デデキントの生涯 (1) *

赤堀庸子†

序

リヒャルト・デデキントといえば、数学専攻者にはよく知られた名前であろう。整数論、解析学の基礎を扱った教科書には必ずその名がのっているといってよい。

しかしその生涯はあまり「教科書的」とはいいがたい。偉大な数学者の人生といえば、まず若い頃に何か（問題解決した）論文を発表し、それが評価されて学界の中心に受け容れられ、名声を確立した後は後継者を多数育てていく、というあたりが標準的なところであろうが、デデキントの生涯はそれとはかなり異なる。

デデキントの通ったゲッティンゲン大学は、晩年から死後にかけてはドイツの数学の（世界の科学の）中心となったが、在学当時は数学者養成の機能は今ひとつであった。当時は科学の中心がアカデミーから大学に移行する過渡期であり、ベルリン大学が研究の最先端を担っていた。先輩のリーマンはベルリン大学に学びに行っている。存命中のほとんどにおいてベルリン大学が学界の中心を担っている時代に、彼は終生 Universität に勤めることもなく、Technische Hochschule で一生を終えた。

著作の出版の様子も変わっていて、まず 40 代はじめに大部の「代数的整数論」（その他集合論関連の著作）が発表されて、それから後論文執筆活動が晩年まで続くといった形になっている。そのようにして一生をかけて集合概念に基づいた数学の構築に取り組んでいく。

こうしたデデキントの人生について、一度振り返っておくことも無駄ではないと思われるので、本稿を起こした次第である。

初めに、デデキントの生涯について、要点を振り返っておこう。

1831 年にブラウンシュヴァイクに生まれる。ゲッティンゲン大学で 1850–58 年に数学を学ぶ。（1854 年からは、私講師として講義も行っていた。）当時のゲッティンゲンにはガウス（1777–1855）もいたが教育活動にはあまり熱心ではなく、私講師時代のディリクレ（1805–1859）の指導、リーマン（1826–1866) との親交が重要な影響を及ぼした。

1858 年チューリッヒ高等工業学校に就職。1862 年にブラウンシュヴァイク高等工業学校に赴任。以後同地（生地）で生涯を送る。

著作の発表は、主に人生の後半期に集中している。1871 年には整数論講義の第 2 版の付録にて、集合論的な概念に基づいた代数的整数論が発表された。翌 1872 年に『連続性と無理数』出版。こうした大きな著作を発表したあとの 1870 年代後半あたりから、論文執

---

*津田塾大学数学史シンポジウム. 2015.10.11

†erkym@mui.biglobe.ne.jp

筆量が増加してくる。また、若い数学者たちとの文通も始まる。（ウェーバー、カントル、リプシッツなど。）

1880年代からは、各アカデミーの（通信）会員に選ばれるようになる。1888年に『数とは何か、何であるべきか』出版。また、整数論講義も、版を重ねていく (1879, 1894)。名を知られるようになると同時に批判にもさらされることとなる。

1894年に工科大学を退職するが、教えることは続けていたらしい。論文執筆も活発に行っている。晩年はゲッティンゲン大学に数学の中心地が移り、仕事が受け入れられるようになっていく。1916年に没。

本編 (1) では、デデキントの前半生を振り返ることとし、それに大学制度についての確認を付け加えたい。また全体に先立って基本的な文献をいくつか確認しておきたい。

文献

まず全集 [5] である。これは、フリッケ (Robert Fricke, 1861–1930)、ネーター、オアの三人の共同編集になっている。このうちデデキント家から原稿（書簡を含む）を託されたのは、ブラウンシュヴァイク工科大学でのデデキントの後任（彼はゲッティンゲンで学位をとっていた）のフリッケであった。フリッケが1930年に亡くなったため、全集に伝記が書かれることはなかった。原稿の大部分はゲッティンゲン大学の図書館に、一部はネーターの亡命先のアメリカの図書館に収まることとなった。

この全集は現在では Web でみることが出来る。

伝記といえば、短いものながら DSB 所収のビールマンの記事 [1] がある。資料を駆使して書いてあるようである。これも Web で見ることが出来るようになった。

二次資料に一次資料をプラスした書物として重要なのが、デュガックの著書 [4] であろう。彼は解析学の基礎に関する数学史家であるが、デデキントの仕事を全体的に取り上げている。後半は資料集となっており、全集などにのらなかった書簡、草稿などが収められている。

もうひとつ、資料集としては、デデキント生誕150年を祝って編集された [8] がある。これは、親族（兄の孫にあたるイルゼ・デデキント）による小文、同僚 (Hans Zincke) の回想、家族への書簡、私講師時代の代数学講義とその解説、代数関数に関する論文、Dugac の論文などから成るものである。

一次資料を全部あげているときりがないが、もうひとつチューリッヒ時代の講義録 [6] が出版されていることを一言述べておきたい。

ゲッティンゲン以前

家族

リヒャルト・デデキント (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831–1916) [1]は、1831年10月6日に、北ドイツのブラウンシュヴァイク[2]に父 (Julius Levin Ulrich Dedekind, 1795–1872) 母 (Caroline Friedrich Marie Henriette, 1799–1882) の末子（第4子）として生まれた。

リヒャルトの父は法学者であり、コレギウム・カロリヌム (大学へいくための準備機関。詳細は後に述べる。) の教授、顧問弁護士でもあった。コレギウム・カロリヌムの教授であるのは母方祖父も同様であった。

イルゼ・デデキントは小文 [8] (pp.1–12.) でデデキントの両祖父の話を伝えている。それによると、父方祖父 (Johann Julius Wilhelm Dedekind) は医者、化学者であり、砂糖大根から砂糖をとることに関する研究を行ったという。不器用な人柄のため、研究が認められず、失意のうちに40代の若さで亡くなることとなった。残された妻子にはお金がなく、当時4才だったリヒャルトの父親も、極貧を味わう羽目になった。その後彼は苦学してゲッティンゲンで法学を修めたが、学資の負債が長らく影を落としていたという。残された講義録からは、彼の多様な学識が感じられるという。

母方祖父 (Johann Friedrich Ferdinand Emperius) の専門はよくわからないが、広い学識の持ち主だったらしい。(DSBの記述には帝国郵便局長であったとある。またダニングトン著『ガウスの生涯』では語学教授（ギリシャ語、ラテン語、英語および宗教）ヨハン・フェルディナント・フリードリヒ・エムペリウスの名が登場するが、これはデデキントの祖父のことと思われる。）イルゼは、1814年のパリにて彼が（ブラウンシュヴァイク博物館長として）ナポレオンに奪われた宝物を奪回したという話を紹介している。旅行が好きで、世界各地から手紙を書いているという。

4人きょうだいの長子（長姉）ユーリエ (Julie, 1825–1914) は、文学者（詩人）であり、生涯独身であった。1893年に地方の文学賞を貰っているようだ。第2子（次姉）マチルデ (Mathilde,?–1860) は、1860年に亡くなっている。リヒャルトが（ゲッティンゲンやチューリッヒから）家族にあてた手紙は、姉宛のものが多く、この死亡は寂しいものであったと思われる。

第3子（兄）アドルフ (Adolf,?–1909?) は、父と同じく法学の道に進んだ。ゲッティンゲン大学で法学を学び、ブラウンシュヴァイク上級地方裁判所の判事となった。きょうだいのうちアドルフだけが家庭を持った。(アドルフの孫がイルゼである。)

リヒャルトは生涯結婚せず、1862年以降はブラウンシュヴァイクでこの家族とともに過ごしたのであった。

---

[1]正式な発音は「デーデキント」と長音にするようであるが、ここでは慣用を考えて「デデキント」のままにした。

[2]英語、フランス語表記によれば Brunswick となる。地名の現地表記と英語表記が異なることはしばしばあることである。日本語によるドイツ地名の表記は現地読み優先なので、英語書籍中の Brunswick も、「ブラウンシュヴァイク」と訳してよいのではないかと思う。

ゲッティンゲン以前

大学入学前のデデキントについては、学位取得時にゲッティンゲンに提出された（ラテン語の）文章によってみることが出来る。([4], pp.179–180. ここでは、Dugac, Biermann の訳を参考にした。)

7 才から 16 才までギムナジウム (Martino-Catharineum) で学んだ。[3]はじめは物理と化学を学び、数学は補助的な科目としか思っていなかったが、次第に物理には秩序と厳密に論理的な構造が欠けていると思うようになり、数学を勉強することに決意したらしい。

1848–1850 年に、コレギウム・カロリヌム [4]で学ぶ。ここでは、解析幾何学、代数解析、微分積分、高等力学、そのほか自然科学を学んだ。

ゲッティンゲン

ゲッティンゲン前期 (1850–54)

1850 年の復活祭時にデデキントはゲッティンゲン大学に登録した。当時のゲッティンゲン大学はまだ最先端の教育を受けられるところではなかった。主たる教育活動は、ギムナジウムの教員を養成することに集中しており、シュテルンやウルリッヒといった今日では名の知られていない教授がその中心にいた。[5]

ゲッティンゲン時代に関しては、デデキントが晩年に書いた回想が [7] (pp.82–83.) にある。

それによると、シュテルンの微積分、クイントゥスの地学、熱学、ガウスの最小二乗法、ゴルドシュミットの天文学などに出席したらしい。(数学・物理ゼミナールは部分的に参加しただけだった。) 特に感銘を受けたのはウェーバーの実験物理学であったと述べている。これら 2 年間の講義は、ギムナジウムの教員になるには十分な水準であった。(1852 年にデデキントは学位論文 [2] を提出している。)

しかし、当時のゲッティンゲンには、新幾何学、高等数論、高等代数、楕円関数、数理物理などの講義が欠けており、(それらは、当時からベルリン大学でシュタイナー、ヤコビ、ディリクレが行っていたものであった。) 1852–54 年まで、それらの内容を必死で勉強しなければならなかった、とデデキントは述べている。

1854 年 6 月に、デデキントは教授資格講演「数学に新しい関数を導入することについて」[3] を行った。この講義は扱われている数学の水準こそ高くないものの、後の仕事「連続性と無理数」「数とは何か、何であるべきか」の起点とみられるものである。

1854–55 の冬学期に、デデキントは私講師としてまず幾何学と確率の講義を行った。幾何学においては新しい解析的な方法と総合的な方法とを並立して教えたという。

---

[3]標準的なギムナジウムは初等教育終了後に 9 年間学ぶものであるが、中にはプロギムナジウムといって、早く修了するものもあったらしい。当地のギムナジウムがそれにあてはまるということであろう。7 才から学んでいるということは、初等教育も併設されていたのであろう。

[4]すでに述べたように、大学へ進学するための準備機関である。当地のギムナジウムの修了年限が早いため、このような施設が必要だったのであろう。この施設は後にブラウンシュヴァイク工科大学となる。詳細は後に述べる。

[5]1850 年に設立された数学・物理ゼミナールも、ギムナジウムの教員養成に向けてのものであった。

ゲッティンゲン後期 (1854–58)

1855年2月にガウスが亡くなり、後任としてディリクレが1855年秋にゲッティンゲンに赴任する。これがデデキントに決定的な影響を与えた。回想 [7] によると、デデキントはすでにディリクレの著作を徹底的に読み込んでいたものの、強烈な口頭の講義に出席することに、大いなる喜びを感じたという。ディリクレの講義のすべて（数論、ポテンシャル、定積分、偏微分方程式）に出席した上、日々個人的にも親交を深めたことで、自分は全く新しい人間になった、とデデキントは述べている。

またこの時期、デデキントはリーマンのアーベル関数、楕円関数の講義（1855-56年冬学期、1856年夏学期）に出席した。リーマンとの親交を深めるようになったのはこれがきっかけらしい。

1856/57年冬学期と1857/5年冬学期には、代数学講義が行われる。出席者は各2名で、前者は Hans Zincke (Sommer) (1837–1922), Paul Bachmann (1837–1920)。後者は Eduard Selling , Arthur Auwers である。[6]

1854年から58年の4年間は、デデキントにとって、「先生や先輩に囲まれた充実した時間」であったといってよい。イデアルの着想もこの時期にさかのぼるようであるし、「切断」の発想もこの時期の直後であることを考えると、この時期はデデキントの数学思想にとってもっとも重要な時期であるといえる。

1858年復活祭時にデデキントはチューリッヒ高等工業学校に教授として赴任することとなる。学長自らがラーベの後任を探しにゲッティンゲン大学に来たのであった。リーマンとデデキントが推薦され、授業を聴講した結果デデキントが選ばれたのであった。

このとき以来デデキントは「大学 (Universität)」を去ることとなる。(1859年秋にはリーマンのベルリン旅行について行き、ベルリンの数学者たちと交流しているが。)

ちなみに、その後のゲッティンゲン大学においては、ディリクレが1859年に没し、リーマンが後任となる。リーマンの後任にクレプシュ（ヤコビの弟子）が赴任したことで、ゲッティンゲンの数学者養成が初めて軌道にのることになる。

チューリッヒ高等工業学校

Technische Hochschule （高等工業学校）とは、技術教育をになう高等教育機関である。19世紀において、それは格を上げていき、大学とともに数学者の就職先の候補となった。チューリッヒの TH（スイス連邦立高等工業学校）は、ドイツに先んじて1856年に大学の構造をとったのであった。(ドイツにおける TH の歴史については次節で述べることとする。) 当校は、デデキントを皮切りに、ドイツの数学者が勤めるようになったところである。

さて Technische Hochschule に異動したことで、教育負担は激増した。大学と異なり、カリキュラムは決められていて、聴講者の数も多かった。記録 [6](p.10.) によれば、一週間につき毎年平均10時間以上の授業（演習）を負担している。家族への手紙でもそうした不満を述べているようだ。

[6]後にウェーバーが『代数学』の序文で「ドイツで初めてのガロア理論の講義」と述べているものである。

意外なことだが、デデキントはわずかではあるが数論の講義も行っている。このようなこと（技術者教育のための TH で高等数学を教えること）はときどきあったらしい。

デデキントは 1860 年代で論文（著作）の発表が少ないが、これは（編集作業に従事していたということもあるが）多大な講義負担によるところが大であると思われる。

1861 年秋には故郷のブラウンシュヴァイク高等工業学校への異動の話が持ち上がり、デデキントもこれを了承する。

ブラウンシュヴァイク高等工業学校

ここで、高等工業学校 [7] の歴史を振り返っておこう。 [10] (pp.202–209.) 1770–1830 年ころにかけて、高等教育機関、Technische Hochschule （高等工業学校）が新設（あるいは既存のものが改組）された。工業化の進展に伴って高等工業学校の名声は確立し、総合大学と同等に扱われることを要求するまでになった。19 世紀後半には、高等工業学校は大学規約を獲得する、あるいは大学に改組された。こうした傾向には既存の大学からの抵抗もあり、学位授与権が認められたのはようやく 1899 年であった。

こうした学校は基礎教育段階において数学を必要としたので、高等工業学校は大学とともに、数学者の就職先を提供することになったのである。またすでにみたように、基礎的な講義に加えて、高等数学の講義を行うことすら可能であった。

ブラウンシュヴァイク高等工業学校は、もとは 1745 年に技術一自然科学部門と新人文主義部門の両方をもつ高等学校（大学へいくための準備機関）として設立された。ガウスが学んだのも、デデキントの祖父、父が教員として主に活動していたのも、この時代である。

この機関は次第に高等教育機関に移行するとととともに、技術部門に重きをおく方にその性格を強めていった。1862 年には Polytechnische Schule となり、完全に技術部門に限られることとなった。さらに 1877 年には大学規約を獲得して、Technische Hochschule となった。 [9] (pp.57–61.)

デデキントがブラウンシュヴァイク高等工業学校に教授として赴任したのは 1862 年であるから、おそらく改組に関係した人事であったのだろう。ここでもおそらくチューリッヒにいたときと同様、毎年多くの講義ををもっていたと推察される。

少し意外なことだが、デデキントは 1872–75 年に、高等工業学校の学長を引き受けている。40 代前半の数学者が TH の学長というのは、あまり普通のこととは思えない。上記でみたように大学昇格に向けて改組を行っている時期でもあり、大変な負担だったのではないかと思う。（ちなみに父親は 1872 年に亡くなっている。）

逆に、憶測ではあるが、学長を務めあげたことで、以後は授業負担が減ったのではないかとも思われる。（1876 年以降、論文（著作）の量が増えているのがみてとれる。）

[7] Technische Hochschule は工科大学とも訳されるが、本稿では高等工業学校の語をあてている。これは既存の大学に昇格するまでの経過を考慮したためである。デデキントは後述するように学長を引き受けており、この「昇格」をめぐって苦労したと思われるのである。

集合論的思考の発表

すでに述べたように、デデキントの高等工業学校時代の前期には、編集の仕事が集中している。1863 年には、ディリクレの整数論講義の初版が出版される。第 2 版 (1871 年) の付録 10 において、体、環、加群、イデアルといった集合論的な概念に基づいた代数的整数論が発表された。

翌年の 1872 年に、『連続性と無理数』が発表される。そして、1872–78 年には後の『数とは何か』の草稿が書かれる。この時期は、意識的に集合論的思考を発表した年といえるのではないだろうか。

もうひとつ重要なこととして、1866–76 年のリーマン全集編集がある。1854–58 年と並んで、この時期のリーマンの数学思想への取り組みが、デデキントの数学思想に深い影響を与えたと考えられる。

おわりに

後半では、デデキントの後半生とともに、大学就職 (Universität) との関係、政治との関わり、音楽（趣味のみならず第二の専攻といわれる）のことなどをとりあげたい。

参考文献

[1] Kurt-R. Biermann, "Richard Dedekind", *Dictionary of Scientific Bibliography* (Scribner, 1981).

[2] R.Dedekind, "Über die Elemente der Thorie der Eulerschen Integrale", *Gesammelte mathematische Werke* I, pp.1–26. (1852).

[3] R.Dedekind, "Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik", *Gesammelte mathematische Werke* III, pp.428–438. (1854).

[4] Pierre Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques* (Vrin, 1976).

[5] R.Fricke, E.Noether und O.Ore (hrsg.), *Gesammelte Mathematische Werke*, I–III (Vieweg, 1930–1932 ; Chelsea, 1969).

[6] M.A.Knus und W.Scharlau (hrsg.), *Richard Dedekind Vorlesung über Differential- und Integralrechnung 1861/62* (Vieweg, 1985).

[7] W.Lorey, *Das Studium der Mathematik an den deutscen Universitaten seit Anfang des 19.Jahrhunderts* (Teubner, 1916).

[8] W.Scharlau (hrsg.), *Richard Dedekind 1831–1981* (Vieweg, 1981).

[9] W.Scharlau (hrsg.), *Mathematische Institute in Deutschland 1800–1945* (Friedr.Vieweg&Sohn, 1990).

[10] ハンス=ヴェルナー・プラール（山本尤　訳），『大学制度の社会史』（法政大学出版局，1988）．

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

115

PAUL LÉVY　"INSTITUT DE FRANCE ACADÉMIE DES SCIENCES TROISIÈME CENTENAIRE 1666-1966"

飛田武幸先生から教わったこと―確率論ことはじめ―

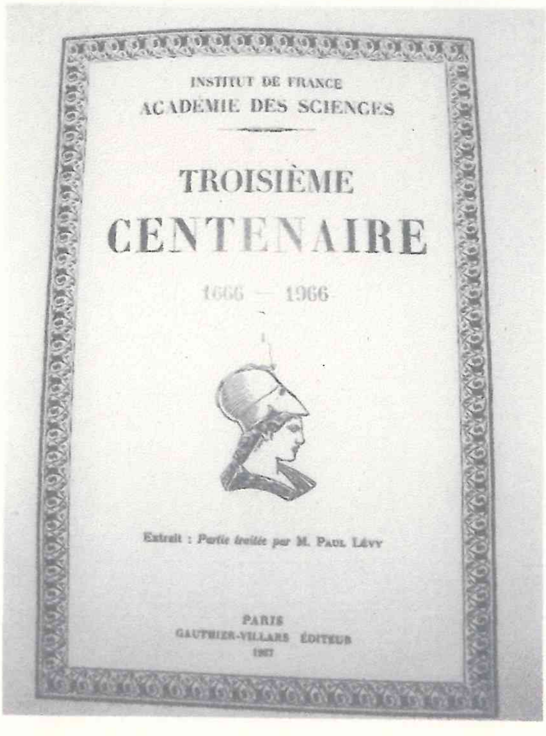
田中　紀子

0　序

Paul Lévy"INSTITUT DE FRANCE ACADÉMIE DES SCIENCES TROISIÈME CENTENAIRE 1666-1966"(GAUTHIER-VILLARS EDITEUR 1967）のうち、1章"I　L'ACADÉMIE AVANT LAGRANGE ET LAPLACE"と確率論にあたる10章"X　CALCUL DES PROBABILITÉS"の訳出と、Paul Lévyに関する資料（飛田武幸氏所蔵のものを多く含む）を紹介する。

1　PAUL LÉVY について

Born: 15 September 1886 Paris,France
Died: 15 December 1971 (aged 85) Paris, France
Institutions: École Polytechnique
Alma mater: University of Paris
Doctoral advisor:Jacques Hadamard, Vito Volterra
Doctoral students: Wolfgang Doeblin, Michel Loève, Benoît Mandelbrot,
Known for : Lévy process, Lévy flight, Lévy measure, Lévy distribution



（写真左：晩年の PAULLÉVY、1968年自宅にて。　写真右：今回訳出をした冊子の表紙）

GÉOMÉTRIE
LES MATHÉMATIQUES
Par
PAUL LÉVY
MEMBRE DE L'ACADÉMIE

GÉOMÉTRIE

数理科学

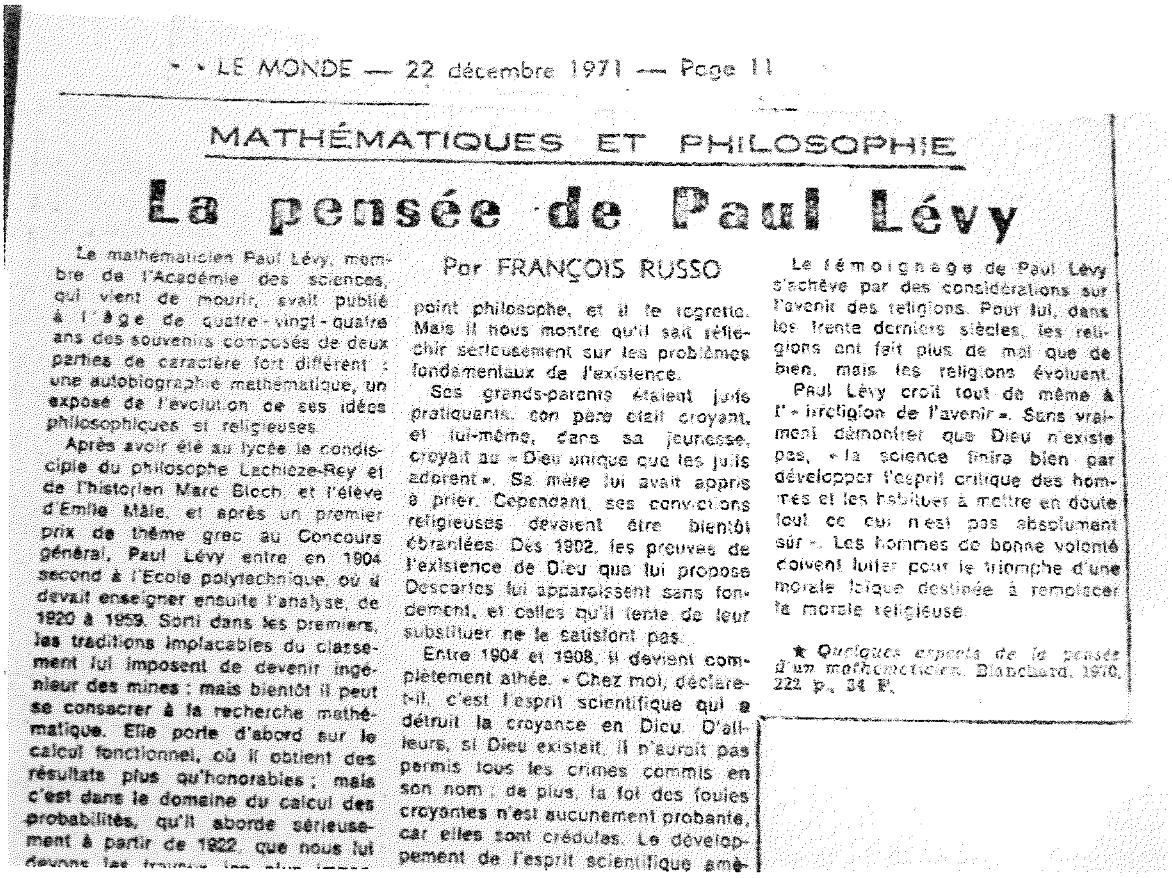
LES MATHÉMATIQUES

数学

Par

Paul LÉVY

MEMBRE DE L'ACADÉMIE



• • LE MONDE — 22 décembre 1971 — Page 11

MATHÉMATIQUES ET PHILOSOPHIE

La pensée de Paul Lévy

Par FRANÇOIS RUSSO

Le mathématicien Paul Lévy, membre de l'Académie des sciences, qui vient de mourir, avait publié à l'âge de quatre-vingt-quatre ans des souvenirs composés de deux parties de caractère fort différent : une autobiographie mathématique, un exposé de l'évolution de ses idées philosophiques et religieuses.

Après avoir été au lycée le condisciple du philosophe Lachièze-Rey et de l'historien Marc Bloch, et l'élève d'Emile Mâle, et après un premier prix de thème grec au Concours général, Paul Lévy entre en 1904 second à l'Ecole polytechnique, où il devait enseigner ensuite l'analyse, de 1920 à 1959. Sorti dans les premiers, les traditions implacables du classement lui imposent de devenir ingénieur des mines ; mais bientôt il peut se consacrer à la recherche mathématique. Elle porte d'abord sur le calcul fonctionnel, où il obtient des résultats plus qu'honorables ; mais c'est dans le domaine du calcul des probabilités, qu'il aborde sérieusement à partir de 1922, que nous lui

point philosophe, et il le regrette. Mais il nous montre qu'il sait réfléchir sérieusement sur les problèmes fondamentaux de l'existence.

Ses grands-parents étaient juifs pratiquants, son père était croyant, et lui-même, dans sa jeunesse, croyait au « Dieu unique que les juifs adorent ». Sa mère lui avait appris à prier. Cependant, ses convictions religieuses devaient être bientôt ébranlées. Dès 1902, les preuves de l'existence de Dieu que lui propose Descartes lui apparaissent sans fondement, et celles qu'il tente de leur substituer ne le satisfont pas.

Entre 1904 et 1908, il devient complètement athée. « Chez moi, déclare-t-il, c'est l'esprit scientifique qui a détruit la croyance en Dieu. D'ailleurs, si Dieu existait, il n'aurait pas permis tous les crimes commis en son nom ; de plus, la foi des foules croyantes n'est aucunement probante, car elles sont crédules. Le développement de l'esprit scientifique amè-

Le témoignage de Paul Lévy s'achève par des considérations sur l'avenir des religions. Pour lui, dans les trente derniers siècles, les religions ont fait plus de mal que de bien, mais les religions évoluent.

Paul Lévy croit tout de même à l'« irréligion de l'avenir ». Sans vraiment démontrer que Dieu n'existe pas, « la science finira bien par développer l'esprit critique des hommes et les habituer à mettre en doute tout ce qui n'est pas absolument sûr ». Les hommes de bonne volonté doivent lutter pour le triomphe d'une morale laïque destinée à remplacer la morale religieuse.

★ *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Blanchard, 1970, 222 p., 34 F.

(写真：PAUL LÉVY が亡くなったことと彼の仕事を紹介する LE　MONDE の新聞記事)

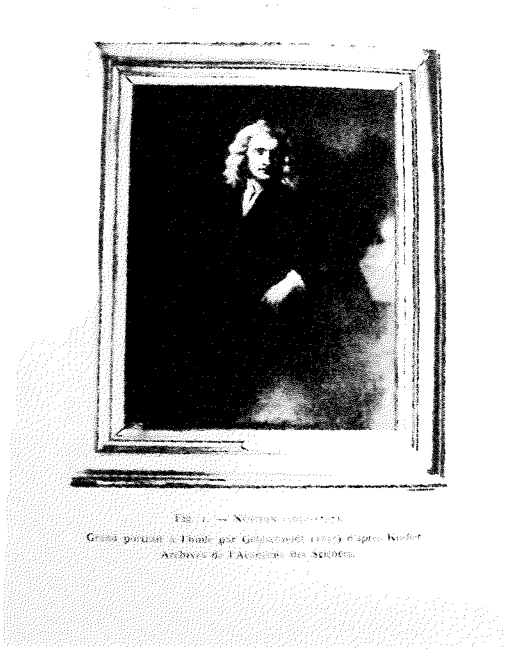
2　"INSTITUT DE FRANCE ACADÉMIE DES SCIENCES TROISIÈME CENTENAIRE 1666-1966" の訳出

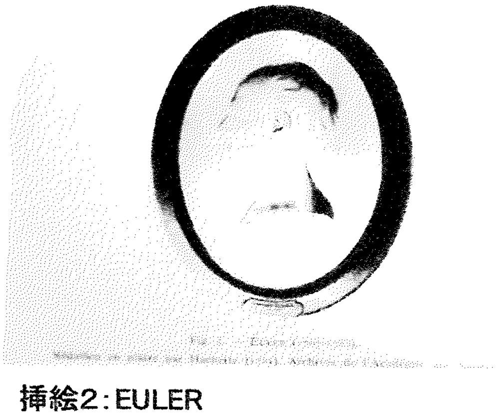
表紙と目次を掲載し、その後、1章（序章）と確率論に関する10章の訳出に移る。なお、訳出中にある挿絵は、すべてこの本に含まれているものである。

INSTITUT DE FRANCE
ACADÉMIE DES SCIENCES
TROISIÉME
CENTENAIRE
1666-1966
Extrait: Partie par M. PAUL LÉVY
PARIS
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
1967

I L'ACADÉMIE AVANT LAGRANGE ET LAPLACE (LAGRANGE と LAPLACE までのアカデミー)

アカデミーが、Descartes、Pascal、そして Fermat の死後の 1666 年、Colbert によって正式になったとき、高名なアカデミー会員は、物理学のオランダ人である Huygens だった。1 世紀の間、優れたアカデミー会員は、依然として外国にいた。Leibniz、Newton、Jacques、Jean Bernoulli、そして Euler。フランスの数学者として、Laplace、Monge、Lagrange（1787 年にフランス人になった）と同じく、私たちは哲学者か数学者かということを抜きに、Fontenelle を引用しなければならない。また、18 歳の Clairaut《年齢は関係ないけれど》と、とりわけ数学者で哲学者である D'Alembert の名を取り上げたい。


挿絵1：NEWTON

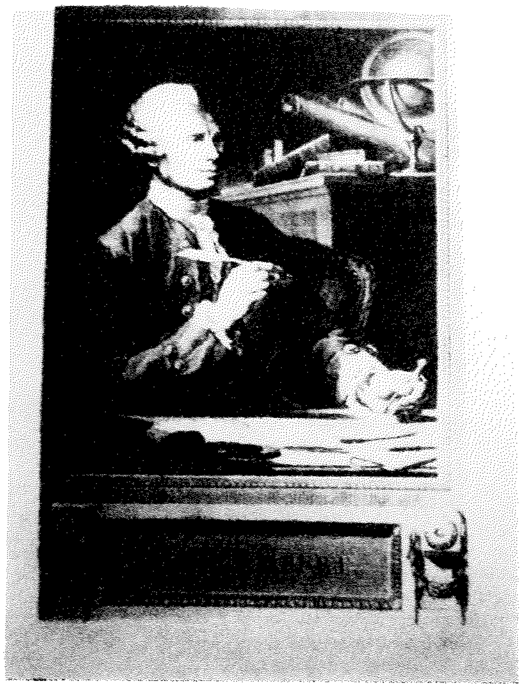

挿絵2：EULER

Newton は流率法、二項定理、3 次曲線やエピサイクロイドの求長に関するいくつもの論文やノートをアカデミーに提出したが、そのニュートンは別として、私たちが呼んだ外国の協力者のメンバーは、フランスの仕事に興味を失ってはいない人にした。しかしながら、Jean Bernoulli と Euler は、しばしばアカデミーの紀要に、テーマを修正した論文を送った。Euler は、8 つの論文で評価を受けた。彼の貢献は、力学、天文学、航空（航海）への数学の応用の面でひたすら支えていたことを書き留めておかなければならない。そのことを Lagrange と Newton は信じなかったし、アカデミーは、純粋数学の研究への関心を引かなかった。Frenicle は Fermat の仕事を引き継いだ。微分と積分が開発されて、極めて熱心な議論になった。Rolle は、厳密な仕事のやり方に注意して、微分の 0 点上における重要な定理[*1]を証明した。L'Hopital は、その方法を熱烈に支持した。Roberval、Varignon とほか幾人かは、無限小解析

*1 ロルの定理

と幾何への応用における貢献の重要性を示した。

18 世紀、D' Alembert は代数方程式についての有名な定理を述べた。私たちはこのことを 5 章で話す。V.Bezout は、幾何への応用が重要な消去法の論理を述べた。次数 3 の代数曲面—1 つの代数方程式の解の位置をとらせる—上の代数的平面の 2 次曲線の一般点の研究で、次元は曲面上で考える曲線のものによる。



挿絵3：D'ALEMBERE

X CALCUL DES PROBABILITÉS（確率論）

1． 現代科学の中で、確率論の役割はしだいに重要度を増している。統計学は、関連した分野で、実験結果を説明するためにあらゆる科学において必要である。だが、確率論は物理学にもっとも本質的な方法として働く：物理学理論における、ある同様の構造が確率論である。私たちは、応用物理とも関連する十分具体的な確率理論について話す。

確率論における最初の重要な定理は、Jacques Bernoulli のものである。ある独立な連続試行において、事象が起きる確率が確率定数 α であるとき、試行回数を増やすにつれて α に確率収束する[*2]。最もシンプルな定理の証明は、1867 年に Tchebichef が求め、有名な Bienayme- Tchebichef の不等式となる。Tchebichef は、Bernoulli のものを大きく拡張した場合における、ランダムで独立な変数の和について一般的な関係の定理を求めた。Poisson は、厳密な証明はしていないものの、似たような結果を得た。

*2 大数の法則：各回の試行において各事象の起こる確率というものが、試行回数を重ねることで、各事象の出現回数によって捉えられる

J.Bernoulliの死の少し後(1705年)に、Bernoulliの学生だったDe Moivreは、n回の独立な試行と確率は$\sqrt{n}$の商が、n→∞のときにGaussの法則と呼ばれるある法則に従うことを示した[*3]。それは、Laplaceの法則と呼ばれることが多い。Laplaceの結果は、Gaussの仕事に先んじて、早くも1783年にその法則の重要性が注目された。独立でランダムなX_nがある微小な値で変化するならば、εが十分小さいとき、Gaussの法則に似た法則に依存する、独立でランダムなX_n ($|X_n| < \varepsilon$) の和Sが計算できる。その証明は厳密ではなく、定理は実際には1887年にTchebichefによって証明され、また1901年にLiapounoyによって別の方法で示された。その少し後、MarkovとLindebergの仕事はX_nがそれほど小さい場合でないときにおける事象の存在を結論付けた。1922年から1935年のPaul LÉVYの仕事は、最終的に次のような結論に達した。「m(X)はXの中央値を表し、$Y_n = |X_n - m(X)|$, $M = m[|S - m(S)|]$とおく。X_nは独立で、Y_nはMと比べて非常に小さい。sがas＋bの形に表せるための必要十分条件は、sがLaplaceのものより少し小さく、$|Y_n|$がMと比べて非常に小さいことが確からしい」[*4]。また、ランダムで独立でない値の和の種類に関して拡張された定理—現在Martingalesの名の下で有名でJ.L.Doobが深めた研究—を得た。

それは、Y_nがそれぞれ非常に小さいという条件のもとにおけるPaul Lévyの仕事と同様の結果である[それより大きく言うことはしない]。著者は、無限回微分可能な法則を拡張し、形式の一般化をした。Poissonの発見した法則(ポワソンの法則、または小確率の法則)、ラプラスの法則と組み合わせたその形式の結果だけを言おう。特に重要なことは、以前CauchyとPólyaによって考えられていた安定法則である。それらの一般的な理論は、すでにPaul Lévyの最初のノートに示されている。無限回微分可能な法則の、さらに一般的な理論の適用の中で、極端にシンプルで独創的である。無限回微分可能な法則、また安定法則は、のちに多くのことを追求する対象を作った。

挿絵4：CAUCHY

＊3　アルス・コンジェクタンティ、

＊4　確率収束する

確率法則―独立な和におけるランダムな値の表現の問題―と関連のある計算方法について追求した。それは、限りなく分割可能な法則上の最新の仕事、特に H.Cramér のノート、また Paul Lévy の仮設の正確さを証明した 1936 年のアカデミーのプレゼンテーションは、最新の評価すべき仕事である。著者と D.Duguér は計算方法に興味を持ち続けている。しかし、主要な結果は、ロシアの学派（A.Khintchine、Raikov、Linnik）のアイデアである。

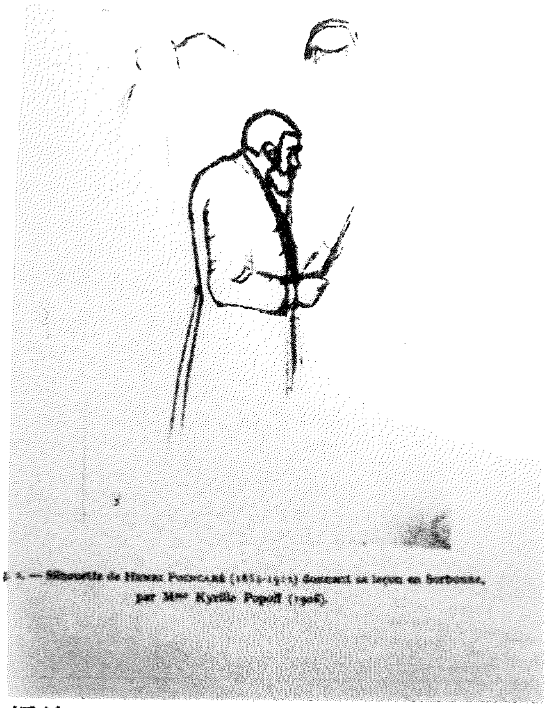
3．下記に示す結果は、古典的確率計算の到達点である。それに関する 20 世紀の主要な仕事は、計算の完全な改良である。Bernoulli とその後継者は独立な有限回の試行の確率を研究した。同じく、無限大の場合（発散する場合）を除いた確率の漸近挙動も研究した。Émile Borel は、1909 年に、独立な事象における無限回続く試行について研究した。2 つのレンマ―独立な試行の事象に対する Cantelli によって拡張されたもの、加算個の場合の研究をもとにしたもの―、そしてとりわけ完全な Bernoulli の定理は、Cantelli の前に一般化した有名な「大数の法則」を確立した。加算個の確率理論は急速な発展を遂げた。特に、ランダムで独立な列の収束について研究がなされた。意に反して、フランスで起こったその仕事の、理論に関する発展が早かったのはロシアにおいてであった。A.Khintchine は有名な重複対数の法則の内容を含むノートを、1924 年、アカデミーに紹介した。

4．ここからは、確率過程―今日、確率計算の重要な問題で、急速に発展している―の理論についての講義である。私たちは、Kolmogorov と Doob の理論に対する仕事について、一般的な話はしない。私たちは時刻 t でランダムな関数 X(t)の事象に限る。私たちは、偶然に次々と発生するものから予測（測定）される、引き続いて起こる値の場合を示したい。

単純な型は、加法過程、すなわちランダムで独立な増分を持つ場合である。それらの理論は、ランダムかつ独立で連続的に次々起こる値の和については、あまり完成されていない。それはすでに記載した Paul Lévy の 1934 年の仕事の結果と同じである。ラプラスの法則と無限分解可能な法則の下で、定理の重要さをもっともよく表す。ランダムで加法的なある関数 X(t)（初期値 0）は、確率連続であり、X(t)は各 t において、限りなく分割可能な法則とする。もし、ほとんど各点で連続ならば、X(t)はラプラスの法則に従う。最初に述べた場合、X（t）がジャンプを持つことができる。また、ポワソンの法則の下でのジャンプの研究もある。

加法過程は、マルコフ過程の場合だけではない（特に確率変数列の場合にMarkovの研究がある)。任意のt_0についてX(u)（u≦t_0）が知られている場合に、もし、すべてのt（t＞t_0）において、X(t)の値がX(t_0）、t_0によるならば、その過程は、マルコフ過程である。マルコフ過程の理論は、過去が現在を通しては未来を予測するのに不必要な場合である。

Markovの前に、Poincaréはすでに、特にカード打ち（ギャンブル）のことを確率でないと考えていた。1930年、A.KolmogorovとS.Bernsteinは、マルコフ過程についてのその定理のまれに見る大発展を成し遂げた。また、Chapman-Kolmogorovとの方程式は、マルコフ過程の推移確率の価値がある。最近のYouchkevitchの仕事は、厳密にマルコフ過程の概念を導入した。Dynkin、K.L.Chung、J.L.DoobとW.Fellerは相当に豊かになったマルコフ過程の発展に貢献した。フランスで出版した仕事の中で、電波の環境に関するG.Pólyaの研究報告の前に、J.HadamardはḾ.Fréchet、Paul Lévy、W.Doeblin、そして最近J.NeveuとP.A.Meyerの仕事について記述した。今、依然として多数の国民は、それぞれアカデミーのプレゼンターとして記憶している。1935年のO.OnicescuとG.Mihocのアカデミーのプレゼンターのノートによると、それは、マルコフチェインの重要な拡張を構成する。



挿絵5：POINCARE

多くの研究者の仕事は、ラプラス過程（ガウス過程と同じ）―すべての線形な関数X(t)は、ランダムでガウス型の値を持つ―を研究の対象とした。加法過程の場合など、とてもシンプルな場合には、ウィナー関数があり、1次元ブラウン運動がある。まず、Brownによって考えられ、L.Bachelier(1900)とA.Einstein（1905）は、別々に独立で、熱の理論との関係（マルコフ過程、拡散方程式、ずっと以前に述べた特別な場合）を発見した。しかし、その関数の正確な定義は、1923年にN. Wienerによって与えられた。平面や空間のブラウン運動の研究は、確率計算の重要な問題を構成している。Paul Lévyは、1938年から1939年にその研究に貢献した。ユークリッド空間、リーマン面、ヒルベルト空間の点もそのパラメータになるブラウン運動で、その運動を一般化する前から、と

ても興味を引く特性について研究した。N.Tchentsov、K.伊藤、H.P.Mc Kean と最近 D.Dacunha—Castelle と Bretagnolle が、その研究を追求している。

より多くの一般化されたラプラシアン関数（ガウス過程）に話を戻す。Paul Lévy はラプラス関数が、積分形式

$X(t)=\int_0^t F(t,u)\,dB(u)$

で表される（B(u)は Wiener 関数[ブラウン運動]）という重要なことを示した。そのとき因数 ε (u)（ε は可測で $\varepsilon^2=1$）はほとんど至るところ０で、さらに標準表現で（０、ｔ）上の B(u)はその区間上の X(u)と同じ情報を持つ。

本来、ランダムな解析関数の場合、ガウス型であろうとなかろうと、逐次の偶然が関係するような問題とは限らない。その注意は、ランダムなある関数の研究に対し、さまざまな異なる方法の存在を表している。テイラー展開上の、またランダムで独立なフーリエ級数展開上の、多数の仕事の主者だけを記載する。E.Borel、P. Lévy 、H.Steinhaus、Ryll-Naredzewski、N.Wiener、L.Schwartz、R.Salem、J.P.Kahane。

H.Cramér、M.Loève、R.Fortet、Blanc-Lapierre は、また２次のオーダーのランダムな定常過程の調和解析に有効な貢献をした。

ついに異なるアイデアのオーダーのもとで、M.Fréchet、と彼の学生（とくに E.Mourier）は抽象的なランダムの値[とりわけ抽象空間上の値に対する一般のガウス過程、ランダムな曲線および曲面]を研究した。

挿絵6：Paul Lévy

Analyse harmonique sur l'espace des fonctions généralisées.

Note de TaKeyuki Hida, transmise par Paul Lévy

Introduction.

Nous parlerons dans cette note de l'analyse harmonique sur l'espace X des fonctions généralisées. L'espace vectoriel X est de dimension infinie et n'admet, comme on le sait bien, aucune mesure σ-finie du type de Lebesgue. Notre première étape est donc d'introduire une mesure idéale sur X. En fait, puisque le support de n'importe quelle mesure dénombrablement additive sur X ne couvre jamais l'espace entier, nous prendrons donc un système de mesures pour mesure idéale de sorte que l'union de leurs supports soit assez grande pour analyser d'importantes fonctions définies sur X.

Ayant établi la mesure idéale sur X, nous procèderons aux considérations de l'espace L^2 dérivé d'une mesure appartenant au système de mesures (c'est-à-dire la mesure idéale). On aura ainsi un système d'espaces L^2 qui représente une classe raisonnablement large de fonctions sur X. Nous arriverons alors à la définition des fonctions harmoniques sur X. Puisque chaque mesure appartenant à la mesure idéale est supportée pour ainsi dire, par une sphère de dimension infinie, nous pouvons parler de la propriété de la moyenne pour les fonctions sur X. En utilisant cette propriété, nous pouvons aussi donner une définition de l'opérateur laplacien en dimension infinie.

De par nos discussions, nous verrons beaucoup de ressemblances avec l'analyse en dimension finie sur l'espace euclidien; cependant une dissemblance intéressante apparaît nettement dans l'examen de la propriété de la moyenne d'une fonction sur X. Cela vient du fait que chaque fois qu'une direction est spécifiée, la mesure uniforme sur la sphère à dimension infinie est concentrée sur l'équateur qui est

（参考資料１：飛田武幸氏の論文にPaul Lévy氏が加筆修正したもの　その１）

6 V2

discussion, nous pouvons donner une illustration à la formule d'add bien connue pour les polynômes d'Hermite intervenant ~~dans~~ l'analyse classique.

Bien que ceci soit un simple plan de travail, les résulta eux-mêmes semblent être de quelque intérêt et plusieurs problèmes d le champ des mathématiques appliquées suggèrent notre approche. Nou aimerions finalement nous référer aux oeuvres de P. Lévy [1] et de M. R. Gâteaux [2] qui ont motivé le présent travail. Dans les artic [4] et [5] de la blibliographie, nous trouverons une relation étroi avec les méthodes employées dans ce papier.

§ 1. Mesure idéale.

Nous commencerons par le triplet suivant :

(1) $$E \subset L^2(R^1) \subset E^*,$$

où E est un espace de Hilbert de fonctions régulières tel que :

(i) la norme dans E est plus grande que la norme $L^2(R^1)$

(ii) E est un sous-ensemble dense de $L^2(R^1)$;

(iii) l'injection de E dans $L^2(R^1)$ ~~est~~ soit de type Hilbert-Sc

~~et~~, où E^* est le dual de E. Soit $\{\xi_n\}$ un système orthonormé complet dans $L^2(R^1)$ tel que $\xi_n \in E$ pour tout n. Alors, pour tout x dans E^*, nous pouvons définir r(x) par

(2) $$r(x)^2 = \lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle x, \xi_n \rangle^2.$$ chaque ... n'est ...

Evidemment ~~nous avons~~ $0 \leq r(x) \leq \infty$. Posons infini

$$S(r) = \{x \in E^* ; r(x) = r\}$$

(参考資料２：飛田武幸氏の論文にPaul Lévy 氏が加筆修正したもの　その２)

Proposition 1

(i) Les $S(r)$ sont des ensembles disjoints et $E^* = \bigcup_{0 \le r \le \infty} S(r)$

(ii) $S(0) \supset L^2(R^1)$;

(iii) $S(r) \in B$ pour tout r, où B est la tribu de sous-ensembles de E^* engendrée par les ensembles cylindriques.

Nous sommes maintenant prêts à introduire la mesure idéale. Si on donne une fonction caractéristique $C_r(\xi)$ sur E :

(3) $\quad C_r(\xi) = \exp[-\frac{r^2}{2}\|\xi\|^2],\ 0 < r < \infty,\ [\|\ \|$ ~~the~~ la $L^2(R^1)$-norme$]$

alors, constatant la relation (1), le théorème de Bochner-Minlos affirme que l'on ~~donne~~ obtient une mesure de probabilité μ_r sur (E^*, B) telle que

(4) $$C_r(\xi) = \int_{E^*} \exp[i < x, \xi >] d\mu_r(x).$$

La mesure μ_r est quelquefois appelée la mesure du bruit blanc avec variance r^2. La collection $\{ <x, \xi_n> \}$ forme un système de variables aléatoires de Gauss indépendantes de moyenne nulle et de variance r^2 sur l'espace de probalité (E^*, B, μ_r). Par conséquent la loi des grands nombres nous dit que

(5) $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} <x, \xi_n>^2 = r^2,\ \text{a.e.}\ (\mu_r),$$

qui montre que

$$\mu_r(S(r)) = 1.$$

~~adresse de l'auteur~~
~~Professeur au~~ Département de Mathématiques
à la Faculté des Sciences de NAGOYA
University
FURO-sho, Shikusa-ku - NAGOYA - 464
JAPON

(*) 20-12..

（参考資料３：飛田武幸氏の論文にPaul Lévy氏が加筆修正したもの　その３）

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

128

ワイルと数の幾何

今野秀二

2016 年 1 月 23 日

§**1**　ヒルベルトはミンコウスキの死後ワイル，シュパイザーと協力し彼の全集を編集しているが，その序文で数の幾何をミンコウスキーの最も重要な研究であると述べています．そのミンコウスキーは 1896 年，数の幾何に関する著書 Geometrie der Zahlen （以後 [GZ] で表す）を出版していて，ワイルの数の幾何研究はこの本が出発点になっている．

ミンコウスキはこの本の序文に「エルミートの数の幾何に関する定理とヂリクレの２次形式の簡約化が関係する」という趣旨のことを簡単に述べている．でも本文のなかにこの事に相当することは書かれていない．ヒルベルトはこれについて，（ミンコウスキの死後）シュパイザーとこの本の再版をしたとき，その序文に「この本の後半が出ていない」と書いている．ワイルの数の研究はこの出版されなかった後半部分の再現がモチベーションになっていたようで，以下ワイルが論文の中で述べていることを追いながら再現して見ることにする．

まず実 n 次元空間を $E = \mathbf{R}^n$ とし，x をその点(またはヴェクトル)とする．ミンコウスキーは E 上の連続関数 $f(x)$ が (i) $f(x) \geq 0$, $= 0 \rightleftarrows x = 0$, (ii) $f(tx) = |t| f(x)$ $(t \in \mathbf{R})$, (iii) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ の３条件を満たすとき，これをゲージ関数と呼んだ．これは距離関数を一般化したもので例えば，正定値の２次形式やエルミート形式 $q(x)$ に対し，$f(x) = q(x)^{1/2}$ とすればゲージ関数が得られる．このような f に対して $\mathfrak{K} = \{x \in E \mid f(x) < 1\}$ と置くと，これは原点対称で有界な凸領域になる．そこでこの体積を V と表そう．

一方，E の格子点からなる加群 $L = \mathbf{Z}^n$ に対し $M = \min_{0 \neq x \in L} f(x)$ と定義する．ミンコウスキーの定理は凸体と格子点を結びつけるもので

$$M^n \cdot V \leq 2^n \tag{1}$$

と表される（[GZ] 30 章）. [GZ] ではこの定理を更に精密化して主定理

$$M_1 \cdots M_n \cdot V \leq 2^n \tag{2}$$

を導いている (51 章). ここで $\{M_i\}$ は, まず $M_1 = M$ とし $f(d_1) = M_1$ なる $d_1 \in L$ をとる (以下 $x_1, \cdots, x_k \in E$ で張られる部分空間を $[x_1, \cdots, x_k]$ で表す). $\{M_1, \cdots, M_{k-1}\}$, $\{d_1, \cdots, d_{k-1}\}$, $(f(d_i) = M_i)$ まで求まったとき, $d \notin [d_1, \cdots, d_{k-1}]$ なる $d \in L$ について $f(d)$ の最小値を $M_k = f(d_k)$ とする. このとき $M_1 \leq \cdots \leq M_n$ である.

さて, 上記エルミートの数の幾何の話は正定値２次形式 $q(x)$ に対し, $M = \min_{0 \neq x \in L} q(x)$ がある定数を超えないという定理である. ヂリクレの方は３変数の２次形式の類数計算での簡約化理論 (reduction theory) である. これに関しワイルは「ミンコウスキーは [GZ] で２次形式を含む一般のゲージ関数について, エルミートとヂリクレのアイデアを結びつけようとしていた, だが何故か途中でやめてしまった」と述べている. 実際, ミンコウスキー は 1905 年になって, 論文 Diskontinuitats bereich fur arithmetische Aquivalenz ([D] で表す) で２次形式の簡約化を発表しているが, その方法は [GZ] とは別の方法であった. (この論文には不備があり, 後にビーベルバッハ, シューアが完成させている). ワイルの数の幾何研究のモチベーションは [GZ] の考えを発展させるという点にあり, 彼はマーラーの方法を改良し, ゲージ関数の簡約化を進めその特別な場合として正定値エルミート形式および四元数体での簡約化を展開している.

§**2** より詳しく見るため正定値２次形式を

$$q(x) = {}^t x Q x = \sum_{x \in L} q_{ij} x_i x_j \qquad (q_{ij} = q_{ji} \in \mathbf{R}) \tag{3}$$

と表し, P で n 次の実正定値２次形式の全体を表すことにする. ここで x は $x_1, \cdots, x_n$ を成分にもつ列ベクトル, $Q = (q_{ij})$ は退化しない実対称行列である. この $q \in P$ は $\{q_{ij}\}$ $(1 \leq i \leq j \leq n)$ を座標にもつ $\mathbf{R}^N$ $(N = n(n+1)/2)$ の点と見なして $P \subset \mathbf{R}^N$ と考える. 以下 q は Q と同一視しよう.

P には $(Q, g) \to Q \cdot g = {}^t g Q g$ $(Q \in P,\ g \in GL_n(\mathbf{R}))$ で線形群 $GL_n(\mathbf{R})$ が作用している. とくに行列式が ± 1 の n 次整数係数行列からなる部分群を $\Gamma = GL_n(\mathbf{Z})$ とすれば, この Γ も P に作用しているが, ２つの２次形式 $q(x) = {}^t x Q x$ と $q_1(x) = {}^t x Q_1 x$ がある $\gamma \in \Gamma$ で移り合うとき, つまり $Q_1 = {}^t \gamma Q \gamma$ なるとき同値と定義する. 問題は P をこの同値で分けたときその代表系はどんな集合になるか, あるいは P における Γ の基本領域を求めることである.

そのために，各 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$ について，X_k は整数ベクトル $x=(x_1,\cdots,x_n)\in \mathbf{Z}^n$ で $\{x_k,\cdots,x_n\}$ の公約数が 1 であるものの全体とする．このとき $q\in P$ が簡約 (reduced) とは各 $k=1,\cdots,n$ について

$$q(x)=\sum_{x\in L} q_{ij}x_ix_j \geq q_{kk}, \qquad x\in X_k \tag{4}$$

を満たすことと定義する．以後簡約な $q\in P$ の全体を Z と表そう．

このとき，任意の正値２次形式は簡約な２次形式に同値になることが知られている．すなわち，任意の $q(x)={}^t xQx\in P$ に対し，ある $\gamma\in GL_n(\mathbf{Z})$ があり ${}^t\gamma Q\gamma\in Z$ とできる．

ここで集合 Z だが，(4) は点 q の座標 q_{ij} を変数と見れば，x_ix_j を係数とする１次不等式で，各々は $\mathbf{R}^N$ の半空間を定めるから，Z は無限個の超平面で囲まれた凸の多面体になっていることが分かる．ミンコウスキーは [D] で Z について以上のことのほか次の (I), (II) を主張している．すなわち

(I) Z を定義する不等式 (4) は有限個の不等式で間に合うこと

(II) Z の点 Q に対し ${}^t\gamma Q\gamma\in Z$ なる $\gamma\in\Gamma$ は有限個しかないこと．

(II) の証明は完全だったが，(I) に関してワイルは問題点を指摘しそれを正し，さらにそのアイデアを発展させている．

まず $q^{(0)}$ が Z の境界点であるとは，ある $x=(x_1,\cdots,x_n)\in X_k$ について

$$q^0(x)=\sum q^0_{ij}x_ix_j=q^0_{kk}. \tag{5}$$

を満たしていることであるから，(I) の証明には簡約な $q^{(0)}$ に対し (5) を満たす $x\in X_k$ が有限個しかないことをいえばよい．そのため $q(x)$ をヤコビ変換して

$$q(x)=r_1z_1^2+\cdots+r_nz_n^2, \quad z_i=x_i+\sum_{j>i}x_j\beta_{ji} \quad (i\leq i\leq n) \tag{6}$$

と表す．このとき $r_i\leq q_{ii}$ $(1\leq i\leq n)$ は容易に分かるが，さらに q が簡約のとき q に依存しないある定数 λ_n があり

$$\lambda_n\cdot q_{11}\cdots q_{nn}\leq r_1\cdots r_n=\det(q_{ii}) \tag{7}$$

を証明する．この不等式を部分空間に制限して

$$\lambda_k\cdot q_{kk}\leq r_k \quad (1\leq k\leq n) \tag{8}$$

が得られ，これと $r_i\leq q_{ii}$ から $|z_i|$ が有界であること，さらに $|x_i|$ の有界を導いている．

不等式 (7) がこの証明の鍵であるが，ワイルはミンコウスキー [GD] のなかの (2) の考えとマーラーの定理を精密化することで証明している．実はミンコウスキーも値は粗いけれども（さらに証明に難点もあるが）不等式 (7) を発見しているので，ワイルは (7) をミンコウスキーの到達点と評価しています．ミンコウスキーの不等式とも呼ばれている．

さて，ワイルはここで

(1) Z は有限個の超平面で囲まれたピラミッド形をしている

(2) 変換 $\gamma \in \Gamma$ による Z の像を Z_γ とすれば $Z_\gamma = Z_{\gamma\varepsilon}$ ここで $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ ($\varepsilon_j = \pm 1$) は $x = (x_1, \cdots, x_n) \to \varepsilon x = (\varepsilon_1 x_1, \cdots, \varepsilon_n x_n)$ なる変換である

(3) $J \subset \Gamma$ は $\{\varepsilon\}$ から生成される位数 2^n の部分群とすれば $\{Z_\gamma | \gamma \in \Gamma/J\}$ は境界以外で重複せず，かつ P を隙間なく覆っている

(4) Γ は有限生成である

を証明している．Z が Γ/J の P における基本領域であることとその構造を表している．

ワイルは (7) を一般のゲージ関数に対して考えている．

§3 L の $\mathbf{Z}$ 基 $\{s_1, \cdots, s_n\}$ がゲージ関数 f に関し簡約とは，各 $k = 1, \cdots, n$ および任意の $x = (x_1, \cdots, x_n) \in X_k$ に対して

$$f(x_1 s_1 + \cdots + x_n s_n) \geq f(s_k) \tag{9}$$

の成り立つことと定義する．さらに標準基 $\{e_i\}$ が f に関し簡約のとき f は簡約という（ e_i は第 i 成分が 1 他は 0 を成分に持つベクトル）．例えば $f = q^{1/2}$ ($q \in P$) のときは f の簡約は 2 次形式の簡約と一致する．

L の基で f に関して簡約なものを求めるには以下のようにするとよい．まず L の $\mathbf{Z}$ 基となりうる $s \in L$ で $f(s)$ が最小のものを s_1 とし，$N_1 = f(s_1)$ とする．$\{s_1, \cdots, s_{k-1}\}$, $\{N_1, \cdots, N_{k-1}\}$ まで求まったら $\{s_1, \cdots, s_{k-1}, s\}$ が L の $\mathbf{Z}$ 基の構成要素となる $s \in L$ で $f(s)$ が最小のものを s_k とし $N_k = f(s_k)$ とする．こうして求めた $\{N_i\}$ は $N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_n$ かつ $M_k \leq N_k$ で，$\{s_i\}$ は簡約な基になっている．2 次形式の場合 $N_k = q_{kk}$ である．このとき f に依存しないある定数 θ_k および μ_n があり（マーラーの定理）

$$N_k \leq \theta_k M_k \tag{10}$$

$$N_1 \cdots N_n \cdot V \leq \mu_n \tag{11}$$

が分かる．ここでワイルはゲージ関数 f として，虚 2 次体上の正定値エルミート形式 と正定値ハミルトンの 4 元数形式の平方根を取ると，その体積は判別式の低数倍がとなるか

ら，２次形式の場合の $r_1 \cdots r_n$ に相当する量が現れて (7) および (8) に相当する式が得られる．こうして，これらの形式に対しても (1)-(4) の成り立つことを導いている．

(1) Theory of reduction for arithmetical equivalence. (1940)
Gesammelte Abhandlungen Bd III

(2) Theory of reduction for arithmetical equivalence II. (1942)
Gesammelte Abhandlungen Bd IV

(3) On geometry of numbers. (1942)
Gesammelte Abhandlungen Bd IV

(4) Fundamental domains for lattice groups in division algebra I, II. (1945)
Gesammelte Abhandlungen Bd IV

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

134

Fuchs polynomial related to elliptic curves and finite Fourier transformation

by Kanji Namba

463-3 Kitamizote Sojya Okayama 719-1117

tel/fax. 0866-90-1886

2015.12.13

finite field, finite Fourier transform (= fFt, Vandermonde tr. coefficient tr.), Legendre polynomial, Fuchsian polynomial, Hasse's inequality, elliptic curves, Poincaré-Mordell-Weil group, p-absolute value property, resultant transform

1. Introduction, definition and notions.

1.1 resultant

Let $f(x)$ and $g(x)$ be polynomials, then the resultant is (as temporary notion) denoted as

$$f(x) ⓧ g(x) = \text{resultant}(f(x), g(x), x).$$

It satisfy, as for example,

$$f(x) ⓧ x-y = f(y)$$

$$f(x) ⓧ g(x) = (-1)^{nm} g(x) ⓧ f(x)$$

$$f(x) ⓧ (g(x)h(x)) = (f(x) ⓧ (g(x))(f(x) ⓧ h(x))$$

$$f(x)^n ⓧ g(x) = f(x) ⓧ g(x)^n$$

$$f(x) ⓧ (g(x,y) ⓨ h(x)) = (f(x) ⓧ g(x,y)) ⓨ h(x).$$

Consider for example of torus, which is the points distant 1 from the plane circle $s^2+t^2 = 9$, is obtained by, considering tangent line $s = xt/y$

$$[s^2+t^2-9,\ (x-s)^2+(y-t)^2+z^2-1] =$$

$$[x^2t^2+y^2t^2-9y^2,\ x^2t^2-2x^2ty+x^2y^2+y^2t^2-2y^3t+y^4+y^2z^2-y^2]/y^2$$

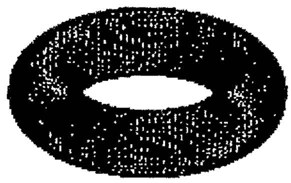
and so

$$x^2t^2+y^2t^2-9y^2 ⓣ x^2t^2-2x^2ty+x^2y^2+y^2t^2-2y^3t+y^4+y^2z^2-y^2 =$$

$$y^4(x^2+y^2)^2(x^4+2x^2z^2+2x^2y^2-20x^2+z^4+16z^2-20y^2+64+2y^2z^2+y^4).$$

which is a standard domain with genus 1 of elliptic curves

$$x^4+2x^2z^2+2x^2y^2-20x^2+z^4+16z^2-20y^2+64+2y^2z^2+y^4 = 0$$



as for example, the case of genus 2 surface, though not smooth, points of distance 1 from radius 5 lemniscate:

$$(s^2+t^2)^2 = 25(s^2+t^2),\ (x-s)^2+(y-t)^2+z^2 = 1$$

with tangent vector $[4ts^2+4t^3+50t,\ -4s^3-4s^2+50s,\ 0]$

$$(x-s)(4ts^2+4t^3+50t)+(y-t)(-4s^3-4st^2+50s) =$$

$$-100st+4xts^2+4xt^3+50xt-4ys^3-4yst^2+50ys = 0,$$

we have

$$((x-s)^2+(y-t)^2+z^2-1 \textcircled{t} (s^2+t^2)^2 = 25(s^2+t^2))$$

$$\textcircled{s} ((x-s)^2+(y-t)^2+z^2-1 \textcircled{t} -100st+4xts^2+4xt^3+50xt-4ys^3-4yst^2+50ys)$$

which is slightly big polynomial of x,y,z, with the figure:

1.2 finite fields

Finite prime field is the field consists of prime number p elements and denoted by

$$F_p = GF(p) = \{0,1,\cdots,p-1\} = p.$$

where GF(p), stand for Galois field. For least absolute value residue (= lavr), we mean the residue in the set, for odd prime,

$$\bar{p} = \{0, \pm 1, \cdots, \pm (p-1)/2\}.$$

General finite field consists of p^n elements, denoted by $F_{p^\wedge n} = GF(p^n)$, is obtained as an algebraic extension, namely by quotient of degree n polynomials by an their irreducible polynomial p(x), and they are all isomorphic. (Wedderburn theorem, J. H. M. Weddurburn, 1882-1948).

$$F_{p^\wedge n} = GF(p^n) = F_p^n[x]/(p(x))$$

Characteristic polynomial of finite field is

$$x^p - x = x(x^{p-1}-1)$$

for prime field and for general case it is $x^{p^\wedge n} - x = x(x^{p^\wedge n-1}-1)$.

Legendre symbol, for odd prime, is defied by

$$(a/p) = (-1)^{(p-1)/2} \bmod p \in \{-1,0,1\} = \#\{x \in p: x^2 = a \bmod p\} - 1$$

Example 1. Count the number of solutions of elliptic curve in extended Weierstrass normal form in prime finite field F_p (= counting the order of Mordell-Weil group)

$$C: y^2 = f(x) = x^4 + qx + r$$

The wanted number is (including unit element, which is ∞)

$$n_p = \mathrm{ord}(C) = 1 + a_p + p$$

$$a_p = \sum_{x \in p} (f(x)/p).$$

Note that

$$(f(x)/p) = f(x)^{(p-1)/2} = x^{2(p-1)} + \cdots + c_{p-1}x^{p-1} + \cdots + c_0$$

and we want to compute their sum in F_p, namely

$$\sum_{x \in p} (f(x)/p) = \sum_{x \in p} (x^{2(p-1)} + \cdots + c_{p-1}x^{p-1} + \cdots + c_0) = -c_{p-1}.$$

For, only the coefficient of x^{p-1} will remain because $x(x^{p-1}-1) = 0$, or in other words

$$\delta(x) = \langle x=0 \rangle = 1 - x^{p-1} = 1 \text{ if } x=1 \text{ else } 0$$

this means that, in F_p

$$\sum_{x \in p} c_j x^j = -c_{p-1} \text{ if } j = p-1 \text{ else } 0$$

This coefficient is expressed as sum of terms of the form m = (p-1)/2

$$m!/(r!s!t!) \cdot a^s b^t \cdot x^{4r+s}$$

the condition is

$$r+s+t = (p-1)/2,\ 4r+s = p-1$$

solving this, we have

$$r = (p-1)/6+t/3, \; s = (p-1)/3-4t/3$$

the case $p = 6n+1$, $t = 3u$, we have

$$r = n+u, \; s = 2n-4u, \; t = 3u$$

and consider the ratio by shift u-1 to u of

$$r!s!t! = (n+u)!(2n-4u)!(3u)!$$

we have

$$\frac{(2n-4u+3)(2n-4u+2)(2n-4u+1)(2n-4u)}{(n+u)(3u-2)(3u-1)(3u)}$$

in this case $n = -1/6$,

$$n+u = 1/6\cdot(6u-1),$$

$$2n-4u+1 = -1/3(1+12u-3) = -2(6u-1)/3,$$

$$2n-4u+3 = -1/3(1+12u-9) = -4(3n-2)/3$$

so, two terms are cancellate to constant, namely

$$\frac{(2n-4u+3)(2n-4u+1)}{(n+u)(3u-2)} = \frac{-2(6u-1)/3\cdot -4(3n-2)/3}{1/6\cdot(6u-1)(3u-2)} = 16/3$$

remaining terms are

$$\frac{16(2n-4u+2)(2n-4u)}{27(u-1/3)u} = \frac{256(u-5/12)(u+1/12)}{27(u-1/3)u}$$

In the case $p = 6n-1$, $n = 1/6$ and

$$t = 3u+1$$

$$r = (p-1)/6+t/3 = n+(t-1)/3 = n+u,$$

$$s = (p-1)/3-4t/3 = 2n-2/3-4t/3 = 2n-2-4(t-1)/3 = 2n-2-4u$$

Consider the ratio by shift u-1 to u of

$$r!s!t! = (n+u)!(2n-4u-2)!(3u+1)!$$

we have

$$\frac{(2n-4u+1)(2n-4u)(2n-4u-1)(2n-4u-2)}{(n+u)(3u-1)(3u)(3u+1)}$$

in this case $n = 1/6$,

$$n+u = 1/6\cdot(6u+1),$$

$$2n-4u-1 = -1/3(-1+12u+3) = -2(6u+1)/3,$$

$$2n-4u+1 = -1/3(-1+12u-3) = -4(3n-1)/3$$

so, two terms are cancellate to constant, namely

$$\frac{(2n-4u-1)(2n-4u+1)}{(n+u)(3u-1)} = \frac{-2(6u+1)/3\cdot -4(3n-1)/3}{1/6\cdot(6u+1)(3u-1)} = 16/3$$

remaining terms are

$$\frac{16(2n-4u-2)(2n-4u)}{27(u-2/3)u} = \frac{256(u+5/12)(u-1/12)}{27(u-2/3)u}$$

and the Fuchsian polynomials

$$F(7/12,13/12,2/3,x) \quad \text{if } p = 1 \bmod 6$$

$$F(17/12,11/12,1/3,x) \quad \text{if } p = -1 \bmod 6$$

$$x = 256b^3/27a^4,\ f(x) \otimes f'(x) = -27a^4+256b^3$$

appear.

Relation with Legendre-Jacobi normal form is also interesting.

Example 2.

$$C: \quad y^2 = f(x) = x^4+ax^2+b$$

In this case, fundamental relations are

$$r+s+t = (p-1)/2,\ 4r+2s = p-1$$

and the solution is simple, putting $m = (p-1)/2 = -1/2 \bmod p$, then

$$r = t,\ s = -2t+(p-1)/2.$$

In this case, $r!s!t! = t!^2(m-2t)!$, so the ratio by the process t-1 to t is

$$(m-2t+1)(m-2t)/t^2 = 4(t-1/4)(t+1/4)/t^2$$

and the Fuchsian polynomial is

$$F(5/4,3/4,1,x),\ x = 4b/a^2,\ f(x) \otimes f'(x) = 16b(4b-a^2)^2.$$

1.3 Vandermonde matrix

Let us begin with the notion of logarithmic differential (= logdif, lodi)

$$d[x]f(x) = d\log(f(x))/dx = d[x]f(x) = f'(x)/f(x).$$

This temporal notation d[x] satisfy

$$d[x](f(x)g(x)) = d[x]f(x)+d[x]g(x)$$

$$d[x](f(x)/g(x)) = d[x]f(x)-d[x]g(x)$$

and so

$$d[x]\prod_{i\in n}(x-a_i)^\wedge e_i = \sum_{i\in n} e_i/(x-a_i)$$

in the image, denominator does not have any multiple factor, namely the determinant of denominator does not vanish:

$$\det(g(x)) = g(x) \otimes g'(x) \neq 0$$

Inverse operation $\int[x]$ is called, integral exponential (= intexp, inex, temporal name, usual notion would be exponential integral)

Example 3. p = 11.

$$x^{10}-1 = (x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

$$x^4+x^3+x^2+x+1 = (x+2)(x-4)(x-5)(x-3)$$

$$x^4-x^3+x^2-x+1 = (x+4)(x-2)(x+5)(x+3)$$

in this case the fractional

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)/(x^4-x^3+x^2-x+1)$$
$$= (x+2)(x-4)(x-5)(x-3)/((x+4)(x-2)(x+5)(x+3))$$
$$= 1+3/(x+4)-2/(x-2)-5/(x+5)-5/(x+3)$$

so, in lavr form

$$\int[x](x^4+x^3+x^2+x+1)/(x^4-x^3+x^2-x+1)$$
$$= \int[x](1+3/(x+4)-2/(x+9)-5/(x+5)-5/(x+3))$$
$$= x(x+4)^3/((x-2)^2(x+5)^5(x+3)^5)$$

denominator contains multiplicative factor, so its integral exponential does not exist.

$$d[x]((x^4+x^3+x^2+x+1)/(x^4-x^3+x^2-x+1))$$
$$= 1/(x+2)+1/(x-4)+1/(x-5)+1/(x-3)-1/(x+4)-1/(x-2)-1/(x+5)-1/(x+3)$$
$$= -2(x-1)(x+1)(x^2-2)(x^2+5)$$
$$/((x+2)(x-4)(x-5)(x-3)(x+4)(x-2)(x+5)(x+3))$$

The notion of *finite Fourier transform* (= fFt, *coefficient transform*, *Vandermonde transform*) is little bit different. Let

$$F_p = GF(p) = p = \{0, 1, \cdots, p-1\}$$

be a prime field and $F_p{}^p[x]$ be p-dimensional linear space over F_p

$$F_p{}^p[x] = \{a_0+a_1x+\ldots+a_{p-2}x^{p-2}+a_{p-1}x^{p-1}: a_i \in F_p\} = p^p = p \text{ to } p = p2p$$

this space can be considered simply a set of p sequence of elements of p, namely p^p.

Let q be a primitive root mod p, then *finite Fourier transform* $[q]$ is defined as

$$[q]: F_p{}^p[x] \rightarrow F_p{}^p[x] = p^p \rightarrow p^p = p3p$$
$$[q]\sum_{i\in p} a_ix^i = (1-x^{p-1})[q](\sum_{i\in p-1} a_i/(1-q^ix)+a_{p-1})$$
$$= (1-x^{p-1})(a_0/(1-x)+a_{10}/(1-qx)+\cdots+a_{p-2}/(1-q^{p-2}x)+a_{p-1}).$$

In this respect,

$$[q] \in \mathrm{Aut}(F_p{}^p[x]) = p3p \rightarrow p3p = p4p$$

so the group generated by $[q]$'s for all primitive roots mod p,

$$G = \langle [q]: q \in \mathrm{proot}(p) \rangle \subset H = \mathrm{Aut}(F_p{}^p[x])$$

the structure problem of H/G is very interesting.

Historically, I first defined as *coefficient transform:* for a p-2 degree polynomial

$$f(x) \in F_p{}^{p-1}[x] = p^{p-1}$$
$$f(x)[q](x) = f(1)+f(q)x+\cdots+f(q^{p-2})x^{p-2}$$
$$[q]: F_p{}^{p-1}[x] \rightarrow F_p{}^{p-1}[x]$$
$$[q]\sum_{i\in p-1} a_ix^i = \sum_{i\in p-1} f(q^i)x^i = (1-x^{p-1})[q](\sum_{i\in p-1} a_i/(1-q^ix)).$$

For me it needs long time to notice that this is not a *property* but a *definition.*

The charactreristic polynomial of prime fiels F_p, namely

$$x\text{-}x^p = x(1\text{-}x^{p-1}) = x\delta(x),\ \delta(x) = 1\text{-}x^{p-1}$$

play the role of vacuum space, it is the stage, the space things develops. Key notion is Vandermonde matrix of $x\delta(x)$, namely

$$\partial[x]\,x(1\text{-}x^{p-1}) = \partial[x]\,x(1\text{-}x)\ (1\text{-}qx)\ (1\text{-}q^2x)\cdots(1\text{-}q^{p-2}x)$$

which is, matrix consists of coefficients

$$x(1\text{-}x^{p-1})/(1\text{-}x) = x(1+x+x^2+\cdots+x^{p-2})$$

$$x(1\text{-}x^{p-1})/(1\text{-}qx) = x(1+qx+q^2x^2+\cdots+q^{p-2}x^{p-2})$$

$$x(1\text{-}x^{p-1})/(1\text{-}q^2x) = x(1+q^2x+q^4x^2+\cdots+q^{2(p-2)}x^{p-2})$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$x(1\text{-}x^{p-1})/(1\text{-}q^{p-2}x) = x(1+q^{p-2}x+q^{p-3}x^2+\cdots+qx^{p-2})$$

$$(x\text{-}x^p)/x = 1\text{-}x^{p-1},$$

Example 3. Vandermonde matrix generated by primitive root,

$$p = 7,\ \dot{q} = 3,\ [q]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

extended Vandermonde matrix $[q]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

it includes original Vandermonde matrix as principal minor. It satisfy Fourier property, namely, 4-th power is identity $F^4 = E = \mathrm{id}$. Extended part can be used as parity part. $0/\infty$ part, namely the lowest row interact only with the first column, 0-dimensional momentum (mass, charge etc). Any how, $[q]^2$ of the above matrix is

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

as expected. To add parity bit corresponds to extend space p^{p-1} to p^p, which is known as *successor exponential law*

$$(p\wedge p)\wedge(p\wedge(p-1)) = p\wedge(p\cdot p\wedge(p-1)) = p\wedge(p\wedge p) \neq (p\wedge p)\wedge p = p\wedge p^2 \neq (p\wedge p)^2$$

Note that the symmetric matrix,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

is singular in F_p and does not satisfy Fourier property, namely not Fourier matrix, its 4-th power is:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

and it is not the identity matrix.

Example 4. $x(1-x^n)$ in complex number field:

Modified Vandermonde matrix is

$n = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$$

this matrix is Fourier matrix for any a.

$n = 2$:

$$A = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & b & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

this matrix is Fourier matrix only when $a = b(1+\sqrt{2})$ for any b.

n = 3: $\omega = (-1+i\sqrt{3})/2$

$$A = 1/\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & \omega^2 & 0 \\ 1 & \omega^2 & \omega & 0 \\ a & b & c & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

this matrix is Fourier matrix only when $a = (b+c)(1+\sqrt{3})/2$ for any b, c.

n = 4:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & i/2 & -1/2 & -i/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -i/2 & 1/2 & i/2 & 0 \\ a+b+c & a & b & c & -1 \end{pmatrix}$$

if lowermost row is replaced by $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1)$ then it is not a Fourier matrix.

n = 5: $x(1-x^5)$

$$1/\sqrt{5}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \tau & \tau^2 & \tau^3 & \tau^4 & 0 \\ 1 & \tau^2 & \tau^4 & \tau & \tau^3 & 0 \\ 1 & \tau^3 & \tau & \tau^4 & \tau^2 & 0 \\ 1 & \tau^4 & \tau^3 & \tau^2 & \tau & 0 \\ (b+c+d+e)(1+\sqrt{5})/4 & b & c & d & e & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

where

$$[\tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4] =$$
$$[(-1+\sqrt{5}/4+i\sqrt{(10+2\sqrt{5})})/4,\ (-1-\sqrt{5}/4+i\sqrt{(10-2\sqrt{5})})/4,$$
$$(-1-\sqrt{5}/4-i\sqrt{(10-2\sqrt{5})})/4,\ (-1+\sqrt{5}/4-i\sqrt{(10+2\sqrt{5})})/4].$$

$n = 6$: $x(1-x^6)$

$$1/\sqrt{6}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & (1+i\sqrt{3})/2 & (-1+i\sqrt{3})/2 & -1 & (-1-i\sqrt{3})/2 & (1-i\sqrt{3})/2 & 0 \\ 1 & (-1+i\sqrt{3})/2 & (-1-i\sqrt{3})/2 & 1 & (-1+i\sqrt{3})/2 & (-1-i\sqrt{3})/2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & (-1-i\sqrt{3})/2 & (-1+i\sqrt{3})/2 & 1 & (-1-i\sqrt{3})/2 & (-1+i\sqrt{3})/2 & 0 \\ 1 & (1-i\sqrt{3})/2 & (-1-i\sqrt{3})/2 & -1 & (-1+i\sqrt{3})/2 & (1+i\sqrt{3})/2 & 0 \\ a & b & c & d & e & f & -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

is Fourier matrix iff

$$b = -d-f+\sqrt{6}(a-d)/2,\ c = -a-e+\sqrt{6}(a+d)/2.$$

or

$$a = (2(c+e)-\sqrt{6}d)(2+\sqrt{6})/2,\ b = (-4d+2f+\sqrt{6}(c+e-f))(2+\sqrt{6})/2.$$

Any how, 2 independent relations appear here.

$n = 7$: lowest row

$$1/\sqrt{7}(a, b, c, d, e, f, g, -\sqrt{7})$$

Fourier condition is:

$$a = (d+e)(1+\sqrt{7})/2,\ b = d+e-g,\ c = d-f+e.$$

$n = 8$:

$$1/\sqrt{8}(a, b, c, d, e, f, g, h, -\sqrt{8})$$

$$a = (c+g+(1-\sqrt{2})e)(1+\sqrt{2}),\ b = ((d-4e+f+h)+\sqrt{2}(c+2e+g-d-f-h))(1+\sqrt{2})$$

$n = 9$:

$$1/3(a, b, c, d, e, f, g, h, i, -3)$$

$$a = (3f+3e+d+g)/2,\ b = e+f-i,\ c = f-h+e.$$

Behavior of mixed system, with interaction term via $0/\infty$ term works independently.

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & (-1/\sqrt{3}+i)/2 & (-1/\sqrt{3}-i)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & (-1/\sqrt{3}-i)/2 & (-1/\sqrt{3}+i)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & i/2 & -1/2 & -i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -i/2 & -1/2 & i/2 & 0 \\ a & b & c & d & e & f & g & -1 \end{pmatrix}$$

$$a = (b+c)(1+\sqrt{3})/2,\ d = e+f+g$$

Example 4. things and words (= 音沙汰)

Consider, temporary list

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		sp	=	+	−	×	/	<	π	*i*
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
30	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
40	u	v	w	x	y	z	,	.		

and the a sequence of letters:

fourier coefficient vandermonde

in the finite field $p = 61$, $p\text{-}1 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. In the case $p = 61$, we have

$$\mathrm{pres}(61) = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59\}$$

$$\mathrm{proot}(61) = \{0, 2, 6, 7, 10, 17, 18, 26, 30, 31, 35, 43, 44, 51, 54, 55, 59\}$$

with $16 = 2(2^1\text{-}1)/(2\text{-}1) \cdot (3\text{-}1)(5\text{-}1)$ elements.

Note that pres(p) is closed under - mod p-1, like -11 mod p-1 = 49, and proot(p) is closed under inverse mod p, like 1/6 mod p = 51, also the product of primitive roots, in general, is not a primitive root, as $2 \cdot 6 = 12$ is not a primitive root mod p.

The above letters corresponds to a sequence of 31 numbers:

[25,34,40,37,28,24,37,1,22,34,24,25,25,28,22,28,
24,33,39,1,41,20,33,23,24,37,32,34,33,23,24]

Consider this as a polynomial of $F_p^{p\text{-}1}[x]$, beginning with, for example x^7, namely

$$f(x) =$$

$$24x^{37}+23x^{36}+33x^{35}+34x^{34}+32x^{33}+37x^{32}+24x^{31}+23x^{30}+33x^{29}+20x^{28}$$
$$+41x^{27}+x^{26}+39x^{25}+33x^{24}+24x^{23}+28x^{22}+22x^{21}+28x^{20}+25x^{19}+25x^{18}$$
$$+24x^{17}+34x^{16}+22x^{15}+x^{14}+37x^{13}+24x^{12}+28x^{11}+37x^{10}+40x^{9}+34x^{8}+25x^{7}$$

take, for example, as a primitive root $q = 18$, then the finite Fourier transform $[q]$ is:

$$f(x)[18](x) = \sum_{n \in p\text{-}1} f(q^n)\, x^n =$$

$$37x^{59}+49x^{58}+58x^{57}+7x^{56}+55x^{55}+19x^{54}+19x^{53}+26x^{52}+24x^{51}+37x^{50}+53x^{49}+38x^{48}$$
$$+27x^{47}+20x^{46}+9x^{45}+39x^{44}+30x^{43}+22x^{42}+56x^{41}+36x^{40}+29x^{39}+37x^{38}+27x^{37}+28x^{36}$$
$$+51x^{35}+12x^{34}+60x^{33}+18x^{32}+58x^{31}+31x^{30}+42x^{29}+60x^{28}+15x^{27}+44x^{26}+27x^{25}$$
$$+5x^{24}+52x^{23}+55x^{22}+10x^{21}+25x^{20}+52x^{19}+8x^{18}+13x^{17}+41x^{16}+37x^{15}+36x^{14}$$
$$+31x^{13}+45x^{12}+45x^{11}+28x^{10}+34x^{9}+x^{8}+13x^{7}+12x^{6}+13x^{5}+14x^{3}+32x^{2}+27x+1$$

or, as a sequence of coefficients:

[1, 27, 32, 14, 0, 13, 12, 13, 1, 34, 28, 45, 45, 31, 36, 37, 41, 13, 8, 52,

25, 10, 55, 52, 5, 27, 44, 15, 60, 42, 31, 58, 18, 60, 12, 51, 28, 27, 37, 29,
36, 56, 22, 30, 39, 9, 20, 27, 38, 53, 37, 24, 26, 19, 19, 55, 7, 58, 49, 37]

$$f(x)\,[18]^2(x)=$$

$$36x^{53}+27x^{52}+21x^{51}+24x^{50}+33x^{49}+37x^{48}+24x^{47}+60x^{46}+39x^{45}+27x^{44}+37x^{43}+36x^{42}$$
$$+36x^{41}+33x^{40}+39x^{39}+33x^{38}+37x^{37}+28x^{36}+22x^{35}+60x^{34}+20x^{33}+41x^{32}+28x^{31}+38x^{30}$$
$$+37x^{29}+24x^{28}+29x^{27}+27x^{26}+28x^{25}+38x^{24}+37x^{23}$$

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 37, 38, 28, 27, 29, 24, 37, 38, 28, 41, 20, 60, 22, 28, 37, 33, 39,
33, 36, 36, 37, 27, 39, 60, 24, 37, 33, 24, 21, 27, 36, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

its minus mod p is:

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, e, d, n, o, m, r, e, d, n, a, v, □, t, n, e, i, c,
i, f, f, e, o, c, □, r, e, i, r, u, o, f, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

hereafter, we write them in the coefficient form:

$$f(x)\,[18]^3(x)=$$

[60, 24, 12, 3, 54, 6, 42, 42, 35, 37, 24, 8, 23, 34, 41, 52, 22, 31, 39, 5,
25, 32, 24, 34, 33, 10, 49, 1, 43, 3, 30, 19, 1, 46, 17, 34, 56, 9, 6, 51,
36, 9, 53, 48, 20, 24, 25, 30, 16, 16, 33, 27, 60, 48, 49, 48, 0, 47, 29, 34]

$$f(x)\,[18]^4(x)=$$

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 25, 34, 40, 37, 28, 24, 37, 1, 22, 34, 24, 25, 25,
28, 22, 28, 24, 33, 39, 1, 41, 20, 33, 23, 24, 37, 32, 34, 33, 23, 24, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

which of course reproduce the original sequence, namely by Fourier property, $T^4 = E$.

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, f, o, u, r, i, e, r, □, c, o, e, f, f,
i, c, i, e, n, t, □, v, a, n, d, e, r, m, o, n, d, e, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

is reproduced.

The invers of $[q]$ is minus of $[q^{-1}]$, namely

$$[q] = [q]^3 = -[q^{-1}].$$

In this case $18^{-1} = 1/18 = 17 \bmod p$, namely,

$$f(x)\,[18]\,[18]^{-1}(x) = -\,f(x)\,[18]\,(x)\,[17]\,(x) = f(x)$$

Let pres(p) the set of all primitive residues mod p-1 and proot(p) be the set of all primitive roots mod p.

$$\mathrm{pres}(p) = \{x \in p\text{-}1:\ (x,p\text{-}1) = 1\},$$
$$\mathrm{proot}(p) = \{x \in p:\ \forall n \in p\text{-}1\,(x^n \bmod p \neq 1)\}$$

$$\exp, \log: \mathrm{pres}(p) \approx \mathrm{proot}(p)$$
$$\times : \mathrm{pres}(p) \times \mathrm{pres}(p) \to \mathrm{pres}(p)$$
$$\exp : \mathrm{proot}(p) \times \mathrm{pres}(p) \to \mathrm{proot}(p)$$
$$\log_q r = r//q : \mathrm{proot}(p) \times \mathrm{proot}(p) \to \mathrm{pres}(p)$$
$$q//q = 1,\ s//r \cdot r//q = s//q,\ q\hat{}(r//q) = r$$
$$s//r^{-1} = s^{-1}//r = -(s//r) \quad \text{mod p-1 (notice not mod p)}$$

$\log_q r = r//q$ is called *discrete logarithm* or *exponential quotient* (= *ratio, rate*).
pres(p) is a multiplicative abelian group, and every primitive root of q determines a group operation ⟨q⟩ on the group proot(p) as q as its unit element.

For a fixed primitive root q, by set-notation,

$$q\hat{}\mathrm{pres}(p) = \mathrm{proot}(p)$$
$$\log_q \mathrm{proot}(p) = q \log \mathrm{proot}(p) = \mathrm{pres}(p)$$

The product ⟨q⟩ of primitive roots is defined to be

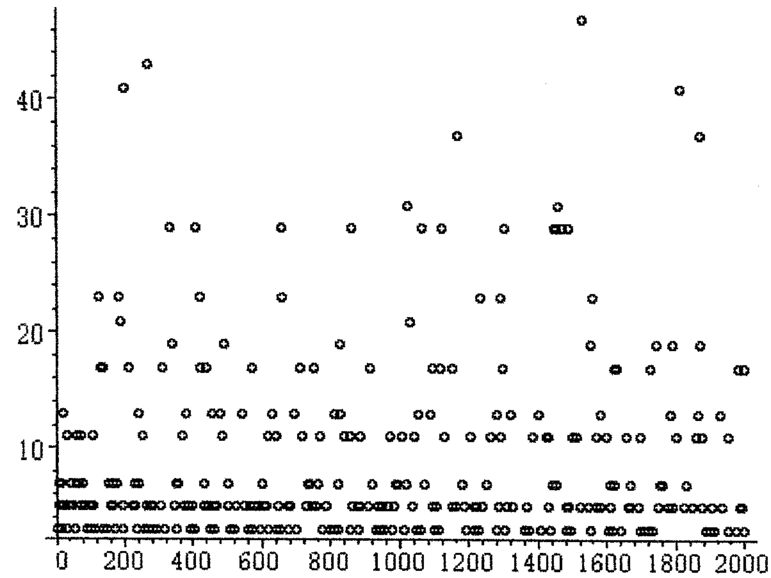
$$r\langle q\rangle s = q\hat{}(r//q \cdot s//q) = r\hat{}(s//q) = s\hat{}(r//q)$$

and q is the unit element with respect to ⟨q⟩.

$$(r\langle q^{-1}\rangle s) = r\langle q\rangle s^{-1},\ r\langle q\rangle s = s\langle q\rangle r,\ q\langle q\rangle s = s,\ (r\langle q\rangle s)\langle q\rangle t = r\langle q\rangle(s\langle q\rangle t) = r\langle q\rangle s\langle q\rangle t$$

Following is the graph of least element of residue-root mod p (resroot), namely the intersection

$$\mathrm{rsrt}(p) = \mathrm{pres}(p) \cap \mathrm{proot}(p)$$
$$\min(\mathrm{rsrt}(p)),\ p = 5 \sim 1999$$



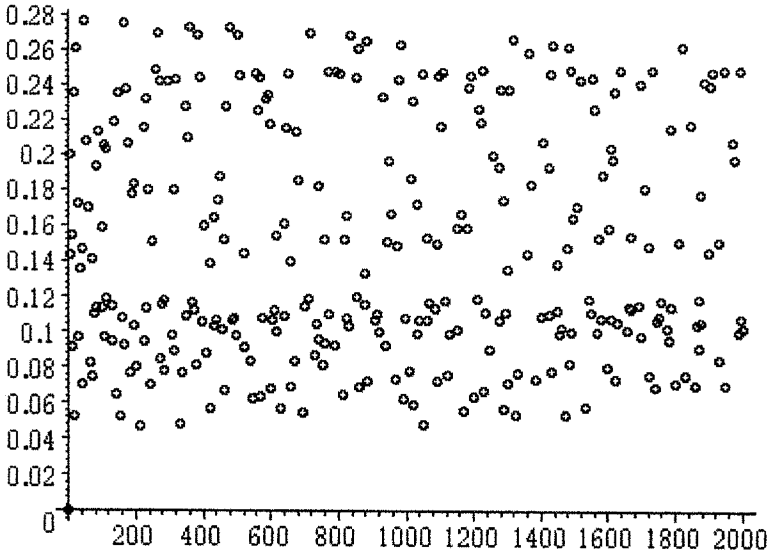
it is expected rsrt(p) = pres(p) ∩ proot(p) is not empty if p not 2, 3.

$$\mathrm{rsrt}(19) = \{13\}$$

and for p = 1531, least element of pres(p) ∩ proot(p) is 47, local maximal element.

Because, for example, prime of the form p = k・m!+1, smallest of rspr(p) is bigger than m.

[p, #rsrt(p)/p], p = 5 ~ 1999



there are, examples rsrt(p) of

[211, [17, 29, 41, 127, 131, 149, 167, 181, 187, 191]]

[331, [29, 37, 41, 59, 97, 101, 107, 137, 217, 221, 227, 277, 301, 307, 311, 317]]

in this case, rates are

1/19 = 0.052631, 10/211 = 0.047393, 16/331 = 0.048338, 50/1051 = 0.047573

and so p = 211's ratio 10/211 is the smallest in this range of pime numbers, is this really the minimum for all primes?, or what is the minimum or minimal, what would be the limit density function (seems not uniform), how about lower-upper limit, are they algebraic?…, *presroot-problem.*

2. Elliptic curves

In general, elliptic curve in the form

$$y^2 = x^4+ax^2+bx+c$$

is known to be transformed by bi-rational transformation, ie. Cremona transformation,

$$t = 4xy+4x^3+2xa+b,\ s = 2y+2x^2+a/3$$

or its inverse

$$x = 3/2\cdot(t-b)/(2a+3s),\ y = 1/12\cdot(54s^3+54s^2a-27t^2+54tb-27b^2-8a^3)/(2a+3s)^2$$

to, Weierstrass normal form

$$t^2 = s^3-(a^2/3+4c)s+2a^3/27+b^2-8ca/3.$$

Note that, this transformation does not change their determinant

$$\det(f(x)) = f(x) ⓧ f'(x),$$

except for its signature, namely, a discriminant reflector (= *discrefl.*):

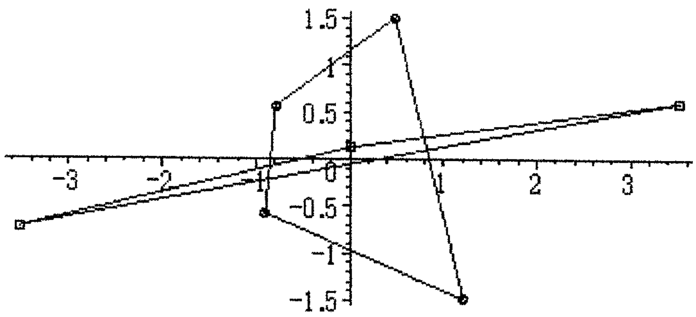
$$\det(x^4+ax^2+bx+c)+\det(s^3-(a^2/3+4c)s+2a^3/27+b^2-8ca/3) = 0$$

or more explicitly

$$x^4+ax^2+bx+c \;ⓧ\; 4x^3+2ax+b$$
$$= -4a^3b^2-27b^2+16a^4c-128c^2a^2+144cab^2+256c^3$$
$$= -(s^3-(a^2/3+4c)s+2a^3/27+b^2-8ca/3 \;ⓢ\; 3s^2-(a^2/3+4c)).$$

Following is an example of their roots figure:

$$x^4+ax^2+bx+c,\ s^3-(a^2/3+4c)s+2a^3/27+b^2-8ca/3 = 0,$$
$$a = 1+i,\ b = 2i+3,\ c = 3+i$$



Examle 5. Congruent number $62 = 2\cdot31$

Congruent number is a number which is the area of right rational triangle, namely

$$n = ab/2,\ a^2+b^2 = c^2$$

and so,

$$c^2\pm4n = a^2+b^2\pm2ab = (a\pm b)^2.$$

this means that $(a-b)^2$, c^2, $(a+b)^2$ have equal difference 4n, and related to an elliptic curve of the form

$$y^2 = x(x^2-q^2).$$

with non-trivial (squared) solution.

Note that, for the equations

$$y^2 = f(x)g(x),\ y^2 = f(x)/g(x)$$

solvability is equivalent because, last one is $(yg(x))^2 = f(x)g(x)$. this principle is called prod/div-principle (= *prodiv-principle*).

The example case $q = 62$.

$$y^2 = x^2(x^4-q^2) = x(x^2+q)(x(x^2+q))$$

it is equivalent to

$$z^2 = x(x^2+q)/(x(x^2-q)) = (x^2+q)/(x^2-q)$$

and to

$$z^2 = (x^2+q)/(x^2-q),\ x^2 = q(z^2+1)/(z^2-1) \text{ or } x^2 = q(z^2+1)(z^2-1).$$

Right side fraction, in the case q is separated, at least as

$$x^2 = q(z^2+1)/(z^2-1),\ x^2 = 2q(z^2+1)/((z^2-1)/2)$$

$$x^2 = ((z^2+1)/2)/(2q(z^2-1)),\ x^2 = (z^2+1)/(q(z^2-1)).$$

In this case, we consider, the third one

$$x^2 = ((z^2+1)/2)/(2q(z^2-1))$$

and the equation of denominator

$$s^2 = 2q(z^2-1) \text{ or } t^2 = (z+1)/(2q(z-1)),$$

Last one is equivalent to

$$z = (2t^2q+1)/(2t^2q-1),$$

substitute this to $x^2 = q(z^2+1)(z^2-1)$, then we have

$$x^2 = 1/4\cdot(4t^4q^2+1)/t^2.$$

Since other terms are complete square, it is necessary to solve

$$u^2 = 4t^4q^2+1$$

in rational numbers. We have a solution $t = 5727/84560$ for $q = 62$.

$$x^2 = 4229297547568411201/58630597962753600,$$

$$x = 2056525601/242137560 = (13\cdot 37\cdot 41\cdot 104281)/(2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 23\cdot 83\cdot 151)$$

and the elliptic curve

$$y^2 = x(x^2-62^2)$$

$$[x,y] = [4229297547568411201/58630597962753600,$$
$$4445629502796064172685463199/14196669932042127585216000]$$

solution. Since this point is a double point, we search for original point. Let

$$(x-a)(-3a^2+3844)+2(y-b)b = 0$$

be the tangent line at (a,b), which pass $[x,y]$ is

$$(4229297547568411201/58630597962753600-a)(-3a^2+3844)$$
$$+2(4445629502796064172685463199/14196669932042127585216000-b)b = 0.$$

With the condition $b^2 = a(a^2-62^2)$, we have factors

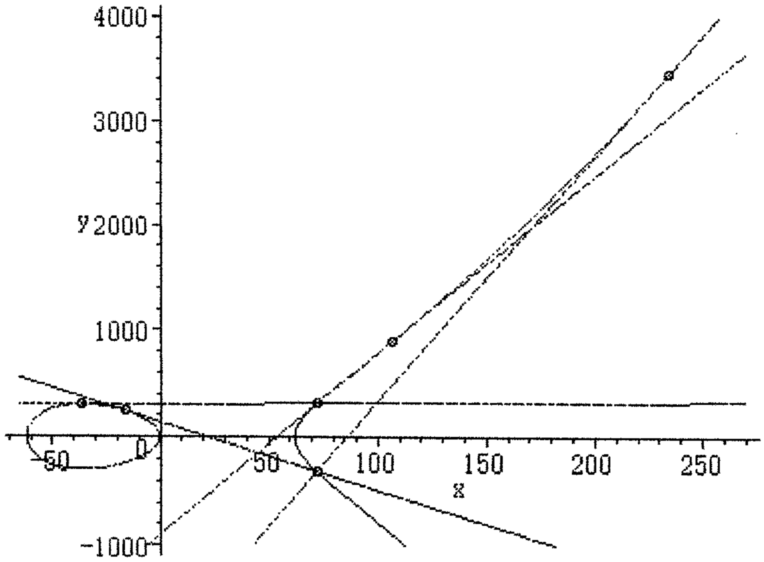
$$(19600a+706831)(22801a-2430400)(62001a+1016738)(529a-124002)$$

from which we have

$$[-706831/19600,\ 2430400/22801,\ -1016738/62001,\ 124002/529]$$

$-31\cdot 151^2/(2^4\cdot 5^2\cdot 7^2),\ 2^6\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 31/151^2,\ -2\cdot 23^2\cdot 31^2/(3^2\cdot 83^2),\ 2\cdot 3^2\cdot 83^2/23^2.$

$a = 124002/529 = 2\cdot(3\cdot 83/23)^2$ could easily be obtained by direct search.



$$(19600a+706831)(22801a-2430400)(62001a+1016738)(529a-124002)$$
$$= (a^2-3844)^2-(2056525601/121068780)^2 a(a-62)(a+62)+15376a^2$$
$$=(a^2-124a-3844)^2-(770844001/121068780)^2$$

and on the curve

$$x^2-y^2 = 4\cdot 62,$$

the smallest point is

$$[x,y]= [33, 29],$$
$$[x,y]= [2056525601/121068780,\ 770844001/121068780]$$

is also on the curve. By a parametric representation

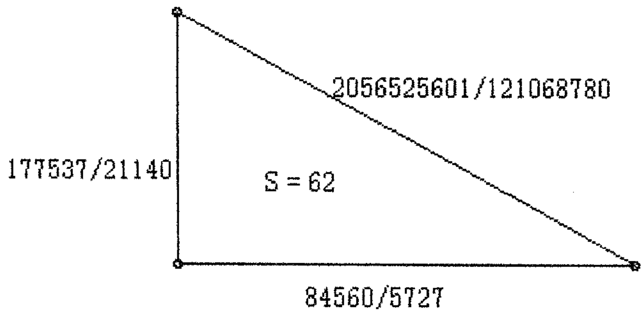
$$x = (33t^2-58t+33)/(t^2-1),\ y = -(29t^2-66t+29)/(t^2-1)$$

corresponding point is $t = 44039/31159$.

From the view point of complexity, search by both methods

$$u^2 = 4t^4q^2+1,\ t = 5727/84560,\ \log(5727\cdot 84560)=19.99816373$$
$$y^2 = x(x^2-62^2),\ x = 124002/529,\ \log(124002\cdot 529)= 17.99904141$$

are similar, but direct search, in this case, is little bit simpler. It is interesting, probably by chance, that both logarithm seems to be near integer.



In another direction, $y^2 = x^4 - 62^2$ is deformed by

$$s = 2y + 2x^2,\ t = 4yx + 4x^3,$$

$$y = 1/4 \cdot (2s^3 - t^2)/s^2,\ x = 1/2 \cdot t/s$$

to $t^2 = s(s^2 + 15376)$, and

$$x = 2056525601/242137560,$$

$$y = 2161718531796708799/58630597962753600,$$

$$s = 7150393600/32798529,$$

$$t = 695599219282240/187837175583$$

corresponds, but in this case, (s,t) is not a double point, so, search by this direction seems not reduce computational complexity.

Example 6. C: $y^2 = f(x) = x^4 - 62^2$, $d = -2^{14} \cdot 31^6$

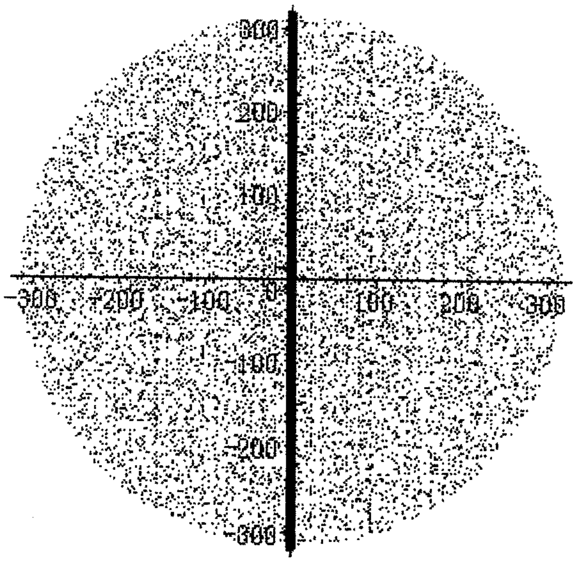
Distribution of complex roots of congruence zeta polynomial

$$x^2 + a_p x + p,\ a_p = 1 + \sum_{x \in p} (f(x)/p)$$

of above elliptic curve is stated below:

$$x^2 + a_p x + p = 0,$$

$$p = 3 \sim 99991$$



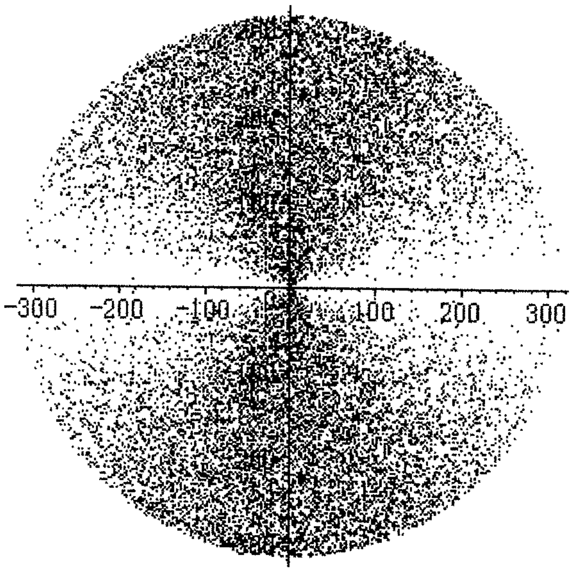
Angular distribution is 1/2 uniform for $p = 1 \bmod 4$, 1/2 pure imaginary for $p = -1 \bmod 4$. This curve have *complex multiplication.*

Next curve is modified by adding $+x$ to the above curve:

$$D: \ y^2 = f(x) = x^4+x-62^2$$

$$d = -1459 \cdot 1723 \cdot 5784283$$

$$x^2+a_p x+p = 0, \ p = 3 \sim 99991, \ 9592 \text{ primes}$$

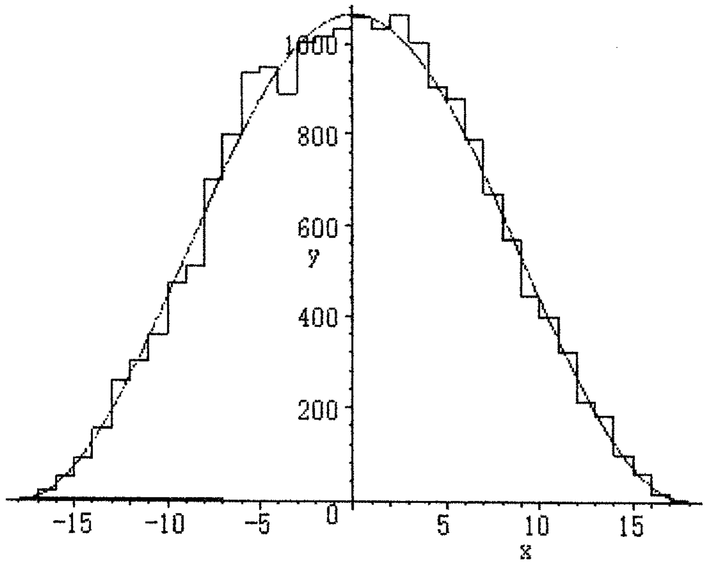


Angular distribution is proportional to $\sin^2\theta$, so called Sato-Tate $\sin^2$-distribution, and it is now known as R. Taylor's $\sin^2$-theorem.

$$D: \ y^2 = f(x) = x^4+x-62^2$$

$$p = 3 \sim 99991, \ 9592 \text{ primes}$$

$$a \cdot \sin^2\theta, \ \theta = \pi(x-18)/36, \ a = 9592/9$$



3 Elliptic counting polynomials and fFt

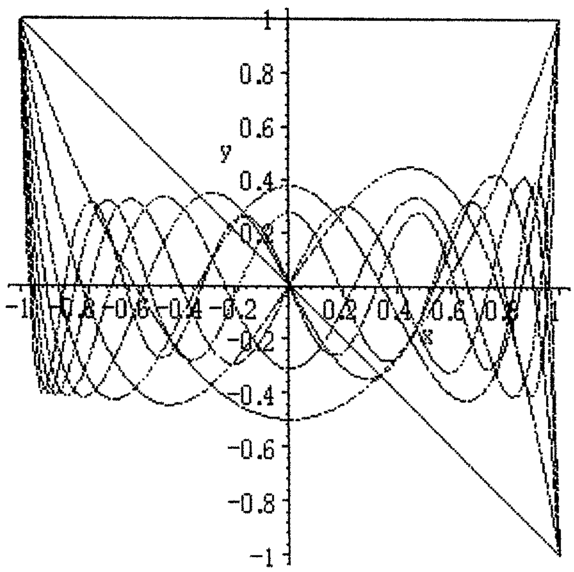
3.1 Legendre-Fuchs polynomial

Legendre-Fuchs polynomial is defined by

$$P_n(1\text{-}2x) = F(-n,n+1,1,x)$$
$$= \sum_{r\leq n} (-n)_r (n+1)_r / r!^2 \cdot (-x)^r,\ \ (n)_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

and initial examples are

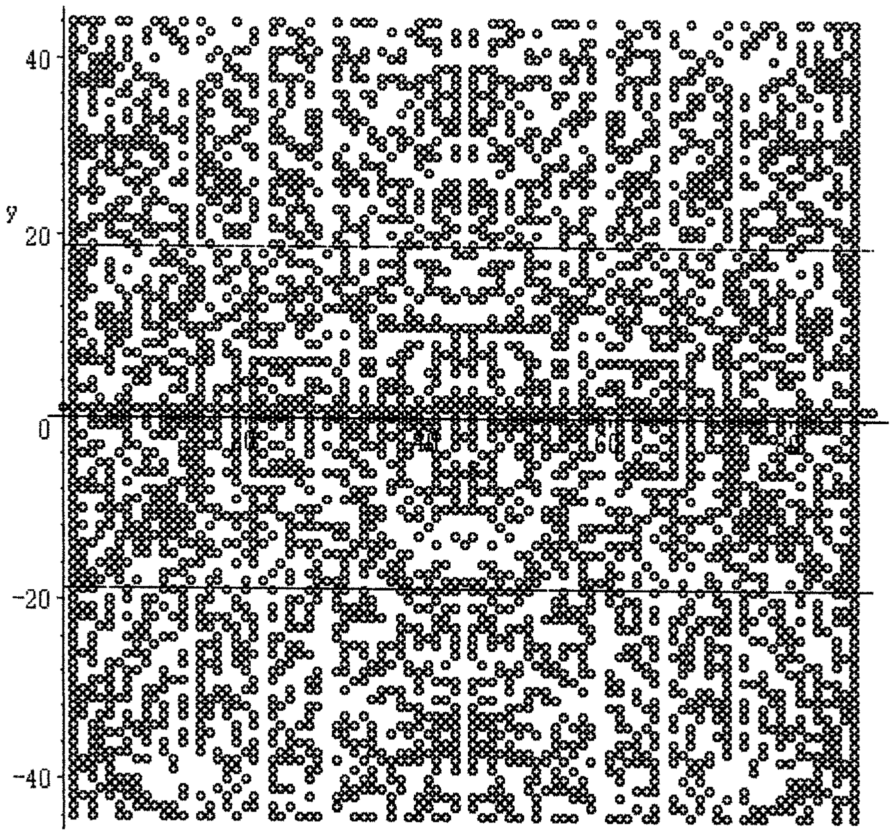
[0, 1], [1, $1-2x$], [2, $1-6x+6x^2$], [3, $1-12x+30x^2-20x^3$], [4, $1-20x+90x^2-140x^3+70x^4$],
[5, $1-30x+210x^2-560x^3+630x^4-252x^5$], [6, $1-42x+420x^2-1680x^3+3150x^4-2772x^5+924x^6$],
[7, $1-56x+756x^2-4200x^3+11550x^4-16632x^5+12012x^6-3432x^7$],
[8, $1-72x+1260x^2-9240x^3+34650x^4-72072x^5+84084x^6-51480x^7+12870x^8$],
[9, $1-90x+1980x^2-18480x^3+90090x^4-252252x^5+420420x^6-411840x^7+218790x^8-48620x^9$]



We consider these polynomials in the finite field.

Example. p = 89

$$\{(n,y) : y = F(-n,n+1,1,x) \ \text{lavr. mod } p,\ x \in p\}$$



in the above graph, two level line are Hasse's bound, namely

$$|F(-n,n+1,1,x) \ \text{lavr. mod } p| < 2\sqrt{89} = 18.86796226$$

there are 7 slits of void line outside of this bound, namely

$$[14,22,29,44,59,66,74]$$

which is

$$-[1/6,1/4,1/3,1/2,2/3,3/4,5/6] \ \text{mod } p = [74, 22, 59, 44, 29, 66, 14]$$

so, they are *Legendre-Fuchs polynomials*

$$F(1/6,5/6,1,x),\ F(1/4,3/4,1,x),\ F(1/3,2/3,1,x),\ F(1/2,1/2,1,x)$$

of degree [p/6], [p/4], [p/3], [p/2] respectively, and satisfy Hessian condition.

Following family, for example, of elliptic curves are known:

name of family	curve form	polynomial	case
(Whock) family	$y^2 = x^3+qx^2+r$	F(1/6, 5/6, 1, x)	
Euler family	$y^2 = x(x^2+qx+r)$	F(1/4, 3/4, 1, x)	

Hessian family	$y^3+x^3+qxy+r=0$	F(1/3, 2/3, 1, x)	
Legendre family	$y^2=x(x-1)(x-q)$	F(1/2, 1/2, 1, x)	
Weierstrass family	$y^2=x^3+qx+r$	$x^{(p-1)/4}$ F(1/12, 5/12, 1, 1-x)	p = 1 (4)
		$x^{(p+1)/4}$ F(7/12, 11/12, 1, 1-x)	p = -1 (4)

There are three types od fundamental properties fo elliptic counting polynomials (= elops). Hessian property, p-valued property images of p-1th root of unit, and separation property.

Example 7. p = 29, Pn(1-2x) = F(-n,n',1,x) lavr.

$$[0, 1], [1, 1-2x], [2, 1-6x+6x^2], [3, 1-12x+x^2+9x^3], [4, 1+9x+3x^2+5x^3+12x^4],$$
$$[5, 1-x+7x^2-9x^3-8x^4+9x^5], [6, 1-13x+14x^2+2x^3-11x^4+12x^5-4x^6],$$
$$[7, 1+2x+2x^2+5x^3+8x^4+14x^5+6x^6-10x^7], [8, 1-14x+13x^2+11x^3-5x^4-7x^5+13x^6-5x^7-6x^8],$$
$$[9, 1-3x+8x^2-7x^3-13x^4-10x^5+7x^6-11x^7+14x^8+13x^9],$$
$$[10, 1+6x+12x^2-13x^3-11x^4-x^5-x^6-14x^7+10x^8-14x^9-3x^{10}],$$
$$[11, 1+13x-2x^2-x^3-7x^4+7x^5+14x^6-5x^7-14x^8+5x^9-5x^{10}-7x^{11}],$$
$$[12, 1-11x+3x^2+8x^3-14x^4-12x^5+13x^6+10x^7-12x^8+6x^9+3x^{10}+13x^{11}-7x^{12}],$$
$$[13, 1-8x+12x^2+7x^3+9x^4+2x^5-2x^6+14x^7-4x^8+4x^9-6x^{10}+11x^{11}-x^{12}-11x^{13}],$$
$$[14, 1-7x-13x^2-5x^3-7x^4+x^5-5x^6+13x^7-5x^8+x^9-7x^{10}-5x^{11}-13x^{12}-7x^{13}+x^{14}]$$

proot(29) = [2, 3, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 21, 26, 27]

pres(29) = [3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27]

Here, we consider the case of elliptic counting (order) polynomials (= *elcp, elop*) and, as example, 7 symmetric cyclic involutions (= sci) related to this elop.

First, consider the case F(1/6, 5/6, 1, x), for which

$$[-1/6, -5/6] \bmod 29 = [24, 4]$$

and so -5/6 mod 29 = 4 = [29/6] is the degree of elop, take q = 2 as primitive root.

$$F(1/6, 5/6, 1, x) = f(x) = 1+9x+3x^2+5x^3+12x^4$$

In this case, in lavr form, its fFt [q] is:

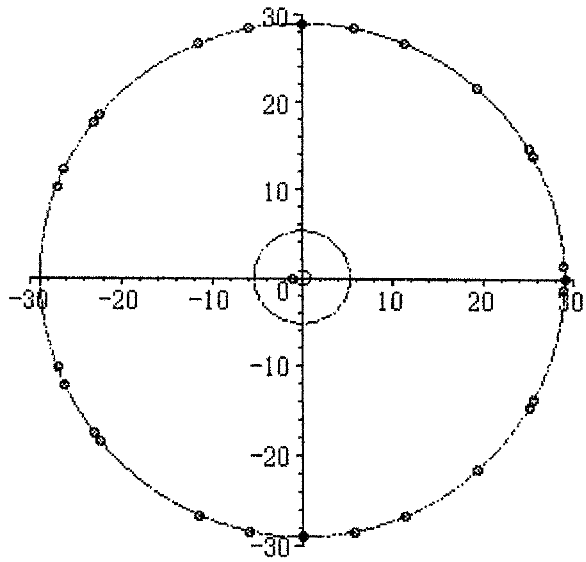
$$F(1/6, 5/6, 1, x)[2](x) = \sum_{n\in p-1} f(q^n)x^n =$$
$$4x^{27}+9x^{26}-6x^{25}-5x^{24}-5x^{23}+10x^{22}-9x^{21}-2x^{20}-3x^{19}-9x^{18}-6x^{17}+10x^{16}$$
$$+2x^{15}+2x^{14}+x^{13}-2x^{12}-6x^{10}-6x^9+4x^8+4x^6+2x^5+x^4+9x^3-3x^2+2x+1.$$

Cyclotomic factorization of characteristic polynomial of the field F_p = p is:

$$x^{p-1}-1 = x^{28}-1 =$$
$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)(x^{12}-x^{10}+x^8-x^6+x^4-x^2+1)$$

value distribution of images of complex p-1st root of 1 by fFt polynomial, in figure:

$$F(1/6, 5/6, 1, x)[2](e^{2\pi ik/(p-1)}),\ k = 0\sim p-2$$



and it means, there is no Gauss nor Eisenstein integer reduction (there is no image points on the circle of radius $\sqrt{p}$), but reduct at x = 1, namely g(1) = -1 but g(1) = p.

Let the residue matrix f(x) [x] g(x) for polynomial f(x) and degree d polynomial is defined to be:

$$f(x)\,[x]\,g(x) = (c_{ij}) \quad d = \mathrm{degree}(g(x))$$

$$c_{ij} = \mathrm{coeff}(\mathrm{rem}(x^{j-1}f(x), g(x), x), x, d-i)$$

namely the matix determined by the coefficient x^{d-1} of reminder of $x^{j-1}f(x)$ by degree d polynomial g(x).

Hence, in this case, for any g(x) split mod p, namely a factor of characteristic polynomial of finite prime fields x^p-x in F_p, and if g(1) ≠ 0, then the residue matrix

$$F(1/6, 5/6, 1, x)\,[2]\,(x)\,[x]\,g(x) = F(1/6, 5/6, 1, x)\,[2|x]\,g(x),$$

$$A = 1/p \cdot F(1/6, 5/6, 1, x)\,[2|x]\,g(x),$$

A is an involution ie. A^2 = E, if moreover, A is symmetric cyclic, then it is called *symmetric cyclic involution* (= sci.)

The case g(x) = x^7-1 = $x(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$, since g(1),

$$A = F(1/6, 5/6, 1, x)\,[2|x]\,x^7-1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -14 & -8 & -4 & 18 & -6 \\ 6 & -14 & -8 & -4 & 18 & -6 & 7 \\ -14 & -8 & -4 & 18 & -6 & 7 & 6 \\ -8 & -4 & 18 & -6 & 7 & 6 & -14 \\ -4 & 18 & -6 & 7 & 6 & -14 & -8 \\ 18 & -6 & 7 & 6 & -14 & -8 & -4 \\ -6 & 7 & 6 & -14 & -8 & -4 & 18 \end{pmatrix}$$

is symmetric cyclic but not produce sci, namely

$$A^2 =$$

$$\begin{pmatrix} 721 & -120 & -120 & -120 & -120 & -120 & -120 \\ -120 & 721 & -120 & -120 & -120 & -120 & -120 \\ -120 & -120 & 721 & -120 & -120 & -120 & -120 \\ -120 & -120 & -120 & 721 & -120 & -120 & -120 \\ -120 & -120 & -120 & -120 & 721 & -120 & -120 \\ -120 & -120 & -120 & -120 & -120 & 721 & -120 \\ -120 & -120 & -120 & -120 & -120 & -120 & 721 \end{pmatrix}$$

but

$$1/p \cdot F(1/6, 5/6, 1, x)\,[2|x]\,x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = 1/p \cdot$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -21 & -15 & -11 & 11 & -13 \\ -20 & -14 & -10 & 12 & -12 & 1 \\ 6 & 10 & 32 & 8 & 21 & 20 \\ 4 & 26 & 2 & 15 & 14 & -6 \\ 22 & -2 & 11 & 10 & -10 & -4 \\ -24 & -11 & -12 & -32 & -26 & -22 \end{pmatrix}$$

is not symmetric but it is an involution.

Consider another case $x^7+1 = (x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

$$1/p \cdot F(1/6, 5/6, 1, x)\,[2|x]\,x^7+1 = 1/p \cdot$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -8 & -2 & 14 & 18 & -10 & 12 \\ -8 & -2 & 14 & 18 & -10 & 12 & 3 \\ -2 & 14 & 18 & -10 & 12 & 3 & 8 \\ 14 & 18 & -10 & 12 & 3 & 8 & 2 \\ 18 & -10 & 12 & 3 & 8 & 2 & -14 \\ -10 & 12 & 3 & 8 & 2 & -14 & -18 \\ 12 & 3 & 8 & 2 & -14 & -18 & 10 \end{pmatrix}$$

this matrix is not a cyclic, because the first element -3, when inserted as last element the sign is changed to 3, but this an involution. Now consider the checker bord transformation, namely multiply $(-1)^{i+j}$ to each matrix element, does not change involution property because the degree is odd, and it is achieved by changing sign of x, namely by taking $F(1/6, 5/6, 1, -x)$ instead of $F(1/6, 5/6, 1, x)$:

$$1/p \cdot F(1/6,\ 5/6,\ 1,\ -x)\ [2|x]\,x^7-1 = 1/p \cdot$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & -2 & -14 & 18 & 10 & 12 \\ 8 & -2 & -14 & 18 & 10 & 12 & -3 \\ -2 & -14 & 18 & 10 & 12 & -3 & 8 \\ -14 & 18 & 10 & 12 & -3 & 8 & -2 \\ 18 & 10 & 12 & -3 & 8 & -2 & -14 \\ 10 & 12 & -3 & 8 & -2 & -14 & 18 \\ 12 & -3 & 8 & -2 & -14 & 18 & 10 \end{pmatrix}$$

this matrix is sci as expected.

$$F(1/4,\ 3/4,\ 1,\ x) = 1+2x+2x^2+5x^3+8x^4+14x^5+6x^6-10x^7$$

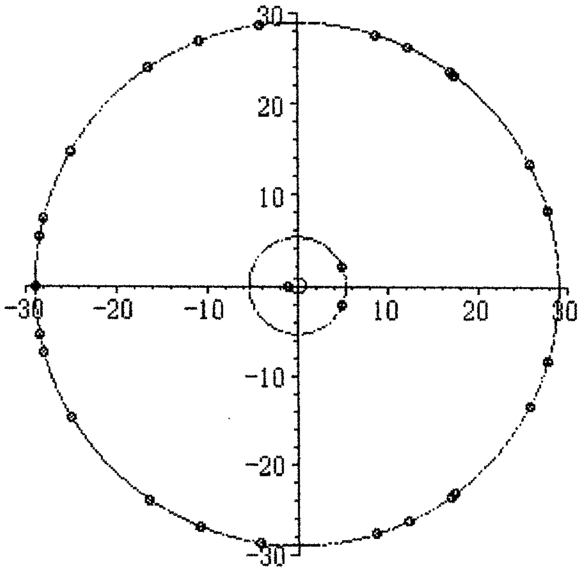
In this case, in lavr form, all coefficient positive exponents are even,

$$F(1/4,\ 3/4,\ 1,\ x)\ [2]\ (x) =$$

$$-2x^{26}-6x^{24}+6x^{23}-6x^{22}+10x^{21}+2x^{20}-6x^{19}-10x^{18}+2x^{17}+6x^{16}+4x^{15}+6x^{14}$$

$$+6x^{13}-2x^{12}+8x^{11}-2x^{10}+2x^{8}-8x^{7}-2x^{6}-4x^{5}-6x^{4}+2x^{3}+6x^{2}-6x-1$$

$$f(x) = F(1/4,\ 3/4,\ 1,\ x)\ [2]\ (e^{2\pi ik/(p-1)}),\ k = 0\sim p-2$$



in this case Gaussian reduction occur, namely $p = 29 = 5^2+2^2 = (5+2i)(5-2i)$, it means the value of cyclotomic factor $x-1$, x^2+1 is reduced, or

$$f(1) = -1,\ f(-1) = -29,\ f(i) = 5+2i,\quad f(-i) = 5-2i.$$

So, in this case, only

$$1/p \cdot F(1/4,\ 3/4,\ 1,\ -x)\ [2|x]\,x^7-1 = 1/p \cdot$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 & -24 & -12 & 6 & -2 & 3 \\ 6 & -24 & -12 & 6 & -2 & 3 & -6 \\ -24 & -12 & 6 & -2 & 3 & -6 & 6 \\ -12 & 6 & -2 & 3 & -6 & 6 & -24 \\ 6 & -2 & 3 & -6 & 6 & -24 & -12 \\ -2 & 3 & -6 & 6 & -24 & -12 & 6 \\ 3 & -6 & 6 & -24 & -12 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

is sci.

$$F(1/3, 2/3, 1, x) = 1-3x+8x^2-7x^3-13x^4-10x^5+7x^6-11x^7+14x^8+13x^9$$

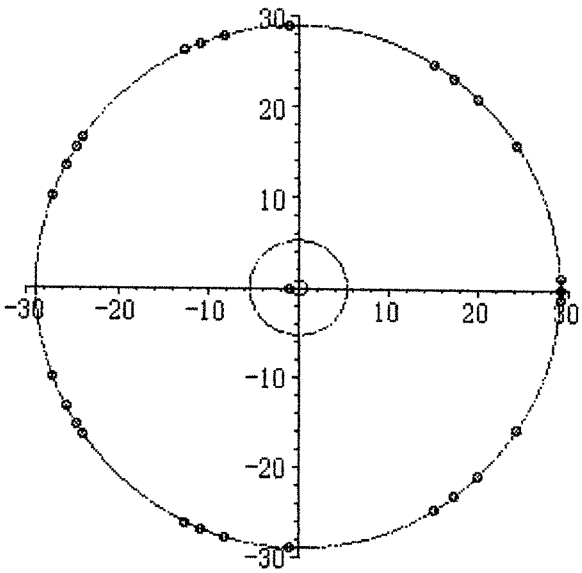
In this case, in lavr form, all coefficient positive exponents are multiple of 3,

$$F(1/3, 2/3, 1, x)[2](x) =$$

$$3x^{26}+6x^{25}+9x^{24}-9x^{23}-6x^{22}+3x^{21}-6x^{20}+9x^{19}-3x^{18}-6x^{17}+6x^{16}$$

$$+6x^{15}+6x^{14}-3x^{13}+6x^{12}+6x^{10}-6x^9-6x^5+3x^4-3x^3-9x^2-6x-1$$

$$f(x) = F(1/3, 2/3, 1, x)[2](e^{2\pi ik/(p-1)}),\ k = 0\sim p-2$$



In this case $g(1) = -1$, $g(-1) = 29$, and no Gauss-Eisenstein reduction, only 7-sci is:

$$1/p\cdot F(1/3, 2/3, 1, -x)[2|x]x^7-1 = 1/p\cdot$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -6 & 24 & 12 & -6 & 2 \\ 6 & -6 & 24 & 12 & -6 & 2 & -3 \\ -6 & 24 & 12 & -6 & 2 & -3 & 6 \\ 24 & 12 & -6 & 2 & -3 & 6 & -6 \\ 12 & -6 & 2 & -3 & 6 & -6 & 24 \\ -6 & 2 & -3 & 6 & -6 & 24 & 12 \\ 2 & -3 & 6 & -6 & 24 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

This case, as a result, is the same as 1/p·F(1/4, 3/4, 1, -x) [2|x] x^7-1 except for the order of elements.

$$F(1/2, 1/2, 1, x) = 1-7x-13x^2-5x^3-7x^4+x^5-5x^6+13x^7-5x^8+x^9-7x^{10}-5x^{11}-13x^{12}-7x^{13}+x^{14}$$

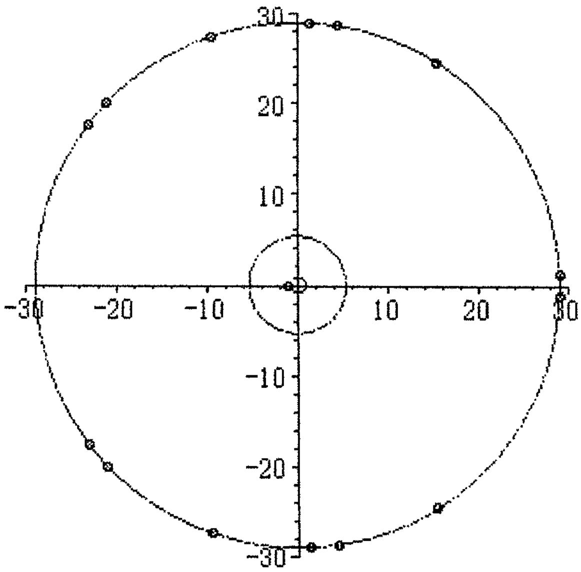
In this case, in lavr form, all coefficient positive exponents are of the form 4n+2,

$$F(1/2, 1/2, 1, x)[2](x) =$$

$$10x^{27}+6x^{26}-6x^{25}-2x^{24}-2x^{23}-2x^{22}+6x^{21}-2x^{20}+6x^{19}+6x^{18}+6x^{17}-2x^{16}+2x^{15}$$

$$-10x^{14}-2x^{13}-2x^{12}-6x^{11}+6x^{10}-6x^{9}-2x^{8}-6x^{7}-2x^{6}+2x^{5}-2x^{4}+6x^{3}+6x^{2}-10x+1$$

$$f(x) = F(1/2, 1/2, 1, x)[2](e^{2\pi ik/(p-1)}),\ k = 0\sim p-2$$



In this case g(1) = g(-1) = -1, so 7-sci both of the form

$$1/p\cdot F(1/2, 1/2, 1, x)[2|x]x^7-1,$$

$$1/p\cdot F(1/2, 1/2, 1, -x)[2|x]x^7-1,$$

does not exist, because a factor of x^7-1, x^7+1 are degenerate.

How about in the case of Weierstrass form, p = 29 = 1 mod 4, in this case

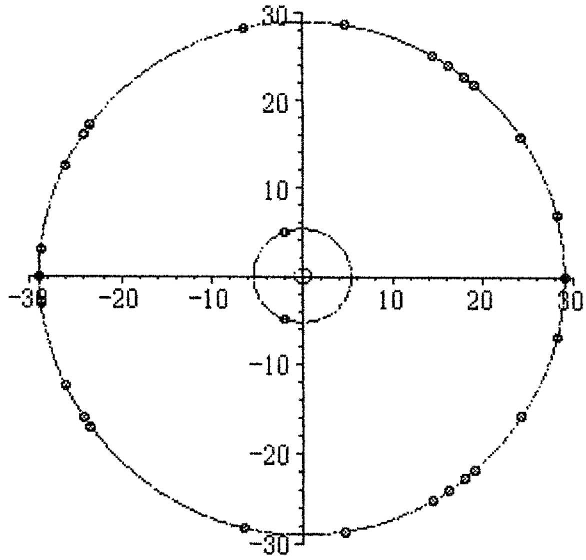
$$F(1/12, 5/12, 1, x) = 8x^2-5x+1$$

$$x^{(p-1)/4}\,F(1/12, 5/12, 1, 1-x) = x^7(8x^2-11x+4)$$

$$x^{(p-1)/4}\,F(1/12, 5/12, 1, 1-x)[2](x) =$$

$$-6x^{27}-9x^{27}+4x^{25}-3x^{24}-5x^{23}-4x^{22}-x^{21}+10x^{20}-3x^{19}+5x^{18}-2x^{17}+2x^{16}$$

$$+6x^{14}-7x^{13}-8x^{11}-2x^{10}+6x^{9}-2x^{8}+8x^{7}+6x^{6}-6x^{5}-9x^{4}-3x^{3}-x^{2}-6x+1$$



In this case

$$[g(1), g(-1), g(i), g(-i)] = [-29, 29, -2+5i, -2-5i]$$

so only the degenerate factor is x^2+1, and Gaussian reduction occurs, so both of them produce 7-sci.

$$1/p \cdot x^{(p-1)/4}\, F(1/12, 5/12, 1, 1-x)\, [2|x] x^7-1 = 1/p \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -18 & -8 & -10 & 2 & -12 & 14 \\ -18 & -8 & -10 & 2 & -12 & 14 & 3 \\ -8 & -10 & 2 & -12 & 14 & 3 & -18 \\ -10 & 2 & -12 & 14 & 3 & -18 & -8 \\ 2 & -12 & 14 & 3 & -18 & -8 & -10 \\ -12 & 14 & 3 & -18 & -8 & -10 & 2 \\ 14 & 3 & -18 & -8 & -10 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

$$1/p \cdot x^{(p-1)/4}\, F(1/12, 5/12, 1, 1-x)\, [2|x] x^7+1 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

but the latter is trivial one.

Uppermost row of 7-sci's obtained above are

[-3, 8, -2, -14, 18, 10, 12], [-6, 6, -24, -12, 6, -2, 3],

$$[-3, 6, -6, 24, 12, -6, 2],\ [3, -18, -8, -10, 2, -12, 14]$$

and if change sign so as to make the sum to p and sort them, then they fall in to two cases,

$$[-6, -6, -3, 2, 6, 12, 24],\ [-14, -3, -2, 8, 10, 12, 18]$$

and moreover, if by τ denote the signature of sci, the sum of elements of a row $\pm p$, then they have opposite sign:

$$\tau(1/p\cdot x^{(p-1)/4}\, F(1/12, 5/12, 1, 1-x)\,[2|x]\,x^7-1)+\tau(1/p\cdot F(1/6, 5/6, 1, -x)\,[2|x]\,x^7+1)=0$$

$$\tau(1/p\cdot F(1/3, 2/3, 1, -x)\,[2|x]\,x^7+1)+\tau(1/p\cdot F(1/4, 3/4, 1, -x)\,[2|x]\,x^7+1\ )=0$$

The condition of 7-sci's is as in ideal basis (or in equational form, insert = 0):

$$[ad+be+cf+dg+ea+fb+gc,\ ac+bd+ce+df+eg+fa+gb,$$
$$ab+bc+cd+de+ef+fg+ga,\ a+b+c+d+e+f+g-p]$$

Number of variables a,bc,d,e,f,g is 7 and number of conditions is 4.

$$e=-(ad+a^2-cd+ac+df+2fa-bc+fb+cf+f^2-fp-pa)/(a-d)$$

$$g=(-ab-bc+ad+bd+d^2+2df-dp+fa+fb+cf+f^2-fp)/(a-d)$$

and eliminated two formulas are

$$-2adb-c^2b+d^3+2adc-a^3+fpb+cfa-2fa^2+2fd^2-f^2a-a^2b-dfb+2dcf-fcp-dfp-d^2p$$
$$+cd^2+bd^2+b^2c-a^2c+pa^2+dbc-dcp-bf^2+df^2+fc^2+cf^2-fb^2+fpa-2fab+abp-abc,$$
$$pabc+f^2ab+bcdp+3f^3a+2cf^3+2f^3b-2ad^2p+b^2d^2-bd^2p+5cf^2a+4cf^2+cdf^2-3cdfb-2cfd^2$$
$$-2cf^2p+f^4+c^2f^2-2f^2bp+2fb^2d-2fb^2a-2b^2cf-2bc^2f+f^2b^2-4f^2a*p+7adf^2-4df^2p+3df^3-2d^2fp$$
$$+5df^2b+4d^2fb-2a^2fb-2a^2fp+3a^2f^2+3d^2f^2-2dc^2f+2c^2fa+2adfb+6d^2fa+6dfa^2+p^2af+fp^2d$$
$$+f^2p^2-2f^3p-cd^3+3a^2cd-2ac^2b-a^3b-2a^2cb+a^3d+cd^2p-2cd^2a+2c^2db-2a^2dp+pa^2b+p^2ad$$
$$-2c^2ad+c^2a^2-cpa^2+c^2d^2+a^2b^2-3cfpa+cdfp-3cfab+2cdfa-6adfp+fpab-3fbdp+2bcfp$$
$$-2ab^2d-2a^2bd+2ab^2c+b^2c^2+2a^2d^2+3abd^2+ad^3-2bcd^2-2b^2cd.$$

By total search of 7-sci for p = 29, we have, 5 sorted sequences

$$[-6, -6, -3, 2, 6, 12, 24],\ [-14, -3, -2, 8, 10, 12, 18]$$
$$[-19, 4, 4, 4, 12, 12, 12],\ [-8, -4, -2, -2, 10, 13, 22],\ [-12, -8, 0, 8, 12, 13, 16]$$

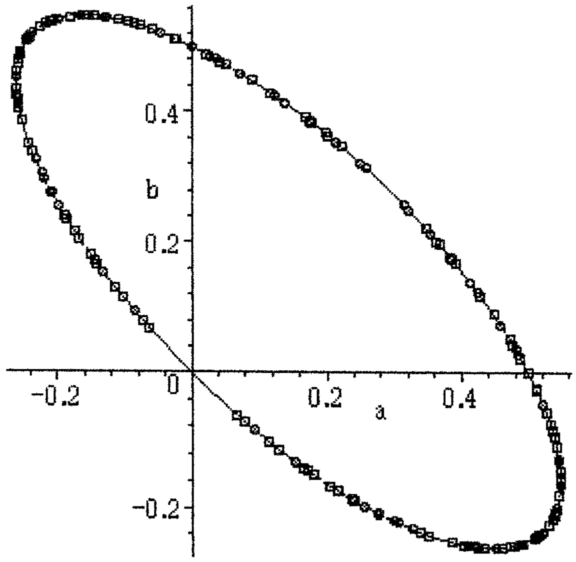
first two are obtained as residue matrix of elops corresponding to

$$F(1/3, 2/3, 1, -x)\,[2|x]\,x^7+1\approx[-6, -6, -3, 2, 6, 12, 24]$$

$$x^{(p-1)/4}\,F(1/12, 5/12, 1, 1-x)\,[2|x]\,x^7-1\approx[-14, -3, -2, 8, 10, 12, 18]$$

$$[p-3(a+b), a, a, b, a, b, b]$$

$$[a,b]/p,\ p=(2a^2+3ab+2b^2)/(a+b),\ p=2\sim 997$$



[4/29, 12/29],[-10/43, 14/43],[-14/71, 18/71],[24/113, 40/113],[-30/127, 66/127]

p = 43

[-12, -6, -6, -2, 18, 24, 27], [-10, -10, -10, 14, 14, 14, 31],
[-21, -6, 6, 6, 12, 16, 30], [-16, -4, -1, 2, 8, 22, 32],
[-14, -1, 2, 2, 2, 14, 38]

$F(1/6,5/6,1,x) = 1-13x-18x^2+14x^3-17x^4+9x^5+15x^6+8x^7$

$1/p\cdot F(1/6,5/6,1,-x)\ [6|x]\,x^7-1 \approx [16, 1, -8, -22, 4, -32, -2]$

$F(1/4,3/4,1,x) = 1+19x+3x^2-6x^3-17x^4+x^5-7x^6-21x^7+11x^8-11x^9-15x^{10}$

$1/p\cdot F(1/4,3/4,1,-x)\ [6|x]\,x^7-1 \approx [24, -6, 18, -6, -2, -12, 27]$

$F(1/3,2/3,1,x) =$
$1+5x-2x^2-12x^3-2x^4-2x^5+10x^6+21x^7+18x^8-2x^9+11x^{10}-13x^{11}+16x^{12}-13x^{13}+8x^{14}$

$1/p\cdot F(1/3,2/3,1,-x)\ [6|x]\,x^7-1 \approx [12, -27, -24, 6, -18, 6, 2]$

$F(1/2,1/2,1,x) =$
$x^{21}+11x^{20}-18x^{19}+9x^{18}+21x^{17}+14x^{16}+4x^{15}+21x^{14}-19x^{13}-20x^{12}$
$-3x^{11}-3x^{10}-20x^9-19x^8+21x^7+4x^6+14x^5+21x^4+9x^3-18x^2+11x+1$

$1/p\cdot F(1/2,1/2,1,\pm x)\ [6|x]\,x^7-1$ do not give any sci.

$x^{(p+1)/4}\,F(1/12, 5/12, 1, 1-x) = x^{11}(-21+17x-3x^2+8x^3)$

$1/p\cdot x^{(p+1)/4}\,F(1/12, 5/12, 1, 1-x)\ [6|x]\,x^7-1 \approx [4, 1, -32, -8, -2, -22, 16]$

It is also true that:

$1/p\cdot F(1/6,5/6,1,-x)\ [6|x]\,x^7-1 \approx 1/p\cdot x^{(p+1)/4}\,F(1/12, 5/12, 1, 1-x)\ [6|x]\,x^7-1$

$1/p\cdot F(1/4,3/4,1,-x)\ [6|x]\,x^7-1 \approx 1/p\cdot F(1/3,2/3,1,-x)\ [6|x]\,x^7-1$

p = 71

[-18, -10, -6, -2, 22, 27, 58], [-18, -12, -8, -5, 28, 42, 44],

[-14, -14, -14, 18, 18, 18, 59], [-12, -9, -6, 6, 8, 18, 66],
[-38, -2, 4, 7, 22, 38, 40]

we also have 5 patterns.

$p = 71,\ q = 7$

$$F(1/6,5/6,1,x) = 1+10x+30x^2+6x^3+26x^4+17x^5+11x^6-26x^7+22x^8+10x^9+10x^{10}+24x^{11}$$

$$1/p\cdot F(1/6,5/6,1,-x)\ [7|x]\ x^7-1 \approx [44, -12, 42, -5, -18, -8, 28]$$

$$F(1/4,3/4,1,x) =$$
$$1-22x-32x^2-22x^3-4x^4+6x^5+25x^6+16x^7-27x^8+7x^9$$
$$-35x^{10}-19x^{11}+20x^{12}+23x^{13}-16x^{14}-14x^{15}-33x^{16}-17x^{17}$$

$$1/p\cdot F(1/4,3/4,1,-x)\ [7|x]\ x^7-1 \approx [6, -6, 8, -12, 66, 18, -9]$$

$$F(1/3,2/3,1,x) =$$
$$1+16x+x^2+34x^3+24x^4+9x^5-24x^6+31x^7+26x^8+30x^9-25x^{10}+8x^{11}+24x^{12}$$
$$+3x^{13}+11x^{14}+6x^{15}+6x^{16}+19x^{17}-21x^{18}+25x^{19}+7x^{20}-19x^{21}+5x^{22}+15x^{23}$$

$$1/p\cdot F(1/3,2/3,1,-x)\ [7|x]\ x^7-1 \approx [-12, 66, 18, -9, 6, -6, 8]$$

$$F(1/2,1/2,1,x) =$$
$$x^{35}+18x^{34}+19x^{33}+27x^{32}+24x^{31}-26x^{30}-11x^{29}+30x^{28}-23x^{27}+6x^{26}+15x^{25}+10x^{24}$$
$$-31x^{23}+29x^{22}+18x^{21}-13x^{20}-7x^{19}+20x^{18}+20x^{17}-7x^{16}-13x^{15}+18x^{14}+29x^{13}$$
$$-31x^{12}+10x^{11}+15x^{10}+6x^9-23x^8+30x^7-11x^6-26x^5+24x^4+27x^3+19x^2+18x+1$$

$1/p\cdot F(1/2,1/2,1,\pm x)\ [7|x]\ x^7-1$ do not give any sci.

$$x^{(p+1)/4}\ F(1/12,\ 5/12,\ 1,\ 1-x) = x^{18}(7+14x-13x^2-9x^3-26x^4+28x^5)$$

$$1/p\cdot x^{(p+1)/4}\ F(1/12,\ 5/12,\ 1,\ 1-x)\ [7|x]\ x^7-1 \approx [8, -42, -28, 5, -44, 18, 12]$$

for this case also

$$1/p\cdot F(1/6,5/6,1,-x)\ [7|x]\ x^7-1 \approx 1/p\cdot x^{(p+1)/4}\ F(1/12,\ 5/12,\ 1,\ 1-x)$$
$$1/p\cdot F(1/4,3/4,1,-x)\ [7|x]\ x^7-1 \approx 1/p\cdot F(1/3,2/3,1,-x)\ [7|x]\ x^7-1$$

Problem (Conjecture): For any prime p mod 7 = 1,

$$F(1/6,5/6,1,-x)\ [7|x]\ x^7-1 \approx x^{(p+1)/4}\ F(1/12,\ 5/12,\ 1,\ 1-x)\ [7|x]\ x^7-1$$
$$F(1/4,3/4,1,-x)\ [7|x]\ x^7-1 \approx F(1/3,2/3,1,-x)\ [7|x]\ x^7-1$$

last one contain only one odd and not multiple of 3 number.

For p = 113, at least 8

[-18, -10, -6, -2, 22, 27, 58], [-18, -12, -8, -5, 28, 42, 44],
[-14, -14, -14, 18, 18, 18, 59], [-12, -9, -6, 6, 8, 18, 66],
[-38, -2, 4, 7, 22, 38, 40], [-68, -6, 17, 24, 42, 46, 58],
[-31, -18, -12, -6, 48, 54, 78], [-44, -36, 12, 17, 48, 52, 64]

Cocerning to the number 5, there is well known

five fifth-power problem (= ffpp)

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5 = 0$$

asking for non-trivial integer solution not

[27, 84, 110, 133, -144], [-220, 5027, 6237, 14068, -14132].

Example 8. Separability

p = 314159441. primitive root q = 3.

$$x^7-1 =$$

$$(x+21258977)(x+258937828)(x+13866133)(x+231627809)$$

$$(x+314159440)(x+85037092)(x+17591044)$$

This means that the 7th root of 1 in F_p are

[292900464, 55221613, 300293308, 82531632, 1, 229122349, 296568397]

for example,

$$n = (p-1)/7 = 44879920,$$

$$q^{44879920} \bmod p = 3^{44879920} \bmod p = 296568397.$$

In this case, as for example the smallest 55221613. By the following Farey series

[1/14,1/7,1/6,3/14,1/4,2/7,1/3,5/14,3/7,1/2]

in the fFt

$$F(1/6,5/6,1,x) = \sum_{n\in[p/6]} (1/6)_n(5/6)_n/n!^2\cdot x^n$$

$$= (1-x^{p-1})\sum_{n\in[p/6]} (1/6)_n(5/6)_n/n!^2\cdot 1/(1-q^n x)$$

only one index n = (p-1)/7 = 44879920 is necessary for the computation of

$$1/p\cdot F(1/6,5/6,1,x)\ [3|x]x^7-1 = 1/p\cdot$$

cyclic matrix generated by

[72873704, 111835922, -110011218, 23191871,

-113130006, -76100886, -222818828]

because, other factor $m < p/6$, $m \neq (p-1)/7 = 44879920$, the polynomial

$$(1-x^{p-1})/(1-q^m x)$$

is divisible by x^7-1, so the remainder by x^7-1 is 0 (simple but essential), only on n = (p-1)/7 = 44879920 remain.

In this case, we take as 7-th root 55221613,

$$(1/6)_n(5/6)_n/n!^2 = -91340613,\ n = (p-1)/7 = 44879920$$

$$-118202954/7\cdot(1-x^7)/(1-55221613x) = \mathrm{lavr}$$

[72873704, 111835922, -110011218, 23191871,

-113130006, -76100886, 91340613]

but this does not determine sci. but, in this case, 91340613-p = -222818828 produce a sci. Usually, some other places would be replaced by ±p change of the numbers.

$$F(1/4,3/4,1,x) = \sum_{n\in[p/4]} (1/4)_n(3/4)_n/n!^2\cdot x^n$$

$$= (1-x^{p-1}) \sum_{n\in[p/6]} (1/4)_n (3/4)_n/n!^2 \cdot 1/(1-q^n x)$$

Because 1/4 < 2/7, only the index n = (p-1)/7 = 44879920 is necessary for the computation of

$$1/p \cdot F(1/4,3/4,1,x)\ [3|x]\ x^7-1 = 1/p \cdot$$

cyclic matrix generated by

[-23191871, 113130006, 76100886, 222818828,

-72873704, -111835922, 110011218]

$$n = (p-1)/7,\ (1/4)_n (3/4)_n/n!^2 = 151816344$$

$$151816344/7 \cdot (1-x^7)/(1-55221613x) = \text{lavr}$$

[-23191871, 113130006, 76100886, -91340613, -72873704, -111835922, 110011218]

in this case the third element 222818828-p = -91340613 is the place of change.

In the case of F(1/3,2/3,1,x), we need to compute two coefficients because

1/7, 2/7 < 1/3,

for n = (p-1)/7,

$$(1/3)_n (2/3)_n/n!^2 = -43934091,$$

$$(1/3)_{2n} (2/3)_{2n}/(2n)!^2 = -87861714.$$

For me, it is big surprise that, the second one is about the twice;

$$87861714 = 2 \cdot 43934091-6468,\ 6468 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11$$

Any way it is computed as,

$$55221613^2 = 229122349,$$

$$(1-x^7)/7 \cdot (-43934091/(1-55221613x) -87861714//(1-229122349x)) = \text{lavr}$$

[26051948, -105589262, -46140554, -123355843,

-49306634, -138543385, 122724289]

$$1/p \cdot F(1/3,2/3,1,x)\ [3|x]\ x^7-1 = 1/p \cdot$$

cyclic matrix generated by

[26051948, -105589262, -46140554, 190803598, -49306634, 175616056, 122724289]

this matrix is 7-sci. In this case, the difference of lavr and 7-sci is on two places

[0, 0, 0, -314159441, 0, -314159441, 0]

namely,

190803598 = p-105589262, 175616056 = p-46140554

For the relation of F(1/3,2/3,1,x), F(1/4,3/4,1,x), we have

$$1/p \cdot F(1/4,3/4,1,x)\ [3|x]\ x^7-1 = 1/p \cdot$$

[-23191871, 113130006, 76100886, 222818828,

-72873704, -111835922, 110011218]

$$1/p \cdot F(1/3,2/3,1,x)\ [3|x]\ x^7-1 = 1/p \cdot$$

$$[26051948, -105589262, -46140554, 190803598, -49306634, 175616056, 122724289]$$

and there seems no obvious relation.

For $p = 314159441 \bmod 4 = 1$, $(p-1)/4 = 78539860$,

$$1/4 < 2/7 < 1/3,\ n = (p-1)(2/7-1/4) = 11219980$$

$$(1/12)_n (5/12)_n / (n!\,(1/2)_n) = -9441060$$

$$-9441060/7 \cdot (1-x^7)/(1-55221613x) =$$

$$[-46228643, 114374716, 25921726, -11262213, 1420615, -102260115, 18033914]$$

but

$$x^{78539860} \cdot F(1/12, 5/12, 1, 1-x)[3|x](x^7-1) = x^{78539860} \cdot F(1/12, 5/12, 1/2, x)[3|x](x^7-1)$$

$$x^{78539860} \cdot F(1/12, 5/12, 1/2, -x)[3|x](x^7+1)$$

seems not determine 7-sci. Probably $F(1/12, 5/12, 1/2, \pm 1) = \pm 1$.

Example 9. Uniform angular distribution of values of p-1th root of 1.

Consider Weierstrass elop fFt for $p = 541$, $q = 2$

$$x^{(p-1)/4} F(1/12, 5/12, 1, 1-x) =$$

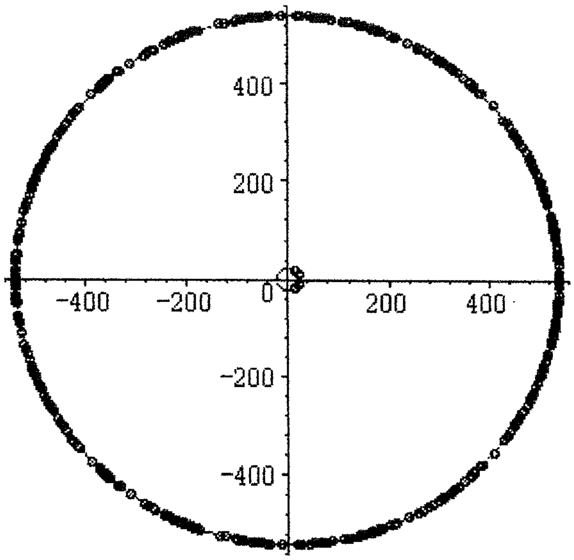
$$x^{135}(-29x^{45}-143x^{44}-95x^{43}-163x^{42}+191x^{41}+249x^{40}+242x^{39}+23x^{38}+61x^{37}+262x^{36}+35x^{35}$$
$$-220x^{34}+65x^{33}-139x^{32}+99x^{31}-102x^{30}-163x^{29}-50x^{28}+243x^{27}+101x^{26}-219x^{25}-200x^{24}$$
$$-21x^{23}+7x^{22}-218x^{21}-x^{20}-113x^{19}-33x^{18}-178x^{17}+33x^{16}+25x^{15}-16x^{14}-40x^{13}+2x^{12}$$
$$+108x^{11}-100x^{10}+269x^{9}-60x^{8}+254x^{7}+3x^{6}-236x^{5}+47x^{4}+35x^{3}-265x^{2}-48x-42)$$

$$g(x) = x^{(p-1)/4} F(1/12, 5/12, 1, 1-x)[2](x)$$

and their images of (complex) p-1th root of 1.

$$x^{(p-1)/4} F(1/12, 5/12, 1, 1-x)[2](e^{2\pi i k/(p-1)})$$

$$p = 541,\ k = 0 \sim 540$$



in this case, we have Gauss and Eisenstein's reduction, namely for, $\omega = (-1+\sqrt{-3})/2$,

$$g(\pm i) = 21\pm 10i,\ g(\pm\omega) = (29-21(\pm\sqrt{-3}))/2$$

in this case $g(\pm 1) = 541$ and $p-1 = 540 = 2^2\cdot 3^3\cdot 5$, so both $x^5\pm 1$ produce 5-sci.

$$1/p\cdot x^{(p-1)/4} F(1/12, 5/12, 1, 1-x)\ [2|x]x^5-1 =$$

5-sci produced by $[0, 0, 0, 1, 0]$

$$1/p\cdot (-x)^{(p-1)/4} F(1/12, 5/12, 1, 1+x)\ [2|x]x^5-1 =$$

5-sci produced by $[264,-312,172,141,276]$.

also, since the reduction polynomials are x^2+1, x^2+x+1, other cyclotomic polynomial of $x^{p-1}-1$ such as x^3+1, x^9+1, $x^{27}+1$, $\cdots$, $x^{135}+1$ produce a sci.

$$g(-x)\,[x]x^3-1 = [0, 1, 0]$$

$$g(-x)\,[x]x^9-1 = 1/541\cdot[-84, 35, 301, 100, 319, -178, -16, 187, -123]$$

$$g(-x)\,[x]x^{15}-1 = 1/541\cdot$$

$[88, -104, -123, 47, 92, 88, -104, 418, 47, 92, 88, -104, -123, 47, 92]$

$$g(-x)\,[x]x^{27}-1 = 1/541\cdot$$

$[-32, 56, 165, 68, 203, -199, 115, 6, -153, -49, 19, -11, 35,$
$163, 64, -140, -8, -88, -3, -40, 147, -3, -47, -43, 9, 189, 118]$

$$g(-x)\,[x]x^{45}-1 = 1/541\cdot$$

$[-31, -119, 101, -17, 77, 7, -124, 150, 26, 51, 95, 84, -25, -30,$
$98, 23, -62, -96, 65, -36, 60, 2, 180, -89, -3, -22, -122, -187, 7,$
$-54, 96, 77, -128, -1, 51, 21, 18, 88, 110, 44, 15, -66, 89, 70, 48]$

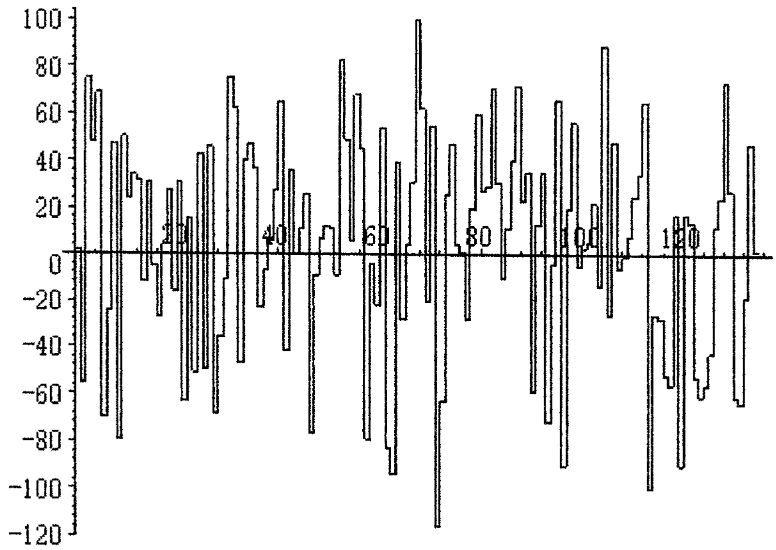
$$g(-x)\,[x]x^{135}-1 = 1/541\cdot$$

$[2, -55, 75, 48, 69, -70, -25, 47, -79, 50, 24, 34, 32, -12, 31, -5, -27, 4, 27, -16,$
$31, -63, 15, -51, 43, -49, 46, -68, -36, -11, 75, 62, -47, 40, 47, 37, -23, -7, 6,$

27, 65, -42, 36, 0, 11, 26, -77, -9, 7, 12, 11, -9, 83, 49, 6, 68, 45, -79, -4, -22, 54, -83, -94, 39, -28, 4, 31, 100, 62, -20, 55, -116, -63, 26, 47, 4, 1, -28, 20, 60, 27, 29, 71, 31, -10, 11, 40, 72, 23, 35, -59, 13, 35, -72, -4, 66, -90, 20, 56, -5, 3, 5, 22, -14, 89, -26, 48, -6, -1, 8, 25, 34, 65, -100, -26, -28, -52, -56, 17, -90, 17, 14, -53, -61, -56, -43, 12, 24, 73, 27, -61, -64, -19, 47, 2]

wave form

$g(-x)\ [x]x^{135}-1$, 135-sci for $p = 541$



Following are invariant graphs, invariant under the choice of primitive roots, of images under fFt of elops of p-1st root of 1, and conjectured to have uniform angular distribution.

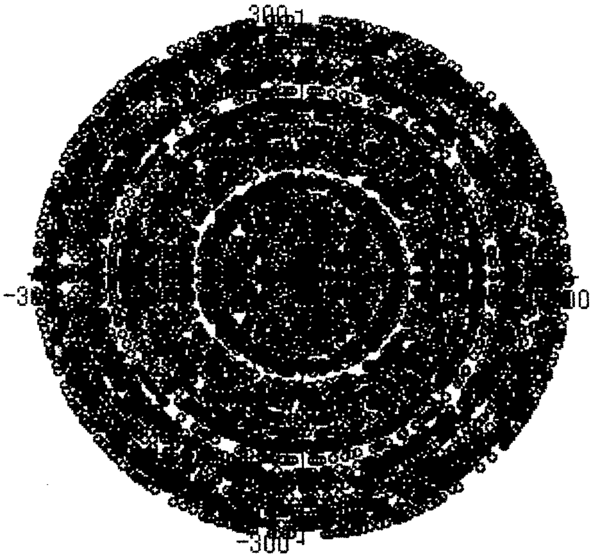
$$y^2 = x^3+qx+r, \text{ Weierstrass family}$$

$$a_{12}(x) = x^{(p-1)/4}\ F(1/12, 5/12, 1, 1-x) \quad \text{if } p = 1 \bmod 4$$

$$x^{(p+1)/4}\ F(7/12, 11/12, 1, 1-x) \quad \text{if } p = -1 \bmod 4$$

$$a_{12}(x)\ [r]\ (e^{2\pi ik/(p-1)})$$

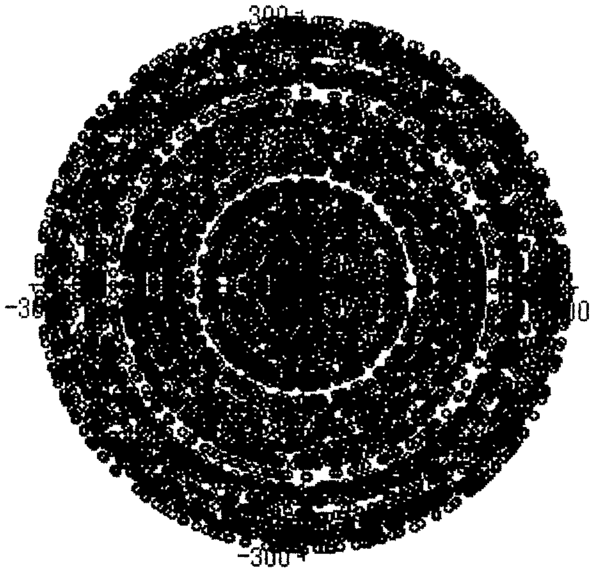
$$k = 0 \sim p-1,\ p = 5 \sim 293$$



$a_6(x) = F(1/6, 5/6, 1, x)$, $y^2 = x^3+qx^2+r$, Whock family

$a_6(x)\,[r]\,(e^{2\pi/k/(p-1)})$

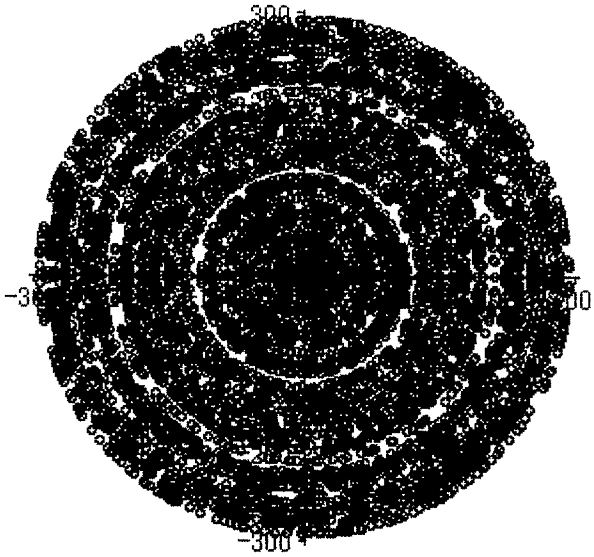
$k = 0 \sim p\text{-}1,\ p = 5 \sim 293$



$a_4(x) = F(1/4, 3/4, 1, x)$, $y^2 = x(x^2+qx+r)$, Euler family

$a_4(x)\,[r]\,(e^{2\pi/k/(p-1)})$

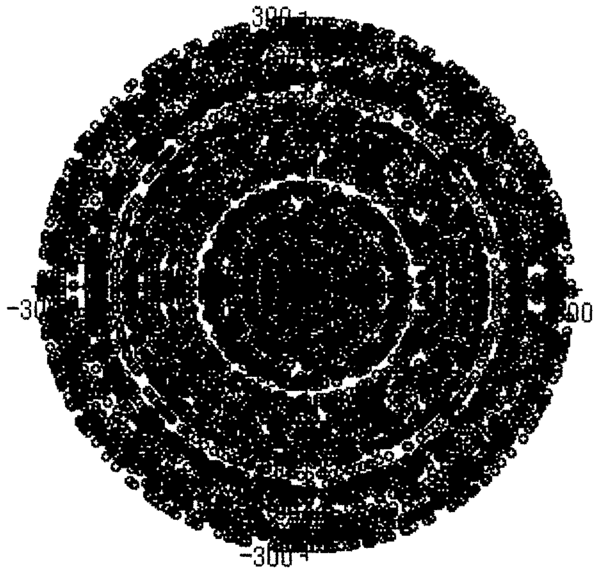
$k = 0 \sim p\text{-}1,\ p = 5 \sim 293$



$a_3(x) = F(1/3, 2/3, 1, x)$, $y^3+x^3+qxy+r = 0$, Hessian family

$a_3(x)\,[r]\,(e^{2\pi i k/(p-1)})$

$k = 0 \sim p-1$, $p = 5 \sim 293$



$a_2(x) = F(1/2, 1/2, 1, x)$, $y^2 = x(x-1)(x+q)$, Legendre family

$a_2(x)\,[r]\,(e^{2\pi i k/(p-1)})$

$k = 0 \sim p-1$, $p = 5 \sim 293$

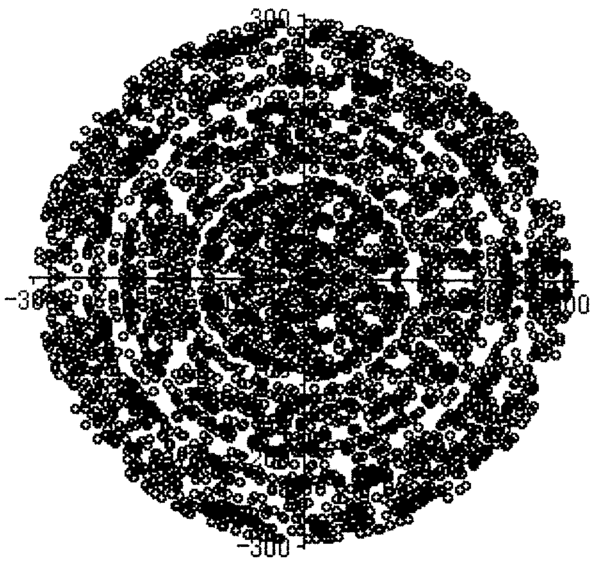


Image of Legendre case looks thinner, because fFt of Legendre elops all image points are double point except for roots of $x^{12}-1$.

Example 10. p = 97, q = 5,

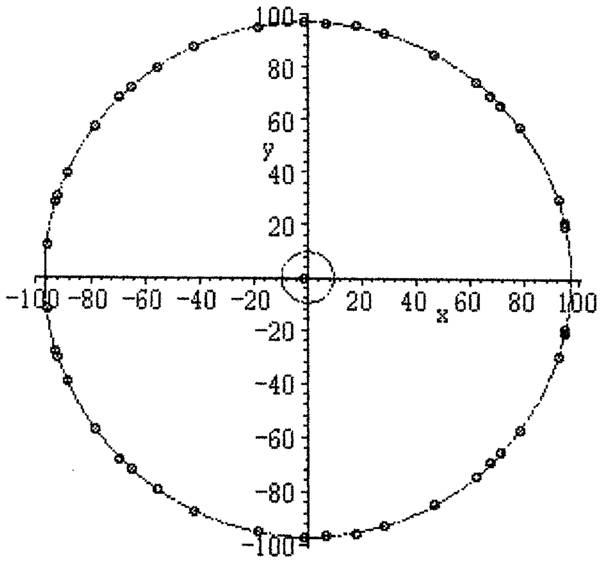
$$a_2(x) = F(1/2,1/2,1,x) =$$

$$x^{48}-24x^{47}+35x^{46}+27x^{45}+4x^{44}+11x^{43}+18x^{42}-31x^{41}+33x^{40}-2x^{39}-44x^{38}+4x^{37}+3x^{36}$$
$$-43x^{35}-2x^{34}-12x^{33}+2x^{32}+43x^{31}-47x^{30}+47x^{29}+4x^{28}-36x^{27}-43x^{26}+36x^{25}+33x^{24}$$
$$+36x^{23}-43x^{22}-36x^{21}+4x^{20}+47x^{19}-47x^{18}+43x^{17}+2x^{16}-12x^{15}-2x^{14}-43x^{13}+3x^{12}$$
$$+4x^{11}-44x^{10}-2x^{9}+33x^{8}-31x^{7}+18x^{6}+11x^{5}+4x^{4}+27x^{3}+35x^{2}-24x+1$$

$$F(1/2,1/2,1,x)[5](x) =$$

$$14x^{95}+2x^{94}-10x^{93}+18x^{92}+2x^{91}-6x^{90}+2x^{89}+2x^{88}+18x^{87}-6x^{86}-10x^{85}-14x^{84}-6x^{83}-14x^{82}$$
$$+10x^{81}-14x^{80}-6x^{79}+10x^{78}+2x^{77}-14x^{76}+2x^{75}+2x^{74}-2x^{73}+2x^{72}+6x^{71}-14x^{70}+14x^{69}+2x^{68}$$
$$+14x^{67}+10x^{66}-2x^{65}+2x^{64}-14x^{63}+18x^{62}-18x^{61}-14x^{60}+10x^{59}+2x^{58}+10x^{57}+2x^{56}-10x^{55}$$
$$+2x^{54}+2x^{53}+2x^{52}+6x^{51}+10x^{50}+2x^{49}+18x^{48}-2x^{47}+10x^{46}-6x^{45}+2x^{44}-2x^{43}+2x^{42}+10x^{41}$$
$$+2x^{40}-10x^{39}+2x^{38}-10x^{37}-14x^{36}+18x^{35}+18x^{34}+14x^{33}+2x^{32}+2x^{31}+10x^{30}-14x^{29}+2x^{28}$$
$$-14x^{27}-14x^{26}-6x^{25}+2x^{24}+2x^{23}+2x^{22}-2x^{21}-14x^{20}-2x^{19}+10x^{18}+6x^{17}-14x^{16}-10x^{15}$$
$$-14x^{14}+6x^{13}-14x^{12}+10x^{11}-6x^{10}-18x^{9}+2x^{8}-2x^{7}-6x^{6}-2x^{5}+18x^{4}+10x^{3}+2x^{2}-14x+1$$

$$F(1/2,1/2,1,x)[5](e^{2\pi i k/96}),\ k = 0 \sim 95$$



Cyclotomic factorization of characteristic polynomial for p is:

$$x^{p-1}-1 =$$
$$(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(1-x+x^2)(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^4+1)$$
$$(x^8-x^4+1)(x^8+1)(x^{16}-x^8+1)(x^{16}+1)(x^{32}-x^{16}+1)$$

The resultant, for example, with a cyclotomic factor

$$h(z) = y^2+pzy+p^2 \textcircled{y}\ y-g(x) \textcircled{x}\ x^8-x^4+1$$

discribes, that the image $y = g(x)$ for a p-1st root of 1 have absolute value p, and resultant for y with $y^2+pzy+p^2$, z is a real number in interval $[-2,2]$.

For example,

$$y^2+pzy+p^2 \textcircled{y}\ y-F(1/2,1/2,1,x)[5](x) \textcircled{x}\ x^8-x^4+1$$

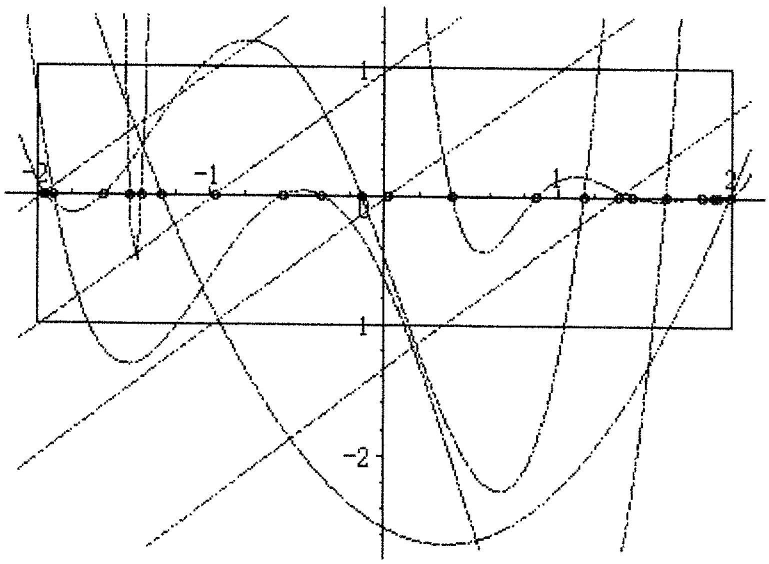
From the figure $a_2(\pm 1) = -1$, no other component degenerates. Note that resultants are associative and distributive for multiplication, we list factors for components:

$$[x^2+x+1,\ (97z-2)^2],\ [x^2-x+1,\ (97z-2)^2],\ [x^2+1,\ (97z-130)^2],$$

these are the factors of $x^{12}-1 = 0$, for other factors exponents are no less than 4, meaning that the image is multiple point.

$$[x^4-x^2+1,\ (97z-130)^4],\ [x^4+1,\ (97z+94)^4],\ [x^8-x^4+1,\ (97z+190)^8],$$
$$[x^8+1,\ (9409z^2-6596z-23932)^4],$$
$$[x^{16}-x^8+1,\ (88529281z^4+226342904z^3-52765672z^2-328679456z-42485744)^4],$$
$$[x^{16}+1,\ (88529281z^4+109520760z^3-228601064z^2-251352608z-57504752)^4],$$
$$[x^{32}-x^{16}+1, (7837433594376961z^8-426614942044443664z^7+470062761821533328z^6$$
$$+1194989538624179 84z^5-2813481655560590 40z^4+501272850304678 40z^3$$
$$+285951458816984832z^2-235819839703548928z+50458072869568768)^4]]$$

all roots are in $[-2,2]$



Example 10

$p = 97 = 1 \bmod 8,\ q = 5$

$$F(1/8,5/8,1,x) =$$
$$10x^{12}+67x^{11}+51x^{10}+x^{9}+82x^{8}+22x^{7}+65x^{6}+93x^{5}+63x^{4}+36x^{3}+32x^{2}+41x+1$$

and put

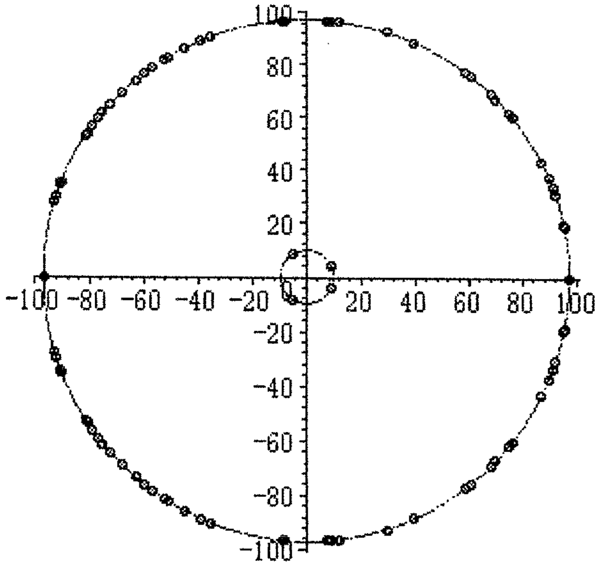
$$f(x) = x^{12}\cdot F(1/8,5/8,1,1-x) \quad \text{if } (x/p) = 1$$
$$7\sqrt{2}\cdot x^{12}\cdot F(1/8,5/8,1,1-x) \quad \text{if } (x/p) = -1$$

note that $2x^2 = 1$ in F_{97} is satisfied by $x = 7 = 1/\sqrt{2}$ in F_{97}, so $7\sqrt{2} = 7\cdot\sqrt{2}$ is a product of an element of finite field and a complex (in this case real) number which have a role of unit element. This kind of unit number which is a bridge of different kind of characteristics (or, character) would play very important role, especially in the representation of polynomial like $F(1/8,5/8,1,x)$, and call them temporarily, *fin/comp-unit* (finite/complex-unit) or *disc/cont-unit* (discrete/continuous-unit) etc.

$$g(x) = f(x)\,[5]\,(x) =$$
$$x^{96}+12\sqrt{2}x^{95}+6x^{94}+6\sqrt{2}x^{93}-2x^{92}+7\sqrt{2}x^{91}-10x^{90}+3\sqrt{2}x^{89}-14x^{88}-11\sqrt{2}x^{87}-6x^{86}+6\sqrt{2}x^{85}$$
$$-10x^{84}+\sqrt{2}x^{83}+4x^{82}-5\sqrt{2}x^{81}-12x^{80}-3\sqrt{2}x^{79}-18x^{78}+13\sqrt{2}x^{77}-10x^{76}+7\sqrt{2}x^{75}+10x^{74}-8\sqrt{2}x^{73}$$
$$+2x^{72}+6\sqrt{2}x^{71}-12x^{70}-4\sqrt{2}x^{69}-14x^{68}-6x^{66}-2x^{64}-9\sqrt{2}x^{63}-4x^{62}-8\sqrt{2}x^{61}+8x^{60}-9\sqrt{2}x^{59}-16x^{58}$$
$$-5\sqrt{2}x^{57}-6x^{56}+2\sqrt{2}x^{55}-16x^{54}-3\sqrt{2}x^{53}-2x^{52}+10\sqrt{2}x^{51}+2x^{50}+11\sqrt{2}x^{49}+8x^{48}+14x^{46}+9\sqrt{2}x^{45}$$
$$-2x^{44}-12\sqrt{2}x^{43}-14x^{42}+3\sqrt{2}x^{41}+10x^{40}-2\sqrt{2}x^{39}+2x^{38}+10\sqrt{2}x^{37}-8x^{36}+\sqrt{2}x^{35}-2x^{34}+14x^{32}$$
$$-5\sqrt{2}x^{31}+6x^{30}-7\sqrt{2}x^{29}-2x^{28}+3\sqrt{2}x^{27}-18x^{26}-3\sqrt{2}x^{25}+10x^{24}+3\sqrt{2}x^{23}-8x^{22}-4\sqrt{2}x^{21}-14x^{20}$$
$$+4\sqrt{2}x^{19}+10x^{18}+10\sqrt{2}x^{17}-12x^{16}-6\sqrt{2}x^{15}+14x^{14}-10\sqrt{2}x^{13}+2x^{12}+7\sqrt{2}x^{11}+18x^{10}-12\sqrt{2}x^{9}$$
$$+2x^{8}-2x^{6}+4\sqrt{2}x^{5}+2x^{4}-9\sqrt{2}x^{3}-3\sqrt{2}x+1$$

note that coefficients are in Hasse's range $\sqrt{p}[-2,2]$. Image of p-1st root of 1 is figured below, it satisfy p-circle property:

$$f(x) = x^{12} \cdot F(1/8,5/8,1,1-x),\ (x/p) = 1$$
$$7\sqrt{2} \cdot x^{12} \cdot F(1/8,5/8,1,1-x),\ (x/p) = -1$$
$$g(x) = f(x)\,[5]\,(x)$$
$$g(x)-1,\quad x = \exp(2\pi i k/(p-1)) = e^{2\pi i k/(p-1)},\ k \in p-1$$



p-circle property is proved logically by the fact, real coefficient polynomial

$$h(z) = y^2+pzy+p^2 \textcircled{y}\ y-(g(x)-1)(x) \textcircled{x}\ x^{p-1}-1$$

all the roots are real, by approximation of sufficient accuracy or by Sturm's method.

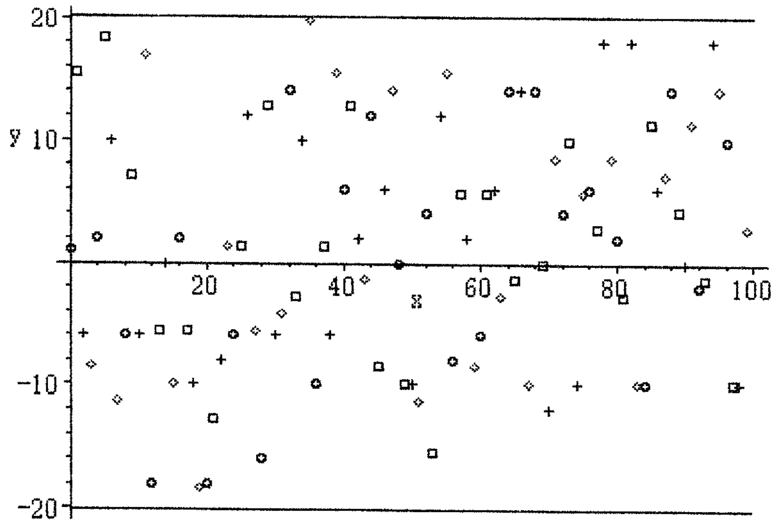
$p = 101 = 5 \bmod 8,\ q = 2$

$$F(1/8,5/8,1,x) =$$
$$1+49x+22x^2+21x^3+27x^4+29x^5-4x^6+3x^7-50x^8+45x^9-18x^{10}+46x^{11}+11x^{12}$$
$$a(x) = F(1/8,5/8,1,1-x) =$$
$$-20+40x-26x^2+18x^3+42x^4+15x^5+36x^6-28x^7-45x^8+33x^9+2x^{10}+24x^{11}+11x^{12}$$

Of course, the coefficients of $a(x)\,[2]\,(x)$ do not satisfy Hasse's condition, so define , for $x = q^n$ and index n, we separate in cases:

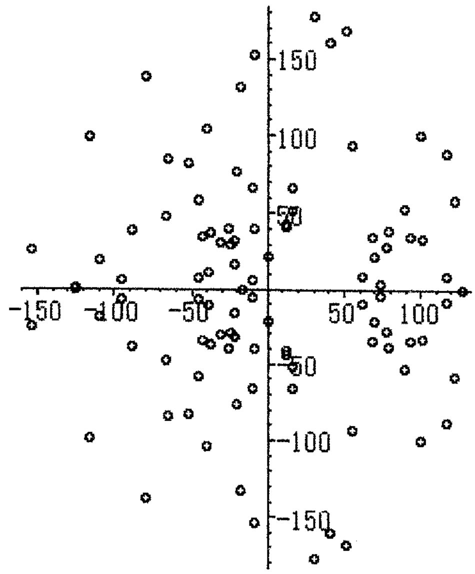
$$b(x) = a(x)\ \text{ if } n = 0 \bmod 4,\ 45\sqrt{2} \cdot a(x)\ \text{ if } n = 1 \bmod 4$$
$$5 \cdot 2 \cdot a(x)\ \text{ if } n = 2 \bmod 4,\ 46\sqrt{2} \cdot a(x)\ \text{ if } n = 3 \bmod 4$$

then, the coefficients satisfy Hasse's condition



but, the image of p-1st root of 1 is not on the p-circle:

$$b(x)\,[q]\,(e^{2\pi ik/100}),\ k = 0\sim 99$$



but, coefficient replaced by fin/comp-unit version

$$c(x) =$$

$$a(q^n)\ \text{ if } n = 0 \bmod 4,\ 45(1+i)\cdot a(q^n)\ \text{ if } n = 1 \bmod 4$$

$$5\cdot 2i\cdot a(q^n)\ \text{ if } n = 2 \bmod 4,\ 46(-1+i)\cdot a(q^n)\ \text{ if } n = 3 \bmod 4$$

then we have

$$b(x)\,[2]\,(x) =$$

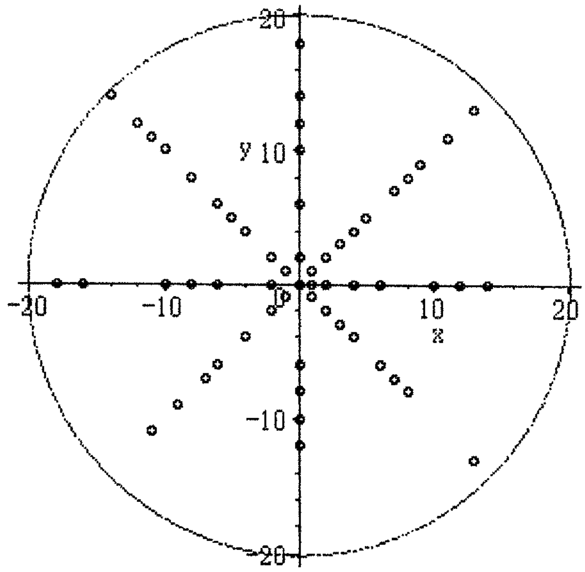
[1, 11+11i, -6i, 6-6i, 2, 13+13i, 10i, 8-8i, -6, 5+5i, -6i, -12+12i, -18, -4-4i, 0, 7-7i, 2, -4-4i, -10i,13-13i, -18, -9-9i, -8i, -1+i, -6, 1+i, 12i, 4-4i, -16, 9+9i, -6i, 3-3i, 14, -2-2i, 10i, -14+14i, -10, 1+i,-6i, -11+11i, 6, 9+9i,

$2i$, $1-i$, 12, $-6-6i$, $6i$, $-10+10i$, 0, $-7-7i$, $-10i$, $8-8i$, 4, $-11-11i$, $12i$, $-11+11i$, -8,$4+4i$, $2i$, $6-6i$, -6, $4+4i$, $6i$, $2-2i$, 14, $-1-i$, $14i$, $7-7i$, 14, 0, $-12i$, $-6+6i$, 4, $7+7i$, $-10i$, $-4+4i$, 6, $2+2i$,$18i$, $-6+6i$, 2, $-2-2i$, $18i$, $7-7i$, -10, $8+8i$, $6i$, $-5+5i$, 14, $3+3i$, 0, $-8+8i$, -2, $-1-i$, $18i$, $-10+10i$, 10,$-7-7i$, $-10i$, $-2+2i$]

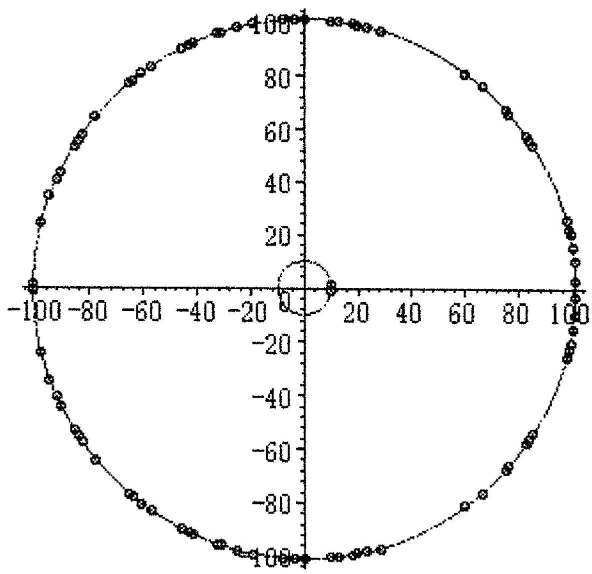
and the Gaussian integer coefficients are in the complex

$$2\sqrt{p} = 2\sqrt{101} = 20.09975124$$

radius Hasse's complex circle:



c(x) [2] ($e^{2\pi i k/100}$), k = 0~99



These are only a partial fractional results and the research for special polynomials such as Fuchs polynomials like

F(1/5,4/5,1,x), F(1/8,3/8,1,x), F(1/10,3/10,1,x), etc and also of Jacobi polynomials are of the special interest.

References

[1] Kanji Namba, Hyper-elliptic curves over finite fields and Tschebysheff-shift, Reports of Institute for Mathematics and Computer Science 36, Reports of 25th Symp. on the Hist. of Math. (2014), Tsuda College, 2015, pp.237-282

[2] Kanji Namba, Finite Fourier transform and Legendre polynomial, Report of 2015 Applied Mathematics Symposium, Ryukoku Univ. Seta, pp. 38-43

[3] Kanji Namba, *Mathematics and Logic*, (Japanese), Asakura lecture series (mathematical methods) 23, 2011

[4] Richard K. Gui, Unsolved Problems in Number Theory, 3rd ed. Springer, 2004, (translation by Shigeru Kanemitsu: *Dictionary of Unsolved Problems in Number Theory*), Asakura, 2010

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

180

エウクレイデス『原論』の用語・語法の分析によって追加部分を判別する試み

斎藤憲 *

1 はじめに

1. 『原論』は紀元前3世紀に成立した．従来の研究は『原論』以前の数学の痕跡を『原論』の中に探す「考古学的アプローチ」が主流であった[1].

2. しかし最古の現存写本は9世紀のものであり，また4世紀のテオンによる校訂があったことは広く知られている．アラビア語写本はヘロン（1世紀）による改訂への言及が頻繁になされる．たとえばIII.12はヘロンによる追加であるとされる[2].

3. したがって現存する中世写本の『原論』のテクストが，かなりの追加・変更を経たものであることは疑いのない事実である．すべての写本の読みが一致する場合でも，古い時期に追加・変更がなされた箇所が含まれる可能性がある．

4. テクストを丹念に読むと，使用単語，語法などは必ずしも一貫していないことが分かる．あらゆる箇所で確実な判断はできないにしても，比較的真正らしい部分と，かなり「怪しい」部分を段階をつけて区分することは可能であり，必要でもある．

* 大阪府立大学人文科学系

[1] 考古学的アプローチという表現は，最近『原論』を仏訳した Bernard Vitrac が，この種の研究を批判するために使ったものである．

[2] [斎藤 2008] の命題 III.12 への解説を参照．

2 具体的な命題の検討

2.1 命題 VII.31

1. ここではまず命題 VII.31「すべての合成数は何らかの素数によって測られる」をとりあげる.

2. 証明の概要は次のとおりである：合成数 A があるとし，B が A を測るとする．B が素数でないならば，さらに G が B を測るとする．これを続けていくといつか素数が現れ，それが A を測る．

3. この議論の中に次のような一節がある．

   そこでこのような検討がなされると，何らかの素数がとられ，これが〔A を〕測ることになる．というのは，もしとられることにならないならば（未来形），数 A を無数の数が測ることになり，それらの 1 つは別の 1 つより小さい．これは数においては不可能である．

4. 「このような検討」という表現は『原論』では異例である．『原論』ではメタ数学的な表現は，限られた定型的表現を別にすれば基本的に存在しない[3]．ここではこの語の『原論』での用例について確認する．検討と訳した語は *episkepsis*（属格形 *episkepseōs* で現れる）であるが，この名詞は『原論』ではここにだけ現れる．同じ語根を持つ語を探すと，動詞 *episkopeō* が，*episkepsasthai* 「探究すること，調べること」というアオリスト中動相不定法で，IX.18, IX.19 に 2 回ずつ現れる．

2.2 命題 IX.18, 19 の検討

1. 命題 IX.18 は次のように始まる．

   2 数が与えられたとき，それらに対する第 3 比例項〔の数〕を見出すことが可能か調べること (*episkepsasthai*).

[3]繰り返し用いられる代表的な定型的表現としては，証明すべきことを確認する「私は言う」，同じ議論の繰り返しを省略するための「同様に我々は証明することになる」「同様に証明されることになる」「同じ議論（文字通りは同じこと）によって」などがある．

与えられた2数をA, Bとし，それらに対する第3比例項〔の数〕を見出すことが可能か調べねばならないとしよう (*deon estō episkepsasthai*).

命題IX.19はIX.18とほぼ同様で，与えられた3数に対して第4比例項を見出すことが可能かを調べるというものである．

2. 『原論』の命題は伝統的に，あることが成り立つことを主張する「定理」と，あること（作図など）を実現する「問題」に分けられる．これらの命題は「問題」に属することになろう．しかし，問題で実現すべき内容は，命題I.1（正三角形の作図）のように具体的に与えられるのが普通であり，これら2命題のように「調べる」ことが要求される例は他にない．

3. しかも，命題IX.19の議論は論理的に誤っている（ここでは細部に立ち入らない）．ヒースはこのテクストが'hopelessly corrupt'であるとまで言っている[4]．テオン版はその誤りを修正しているが，もともとの場合分けが適切でないので，議論はすっきりしない[5]．命題IX.19（およびそれと本質的に同じ問題を扱うIX.18) は後世の追加であると考えるのが適切である．そうなると *episkepsis*（探究）およびそれと同じ語根を持つ語は『原論』でVII.31以外には現れないことになる．

2.3 命題VII.31に見られる他の特異性

1. 命題VII.31の議論に戻ろう．この命題は他にも特異な点がある．この証明の中では，自然数の単調減少列は無限には続かないことが明示的に述べられる．しかし命題VII. 1, 2で相互差引（ユークリッドの互除法）によって最大共通尺度を得る議論では，このことは暗黙のうちに当然とされ，言及されていない．

2. 『原論』の条件文では，帰結節 (apodosis) には直説法現在，直説法未来のどちらも使われるが，条件節でに直説法未来形が用いられることは非常に稀である[6]．その稀な例の一つがこのVII.31である．

[4]The Greek text of part of this proposition is hopelessly corrupt. [Heath 1925, 2:411]

[5][斎藤 2015] のIX.19の翻訳部分を参照．

[6]ただし，ギリシャ語では動詞ごとに頻繁に使われる時制が異なるということはあり

2.4 VII.31 から IX.20 へ

1. これらの，いわば「不自然な」特徴が VII.31 に集中的に見られることは，この命題が，第 VII 巻の他の部分と別の機会に（恐らく別の起草者によって）成立したと考えれば容易に説明できる．

2. VII.31 は次の命題 VII.32「あらゆる数は，素数であるか，あるいは何らかの素数によって測られる」を通して，素数の個数に関する有名な命題 IX.20 に利用される．

   > 『原論』命題 IX.20 : 素数は，どんな個数の素数が提示されても，それよりも多い．

   この命題 IX.20 は，VII.31 を間接的に利用していることを別にしても，次の点で特異な命題である．すなわち，

   (a) この命題の証明に利用されるのは第 VII 巻の命題のみであり，第 IX 巻に置かれた理由が明らかでない．

   (b) 議論の中で H が A, B, G のどれとも等しくないことを「H は A, B, G のどれとも同じではない」と述べる．この語法は稀である．同じ語法は IX.13 でも用いられるが，IX.13 には，一人称複数の表現（我々が . . . する）を含むなど，他の命題とは異なる語法が見られる．

3 可能な解釈と今後の研究展望

1. 以上の状況を最も明快に説明する仮説は，命題 VII.31, 32 および IX.20 が,『原論』の他の部分と異なる起源を持つということである．もっとはっきり言えば，これらの命題を後からの追加と考えればよいということになる．この仮説を受け入れるなら IX.13 も，そして IX.13 を利用する，完全数に関する命題 IX.36 も,『原論』本体に後から追加されたことになる．最も大胆な仮説は,『原論』の整数論は

うる．ここで条件節中で直説法未来形となっている動詞 *lambanō* が直説法現在形で用いられる例は『原論』には見当たらない点は注意すべきであろう．ただし「とられた」という分詞の中受動相現在形 *lambanomenos*（種々の変化形を男性単数主格形で代表する）は現れる．なお，分詞の受動相アオリスト形 *lēphtheis* も用いられるので，この 2 つの形の分布についてさらに検討が必要であろう．

本来 VII 巻と VIII 巻だけであり，IX 巻全体が後からの追加であるということになる．

2. このような議論を体系的に発展させるためには,『原論』のテクスト全体（約 15 万 5 千語）の構文，語法をすべて記録し，必要に応じて検索できるようにすることが必要である．発表者は 2014 年度から科研費の補助を得てその作業を進めているが，まだ，そのような「全文解析」から何らかの結論を得る段階に至っていない．

参考文献

- Heath, T.L. trans. (1925) *The Thirteen Books of the Elements.* 3 vols. 2nd ed. Cambridge University Press. Reprint, New York: Dover Publications, 1956.
- 斎藤憲・三浦伸夫 訳・解説 (2008) 『エウクレイデス全集第 2 巻』東京大学出版会.
- 斎藤憲 訳・解説 (2015) 『エウクレイデス全集第 2 巻』東京大学出版会.

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

186

「パリの論文」からアーベル関数論へ

多変数関数論と複素多様体論の別れ

津田塾大学数学史シンポジウム
平成 27 年 10 月 11 日（日）
高瀬正仁（九州大学基幹教育院）

代数関数論を語る二冊の書物をめぐって

代数関数論に関心を寄せ始めたころを回想すると，真っ先に念頭に浮かぶのは岩澤健吉の著作『代数函数論』（昭和 27 年，岩波書店）とヘルマン・ワイルの著作『リーマン面のイデー』（1913 年）である．岩澤健吉の著作には巻頭に長い序文が配置されていて，アーベル，ヤコビにさかのぼる代数関数論の歴史が豊かな情感を伴って描写されていた．ワイルの著作はドイツ語で表記された古い本で，初版を見るのはむずかしかったが，第 3 版（1955 年）の英訳書（1964 年）が容易に手に入ったのでうれしかった．ワイルが綴る序文の印象もきわめてロマンチックであり，ワイルとともにリーマン面のイデーをこの手につかみたいという強い思いに誘われた．

この二冊のほかにもうひとつ，高木貞治の著作『近世数学史談』（昭和 8 年）のテーマは代数関数論というわけではないが，代数関数の一般理論の糸口となるガウスとアーベルの楕円関数論が詳述されていておもしさもまた格別であった．これらの書物がよい手引きとなり，代数関数論をひとつの柱として，ガウスに始まる 19 世紀のドイツ数学史の形成過程を心に描き，数学に寄せる夢をふくらませたものであった（19 世紀のドイツ数学史のもうひとつの柱はガウスの数論である）．

ところが岩澤健吉とワイルの著作を実際に解読するのは実にむずかしく，大量の時間が無益なままにすぎていくばかりでなかなか前に進むことができなかった．岩澤健吉の語る歴史的回想はさながら一場の夢のようで，強く心を惹かれるものの，具体的なイメージがさっぱり結ばれないのは不思議なことであった．しかも本文の叙述は歴史の流れとは無関係である．ワイルの本は第 1 章と第 2 章の二部構成で，第 1 章には「リーマン面の概念と位相」，第 2 章には「リーマン面上の関数」という章題が附せられている．第 1 章ではリーマン面の概念が登場するまでの叙述がひとつのかたまりを構成し，ヴァイエルシュトラスの解析的形成体とリーマンのリーマン面が語られて，さてそれからさながら両者を止揚しようとする高みに登ろうとするかのように，複素次元 1 の複素多様体の概念が登場する．第 2 章ではディリクレの原理を基礎にして閉リーマン面上においてポテンシャル関数の存在が確立され，それからリーマン＝ロッホの定理，アーベルの定理と進み，ヤコビの逆問題の解決が次々と叙述されていく．そうして代数関数体，一意化，等角写像の話題が続いて完結するが，全体を概観した時点であらためて直面するのは，「代数関数論とはいったい何を解明しようとする理論なのだろうか」という素朴な疑

問であった．

岩澤健吉の著作の序文とワイルの著作の本文を読み進めると，アーベル関数，アーベルの定理，ヤコビの逆問題，解析的形成体，リーマン面，ディリクレの原理，リーマン＝ロッホの定理など，理論構成に不可欠な言葉の数々に遭遇したが，主題をつかむことはできなかった．深遠な魅力に包まれながら主題をつかむことができない，あるいは逆に，主題がいっこうに明らかにならないにもかかわらずどこまでも魅力的であるという意味合いにおいて，代数関数論はまったく不思議な理論であった．翻って思えば，数学そのものがすでにそのような学問である．

関数とは何か

本稿では代数関数論に関連して遭遇した謎めいた事柄のあれこれを書き並べ，代数関数論の印象が混迷に誘われる理由を探索してみたいと思う．代数関数論の建設者として名高いのはヴァイエルシュトラスとリーマンの二人の数学者だが，ワイルの著作の序文などを参照すると明らかに見て取れるように，ワイルが叙述したのはリーマンのアーベル関数論であり，その典拠は「クレルレの数学誌」に掲載されたリーマンの論文

「アーベル関数の理論」（クレルレの数学誌，第 54 巻，1857 年）

においてアーベル関数論を語ったのである．リーマンのいうアーベル関数の実体は実はアーベル積分で，そのアーベル積分というのは代数関数の積分に与えられた呼称である．リーマンのアーベル関数論が，岩澤健吉の著作の書名に見られるように，代数関数論と呼ばれることがあるのはそのためだが，では代数関数とはどのような関数なのであろうか．ここにもまた基本的な問題が顔を出している．

リーマンは複素平面上に重なり合って広がる面，すなわちリーマン面のイデーを前面に押し出して，その舞台の上で複素関数論を展開するという構想を提案したが，特に代数関数の場合には，そのリーマン面はリーマン球面，すなわち複素平面に無限遠店を付加して作られる拡大された平面の上に広がる有限葉の面である．以下，ここではそれを**代数的リーマン領域**と呼ぶことにする．代数関数の存在領域は代数的リーマン領域になるが，その事実認識にとどまらず，逆に代数的リーマン領域こそ，代数関数に固有の存在領域であるという言明がリーマンの構想の根幹を作るのである．ディリクレの原理に基づいて代数的リーマン領域における解析関数の存在証明を試みたのもそのためである．

代数関数とは何かと問われたなら，リーマンなら「代数的リーマン領域の上の解析関数」と答えるであろう．だが，それならそもそも関数とは何であろうか．また，関数が解析的であるというのはどのような意味なのであろうか．いずれ劣らぬ基本的な問いであり，リーマン自身,「アーベル関数の理論」に先立って書かれた学位論文

「1 個の複素変化量の関数の一般理論の基礎」（1851 年）

を関数概念の回想から説き起こし，それから解析関数の概念規定へと歩みを運んでいる．

この二つの問いに答えるのは容易ではなく，長い歴史をたどらなければならない．関数については，リーマンにいたるまでにオイラー，ラグランジュ，コーシー，フーリエ，

ディリクレと続く道筋が目に留まる．出発点はオイラーと見てよいが，オイラーが関数の概念を具体的に語るまでには，デカルト，フェルマ，ライプニッツ，ベルヌーイ兄弟（兄のヤコブと弟のヨハン）と続く「曲線の理論」の時代が存在する．曲線の理論は無限解析もしくは無限小解析とも呼ばれることがあり，この百年の数学史は全体として今日の微積分の揺籃期に該当する．デカルトの『方法序説』(1637 年）の三つの本論のひとつを構成する『幾何学』の時代にさかのぼるなら，1851 年のリーマンの学位論文にいたるまで，この間に優に 200 年をこえる歳月が流れたのである．

この 200 年余の歴史をたどれば今日の関数概念にたどりつくが，その関数というのは実関数，すなわち実変数の関数である．ところがリーマンの数学的意図は実関数にあるのではなく，リーマンは複素関数，すなわち複素変数の関数の一般理論の構築をめざしたのである．リーマンの学位論文の冒頭を見ると，実関数と複素関数の間に見られる本質的な相違が指摘され，長い思索の後にようやく，今日の複素解析的関数（正則関数と呼ばれることもある）の概念に到達する．そこで大きく浮上するのは，数学における複素数もしくは複素量の導入という出来事の解明という作業である．これは難題で，多くの文献の参照を強いられるが，思いつくままに挙げていくと，

- 代数方程式の虚根に寄せる認識の変遷（カルダノとオイラー）
- ヨハン・ベルヌーイが発見した等式 $\dfrac{\log\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \dfrac{\pi}{2}$（後にオイラーはこれを「ベルヌーイの美しい等式」と呼んだ.）
- 負数と虚数の対数の正体をめぐってたたかわされたライプニッツとヨハン・ベルヌーイの論争
- オイラーによる対数の無限多価性の発見
- コーシーによる「コーシーの定理」の発見と，それを基礎とする留数解析の展開
- 楕円関数論における虚数の導入（ガウス，アーベル，ヤコビ）

などが次々と念頭を去来する．複素関数論の始まりを見るという視点に立てば，対数の無限多価性の発見は優に出発点でありうるが，一般理論の建設に向かう第一着手は「コーシーの定理」の自覚的認識にある．複素関数論をテーマにして書かれたコーシーの一連の著述は，学位論文を若い日のリーマンにも大きな影響を及ぼしたのである．

こんなふうに歴史の流れをたどっていけば，リーマンのいう関数，すなわち複素解析関数の概念にたどりつけそうである．鍵をにぎるのは関数の解析性の表現様式だが，リーマンはこれを「コーシー＝リーマンの方程式」の成立において認識した．ところが解析性を備えた複素関数には解析接続の現象が付随し，そのために定義域の形が任意ではなくなってしまう．ヴァイエルシュトラスの解析的形成体やリーマンのリーマン面のアイデアは，この状況に対応しようとしてそれぞれ提案されたのである．ワイルはなお一歩を進めて複素次元 1 の複素多様体というイデーを提案し，それをリーマン面と呼んだ．ワイルによれば，複素解析関数とはリーマン面上の解析関数のことであり，解析関数のなかでも代数関数といえば，閉じた（コンパクトな）リーマン面上の関数のことにほかならない．

代数関数の泉

ヴァイエルシュトラスの解析的形成体やリーマンのリーマン面，あるいはまたワイルのいう意味におけるリーマン面のどれを採るにしても，代数関数をどのように認識するべきかという論点は，前期のように歴史の流れをたどるという手順をつくすことによりひとまず落着しそうである．西欧近代の数学史の全史を顧みるほどの大作業に逢着してしまうが，さてそのうえであらためて浮上するのは，「代数関数の主問題は何か」という問題である．岩澤健吉とワイルの著作を見てもこのもっとも基本的な論点は容易に明らかにならず，そのために代数関数論の印象が茫漠としてしまうのである．

関数概念を明示したオイラーは関数を代数関数と超越関数に大きく二分したが，その目的は代数曲線を理解するための新しい視点を確保することであった．曲線の解析的源泉を関数と見るというのが，無限解析におけるオイラーの基本思想であり，このアイデアに沿って，オイラーは代数曲線の解析的源泉を求めて代数関数の概念の表明を試みたのである．オイラーの眼前にあったのはデカルトに淵源する代数曲線であり，その解析的源泉の存在を確信したところにオイラーの創意があった．オイラーが一番はじめに表明した代数関数は定量と変化量を組み合わせて組み立てられる代数的表示式だが，この素朴な観念をもってするのでは代数曲線の全容を把握するには不十分であり，曲折の末に，**閉リーマン面上の解析関数**という，リーマンが提案した概念が現れて落着したのである．

リーマンのいう代数関数の概念は今日の数学でもそのまま行われているが，この概念の泉は「代数曲線の解析的源泉」の存在に寄せるオイラーの確信であったことは忘れられない事実である．**数学の定義はそれ自身が一個の創造であり，しかも特定の個人の確信から生れ出る**ものであることを，代数関数の概念の変遷過程はありありと示している．

代数関数論の主問題とは

ワイルの著作を読んでもなかなか諒解することができないが，代数関数論の形成過程を振り返れば主問題の所在は明瞭に感知される．それは「ヤコビの逆問題」である．その名のとおりヤコビが提示した問題だが，ヤコビはこれをアーベルが発見した「アーベル積分の加法定理」から汲み取ったのである．　アーベルの加法定理は，アーベルの「パリの論文」，すなわちパリに滞在中のアーベルが 1826 年の秋 10 月に書き上げた論文

> 「ある非常に広範な超越関数族の，ひとつの一般的性質について」(Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes)
>
> （註） 一時行方不明になったが，1841 年になって，Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institu national de France（いろいろな学者によりフランス国立学士院科学アカデミーに提出された諸論文），第 7 巻，に掲載された

においてはじめて表明された．次に挙げるのは「パリの論文」の序文だが，アーベルの数学的意図がここに明瞭に語られている．

> これまで幾何学者たちの手で考察されてきた超越関数はごくわずかである．超越関数に関するほとんどすべての理論は対数関数，指数関数，それに円関数の理論に帰着されるが，それらの関数は実際のところ，唯一の種類の関数族を形成するにすぎない．そのほかの二，三の関数の考察が始まったのはようやく最近のことである．それらの関数の間で筆頭に挙げられるのは，ルジャンドル氏が多くの注目に値するエレガントな性質を明らかにした楕円的超越物である．著者はアカデミーに提出する栄誉を担うこの論文において，非常に広い範囲に及ぶ関数の族，すなわち，その微分（註．原語は *derivées*）がある同一の変化量の有理関数を係数とする代数方程式を用いて書き表される，という性質をもつすべての関数を考察した．そうしてそのような関数を対象として，対数や楕円関数と類似の諸性質を発見した．

「その微分がある同一の変化量の有理関数を係数とする代数方程式を用いて書き表される，という性質をもつ関数」というのはアーベル積分のことで，一般に，変化量 y は変化量 x の代数関数として，$\omega = \int y dx$ という形に表記される．ここで，y が x の代数関数というのは，y が x の有理関数（多項式と言っても同じことになる）を係数とする代数方程式

$$P(x, y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + a_2(x)y^{n-2} + \cdots + a_n(x) = 0$$

を満たすということを意味している．リーマンは代数関数を閉リーマン面上の解析関数として把握したが，それ以前には代数方程式を経由して理解されていたのである．アーベルは積分 $\omega = \int y dx$ をさして「関数」と呼んでいる．その微分 $d\omega = y dx$ の右辺に見られる dx の係数 y は x の代数関数であり，この状況を指して，アーベルは「その微分がある同一の変化量の有理関数を係数とする代数方程式を用いて書き表される」と言い表したのである．

アーベルはアーベル積分を考察して「対数や楕円関数と類似の諸性質を発見した」と言っているが，「類似の諸性質」の中核に位置するのが加法定理である．オイラーが発見した楕円積分の加法定理以来の大きな発見であった．

ヤコビは「パリの論文」を見ることは（少なくとも 1841 年までは）できなかったが，「クレルレの数学誌」に掲載されたアーベルのもうひとつの論文

> 「ある種の超越関数の二，三の一般的性質に関する諸注意」（「クレルレの数学誌」，第 3 巻，1828 年）

を見て「パリの論文」の存在を知るとともに，アーベルの加法定理の中味を認識した．ここから取り出されたのがヤコビの逆問題であり，リーマンのアーベル関数論の目標となった．

アーベル関数とヤコビ関数

ヤコビ自身による原型のヤコビの逆問題は種数 2 の第 1 種超楕円積分を対象にして提示される．1 次独立な 2 個の超楕円積分

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}},\ \Phi_1(x) = \int_0^x \frac{xdx}{\sqrt{X}} \quad (X \text{ は } x \text{ の次数 5 または 6 の多項式})$$

を取り，複素変数の世界において連立積分方程式

$$\Phi(x) + \Phi(y) = u,$$
$$\Phi_1(x) + \Phi_1(y) = v$$

を考えると，x と y はいずれも u と v の関数のように見える．ヤコビはそれらを

$$x = \lambda(u, v),\ y = \lambda_1(u, v)$$

と表記して，アーベル関数と呼んだ．リーマンの語法にならうなら**ヤコビの逆関数**である．ヤコビはこれらの関数は 2 次方程式

$$A + Bt + Ct^2 = 0$$

を満たすと言明した．ここで，係数 A, B, C は 2 個の複素変数 u, v の 4 重周期をもつ 1 価関数である．アーベル関数の本質がここに現れているというのがヤコビの所見である．これがヤコビの逆問題の一番はじめの姿である．

今日では係数 A, B, C のほうをアーベル関数と呼ぶ語法が流布しているが，ヤコビが真に着目し，正体を明るみに出そうと欲したのは今日の意味でのアーベル関数それ自体ではなく，それらを係数にもつ代数方程式の根として認識される関数である．そのような関数をヤコビはアーベル関数と呼び，リーマンはヤコビの逆関数と呼んだが，ここでは**ヤコビ関数**という呼称を採用したいと思う．

原型のヤコビの逆問題に即して観察すると，**ヤコビ関数は複素 2 変数 u, v の 2 価関数であり，その存在領域は複素次元 2 のアーベル多様体上に広がる代数的リーマン領域である．しかもそのリーマン領域は必ず分岐する．**

ワイルの『リーマン面のイデー』に現れたヤコビの逆問題

ヤコビの逆問題はリーマンのアーベル関数論の主題であるから，当然のことながらワイルの著作『リーマン面のイデー』でも取り上げられている．記号の説明を省いて，ヤコビの逆問題を語るワイルの言葉をそのまま再現すると次のようである．

> $p = 1$ の場合に楕円関数によって解かれる "逆問題" は，任意の示性数 p をもつ面に対してもつぎのような形で成立する：dw_h^* $[h = 1, 2, \cdots, p]$ が $\mathfrak{F}$ 上の第 1 種微分の複素基底であるとき，あらかじめ任意に与えられた数 $\mathcal{F}_1, \cdots \mathcal{F}_p$ に対して，(積分の道を適当に選ぶとき)
>
> $$\sum_{l=1}^{p} w_h^*(\mathfrak{p}_l) = \mathcal{F}_h\ [h = 1, 2, \cdots, p]$$
>
> となるように，$\mathfrak{F}$ 上の点 $\mathfrak{p}_l, \cdots, \mathfrak{p}_h$ を見いだすこと．
>
> （註）田村二郎訳．原書の初版を典拠とする邦訳『リーマン面』（岩波書店，1974 年）より引用した．以下の叙述でもワイルの著作からの引用はこの邦訳書の訳文にしたがう．

これがワイルのいうヤコビの逆問題である．ワイルの歴史的註釈が続く．

> この逆問題はヤコビにより，アーベルの定理に関連して提出され，Göpel（註．ゲーペル）とRosenhain（註．ローゼンハイン）による重要な準備的労作ののちに，リーマンとワイヤストラスにより ϑ 関数—p 個の変数 $\mathcal{F}_h$ の或る超越整関数—を使って一般的な解決が得られた．

ワイルはここに脚註を附して，リーマンの論文「アーベル関数の理論」と「テータ関数の零点について」(1865年)，それにヴァイエルシュトラスの講義録「アーベル的超越物の理論に関する講義」(「超越物」の原語はTranszendenten.「アーベル的超越物」はアーベル積分と同じ）を挙げ，そのうえで次のような所見を書き留めた．

> 逆問題の大きな意義はわれわれ現代人にとって単に問題そのものの価値のなかにあるばかりではなく（そしてそれが決して主要なものでもなく），Riemann（註．リーマン）やWeierstrass（註．ヴァイエルシュトラス）の壮大な一連の思想—逆問題を解決するための努力を通して，彼らがその創造に駆り立てられた一連の思想—のなかにある．

ヤコビが提示した原型の逆問題では探索の対象はヤコビ関数であった．本稿では詳述するゆとりはないが，ゲーペルとローゼンハイン，それにヴァイエルシュトラスもまたヤコビの意図を正確に踏襲した．ところがワイルが語るヤコビの逆問題に移ると様相が一変する．主題はもうヤコビ関数ではなく，「点系の対応」の状況観察へと移っている．もう少し正確に観察すると，ヤコビの逆問題を「点系の対応」として諒解したのはリーマンその人であり，リーマンはそのような視点を確保することにより逆問題の解決に成功した．ワイルはそのリーマンを踏襲したのであり，そこに格別の創意が見られるわけではないが，その際，リーマン面を複素数域から切り離して複素多様体のイデーを語ることになった．

ワイルの創意により，ヤコビの逆問題の幾何学的状況はリーマンの原論文に比してますます明瞭になっていくが，失われたものもまた存在する．それはヤコビ関数である．関数の姿が代数関数論の表舞台から消えてしまうのであり，明晰判明の獲得のために，ワイルは大きな代償を支払わなければならなかったのである．

リーマン自身が提案した閉リーマン面，すなわち代数的リーマン領域は複素数域と緊密に結ばれている．そのために，消失したように見えたヤコビ関数は実際には一時的に背景に退いただけであり，いつでも認識可能なのであるから消滅したわけではない．

ワイルはヤコビの逆問題そのものにはそれほど大きな価値を認めていなかったようで，その間の消息は上に引用した脚註に率直に語られているとおりである．ヤコビの逆問題が解けたという事実に値打ちがないわけではないが，真実の値打ちの所在を考えていかなければならない．この問題には何かしら深遠な魅力が備わっていて，リーマンやヴァイエルシュトラスの壮大な思想を誘い，創造へと駆り立てていった．まさしくそこに真の値打ちが認められるのであると，ワイルは言いたそうである．では，リーマンやヴァイエルシュトラスは何を創り出したのであろうか．

多変数関数論と複素多様体論の別れ

アーベルの「パリの論文」からヤコビ，ヴァイエルシュトラス，リーマンへと続く流れをたどっていくと，代数関数論の主題は一貫してヤコビの逆問題であった．ところがワイルの関心はそこにはない．ワイルの目にはリーマンとヴァイエルシュトラスの「壮大な一連の思想」の果実が映じていたかのような口ぶりだが,『リーマン面のイデー』にはその果実の具体的な姿は見られない．**リーマンからワイルへと移り行く際に代数関数論の主題もまた変遷し，しかも新しい主題が語られたわけではない．代数関数論の印象が茫漠としてしまうのはそのためである．**

ワイルが明記しているわけではないが,『リーマン面のイデー』の刊行後 100 年の歳月が経由した今日の目には，ワイルの心情のカンバスに描かれていた「リーマンやヴァイエルシュトラスの壮大な一連の思想」の産物の姿がいかにも明瞭に見えるように思う．それは 1 次元および高次元の（一般に特異点の伴う）複素多様体の理論であり，リーマンのアーベル関数論の延長線上に配置されるのはコンパクトな複素多様体の理論である．ワイルの著作が契機となって，リーマンのアーベル関数論は関数の理論から図形の理論へと転換したのである．

ワイルはヴァイエルシュトラスの解析的形成体とリーマンのリーマン面を同じものと見て複素 1 次元の複素多様体の概念を導入し，それを新たにリーマン面と名づけた．ヴァイエルシュトラスとリーマンの出発点がこうして融合したが，リーマンのリーマン面が複素数の世界に連結しているのに対し，ワイルのリーマン面は複素数域から切り離されていて，さながら空中に浮遊する飛行船のようである．ヤコビの逆問題の探索の場において，ヴァイエルシュトラスはどこまでもヤコビ関数の姿を追い求めたが，この方向に歩みを運べば，クザン，ハルトークス，E.E. レビと続く多変数関数論の世界が開示されていく．ヴァイエルシュトラスのアーベル関数論はワイルの『リーマン面のイデー』に包摂されるわけではなく，ワイルの著作の出現に伴って，かえって多変数関数論と複素多様体論との別れが際立っていくのである．

ヤコビ関数の等分と数論

ヤコビの逆問題の解決を通じて出現するヤコビ関数は多変数の解析関数であり，しかもその存在領域はアーベル多様体上に分岐しながら広がる代数的リーマン領域である．ヤコビ関数に寄せる関心はおのずと多変数関数論の基礎理論の形成を誘うが，多変数解析関数を考える場，すなわち，ワイルのいう「多変数解析関数がその上にこそはじめて生育し繁茂しうる大地」としては，複素数域から切り離された複素多様体よりも，リーマンのアイデアにならって高次元のリーマン領域を考えるほうが適切なのではないかと思う．

こうしてヤコビ関数の考察は多変数関数論の主役になりうるが，ではその際の主問題は何であろうか．アーベル関数論から発生する最後の問いがここに現れているが，ヤコビとエルミートはヤコビの逆問題の解決に先立ってすでにひとつの有力な道の所在を示唆している．それは**ヤコビ関数の等分と変換の理論**を構築し，数論との関連を明らかにすることである．アーベルの楕円関数論がクロネッカーの虚数乗法論を誘ったように，

ヤコビ関数論には一般化された虚数乗法論への道を開く力が備わっている．本稿ではこのあたりの消息にこれ以上立ち入ることはできないが，今後の歴史研究のひとつの課題としてここに挙げておきたいと思う．

最後の課題

本稿の叙述目標はほぼ達成されたが，最後になおもうひとつの根源的な問題が残されている．それは，**代数関数が数学研究の表舞台に登場したのはなぜなのであろうか**という問いである．デカルトの『方法序説』のあたりまでさかのぼって再考を強いられそうな難題であり，考えるほどに印象はいかにも不思議である．西欧近代の数学の根底に横たわる大きな謎として，いつまでも考え続けていかなければならないであろう．

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

高木貞治再論

木村　洋（Hiroshi KIMURA）

目的

筆者が 2006 年に「第二次世界大戦と高木貞治」を執筆して以降に得られた情報を祖述する．高木貞治の存在を既知と仮定する．

高木家の家系

姓氏研究の第一人者丹羽基二によれば，高木の祖先は石津郡の豪族高木彦左衛門に遡るという．1583 年に豊臣秀吉が南近江から美濃国を経由して伊勢に向かった際，彦左衛門は西駒村砦で豊臣軍を襲撃した．秀吉は筒井順慶に迎撃させたが彦左衛門はこれを退けたので，秀吉は気骨を買って軍を駒野から引上げたという逸話がある．

高木貞治の視点から見た教育遍歴

一色学校時代，課外で四書五経の素読・日本外史と十八史略を読んだ．

「*日本外史は面白く，本を讀むのは面白いことだ，ということを教えてくれたのは，日本外史であったように思う．われわれは，平氏よりも源氏が好きで，しかしながら義經は可哀そうで，頼朝は憎らしかった．甲悦戦爭では，勿論謙信びいきで，流星光底長蛇を逸したのは，實に殘念であった．何といっても第一等の英雄は太閤樣だが，清正と辯慶との優劣は，解決困難なる問題であった．雲か山か呉か越か，鞭聲肅々夜河を渡り，あの頃の少年に文藝趣味の接種をした山陽先生の恩惠は大きい*」

「*私は小学校で習つた算術については，特別記憶していない．しかしその当時でも要目のようなものがあつたが，殆んど規則通りには行かなかつたようであつた*」

岐阜中学時代，高木は数学者樺正董・英語教育者斎藤秀三郎などから教育を受けた．高木は中学教育に対して鋭い批判を向けている．

「*漢文は文章軌範・孟子・左傳の拔萃などが，教科書であったが，漢文に對する情熱は段々冷却した．漢文のためには相當な時間が費やされたのであったけれども，どうやら中途半端で，教養として身についた所は甚だ少なかったようである．その點，われわれは一世代前の先輩に比して大に遜色があったようである．*

中學校へ入ってからは，英語が新しい刺激であった．あの頃の中學校では，文部省の制定した學科課程などは勵行されなかった．實際は，教員缺乏などのために，勵行不可能であったのであろう．そこで，英・漢・數，中でも英語に主力が注がれたのである．何分，英語科そのものの外，地理・歴史から數學・理科まで英語の教科書を使ったのだから，授業時間の大部分が，事實上，英語の教課であったというべきである．われわれは，米國製のリイドルを卒えた後，マコーレーのエッセー二三種，ラセラス，ヴィカー・オブ・ウェークフィールド，アーヴィングのスケッチ・ブックなどを讀まされて，新しい世界が，わ

われわれの眼前に展開された．とはいっても，あの頃，西洋の事情を全く知らなかったのだから，本當の所が，どれほど理解されていたのか，今から考えて，よく分からない」

「我々が一番苦しんだのは，一年級のスペルリングであった．今の若い人は知るまいが，これはアメリカの子供に正字法を教える為のものである，アメリカの子供は意味はよく知っている語の綴りを暗記するのだが，吾々は意味を知らないで，発音を聞いて，綴りを言わされるのだから，無理な話である．先生がベーカー(baker)というと，生徒は，ビー・エー・ベー，ケー・イー・アール，カー，ベーカーと答えなければならない．こういう語を毎回数十暗記させられて，その成績によって，綴り方の時間の席順が毎回改められるのである」

1 年生では田中矢徳の和訳算術教科書を使用した．高木と清水達雄の対談を引く．

高木「中学校の一年生から幾何学をやって，そして証明なんかユークリッド流なんだから．一年生からやったね．それから，逆はどうだとか，対偶だとか．あんなこと言われても，一年生はわからない．ところが先生もあやふやなんで(笑声)．ぼくは今でも記憶しているんだ．一年生の幾何の問題ね．あのころは田舎の中学で，ほんとの先生がいなかった．文部省でいろんな規則をこさえても，なかなか実行できないんだね．教員が不足でね．幾何に限らず，数学のほんとうの専門家というのは，あんまりいなかった-----あれは，何といったかな．オッポジット・アングルっていって，こういう，こういう……」

清水「対頂角ですか」

高木「ああ，対頂角は相等しいという定理ね．それの逆を言えという問題ね．何を要求しているのかわからないね．先生がね．逆っていろいろにとれるからね(笑声)．ぼくは相等しいものは対頂角だなんていう，逆を書かなかった．それでえらい点数，零点をつけられたけどね(笑声)．ぼくは，めんどうくさいことをね，直線の両脇にこうきて角が等しいときには 2 直角で……逆に書いたけれどそんなのいけないらしいんでね．あのころは無茶だったな．文部省の規則を実行するに，先生がいないんだね」

2 年生以降はトドハンターの小代数，ウイルソンの幾何学の英語版を使用した．

「数学は外国の本を使つても内容の上では内容の上では大して差支えがなかつたが，地理などになると随分辞書を引かねばならなかつた．アメリカの一州が歐州の一国位の詳しさで書いてあり，日本などは終りの方に一寸附いているだけであつた」

「英語の力が足りなくて，教科書はたゞ問題を解くだけ位に役立つた．しかも方程式の応用問題となると随分辞書を引かねばならなかつた」

「代数の説明などは二年生には迚も読めないから，先生が説明して，本では問題だけを見るというようなことであった」

「今思って見ると，吾々の受けた中等教育は-----そう言っては，忘恩かも知れないが-----実際ずいぶん乱暴なものであった」

斎藤秀三郎の伝記を執筆した大村喜吉が，斎藤の件で高木にインタビューした記録を引く．

「土井晩翠翁は言う『世界的大数学者高木貞治君は岐阜中学で先生の教をうけた者である．ある日西方町に参上した折先生曰く「高木はばかに偉い頭脳をもってる，何とかして語学に引っこもうとしたが私は数学に向いてますと逃げてしまった」とて残念がられた』と．高木博士はこの斎藤伝説を否定されながら『斎藤先生に語学に来いと言われたことはない．また斎藤先生は文法・作文だけを担任された．特

に Analysis をやかましくやられたように記憶している』と語られた. 私が高木博士にお会いしたのは昭和二十七年六月三十日, その年の十月一日発行の「学図」に高木博士は「中学時代のこと」を書いておられる」

高木と同期の吉江琢児(1897 年 7 月東大数学科卒)は広島尋常中学校時代を次の様に回想している.

「*それにしても今から考へると私達の受けた教育といふものはまるで目茶だつた*」,「*中學校は廣島で入學するとA, B, Cも習はないうちに, いきなり原書をあてがはれた. 歴史も地理も算術代數幾何も英語だつた. その頃は未だ外國の文物諸制度直輸入の時代, 陸軍も佛蘭西や獨逸から教官を招聘してゐる頃で私達中學生の軍事教練の時でも振つてゐるのは號令に「中隊止れ」と言はずに「コンパニーハル」と言つたものだ. そういふ時代だつた. 最初買つた數學の教科書はロビンソンの本だつた. 私は家も貧しく, 父が極めて嚴格だつたので, その頃攻玉社から出てゐたロビンソンの飜譯本を買つて貰ふことが出來ない. 辭引と首引で讀むのだが, 何せ英語の文法を習つてはゐないのだから無論問題の意味を理解することが出來ない. その爲めに數學で落第しさうになつたことがある. 實にその頃は亂暴なものだつた. 幾何の先生が慶應出身で, その先生は英語が上手だつたが幾何は全然知らないと來てゐる. 先生が問題を直譯する. その直譯によつて私が解いて見せるといふやうなことだつた*」,「*ロビンソンで落第に脅かされた私は友達から攻玉社の譯本を借り, 丁寧に寫したものだ. 今でもこの寫本は手元に殘つてゐる. それから矢張り數學が好きだつたからだらうが私は自分で對數表を作らうとしたことがあつた. よせばいゝものを七ケタの對數表です. 刻苦半歳に及びましたが, これは根氣負けがして中途で挫折してしまつた*」

高木自身が第三高等学校時代について語ったのは以下の二行でしかない.

「*代数がバーンサイドの方程式論, パツクルの解析幾何, ウイリアムソンの微積分学, オールデスの立体解析幾何学を習つた*」

「*高等學校, 大學の時代には, ヂッケンス, サッカレー, スコット等等を亂讀することは, 出來たのである*」

高木は第三高等学校時代を事実上殆んど語っていない. 影響を与えたはずの数学教授河合十太郎(1889 年 7 月東大数学科卒)・森外三郎(1891 年 7 月東大数学科卒)に対しても言及が見当らない. 高木は自分の師に対して, 何がしかのネガティブな側面を書き残していることからしても異例といってよい. 書く価値を認めなかったのか, 第三高校 OB だと思われたくなかったのかは不明である.

高木の同期卒業生 90 名中, 高木と同じく理科大学に進学した者は吉江琢児(山形士族)・平塚忠之助(島根平民)・河野福太郎(愛媛平民)・青山長兵衛(京都平民)・平田敏雄(和歌山士族)・亀高徳平(岡山平民)・塩谷應太郎(和歌山士族)・奥村英夫(岡山士族)・西川藤吉(大阪平民)・塚本又三郎(大阪平民)である. この内, 友人として高木が言及するのは吉江一人で, 同じく東大数学科に進学し, ドイツ留学時期も近い奥村英夫(1898 年 7 月東大数学科卒)等については全く触れられていない. 奥村は, 高木より一期遅れて数学科を卒業した後に明治生命に入社し, 1899 年 10 月 30 日に日本アクチュアリ

一会発起人，1899 年 11 月 4 日に保険学研究のため日本郵船会社の汽船備後丸で横浜を出帆してゲッチンゲンに留学，1903 年に生命表作成主任，1905 年 1 月に日本初の経験生命表である明治生命保険株式会社実験死亡表を完成させたことで知られる．

当時の高木を知る吉江は*「體操と製圖だけは僕の方がうまかつたがね．」*と語っており，高木を頭一つ抜けた存在と思っていたという．吉江の回想から浮かびあがる高木像から推論するに，高木に隠したい過去があったわけではなく，単に聞かれなかっただけらしい．贅言を嫌う高木は，高校時代への言及を贅言と見做したのかもしれない．

高木の数学科進学時の 1 年生は，1 年留年した石沢命春(奈良)，翌年哲学科に転科する八田三喜(石川)・吉江・留年する奥村英夫・近江幸治(宮城)・藤田外次郎(石川)であった．証言を幾つか引く．

高木の証言．

「*わたしどもの學生時代は，紅葉・露伴・逍遙・鷗外の時代であったのだが，われわれは，紅葉よりは露伴が，逍遙よりは鷗外が，ひいきであった．あの頃『讀賣』は文學新聞といわれていたが，外國文學は『國民』が紹介していたようである．インテリが『朝日』を讀むようになったのは日露戦争の頃からであったと思う．漱石の小説も朝日で讀んだが，後に單行本でも讀んで，流石にうまいと感心した．但，卒直にいえば，さあ，何と言ったものか，まあ，あまりに道徳的な，とでもいうか，それが長所でもあろうけれども，時としては，厭になると思った．むしろ初期の作品，『猫』，短篇ながら『倫敦塔』，『カーライル博物館』などは，いつ讀んでも面白いと思う．『坊ちゃん』は善玉悪玉はっきり對立して明朗である*」

吉江の証言．

「*大學時代私は芝の白山町から徒歩で本郷へ通學した．無論當時銀座の一部に鐵道馬車があつたゞけで唯一の交通機關が人力車だつた．一番困つたのは本郷の大學が十二時で終り，二時から飯倉の天文臺で寺尾先生の講議がある時だつた．私は門外漢だつたから，どうかして平山君が休む時があると，寺尾先生も門外漢一人を相手では張り合ひがないものと見えて，「今日は平山が來ないから止めやう」と仰ることもあり，呑氣と云へば呑氣極る話だがその時の私は待ち呆けを喰はされた戀人のやうに腹立たしくも失望したものだ*」

中川銓吉(1898 年 7 月東大数学科卒)の証言．証言中の藤田とは，中川と同期の藤田外次郎である．

「*私が明治廿六年上京した頃は汽車の乗り方が分らないでドギマギしたものでした，物理の教科書で蒸汽機關の理論は知つてゐましたが實際に見た事がないのでネ高木君と一緒に汽車見物に出かけました*」

「*そもそも數學科としては高木藤田の兩君に私の三人で寄宿の集會室に瓦煎餅をカヂりつゝ圓卓會議式に討論しましたが大抵は雑談になつてしまひましたよ，まあ一緒に愉快に話し合ひ遊んだのですネ*」

「*學生時代の想出としては藤澤利喜太郎先生の偏微分方程式…特にミブンと發音される…はハナから無試驗との事で嬉しく聽講しましたので今だに何も知りません，力學…先生はリヨクガクと云はれる…の鶴田助教授は意地悪くて怨み骨髄に徹しましたが或時三日もつゞけて試驗をやつたのでもう宜いだらうとホツとした途端に四日目にも試驗されて泣きました．圖書館にも雑誌が三册位でした*」

第三高等学校・東大で 1 年先輩だった林鶴一(1897 年 7 月東大数学科卒)と高木の逸話．

「*林博士とは學生時代痛飲馬食大にメートルをあげられたものだ．ある時例によつて御兩所思ふ存分*

にハメをはづし気焔當るべからず，林博士が俺はウエバーのやうな世界一の大數學者にあるんだと云へば高木博士は言下に，「俺はウエバーの娘を貰ふんだ」といつて力んだと云ふから，青年高木の面目がいかに颯爽たるものであつたか分らう」

藤澤セミナリーについての高木証言．高木は，群論・ガロア理論を日本で最初に紹介した．

「あれはただ本を読ましたんだけど．ぼくらの前のクラスから始めたんだがね．セミナリーというのを日本でやったのは，初めてだぜ，あれが．このごろはむやみとやっているが．三年生がいろいろ問題を当てがわれたもんだ．あのころは主に代数さ．ぼくらの前の人は，3 次方程式の解き方とか，5 次方程式がとけないとか．あれは明治何年かな．ぼくら 30 年だから，29 年から始めたんだな．

それは東京数学物理学会というていたんだけど，何にもしなかったから金が余ったんだ．会費ばかりとって何もしないから．それでセミナリーなんか出版した．それから，自分で記事なんか出してから，金が足りなくなった．もとは何もしなかったんだから金が余った」

当時の教育に対する 1941 年 1 月時点での高木の回顧．

「僕が大學を卒へてドイツへ三年行つて歸つた頃のものを，いまの青年學徒は大學卒業の頃持つてゐるのだ」

高木の第一回渡欧

帝大理科大学数学科を卒業した高木は，大学院では「代数学及広義ニ於ル「アリスメチック」」を研究題目とした．「アリスメチック」を研究題目にした元田傳（1889 年 7 月数学科卒）以降，2 番目の代数系専攻の大学院生となり，留学生に充当された．

高木の証言を引く．

「わたしは明治三十一年にドイツに留學して，ベルリンに行った．あの頃は，高等學校で習った第二外國語では間尺に合わないというので，先生について語學の稽古をしたものである．會話の練習が目的なのだから，教材としては，やさしい喜劇，短編小説などを使った．それが病み付き，というわけでもないけれども，先生からは獨立して，獨りでも讀むことになって，わたしなどは，餘分に讀んだ方ではないかと思っている．勿論，讀むといっても，辭書と首引で讀むのではない．分からない語は分からないままで讀む．西洋人の話すのを聞ているのだと思えば同じ事だ」

「シラノをベルリンで觀劇するために，ドイツ譯で讀んだ．譯者はフルダで，彼自身，當時ハウプト・ズーデル兩マンと雁行するといわれていた相當な作家である．自分で原作のような物は書けないけれども，書かれたものを自國語で書くのならば，文章には腕に覺えがあって，随分原作者に拮抗し得るというわけなのであろう．他の一例は即興詩人．

語學の稽古になるといって，芝居も見た．先ずテキストをよく讀んでから見るのだから随分骨が折れた．古典ものは王立劇場で見たが，あそこでは，ファウストなどは禁制であった．ファウストはドイツ座で見た．名は忘れたが，何とやらいうドラマトルグの演出は好評であった．グレイチェンの部屋の場で，彼女の歌うマイネ・ルー・イスト・ヒン，マイン・ヘルツ・イスト・シュウエヤ云々の歌などは，本で下讀みし

た時の豫想とは違って，激越な調子で早口にまくし立てるので驚いたが，實際その方が適切に相違ないから，感心して今だに覺えている．今參考のために，鷗外譯を出して見ると，「心の落ち着き無くなりて，胸重苦しくなりにけり，」云々．これは，あまりに悠長，いささか滑稽である．ドイツ座では，重に新しい物をやっていたが，あの頃はハウプトマンが盛んに書いていた時代であった．シェクスピヤの物も頻繁に上場されたが，シェクスピヤは英語ではむずかしいけれども，ドイツ譯はよっぽど分りよいと思った」

「ゲッチンゲンへ轉學してからは，芝居は見られなかったが，あの頃，ゲッチンゲンに，これも名は忘れたが，世界的に有名なシェクスピヤ學者がいて，そこへスコットランドから，確かアバヂンの教授でビーチーとかいう人が留學に来ていた．わたしの同僚の吉江琢兒君と同じ家に寄宿していたから，折々會つたが，その人に教わって，フィッシャー，Vで書くフィッシャーだが，それのシェクスピヤ評釋を讀むことができた．ハムレット，オセロ，マクベス，ロメオとジュリエット，その外何があったか覺えていないが，芝居で見る前に讀めたらよかったのに順序が顚倒した．

音樂は分からないから，ドイツではオペラは見なかった」

高木の後に渡欧した吉江の証言．

「獨逸に留學中ゲツチンゲン大學の大數學者クライン博士の講義を聽いたことがあつた．談適々當時獨逸に架せる大鐵橋の話となつた時氏は言ふ，「米國にて架せる鐵橋は多量の鐵材を充分に使用してゐて立派である．我獨逸では鐵材は高價だが，幸ひ數學が安價だから之を充分使用して堅固な橋を架することが出來る」と．この比喩は巧みに純正數學と，その生活に齎す恩澤を物語つてゐる．我邦は鐵，石油其他の資源に決して豐ではない．しかし安價な數學で國家繁榮の道を拓くことが出來ると思ふ．

又或る時同氏は私に「君の國では凧が盛ださうだが，その理を考へて見てはどうか」と言はれた．私はその頃純正數學以外のことは餘り興味がなかつたので，その儘にしたが，今にして思へば當時既に同氏は航空機を考へて居られたのである．（當時無論航空機はない）又有名な數學者リレンタールはその當時既にグライダーの研究を始めてゐたが，その理論的根據に自信を懷くや，大膽にも自ら之を作成し，操縱實驗中墜死してゐる」

「クライン先生を賴つて出掛けたのですが，矢張りあのヒルベルト先生の方がよくつて，そこで勉強しました．ヒルベルト先生の下ぢや，ひどく鍛へられたものでしたがそれももう夢の樣な氣がします」

高木のドイツ留学時代について，吉江以外の証言は確認されていない．例えば同時期にドイツ留学した心理学者松本亦太郎は「遊學行路の記」（第一公論社，1939．10）などで，複数の日本人留学者と広汎に親交を深めたことを記述しているが，高木とは行動範囲が全く合致しなかったようである．当時の実質的な在独日本人による会誌 Ost=Asien（日本語訳は東亞．ほぼ全巻を東大図書館が所蔵）に掲載されている在独日本人の住所氏名録をもとにして調査を進めたが，高木と他の在独日本人のネットワークとの接点は発見されなかった．高木研究が困難な理由は，交際範囲が非常に狭いことにある．他の数学者ならば実に多彩な痕跡が得られるのだが，高木の場合は友人・学士会・県人会・趣味とい

った人間関係の結節点がほとんど見当らない．人間関係を意図的に遮断したのかもしれない．高木のゲッチンゲン滞在中，三高時代に教えを受けた河合十太郎がライプチヒに留学し，漢学の服部宇之吉・電気化学の大幸勇吉・瀧廉太郎などと交流していた事は判明しているが，河合と高木がドイツで交流をもったかすら判明していないのである．

本田教授の先行研究では，1900 年 6 月 5 日に高木と吉江の写真をベルリン留学中の地理学者山崎直方（日本地理学の父と呼ばれる）が Wilhelmshöhe 公園で撮影したことと，1901 年 10 月 17 日付でシャルロッテンブルクから水野なる人物（物理学者水野敏之丞か）がゲッチンゲンの高木に絵葉書を出したという言及がある．在ベルリン理工系日本人留学生は“理工會”に属していたので，高木は理工會員と接点があったのであろう．帰国後の高木は，同じく帰国した山崎と 3 度接触したことが確認されており，高木と山崎が親しい関係だったことが伺える．山崎は日記を遺しているが，戦災で焼失したのか過去に調査対象となっていない．

帰国後の高木と山崎の接点が最初に確認されるのは，津軽英麿伯爵帰国に際してである．1904 年 2 月 27 日，ベルリンで法律学を学んでいた津軽が 18 年ぶりに新橋駅に到着した．津軽は留学中の一時期に藤澤利喜太郎と同一宿舎に居住したこともある人物で，在伯日本人に多大な影響力を持って居たとされる．高木と山崎は，1904 年 3 月 27 日午後に連れ立って津軽邸を訪問したという．ベルリン時代のお礼言上であろうか．

高木貞治の講義内容

1901 年にドイツから帰国した高木は，東大数学科助教授として代数学其の他の講義を開始した．代数学は数学科では必修講義であるが，物理学科や天文学科には選択講義ですらなかった時期も多く，受講者証言が極めて少ない．理工学部一年で線型代数学が必修となるのは戦後のことであり，そもそも線型代数学なる科目が無かった．東大数学科での門下生証言については本田教授が調査済みと推論されるので，他の証言を紹介する．

高木の講義風景は以下の形容で言い尽くされている．

「*斷片的な要領を紙片にかいたものだけで幾らでも續けられる．その講義ぶりが亦博士獨特のもので，聞きとり難い低聲，然も肝腎なところになると一人でニコニコしながら一層小聲になる．おまけに白墨の尖端をつまんで輕く書かれる板書の文字が薄いと來てるので，大抵の學生は惱まされる．でも下宿に歸つて，ノートを讀み返してみると中々味のある講義で，ハハアと初めて妙味がわかるといつた類だ*」

微分積分学を長年担当した坂井英太郎が 1932 年に退官後，高木は微分積分学を担当することになる．高木は前任者坂井の講義内容を踏襲せず，劇的に改善を加えて解析概論に結実させた．坂井の講義に対する受講者側の感想を幾つか引く．高木の講義にはこの種の批判が公的になされたことがない．30 分遅れて講義室に出現したなどの逸話が流布されている高木の講義だが，試験が難問ばかりだった，容易だった，落第した，という種類の証言は見当らない．

1904 年度に東京帝国大学理科大学理論物理学科に入学した田邊尚雄の証言．田邊は学部 1 年で愛知敬一講師の解析幾何学を受講した．

「私の一年のときの講義が愛知先生の初講義であった．それゆえ初めの一学期間は，世界に於ける算数学の権威である藤沢利喜太郎先生が，側に監視して居られた．しかし愛知先生の講義は要領を得て非常に覚えよかった」

藤澤の性格を考えると，数学科教官の高木・吉江等の講義も最初は監視したのであろう．高木の講義に好感を持てたか否かはわからない．藤澤が高木をどう評価したかは明らかではないが，高木が藤澤の人格面に好感を持っていなかったという仮説を導入すると，好感を持っていたとする仮説より実に多くの事が説明できることは事実である．高木による藤澤追悼文は複数存在するが，最初に帝国大学新聞に執筆した文を相当部分使い回している．Hilbert に対しては，このような使い回しは見られない．高木は追悼文で藤澤を評して"主義の人"と書いたが，主義の内容の言及評価解説は避けている．

本田は「*彼は初対面の客でも，すぐその人間的特徴を見てとった．それもどちらかというと，良い方ではなく，悪い方の特徴をすぐ見抜いたそうである*」と書いている．藤澤は，東京帝国大学理学部数学科講師の嘱託を解かれた 1922 年 4 月 7 日まで教壇に立ち，事実上高木にとって唯一の上司だったが，この二人を心温まる師弟関係・上下関係として描写することは，存外に難しい．

1905 年 9 月に東京帝国大学理科大学理論物理学科に入学した寺沢寛一の証言．寺沢は学生時代，教官が使用する種本を特定する特技を発揮しており，極めて貴重な証言と言える．

「高木先生は非常に声が小さくて，黒板の字も小さく，講義者としては落第でした．ウェーバー(Weber, H.)の『Lehrbuch der Algebra』をたねにしておられたのではないかしら」

1910 年 7 月に東京帝国大学理学部物理学科を卒業した池田芳郎の証言．

「私の学生時代東大物理学科の図書室は大部屋で半分に学術雑誌，単行本があり半分に机が並べられて閲覧室になっていた．ここに先生達も時々見えられたが先輩の人も来ていた．先輩の人と話をする社交室であった．数学教室の図書室は教授室の片隅であった．大きい部屋の窓側に教授の机があり高木先生，吉江先生，中川先生がいた．戸棚の鍵は各教授がもっていて机の上に置いてあるノートに書名と自分の名をかいて御願いすると貸出して下さった．この様な状況で勝手なことは出来ないが読みたい本の名や内容について指導をうけることができる．先生方に御迷惑をかけたが皆親切に教へて下さった．数学の学生と同様にして下さった」．

1921 年 5 月に東京帝国大学理学部天文学科を卒業して大学院に進学した萩原雄祐の証言．

「その頃，僕は，天文台に雇われて，BROWN の表で月の暦を作らされていたんだが，相対論で天文学を書きかえてやろうなんて，若いものだから，大それたことを考えたんです．まず，相対論で二体問題を解かなくちゃというので，大学院に入れてもらって，午前中は高木(貞治)さんの代数，整数論やマトリックス，モジュル函数，線函数などの特別講義，吉江さんのは，学生のときみんな聞いちゃった．中川銓吉さんの非ユークリッド幾何や曲面論，射影幾何学，これが，みんな役に立っています」

1924 年頃，高木邸で個人教授を受けた山崎謙（本名染谷謙）の証言．

「およそ芸術家にせよ科学者にせよ，まぎれのない本ものならば，歴史の発展方向に弓を引くような反動思想で満足するはずはない．数理学の学習に力をそそいでいた青年時代の僕が個人的に格別の指導をうけた高木貞治さんは，戦争中の「大本営発表」に業を煮やし，「聴き手が賢くなるより仕方がない」と，吐き棄てるようにいっていた．寺田寅彦なぞにくらべて，同じく科学畑の人間でありながら，月とすっぽんの懸隔である．

関東大震災の翌年ごろと記憶するが，僕は，デデキントや，カントールにとりくんでおり，難解な箇所にぶつかるたびに，高木先生をわずらわしたから，お目にかかる機会はわりに頻繁であった．用件がひととおりすむと，奥さんのいれてくれた紅茶をすすりながら，いつも彼は，すでに目にあまるほどになっていた軍の横暴を指摘しつつ，文化擁護の必要を述べたてた」

山崎は，1922 年にモスクワ・極東勤労者大会に参加して帰国後，独学でフランス語・ドイツ語等を習得した時期があり，この時に高木の講義を受けたものの様である．1925 年に東大での「ブハーリンの史的唯物論」研究会に出席，早稲田大学哲学科・大学院を経て哲学教授となるが，拘留中に警視庁から脱走した高倉テルを匿ったとして逮捕されている．弁証法論理学の体系化に従事した戦闘的哲学者として戦後知られることになる山崎は，高木と政治的会話をしなかったと見られる．

留学先のドイツで東大経済学部統計学講座担任糸井靖之が客死したことで，1925 年 8 月 21 日付で統計学講座の後任となった経済学者有澤広巳の証言．

「数学は全然習わなかった．数学を習うようになるのは，それから助教授になって約一年たったときに，糸井先生が亡くなったんです．そこで，大学当局としては，糸井先生が統計学講座の担任者になっていたんだから，先生が亡くなったとすれば，すぐ後継者を養成しなきゃいかぬというので，どういうかげんかわからないけれども，あるときぼくの部屋に舞出（長五郎）先生がやってきて-----まだ学部長じゃないけれども-----ぼくに統計学をやれ，君は糸井先生の演習も受けたんだから，統計学をやれというんです．ぼくは，嫌だといったんだ（笑）．舞出先生がんばって，君が色よい返事をするまでこの部屋を動かないという．ひどいものだ．それで，結局とどのつまりは統計学もやる，しかし，ぼくは経済学もやりますよ，二足のわらじを履きますよと，そのときにいった．「それでいい，統計学は東大の一つの講座でちゃんとしたところだ．行く行くは講座の担任者になるんだから，しっかりやってもらわぬと困る」といわれた．

それで，統計学をやるようになったについては，数学をやらにゃいかぬということになった．それからだれに相談したかな，理学部の先生に相談したら，湯島の天神さまの下の方に住んでいた偉い数学者だった．高木貞治さんだったかもしれぬけれども，そこへ数学を習いに行ったんです．そうすると，高木先生はあまり偉すぎて，教えてくれないんです．これはとてもはしにも棒にもかからないと思ったかどうか知らないけれども，とにかくコーリレーション（相関）の計算ができるまでやればいいでしょうなんて，それで少し教えてもらった．

高木先生というのは，ぼくは感心したのは，この答えが出るには，この式がなきゃいかぬというんです．一つの問題が出ていて答えはこうだ，その答えになる式は，この二つの式が出てこなきゃ答えにならない．あれはどうしてできるかな．（笑）」

有澤の統計学講義及びゼミはデータによる実証重視型で，高等数学を殆んど使用しなかった．

1926 年 3 月に東京帝国大学理学部物理学科を卒業した山内恭彦の証言．
「*大学を卒業する時分に，行列力学，量子力学が出始めた．高木貞治先生の代数の講義を，もぐりで聴いていたので，一次代数，群論のことは一通り知っていたので，数学的方法の理解には苦しまなかった*」
当時，欧州で勃興した量子力学に必要な代数学の知識を，大抵の物理学者は持っていなかった．山内は広く読まれる Weyl「量子力学と群論」を翻訳出版し，日本に於ける群論ペストの発生源とされた．高木は群論ペストをただの麻疹扱いしている．

1930 年に東京帝国大学理学部物理学科に入学した伏見康治の証言．
「*高木先生の講義はぜひ聞かなくちゃいかんと云われたもんだから，二度ばかり行ったんですけど，よく解らなかったから逃げだしちゃった*」

1931 年 4 月 5 日に北海道帝国大学理学部数学科に第 1 期生として入学した穂刈四三二の証言．
「*私は東大の高木貞治教授と東北大の藤原松三郎教授の集中講義で代数学の学士試験を受けなければならなかった．藤原先生の講義は原稿を持参され，はっきりした言葉でわかり易く，ノートも綺麗にとれた．これに反して高木先生は，Van der Wearden の moderne Algebra を持参され，小声で講義されるので聞きとりにくく，理解に苦労した．集中講義で来学された先生を接待するつもりで一席設けたところ，逆に先生にご散在をおかけしたこともあった．このような酒席で先生方から教室では受けられない多くのご教示をいただいた*」
北大理学部は新設当初，代数学・理論物理学・地球物理学の講座が新設されなかったので，当初は外部から講師を招聘することになっていた．高木は翌年の ICM1932 で van der Wearden に初めて会い，その若さに驚いたという．高木が講義用の数学書を持ち込んだ証言は他に見当らないので，藤原と相談して moderne Algebra を使用したのであろう．尚，同年に東大数学科に入学した矢野健太郎は，高木が『代数学講義』の校正刷を手に代数の講義をしたと記述している．

1936 年 3 月に東京帝国大学理学部物理学科を卒業した今井功の証言．
「*高木先生の講義も非常によく解りました．岩波の数学講座の『解析概論』が出るのに合わせて，原稿をもってきて話をされるんです，ですから後で本が出たときに読めばよく解るということです*」

1937 年 3 月に東京帝国大学理学部物理学科を卒業した高橋秀俊の証言．
「*東大理学部では学年を一学年，二学年……というかわりに前期，中期，後期という．その前期は基礎科目ばかりで，力学を含めてほとんどが数学の科目といってよかった．ほかに実験物理学という講義と，物理実験第一というのがあった．物理学を志して入ってきた学生には，がっかりする者も多かったようであるが，私はもともと数学が好きだから，別に不満はなかった．特に有名な高木貞治先生の「微分積*

分学」は岩波書店刊の『解析概論』といえば今でも理工系の学生なら知らぬ人はないが，それが講座「数学」の中の一篇として出たばかりの頃で，それを大先生から直接話を聞けるのは嬉しかった」

高木と教科書

大学院生当時の高木は博文館から新撰算術（1989 年）を刊行し，デデキントの切断を取り上げた．本田は「*当時の日本の数学書の水準をはるかにこえている*」と評価したが，確かにその通りである．

当時の教科書を語る上で，教科書疑獄（1902 年）を無視することは出来ない．県の自由選定だった教科書を採用させるに当たり，教科書出版社が教科書採用担当者に贈賄したという事件である．

当時の教科書は各都道府県独自採択制で，採択後 14 年間は教科書を変更しないことになっていたことから，当然のように贈収賄が誘発された．教科書疑獄事件に関係した金港堂・集英堂・普及舎・冨山房・国光社などが発行する教科書が採択禁止となり，県知事 2 名，文部官僚，学校長，教科書会社関係者等 200 名以上が摘発され，116 名が有罪判決を受けて終結したが，高木の著書・新式算術講義（1904 年）の版元である教科書販売の大手・博文館は，教科書疑獄では連座せず他社のシェアを奪うことに成功した．

旧弊な教科書が疑獄で市場から一掃された結果，一種の近代化がなされた．高木の同期の吉江は中学教師をしたことがないという理由によって中学教科書執筆をせず，中川銓吉は留学先から帰国した 1905 年に冨山房から執筆要請を受けたが，先行して執筆していた菊池大麓・寺尾壽（1878 年 12 月東大物理学科卒）・藤澤利喜太郎（1882 年 7 月東大物理学科卒）・澤田吾一（1891 年 7 月東大物理学科卒）・高木・林鶴一（1897 年 7 月東大数学科卒）と競合したくないとして 1918 年まで遷延した．結果，中学校数学教科書は，長く寡占状態が続いた．

新式算術講義について，現在確認される一番早期の書評は神奈川県第一中学校教諭白井龜吉（1905）である．

「*計算の基礎を論じたる最もよき參考書は理學博士高木貞治氏の新式算術講義なり然れども同氏の中學校教科書として出版せられたるものは全く別物なり中學校教科書程度の算術書にて四則計算の組み立て方を比較的完全に述べられたるは寺尾博士吉田學士共編の中學校數學教科書算術之部なり*」

高木の名を一躍著名にした同書だが，自身はほとんど評価を与えていない．高木の評価を引く．

「*あんなもの，無責任な話だけど，アルバイトのつもりで書いたもので．あんなもの今ごろひっぱりだされては（笑声）*」（1957）

この発言から半世紀後，筑摩書房が同書を再刊する未来を高木は当然知らない．

高木は，初等数学教育では細密な論議を回避する手法を採用している．

「*例のプラトーの「幾何を知らぬ者は門に入るな」というあの伝統．あれは大人に向かっていうことで，子供じゃないね．だから中学校でやるようになったら．子供目当てでなくて，頭の訓練のためですからね．訓練のためだったら，ごく簡単なものを選ばなければならない．それには幾何が一番いい．ほかのものでは，ものそのものが複雑だから，なかなか幾何のようにああいう証明がいかない*」

「*幾何なんか証明ぬきにしたら，何にも教えることはない．わかり切っていることばかりで，何があるか*

な. 三角形の内角. 一度きけば忘れやしないね」
「語学もそうなんだ. あれもやっぱり頭の訓練さ. だからラテン語ね. 違った言葉で理解すること, それから違った言葉で自分の考えを言いあらわすことも, それは頭の訓練だ」
「ぼくはどっちかというと訓練主義だけど」

高木は初期に博文館から, 次いで開成館から教科書を多々単著名義で刊行している. 類体論の論文執筆に至るまでの空白期間中, 同僚が教科書執筆に関わる負担を軽減し, 研究活動に専念することに大いに貢献したわけである.

明治から大正にかけての数学教育に高木が与えた影響は少なくないはずだが, 数学教育分野で活躍する藤澤に遠慮したのか, 数学教育業界に積極的に関与することはなかった. 20 年近く東大数学科教授が順送りで担当した教員検定委員会臨時委員を勤めているが, 目立った活躍の形跡がない.

明らかなのは,「幾何学は難しいものであるから, 難しいまま教えるべきだ」とする藤澤の主義を, 簡単なものを教えるべきだとする高木が否定している点である. 藤澤は寺尾壽が執筆したフランス式理論算術に基づく教科書に対抗し, 日本の社会情勢に適合する算術教科書を執筆した後, 中学校向け代数学教科書を複数執筆したが, 初学者向けとしてはレベルが高すぎた. 実際, 藤澤の代数学教科書は参考書の位置付けに留まり, チャールズ・スミス著初等代数学(長澤龜之助訳)が広く教科書として採用された. 寺尾の数学教育思想を批判した藤澤の思想も, 国際的には時代遅れと見做されている.

数学教育の改良を主張した数学教員養成機関の東京高等師範学校グループは, 保守の牙城のように藤澤を描写している. 藤澤も, 東京高等師範学校のグループに対して感情的な疎隔があった事が伺える. しかし, 東京高等師範学校グループが高木を批判したことは無いようである. 高木と東京高等師範学校グループの間には色々交流があったためかもしれない.

藤澤門下生で, 藤澤流の数学教育論に代わるものを最初に提示したのは高木と林鶴一である. 吉江・中川は藤澤との対立を回避する処世術として教科書執筆を回避したのかも知れない.

高木が中学校数学教科書執筆から離れた時期は, 類体論論文の時期と一致するが, 翻訳物から脱した国産数学教科書が流通し始めた時期とも一致する.

1932 年, 文部省図書監修官塩野直道は, 国定小学算術教科書を根本的に改訂編纂する為, 算術教育の代表者十数名を集めて意見を聴取する場を持ったが, 高木は欠席した.

高木の行政的的活動其の他

高木は行政職に関係を殆んど持たなかった. 名声が高まるに伴い, 数学界を代表した様々な名誉職についたが, 実務能力が問われたことは無く, 具体的な貢献の痕跡が全く見当らない.

1905 年 4 月 29 日に 11 名が出席した日本数学物理学会常会で次期役員として選出されたのが, 学術行政に関与した最初と思われる. ちなみにこの日選出された事務委員長は長岡半太郎(1887 年 7 月東大物理学科卒), 事務委員は高木貞治・本多光太郎(1897 年 7 月東大物理学科卒)・中川銓吉・寺田寅彦(1903 年 7 月東大実験物理学科卒)である.

1904 年, 東大理学部教授だった人類学者坪井正五郎の没後, “人類学関係の蔵書 1600 部余りを坪

井教授記念文庫の名で東大に寄贈，油絵肖像２面を作成し東大と坪井家に寄贈(現存)，醵金に余裕あれば処理は実行委員に処理を一任する”という記念資金の発起人の一人となった．東大理学部教授会メンバー全員が発起人となっているが，藤澤が５円を納付してから高木が３円，中川銓吉が１円を納付している．納付額が公開されるので藤澤より多く納付するのを避けた模様である．

1915 年 11 月上旬，大正天皇の即位大礼に文部省勅任官東京理科大學教授理學博士の肩書で参列し，下京区新町蛸薬師下ルの毛利タケ方に投宿した．11 月 8 日に藤澤と藤野家に投宿していた山崎直方は，17 日午前に高木と京都御所見物をしている．

「*今日は大禮參列の人々に紫宸殿と大嘗宮との御儀の跡を拝観するを許されたれば，高木貞治君と共に午前十時より御所に行き，刺を警手に通じて宜秋門に入り右に折れて御車寄の前を過ぎ月華門より南庭に入る．其舗設當日と異ることなし，唯威儀の人を缺くのみ，右近橘の數多實を結びて漸く色づけるを見つゝ，紫宸殿の西階を上り南榮に俯して審かに高御座と御帳臺を拝するを得たりき．紫宸殿の紫の帳は閉ちられたれど，高御座の帳は擧げられたるまゝにて，中には黒塗に螺鈿したる美はしき御椅子と劒璽の案を安し荘厳極みなし，高御座と御帳臺の上に高く立てる金色の鳳鸞は低く伏して漸く觀るを得たりき，東階を下り日華門を出で春興殿に額つき，更に建春門を出で仙洞御所に至る．*

正門を入れば正面に頓宮あり，右に折れ東に轉じて板垣の御門を過ぎ，大嘗宮の宮域に進めば，西北隅に釜殿あり小忌の御湯を立てし所なり，宮城の北に廻立殿あり，悠紀主基の二殿は各帳殿，小忌幄舎，庭積舎，樂舎，風俗歌座など屬して其南に正に對稱的に東西に並べり．柴垣を繞らし，四方に神門を設け，東西兩門の外に膳屋あり，何れの殿も黑木造りにして外壁には近江表を張り，竹椽を圍らし屋根は茅葺きにして又皮附きのまゝの千木堅魚木あり，床下にも又茅を布けり，何れも嚴かに鎖されたれば内部を拝する能はず．廻立殿の南廊に御菅蓋を拝す，白木の柄の上端には瑞鳳の像を刻みて五彩に色どれり．殿を繞れる柴垣のおしぶちには椎の和悪とて，その小枝の規則正しく間をきて挾まれるも今日は明かに見ぬ．庭積物舎に捧げられし國々の産物の既に撤せられたるは理りなれど何となく寂しき心地せられぬ．凡て蒼古の御造りさま仰くだに尊しとも畏こしとも言の葉の盡し得べきにあらず．南の神門を出づれば，曩の日着床せし帷舎あり，之れより板垣の門を出てゝ右すれば正門に出でぬ．それより美術倶樂部に茗莚を訪ふて歸る」

1918 年 7 月頃，東大物理学科の卒業記念集合写真に撮影された．共に撮影された教官は大森房吉・平山清次・坂井英太郎・田中館愛橘・長岡半太郎・田丸卓郎・中村清二・寺田寅彦・佐野静雄・木下季雄・西川正治等である．写真嫌いの藤澤は集団写真に写ることを拒否した模様である．高木は，藤澤追悼文でこの種の集合写真に藤澤は常に参加していたと書いているが，高木が参加した集合写真に反例が存在したことになる．

1921 年には三崎臨海実験所に 25 年勤務した東大理学部雇青木熊吉に，東大理学部教授会メンバー全員を中心に慰労金を出すことになり，藤澤が３円，高木・吉江・中川が１円を納付している．

1921 年に藤澤が学術研究会議会員を辞任した後，学術研究会議数学部は部長に高木を，副部長に藤原松三郎を選出した．藤澤に代わる数学界の第一人者として評価されつつあったらしい．高木が何らかの行政的な活躍をしたという記録は見当らないので，藤原が行政的な活動を代行したものと見られる．

1924 年 3 月 17 日と 24 日，科学奨励を目的とした日本科学促進会の創立打ち合わせがあり，林春雄・平山清次・亀高徳平・片山正夫・三宅驥一・脇水鉄五郎・谷津直秀が出席した．出席はしなかったが，連名で発起人を募集することを承諾したのは麻生慶次郎・藤原咲平・今村明恒・中村清二・永井潜・佐野利器・鈴木梅太郎・高木貞治・高松豊吉・山崎直方であった．これとは独立に，学術研究会議が同様の組織を設立することを建議し賛成可決したので，日本科学促進会創立計画は中止された．

1924 年 12 月 1 日，亀高徳平の斡旋で自然科学聯合会設立趣意書を添えて学術研究会議会長男爵古市公威名で 52 名の学者に招待状を発し，12 月 14 日に帝国学士院で創立打合せ会を開催した．満場一致で自然科学聯合会設立は可決し，数学科から出席した高木貞治・中川銓吉を含む出席者全員が発起人となることとなった．更に，特別委員 30 名が指名され，高木は委員となっている．

1926 年 1 月 12 日，高木は帝国学士院例会で初めて論文報告を行った．

帝国学士院総会で高木が提出紹介した論文

総会開催日	著者名及び例会報告論文表題(表題は全て原文ママ)
1926 年 1 月 12 日	高木貞治「代数方程式相互簡約に就て」，末綱恕一「イデアル論に於ける或る函数のマキシマル，オルドヌングに就て」
1926 年 6 月 12 日	辻正次「解析的函数の零点に就て」
1926 年 10 月 12 日	辻正次「ピカールの定理に就て」，菅原正夫「相対循環体のフューラーに就て」
1926 年 11 月 12 日	末綱恕一「イデヤール論的函数のマキシマール，オルドヌングに就て」，清水辰次郎「有理型函数の性質に就て」
1927 年 2 月 12 日	吉田洋一「冪級数の部分和に就て」
1927 年 3 月 12 日	清水辰次郎「超越整函数の一性質」，西内貞吉「非ユークリッド平面に於ける代数曲線に関する点の冪に就て」
1927 年 4 月 12 日	末綱恕一「イデヤル論に於ける二三の函数のマキシマル，オルドヌングに就て」
1928 年 2 月 12 日	竹田清「置換群のキャラクターの冪和について」
1928 年 5 月 12 日	清水辰次郎・彌永昌吉「或る冪級数の部分和の特性に就いて」
1928 年 7 月 12 日	清水辰次郎「微分方程式の解の唯一性の充分なる条件に就いて」
1928 年 12 月 2 日	森嶋太郎「フェルマーの予想に就て」，竹田清「定義方程式の有理解に就て」
1928 年 12 月 2 日	竹田清「定義方程式の有理解に就て」
1929 年 2 月 12 日	清水辰次郎「有理型函数の理論に就いて」，彌永昌吉「相対的アーベル数体のフューラーに就いて」
1929 年 3 月 12 日	辻正次「或種のマトリクスのキャラクテリスティック方程式の根に就て」，正田建次郎「有限輪に附属する群に就て」
1929 年 5 月 12 日	森嶋太郎「フェルマーの予想に就て(第二)」
1929 年 7 月 12 日	森嶋太郎「フェルマーの予想に就て(第三)」
1930 年 1 月 12 日	正田建次郎「有限アーベル群の自己変形環又は自己変形群に就て」
1930 年 2 月 12 日	竹田清「群の表現が凡て単項の形に変形せらるゝものについて」，彌永昌吉「「マトリツクス」に関する定理」

1930年3月12日	正田建次郎「有限群の単純群に就いて」
1930年5月12日	正田建次郎「有限群の指標の結合に関する「フロベニウス」の論文に関する研究」
1930年6月12日	正田建次郎「整係数の行列論に於ける対等及び包含定理の群論的証明」，黒田成勝「論理代数学に関して」
1930年6月12日	黒田成勝「論理代数学に関して」
1930年7月12日	森嶋太郎「ウエルマーの予想に就て」，守屋美賀雄「素数次の相対的循環数体の類数に就て」
1930年10月12日	森嶋太郎「フェルマーの予想に就て(第五)」，黒田成勝「論理代数学に就て(第二)」
1930年10月12日	黒田成勝「論理代数学に就て(第二)」
1930年11月12日	南雲道夫・福原満洲雄「連立微分方程式解の安定に就て」，福原満洲雄「連立常微分方程式の積分曲線の集合に就て」
1931年2月12日	高木貞治「自然数論に関して」，竹田清「可解置換群の原始性に就て」，黒田成勝「論理代数学に就て(第三)」
1931年4月13日	竹田清「可解群の単項表現に就て」(朗読省略)
1931年5月12日	竹田清「可解一次変換群について」
1931年11月12日	荒又秀夫「或る種の代数体のZ函数整除性に就きて」
1932年3月12日	森嶋太郎「フェルマーの仮想定理について(第七・第八)」
1932年6月12日	中野秀五郎「或るマトリックス函数に就て」
1933年2月13日	荒又秀夫「デデキントのツエタ函数の整除性に就て」
1933年5月12日	守屋美賀雄「円躰に於ける単数に就て」
1933年11月13日	竹田清「メタ・アーベル式p群の構成に就て」
1933年12月12日	浅野啓三「有限群を実共線変形にて表現すること」，森嶋太郎「フエルマの仮想定理について(第十報)」
1934年4月12日	正田建次郎「正規単純超複素系の鑑別条件」，中村正「ペ一進斜体に関する一定理」
1934年6月12日	正田建次郎「正規単純多系の判別式の定理」，正田建次郎「正規単純多系上の判別式の公理」
1934年10月12日	正田建次郎・中村正「二つの互に素なる判別式を有する「アルゼブラ」類の積について」，中村正「正規単純多元数系の判別式の正田氏の定義について」
1934年10月12日	中村正「正規単純多元数系の判別式の正田氏の定義について」
1934年12月12日	黒田成勝「ツーエジーゲルの代数的数の近似の精密化」，守屋美賀雄「絶対的類体の類数に関する注意」
1935年3月12日	稲葉栄次「アーベル体の類数に就て」
1935年4月12日	末綱恕一「或る三次体に於けるL函数について」
1935年10月12日	中山正「素数指標の体上のアルゲブラについて」，森嶋太郎「フエルマーの予想に就て(第十二報)」
1936年3月12日	フランチェスコ・セヴェリ「代数面上の点集合の或る例」
1936年5月12日	中山正「素数指標の体の上のアルゼブラに就て(第二報)」，淡中忠郎「与へられたるp群を有するがろあ体存在に就て」

1936年7月13日	中山正「一つの"アルゼブラ"に於ける二つの「イデヤル」の和及び共通分に関する注意」，守屋美賀雄「無限代数体の「ペイ」進体上の除法代数」
1936年7月13日	守屋美賀雄「無限代数体の「ペイ」進体上の除法代数」
1936年12月12日	守屋美賀雄「一元代数函数体上の類体論の推進定理及び終結定理」，守屋美賀雄「無限代数体上の全局的類体論」，黒田成勝「二次無理数に由る近似について」
1937年3月12日	秋月康夫「約数連鎖律を有する「アインアルチヒ」なる環における「イデヤル」論について」，小松醇郎「「コンペクツム」の基礎群に関する注意」
1937年5月12日	大島勝「表現論の一定理の証明」
1937年6月12日	守屋美賀雄「有限常数体を有する一元代数函数体上の類体論の純整数論的建設」
1937年11月12日	菅原正夫「ジイゲルのモヂュラル群の n 次の変換論について」，河田敬義「代数函数体上の類体論の守屋方程式に関する注意」
1938年1月12日	菅原正夫「ジーゲルの「モヂュラル」函数の不変性」
1938年2月12日	菅原正夫「高次のジーゲルの「モヂュラル」函数について」，小平邦彦「一般の細胞の概念及び複合体の細胞分裂について」
1938年2月12日	小平邦彦「一般の細胞の概念及び複合体の細胞分裂について」
1938年5月12日	河田敬義「代数函数のリイマン面について」
1938年10月12日	正田建次郎「半線状変形による有限群の表現の等値性について」，正田建次郎「半線状変形の有限群の不変式について」，吉田耕作「抽象積分方程式とストカスト過程」，吉田耕作「バナハ空間に於けるエルゴード定理」，角谷静夫「バナハ空間に於ける線状作用子のイテレーション」，坂田良次「緊密体を球に写像すること」，小松醇郎「細胞空間のベッチ群について」，寺阪英孝「フェルバンドの表現について」
1938年11月12日	吉田耕作・角谷静夫「平均エルゴード定理のマルコフ過程への応用」，小松醇郎「細胞空間の被覆について」
1938年12月12日	吉田耕作・三村征雄・角谷静夫「有界核の積分作用子」，吉田耕作「マルコフ過程の作用子論的処理」
1939年1月12日	彌永昌吉「複合体の分体に於けるベッチ群不変性の一証明」，小松醇郎「細胞空間の被覆について（第二報）」
1939年3月13日	坂田良次「多面体を球への変形に関する一つの問題について」，河田敬義「線状群の指標」，近藤孝一・古屋茂「正規行列に関するテプリッツの定理の一証明」
1939年5月12日	角谷静夫「抽象 L 空間に於ける平均エルゴード定理」，荒又秀夫「アルチンの L 函数の一意性について」，吉田耕作「マルコフ過程の作用子論的処理（第二報）」
1939年6月12日	小平邦彦「次元論に関する一つの注意」，吉田耕作・角谷静夫「バーコフのエルゴード定理と極大エルゴード定理」，角谷静夫「弱位相とバナハ空間の正則性」
1939年7月12日	小平邦彦「ヒルベルト空間の作用子論の基本定理について」
1939年10月12日	竜澤周雄「或種の整係数多項式の既約性について」，吉田耕作「漸次的概週期性とエルゴード定理」，角谷静夫「マルコフ過程の作用子論的理論に於ける二三の結果」
1939年11月13日	浅野啓三「倍数連鎖体を有する環について」

1939 年 12 月 12 日	河田敬義「一般球函数の理論について」
1940 年 3 月 12 日	吉田耕作「安定分布のマルコフ過程」，角谷静夫「エルゴード定理と安定分布のマルコフ過程」，角谷静夫「弱位相，ビコンパクト集合及び双対律」，小松醇郎「細胞空間の被覆について(第三報)」，安倍亮「局所的コンパクトなるアーベル群の同型対応について」，国澤清典「抽象空間に於ける抽象値函数に関する定理」
1940 年 4 月 12 日	近藤孝一「交代群の指標の分解について」，彌永昌吉・小平邦彦「群に於ける概週期函数の理論について」
1940 年 5 月 13 日	小平邦彦・安倍亮「連結されたるコンパクトなるアーベル群について」，小平邦彦「リー群の一パラメータの部分群の微分可能性について」
1940 年 7 月 12 日	吉田耕作「個別エルゴード定理の抽象化」，中山正「単列環及び広義の単列環小引」
1940 年 10 月 12 日	菅原正夫「一般ゼタフックシャン函数について」，菅原正夫「ポアンカレー空間の拡張」，吉田耕作「スペクトルの理論について」，安倍亮「単純系に関する注意」
1940 年 11 月 12 日	中野秀五郎「半順序代数」
1940 年 12 月 12 日	浅野啓三・中山正「部分体に於ける整数論に関する一注意」，中山正「丕体の正規底」，河田敬義「フェルバンドの乗法系の一意的表現について」
1941 年 1 月 13 日	小平邦彦「測度確定の写像群について」，黒崎千代子「一つの共線変換と変換可能なる共線変換について」
1941 年 3 月 12 日	吉田耕作・深宮政範「正則に凸なる集合について」，中山正「左右のイデヤルのラッチスが逆同型なる代数」，岩澤健吉「特殊射影群の単純性について」
1941 年 4 月 12 日	亀井栄一「アインアルチヒなる環に於ける共通分定理について」
1941 年 5 月 12 日	吉田耕作「単位を有するベクトル束について」，稲葉栄次「環状数体の類群の構造の類体論的解釈」，守屋美賀雄・小林よし「変換群に於ける分解律の一つの必要なる条件」，守屋美賀雄・小林よし「変換環に於ける分解律の一つの充分なる条件」
1941 年 6 月 12 日	吉田耕作「ヴェクトル束と加法的集合函数」，森田紀一「一般フックス群の理論に関する注意」
1941 年 10 月 11 日	中野秀五郎「半順線形距離空間に就て」，中野秀五郎「位相空間に於ける連続函数の全体に就て」、中野秀五郎「一般 C 空間の特徴付けに就て」，正田建次郎「一般代数的系に就て」，正田建次郎「環の元素に関する注意」
1941 年 11 月 12 日	大島勝「群の表現のクロネッカー性について」，守屋美賀雄「安全体の有限分離代数体拡張の或る性質」
1941 年 12 月 12 日	吉田耕作「単位を有するヴェクトル束に就て(第二報)」，菅原正夫「一般化されたるシュワルツの予備定理」，森田紀一「一般ポアンカレ空間に於ける変位の解析的特徴付け」
1942 年 1 月 12 日	中山正「束式賦序の群に就て」，守屋美賀雄「ヂスクレート賦値の完全体上の除法アルゲブラの構造」，菅原正夫「一般フックス群の基礎領域に就て」
1942 年 2 月 12 日	守屋美賀雄「ヂスクレートなる完全体上のアルゲブラの類の群に就て」，守屋美賀雄「ヂスクレートなる完全体上の局所類体論(第一報)」

1942年4月13日	正田建次郎「一般の代数系に就て(第二報)」，中山正「完全整閉なる整域に関するクルルの推測に就て」
1942年5月12日	正田建次郎「一般代数系に就て(第三報)」，中山正「クルルの予想に就て(第二報)」
1942年6月12日	正田建次郎「一般代数系に就て(第四報)」，中野秀五郎「一般C空間の特徴に就て(第二報)」
1942年7月13日	正田建次郎「有限群に就て誘導される指標に関する注意」，吉田耕作「ヴェクトル束の表現に就て」，河田敬義「弱い意味のエルゴード定理に就て」，中野秀五郎「ノルムを有する半順序モーヅルに於けるリース・フィッシアー」
1942年10月12日	守屋美賀雄「局所類体論(第二報)」
1942年11月12日	中野秀五郎「半順序モーヅルに於ける或る線状汎函数に就て」，船山子之助・中山正「合同の束の分配性に就て」，吉田耕作・中山正「半順序環及びスペクトル定理へのそれの応用」
1942年12月12日	中野秀五郎「一般半順序線型空間の拡大に就て」
1943年1月12日	小林正史「抽象束の公理に就て」，中野秀五郎「半順序ノルム線型空間の連続性に就て」
1943年2月12日	正田建次郎「一般代数系に就て(第五報)」，小松醇郎「順序を保存する写像の束の特徴に就て」，小松醇郎「和同型の変換束の一つの特徴に就て」，中野秀五郎「一般半順序空間の拡張に就て」，守屋美賀雄・中山正「直接完全体のノルム剰余記号の理論に就て」，守屋美賀雄「局所類体論(第三報)」，吉田耕作「半順序環及びスペクトル定理へのそれの応用(第二報)」，角谷静夫「無限の積可測空間論小引(第一報)」
1943年4月12日	彌永昌吉・安倍亮「ヘルムホルツの空間問題に就て」，吉田耕作「不変換で密なる群の双対定理に就て」，角谷静夫「無限積可測空間に就て(第二報)」
1943年5月12日	角谷静夫・中村正弘「可附番集合のバナハ極限及びチエック緊密化」，中野昇「整域に於ける Ideale の可逆性に就て」
1943年6月12日	正田建次郎「一般代数系に就て(第六報)」，岩澤健吉「自由群に関する二三の定理」，河田敬義「一つの群上の可測概周期函数の平均値に就て」，河田敬義「標準環に於ける極大 Ideale の拡張に就て」，角谷静夫「ヒルベルト空間の単位球の位相学的性質」，松島與三「素数指数のリイ環に関する注意」
1943年7月12日	河田敬義「アーベル群のウエール測度に関する注意」，吉田耕作「ノルム環とスペクトル定理」，小平邦彦・角谷静夫「局所的に緊密なる Abel 群の Norm 環」，角谷静夫「緊密なるアーベル群に関係する計量数に就て」
1943年10月12日	霜田伊佐衛「抽象空間に於ける解析函数に就て」，吉田耕作「ノルム付きの環とスペクトル定理(第二報)」，中山正「位相学的自由群小引」，角谷静夫・安西広忠「局所コンパクトアーベル群のホールのコンパクト化(第一報)」
1943年11月12日	正田建次郎「一般代数系に就て(第七報)」，正田建次郎「シユライヤーの拡張定理に就て」，河田敬義「広義に於ける混合型の測度不変写像に就て」，河田敬義「積空間に於ける測度不変写像に就て」，稲葉栄次「有限アーベル群の部分群を成すモヂュラー束に就て」，角谷静夫・安西広忠「局所コンパクトなるアーベル群のボーアのコンパクト化(第二報)」，彌永昌吉・安倍亮「ヘルムホルツの空間問題に就て(第二報)」
1943年12月13日	竹田清「次数が二つの素数冪の積なる部分群の存在に就て」，黒田成勝「ペル方程式に就て」，安西広

	忠「コンパクトなる位相環に就て」，中山正・松島與三「p 進除法アルゲブラの乗法群に就て」，河田敬義「バナハ空間の作用素環に就て」，安倍亮「リー群の空間に於けるリーマン度法と体積素に就て」
1944 年 2 月 12 日	安倍亮「ホロノミー群の加約性に就て(其一) 擬似接続の空間」，中山正「無限位の単純分配素に就て」，岩澤健吉「位相群の群環に就て」，吉田耕作「ノルム環とスペクトル定理(第三報)」，角谷静夫「発散する級数及び積分に就て」
1944 年 3 月 13 日	角谷静夫「ルベツク測度空間の不可離拡張の構成」
1944 年 4 月 12 日	安倍亮「ホロノミー群の可約性に就て(第二報)」，吉田耕作「ノルム環とスペクトル定理(第四報)」，小平邦彦「Riemann 集合體に於ける調和 Tensor 野に就て(第一報)」
1944 年 5 月 12 日	小平邦彦「Riemann 集合體に於ける調和 Tensor 場に就て(第二報)」，吉田耕作「ノルム環とスペクトル定理(第五報)」，中山正・安倍亮「表現モーヅルの不可約性及絶対不可約性に就て」，小平邦彦「二階線状楕円型微分方程式の境界及び固有値問題に就て」，乙部好一「コンパクト性の準賦値に就て」，乙部好一「局所コンパクト環小引」
1944 年 6 月 12 日	中山正・東屋五郎「無限位の単純分配系に就て(第二報)」，岩村聯「極限の一般化」，小平邦彦「Riemann 集合體に於ける調和 Tensor 場に就て(第三報)」
1944 年 7 月 12 日	小平邦彦・角谷静夫「局所的 bikompakten 群に於ける Haar 測度に就て」，吉田耕作・岩村聯「アーベル群の二種位相の等価性」，壬生雅道「測度と位相との関係」
1944 年 10 月 12 日	吉田耕作「ノルム環とスペクトル定理(第六報)」，正田建次郎「一般代数系に就て(第八報)」，高橋陸郎「自由積における部分群定理に関する注意」，角谷静夫「自由位相群の無限直積位相群」
1944 年 11 月 13 日	角谷静夫「n 次元空間に於けるブラウン運動に就て」，吉沢尚明「連続函数の同時拡張に就て」，吉田耕作「フーリエ積分による函数の表現に就て」，壬生雅道「無限積空間に於けるベール函数に就て」，中山正「綜合環の右イデヤルの束に就て」，静間良次「閉リー群の部分群に就て」
1944 年 12 月 12 日	角谷静夫「二次元ブラウン運動と調和函数」，森田紀一「正規反線型変形に就て」
1945 年 3 月 12 日	高木貞治「整数及実数の公理性に就て」，功力金二郎「平面上の測度正なる集合の密度に関する一定理に就て」，岩本秀行「面積の概念に基く測度空間の幾何学(第一報)」，岩澤健吉「零冪位相群に就て(第一報)」，角谷静夫「二次元のブラウン運動とリーマン面の型の問題」，中山正「正規底の定理の半線型への拡張と誘導底の存在へのそれの応用(第一報)」
1945 年 4 月 26 日	岩澤健吉「二重射影空間に於けるベズーの定理」，岩澤健吉「代数的対応の理論に就て(第一報)」，岩本秀行「面積の概念に基く測度空間の幾何学(第二報)」，角谷静夫「マルコフ過程とヂリクレの問題」，功力金二郎「ポテンシヤル論に関して(第一報)」
1945 年 7 月 12 日	長尾弘「シユライヤーの拡張定理と正田のそれとの関係に就て」
1945 年 11 月 12 日	岩沢健吉「代数的対応の理論に就て(第二報) 対応の掛算」
1946 年 4 月 12 日	中山正「正規底定理の半線状拡張及びその応用(第二報)」，寺坂英孝「線状連続体について」
1946 年 5 月 13 日	高木貞治「オイラー方陣小引」
1946 年 9 月 12 日	吉田耕作「一般ユークリツド空間に於けるユニタリ相等について」，壬生雅道「ハール測度の拡張」，中山正「整閉域に関するクルルの想定について(第二報)」
1946 年 12 月 12 日	東屋五郎「単純環の理論の新構成」，中山正「不可約環に就て」

1947 年 3 月 13 日	功力金二郎「コーシーの積分定理について」, 中山正「同型の既約且不分解なるモジュラー表現を有する有限群」
1947 年 5 月 12 日	後藤守邦「冪零行列のレプリカ及びリー代数の線状表現可能性について」, 松島與三「行列のレプリカ小引, 代数的リー群について, リー代数のカルタン分解について」
1947 年 10 月 13 日	功力金二郎「ポテンシャル論に就て(第二報)」

1931 年に大阪帝国大学が創立され, 高木は初代阪大総長長岡半太郎による理学部数学科教授選考の相談相手となった. この人事で, 小倉金之助は講師に就任した. 当時の大学制度では, 助教授任官した場合は高等官七等・従七位となるが, 講師は一年単位で嘱託・解嘱される不安定な立場に過ぎない. 小倉自身が書き残した証言によれば, 正田建次郎が小倉の助教授以上の任官に反対したこと, 林鶴一門下であるために藤澤に配慮した長岡が動いた等の主張がある. 林は数学教育改善運動に関与し, 藤澤とは鋭く対立していた. この人事に小倉は複雑な心理操作を要したかもしれないが, 後年高木と座談会に参加しているように, 高木には含むところが全くなかったようである. 高木と林が親しい関係だったからかも知れない.

1937 年には帝国大学工科大学初代学長古市公威を記念する故古市男爵記念事業会発起人となった.

1942 年 11 月 3 日, 岩波書店が回顧三十年感謝晩餐会を大東亜会館で開催し, 数学界からは高木・末綱恕一・掛谷宗一・彌永昌吉が出席した.

1947 年 3 月 13 日, 帝国学士院総会で「掛谷宗一追悼の辞」, 1948 年 4 月 12 日に日本学士院総会で「吉江琢兒追悼の辞」を講演した.

日本学士院例会で高木が提出紹介した論文

総会開催日	著者名	例会報告論文表題
1949 年 4 月	久保忠雄	「一つの領域に於けるポテンシャルに就いて」
1949 年 10 月	吉田耕作	「フォッカー・プランクの方程式の拡張」
1950 年 5 月	辻正次	「整函数に關するウイマンの定理」
1950 年 10 月	吉田耕作	「流から作られる確率過程」
1950 年 10 月	伊藤清	「リー群におけるブラウン運動」

日本学士院会員小泉信三の 1949 年 6 月 21 日付・谷村豊太郎宛書簡を引用する. 小泉は慶応義塾大学長として高木と面識があった.

「*先日四年振りで学士院授賞式に出席, 高木貞治先生に会ひ, 互に久濶を叙しました. 先生アゴ髯を蓄へられ, 年もいくらか取られたやうに見え, 一寸見違えました. 二人で貴兄の御噂をしました. 「文春」を読まれたら喜ばれることゝ思ひます*」

文藝春秋 1950 年 2 月号誌上で, “現代日本の百人”として高木の自宅でのグラビアが紹介された.

同誌は日光整数論シンポジウム名誉議長となったことが契機となってか, 1955 年 11 月に自伝記事“一數學者の回想”を掲載している. “一數學者の回想”を一読すれば明瞭だが, 散文的筆致の同回想

は高木の筆になるものではなく，文藝春秋の編集者半藤一利に対して口述した内容をまとめたものである．半藤による 2015 年 8 月 13 日付消印の筆者宛私信の内容を紹介する．

① 「*高木先生は，たしかにちょっと耳は遠くなっていたようで手で耳を前のほうにだすような仕草はたびたびされました．同じ話をくり返したりはしませんでした．ましてやカンシャクなどはいっさいされませんでした．ただ，ゆっくりでした*」．

② 「*二階の部屋（和室）でお話を承まわりました．階段をコトン，コトンとゆっくり上ってきました．独力で．着物姿で，ヘコ帯をいとも上のほうに締めておられるのが，おかしかった思い出があります．つまりごく無雑作に，という意味です．まさに雰囲気が浮世離れしている感じでした*」

③ 「*ていねいに，私などシロウトがわかるように，数学に関する話をしてくれましたが，私にはさっぱりで，まったく覚えておりません．私の母方のイトコに稲葉三男（熊本の五校の教授だったかと思いますが）という数学者がおり，そのことを話したとき，なぜか，大そうなつかしがっていろいろと思い出（といってもそれほど数多くではありませんが）を語っていただいたように，おぼろげな記憶があります*」

④ 「*とにかく，形容詞になるかと思いますが，仙人のような雰囲気を漂わせている先生でした．文士とか文学研究者などにはない，利害関係など憂世のいっさいの些事を超越されている感じでした．それにしても，どうして文春の（つまり私の）依頼に応じられたのか，いま懸命に考えても思いだせません．どなたかのツテがあったのかな，とも思っているのですが*」

⑤ 「*そうそう，必要なことだけを話す．余分のことはいっさい話すことはなかった，と記憶しています*」

解析学者の稲葉三男（1930 年 3 月東大数学科卒）は，高木の講義を聴講していたので，記憶に残ったのであろう．

類体論完成当時の高木

1901 年に帰国した高木は 1903 年に「複素有理数域におけるアーベル数体について（独文）」で東大から博士号を取得した．博士号取得前後に東京数学物理学会報告で英文論文を数本投稿しているが，当時の観点から見ても優れた内容とは思われない．無かった事にしたのであろう．

それから 1914 年 7 月 28 日に開始された第一次世界大戦（1918 年 11 月 11 日終結）まで，目立った学術論文を執筆していない．この空白期間は，高木を語る上で見過せないところである．学問上の蓄積をしていた，病気で休養していた等，後年様々な説明がされているが，当時は学位論文執筆で研究者として燃え尽きた帝大教授の典型と見られたらしい．数学に関する東宮御学問所御用掛として，同期の吉江琢児が推薦され 1915 年 6 月 29 日から 1921 年 3 月 1 日まで就任したが，推薦者の藤澤にとって，高木は吉江に見劣りする存在だったようである．高木には病歴があったなどの配慮があったからかもしれないが，勤務中に疾病で休職する場合，官報なり文部時報なりで告知されるものである．高木は東大在職中に病気休職したことはない．国内第一級の人材たるべき東宮御学問所御用掛として物足りない存在と判断されたのが事実に近いものと見られる．東大数学科教授中で，藤澤を除いて中学校数学教科書を執筆するなど数学教育に経験を持っていたのだが．

ところが高木は 1915 年に「相対的「アーベル」体の理論について Ⅰ・Ⅱ」・「楕円函数の虚数乗法の理

論について」, 1917 年に「冪指標の一性質について」, 1920 年に「相対的「アーベル」体の理論」・「任意代数体に於ける相互律」を東大紀要に独文で書き上げるに至った. 英文ではなく独文で執筆したことから, 当時の敵国ドイツの読者を想定していたことが伺える. 内容を評価できる数学者がほぼ敵国にしかいないという事は, 国内での評価が期待できないというに等しい. 国内に適切な査読者がいない状況なのである. 高木はこの状況を「*無競争*」と表現した. 「解析概論」に見られるように, 高木は証明の誤りが時折発生するタイプの数学者だが, 類体論論文に関しては証明の誤りがあったという話は聞かない. 誤り検出に相当なエネルギーを投入したことがわかる.

第一次世界大戦中, ドイツを初めとする欧米各国からの文献が途絶したことで, 自分で考えることにしたと高木は論文執筆事情を明かしている. ここで文献の途絶について語る場合, 欧州の数学からの隔絶を指したものだと解釈されていたが, 舶来の文学作品の読書に振り向けられていたリソースを研究に回した側面も否定しがたい. 高木は英独仏語の文芸作品の原著を狩猟し, ロシア文学(戦争と平和)やスカンヂナビア文学はレクラムのドイツ語訳を読んでいた.
「*若い頃は余暇にまかせて英獨佛の新作家の文藝作品を讀破した*」と言い, その代金支払いのために教科書を執筆したと語るほどである. 高木は無趣味を公言しているが, 文学関係の読書にかなりの時間と資金を投入したことは疑問の余地がない. この嗜好は, 高木の文体表現に対して明確に多大な影響を与えており, 横光利一・太宰治・立原正秋などの作家が高木の文体を称揚し, 著作に流用したのも理解できることである. 高木の特異な文体は, この文学趣味に起因する.

高木は水準が高い論文をドイツ語で, 水準は低いがオリジナルな論文は英語で, 水準を論じるまでもない論文は和文で執筆する統計的傾向がある. 少なくとも, 類体論関係の論文に対して高木の自己評価は高かったのである.

不幸な事だが論文の反響は当初全く見当らない. 東大紀要には査読が無いので, 国内ではチェックが働かない(当時は, 欧州でも証明に瑕疵のある数学論文が印刷されることがあった). 東大紀要は高木の期待するドイツ語圏内でも読まれていなかったらしい. 戦時中のドイツに高木の論文が届く事は有り得ず, 敗戦はハイパーインフレで東大紀要を取り寄せる資金に事欠いていたドイツの国内事情を鑑みれば無理もない.

1917 年に出版された大日本文明協會編「日本の科學界」(大日本文明協會事務所)は, 日本国内の科学界における研究状況をまとめた文献で, 高木の研究については以下の記述がある.
「*楕圓乗法に一歩を進めた虚數乗法の問題の研究に至つては我が數學者中, 前記の高木博士に及ぶものがない. 蓋し虚數乗法の問題は十九世紀の後半に於て発達し, クロネッカー, ウェーバー, ヒルベルト等に依つて研究され, 近時更にフェーター氏頻りに之が研究を発表してゐるが, 其術迂濶であり, 而も往々誤謬あり, 到底我が高木博士の明快徹底せる所論に及ばざること遠い感がある*」
この項目を書いたのが誰かは不明だが, 情報提供者は高木の論文を読めたらしい.

1920 年, 天文学科 3 年の萩原雄祐は卒業論文を執筆中に, 類体論執筆中の高木を目にしている.
「*数学の図書室で数学の論文を読みはじめたのは私たちが最初であったろう. 研究室では高木先生が*

一本の指でタイプを打っておられた．これが有名な代数体論の論文である」

高木の類体論論文執筆に関する目撃者証言は，これ以外存在しない模様である．

高木の一番弟子と言うべき末綱恕一（1922 年 3 月東大数学科卒）は，「*私が大学 1 年生のとき，先生はこの偉大な論交の原稿を書きまとめておられたのであるが，われわれ学生はそんなことには全く気がつかなかった*」と証言している．高木と類体論について親しく語り合った最初の日本人である末綱も目撃しなかったことになる．

吉田洋一（1923 年 3 月東大数学科卒）は，当時の高木を描写している．高木の遅刻に関する最初の目撃証言となる．

「*聞くところによりますと，先生は夕食後七時半くらいに寝られ，十一時半頃起き出され，朝の四時半頃まで研究や勉強をされて，それからもう一度寝られて，九時頃朝食をとって，大学に来られたそうです．*

多分そのためでしょう．先生はたいてい時間に三十分くらい遅れて来られ，うちから着てきた外套のまま教室に入られて，それを脱ぐと，ポケットから手帳を出して，講義を始められました．正味三十分あるかないかの講義なんですけれど，非常に早く進むんです」

北川敏男（1934 年 3 月東大数学科卒）は，「*高木先生だって，「類体論」を書くためにはどれだけ例をおやりになったかわからんくらいだと先輩からうかがったことがあります．先生のお話では，すぐ例が出てくるんです．計算などもじつにスマートでしたね*」という証言を残している．末綱以降，正田建次郎（1925 年 3 月東大数学科卒），竹田清（1926 年 10 月東大数学科卒），黒田成勝（1928 年 10 月東大数学科卒）・彌永昌吉・守屋美賀雄（1929 年 3 月東大数学科卒）といった高木の論文内容を解する代数学者が現れてきたのである．

ここまでの議論には，高木が海外に投稿した論文が過去にリジェクトされていないという大前提があることは特記しておく．

類体論発表当時の高木

高木は 1920 年 5 月 7 日に「欧米各国へ出張ヲ命ズ」（文部時報 1920 年 6 月 1 号より）という辞令を受けた．1920 年 7 月 8 日に阿波丸で神戸を出港したが，類体論の研究が完成したから出張を命じられた，ということではないと見られる．高木と同時に同辞令を受けた東大教授呉秀三は「聯合国神経学会議ニ参列ヲ命ス」という別命を受けたが，高木は ICM 参列を命じられなかった．

欧州派遣に高木を推薦した側が類体論を適切に評価できたとは思われず，消去法で選出されたものと判断される．事実，高木の恩師である藤澤利喜太郎は東大理学部長事務取扱として，高木と同期の吉江琢児は東宮御学問所御用掛として東京を離れられなかった．代数学教授の高木は，十名程度の東大数学科学生（1～3 年全員）への講義以外の負担が無く，物理学科・天文学科との共通講義，また工学部等に数学の講義をすることもなかったので，手が空いていたのである．

とはいえ，代数学講座に助教授はおらず，休講は不可能である為，人事措置が必要となる．最初に高木が 1920 年 7 月 20 日に東京帝国大学理学部数学科数学第三講座担任を免じられ，夏休み明けの 1920 年 8 月 18 日に東北大学の藤原松三郎（1905 年 7 月東大数学科卒）が東京帝国大学理学部数学第三講座に属する職務を担任，1921 年 4 月 30 日に藤原は東京帝国大学理学部講師の嘱託を解かれ

ている．高木の代行で代数学を担当する適任者が，国内には藤原しかいなかったのである．当時，国内の代数学者は高木・藤原・京大の園正造しかおらず，園はパリ滞在中であった．

阿波丸には新聞記者・柳澤健と早稲田大学の社会学者・關與三郎が同乗した．8 月下旬頃マルセーユに到着し，9 月 25 日の ICM1920 で論文を読み上げた後，ドイツに渡り 1921 年 5 月 13 日に帰国している．

九州帝国大学の成瀬正一の紹介でパッシイ区の閑静な素人下宿に移り，高木と同宿した柳澤の回想を引用する．柳澤は詩人として知られることになる人物である．

「*同船の日本から遣つて來た者が三人ほど一緒----自分の他には，帝大の數學教授の高木貞治と早稲田に社會學を講じてゐた關與三郎とこの二人だつた．高木博士とは翌春伯林に行くときも一緒だつたが，數學者の癖に文學にも詳しく，いつぞやモーパッサンの紀行文『水の上』のことを言ひ出したところ，彼にはこの他にモロッコ地方を描いた紀行文があると言つて，逆にこつちが教へられるような始末だつた．伯林行の寝臺車のなかで，自分が持つてゐたロマン・ローランの『ダントン』を最後の頁まで綺麗に讀み終つたのも彼氏なら，『君のやうな仕事をする人間が英語と佛語としか出來ぬでは困る．是非獨逸語の新聞位は讀めるやうになりたまへ』と，『ベルリナー・ターゲブラット』か何かの社説に眼を通しながら，側にゐた自分に一本痛いところを浴びせたのも彼氏である．その代り，活動寫眞と言へば眼にチカチカする，雨降りの代物と許り心得てゐた彼氏の厭がるのを無理にパッシイの映畫館に誘ひ出して，爾來先方からこちらを誘ふやうにさせたのは，自分の手柄であつた．………*」

ストラスブルクの ICM1920 に参加するまでの高木が何をしていたかは本田教授の著作に譲るが，当時のフランスには日本人数学者内藤丈吉（1906 年 7 月東大数学科卒）が永住しており，接点を持った可能性がある．内藤は，東大卒業後に第一高等学校教授となり，官費でパリに留学したが，現地でフランス人女性と結婚し，帰国することなくパリに永住したことで新聞沙汰になった．願により第一高等学校を辞した後は，土産物屋“宝の山”を営みながらパリ在住の日本人と親しく交流したので，在仏日本人芸術家の回想には屡々登場する．

帰国後の高木は，末綱に類体論論文の別刷を与えたが，末綱には当初読めなかったという．末綱は高木の勧めで Landau「代数的数とイデアルの基本的並びに解析的理論への入門書」(1918)を読み，解析的整数論に向かった．

ここで疑問が生じる．高木自身は 1920 年に類体論の論文を Hilbert に送付し，1925 年か翌年に，類体論の論文を詳しく読んだので Math.Ann に転載再録したいという Hilbert からの手紙を受取ったとしている(高木は断った)．1920 年以前に論文を送付しなかったのかは何故であったかが問題になる．

ICM1920 で類体論が評価されなかったのは，ICM がドイツやオーストリアの数学者を締め出したことに基因する．であれば，大戦終結後直ちに Hilbert や Landau 等のドイツ系整数論研究者に東大紀要別刷を送付すれば，状況は変化したのではないか．適切な査読者を探さなかった背景はどのように説明されるか．送付した上で無視された可能性は否定できないし，誤った可能性がある証明を送付する勇気がなかったかも知れないが，現在となっては確認できない．実際，高木はゲッチンゲンで博士号を取得せず，国内に代数学者がいない情況もあって，確認される限りでは査読による批判を受けることは

なかった．前もって送付しておけば，1920 年の渡欧はもう少し華やかなものに成り得たが，他のドイツ人数学者が問題を解決する可能性も高くなったはずである．

明確に言えることは二点ある．①ICM1920 ですら評価されずに帰国した高木は身近な読者となる末綱を能力育成し，②類体論以降も査読付論文を執筆しなかった．

1939 年 12 月，高木は讀賣新聞記者に類体論の内容を聞かれ「*私の專門は數學といふ學問で，しかもその全部のうちの一部を完成したゞけでこれを類體論と言はれてゐる．これで數論中の大問題が次々と解決されたことは本當だ．ですが，その理窟は一口には言へません．詳しく言つても素人には判りません*」と，笑って応じず「*私のは殊に純理論だから，それが世界の人類にどれだけ効果があつたなどゝもいへません*」と語っている．類体論発表当時，多くの数学者が適切な理解を成し得なかったものを，記者に理解させるのは絶望的であろう．

隣人寺田寅彦と高木貞治

小石川区曙町に居を定めた高木は，1918 年に隣人として東大物理学科教授の実験物理学者寺田寅彦を迎えた．曙町の高木が居住する一角は，Teiji TAKAGI, Torahiko TERADA，ドイツ文学者友枝高彦 Takahiko TOMOEDA，物理学者田丸卓郎 Takuro TAMARU が居住したことから， T・T 横丁として学生に呼称されていた．寺田の日記から高木の記述を拾う．

日付・曜日・天気	文面
1915 年 12 月 15 日 水 晴	*夜数物理講演会，高木教授の「群に就て」あり*
1915 年 12 月 18 日 土 晴	*風強し．午後数物例会，高木教授の講演五分位にて終る．珍らしき短時間の集会なりし*
1917 年 6 月 9 日 土 雨	*午後田丸先生と曙町の屋敷を見に行く．高木氏の隣家なり 二百坪にて小き貸家五軒あり 三千五百円との話なり*
1918 年 2 月 24 日 日 晴	*朝陟来る．曙町より電話かゝり，高木氏との境界設定につき立合ひくれとの事にて行く，高木氏は不在故明日迄決定を延期す*
1918 年 2 月 15 日 火 曇	*朝曙町に行く 竹村に逢ひ，同道す．外囲板塀の台石水盛りをなし坐敷の下見も張り始めたり*
1918 年 4 月 14 日 日 曇後晴	*朝より書斎の整理にかゝる 昼前浜口兄上来り，続いて高木氏，田丸先生，津田青楓君来る．津田君よりは屏風を貰ふ，津田君と夕食 夜十時頃迄話す*
1918 年 4 月 16 日 火 曇後晴	*留守中高木氏夫人来り京焼菓子器を貰ふ*
1918 年 4 月 21 日 日 晴	*朝三越に行き夏目家婚儀の御祝に鰹節の折を注文しそれより早稲田の御宅を尋ぬ，兄君のみ在宅未亡人御子方は浮間原へ桜草取に行かれし由なり，門前にて津田君夫人に会ふ．帰りに一寸高木氏へ寄り先日の礼を述ぶ*
1918 年 7 月 6 日 土 曇後晴夜驟雨	*朝高木氏を訪ひ明後日山崎氏と二人晩餐に来て貰ふよう依頼す*
1918 年 7 月 8 日 月 曇	*夜高木山崎両氏を招き晩餐*
1918 年 8 月 16 日 金 晴	*午前母上しんと高木，田丸，木下三家へ挨拶に行く*
1918 年 8 月 18 日 日 晴驟	*朝ノート作る，昼前高木氏来訪 大蔵経の話などす*

雨	
1919 年 1 月 25 日 土 雨少雪	*しん髪結に行き紅谷にて菓子を求め高木, 田丸両家へつとめに行く*
1920 年 4 月 8 日 土 曇後晴	*二階から見ると方々の桜が咲いて居る. 高木さんの八重も大分咲きかけた, 何処かの白木蓮が美しい, うちの庭では丁字, 椿, 連翹が咲いて居る, 楓も一本は大分若芽が出た, バラも新芽を吹き出した*
1920 年 7 月 3 日 土 晴	*二階より高木氏方書斎の屋根を見下したるスケッチを始む*
1920 年 7 月 4 日 日 晴 夜雨	*朝二階の絵, 佐瀬君中元の砂糖持参, 高木氏来訪 十日神戸発の船にのる由, 午後タイムス, イリユストラシオンなど読む*
1920 年 10 月 12 日 火 曇	*午後しんを丸善にやり Howes Insect Bhavior を求めしむ, 13. 20° 序に高木田丸木下へ勤めに行かしむ*
1921 年 1 月 17 日 月 晴後曇	*しん高木田丸両家へ年賀に行く*
1921 年 5 月 15 日 日 晴	*朝高木氏へ帰朝のよろこびに行く*
1921 年 5 月 16 日 月 晴	*高木氏来訪 レラチギティに関する各種パムフレット借用す*
1921 年 9 月 11 日 日	*午前高木氏訪問 借用のパムフレット返却*
1922 年 1 月 5 日 木 晴	*しん高木さんへ年始*
1923 年 1 月 20 日 土 曇, 無風	*朝気象実習. 昼飯の時山崎直方氏に逢ふ. 昨日帰朝した由. 南米談を聞く. ドクター, ベーアマンが今伯林で全盛だといふ話. ペンクが益々盛で日本人にも相不変親切といふ話など」 午後数物例会, 高木さんと武内君講演*
1923 年 9 月 2 日 日 曇	*朝学校へ行く, 門で木内君に逢ふ. 友枝, 田丸, 高木三家へ挨拶に寄る*

ここで"しん"とは寺田寅彦夫人, "山崎"とは地理学者山崎直方である. 高木家と隣人寺田家は, 主人同士の交際が稀薄なことが伺える. 少なくとも醤油の貸し借りをするような関係ではなかった. 1930 年代後半の高木邸の応接室には古ぼけたピアノがあったという証言があるが, 寺田が隣家から流れるピアノの音を聴いたという記述もない. 高木自身も, 寺田に言及した記録はなさそうである.

興味深いのは, 類体論講演から帰国後, 寺田が高木から相対性理論に関する文献を借り出し, 四ヶ月手許に置いた点である. アインシュタインがノーベル物理学賞を受賞するのが 1922 年 11 月 10 日, 神戸上陸が 11 月 17 日, 離日が 12 月 29 日である. 高木が相対性理論を読む背景は, アインシュタイン来日とは連動していない. 以後, 寺田が高木氏から高木さんと呼称を変化させている点は意味深である. 気安い付き合いになったのであろうか.

1921 年 5 月 16 日, 寺田は小宮豊隆に葉書を書いている.

「独逸で出た相対原理に関するいろんな小冊子を近頃西洋から帰つた人に借りる事が出来たので奮発して読み始めました. アインシユタインの 1916 の論文が此れでやつと見られる」

高木は 1908 年の日本天文学会創設当時の学会員で, 天文学の大学院生萩原雄祐に Lichtenstein による回転流体の平衡形状の論文を貸与したくらいであるから, 最初から天文学に広汎な興味を持って居たかもしれないが(学生時代の高木は天文学の講義を受講していない), 相対性理論が流行して

いたパリ生活の影響かもしれない．高木は 1935 年頃には Hilbert 空間に興味を持ち談話会で話したことがあるといい，物理に興味があったのかもしれない．ここで寺田が言うアインシュタインの 1916 年の論文とは「一般相対性理論の基礎」・「量子論による輻射の放出と吸収」である．東大物理学科の蔵書に無かったのであろうか．

高木と天文学の関係を語る最適任者は，次女の娘婿に当たる観測天文学者及川奥郎（1920 年 7 月東大天文学科卒）であるが，この種の証言は発見されていない．

類体論以後の高木の国際的評判

ドイツ語圏の数学者が殆んどオミットされた ICM1920 では反響が乏しかった類体論であるが，ゲッチンゲンを中心に高木の国際評価は一変した．最初の可視化された反響は，1923 年 1 月にチェコスロバキア数学物理学会名誉会員に推薦された件である．日本人数学者が国際的な顕彰を受けたのはこれが最初であるが，一般には知られなかったものと見られる．

同年，高木の論文を Helmut Hasse が精読した．1962 年 9 月に本田欣哉がハンブルク大学で Hasse にインタビューした内容を挙げる．

「私が高木貞治教授の類体論の論文のことを知ったのは，一九二三年にハンブルクで，アルチンにすすめられてでした．

私は第一論文を読むのに，数週間を要しました．その一般性，その明晰さ，効果的な方法とおどろくべき諸結果とに，深く魅惑されました．第二論文からは，さらに強いインスピレーションを与えられました．

二年間ほどかけて，私は教授の二論文を徹底的に分析究明しました．そして，私自身の方法で整理をしまして，証明もより明快にしていきました．このようにして，今や完全に高木教授の理論を把握できたという自信を得てから，私はドイツの数学者たちに対し，講演を行い，総合報告を発表しました．青年期の私にとって，もっともすばらしい「精神の高揚」をおぼえたものでした」

1925 年 6 月 27 日，高木は帝国学士院会員の大量補充時に会員となった．単なる数学教科書の著者で終らなかったことで，吉江琢児より学界（特に藤澤）の評価が高まったからであろう（吉江は 1927 年 11 月 1 日に会員となった）．幾つか証言と公文書記録を拾う．

1926 年 7 月に欧州に出張し，主としてベルリンに滞在し，1927 年 1 月 17 日に帰朝した東大理学部教授竹内端三（1910 年 7 月東大数学科卒）の証言．

「數學の教授も多いし互に勵みあつてるが，一體に，ゼオメトリーの專門の方が多くアルゼブラの方は少くこの方面では日本の方が遙に勝れここの高木教授等は有名なもので，あちらで評判は非常に高い」

1927 年，中山忠直「漢方医學の新研究」（寶文館）がベストセラーとなった．詩人・漢方医として知られる中山は，付録部分に日本科学界についての総説記述をしている．数学界については，大日本文明協會編「日本の科學界」（大日本文明協會事務所）の記述を完全に剽窃しているが，一般大衆向けに「虚数乗法の高木」という側面を紹介した最初期の文献である．

「楕圓乗法に一歩を進めた虚數乗法は，現に日本が世界一である．この学問は十九世紀の後半に發達したもので，クローネッカー，ウエバー，ヒルベルトによつて研究され，近來フエターがヨーロツパの覇者であるが，彼等はみな我國の高木貞治博士に及ばぬ．フエターの最近の論文の如きは，その方法が迂遠で往々誤謬があつて，とても高木博士の明快徹底的なるに及ばぬのである」

1929 年 4 月にオスロ大学より Abel 没後 100 年を記念して名誉博士の学位が授与された．アジア歴史資料センター（レファレンスコード B04012194100）で閲覧できる外務省資料「外国学校関係雑件 第一巻 13．諸威国 (2)オスロー大学」を紹介する．●は判読不能文字である．

電信寫 ストックホルム 二日後發	本省 三月三日前着
田中外務大臣　　武者小路公使 「オスロー」大學ハ四月六日諾威數學者 Abel ノ百年祭ニ際シ東京帝大理學部高木貞治教授ニ名譽博士ノ稱號ヲ贈ルコトニ決定シ Guldberg 教授ヨリ直接同博士へ通報濟ノ趣ヲ以テ同大學ヨリ高木教授右祭典參列ノ有無照會越セリ就テハ同教授ノ意向御回電請フ	

公信案 外務省文書課長 花押	淨書 伊藤 認印	校正（原稿） 木原 認印 （淨書） 木原 認印

文書課發送 昭和四年參月四日發送濟	起草 昭和四年參月四日
主管 歐米局長 花押	主任 第二課長 認印
歐二普通第一六五號	昭和四年參月四日附
受信人名 栗原文部次官	發信人名 吉田次官
件名 諾威「オスロー」大學祭典ニ東京帝國大學理學部高木貞治教授ノ參列ノ有無照會ノ件 本件ニ關シ在瑞典武者小路公使ヨリ別紙写ノ通リ電報アリタルニ付同教授參列ノ有無至急添回示●願度シ（別紙在瑞典公使●電第二五号写添付） 備考：電信欄外に同月 6 日付で「*高木博士へ電話ニテ通知済　尚電信寫送付スミ　Y．O．*」との記入あり	

文部省官専九五號 昭和四年三月十三日　　文部次官 粟屋 謙 公印 外務次官　吉田 茂殿 諾威「オスロー」大學祭典ニ東京帝國大學理事部高木貞治教授ノ參列ノ有無照會ノ件 標記ノ件ニ關シ本年三月四日付歐二普通第一六五號ヲ以テ御申越ノ次第ニ對シテハ早速本人ニ照會致シタル處右「オスロー」大學祭典ニハ都合ニ依リ遺憾ナカラ參列致シ難キ旨回答有之タルニ付此ノ旨先方へ通達方御取計相煩度此段御依頼ス（終） 備考：「歐米局」「第二課長」のスタンプ印及び認印 昭和四年參月拾四日接受のスタンプ印あり

電送第 2507 號 昭和 4 年 3 月 15 日後 1 時 45 分發	
電信案 外務省電信課長 認印	起草 昭和四年三月一四日
主管 歐米局長 花押	主任 第二課長 認印
件名 諾威「オスロー」大學祭典ニ東京帝國大學理學部高木	平 第一八號

貞治教授ノ参列ノ有無照會ノ件	
宛　在瑞典武者小路公使	發　田中大臣
貴電第二五号ニ関シ 高木貞治教授ニ照會シタル處都合ニ依リ遺憾ナガラ参列シ難キ趣ナリ	

計算すると判るが，武者小路公共駐スウェーデン公使が発電した1929年3月2日に高木が日本を出発したとして，オスロに到着することは事実上不可能である．武者小路公使の電信から推定されるが，Guldberg は高木に前もって通報している．その上で，高木は手遅れになるまで回答をしなかったと推定される．理由はわからない．

もう一つ言うと，1929年3月4日に外務省から通知を受けた文部省が，「本人に早速照会」した結果を9日後の同月13日に外務省に回答したのは異常である．文部省に対する高木の回答が遅れたのではなかろうか．外務省は文部省から即日回答が無かった事から，同月6日に文部省の頭越しに高木に電話通知したと見られる．

名誉博士号授与については東京朝日新聞で記事になり，高木のコメントも寄せられている．

「アーベルは，文學方面におけるイブセンと共にノールウエー人が誇りとする偉人で年齢僅かに廿七歳で死亡したが，四五年間の短い間に數學上の各方面に畫時代的の業績を擧げ數學史上から他に類のないといつて良い」

1930年9月にゲッチンゲン大学に留学し，Hilbert 退官最終講義を聴いたという学習院教授古賀軍治（1925年3月東大数学科卒）の証言．

「獨逸國内では勿論各國で我國の高木貞治先生の評判は大したものである．ランダウ教授は「日本數學界の神」であると云ふ．ベルリン大學のシュア教授は講義の時高木先生の名前を出すときには必ず「有名な日本の」と云ふ形容詞を附けると云ふ事である．曾て高木先生はヒルベルト教授に就いて學ばれた事があるので，獨逸人は高木先生はヒルベルトの生徒である，然も弟子中の第一人者であると云ふ．これは獨逸人としては非常の褒め方であらうと思ふが，同時にヒルベルト教授に對してはこれによつて極端な誇りを感じてゐるらしいのである」

古賀は Hilbert 退官最終講義を感動的に描写しているが，Hilbert はゲッチンゲン大学を退官後も講義を続けており，物性物理学者有山兼孝は1933年6月に Hilbert の真の最終講義を聴講している．

「それはただ，そのゼメスターの最後の講義で Hilbert がこれでもってもう退職するんだという，普通のカリキュラムにある講義の 最終の時間であったというだけのことであります．別段格別のこともない，普通の通りの講義をされました．最終講義とも何とも出ておりませんでしたが，ただこれが最後の時間なんだということをみんなで話し合って，感銘深く聞きました」

1935年5月，国語学者澤瀉久孝が某中等学校の国語科教授研究会の席で話した内容．

「最近知人よりの消息によりますと維納には日本語を研究してゐる一團の學生があつて，その一人は本多光太郎博士の物理學の著書を讀む爲であり，またある一人は高木貞二博士の數學の書を讀むためであるといふやうな事を聞きました」

高木の「初等整数論講義」(1931),「近世数学史談」(1933)を読みたい外国人がウィーンにいたのであろうか. ウィーン大学に日本学研究所が創設されるのは 1938 年のことである.

かくも海外の評価が可視化された日本人数学者は, 高木を初とする. 国内で読者に恵まれなかった高木の論文は, 国外からの評価が届くようになって, 国内評価が高騰したのである.

高木の第三次洋行

1932 年 4 月 15 日, 学術研究会議総会でチューリヒ ICM1932 に高木派遣が決定された. アジア歴史資料センターで閲覧できる外務省記録「國際数学者會議関係一件」(レファレンスコード B04122543100)を紹介する.

外務省文書課發送　昭和七年五月廿五日發送済	起草　昭和七年五月二十三日
主管　歐米局長　署名	主任　第二課長　岡本季正印
歐二普通第五四六號	昭和七年五月廿四日附
受信人名　粟屋文部次官	發信人名　有田次官
件名　「チューリッヒ」ニ於テ開催ノ萬國數學者會議ニ本邦代表者出席方ノ件 今般在本邦瑞西公使ヨリ本年九月四日ヨリ同十二日迄同國「チューリッヒ」市ニ於テ開催セラルヘキ萬國數學者會議ニ同會議組織委員會ニ於テ本邦代表者ヲ招請スル旨ヲ以テ別紙写ノ通申越タルニ付委曲右ニテ御了知ノ上何分ノ儀御回示相成度 (別紙在京瑞西公使来信第二二号写一通作成添付シ同附書ハ一括其●添付●)	

外務省文書課發送　昭和七年五月廿五日發送済	起草　昭和七年五月二十三日
主管　歐米局長　署名	主任　第二課長　岡本季正印
歐二普通第二三號	昭和七年五月廿四日附
受信人名　在本邦瑞西公使トラベルシニー	發信人名　芳澤大臣
件名　「チューリッヒ」ニ於テ開催ノ萬國數學者會議ニ本邦代表者出席方ノ件 以書翰啓上致候陳者本月二十日附貴翰第二二号ヲ以テ本年九月四日ヨリ同十二日迄貴國「チューリッヒ」市ニ於テ開催セラルヘキ萬國數學者會議ニ同會議組織委員會ニ於テ本邦代表者ヲ招請スル旨御申越相成敬承致候右ハ早速●係官處ニ移牒致置候條右様御了知相成度此段申進●本大臣ハ茲ニ重テ閣下ニ向テ敬意ヲ表シ候敬具	

歐米局第二課長　岡本季正印　　　　昭和七年五月卅日接受 官專一九四號 昭和七年五月三十日 文部次官　粟屋謙　次官公印 外務次官　有田八郎殿 「チューリツヒ」ニ於テ開催ノ萬國數學者會議ニ本邦代表者出席方ノ件 標記ニ關シ本年五月二十四日付歐二普通第五四六號ヲ以テ御照會ノ趣了承右會議ニハ本邦學術研究會議ヨリ代表委員トシテ左記一名ヲ參列セシムルコトニ決定致シ居レルニ付御了知相成度此段回答ス 記

東京帝國大學教授　理學博士　高木貞治

文書課發送　昭和七年六月參日發送濟	起草　昭和七年五月三十日
主管　歐米局長　署名	主任　第二課長　岡本季正印
歐二普通第二四號	昭和七年六月貳日附
受信人名　在本邦瑞西公使トラヴェルシニー	發信人名　斉藤大臣

件名 「チューリッヒ」ニ於テ開催ノ萬國数學者會議ニ本邦代表者出席方ノ件

以書翰啓上致候陳者本年九月貴國「チューリッヒ」市ニ於テ開催セラルヘキ萬國數學者會議ニ本邦代表者参加方ニ●シ五月二十四日附歐二普通第二三号ヲ以テ一應回答申進致置候處今般文部省ヨリ同會議ニハ本邦學術研究會議ヨリ代表委員トシテ東京帝國大學敎授理學博士高木貞治ヲ参列セシムルコトニ決定シ居レル旨回答越タルニ付右御了知相成度此段申進●本大臣ハ茲ニ重テ閣下ニ向テ敬意ヲ表シ候敬具

駐日スイス公使宛の発信者が外務大臣芳澤謙吉から総理大臣兼外務大臣齋藤實に代わっているのは，五・一五事件で犬養内閣が倒閣した結果である．

高木は 7 月 12 日に神戸を出港，12 月 3 日朝，欧州航路鹿島丸で神戸に帰国した．過去に紹介されていない証言を引く．

同年 4 月，帝国大学新聞のインタビューに答えて．

「*高木教授は語る*

私が行くことになりましたがまだ出發の日取りもきまらずどんなことになるかわかりません歸りは十一月頃になるでせう」

ICM1932 に高木を派遣する決定は 4 月になされていたが，この決定がスイスに伝わっていなかったので，5 月下旬になって誰を派遣するかの問合せがスイスから届いたわけである．学術研究会議が国際電報料金支出を渋ったか，学術研究会議数学部長の高木が手紙を書くのを忘れていたのであろう．恐らくは後者が主因だと考える．

Helmut Hasse の証言．

「*残念ながら，私が直接高木教授にお会いできたのは，一度だけでした．一九三二年，チューリッヒにおいてです．しかし教授は私を，ネーターさんなどと一緒に，ホテルでのディナーによんでくださいました．「偉大な数学者」という印象を受けました．思えばなつかしい，楽しい一夕でした．チェボタリョーフ教授と，いろいろ冗談を言い合ったりしたのをおぼえています．彼は大戦中ロシアの陸軍に，私はドイツの海軍に入っていました．つまり，敵同士だったんです．それで話がはずんだのでした*」

高木は，宿泊したホテル・エーデンの特別室に Nikolay Grigor'evich Chebotaryov, Amalie Emmy Noether, Hasse 等類体論に関係が深い 6 名の数学者を招き，一夕の宴を催したということである．

Hasse は末綱と共著論文を書き，パリに留学していた彌永昌吉と直接の面識を持って居た．末綱・彌永は Hasse を当初“ハーセ”という呼名で言及しているが，高木は一貫して“ハッセ”と記述し，最終的には末綱・彌永共に“ハッセ”と書くようになった．“ハーセ”が正しい発音だというが，この宴で高木は Hasse をハッセと呼んで通し，Hasse も敢えて訂正しなかったのかも知れない．一貫して Helmut と呼ん

だので気付かなかった可能性は 0 だと思うが.

高木による 1953 年の回想.

「*パリに行った時には，わたしのフランス語では，迚も芝居は無理だから，ついオペラへ行ってみることになった．成るべくは，オペラ・コミックで，カルメンか，バタフライかをやっているとよかったのだが，そうばかりも行かないで，グラントペラへも行かねばならなかった．何分プルュニェあたりで，食事をしてから行くのだから，音樂を聞いている中に，心持よくなって，睡む氣がさすのである．最後の洋行，といっても二十年前なのだが，歸りの船で，あの話を安藤さんにしたらば，「マア，勿體ない」といわれた．ワグナーを聞きながら，居眠りをする野蠻人の冒瀆を歎かれたのであろう．あの年わたしはヴインで，先輩の數學者フィリップ・フルトウェングラーを訪ねた．「君，若し音樂が好きなら，近日僕の従兄がこちらへやって來るから……」と言われたのに，「イヤ僕は音樂は分らないから」と，すげなく，その話を打切ったが，實を言えば，あの時わたしは音樂家フルトウェングラーの存在を知らなかったのである．あの年ヴインで，音樂のコンクウルか何かがあって，安藤さんも，そこで出られて，フルトウェングラーの指揮振りを鑑賞されたのであったそうだ*」

安藤さんとは，同年 6 月ウィーンでの第 1 回国際コンクール審査員として渡欧していたヴァイオリニスト安藤幸子（幸田露伴の妹）である．帰りの鹿島丸には，安藤の他帝展の佐分利眞・長谷川昇画伯，巴里で油絵を勉強した武内満佐子，体操選手大谷武一が同乗していた．安藤は高木と同時期にドイツ留学した過去があり，面識があったかもしれないが，安藤自身は高木との交流を記録していない．

同年 12 月帰国後，帝国大学新聞のインタビューに答えて．

「*今回の總會は九月十一日開催主な議題は協會規則改正であつたが緊急に撤回され同時に同協會は解散して眞に國際的な協會を作る事が決議された，これは從來の協會はいはば世界大戰後の聯合國側のみの協會でドイツ，オーストリヤを除外してゐたので今度からはドイツ，オーストリヤを含めた眞に國際的なものを作らうといふ事にあるのです然し今回の會議も相當國際的なもので，四十一ヶ國からの代表者が來てゐました，次回は一九三六年ノルウエーのオスロで開かれますが，この次からは會議毎に新進のもつとも學問的に功績ある者二名に賞牌を授ける事になつた，審査員は萬國數學會議員たる（ドイツ）カラテオドリ氏（イタリー）セウリ氏（佛）カルタン氏（米）バーコフ氏及び私であつて日本の若い學徒も勉強してこの賞牌を受けて呉れる様になつたらいゝと思ふ……*」

排除されていたドイツ系数学者が復権する状況を高木は描写しているが，この種のコスモポリタリズムに関する表現は消えていくことになる．1933 年 1 月 30 日にナチスが政権獲得し，4 月 7 日に公務員制度復旧法を布告してユダヤ人と反ナチスの科学者を追放し始めたのである．数学者にとって，四色問題以上に深刻な国境問題が現出しつつあった．

高木貞治と数学史

高木は 1933 年に「近世数学史談」を刊行した．辛辣な書評が横行する科学史業界だが，同書を痛烈に批判した論者は皆無である．それだけの労力を投入した成果であるが，いつ頃から同書執筆の為の知的蓄積をしていたのかは明らかではない．歴史学者や科学史家との知的な接触も，小倉金之助を

除いては見当らない．文献を個人的に蒐集していたことは間違いないが．

高木が数学史に初めて言及したのは，確認される限りでは東大数学科・星学科・物理学科 2 年生が幹事となり 1901 年 12 月 25 日に開催されたニュートン祭である．この日，高木の講演・ニュートン祭創立者の一人隈本有尚による講演「人物に就て」，長岡教授・本多学士によるニッケルスチールの磁場に伴う容積変化の幻燈，本間学士による単一弦運動の組合せを示す新案装置が披露された．当時の記事は以下の通り．

「*六時幹事開會を報じ高木貞治氏演壇に現われたり氏新に獨國より歸朝して未だ一閲月ならず満場の注意は氏に集まれり氏は徐に口を開きて「インフインテシマル，カルキュラス」の歴史を概論すニウトンが之を剏めてより雜然として起れる諸家の研究が輓近の學者の批評的態度に至る迄其間實に二百有餘年然も問題の範疇の常に根本に歸るを免かれ得ず年々に出づるリテラツールの量に比較して學術の進捗が質に於て極めて徐々たるを見れば顧みて之を創始せるニウトン其人の偉大なるを仰いで轉た崇拝の道理なるを覺ゆと結ばれぬ急霰の如き拍手一たび過ぎて復起れり*」

次の場面は，東大数学教室談話会で行われた東京高等師範学校教授林鶴一との対話である．杉村欣次郎（1912 年 7 月東大数学科卒）は，在学中の談話会の風景を証言している．

「*林氏は声の高い気焔家で，高木貞治先生とギリシア人は無理数を認めていたか否かについて論じた*」

1919 年 6 月 23 日の東京朝日新聞紙上で，高木は東北大理学部長に内定した林鶴一について以下のコメントを残した．

「*林博士は日本數學史の研究で最も聞え夫に關する著書もある．頗る快活な人であつて又敏腕家だから部長として適任者だと思ふ*」

次は，細井淙（1926 年 3 月東大数学科卒．和算家細井寧利の孫）に対しての助言である．

「*細井淙は東京大学の学生の時に高木貞治に次のようにすすめられたという．「細井の家は代々和算の家だという．和算史の研究はだれかがせねばならないから，君がやってみないか．」高木のすすめで細井淙は和算史の研究へ進んだ．細井が三上に教えを乞いに行ったのは，高木の紹介状をもってのことらしい．細井はその前に何か論文を書いたことがあるらしいが，三上はその論文について初対面の細井を手ひどく叱りつけたらしい．「主人がすっかりしょげて帰ってきたので，私が何日かたったあと，三上先生のお宅へご挨拶に行きました．」細井淙夫人（弘子）の思い出話ではあるが，細井夫妻はもうこの世にいない人たちである*」

その学説故に 1923 年 12 月に帝国学士院和算史調査嘱託を解嘱された三上義夫だが，高木は紹介状を書いたことになる．三上自身は，和算史家・通俗科学史の著者を始めとして実に多くの人間を，格調を欠く表現で批判対象にしているが，高木の近世数学史談を批判対象にしたという記録は今のところ見当らない．

1929 年に東大数学科入学（後中途退学）の遠山啓の証言．

「*ぼくが東大にいたとき高木（貞治）さんの講義を聞いておもしろいと思ったのは，あの先生の講義が大体アンチヒロイズムなんだ．偉いと思っていた人を身近な人間にしてしまう．たとえば集合論の話のこと-----ツェルメロの選択公理の証明に二種類あって，あれは結局同じなんだ．なぜ同じようなものをツェ*

ルメロ先生がやっているかというと，論文をたくさん書きたかったからだと……（笑）．そういう点がぼくは非常に印象に残っているんだけれども……」

林鶴一が 1935 年 10 月 4 日に狭心症で没した件について帝国大学新聞同月 7 日号でのコメント．

「東大理學部數學科高木貞治教授は暗然として語る

前から心臓が惡いときいて心配してゐたが快くなつたらしく高等學校の授業視察に行かれたとかいふので安心してゐた所だつたのに……僕が林さんと知り合つたのは第三高等中學校時代のこと，東大でも一緒だつた林さんは明治三十年に學校を出てから京大へ行き「坊ちやん」で有名な松山中學へも行つてゐたことがある，それから東京高師，東北大と轉じたが三，四年前東北大も引退した，林さんの性質は，數學者らしい良く切れる性格だつた，和算の研究は一般にも有名でたしか「免許」をもつてゐた筈，二年程前物理學会で會つたきりだが，思へばあれが最後だつた……」

林が伊達伯爵家から関孝和著“關算四傳書”を借り受けたまま退官し，数学教室に所蔵されていたのが再発見されたことを受けての帝国大学新聞同年 11 月 25 日号でのコメント．

「東大理學部高木貞治教授談　それは初耳だ，和算の方面のことはよく判らないけれども關孝和の時代に既に行列式や微分方程式がある程度まで使はれてゐたことなど仲々興味あることだと思ふ」

1957 年の和算に関するコメント．

「和算家にきくと，証明なんというものを知らないんだ．こうだ，というんだ，自分が．何べんきいても，言葉は変るけれど，主張するだけでね．それで間違えてはいないんだね．実際の数にあてれば，ちゃんとだすんだがね．ちょっと言えないんだ，わけが．だけれど，そうむちゃくちゃを言うんじゃないから」

「和算家と話すると，こっちにはちっともわからないんだ」

高木は，ゼミ等で数学史を講じることはなかったが，かなり初期から興味はあったらしい．高木の数学史の著作は，一般人の読者を多数獲得する契機となった．

高木と帝国大学新聞

帝国大学新聞は，高木から一番多く生のコメントを得たマスメディアである．高木のコメントを拾う．

藤澤利喜太郎博士の死没に当たっての 1934 年 1 月のコメント．

「數學界の恩人　高木貞治氏談

先生は本邦における大學數學教育體系の創始者で日本の數學者にして先生の直接間接教をうけないものはないといつて過言ではあるまい應用數學も先生が開拓創始されたもので明治二十九年には法科で統計學の講義を擔當され，生命保險の數理的基礎を確立されたのも先生であつた」

「初めは英國（ロンドン）にゐられたが間もなく獨逸に轉じ，ベルリンと當時新興のストラスブルグとで勉強して，同二十年に歸朝された．先生があの時のベルリン大學の數學を見て來られたことは日本の數學の爲にどれ程幸福であつたか知れないと思ふ．若しもあの時英國ばかりに留まつて歸朝されたならば，偏狹なる數學が日本の大學に植え付けられる危險が充分にあつたであらうと筆者は常に考へてゐる．一八八〇年代のことだから，日本でも歐羅巴でも，今とは事情が大分違ふ」

高等学校文科数学教育改革に就いての 1935 年 12 月のコメント．

高等学校文科の数学は1923年文部省訓令で第1学年中に約90時間，代数と幾何の補充・三角法・平面解析幾何・微分積分を教授することが規定されているが，相当の改善余地があるので，文部省は全国高校の数学科教授を集めて数学講習を開くこととし，高木・吉江・田邊を講師に招くことになった．

「*『論理の實習』も一つの方法　東大教授高木貞治博士談*

高校文科の數學は從來文科生徒間に興味が少なく從つて擔任教授としても氣乘がせずしかもその盛澤山な教授要目は一年毎週三時間では到底不可能であり，特に中學校卒業生が大半を占める現状にあるにも拘らず四年修了者と同樣に無味乾燥な三角立體幾何等の講義を繰返してゐる矛盾に鑑み今回の講習會が催されたのであらう．文科生にどんな講義をすれば面白く又有益であるかは仲々困難な問題だが自分としては「論理の實習」といつた樣な意味でこれを生かして行つては何うかと思ふ，即ち專門的に數學の各部門に拘泥せずにもつと廣く一般生に向いた講義方法を取る方がいゝんぢやないかと思ふ，それにしても相當の困難が伴ふもので自分としては今具體的にはこの問題について何も考へてゐない」

この講演記録は書籍化されたが，東京學生消費組合圖書部の圖書評論誌では眞羅劫（筆名であろう）が痛烈な書評を載せている．吉江・田邊に対する書評はある程度正しいが，高木を批判することには失敗している．論理の実習としての数学教育を批判することは，実際容易ではない．

オスロで開催される第5回ICM（1936．7）に就いての1936年1月のコメント．

「*理學部高木貞治教授は語る*

今回の總會で一番期待されるのは世界數學者の提携を計るやうに規約を改正することだが，その外に各國學者の研究報告がある筈で，盛會を豫想される．何分にも場所が諾威なので日本からはチヨツト行けないが，英，獨，佛，米邊りからは多數の權威がゾクゾク押しかけることだらう．各國が政治的に反目し合つてゐる現在學問による提携は益々必要なわけでこの大會には大きな期待がかけられる」

高木の来るべき停年退官を受けて，曙町の高木邸応接室での1936年3月のインタビュー．応接室には時代物らしきピアノ1台と熊の皮が敷いてあるのみだったという．

「*わしはいつも夜になると一杯飲んで一寝入り，そうすると十二時頃には眼がさめる，二，三時間書物を讀んで，空が白々となる頃また一寝入り，ほんとに起るのが十時頃だから大分寢坊だなハ，ハ，ハ*」

「*趣味なんて面倒くさい，まあ強いて言へば晩酌が趣味さ，それも噂によると余程好きで，仕舞にはアルチウになりやせんかと注意して呉れる人も時々あるがありや噓，噓，やつと二本が精々だから……*」

「*しかし近頃はあまり勉強もしなくなつたものだな，若い頃は余暇にまかせて英獨佛の新作家の文藝作品を讀破したんだが今は少しも讀まない，勿論不精なのは昔からのことで學生時代は講義のノートは一つもとらなかつたからな，面倒くさいのでパツとした趣味もなく，晩酌位が精精，從つて運動もせず，活動寫眞も見ない，芝居？芝居は少し好きだよ，映畫は近頃の流行とかいふものなのでどうも親しみがないが芝居はいゝ，しかし芝居でも獨乙なんかのは新形式のほかに古典の味をちよびちよび混ぜるから面白いが，そこへゆくと日本の芝居は見られん，舊態依然ふるくさいものばかりだ*」

高木の酒に関する噂の発信源の一つは，著名な詩人土井晩翠の著書の記述（1934）にある．

「前號の終にフランスの最大天才パスカルの句を引いた,『少しも酒を與へぬと眞理が分らぬ, あまり多くの酒を與へても同樣』其人にとつてあまり多くでは無からうが可なりの上戸中に世界的數學者高木(東京帝大)教授がある, 物理學校出身の天才的數學者小倉博士, 文理科大學の掛谷博士(數學)いづれも左黨の豪の者と承はる」

高木の後輩である土井に歪んだ情報が伝わったというより, 若い頃の高木は酒をかなり嗜んだのではなかろうか.

高木とフランチェスカ・セヴェリ来日の時系列

高木とローマ大学フランチェスカ・セヴェリは, 第 1 回フィールズ賞選考委員として何がしかの交流があったと推論できるが, 専門が異なる為, 親しく交渉を持ったのは来日以降である.

1936 年 1 月 18 日, 東京朝日新聞朝刊がセヴェリ来朝を報じ, 高木はコメントを寄せた.

1936 年 1 月 29 日, 第 1 回日伊交換教授としてセヴェリが外務省文化事業部と国際文化振興会の招致で来日し, 夕方, 帝国ホテルに投宿したセヴェリを高木他が来訪し打合せを行った.

2 月 3 日, セヴェリは東大理学部で十回の予定で「多変数函数論」を講義した. 小平邦彦(1938 年 3 月東大数学科卒)其の他が聴講している.

同月 4 日, セヴェリは夫人・アウリッチ駐日大使・マリアーナ参事官と東大を正式訪問し長与総長・高木の出迎えを受けた. 続けて, 下位春吉の通訳で「現代伊太利亜文化」と題する 3 時間講演をした.

講演後, 高木はセヴェリを以下のように紹介している.

「せゔえり君ハ 1903 年とりの大學ノ講師として學界ニでびゆーシテカラ, 順調ニ學問的生活行程ヲ辿ツテ, 1906 年ぱどゔあ大學, 1923 年ろおま大學ノ教授ニ就任シ, 又 1926 年伊太利現政府ニヨツテ創立サレタ「伊太利學士院」ノ會員ニ列シタノデアル. 伊太ニハろおまニ古イ傳統ノ有名ナりんちえいノ國立學士院ガアリ, ソノ外とりの, みらの, ゔえねちや等々ニ小規模ナガラ, ソレゾレノ傳統ヲ持ツ多數ノ地方的學士院ガアルガ, 前記ノ「伊太利學士院」トイフノハ, ソレラトハ別ニ, 伊太利現政府ノ下ニ新シイ使命ヲ持ツテ生レタモノデアル. 使命トイフノハ國粹發揚ナドヲ重心トスルノデアラウガ, 先日せ君ノ講演デハ「新陳代謝」トイフヤウナコトガ, 強イ文句デ述ベラレタヤウデモアツタ. 人文科學, 自然科學, 文藝, 美術ノ 4 部門ニオイテ全國的ニ第一流ノ新鋭ヲ網羅シヨウトイフノデアルガ, 定員ハ上記四部各 15 人, 現今ハマダ總員 45 人デ, 院長ハ無線電信ノまるこにデアル. サウシテせゔえり君ハ同院ニオケル唯 1 人ノ數學者トシテ伊太利數學ヲ代表スルワケデアル.

せゔえり君ノ數學上ノ業績ヲココデ述ベルコトハ差控ヘネバナルマイガ, 唯一言スレバ, 抑モ伊太利デハ現王朝ニヨツテ統一ノ直後ニ多數著名ナル數學者ガ輩出シテ數學ガ勃興シ, 優ニ佛獨ノ先進國ニ雁行スルニ至ツタガ, 特ニ幾何學ニオイテ特色ヲ發揮シテヰル. せゔえり君モソノ傳統ニ從ツテ從來代數的幾何學ニオイテ著シイ研究ヲ發表シテヰルガ, 今回東京帝大ニオイテハ 2 月中約 10 回ニ亙ツテ多變數解析函數論ノ講義ヲスル筈デアル. 幾何學的ノ方法ニ由テ新味ヲ出サウトイフノデアラウ. せゔえり君ハ今回ノ來朝ガ形式的, 儀禮的ニ終ラナイデ, 何等カ實質的ナル或物ヲ日本ニ殘シテ行キタイト意氣込デヰルサウダカラ, 吾々トシテモ大ニ期待ヲ持ツワケデアル.

シカシナガラ, せゔえり君今回來朝ノ使命ニいたり一文化ノ一般的宣傳トイフヤウナ側面モアルデア

ラウ．ソノ第一聲トシテ去ル2月4日東大ニオイテ「現代いたりーノ文化」ニツイテ一般向キノ講演ヲ試ミテ，1870 年ノ王國統一ヨリ現今ニ至ル各時期ニオイテ文學美術音楽及ビ科學ノ各方面ニ亙ツテ伊太利文化ノ特色ヲ説明シタ．講演ノ中，折ニフレテハ國際聯盟ニ對スル不滿，先進國ノ利益壟斷ノ抗撃，サテハふあしすもノ眞精神ノ宣明ナド，演者ノ所謂「脱線」モアツタガ，勿論原稿ニ書イテアツタ脱線デアラウ．何シロ約 3 時間ニ亙ツテ滔々數千言，懸河ノ辯ヲ揮ツテ聽衆ヲ魅了セシメタ．筆者ノ接シタ數學仲間ノ中デせゔえり君ハ稀ニ見ル，或ハムシロ唯一ノ雄辯家デアル」

同月 5 日，重光葵外務次官邸にセヴェリとシャリアピンが招待された．

同月 6 日，セヴェリは東大理学部で「多変数函数論」を講義した．

同月 7 日，国際文化振興会でセヴェリ歓迎会があり，天羽英二外務省情報部長が出席した．

同月 26 日，二・二六事件発生．

3 月 4 日，セヴェリは東京文理科大学で「數學教育ノ原理」を講演した．

同月 12 日，帝国学士院例会でセヴェリの論文「代數面上ノ點集合ノ或例」を高木貞治が代読した．

同月 24 日，作家の野上彌生子日記より．柳沢とは柳澤健外務省文化事業部第三課長である．

「柳沢より夕方デンワ．二十九日セヴェリを能に案内する件．うちの招待とする事を申出る．S の事もなんの不安もないらしい．たゞ金の点をハッキリさせる照会を今してやつてゐるだけで，その返事の来次第に確定するものゝやうなり．今後文化的な交渉にセヴェリ氏があたるらしいので S も紹介しておいた方よからんとの柳沢氏の配慮なのである」

同月 29 日，作家の野上彌生子日記より．

「午後一時からセヴェリ博士夫妻を宝生会に招待．セヴェリさんは六尺ゆたかな大男で，鮭いろの強健さうな身体――こんな身体を見るといかにも肉と云ふかんじが強くする．頭は褐色．もぢやもぢやと細かく縮ぢれている．後頭の下の太い頸の上に盛りあがつてゐる一うねの肉．腸詰を乗つけたかんじ，顔は写真よりはずつと長く，突き出た立派な鼻と穏和な眼をもつて，顎に V 形の鬚を貯へてゐる．マダム・セヴェリは黒いくるつとした艶な眼をして鼻も美しい．たゞ頬の下部が円く張つて顎のないやうな感じがする．しかしこれが南欧のイタリ美人の型かも知れない．洋服も帽子も毛皮のショールも黒の一いろである」

「セヴェリ夫妻のどちらが多く能を解したらう．夫人の方がよいアダプテーションをもつらしい」

同月 31 日，高木は東大を停年退官した．

4 月 3 日，セヴェリは日本数学物理学会総会で相対性原理に関する自身の新説を発表した．

同月 9 日，作家の野上彌生子日記より．

「帝国ホテルにセヴェリさんの送別会を文化振興会で催し父さんと私と招待されたが，私は不参．私にはこんな時に着て行くやうな訪問服がないのだときいたら人はびつくらするだらう．余計なものだとおもふが，やつぱり一枚は拵えておく方よろしかるべし」

同月 20 日頃，セヴェリ夫妻は帰国した．

7 月 6 日，外務大臣有田八郎は総理大臣廣田弘毅にセヴェリの勲二等瑞宝章叙勲を上奏要請した．

同月 9 日，下條康麿賞勲局総裁はセヴェリの叙勲理由を提出した．

同月 11 日，総理大臣廣田弘毅は天皇に裁可を仰いだ．

同月 13 日，セヴェリの勲二等瑞宝章叙勲が施行された．

高木は，停年退官を目前にしてセヴェリ問題に半年近くを費やすことになった．

第 1 回日伊交換教授としてイタリアに渡った国際法学者田中耕太郎がグラン・オフィシェー・クーロンヌ勲章を受章したことから，日本側もグラン・オフィシェー・クーロンヌ勲章受章者のセヴェリに同等の勲章を出すべきだとする杉村陽太郎イタリア大使の外務電が届いたという．柳澤健外務省文化事業部第三課長は，旧知の高木に依頼してこの問題を巧妙に解決した．セヴェリ問題で，高木と柳澤は密接な協力をしていた模様である．

柳澤と田中の戦後の対話を引く．

柳澤「*當時，僕は日本にいて，あなたと交換的にイタリアから日本にやつていたものだが，この『プチット・ショーズ』の勲章問題では苦勞しましたよ．ローマの杉村大使から『田中博士が叙勳された．セヴェリ氏にも至急頼む』と電報してきたので，早速その話を賞勳局に持ち込んだところ，當時の總裁は下條さんで，細かいの細かくないのつてお話にならね．『イタリアが何をしようと，また日本とイタリアとの關係がどうであらうと，かゝる政治的な意味で日本の勳章をやることは，絶對にできぬ．要はセヴェリ教授が，眞にわが國の學界に貢献したかどうかにある．それ以外に，考慮の余地はない』という返事です．しかし僕には，セヴェリ教授の高等數學（古典幾何學とか言つた）何回かの講義が，日本數學界にどんな影響を與えたかなんて，固より判るはずはない．致し方がないので，専門家の高木貞治博士に事情を話してお願して下條總裁あての作文を書いて貰つた．ところが，事高等數學の問題だから，法學士の氏に判るはずはない．先方の希望によつて，直接高木博士に説明に出掛けて貰つたところ，その説明で益々判らなくなり，トド根氣負けの恰好で下條總裁も，あなたが貰つた同格の勳章をセヴェリさんにやることになりました．あの時は閉口した．どうしてプチット・ショーズどころか，グランド・ショーズでしたよ*」

田中「*その後トゥチ教授が同じ交換教授でイタリアから日本に來たとき，僕は下條氏に同氏の佛教に對する貢献というものを大いに説いて，勳章を出して貰いたいと頼んだものですが，同氏は，『佛教に貢献したということは確かだが，日本の佛教に貢献したかどうか，これが問題です』と云つて，當時の關係者の我々を面喰わせたものでしたよ……*」

東大法学部出身で統計学の著作がある下條康麿賞勲局総裁は，前任者が売勲事件で失脚したことから，公務員の定期人事によらない勲章授与には厳しく臨む姿勢で知られた人物である．

アジア歴史資料センターで閲覧できる内閣資料「叙勲裁可書・昭和十一年・叙勲巻十三・外国人二伊国「ローマ」大学教授「フランチェスコ、セヴェリ」叙勲ノ件」（レファレンスコード A10113185800）を紹介する．

人普通第四三八號

昭和十一年七月六日

外務大臣　有田八郎　大臣公印

内閣總理大臣　廣田弘毅殿

伊國「ローマ」大學教授「セヴェリ」叙勳ノ件

伊國「ローマ」大學教授「フランチェスコ，セヴェリ」叙勳ノ儀別紙ノ通上奏致候間可然御取計相成度此段申進候也

伊國「ローマ」大學教授「フランチェスコ，セヴェリ」儀ハ我學界ニ寄与スル所尠カラサル趣ヲ以テ叙勳ノ儀文部大臣ヨリ申立有之候處同人ハ日伊文化提携上ニモ貢献スル所多ク別記ノ通功績有之候ニ付テハ此際右功勞ヲ御表彰被遊頭書ノ通叙勳●仰出候様仕度」此段議ヲ奏ス

昭和十一年七月六日

外務大臣　有田八郎　大臣公印

勳二等瑞寶章　伊國「ローマ」大學教授　フランチェスコ，セヴェリ

自國「グラン，オフキシェー，クーロンヌ」勳章所有

右者世界有数ノ數學者ニシテ伊太利學士會員タル外「ベルリン」，「レニングラード」，「リエージュ」，「バルセロナ」各學士院客員，「パリ」學士院受賞者タリ又「トロント」，「ヴェノス，アイレス」各大學名譽教授ナルガ我學界ニ於テモ夙ニ其名聲ハ喧傳セラレ親シク其學説ヲ聴カンコトヲ渇望セルノ状ナリシニ客年日伊兩國交換教授ノ議成立セル結果同人ハ過般其第一回伊國派遣教授トシテ來航シ二月四日以來四月中旬ニ亘リ東京帝國大學，東京文理科大學，東北帝國大學，日本數學物理學會，國際文化振興會，京都帝國大學，大阪帝國大學等ニ於テ講演ヲ行ヒ帝國學士院ニ於テハ二月例會開催ノ折特ニ招シテ歡迎ノ意ヲ表スル所アリ其際伊太利學士院長ノ名ニ依ル「メッセージ」ヲ齎シ日伊兩國ノ文化的連絡ノ熱烈ナル意圖ヲ明シタリ次テ三月例會ニハ會員高木貞治ノ紹介ニ依リ「代數的表面上ニ於ケル點集合ノ系列」ト題スル論文ヲ報告セシカ外國人ニシテ帝國學士院ニ於テ斯ク正式ニ論文報告アリシハ同人ヲ以テ嚆矢トス

由來同人ハ代數學的幾何學ノ大家ニシテ現代伊太利學派ノ代表者ト認メラルル碩學ナルカ近時又多變數解析函數論ニ於テ注目スヘキ研究多キヲ以テ前記各所ニ於ケル講演ハ何レモ我學界ヲ裨益スル所尠カラス殊ニ東京帝國大學ニ於テ十回ニ亘テ行ヒタル函數論ノ連續講演ノ如キハ外國人學者ノ講演トシテ恐ラク未曾有ノ成績ヲ収メタルモノト謂フヘク其講演筆記ハ多數學者ノ要望ニ依リ同大學ニ於テ飜譯整理ノ上近ク出版ヲ見ントシツツアリ之レ畢竟同人ノ獨創的ナル幾何學的方法ニ依ル多變數解析函數論カ極メテ新味ニ富ミ學者ヲ啓發スル所多キカ爲ニシテ本邦學界ハ此清新ナル刺戟ニ依リ俄然斯方面ニ於テ新研究ノ領域ヲ擴張セントスル氣運ヲ醸成スルニ至レリ又日本數學物理學會年會席上ニ於テ試ミタル特別講演ハ「常識ヨリ導カレタル相對性原理」ト題スルモノニシテ其内容ハ近ク同會記事上ニ發表セラルヘキ見込ナルカ常識ト矛盾セサル相對性理論ノ公理ヲ與ヘ該理論ニ關シ最近ノ諸説ヲ其立場ヨリ一括説明シタル甚タ興味深キ講演ナリ

更ニ同人カ帝國學士院ニ提出シタル前記論文「代數的表面上ニ於ケル點集合ノ系列」ハ最近數年間ニ亘ル同人研究ノ成果ナル所謂「對等系列」理論ヲ綜合セルモノニシテ斯學上極メテ重要ナル結果ヲ包含シ既ニ「プロシーディングス，オヴ，インペリアル，アカデミー」上ニ其發表ヲ見タリ

以上同人ノ學界ニ對スル業績ハ日伊學術交換上極メテ意義深キモノニシテ功績洵ニ顯著ナリトス

抑モ日伊文化交換事業ハ兩國ノ學術交換及提携ニ依リ東西文化ノ融合ヲ圖ラントスルノ趣旨ヨリ出テタルモノニシテ伊國側ニ於テハ「ムッソリーニ」首相之カ實現ニ最モ熱意ヲ有シ「セヴェリ」教授派遣ニ關スル人選ノ如キモ同首相ノ發意ニ基クモノト観ルヲ得ヘク又現ニ客年十二月伊國ニ出張ヲ命セラレタル東京帝國大學教授田中耕太郎ニ對シテハ同國ニ於テ厚遇最モ努メ既ニ「グラン，オフキシェー，クーロンヌ」勳章ノ贈與アリ其上最近「ローマ」大學政治學部ニ日本語講座ヲ設置シ「ナポリ」外國語學校ニ日本語科ヲ新設スル等同國各方面ニ於テ我國ニ對シ大ナル關心ヲ有シ文化的提携ノ氣運盛ニ勃興セルヲ認ム從テ同教授ノ來朝ハ伊國ニ於テ相當重要視セラレ居ルハ推測ニ難カラス且同人ハ單ニ數學界ノ碩學タルニ止マラス一般學藝方面並ニ政治方

面ニ於テモ有力ナル發言權ヲ有スル人ニシテ今後兩國文化關係ノ提携上尚又親善關係ノ増進上同人ノ努力ニ俟ツヘキモノ多々存スヘシト認メラル

賞勳局上申第二七〇暗號　昭和十一年七月十一日裁可　昭和十一年七月十三日施行 昭和十一年七月九日　内閣書記官長公印　内閣書記官公印 内閣總理大臣　大臣花押　賞勳局總裁　總裁公印 伊國「ローマ」大學教授「フランチェスコ，セヴェリ」ハ世界的有數ノ數學者ニシテ伊太利學士會員タル外各地ノ學士院客員ナル處客年日伊兩國交換教授トシテ來朝シ東京帝國大學其ノ他各所ニ於テ講演ヲ行ヒ就中多變數解析函數論ハ極メテ新味ニ富ミ本邦學界ノ斯方面ニ於テ新研究ノ領域ヲ擴張セントスル氣運ヲ釀成セシメ又「常識ヨリ導カレタル相對性原理」ト題スル特別講演ハ最近ノ諸説ヲ其ノ立場ヨリ一括説明シタル興味深キモノナリ且同教授カ帝國學士院ニ提出シタル「代數的表面上ニ於ケル點集合ノ系列」ト題スル論文ハ斯學上極メテ重要ナル結果ヲ包含シ學士院例會ニ於テ正式ニ報告發表セラレタル等日伊兩國學術交換上意義深キモノニシテ我學界ニ裨益シタル功績顯著ナリトス仍テ此際外務大臣上奏頭書ノ通叙勳被仰出可然哉此段允裁ヲ仰ク

可公印 伊國「ローマ」大學教授「セヴェリ」叙勳ノ件 右謹テ裁可ヲ仰ク 昭和十一年七月十一日 内閣總理大臣　廣田弘毅　大臣公印

率直に言って，セヴェリ来日が日本数学界に裨益したと確言できるか否かは明確ではない．多変数解析函数論・代数幾何学は当時の日本数学界では流行しておらず，相対性理論は物理学界・数学界共に重視されておらず，聴衆には恵まれていない．イタリアも 7 年後には日独伊三国同盟から外れるのである．小平邦彦がアムステルダム ICM に出席した際，セヴェリが「自分の講義を聴いた小平」と紹介したが，小平自身は前席の数学科教授の禿頭しか記憶に残っていなかったという．

ここで北大数学科教授吉田洋一（当時 38 歳）の発言を引用する．

「*高木先生は，酒の席などでは，時に寸鉄人を刺すような皮肉を言われましたね．掛谷宗一先生は，かねて軍人好きを表明しておられたので，例の二・二六事件の直後のある酒の席で，私が掛谷先生に，「こういう事件が起こっても，やっぱり軍人がお好きですか」と申しますと，藤原松三郎先生がよろこんで，「掛谷君は軍国主義だよ．吉田君もっとやれ」とけしかけたりしていますと，高木先生がポツリ「吉田はまだ若いつもりでいるんだな」と言われました．先生に一本とられました*」

高木と哲学

高木が哲学に接近した形跡はなく，哲学界も高木の数学を評価したとは言い切れない．西田幾多郎の発信書簡を例に挙げる．

日付	宛先	文面

1940年1月24日	下村寅太郎	*小堀憲君が「大數學者」を送つてくれたのでもう面白く一氣によんでしまひましたリイマンは少し淋しかつたがワイエルシュトラスはコヴァレフスキといふ様な花形が入つて來るので中々にぎやかだ W が七十近くなつてもアベル積分の本質を闡明しようと血みどろの努力をつゞけてゐたと云ふに至つて少なからず勵まされた高木氏が何をなしたのかと云ふことも分つた*
1941年5月19日	下村寅太郎	*共立社から出た「輓近高等數學講座」の中の高木氏の「近世數學史談」といふもののお持ちなきや*
1941年5月29日	岩波書店布川角左衛門	*扨御手数恐れ入りますがどうか神保町の御店の方に頼んで 高木貞治著 近世數學史談 といふものを探して下さいますまいか 此書は固共立社刊行の輓近高等數學講座の中に出たものにてこの講座は非賣品とはなつて居りますが新修版といふものも出て居り 高木氏のこの本の終に一圓五十錢と値段附がある故に別冊にて販賣したものと存じます 共立社に尚新本があるものかも知らず 若しなければ古本屋の方へお聞き願ひたいと存じます*
1941年6月26日	下村寅太郎	*高木氏の「近世數學史談」中々面白う御座いました 數學の方は分りませぬが大數學者といふものゝ着眼点や數學的思想發展の經路に敎へられる所があるとおもひます 岩波へ古本を探してくれる様頼みました 尚暫くおかし下さい*
1941年6月30日	下村寅太郎	*高木氏の本岩波へ頼んで置きました處岩波の布川が高木氏へ話しました由にて高木君よりもらひました 彌永君の「圖書」のもの私も面白くよみました*
1941年8月2日	下村寅太郎	*「位相數學」をどうも岩波から送つて來ませぬ 君の北海道の知人といふのに聞いて見て下さいませぬか 本年五月號の「位相數學」です 近藤とかいふ人の位相數學の論文がのつて居るものです 若し餘分のものでもないか それから文理の何とかいふ人の位相幾何(或は數學?)と高木氏の數學雜談とかいふもの 共立社から出たといふもの 御手數ながらお願申上げます 別にお探しを願ふまでではないが尊兄本鄕神田の古本屋を見て歩かれる節これ等のもの萬一見つかりましたらお求め下さい*
1941年8月7日	下村寅太郎	*書物御送下され本日落手いたしました 難有御禮申上げます 暫く拝借願ひます*

西田の高木理論に対する理解は，明らかにディレッタントの域を超えていない．高木は西田に「近世數學史談」を贈与したが，西田には高木に贈り返しできる著作が無かったらしい．西田は，西田哲学に接近した末綱恕一とはかなりの接触を持ったが，高木と直接の接触を持つことは回避したのか，西田の日記に高木の記述は一切見られず，高木も西田に言及した記録は見当たらない．西田は同書の読後感を雑誌に執筆したので，高木の印税収入に貢献したのではなかろうか．

1940年11月10日の文化勲章授章式は，同時授章した高木と西田が接触する好機だった．しかし，重度の痔疾により西田は出席を見合わせている．

日本に於ける科学哲学・数理哲学の第一人者田邊元(1904年9月東大数学科入学・1905年に哲学科転科)は，高木に傾倒していたとして田邊門下に屡々語られる．田邊の事例を考察する．

田邊と親しかった作家野上彌生子の日記を引用する.

日付	文面
1953年10月1日	*理科からどうして哲学に変つたかの昔話はおもしろかつた. 数学をはじめ志したのは一つはお父様の希望, 一高の友野, 数藤, 須藤氏の批判. 大学では高木貞二氏に傾倒した. しかし演習の微積分の問題が殆んど解けない. 一週に一度の試験. 白紙はださないが, 一つとしてとけないので絶望, 狩野先生に哲学に転ずる事を相談したら, 哲学なんてアンナ馬鹿な学問をする事はない. よせといはれたのを, 幾度も押し返して転科の事を相談. 狩野先生がそれについての試験の事を交渉して下すつた. 論理 95, 漢文 85, 国語 74 とつた. これは上野直昭氏が事務所に行つてしらべて来た*
1954年3月26日	*帰ると寺沢夫人が見え, 暮れてお迎ひながら寺沢先生も来らる. いつしよにおスシを頂き, 食後茂吉郎夫妻も来る. 奥さんとお嫁さんはうまく行かないらしい. これはもとから予想されてゐた怖れである. 田辺先生が数学のもんだいに閉口して, 大学一年で哲学に代つた話をもちだしたら, 一週に一度もんだいを出したのは高木貞二氏ではなく, 　　さんであらうといはれた. ところで寺沢さんは同氏のフランス語の種本を一高の図書舘で見つけだした. 大学の図書舘にはない. 先生がもつて行つてゐるわけ. それで一高の図書舘ですつかり予習をしておき, 今日はこんな問題がでるぞ, と黒板に書いて見せる, 先生が入つて来た時いそいでそれを消して席につく. する〔と〕先生がすつかりそれと同じ問題をだすので, みんなどつと笑う, うんうん. ----*

寺沢とは, 1905年9月に東大物理学科に入学した寺沢寛一である. 田邊が言うように, 東大数学科・物理学科の必須単位であった微分積分学の演習が難しいために将来を悲観するのは理解できる. 実際, 函数解析の世界的権威だった吉田耕作なども, 一度微分積分学の単位を落として再履修せざるを得なかった. 田邊は転科後, 科学哲学や数理哲学の分野で活躍する.

田邊は 1954 年 11 月 30 日に発行された「数理の歴史主義的展開　數學基礎論覺書」(筑摩書房)で以下の記述をしている.

「*數學に對する愛を私に吹込まれたのは, 學界の至寶として今も健在せられる高木貞治先生であつた. 先生の最も早い頃の名著『新式算術講義』は, 初めて純粋なる數學の美しさを私に教へたものである. 私はその美に引き着けられて数學を學ばうと志したのである. デデキントの切斷論が, ほとんど私の一生を貫く問題となつたほどに強い印象を與へたのも, 外ならぬ先生の解説を通じてであつた. かくて東大理學部一年に入學して始めて先生の「初等數學雜論」と題する講義を聽いた私は, 年來のあこがれを滿足し悦に充たされたものである. しかし生來數學者たる素質を缺いて居た私には, 演習特に微積分の演習は, 全く責苦であつた. そこでは出された問題が, 一つも解けないことが常であつたのである. 私はこれではとうてい數學者になる資格は無いものと諦めて, 聽講僅に三ケ月にして休學, 翌年文學部の哲學に轉じたのである. ただ高木先生の講義を聽く機會を失ふことは, いかにも殘念であつたが, それも致方なかつた. 卒業後仙臺の理學部に講師として在職中, 數學の講義を一通り聽講し, その關係で數理哲學の研究に手を着けたのも, そのやうな愛着を數學に對して懷いて居たからに外ならない. 爾來四十年になんなんとするが, 高木先生に對する尊敬は今も昔と渝ることがない. 數學者としての先生の偉業を十分に解することができない私も, 先生と同じ時代に同じ國土に生まれ, 先生の風貌に*

接し先生の講義を聴き，數學の全領域に對する先生の透徹限なき洞察と展望との一端に觸れ得たことをもつて，限無き幸運と感謝するのである」

田邊は同書を高木に送付したものと推論される．田邊が生前に受領した手紙は，現在全てリストアップされており，高木が 1954 年 12 月 2 日消印・1955 年 5 月 27 日消印の 2 通を送付した記録がある事から，時期的にそう判断される．また，田邊が以前に高木と文通していないことも明らかである．内容は現時点で非開示であるが，田邊にとって極めて辛辣な内容だった可能性が極めて高い．

新式算術講義に関連して 1957 年に於ける高木の証言を引く．

「*一番ひどいのは-----田辺という哲学者がいるね．あれはもと数学をやって，1 年いたんだ．今でもぼくのあの本を引出して，哲学の空間がどうやら引出すから．ぼくは迷惑なんだ．本を出すから悪いのかもしれんが．西洋の本屋のね，払いをするためにね*」

当時存命だった田邊がこの批判を閲読したか否かは不明である．田邊のために弁解すると，新式算術講義を参照文献として著書に引用しているわけではない．田邊が高木に送った信書内で引用したのかもしれないが，田邊が送付した高木宛私信も所在不明で確認できない．

田邊の全蔵書は没後に寄贈されリスト化されている．中には高木の基本著作「初等整数論講義」(1931)，「近世数学史談」(1933)，「大阪帝国大学数学講演集」(1938)，「近世数学史談」(1942)，「数学小景」(1943)，「解析概論」(1943)，「代数的整数論」(1948)，「初等整数論　概説及び類体論」(1948)，「数学の自由性」(1949)，「数の概念」(1949)が網羅されているが，不思議なことに「新式算術講義」は見当らない．

高木が親しく交流した哲学者が西田や田邊を敵視した山崎謙であり，知の国際交流を賞揚し続けた事実背景を踏まえると，高木の三高時代の教官河合十太郎と西田が石川県出身ということで，西田と高木に知的相関を見出そうとした下村寅太郎の解釈を，高木は迷惑として即座に拒絶するのではなかろうか．存命中の高木は，県人会の類に積極的に参加した記録は無かったし，第一次・第二次世界大戦を通して数学には国境が無い事を指摘している．

藤原工業大学教授から慶応義塾大学教授時代まで

1941 年 4 月 1 日，慶応義塾大学長小泉信三と東大総長平賀譲の斡旋で，新設の藤原工業大学は東大工学部教授を停年退官する海軍造兵中将谷村豊太郎工学博士を学部長に迎えた．谷村は計算図表学の紹介者として知られた造兵技術者である．

1939 年に藤原工業大学予科に入学した第 1 期学生が，予科を卒業し本科に進学する 1942 年 4 月までに学部を整備する必要があり，谷村が中心となってまず専任教授を選出し，更に専任教授と協議の上で各学科の担当者を選任した．谷村は，最初に東大停年退官後 5 年を経た高木貞治を 1941 年 9 月 1 日に藤原工業大学教授（数学担当）として迎えた．谷村は，就任を予定されていた教授を交えて学科課程を立案し，1942 年 3 月 31 日付で文部省から認可を得た．電気工学科・機械工学科・応用化学科の第 1 学年は，1 から 3 学期まで毎週 2 時間数学と数学演習をすることになっている．

数学に関係する藤原工業大学兼任講師は以下の通り．ポテンシャル論の研究者である亀谷俊司と

日本における水文学の開祖となる菅原正巳以外は代数学者である.

職名	氏名	現職	就任日時	担当科目
兼任講師	荒又秀夫	第一高等学校教授	1942 年 4 月 1 日就任	数学演習
兼任講師	亀谷俊司	東京女子高等師範学校教授	1942 年 4 月 1 日就任	数学演習
兼任講師	末綱恕一	東京帝国大学教授	1942 年 4 月 1 日就任	数学
兼任講師	菅原正巳	武蔵高等学校教授	1942 年 4 月 1 日就任	数学演習
兼任講師	岩沢健吉	東京帝国大学理学部嘱託	1942 年 10 月 1 日就任	数学演習

藤原工業大学の卒業生で, 高木の講義を聴講した者の証言は発見されていない. 大学創設者藤原銀次郎の伝記に, 理由に該当するものがある.

「*谷村學部長が藤原氏の意を體して行つた, いろいろの教育行政の中には, まことに奇抜な面白いものがある. それは數學の教授であつて, 機械, 電氣, 化學のあらゆる面にわたつて數學が基礎になることはわかつてゐても, 何分にもむづかしい學問なので基本的の智識に缺けて, そのまま將來自分が困る因となつてしまふのが多い. そこで谷村氏は世界的の數學者である高木貞治氏を迎へて來た. 直接に學生に教授して貰ふには餘りにも偉すぎる學者である. そこでまづ數學の教授はじめ大學の教授達が高木氏から教へを受け, その教へに従つて學生に教へるといふ間接方法を採用した. まことに奇抜なやり方であつて, 他の大學にも嘗て例のない方法に違ひないが, この谷村氏の方策は極めて効果的であり豫期以上の成果が納められた.*

藤原氏も教授達と一所になつて高木氏の講義を聞いて見た. そして一驚したことには, 他の先生の數學の講義をきいてもむづかしくて容易にわからぬのに, 數學の專門智識など持ち合せてゐない藤原氏にも高木氏の講義は實によくはつきりと頭に入ることであつた. むづかしい數學を素人にもわかるやうに説明し得る人は, 奥義に達した者でなければ出來ないことである. 何事によらず眞の達人となれば, 誰にもわかるやうに話の出來るもので, 誰にもわからぬやうなむづかしい事ばかり云ふのは未だ奥に達せざるものだと, 今更のやうに感じ入つたといふことである.

この高木先生の間接講義によつて藤原工大の數學講義法は一變した. 學生も數學を悦び樂んで聞くやうになり, 基本智識は深くなつて, 卒業生の一つの特長は英語と數學が群をぬいて優れてゐると云はれるやうになり得たのである. 藤原氏が學校創立の當初に抱いた方針は, まことに鮮やかに實現の日を迎へ得たのであつた」

藤原の伝記を敷衍すると, 藤原工大時代の講義は末綱が代行したということになる. 藤原は, 恐らくは高木の講義を受講した最高齢者(高木より 6 歳上)になる.

数学の人事は, 好感を持って迎えられた模様である. 当時の慶応義塾大学内科助手武見太郎(後年の日本医師会長)は以下の回想を残している.

「*工業大学ではあったが, 数学の高木貞治, 末綱恕一の一流数学者をもってあてられたことも基礎教育重視の証拠であって, 何とも嬉しいことであった. 高木, 末綱両教授に塾の数学教育を大学から幼稚舎迄一貫して指導をうけたら素晴しいとひそかに期待したが, これは実現されなかった*」

1944 年 8 月 5 日，財団法人藤原工業大学は解散して慶応義塾に寄付され，即日慶応義塾大学工学部となり，藤原工業大学予科は慶応義塾大学予科と改称された．高木の工業教育に於ける数学観は，工員や技師に高等数学普及教育を施す為に開設された日本数学錬成所に関係して披瀝された．

1943 年 3 月 23 日 15 時，大東亜会館で開催された近く開設される日本数学錬成所に関係する懇談会に，錬成所同人の高木他の数学関係者，物理学者田中館愛橘，軍関係の工場工員養成所・民間工場の技術関係者など二百名が出席したことについての朝日新聞のインタビューより．

「*高木貞治博士談　高等程度の數學を知ると否とが生産能率に非常に關係が深いことは言ふまでもないので，これが普及すれば一段と生産増強が達せられるといふことは色々な点から言へると思ひます．多數工員諸君の參加を期待してゐます*」

高木と工学の関係については，長女の娘婿で民間における選炭の権威者・三井鉱山技師黒田祝の証言が期待されるが，発見されていない．ただ，現場工員より工員を指導する技師クラスに対して数学教育したほうが，生産効率向上に有益なのは言うまでも無いことである．尤も，数多い工員が参加するならば，教官として多数の数学者も必要となるので，数学界には好都合ではある．少なくとも，Hilbert ならこういったコメントをすることを潔しとしなかっただろう．

1944 年 12 月 26 日，文部省は東京高等師範学校・東京女子高等師範学校・広島高等師範学校・金沢高等師範学校に特別科学教育班を設置し，特に優れた学生に科学教育を施すこととした．東京高等師範学校特別科学組第 1 期生の相山義道は，佐々木元太郎の誘いで高木の講演を傍聴したという．高木の講義を聴取した一番若い世代ということになるが，「内容理解不能」だったという．

1945 年 7 月末，大阪帝国大学数学科本部が豊郷村に疎開した．教官の木下佳壽の回想．

「*高木貞治先生が豊郷村へ来られたのはこの最中である．東大の様子等色々な話があって後正田研の連中を集めて(それは薄暗い部屋であった)，自然数の公理と簡単になし得ることを話された．私が東大在学中に高木先生は集合論の講義の後に自然数論に言及されたことがある．その後ずっと考え続けて居られたらしい．岩波から出版された「数の概念」に，豊郷村での高木先生の話が，まとめて書いてある．高木先生は正田先生の処へ三日ほど宿泊して帰られた．高木先生の顎髯の伸びていたのが妙に目についた*」

高木と 1957 年の数学教室誌インタビュー

国土社刊行の数学教室誌は，高木邸でインタビューを行っている．インタビュアーは金原和子・清水達雄・志村五郎・杉浦光夫である．志村はこのインタビューを以下のように書き，話題を呼んだ．

「*ここで少しさかのぼって高木貞治の印象を書く．一九五五年に欧米から何人かの数学者が来て学会があったがそのあと，日本人学者だけの夕食会があり，私は彼とは違うテーブルであったが近くにいて，彼が話をしているのを聞いた．何かありふれた冗談を面白そうにしていて，まあ凡庸な感じであった．そのしばらくあと，私達の仲間数人が彼の自宅に話を聞きに行った事があり，その記録は残されていると思うが，そこには記されていない点をここに注意しよう．彼は八十歳で耳が遠かったので，私達の言*

葉を彼の近親のある女性が彼に聞き易い声で言い直すのであった.

それより十五年ぐらい前, 彼がその頃の数学を「過渡期の数学」と呼んでいた文章があったので「あれはどういう意味か」と私は聞いてみた. 単に話題をさがしてそうしたに過ぎない. その女性を通してそれが伝えられると, 途端に彼は色をなして怒り声で何か言った. どう言ったか忘れたがいささかあきれた. 私が彼の声を聞いたのはその二回だけであったが, 大いに失望した. 後で彼は近親者にも嫌われていたと聞いた.

「君子は泰にして驕らず, 小人は驕りて泰ならず」と論語にあるが, 「驕りて泰なら」ざる実例を見せられてしまったのである.

これらの例から見て言えることは「十目の視る所, 十手の指さす所」というのはまったくその通りである. 衆人の一致した意見は, 人柄のよしあしに関する限りつねに正しいものである. しかしそれは学問的価値とか芸術的価値についてはむしろそうでない方が多い. 時間の要素も加わってくる. 「十目」の原文も単に道徳的な面について言っているのであって, その他の面は無関係である」

実際に書かれた記録は以下の通り.

志村 「*先生, 昔「過渡期の数学」というようなことを, ちらっときいたことがあるんですけれども. 大阪の講義ですか*」

高木 「*あれは, 30 年ごろだね. いまの抽象数学の起りかけたころね. あんなこと, でたらめで, 口からでまかせで(笑声). あれからもう 20 年だね*」

志村は, 高木が怒った部分をそのまま文章化できなかったインタビュアーがもっともらしく文章を書き換えた事, 金原が高木邸にいた記憶がないと 2015 年 9 月 7 日に証言している. 高木は, 1934 年 11 月 5 日に大阪大学・同年同月 24 日に大塚数学会講演会で「過渡期の數學」と題して講演しており, 1935 年に双方共に印刷されているのだが, 志村はこれらを見た訳ではないらしく, 従って「大阪での講義ですか」などと質問するはずがない, と主張している. これは尤もな議論で, 再版されなかった「過渡期の數學」について, 阪大での講義だと言えるだけの予備知識を志村が持っていたとすれば, 内容も通読していたであろうし, その場合, タイトルの意味を質問することは無かったはずである.

文章の書き換えを担当したのは, 志村によれば清水であったという. 清水から証言は得られなかったが, 近代日本数学史の知識がある清水ならばこの書き換えは可能である. 高木にインタビューを途中で切上げさせることなく, 何とか終らせることができた当時の清水の努力には敬意を払ってよいかもしれない. これもまた新数学者集団 SSS の一逸話である.

それはさておき, インタビュアーの書き換えによらないと推論される高木の発言を紹介する.

数学者の頭脳流出についての証言.

「このごろ日本人がたくさんアメリカへ行って, それを非常に慨歎してさ, この連中が, もう少し待遇をよくして日本にとどめなくちゃいかんて, 何か宣言書をかいたね. ぼくは反対でね. なるべくながくアメリカに行ったほうがいい.

あのとき一番はじめは中山君. 二番目は角谷っていうのね, 戦争でちょうど中断してね, 二度目に行ったんだけれも, お別れというわけで, ぼくは「とても生きているうちに会えないから, なるべくながく向こ

うにいらっしゃい」といったら,「そんなことありません」といって行ったけど, あれは向こうへ帰化しちゃったんだ, 角谷君ね. 向こうで結婚してさ. ぼくは帰ってこなくたってかまわないけど」

高木は文藝春秋誌上で「*日本の数學ということ自體, 滑稽である. 日本の数學, ドイツの数學, ソヴェトの数學と, 分けられる筈のあるものではあるまい. 藝術と同様, 科學にも, 國境がまたないのである*」と書いている. それ迄の数学の国際性に関する主張もひずみが無い. その見解を敷衍すると, エール大学教授となった角谷静夫が「*帰ってこなくたってかまわない*」と主張することは矛盾しない. 高木は角谷の背中を押したのである. 新数学者集団には, 日光シンポジウムで岩澤健吉に帰国を要請し, 結局拒絶された過去があるが, 岩澤の背中も高木は躊躇無く押したのではなかろうか.

小平邦彦が数学科卒業後に物理学科転科した件についての証言. 小平は 1957 年 11 月 3 日に文化勲章を受章したが, 履歴や論文リストを元に推薦状を執筆したのは高木である.

「*物理へいった. だから 2 年で済みましたね. あれなんぞは, 日本の規則が-----あんなの, ドイツ人なんかに話すと, ばかにするんだ. 学校みたいだといって. 学校というのは, 大学以下の, つまり義務教育の学校とか……. もしドイツだったら 3 年やっているうちに, 自分で勝手に選んで講義をきけるから, 大学もかってなところにゆけるから. 5 年かからなくても 3 年で出ちゃう. 小平なんか日本の規則で, はじめ3年で数学を卒業して, あとで物理を2年やった. こっちの流儀は, お前は一年だから何々をきけという. ちゃんときまっちまうから, それをきかざるをえないわけだ. 自分勝手で, これをよしてこれをきくというわけにいかない. だからどうしたって, 3年プラス2年ということになる. そんなのはシュールメーシッヒというてね, ドイツ人は非常にばかにする*」

小平は物理学科を 3 年で卒業しているが, 共通科目の微分積分学・微分方程式・幾何学などは数学科時代に単位取得済なので受講していない. 菅原正夫が高木に"小平に関する Weyl 宛推薦状"執筆を依頼した際にも, 高木は小平の履歴を閲読したはずだが記憶に定着しなかったらしい.

高木の一行日記

高木の没後, 日記が発見された. 実業之日本社社長増田義彦の記事は以下の通り.

「*その御葬儀は故人の遺志により何等の宗教的形式によらずに行なわれた. 本人なり遺族なりが信仰しているならよいが, 誰も信じていないのに, 坊さんや神主をよんだって意味ないじゃないかと, 生前からかたくいい渡されていたので遺族はそれを尊重したのだが, さて無宗教でということになると, はなはだ勝手が悪かったそうだ. 仏式や神式, あるいはキリスト教で行なうとすれば, すべて方式がきまっており, 葬儀屋が万事心得ている. いっさい葬儀屋まかせ, 前例通りでことがすむ. ところが無宗教となると, 葬儀屋はどうしてよいかわからず, 前例もあまりないから, なにからかにまで, 新しいやり方を自分で考えていかなければならない. それだけに人まかせにならず, 型ばかりにならず, 心のこもった御葬式ができるともいえよう. そのためばかりではあるまいが, 高木博士の御葬儀は, 御遺族とお弟子さん方の悲しみと愛情の中に, 実に清らかな真情あふるるものであった.*

高木博士の日記がまたかわっている. 博士が日記をつけていられるとは, 御家族も御存知なかったそうだが, なくなって一綴りの罫紙の日記がでてきた. 三十数行の横書きの便箋風大判罫紙に, 一日一行の日記が, 一頁に一ヶ月づつ, 昭和二十年四月, 本郷のお宅が空襲でやけた日から, なくなる二

週間ほどまえまで記されてあった」

この日記を本田教授以外が引用したことはなく，検証が待たれるところである．

参照文献

丹羽基二「姓氏」(秋田書店，1970. 7)，p. 193

[高木貞治：私と文學第三回，文學；vol. 21, no. 8, (1953. 8), pp. 865-868]

[高木貞治：数学教育の回顧，算数教育；vol. 1, no. 1, (1952. 4), pp. 2-3]

[金原和子，清水達雄，志村五郎，杉浦光夫：高木貞治先生にきく，数学教室；vol. 4, no. 1, (1958. 1), pp. 26-34]

大村喜吉「斎藤秀三郎伝　その生涯と業績」(吾妻書房，1960. 10)，p. 102

[x・y・z：數學者のプロフヰル　高木貞治博士，高數研究；vol. 1, no. 1, (1936. 10), pp. 54-55]

[吉江琢兒：數學漫語，文藝春秋；vol. 13, no. 7, (1935. 7), pp. 92-95]

[無署名：高木さんと汽車見物に　數學談話會の思出も懐しく　中川(理)教授停年祝賀會，帝國大學新聞；**658**, (1937. 2. 1), p. 11]

[高木貞治：若い世代へ五　捨てよ"空虚"な心　もつと批判的にならう，讀賣新聞朝刊；**22974**, (1941. 1. 6), p. 3]

羽賀与七郎「津軽英麿伝」(陸奥史談会，1965. 5)，p. 144

[道家達将：学者の年輪 4　寺沢寛一と日本の数理物理，自然；vol. 19, no. 10, (1964. 10), pp. 110-116]

田辺尚雄「青蛙選書 10　明治音楽物語」(青蛙房，1965. 9)，p. 258

池田芳郎：「大正から昭和の初期の物理学・数学の状況」，北大理学部五十年史編纂委員会編『北大理学部五十年史』．，(北海道大学理学部，1980. 9)，pp. 30-36 所載

[萩原雄祐，小尾信弥，小野周：天体物理学の歩みとともに，科学；vol. 35, no. 2, (1965), pp. 58-64]

萩原雄祐：「心かよわす世界の星々」，萩原雄祐他著『わが師・わが友　2』．，(みすず書房，1967. 12)，pp. 5-17 所載

山内恭彦「逸遊雑記」(岩波書店，1977. 6)，p. 240

山崎謙「変革と反逆の 77 年　山崎謙自伝」(第三書館，1979. 12)

日本統計学会編「日本の統計学五十年」(東京大学出版会，1983. 4)，pp. 7-8

[彌永昌吉他：座談会 「数物学会の分離と二つの科学」，日本物理学会誌；vol. 51, no. 1, (1996), pp. 26-36]

[穂刈四三二：私の学校遍歴(6)，蟻塔；**337**, (1986), pp18-19]

高橋秀俊「コンピューターへの道」(文藝春秋，1979. 9)，p. 24

[白井龜吉：國定算術書の批評並に算術教授法序論(一)，教育時論；**736**, (1905), pp. 9-10]

[無署名：停年教授を語る 『中學教師はやらんから教科書は書けん』 理學部　吉江琢兒教授，帝國大學新聞；**563**, (1935. 2. 18), p. 9]

中川銓吉：「教科書に着手する迄の思い出噺」，冨山房編『冨山房五十年』．，(冨山房，1936. 10)，pp.

224-225 所載
無署名：故理學博士坪井正五郎君記念資金募集廣告，人類學雜誌；vol. 29, no. 4, (1914), pp. 129-130
無署名：故理學博士坪井正五郎君記念資金募集第二回報告（自四月五日至五月十五日），人類學雜誌；vol. 29, no. 5, (1914), p. 165
萩原尊禮「UP 選書 225　地震学百年」（東京大学出版会，1982. 9），p. 52
[無署名：青木熊吉氏養老慰勞金募集，動物學雜誌；395, (1921. 9), 広告頁]
「古市公威」（故古市男爵記念事業會，1937. 7）
大久保達正監修「松方正義関係文書　第十三巻」（大東文化大学東洋研究所，1992. 3），p. 90
山崎直方：大禮參列日記，東洋學藝雜誌；vol. 32, no. 411, (1915. 12. 5), pp. 785-795
龜高德平「化學と人生」（寶文館，1926. 1）
日本学士院編「日本学士院八十年史　資料編二」（日本学士院，1962. 3）
[末綱恕一：高木先生の思い出，数学；vol. 12, no. 3, (1961. 1), pp. 131-132]
無署名：「世界に認められた数学者　高木貞治の理論の紹介者　ヘルムート・ハッセ　大正末期の高木貞治の弟子　吉田洋一　談」，牧野昇・竹内均監修　富田仁責任編集『日本の『創造力』　近代・現代を開花させた四七〇人　第 10 巻』（日本放送出版協会，1993. 6），pp. 314-316 所載
湯川秀樹・北川敏男共著「中公新書 250　物理の世界　数理の世界」（中央公論社，1971. 5），p. 46
[高木貞治：方程式ノ根ノ存在ノ「ワイヤストラス」ノ證明ニ就テ，東京數學物理學會報告；1, (1901), pp. 56-58]
[高木貞治：二次ノもーづるニ就テ，東京數學物理學會報告；1, (1901), pp. 102-103]
[高木貞治：誘導函數ヲ有セザル連續函數ノ簡單ナル例，東京數學物理學會報告；1, (1901), pp. 176-177]
[高木貞治：數學小引，東京數學物理學會報告；vol. 2, no. 6, (1903), pp. 25-29]
[高木貞治：轉倒ノ法則ニ就キテ，東京數學物理學會報告；vol. 2, no. 8, (1903), pp. 74-78]
大日本文明協會編「日本の科學界」（大日本文明協會事務所，1917），p. 322
柳澤健「回想の巴里」（酣燈社，1947. 10），pp. 22-24
彌永昌吉「若き日の思い出　数学者への道」（岩波書店，2005. 6），p. 96
[無署名：科學者も亦戰ふ　數學の神様，煙幕の辯　高木貞治博士，讀賣新聞朝刊；22593, (1939. 12. 18), p. 7]
寺田寅彦「寺田寅彦全集　第二十巻」（岩波書店，1998. 9）
寺田寅彦「寺田寅彦全集　第二十一巻」（岩波書店，1998. 10）
寺田寅彦「寺田寅彦全集　第二十二巻」（岩波書店，1998. 11）
寺田寅彦「寺田寅彦全集　第二十六巻」（岩波書店，1999. 4）
本田欣哉：「数学理論　類体論を創造した高木貞治」，牧野昇・竹内均監修　富田仁責任編集『日本の『創造力』　近代・現代を開花させた四七〇人　第 10 巻』（日本放送出版協会，1993. 6），pp. 303-313 所載

[無署名：カイゼル髯が流行の伯林の給仕さん　ドイツ土産も數多く理學部の竹内教授歸る，帝國大學新聞；195，(1927．1．31)，p．3]
中山忠直「漢方医學の新研究」(寶文館，1927)，p．388
[無署名：高木教授に名譽博士　アーベル氏の百年祭に，東京朝日新聞；15416，(1929．4．8)，p．7]
[古賀軍治：獨逸二大學の追憶，學習院時報；18，(1931．12)，pp．28-33]
[有山兼孝：物性論における一連の問題，物性研究；vol．29，no．2，(1977．11)，pp．53-68]
[澤瀉久孝：國語について感じたこと，國語國文；vol．5，no．8，(1935．5)，pp．99-118]
[無署名：平山，高木兩教授　近く萬國大會へ，帝國大學新聞；429，(1932．4．25)，p．2]
[無署名：安藤幸子女史等歸る，東京朝日新聞日刊；16742，(1932．12．4)，p．2]
[安藤幸：私の遭遇したさまざまの場合三　外遊の思い出，婦人之友；vol．46，no．6，(1952．6)，pp．42-45]
[無署名：新進數學者に次回から授賞　萬國數學協會總會から高木教授歸る，帝國大學新聞；459，(1932．12．19)，p．2]
西田幾多郎「西田幾多郎全集　第十九巻」(岩波書店，1953．7)
野上彌生子「野上彌生子全集第Ⅱ期　第十一巻」(岩波書店，1988．5)
野上彌生子「野上彌生子全集第Ⅱ期　第十二巻」(岩波書店，1988．7)
田邊元「數理の歴史主義的展開　數學基礎論覺書」(筑摩書房，1954．12)
[島雄元：田辺元資料の整理報告(2)，長岡工業高等専門学校研究紀要；vol．35，no．1，(1999．3)，pp．55-68]
[無署名：春を前に逝く　藤澤利喜太郎博士　わが數學界の先驅者，帝國大學新聞；507，(1934．1．1)，p．9]
[高木貞治：藤澤先生を憶ふ　附ポール・ハンルヴエ記，帝國大學新聞；510，(1934．1．22)，p．8]
[無署名：高校文科の數學をグット面白くする　高木，田邊博士等を講師に　授業法改革の講習，帝國大學新聞；604，(1935．12．16)，p．5]
[眞羅劫：「一般的教養としての數學」，圖書評論；19，(1937．2)，pp．11-14]
[無署名：七月，オスローに數學の國際協力　我國から藤原教授(東北大)を派遣　期待さる萬國數學大會，帝國大學新聞；609，(1936．1．27)，p．2]
[無署名：停年教授物語 8　數學の高峰を極む　ノートをとらぬ學生時代　理學部　高木貞治教授，帝國大學新聞；615，(1936．3．9)，p．2]
土井晩翠「雨の降る日は天氣が惡い」(大雄閣，1934．9)，pp．133-134
[無署名：學術交歡の魁け　世界的な數學者　佳話を持つて來訪，朝日新聞日刊；17884，(1936．1．30)，p．11]
天羽英二著　天羽英二日記・資料集刊行会編「天羽英二　日記・資料集第 3 巻(日記篇)」(天羽英二日記・資料集刊行会，1990．10)
野上彌生子「野上彌生子全集第Ⅱ期　第五巻」(岩波書店，1987．5)
[無署名：根氣強い日本の學生　三時間ブッ通しで聽講　ゼベリ博士から學生への言葉，帝國大學新

聞;**612**, (1936. 2. 17), p. 2]
[高木貞治:近く來朝のイタリーの數學者セヴエリ博士に就いて, 東京朝日新聞朝刊;**21173**(1936. 1. 18), p. 10]
[鍋島信太郎:せゔえり教授, 日本中等教育數學會雜誌;vol. 18, no. 3, (1936. 5), pp. 177-178]
柳沢健「伝記叢書 269 生きて来た道」(大空社, 1997. 9), pp. 180-181
[無署名:明治三十四年ニウトン祭の記, 東洋學藝雜誌;**244**, (1902. 2. 25), pp. 49-51]
[杉村欣次郎:國枝先生の思い出, 数学教育;vol. 8, no. 6, (1954), pp. 162-164]
[無署名:東北大學の理學部長 快活で敏腕の林博士と内定, 東京朝日新聞;**11857**, (1919. 6. 23), p. 5]
下平和夫「日本人の数学 和算」(河出書房新社, 1972. 1), pp. 180-181
森毅「国土新書 42 数学文化の教育と歴史」(国土社, 1971. 7)
[無署名:林鶴一博士 和算の權威者, 帝國大學新聞;**593**, (1935. 10. 7), p. 7]
[無署名:稀覯書の和算書現る 故林鶴一博士の教室から出た孝和著"關算四傳書", 帝國大學新聞;**600**, (1935. 11. 25), p. 6]
慶応義塾編「慶応義塾百年史 中巻(後)」(慶応義塾大学, 1964. 10), pp. 2411-2467
相山義道:「戦時下科学特別教育と科学組の思い出」, 佐々木元太郎・平川祐弘『特別科学組 もう一つの終戦秘話 東京高師附属中学の場合』(大修館書店, 1995), pp. 108-115 所載
下田將美「藤原銀次郎回顧八十年」(大日本雄辯會講談社, 1949. 12), pp. 220-221
[武見太郎:塾の再興者, 小泉信三全集月報;**5**, (1967. 8), pp. 92-94]
[無署名:數學で增産に協力 近く工員たちにも開く"數學道場", 朝日新聞日刊;**24175**, (1943. 3. 24), p. 3]
高木貞治:「Zur Axiomatic der ganzen und der reellen zahlen. 院紀 **21** (1945), 111-115」, 日本数学会科学技術史編集部編『科学技術史集書 数学の概観(1940～1949)』(日本学術振興会, 1951. 11), p. 2 所載
日本学士院編纂「日本学士院八十年史 資料編三」(日本学士院, 1963. 3)
小泉信三「小泉信三全集 第二十五巻上」(文藝春秋, 1972. 9), pp. 405-406
[田村茂:現代日本の百人, 文藝春秋;vol. 28, no. 2, (1950. 2), p. 7]
[高木貞治:講和に對する意見・批判・希望, 世界;**70**, (1951. 10), pp. 190-191]
[高木貞治:一數學者の回想, 文藝春秋;vol. 33, no. 21, (1955. 11), pp. 106-111]
木村佳壽:「正田先生の思い出」, 正田建次郎先生エッセイと思い出編纂委員会編『正田建次郎先生エッセイと思い出』(啓林館, 1978), pp. 520-522 所載
志村五郎「記憶の切絵図」(筑摩書房, 2008), pp. 168-169
[増田義彦:高木博士の一行日記, 実業之日本;vol. 63, no. 7, (1960. 4. 1), p. 15]

白紙ページ 1p 挿入

（ページ番号の記載は、必要ありません。）

注意）このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

On the cooperation of the 20th century mathematics and another topics.

TAKESHI KANO

Prologue

One of the reasons to write this paper, is an NHK's TV talk by Prof. S. YAMANAKA, who received the Nobel physiology prize because he found the I-S cell, where he said " Japanese scientists must be more international and shall extend to cooopeate with many foreign scientists. But unfortunately, almost Japanese scientists have no sufficient ability to speak and hear foreign language, especially English. This fact is the most weak point." I also realize this fact because since 1971 I visited many foreign countries e.g. Soviet Union (now Russia), China England, German, France and U.S.A. etc.. Through such experiences I learnd the true speaking - English was quite different from that of Japanese English. For an example, I first learned

the x^n, for an example. It reads as " x to the n".
These facts necessarily show the exclusive education of Japanese elementary level. I would like to indicate later such facts that come from ignorance and misunderstanding in most cases.

Chapter I

In this chapter, I introduce first the famous Book " The Scottish Book " (Mathematics from the Scottish Café) Edited by R. D. Mauldin, Birkhäuser, Boston. Basel. Stuttgart. 1981 in Birkhäuser Boston. The picture of the Café is still now situated near the University Lwów, Poland.

In "Anedotal History of the Scottish Book", S. Ulam says as following: Most of the problems are due to a few local mathematicians, myself included. Actually, many of the ealier problems originated well before 1935 — perhaps 6 a 7 years before — during the period when I was still a student. ..... I was then able to take part in the informal discussions — generally among two or three of us at a time — which were a standard feature of mathematical life in pre-World war II Lwów. .... ultimitely M. Kac made his appearance, and I lost my position to him, my jnior by some five years. The story of the Scottish Book could also be called the "Tale of Two Coffee Houses", the Café Roma and, right next to it, the Café Szkocka or Scottish Café. .... The meetings were usully held on Saturday in a seminar room at the University — hence close to the Cafés. The time could be either afternoon or evening. .... but the really fruitful discussinons took place at the Café Roma after the meeting was officically over.

such as Mazur, Orlicz et. cet..

8. (Mazur, prize: five small beers)

(a) Is every series summable by the first representable as a Cauchy product of two converging series? Or else, equivallentally,

(b) Can one find for each convergent sequences $\{z_n\}$ two convergent saquences $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ such that

$$z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} \quad ?$$

13. (Ulam) Let be the class of all subsets of the set of integers. Two subsets $K_1, K_2 \in E$ are called equivalent or $K_1 \equiv K_2$ if $K_1 - K_2$ and $K_2 - K_1$ are at most finite sets. There is given a function $F(K)$ defined for all $K \in E$; its range is contained in E and

$$F(K_1 + K_2) = F(K_1) + F(K_2)$$
$$F(\text{comp. } K) \equiv \text{comp. } F(K).$$

Question: Does there exist a function $f(x)$ (x and $f(x)$ natural integers) such that

$$f(K) \equiv F(K) \ ?$$

14. (Schauder, Mazur)

Let $f(x_1, \ldots, f_n)$ be a function defined in the cube K_n.

Let us suppose that f possees almost every-where all the partial derivatives up to the r th order and the derivatives up to the order $(r-1)$ are absolutely continnous on almost every straight line parallel to any axis.

All the partial derivatives (up to the order r) $\in L^p$, $p>1$.

Does there exist a sequence of polynomials $\{w_i\}$ which converge in the mean in the p th power to f and in all partial derivatives up to the order r? For $r=1$ this was settled positively by the authors. An analogous problem exists for domains other than K_n.

28. (Mazur; prize: Bottle of wine)

Let

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

be a series of terms and let us denote by R the set of all numbers a for which there exist's to a. Is it true that if the set R contains more than one number but not all nubers, then it

165. (Ulam; prize: two bottles of wine)

Let be a sequence of rational points in the n-dimentional unit sphere. The first N points $p_1, \ldots, p_N$ are transformed on N points (also located in the same sphere) $q_1, \ldots, q_N$ all different. We define a transformation on the points p_n, $n > N$, by induction as follows: Assume that the transformation is defined for all points p_ν $(\nu < n)$, and their images are all different. This mapping has a certain Lipschitz constant L_{n-1}. We denote the inverse mapping by L'_{n-1}. We define the mapping at the point p_n so that the sum of the constants $L_n + L'_n$ should be minimum. (In the case where we have several points satisfying this postulate we select one of them arbiturarily.)

Question: Is the sequence $\{L_n + L'_n\}$ - bounded ?

120 (Orlicz)

Let x^{n_j} be a sequence of powers with integer exponents ~~on the~~ in the interval (a, b) and

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} = +\infty$$

Give the order of approximation of a function satisfying a Hölder condition of polinomials;

$$\sum_{i=1}^{p} a_i x^{n_i} .$$

121 (Orlicz)

Given an example of a trigonometric series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

everywhere divergent and such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{2+\varepsilon} + b_n^{2+\varepsilon}) < +\infty$$

for any $\varepsilon > 0$.

151 (WAVRE: Prize: "fondue" in Genova")

Does there exist a harmonic function in a region which contains a cube in its interior, which vanishes on all the edges of the cube? One does not consider $f \equiv 0$.

COMMENT BY A. ZYGMUND

The origin and history of the Scottish Book is described by Prof. Ulam in his own lecture and I could not add much here.

The book is a product of one of the methematcal schools in Poland, that of Lwów, while I myself, born and educated in Warsaw, belonged to what was then known, both in Poland and abroad, as the Warsaw mathematical school.

There was a close collaboration between individuals of both schools, and though my personal contact with Lwów was rather loose, I was very much interested in the work going on my work.

. . . . . .

The school of Lwów is technically no longer in existence and its organ Studia Mathematica, began in 1932, is now being published
波文字
in Warsaw. But the influence of the work of its founders and their pupils continues and grows in various Polish mathematical centers. The names, of Banach, Steinhaus, Schauder, Kaczmarz, Auerbach, Ulam, Mazur, Orlicz, Nikliborc, Schreier, Ruziewicz, Kac, and others symbolize achievements of this school.

mathematical problem book entitled as

"Hungarian Problem Book"

which is based on the Eötvös Competitions,

1894 ~ 1905 (revised and edited by G. Hajós,

G. Neukomm, J. Surányi, originaly completed

by J. Kürschák : published by Random House

and The L. W. Singer Company ; New York, Syracuse.

copyright, 1963, by Yale University)

This book has a similar common property as

"The Scottish Book". Now I would like

to show the only small part of "Editors' Note",

then after that certain problems extended in

this book.

" The publication of distinguished problem collections

in the New Mathematical Library has been one of

the aims of the Monograph Project of the School

Mathematics Study Group from the begining.

We are grateful to Professors Hajós, Neukomm +

and Surányi.

(+ Prof. Neukomm died in 1957)

To conform to the design of the New Mathematical Library, we had to publish the contest problems from 1894 – 1928 in two volumes. If these turn out to be as useful as we hope, we shall probably publish the problems from 1929 to date as well. (author's comment: as far as I know, this was not realised)

The reader should be aware that this collection is far from routine. While the solutions require elementary mathematical techniques only, a great deal of ingenuity is often necessary. The main purpose of this collection is to instruct the reader by having him (or her; this word added by me) study the solutions prsented here together with some of the more sophisticated material in the explanatory notes. The reder should not feel that he (and she; this word also added by me) is being tested, but that he (and she; same reason) is being taught.

New York 1962

~~Values of x and y~~

<3> The lengths of the sides of a triangle from an arithmetic progression with diference d. The area of the triangle is t. Find the sides and the sides and angles of this triangle. Solve this problem for the case $d=1$ and $t=6$.

1895 Competition

<1> Prove that there are $2(2^{n-1}-1)$ ways of dealing n cards to two persons (The players may receive unequal numbers of cards)

1899 Competition

<1> Let x_1 and x_2 be the roots of the equation

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0.$$

Show that x_1^3 and x_2^3 are the roots of

$$y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$$

<2> Prove that, for any natural number n, the expression

$$A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$$

is divisible by 1897.

1901 Competion

<1> Prove that, for any positive integer n,

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n$$

is divisible by 5 if and only if n is not divisible by 4.

<2> Let a and b be two natural numbers whose greatest common divisor (g.c.d) is d. Prove that exactly d of the numbers

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (b-1)a,\ ba$$

are divible by b.

$x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$, there can be four different values of $z = \sin(\alpha+\beta)$.

(a) Set up a relation between x, y and z not involving trigonometric functions or radicals.

(b) Find those pairs of values (x, y) for which $z = \sin(\alpha+\beta)$ takes on fewer than four distinct values.

1905 Competition

<1> For given positive integers n and p, find necessary and sufficient conditions for the system of equations

$$x + py = n, \quad x + y = p^z$$

to have a solution (x, y, z) of positive integers. Prove also that there is at most one such solution.

Chapter III

As I have noted in the Prologue in this last chapter I want to show the difference between real English and Japanese-using-English. Also would like the difference between U.K. and U.S..

(1) <Japan> AM 10, PM10

<Emlish> 10 a.m. 10 p.m.

(2) <Japan> morning service (means break-fast at hotel)

<English> worship at a shrine

(3) <Japan> reform (means to change old parts, house interior et. cet.)

<English> renovation

(4.) <Japan> handle

<English> steering-wheel

(5) <Japan> cooler

<English> air-conditioner

(6) <Japan> repeater (means to visit fixed shop)

<English> criminal who does plurally

<U.K.> lift <U.S. and Japan> elevator

<U.K.> mobile phone <U.S.> cell phone

<U.K & E.U.> foot-ball

<U.S. & Japan> succer

白紙ページ 1p 挿入

(ページ番号の記載は、必要ありません。)

注意) このページは、原稿ではありません。

印刷しないでください。

264