\phi$ などから数値を次々にまとめて行って，$\sqrt{(34-2\sqrt{17})}$ や $\sqrt{17}$ に至り，計算済みの $\sqrt{17}$ などの数値によって検算する意図をもっている．

§１８．ガウスの心の奥

これまでに紹介しただけでも，ガウスによる円周１７等分の計算は三種類もあった（まだ他にもある）．全く別の経路で計算した数値が，例えば７桁一致することは，偶然にしても１千万分の１の確率でしか生じない．普通の人がこの一致を見れば，三角関数と平方根の積み重ねという全く別の経路で得たにも拘わらず，同一の数学的対象を求めたものと判断するに違いない．しかしガウスの立場では，これは数値的な確認がなされただけであって，証明ではない．

ガウスの身にもなって見よ．理論の上では同一対象についての，二側面からの追求だから，確かに一致する筈だ．一致しなければならない．しかしそれを支える理論は，いま自分の目の前に姿を現したばかりだ．ツィンマーマン教授は「ユークリッド以来の大発見だ」と言って，イェーナ学術報知に記事を載せてくれた．教授は本当に自分の理論を理解してくれたのだろうか．執筆予定の円分論を隅から隅まで辿らなければ，理論を理解したことにはならない．一カ所でも綻びがあれば，全理論は砂上の楼閣で，脆くも崩れるであろう．私はガウスが陥っていたのは底知れぬ不安であったと想像する．７桁の一致ではまだ不安だ，では 15 桁の一致なら安心できるか．際限もない計算こそが不安を解消してくれそうだ．私は，ガウスの心の奥をこのように推測する．

或る人は「計算はガウスの趣味だ」と言う．その側面もあるだろう．§12で述べた 10037 の自然対数の計算などは，対数表の穴埋め作業に過ぎない．何通りにも計算する必要のないことで，趣味と言ってもよい．

もっと後年のことだが，ガウスはゲッチンゲン天文台を就職先に選んだ．天文観測すれば，それに伴う膨大な計算がある．計算が平気な彼は，覚悟の上である．ところで3月にゲッチンゲンを訪れた私は，日本で余り知られていない事実を摑んだ．この季節は天候不良で，天気予報に，晴れ，曇り，雨，霙，雪が表示され，実際一日のうちに全部が起こる．当地の方に尋ねたら，「一年のうち星の見える夜は，実際には少ない」とのこと．これで分かった！ 学生時代をゲッチンゲンで過ごしたガウスは，天文台を就職先に選べば星を見ない日が多く，義務的な計算から開放される．自分の勉強の時間，計算の時間がタップリ取れると考えたであろう．前回§6で，ガウスが素数の分布に異常な執念を燃やしたことを述べた．分布法則を確かめるには，当時の素数表を先の方まで自分で埋めなければならない．具体的には，任意の数が素数か合成数かを試すことである．［10］整数論の応用！ 彼は晩年に至るまで，暇さえあればこの計算をしていた，と言われる．

§19．数値の素性

［1］史談の筆者は 44 頁で，ガウスの数値に対する異常なる記憶力に触れて，$2a^4=4,81048$ なる数値を得て「その自然対数が 1,5708 で，それが$\pi/2$であろうと推測するなどは驚くべきことと言わねばなるまい．」とある．実は 4,81048 の素性は彼にとって因縁が深く，驚くには及ばない．

ガウスは，いわゆる「代数学の基本定理」を証明した学位論文(1799)：

［15］*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationarem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.*, in *Werke* Ⅲ.

の前半で先行研究を批判した中で，オイラーの論文(1749[51])：

［16］*Recherches sur les racines imaginaires des équations*, Opera Omnia, Ⅵ, No. 170.

も槍玉に挙げた．オイラーは根の形を具体的に決めることに熱心である．ガウスは，オイラーが代数方程式の根の存在を暗黙の前提としている点を批判した．この論文でオイラーは，一般に虚なる量 $a+b\sqrt{-1}$ の虚なる指数 $m+n\sqrt{-1}$ 乗を求めることを問題としている．

96. En général donc, quelques quantités que soient a et b, donnant à c la valeur positive de $\sqrt{(aa+bb)}$, et prenant pour φ un tel angle que $\sin\varphi = \frac{b}{c}$ et $\cos\varphi = \frac{a}{c}$, puisque pour φ on peut également prendre en général l'angle $2\lambda\pi+\varphi$, où λ marque un nombre entier quelconque affirmatif ou négatif, on aura

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$$
$$= c^m e^{-2\lambda n\pi - n\varphi}\left(\cos(2\lambda m\pi + m\varphi + nlc) + \sqrt{-1}\cdot\sin(2\lambda m\pi + m\varphi + nlc)\right),$$

d'où l'on trouvera toutes les valeurs possibles, que cette formule

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$$

renferme, en donnant à λ successivement toutes les valeurs 0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4 etc., où il suffit de prendre pour c^m la seule valeur réelle et positive, qui y est renfermée.

ガウスも興味をもち，［2］ライステ 111頁の “$a^{\sqrt{-1}}=\cos la+\sqrt{-1}\sin la$” から始まる記述は，オイラー論文の一部分の丸写しに近い． la は $\ln a$ を表す．特にオイラーの式で $a=0$，$m=0$，$b=1$，$n=1$ とおいた場合には，「愛の愛情」$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ が出てきて，実数 $e^{-\pi/2}=0,2078795763507$ に等しい．

97. Si $a=0$, $m=0$ et $b=1$, il sera $c=1$ et $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, d'où l'on tirera cette transformation

$$(\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda n\pi - \frac{1}{2}n\pi}$$

ou bien

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda\pi - \frac{1}{2}\pi},$$

qui est d'autant plus remarquable, qu'elle est réelle, et qu'elle renferme même une infinité de valeurs réelles différentes. Car posant $\lambda=0$, on aura en nombres

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = 0{,}2078795763507.$$

［1］史談の著者は 56 頁において，$A=e^{-\pi}$ の近似値の 14 位(17 位は誤り)までの値 0,04321391826377 を，ガウスは「予備的の概算(!)に由って」求めた，と述べている．「予備的の概算」の実態は，オイラーの式の両辺を自乗することによって得たのである．また上記の「ガウスの異常なる記憶力」云々も，両辺の逆数を取れば，$e^{\pi/2}=1/e^{-\pi/2}=1/0,2078796=4,810477$ となって得られる．すべてがガウスの手の内にあったのだ．

史談は，どうもガウスを神秘化し過ぎる．またガウスがオイラーから多くを学んだ事実も過小評価する．しかし史談執筆の当時には，私が前回と今回の報告で示したような原資料が入手しにくかった事情を考慮すれば，止むを得ない．

いま少し補足する．［1］史談 33 頁にも紹介された『ガウス日記』：

［17］F. Klein, *Das Tagebuch (Notizenjournal) von C. F. Gauss*, mit Erläuterungen von Klein und L. Schlesinger *et al.*, Gauss'sche *Werke*, X-1. K-R. Biermannn, *Mathematische Tagebuch von C. F. Gauss*, mit Deutsche Übertragen von Elisabeth Schumann, 4. Auflage, Ostwalds Klassikel, 1979, Teubner.　J. J. Gray, A commentary on Gauss's mathematical diary, 1796-1814, with an English translation, *Expositiones mathematicae*, *2*, 97-130.

を見ると，第 24 項に

ツイデニ $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ ヲ展開スル．(1796年8月)14日．

とあり，シュレジンガーは「ライステ 111頁を参照」と言う．これからガウスが「愛の愛情」に興味をもった時期が分かる．彼が「$A=e^{-\pi}=0,04321391\cdots$の計算」を行なったのは 1797-98 年頃と推定され，$e^{\pi/2}=4,810477$ は『日記』第 63 項(1797年3月29日)に出てくる．ライステに記入した一年後になっても，オイラーに基づくあの印象的な数値を，彼が忘れてしまったとは考えにくい．

これまでしばしば，ガウスは2桁×2桁の計算ができる，と述べたことがある．シューマッハ(Ch. Schumach)あての手紙に，「私の記憶は読んだ瞬間，何か興味と結び付かなければ跡形もなく消える．…」(1841)，「50年にわたる高等算術への従事から，数値計算の完熟がやって来た．計算の際の数と数の関係が，記憶の内に無意識に係留する．13×29＝377，19×53＝1007　等の積は，考えないでも自然に見えてくる．…」とある(1842)．この手紙に対するガッレの解釈は，$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ の掛け算公式の応用であり，上例は，$13\times29=390-13=377$，$19\times53=1060-13=1007$ の形である．ガッレはさらに，ガウスが2倍，5倍に長けていて，$13\times58=2\times377=754$，$265\times19=5\times1007=5035$ なども即座に出来た．と言う．以上はガッレの論文からの引用：

［18］A. C. Galle, *C. F. Gauss als Zahlenrechner*, Nachrichten d. Kgl. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, 1918.

デデキントはガウス晩年の講義を聴いた思い出を語る，「例えば，数を数えるとき，指を折ることさえ憚らないで，アインス，ツヴァイ，ドライの代わりに，ブラウンシュヴァイク訛りで，アイネ，ツヴァイエ，ドライエと言った．…」

［19］R. Dedekind, *Gauss in seiner Vorlesung* …, Festschrift … d. Kgl. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, 1901.

付記

前回（第 14 回数学史シンポジウム，2003）報告書 38-40 頁，杉本の講演記録§7で，ガウスが巧妙に常用対数Ｌ3，Ｌ11，Ｌ37 を求めたことを紹介して，では「Ｌ2などはどう求めるのだろうか？」を宿題として残した．以下に私の解答を与える．

Ｌ3，Ｌ11 を既知として，$2^2 \cdot 1000 = 4000 \fallingdotseq 3993 = 3 \cdot 11^3$ に注目すると，

$$2 \cdot L2 = L3 + 3 \cdot L11 - 3 - L(3993/4000)$$

$$= L3 + 3 \cdot L11 - 3 + (1/K) \cdot (7/4000 + 7^2/2 \cdot 4000^2 + 7^3/3 \cdot 4000^3)$$

となり，級数は3項とれば十分で，Ｌ2 は 11 桁求まる．

Ｌ3，Ｌ11，Ｌ2 を既知として，$7^4 = 2401 \fallingdotseq 2400 = 2^3 \cdot 300$ に注目すると，

$$4 \cdot L7 = 3 \cdot L2 + L3 + 2 + L(2401/2400)$$

$$= 3 \cdot L2 + L3 + 2 + (1/K) \cdot (1/2400 - 1/2 \cdot 2400^2)$$

であり，級数は2項とれば十分で，Ｌ7 は 11 桁求まる．ただしここに書いたのは私の考えであり，ガウスがどのように計算したかは分からない．

§13で述べたネイピアが初めて「常用対数表」を作ったときは，10 の平方根，四乗根，八乗根，$2n$ 乗根などをずっと先の方まで求めて，或る数の $2m$ 乗根を挟んで補間する甚だ迂遠な方法であった．これに対して自然対数の級数展開を利用し，自然対数を求め，それに 1/K＝1/2,3025…＝0,43429…を掛けるる方法は，オイラーの工夫である．ガウスは『算術と代数』の著者ライステを通じてオイラーの方法を学んだわけである．

ライステ本文を見ると，著者は予め2の自然対数 0,69314… を求めておき，後から 0,43429…を掛けるように教えている（桁数の長い数と長い数の掛け算が必要になる）．少年ガウスの方法は，予め 0,43429… を置いておき，これに直接桁数の小さな数（上例なら7）を掛けたり，（上例なら4）で割ったりする．このやり方のほうが計算はずっと楽である．彼の青年期以後の計算もみな，このように桁数の小さな数を掛けたり，割ったりする方法であった．計算の名手と雖も，可能な限り省力化を図っていたことに注目したい．

最近，久しく絶版であった，[12]ダニングトンの『ガウス伝』の改訂版が出た．

[12'] G. W. Dunnington, *Carl Friedrich Gauss, Titan of science*, with additional material by J. Gray, The Mathematical Association of America, 2004.

珍しい写真も多く掲載され，巻末に，ガウスの講義，ガウスの子孫，§17で取り上げた，ガウスがゲッチンゲン図書館から借りだした図書の目録などが見られ，非常に有用である．なぜアメリカ人ダニングトンがガウス研究に取り組んだのか，その経緯も解説されている．さらに，グレイによる『ガウス日記』の英訳と解説が付載されていて，ガウス研究の環境が整ったことになる．