ルベーグにおける測度・積分論の成立過程について

財団法人 土地総合研究所　理事 調査部長
山邊俊明

1．はじめに

20 世紀初頭にルベーグ（Henri Lebesgue , 1875 – 1941）が確立した測度･積分論は，ジョルダン測度及びリーマン積分を包括した，より一般的な理論体系である．

本稿においては，彼の学位論文『積分，長さ，面積（1902)』（以下，『論文』と略称）[1)] 及び『積分講義（第 1 版 1904)』（以下，『講義』と略称）[2)] を比較･検証することによって，その成立過程の一端について触れることとしたい．

2．『論文』と『講義』における構成の差異

『論文』の審査が 1902 年 6 月に行われており，『講義』執筆の基となった Collège de France における講義は，1902－1903 年に行われ，『講義』の序文には，1903 年 12 月 3 日の日付があることから，両者の間には，ほとんど時間的に懸隔がなかったと推定出来よう．しかしながら，両者において，全体的な構成及び個々の論理展開には，かなりの差異が認められるのである．

まず，両者の全体構成は，次の通りである．

『論文』

測度 → 積分の幾何学的構成 → 総和可能関数（fonction sommable）の導入 → 積分の解析的構成

『講義』

積分の有すべき条件 → 測度 → 可測関数 → 積分の解析的構成 → 積分の幾何学的構成

最大の差異は，積分を構築する上での幾何学的方法と解析的方法の順序である．両者においては，これら二つの方法の順序が逆転していることが分かる．

『論文』においては，まず，幾何学的な考察[3)] が行われている．即ち，

①関数 $y = f(x)$ と x 軸によって作られる平面集合 E が**ジョルダンの意味で可測**であることと $f(x)$ がリーマン**積分可能**であることが同値である（即ち，$f(x)$ のリーマン上積分が E の外拡度（étendue extérieure）であり，下積分が内拡度であるからである）ことを明らかにした上で，これを拡張，一般化して，

②E がルベーグの意味で**可測**であることを彼の意味で $f(x)$ が**積分可能**であると定義し，こうした $f(x)$ を**総和可能関数**（『講義』では，可測関数に置き換えられている）と呼んだ．

因みに，ここで注意すべきことは，ルベーグにおいては，完全加法的な測度及びこの測度に基づく積分が同時に構成されていることである．しかし，これが彼の測度･積分論の形成過程を追跡する上で，大きな障害となっていることは，否めない．

他方，リーマン積分の定式化は，1854 年，ジョルダンの測度概念の導入は，1893 年にそれぞれ独立して行われており，両者の関連性は，薄いものであると考えられる．

次に，$f(x)$ が総和可能であるための必要十分条件，即ち，「**任意の実数** $a,b\,(a \geq b)$ **に対して，** $a > f(x) > b$ **を満たす** x **の集合が可測**であること」を導き出すのである[4)]．

この考察は，『論文』の中で最も緊張して読まされる所の一つであり，現在の積分論においては，「天下り的」に行われている可測関数の取り扱いとは異なっている．即ち，可測関数を導入することの必然性が論理的に明確となっており，ルベーグの独自性が際立っている．

しかしながら，この考察の中には，やや強引な推論が一部入り込んでおり（これについては，後述する），こうしたためか，『講義』においては，このアプローチに代わって，後に紹介することとなる方法が使われている．ここには，論理的展開の揺るぎがない．こうしたことから，『講義』の方がより整理されており，記述も明晰であると言えよう．しかしながら，両者における可測関数の取り扱いは，本質的には，同一であると考えてよいと思われる．

『論文』においては，この後，総和可能関数について，積分が解析的に構成され，それが幾何学的に構成したものと同一であることが示される[5)]．

他方，『講義』においては，冒頭に単関数の概念が紹介され，これを承ける形で可測関数が導入される．この可測関数に対して，積分がまず解析的に構成された[6)]後に，幾何学的な構成が行われ[7)]，両者が一致することが示されるのである．結果としては，逆となったが，可測関数の導入の必然性が「間接的」に行われたことになる．しかしながら，この逆転によって，『論文』が持っていたインパクトは，薄められたと考えるのである．「『講義』の構成が再逆転していたとすれば」と思うのは筆者のみであろうか．

以下では，個別的に論理展開の差異を見ることとする．

3．測度の構築

『論文』においては，集合の可測性を判断するための基準として，「**外測度＝内測度**」方式に加えて，これと同値である基準が設定されている．即ち，「**集合** E **の点を区間の列** α **で覆い，** E **の補集合の点を区間の列** β **で覆って，** α **と** β **の共通部分の長さの和をいくらでも小さくすることが出来る時，** E **は可測である**」[8)]．この基準は，『論文』において数回使われており，甚だ有用なものである．しかしながら，『講義』においては，この基準によらなければ理解しがたい個所があるにもかかわらず，この基準についての言及がまったくない．この辺の事情は，不明である．

測度が完全加法性を有することについての証明は，両者において微妙に異なっている．

『論文』においては，加算無限個の可測集合の和が可測であること示した後に，その特別な場合として，互いに素な可測集合の和の測度が個々の集合の測度の和であることが証明される[9)]．しかしながら，その証明は，非常に分かりにくいものとなっている．一方，『講義』においては，逆に完全加法性を証明した後に，可測な加算無限個の集合の和を互いに素な集合の和へと変換することによって，これが可測であることを導き出しているのである[10)]．

論法としては，『論文』の方が自然であると言えようが，分かり易さにおいては，一部，『論文』と同様な記述が見られるものの，『講義』の方が遥かに優れていると考えられる．

4．『論文』における総和可能関数の導入

ルベーグは，『論文』において，「**すべての可測集合** E **に対して，** E **と同じ測度を有するボレルの意味で可測な集合（従って，ルベーグの意味で可測）** E_1 **及び** E_2 **が存在し，** E **は，** E_1 **に含まれ，** E_2 **を含むように出来る**」ことを証明している[11)]．

総和可能関数の導入に当たって，ルベーグは，この定理を援用しているのである[12)]．即ち，**平面集合** E に対して，「E が可測であれば，E は，ともにボレルの意味で可測であり，その測度が E の測度と等しい集合 E' に含まれ，E'' を含む」とした上で，「さらに，この結果をもたらした推論によれば，E' 及び E'' が y 軸に平行な線分によって形成され，x 軸上に底辺を持っていること，即ち，二つの関数 f_1 及び $f_2\ (f_1 \geq f_2)$ に対応していると仮定出来ることが証明される」と述べている．ここで，E には，関数 $f\ (f_1 \geq f \geq f_2)$ が対応していることは，明示的にではないが，当然のこととして想定されているものと考えられる．

しかしながら，この推論には重大な短絡があると考えられる．何となれば，平面集合の包含関係は，文字通り二次元で考えなければならないのであるが，ルベーグの推論には，この観点が脱落していることに注意しなければならない．平面集合である可測集合 E の包含関係は，y 軸上の上下関係（即ち，$f_1 \geq f \geq f_2$）だけで決まる訳ではなく，x 軸上の左右関係にも係わると考えられる．

即ち，この項の初めに記した定理を平面集合に当てはめた場合，y 軸上の上下関係だけで集合間の包含関係が決定される保証はないと考えられる．x 軸上の左右関係が係わった場合において，E', E'' を x 軸に平行に「伸び縮み」させることによって問題は，解決できるのであろうか．

『講義』においては，こうした問題に対して，本質的には同一であるがやや異なったアプローチがなされている．以下に，その概要を述べる．

5．『講義』における可測関数の幾何学的取り扱い

既に述べたように，『講義』においては，積分の幾何学的構成を行った後に，改めて，可測関数を考察の対象とすることの意義を明らかにしている[13)]．

その概略を述べよう．$f(x) \geq 0$とx軸で形成される集合$E(f)$が可測（即ち，積分可能）とし，その内で$y=\alpha-h$及び$y=\alpha$（$\alpha \geq 0$かつ$0 \leq h \leq \alpha$）の間に含まれる部分集合をEとする．こうした上で，$f(x) \geq \alpha$が成立しているxの値の集合$E[f(x) \geq \alpha]$について考察する．この時，この集合が可測でない，即ち，

$$m_e[E(f(x) \geq \alpha)] > m_i[E(f(x) \geq \alpha] + \varepsilon$$

であるとした時，矛盾が生ずることが示される（ここで，m_e, m_iは，それぞれ外測度，内測度を表わす）．従って，$f(x)$が可測である時にのみ，集合E及び$E(f(x) \geq \alpha)$が可測である．こうして，積分の幾何学的構成と関数の可測性が完全に即応することが示された．

関数によって定まる平面集合をx軸に平行する直線で切断し，その切り口について解析を行うのは，『論文』と同様であるが，叙述は，『講義』の方が遥かに明晰であると考えられるのである．

6．結論

これまで，『論文』及び『講義』の間における差異について述べてきた．ここでは，その総括として，ルベーグの測度・積分論の成立過程における両者の位置付けについて，簡単に述べることとしたい．

両者を比較すると，全体の構成については，明らかに『論文』の方が自然である．しかし，個々の推論においては，非常に読みにくいところが多々見受けられる．言わば，円空仏に対する時のように，荒削りな印象を抱かしめるのである．但し，それがためにかどうかは，分からないのであるが，読む人を引きずりこむような，一種不可解な「魅力」を有している．これに対して，『講義』は，その逆であると言えよう．一年足らずの間に理論展開の整序が行われ，『講義』が成立した．完全に調和がとれたものであり，これによって，ルベーグの測度·積分論は，ほぼ完成されたと言ってよいであろう．

こうしたことから，『論文』は，例えて言えば，正に測度·積分論の誕生における「産声」であったと位置付けて良いのではないかと考えるのである．そして，『講義』は，ほぼ一歳の誕生日を迎えた「赤子」とも位置付けられるのではないか．重大なことは，「産声」が見事なものであったことに加え，一年間の成長が格別に顕著であったことである．

注

1．Intégrale , longueur , aire, Ann. Mat. Pura Appl ., (3),**7**(1902), 231 – 359

2．Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gautier – Villars , 1904

3．『論文』 pp. 248 – 250

4．『論文』 pp.250 – 252

5．『論文』 pp.252 – 255

6．『講義』 pp.112 – 116

7．『講義』 pp.116 – 120

8．『論文』 p.238

9．『論文』 pp.238 – 239

10. 『講義』 pp.107 – 108

11. 『論文』 p.241

12. 『論文』 p.250

13. 『講義』 pp.118 - 119