Élie Cartan.
Leçons sur la Géometrie des Espaces de Riemann
読後感

東北大学大学院理学研究科　　島倉紀夫

本稿は, 2002年10月19日に津田塾大学で行われた「数学史シンポジウム」においてさせていただいた講演の記録である. 機会を与えてた下さった杉浦光夫先生, 笠原乾吉先生, 長岡一昭先生に厚く御礼申し上げたい. 古い数学用語についてはブルバキ:数学原論, リー群とリー環, 歴史覚えがき(杉浦光夫訳)(参考文献 [8]) を参照させていただいた. 私の理解の程度は幼稚で本稿にも間違いが沢山生じるに違いない. 皆様からご批判, ご叱正をいただければ誠に幸いである.

私がこの本を読んだ理由を述べる (読んだのは第二版 [1] である). 数年前から2階双曲型偏微分作用素の基本解の構成に関する J.Hadamard の理論を復習し始めた. Hadamard は時空の正規座標系を用いている. そこで様々な教科書をみると, Cartan の本書の第十章が正規座標系に充てられていることがわかった. しかし曲率テンソルの定義すらあやふやなので第十章の前に第七章を読まねばならなかった. ところが, 曲率テンソルの定義式 (第七章 n^o167,(7) 式) に添え字の誤植がある. 周辺をみても訂正できなかったので, 前へ前へと遡って本来の目的とは無関係な部分も読み, 遂には順不同ながら全部を読んだ. それから漸く気づいたことには, 僅か1頁ほど遡れば誤植は訂正できた筈だったのである. もしもすぐに訂正できていたならば, また丁度その箇所に誤植がなかったならば, 本書を読まずに終っていたであろう. 本書を初めて集中的に読んだのは1999年である. 30年前に読んでおけばよかったと後悔もしているが, 明確な動機もなく読み始めても長続きしなかったに違いない.

Élie Joseph Cartan は年譜によれば1869年に生まれ1951に亡くなった. その偉大さを語るには私がもう一度生まれ変って来なくてはならないので, 取り敢えず全集 [2] から数字を挙げてみる. 全集では Cartan の著書, 論文, 講演記録 (など啓蒙的な記事) すべてに一連番号をつけている. Comptes Rendus に載った短い論文も1篇, 370頁を超える本書も1篇と数えると総

数は 186 である (ただし, 同一の番号で *bis*, *ter* などの符号がついているものを各々区別すれば 193 となる). それを10年ごとに区切って示すと次のようになる.

1893(24 才)-1899(30 才)	14,
1900(31 才)-1909(40 才)	14,
1910(41 才)-1919(50 才)	23,
1920(51 才)-1929(60 才)	69(または70),
1930(61 才)-1939(70 才)	49(または55),
1940(71 才)-1947(78 才)	17.

このうち, J.A.Schouten との共著論文が2篇, 子息 H.Cartan との共著論文が1篇あるほかはすべて単著である. なお, 本書 (2^e édition) には他の人の手が加わった形跡がある (n^o246, n^o251). また, 講義録 [3] をまとめたのは J.Leray である. Leray がその講義を聴いたのは25才の頃と思われるが, 至るところ定義のすぐ後に適切な例が挙げてある.「Leray 氏のお蔭で私の理論がより accessibles になった」と Cartan が序文に書いている.

伝記 [7] によれば第一次世界大戦に応召したようである. その後の50才台に著作の数が爆発的に増えている. 1923年にアフィン接続の一般論を発表し, 1926 年頃から対称空間を定義し始めた. 本書の初版も 1925-1926 年度の講義録である. しかし突如として業績が増えたのではなく, それまでに蓄積した沢山の結果を包括する理論をこの時期に次々と築いたのであろう. 50才台の著書や論文の数を現代の我が国に当てはめるのは適当でないとしても, 到底まねのできない業績である.

本書は現代の教科書とはかなり違っている. たとえば, 1920 年代には de Rham の理論はまだなかった. 位相空間の様々な概念はまだ一般的ではなかったようである. 他方, 当時の学生は射影幾何学をよく知っていたことが窺われる. 1967年頃にフランス人から聞いたところでは, その当時でも学部学生は微分積分学と函数論をしっかり教わり, 代数学や幾何学は大学院で学んでいたようである. ともかく, 本書のもとになった講義は1920年代には非常に高度であったと思われる. 聴衆の反応はどうだったのか, 可能ならば知りたいところである.

歴史的にみた微分幾何学の構成要素は何と何であろうか. 主な要素を本

書に出て来る順に挙げると, 数理物理学, 曲線と曲面の理論, 射影幾何学, および連続群論の四つであると私は考える. ともかく, 本書の順序に従って読後感を書かせていただくことにする.

第一章　デカルト座標, ベクトル, 多重ベクトル, テンソル

最初の章は線形代数である. 自由ベクトル (vecteurs libres), 束縛ベクトル (vecteurs appliqués), ずらしベクトル (vecteurs glissants) など, 現代では使われない用語を定義せずに用いている. 当時は誰しも知っていたのであろうか. 多重ベクトルとは Grassmann 代数のことである. 多重ベクトルにせよテンソルにせよ, 各々の概念とか演算の幾何学的意味を丁寧に解説している. とくに, 計量幾何学では反変ベクトルと共変ベクトルが別々にあるのではなく, まずベクトルがあって, 反変成分と共変成分はその二通りの表現法なのだ, という考え方が印象的であった.

第二章　Euclid 空間における曲線座標

最初に, 1 つの曲線座標系 (局所座標系) を用いて定義した自然標構から不完全ながら構造方程式の原形を導く. それが解ければ Euclid 空間を局所的に再構成することができる. 積分可能条件は曲率テンソル (まだその言葉は用いない) のすべての成分が恒等的に 0 という条件である. こうして, 与えられた基本形式 ds^2 が Euclid 空間の平坦な線要素であるためには, 曲率テンソルのすべての成分が恒等的に 0 なことが必要かつ十分である, という定理が導かれる. この章ですでにベクトルとテンソルの絶対微分 (共変微分) が定義されている.

本書では,「Riemann 空間上の 1 点 M とそれに無限に近い点 M' があるとき」という書き出しで, 大抵の議論はいきなり本格的に始まるのである. しかし不思議なことに読者はこの書き出しのお蔭で直ちに Riemann 空間に没入することができる. Riemann 空間を表わす文字すら例外的にしか設けていない. 現代の教科書では沢山の記号を周到に準備するので, 読者は本論に入る前にくたびれてしまうことも屡である. しかしこの時代には記号が未発達で, 素朴で, 少なかった. 記号の少ないことが初学者にとって本書を大変読みやすくしている.

ところで, 上の「　」の内容は力学で教わった無限小仮想変位と全く同じである. 本書では繰り返し繰り返し無限小仮想変位に立ち返って説きお

こす．この章の最も重要な思想は,「空間の幾何学的性質はすべてその空間の線要素によって言い尽くされている」という計量幾何学の基本定理であろう (n^o30)．この定理が,「ある系の力学的に重要な性質はその運動エネルギーの解析的表現式の中に言い尽くされている」という解析力学の基本定理の特別な場合であると Cartan は言っている (n^o38)．従って, 数理物理学は微分幾何学の歴史的構成要素の一つだったことが分かる．

第三章　局所 Euclid 的 Riemann 空間

「多様体の一般的概念を明解に定義することはかなり難しいが, 曲面を考えると 2 次元多様体というものが大まかにはわかる」, という文章で始まり, 開多様体, 閉多様体の区別を述べたあとで, 位置の解析学 (analysis situs) と微分幾何学の違いを解説している．まず, 局所 Euclid 的正規 Riemann 空間を Euclid 空間に展開すると展開像は Euclid 空間全体をただ一回覆う, という定理を証明する．次に離散的なホロノミー群を定義しそれを用いて基本多面体を構成する．とくに 2 次元の局所 Euclid 的正規 Riemann 空間をすべて決定している．それはホロノミー群の分類の問題である．

そのほかに, 局所 Euclid 空間 (たとえば平坦トーラス) の中の図形を剛体として運動させることができるか, という愉快な問題も論じている．昔の人の発想は何と自由だったことか．図形が n^o66 の方法で作った基本多面体 1 個に収まる程度の大きさならば局所 Euclid 空間の中で回転させることができる, というのが答えである (n^o78)．

第四章　Riemann 空間, 接 Euclid 空間, 接触 Euclid 空間

本書において多様体上の「ベクトル」とは現代用語の接ベクトルのことである．それはどのような概念だったのであろうか．論文 [5] において Cartan は変換群を多様体 $\mathcal{E}$ とみなして群空間 (espace du groupe) と呼び, その幾何学を展開した．その冒頭において, 群の 2 点 $(a), (b)$ を任意にとり (a) を基点, (b) を終点と呼び, その対を $\vec{ab}$ で表わしてこれをベクトルと定義した．定義には脚注がついている．

「微分幾何学, とくにアフィン接続をもった空間 (Riemann 空間, Weyl 空間など) の理論におけるベクトルとは, 1 点 (基点) に付随し r (空間の次元) 個の成分をもつ幾何学的量として解析的に定義されるものであって, ベクトルという用語の意味が本論文とは異なる．しかし, 以下の議論において

この言葉に両方の意味をもたせても混乱は起きない筈である．何故なら，空間 $\mathcal{E}$ にアフィン接続を導入して点 (b) を点 (a) の十分小さな近傍にとったとき，(本論文の意味の) ベクトル $\vec{ab}$ は，(a) を基点とし 2 点 $(a),(b)$ を通る測地線に (a) で接し測地線弧 ab に等しい長さをもった (微分幾何学の意味の) ベクトルと同一視してよい．2 点 $(a),(b)$ が無限に近いならばどちらも同じ意味になるからである.」

なお，群空間における測地線とは1-パラメータ部分群で変換して得られる点の軌道のことで，計量はなくても定義できる．この論文の意味ではベクトル同士の和が定義できないから，ベクトルの集合はベクトル空間をなしていない．しかし，Cartan ばかりでなく多くの幾何学者にとってベクトルの幾何学的実体とはこのようなものだったのだろうか．

Riemann 空間の点 M を基点とするベクトル $\mathbf{x}$ と，別な点 M' を基点とするベクトル $\mathbf{x}'$ の長さと向きが同じ (équipollents, 等値) なことを如何に定義するか．これが局所理論の根本的問題だったようである．長さはともかく「方向が同じ」ということの定義は決して簡単ではない．それが Levi-Civita の平行性 (parallélisme) の概念である．まず，M' が M に無限に近いときには，$\mathbf{x}$ の絶対微分が 0 となるように M から M' まで移動させる．これが無限小等値移動である．M' が M の無限小近傍にないときは 2 点を結ぶ曲線 C を 1 本とり，C に沿って無限小等値移動を繰り返す．これが曲線 C に沿う等値移動 (平行性による移動) である．

本書の随所で「展開」という手法が用いられている．現代の教科書からは消えてしまったこの手法を初めて知ってとても新鮮に感じた．曲線 C に沿って $\mathbf{x}$ を等値移動させた結果 $\mathbf{x}'$ が得られるための必要十分条件は，C に沿う接続 Euclid 空間の上にこの Riemann 空間 (C の無限小近傍) を展開したとき，$\mathbf{x}$ の像と $\mathbf{x}'$ の像が接続 Euclid 空間の中で通常の意味で等値なことである ($n^o 92$)．とくに，C が測地線であるための必要十分条件は C の展開像が直線となることである ($n^o 94$)．「展開」は数理物理学的で分かり易い．第六章第 VIII 節には Riemann 空間を球面空間とか双曲空間の上に展開する議論も出てくる．

この章ではまた，3 次元 Euclid 空間における曲線論と曲面論を 3 次元 Riemann 空間の中にそのまま拡張して見せている．曲線論における接線，

主法線, 従法線からなる3つの方向ベクトル, また, 曲面論における2本の曲率線と法線からなる3つの方向ベクトルは, 何れも動標構の先駆けであろう. 従って, 曲線論と曲面論は言うまでもなく微分幾何学の歴史的構成要素の一つである.

第五章　測地的曲面, 平面の公理 および 自由運動の公理

n^o108 の「平面の公理」の叙述を引用すると,

Par tout point de l'espace et tangentiellement à tout élément plan ayant ce point pour origine il passe une surface totalement géodésique, c'est-à-dire telle que toute géodésique qui y a deux de ses points y est contenue tout entière.

(空間の任意の点を通りその点を原点とする任意の面分に接するような全測地的曲面が存在する, つまり, その曲面の2点を通る測地線はすべて完全にその曲面に含まれる, という性質をもった曲面が存在する.)

他方, n 次元 Riemann 空間が自由運動の公理をみたすとは, その空間の合同変換群の次元が最大, つまり n 次元 Euclid 空間の合同変換群の次元 $(n^2+n)/2$ に等しいことである. 平面の公理は自由運動の公理と同値で, それはさらに Euclid 空間の上へ測地的に表現されることとも同値であることを, この章の最後に射影幾何学を用いて証明している. また, 平面の公理をみたす空間の計量は Euclid 空間の計量, 球面の計量および双曲空間の計量の三種類しかないことを第六章の最後に証明している.

それにしても, 上に引用した文章は非常によく工夫されている. 第一に, 文章を短くするために「全測地的曲面」という言葉を真中にもってきている. 第二に,「つまり」からあとは定義の復習に過ぎないのだが, この復習のお蔭で読者は以前の頁をめくらなくても済む. Cartan の別な論文でも全測地的曲面を論じるときには殆ど同じ文章がでてくる. 練りに練った表現なのであろう. 数学的な内容は繰り返しを厭わず何度でも正確に述べるのが Cartan の文体の特色である. そのため, 文章が長いので閉口したが, 実はこれ以上は短くできないほど密度の高い文章表現なのである.

定義とか定理にはなるべく記号や式を用いず, すべてを文章で表現することが, Cartan に限らず昔の本の通例だったようである. その文章を読めば読者は直ちに頭の中に図を描くことができる. その文章を記憶すれば定

義または定理の数学的内容を完全に記憶したことになる. 数学的内容を記号で理解するよりは言葉で理解する方が確実である.

第六章　非 Euclid 空間, 球面空間, 楕円空間 および 双曲空間

この章は本書の前半のクライマックスといっても過言ではない. 楕円空間とは射影空間のことで線要素は球面空間と同じである. 非 Euclid 空間 (つまり定曲率空間) に一章を設けている教科書は沢山あるが, 射影幾何学における絶対形に関する極と極線の関係を無限小的に用いるという方法で線要素を導入していることが, 大変大きな特色である. 線要素の表現式を何種類も導いて各々の由来を説明している. 第 VII 節には, n 次元 Euclid 空間の共形変換群は $n+1$ 次元射影空間において特別な 2 次形式を不変にする射影変換の群とみなすことができる, という Cartan 自身の結果を説明している. 第 VIII 節には, 奇数次元射影空間は向きづけ可能, 偶数次元射影空間は向きづけ不可能なことを証明している.

学生のとき 1 年かけて教わった射影幾何学をもう忘れているので私は面食らった. 現代ではこれを教える大学はもうなくなったが, 19 世紀末から 20 世紀初頭にかけて射影幾何学は最も斬新な幾何学だったのかも知れない. だとすれば, それを有効に用いて微分幾何学を Klein 幾何学の延長上に位置づけることは, 大変説得力があったに違いない. 有名な平行線の公理との関係も丁寧に説明している. 他方, 非 Euclid 空間はまた最も基本的な Riemann 空間でもある. 初等幾何学と微分幾何学との接点を最もよく説明するのが射影幾何学であるというのが Cartan の思想なのであろう. 射影幾何学は疑いもなく微分幾何学の歴史的構成要素の一つであった.

本書から強く印象づけられたことの一つは, Euclid 空間, 球面空間, 双曲空間は全く同等の重要性をもつ三つの空間なのだということである. これら三つの空間は自由運動の公理をみたすから他の空間とは別格である. Riemann 空間は単に Euclid 空間の一般化なのではなく, これら三つの空間の一般化なのである. 本書の基礎的理論の多くはこれら三つの空間にはきちんと適用できて整った結果が得られている.

これを応用すると, Euclid 空間の上の偏微分方程式に関する理論を Riemann 空間の上の偏微分方程式に一般化しようとする場合, まず球面と双曲空間の上に拡張し, これら三つの空間の理論に統一的な説明が可能か否

かを考察する，という考え方はひとつの研究指針になりうる．もとより万能の指針ではないが，たとえば，Euclid 空間の上の波動方程式，球面の上の特別な波動方程式，双曲空間の上の特別な波動方程式，の三つは共形ゲージ変換を行えば一方から他方に移り得る (P.Günther の結果である)．函数解析的な変数分離法のほかに，幾何学を用いた解法も可能なのである．

第七章　Riemann の曲率

Riemann 空間の1点 O を1つの頂点として，座標空間における無限小平行四辺形の像となる向きをもつ2次元無限小領域のことを O を基点とする面分と呼び，その向きをもつ境界のことを基本周回路と呼ぶ．O から出発し基本周回路を一周して O に戻ったとき，点にはずれは生じないが座標ベクトルにはずれが生じる．この座標ベクトルのずれが空間の曲率である．最初は大変難しく感じられたが，connexion という言葉は用いずにアフィン接続の特別な場合として Levi-Civita 接続を解説しているのである．

Riemann の曲率とは断面曲率のことである．1点におけるあらゆる面分の断面曲率が既知であればその点における曲率テンソルのすべての成分が定まる．この章には，球面三角形の内角に関する Gauss の定理，その拡張である Gauss-Bonnet の定理も導いてある．さらに，断面曲率が定数の空間は局所楕円空間，局所双曲空間，局所 Euclid 空間の三種類しかないことを，射影幾何学と構造方程式を用いて証明している．この章に少し説明を補えば3年生向けの講義になりそうである．

第八章　Bianchi の恒等式

外微分，絶対外微分，テンソル微分形式の概念を説明した後，Bianchi の第二恒等式を述べる．この恒等式は，計算の上では曲率形式の絶対外微分が 0 となることを表わす．幾何学的には，Riemann 空間に任意に無限小の3次元領域を描くと，それを取り囲む2次元面分に付随した断面曲率を表わす2-ベクトルの幾何学的総和が 0 である，という意味である (n^o191)．これをさらにベクトル値曲率の概念に拡張している．私は Bianchi の第二恒等式の幾何学的意味を本書で初めて学んだ．

本書の特色の一つは，重要な定理は二通り以上の方法で証明していることである．多くの場合，まず計算によって証明し，次に幾何学的な別証明を述べている．さらに後の章に第三の証明が載っている場合もある．

第九章　動標構の方法, Riemann 空間に埋め込まれた多様体

この章でいよいよ Riemann 空間の構造方程式を動標構を用いて記述する．構造方程式という言葉は $n^o 202$ に初めて出てくる．動標構は原点 M と 1 次独立なベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ からなる．原点の変位を

$$dM = \omega^i \mathbf{e}_i$$

とすると ω^i は 1 次微分形式である．このとき線要素は $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$, ただし, $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ である．$\mathbf{e}_i$ の絶対外微分を

$$D\mathbf{e}_i = \omega_i{}^k \mathbf{e}_k$$

($\omega_i{}^j$ も 1 次微分形式) とすると, この Riemann 空間の構造方程式は

$$\begin{cases} d\omega^i - \omega^k \wedge \omega_k{}^i = 0\,, \\ d\omega_i{}^j - \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^j = (1/2) R_i{}^j{}_{kh}\, \omega^k \wedge \omega^h \end{cases}$$

となる．Riemann 空間より一般な空間ならば第一式の左辺が 0 とは異なり, 空間の捩じれを定義する．第二式は空間の曲率を定義する．様々な空間を区別する最も重要な要素は「捩じれ」(torsion) と「曲率」(courbure) であるというのが論文 [4],[5] の立場である．著書 [3] の冒頭には動座標直角三面体 (trièdre trirectangle mobile) の式がある．動標構の説明から始めるのが Cartan の講義の一つの定型だったのかも知れない．

最初には, どの頁とどの頁の $\omega^i, \omega_i{}^j$ が同じなのかが私には分からなかった．著者は第二章では局所座標に全面的に依存した自然標構を用い, 章が進むにつれて局所座標を少しずつぼかし, この章で完全に動標構に乗り換えている．自然標構の場合は $\mathbf{e}_i = \partial M/\partial u^i$ (座標ベクトル), $\omega^i = du^i$ であり, $\omega_i{}^j = \Gamma_i{}^j{}_k du^k$ と表わせば $\Gamma_i{}^j{}_k$ は Christoffel の記号, $R_i{}^j{}_{kh}$ は Riemann-Christoffel のテンソルである．構造方程式が出てくると私はいつも自動的に思考停止に陥っていた．座標三面体を記憶しておけば少しは増しだったかも知れないと反省している．

本書のここから先には構造方程式が何度となく出て来る．構造方程式は Riemann 空間を, それを含むもっと大きな空間 (espace ambiant) の助けを借りずに, 直接的に定義する方法の一つである．大雑把にまとめると局所的には次のようになるであろう．

1°　1組みの構造方程式が1つの空間を定義する.

2°　1組みの構造方程式は, 点が無限小変位したときに各点において生じる標構の連続的な変化の積分可能な法則を記述する.

3°　各点において標構が連続的に変化する積分可能な法則を1つ指定すれば, 1つの空間が定義されたことになる.

積分可能とは自己完結的という意味である.「Cartan の構造方程式」と呼ばれるものがどこからどこまでを指すのか私には分からないが, これは Cartan 以前にはなかった思想なのであろう.

この章では動標構の方法を部分多様体の理論に応用する. n 次元 Riemann 空間に p 次元部分多様体 V が埋め込まれているとすると, V の各点 M において $\mathbf{e}_1$ から $\mathbf{e}_p$ までを V の曲率線の方向に, $\mathbf{e}_{p+1}$ から $\mathbf{e}_n$ までを V に直交する方向にとる. そうすると n 次元 Riemann 空間の構造と p 次元 Riemann 空間としての V の構造との関係を述べるのに好都合で, $n-p$ 個の第2基本形式 $-D\mathbf{e}_\alpha \cdot dM$ $(\alpha=p+1,\cdots,n)$ を定義することができる.

第十章　Riemann の正規座標

Riemann 空間の1点 O を原点とする1つの正規座標系 $x^1, x^2,\cdots,x^n$ をとって O における標構 (R_O) を定めておく. O の近傍の各点 M には, 測地線 OM に沿う平行性によって (R_O) を移動して得られる標構 (R_M) を付随させる. これが動標構の一つの構成法で, $\{(R_M)\}$ のことをこの正規座標系に適合した標構族と呼ぶ. この標構族を用いて Riemann 空間の構造方程式を書き表わす.

構造方程式は全微分型の偏微分方程式であるから, これを解くことは連立常微分方程式に対する初期値問題に帰着する. 測地線上のアフィン·パラメータ t を独立変数にとり, 正規座標を別なパラメータとみなすのである. 解法は第II節 n^o216, n^o217 にあり, 現代の多くの教科書はこの解法を記号もろとも踏襲している. すなわち, $x^1, x^2,\cdots,x^n$ の代りに1個余分な変数 $t, a^1, a^2,\cdots,a^n$ をとって $x^i=t\,a^i$,

$$\omega^i=a^i dt+\varpi^i(t,a;da)\,,\quad \omega_i{}^j=\varpi_i{}^j(t,a;da)$$

とおき, $\varpi^i(t,a;da), \varpi_i{}^j(t,a;da)$ は dt を含まず $t=0$ では 0 と仮定する. すると, 構造方程式から $\varpi_i{}^j(t,a;da)$ を消去することができて, $\varpi^i(t,a;da)$

を未知の形式とする次の初期値問題に帰着する.

$$\frac{\partial^2\varpi^i}{\partial t^2}=R_{kihj}(t\,a)a^ka^h\varpi^j\,,\quad \varpi^i(0,a;da)=0\,,\quad \frac{\partial\varpi^i}{\partial t}(0,a;da)=da^i\,.$$

これを解いて最後に $t=1, a^i=x^i, dt=0, da^i=dx^i$ とおけば ω^i が得られ,構造方程式が解けたことになる.

O の近傍の各点 M では線要素が $ds^2=\sum(\omega^i)^2$ と表わされ, 計量テンソルの成分 $g_{ij}(x)$ は $\sum(\omega^i)^2$ を dx^i の2次形式として表わしたときの係数である. そして, 上記の常微分方程式の係数は曲率テンソルだけに依存するから, Cartan の定理と呼ばれる次の定理が得られる.

「定理　同じ次元 n の2つの Riemann 空間 E, E' があり, 各々の規準となる直交系の標構 $(R_O), (R_{O'})$ から各々の正規座標が定義されているとする. このとき, 各々の正規座標に適合する標構族に関して, もしも E と E' の Riemann-Christoffel のテンソルの諸成分が正規座標の函数として同じ形ならば, 2つの空間は互いに等長である」(n^o218).

Cartan は ω^j を x に関して展開して g_{ij} の3次までの近似式を導いた(n^o226). とくに2次までの展開式から, 測地三角形の内角, Levi-Civita の擬平行四辺形 (parallélogramoïde) の辺の長さ, 測地球の体積などの近似式を求めている. 2次までの近似ならばどの式においても Euclid 空間との差を測る唯一の量が断面曲率である.

なお, 対称空間の構造方程式の解法は第十一章第II節に, また合同変換群が単純推移的に作用する空間の群に適合した動標構で表わした構造方程式の解法は第十二章第V節にそれぞれ示されている(第十二章においては1-パラメータ部分群のパラメータを独立変数にとる). 対称空間とか Lie 群とかは実解析的多様体であるという定理 (n^o243, n^o267) の証明を私は本書で漸く理解した.

この章の感想が長くなるが, 私の現在の研究領域と関係する事柄なのでお許しいただきたい. 本稿の最初に述べた Hadamard の基本解の理論においては計量テンソルの高次の展開式が重要である. 展開が可能だというだけではなく, 展開式の各項の係数を曲率テンソルとその共変微分の座標原点における値で書下した式が必要である. P.Günther が 1975 年にそれを完成させた ([9]). ご参考までに6次までの展開式を書いておく

$$g_{jk}(x)=\delta_{jk}+\frac{1}{3}x^ax^bR_{jakb}+\frac{1}{6}x^ax^bx^cR_{jakb|c}+\frac{1}{180}x^ax^bx^cx^d(9R_{jakb|cd}+8R_{jalc}R_{ldkb})$$
$$+\frac{1}{90}x^ax^bx^cx^dx^e(R_{jakb|cde}+2R_{jalc}R_{lekb|d}+2R_{jald|c}R_{lekb})$$
$$+\frac{1}{7!}x^ax^bx^cx^dx^ex^f(10R_{jakb|cdef}+34R_{jale|cd}R_{lfkb}+34R_{jale}R_{lfkb|cd}$$
$$+55R_{jale|c}R_{lfkb|d}+16R_{jalc}R_{ldme}R_{mfkb})+\cdots .$$

ここで, $R_{jakb}, R_{jakb|c}$ などはその原点における値である.

高次の近似式が得られるまでに年月を要したのは何故であろうか. どこが難しかったのか. 本当の理由は分からないが私の推理を述べたい. 上記の初期値問題は n 次行列 $U(t)$ を未知函数とする

$$U''(t)=S(t)U(t), \quad U(0)=O, \quad U'(0)=I$$

という何の変哲もない初期値問題である. $S(t)$ の Taylor 級数から $U(t)$ の Taylor 級数が一意的に定まることは常微分方程式の一般論によって明らかである. しかし, 初めの幾つかの項を計算してみても係数の一般項の法則がすぐには分からず, 大抵の人は法則を見出すのを諦めた, というのが第一の理由であろう. 第二の理由は, 法則を見出すには実は一寸した工夫が必要だったのである. $S(t)$ と $U(t)$ の展開式の係数を

$$S_2+t\,S_3+t^2S_4+\cdots, \qquad t\,U_0+t^2U_1+t^3U_2+\cdots$$

のように番号づけすれば, 4次くらいまで計算すると法則が見えてくる. これが Günther の秘訣であろう. 法則は次のようになる.

まず, $U_0=I, U_1=O, m\geq 2$ ならば

$$U_m=\sum_{h=1}^{[m/2]}\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_h=m}\left\{\prod_{j=1}^{h}\frac{1}{(\sum_{p=1}^{j}r_p)^2+\sum_{p=1}^{j}r_p}\right\}S_{r_h}\cdots S_{r_2}S_{r_1}.$$

$r\geq 2$ のとき, 行列 S_r の (j,k)-要素は

$$a^{p_1}a^{p_2}\cdots a^{p_r}R_{p_1jp_2k|p_3\cdots p_r}(0)/(r-2)!$$

に等しい. 意外なことに, $S_2, S_3, S_4, \cdots$ が互いに可換であると仮定して同類項をまとめると反って法則が掴みにくい. 上の結果を各々の U_m に代入して $U(t)$ を作り, ${}^tU(1)U(1)$ の (j,k)-要素に $a=x$ を代入すれば $g_{jk}(x)$ の

冪級数展開式が得られる．なお，正規座標系では原点から出る測地線が直線となるから，$R_{jkrs}(ta)$ の t による逐次導函数は R_{jkrs} の逐次共変微分を用いて表わされる (n^o219)．しかし，$g_{jk}(x)$ の逐次共変微分はすべて 0 だから $g_{jk}(x)$ の逐次偏導函数は逐次共変微分ではない．結局，$g_{jk}(x)$ の冪級数展開式の各々の斉次部分は，任意の座標変換で不変なのではなく，原点が共通な正規座標同士の変換 (直交変換) で不変なだけである．

Günther は法則を是非とも見出したかったのであろう．そのためには時間もかけたに違いない．この挿話は，数学の問題において解の存在を証明することと解を書き下すこととの間には大きな落差があることを改めて示している．上の公式を拠り所として Günther は Huygens の原理の研究を飛躍的に発展させた．2 階常微分方程式に関する上の公式はその副産物で，数学のどんな問題にでも応用できる．Günther はドイツ民主共和国 (東ドイツ) の数学者で論文 [9] もその国の雑誌に掲載された．ところが，1990 年以降に西欧で出版された教科書は $g_{jk}(x)$ の冪級数展開式にかなりの頁を割いているのに一般的法則には到達してはいない．著者のもどかしさが読者にも伝わってくる．論文 [9] を知らなかったようである．

第十一章　対称変換 と 平行移動，対称空間

対称空間は Schouten との共著論文を発展させて Cartan 自身が建設した理論である．まず，局所的な対称変換を定義し，対称性を用いたベクトルの無限小移動を述べ，これが平行性による移動と一致することを示す．さらに，正規座標系に適合する動標構を用いて表わした曲率テンソルが平行移動によって変わらない，つまり曲率テンソルの微分テンソルが 0 であることを示す．そこまでが計算も含めて僅か 4 頁足らずという鮮やかさである．さらに，対称空間に作用する合同変換群の次元の求め方を述べ，最後に，既約な対称空間は第二種定曲率空間であることを証明している．この章は非常に短いが，まことに珠玉の章である．初学者にとってこのように簡潔な解説は誠にありがたい．ここから後はこの時代には発展途上の理論だったのであろう．計量テンソルの冪級数展開式は対称空間の場合にはすこぶる簡単になる．実際，$S(t)$ は t に依存しない行列になるからである．

なお，[6] を読めば 1932 年頃までに Cartan 自身が対称空間の理論をどこまで発展させたのかを知ることができる．たとえば，アフィン空間は対称

空間ではあるが Riemann 空間ではないことを最初に述べている．講演記録に相応しく始めは非常に初等的で予備知識がなくても読める．しかし，途中から急に難しくなる．

第十二章　Riemann 空間における合同変換の群

変換群の幾何学的研究こそは Cartan の研究の出発点である．この章の主題は Riemann 空間における合同変換群 (合同変換全部からなる群) およびその部分群である．合同変換とは点を点に写し線要素と向きを変えない写像のことである．合同変換のなす群はもっと前の第五章，第六章などにも論じられていて本書の一つの根幹をなしている．変換群の理論は Cartan によって微分幾何学の歴史的構成要素の一つになった訳である．

偏微分方程式の研究者にとって，この章の理論は決して別世界の話しではない．何故ならば，線形方程式の研究においても非線形方程式の研究においても，少数の変数しか含まない特殊解は重要で，変換群の理論はどのような方程式にどのような変数分離法が可能かを組織的に考察するのに役立つからである．本書は言わば演習問題つき解答つきの教科書である．

変換群の作用で得られる軌道 Γ, Γ 上の定点 O および O における標構 (R_O) を 1 つとり，(R_O) にその群を作用させて得られるすべての標構をとり，それをこの群に適合した標構の族と呼ぶ．これがこの章における基本的な動標構の族である．そして，Riemann 空間の次元 n, 群の軌道の次元 p および群の次元 r が問題となる．たとえば，n 次元 Euclid 空間に n 次直交変換群が作用しているとすると，$p=n-1, r=(n^2-n)/2$ となり，十分複雑な例であることがわかる．

まず，計量テンソル g_{jk} および構造方程式に現れる形式 $\omega^i, {\omega_i}^j$ は群の作用で変わらないから ($n^o 258$)，変換群が Riemann 空間に推移的に作用する場合 $(p=n)$ は g_{jk} は定数，そうでない $(p<n)$ 場合は g_{jk} は軌道を区別する $n-p$ 個の座標だけの函数である．また，変換群が軌道の上に単純推移的に作用する $(p=r)$ 場合は，${\omega_i}^j = {\gamma_i}^j{}_k\omega^k$ と書いたときの ${\gamma_i}^j{}_k$ もまた高々軌道を区別する座標だけの函数である．以上のことだけでも私には独力で考えつくことはできない．

とくに，変換群が Riemann 空間に単純推移的に作用する場合，つまり変換群を Riemann 空間と同一視して良い場合 $(p=r=n)$ が第 IV, V, VI 節に

詳しく論じられている．このときは, 群の構造方程式

$$d\omega^i = (1/2)c_{kh}{}^i\,\omega^k \wedge \omega^h$$

が Riemann 空間としての構造を定めている． 曲率テンソルも構造定数 $\{c_{kh}{}^i\}$ を用いて表わされる．たとえば, 構造方程式

$$d\omega^1 = 2\omega^2 \wedge \omega^3, \quad d\omega^2 = 2\omega^3 \wedge \omega^1, \quad d\omega^3 = 2\omega^1 \wedge \omega^2$$

を n^o267 の方法で解いて n^o281 の (24) 式を導き 3 次元球面を再構成する計算をしてみたが, なかなか教育的な例である．

ところが第 VII 節に 3 次元球面の上の二種類の絶対平行性のことが書いてあって, それが Levi-Civita の平行性と嚙み合わないように思われた．同僚の西川青季教授に尋ねたところ, 絶対平行性は計量と切り離して考えなくてはいけないことを教えていただき, 論文 [5] を 2,3ヶ月かけて読んでみた．それから再び本書を読んでみると少し読みやすくなっているのに気づいた．本書より遥かに本格的なチンプンカンプンを楽しんだお蔭であろう．しかし, ノホホンと勉強していた天罰は立ち所に下り, 研究室で居眠りを楽しんでいたところを遂に学生に見つけられたのである．

この章の n^o274 から T_M という Lie の記号が用いられている．先に, 記号が少ないことが本書を読みやすくしていると書いたが, ここではそれを撤回したい位である．私にとってこの記号は非常に分かり難い．何故ならば, 変換される変数つまり群が作用する空間が背後に押しやられて全く出て来ないからである．初めは線形群 (行列群) だけを想定しているのかと思ったが, そうではなさそうである．ところがそうすると, たとえば $\mathbf{R}$ 上のベクトル場

$$X = x^2 \frac{d}{dx}$$

が生成する $\mathbf{R}$ 上の変換

$$x \mapsto T_t x = \frac{x}{1-tx} \quad (t \in \mathbf{R})$$

はどうなのか．T_t が $\mathbf{R}$ 全体の上の変換として意味をもつのは $t=0$ のときだけである．この場合は改めて $\mathbf{R}$ 上のベクトル場

$$Y = -\frac{d}{dy}$$

が生成する $\mathbf{R}$ 上の変換 $S_t y = y - t$ $(t \in \mathbf{R})$ を考え, $\{T_t\}$ を $\{S_t\}$ に同型な群とみなせばよいのであろう．私は Lie の論文は全く読んでいないが, Cartan は恒等変換の無限小近傍だけを問題にしていたのかも知れない．連続群の概念が曖昧模糊としていた時代からすでに Lie 環の理論があったらしいことを知って意外に感じた．多変数に作用する変換群の問題を爆発の起こらない線形群の問題に直すのは難しかっただろうと思う．

なお, $n^o 260$ の équations finies des transformations du groupe という言葉, つまり (4) 式

$$(u^i)' = f^i(u; a) \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

は恒等変換の無限小近傍にはない変換を表わす方程式の意味かと思っていたが, 有限次元変換群を表わす finies であることを杉浦先生から教えていただいた．杉浦先生に改めて御礼申し上げたい．

第十三章　互いに等長な Riemann 空間．Riemann 空間の合同変換

2 つの Riemann 空間は, その間に基本形式を変えないような点から点への写像が存在するとき, 互いに等長であるという．この章では, 2 つの Riemann 空間が予め与えられているとして, そのような写像が存在するか否かを判定する方法を論じる．この問題を最も一般に考察するには解析学の次のような問題を解かねばならない．

「問題　独立な 1 次微分形式 n 個からなる系が 2 つあって, 一方は n 個の変数 $u^1, u^2, \cdots, u^n$ とそれらの微分を用いて定義された形式

$$\omega^1(u; du),\ \omega^2(u; du),\ \cdots,\ \omega^n(u; du)$$

からなる系, 他方は n 個の変数 $v^1, v^2, \cdots, v^n$ とそれらの微分を用いて定義された形式

$$\varpi^1(v; dv),\ \varpi^2(v; dv),\ \cdots,\ \varpi^n(v; dv)$$

からなる系であるとする．このとき, 2 つの系の形式の各々が各々に等しくなるように, 変数 v^i を変数 u^i の函数として定めることが可能か否かを判定し, 可能ならばこのような函数を決定せよ」($n^o 312$).

この問題の一般的な解法を示し, 孤立した解しか存在しない場合と, 何個かの任意定数に依存する解をもつ場合とがあると述べている．等長写像以外にもこれに帰着する問題は沢山あるに違いない．

等長写像の場合は両方の空間の構造方程式を比較する問題となる. 個々のRiemann空間の特徴として構造方程式に現れているのは曲率テンソルであるから, 曲率テンソルとその逐次共変微分の成分の各々が各々に等しいという条件のうちで独立な式を残らず見出さねばならない. 2次元Riemann空間についてはそれを実行して見せている. さらに, 上の解析学の問題の別な応用として, 予め与えたRiemann空間に作用する合同変換の最大の群を決定する問題を論じている.

ところで本書の終りの方には, これこれの問題を解くには「代数的な手法だけでは済まない」とか「積分は要らない」という文章がところどころにある. つまり, 構造方程式を本当に解かねばならない部分と, 解くまでもなく代数的な手法だけで解決できる部分とを区別して示している. そのためか, Cartanの仕事を継承した教科書の多くは非常に代数的に書かれている. Cartanの仕事から解析的な要素をできる限り取り除くことに多大のエネルギーを注いだのではないかと私は推測している. そのため, Cartanの仕事は解析学者には近づき難いもの, 手の届かぬものになってしまった. これがもしも私だけのひがみならばお詫びせねばならない.

Cartanは代数学の問題に帰着できる議論をその慧眼を以って最初から代数的に行ったのであろうか. そうではあるまい. 本書は数理物理学を幾何学に応用した本である, という私の読後感が極端に偏った感想だとは思わない. 論文を殆ど理解できずに乱暴な推測をするのだが, Cartanは重要な場合の構造方程式を解析的手法で個別に限なく解いたに違いない. その著作に現れた部分は天文学的な計算のほんの一端なのであろう. 個別の結果が出揃ったところで, それを俯瞰してみればかなりの部分が代数的な議論だけで十分であった, 積分は要らなかった, という結論に至ったのではないかと推測する. Cartanにとって代数的手法による証明は原証明ではなく第二の証明だったのであろう.

本書の初版は1928年, 第二版は1946年に出版された. 現代では本書の内容は学部3年程度であろう. 微分幾何学の研究領域はその時代とは比較できないほど広がり, 本書の内容はすでに全面的に近代化され, 微分幾何学の専門家にとって本書はもう不要であろう. しかし, 私にとって本書の

内容は未知のことばかりであった．これだけの内容が370頁の中に詰まっていて私にも読める幾何学の教科書は稀である．流体力学を研究する傍らCartan の講義録をまとめた Leray 氏の姿勢を見習いたいものである．私の指導教官であった溝畑茂先生も Cartan の著作をよく読んでおられた．そのことは先生のかつての学生ならば誰でも知っている．

本書を最初に一通り読み終えたとき，かなり急いで読んだせいもあって，私の頭の中が全く空になったような気がした．沢山のことを学んだ筈なのに何も覚えていない．そればかりか，多少はもっていた筈の予備知識も読んだためにすべて消えてしまった．現代の教科書のごく初等的な事柄ですら本書の記号とか言葉では再現できないのである．これは私が老化したためばかりではなさそうである．名著と言われる本にはその本に固有の数学的宇宙があり，その宇宙の確かさが，私のあやふやな予備知識など全部吹き飛ばしてしまうほどの力をもっていたのだということを思い知らされた．私の本書の読み方は甚だ浅いものと認めざるを得ない．

参考文献

[1] É. Cartan : Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, 2^e édition, *Gauthier-Villars*, *Paris*, 1946.

[2] É. Cartan : Œuvres Complètes, Parties I(vols.1,2), II(1,2), III(1,2), *Gauthier-Villars*, *Paris*, 1952-1955.

[3] É. Cartan : La Théorie des Groupes Finis et Continus et la Géométrie Différentielles, *Gauthier-Villars*, *Paris*, 1937.

[4] É. Cartan : Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, *Ann,École Norm.Sup.Paris*, t.40(1923),325-412; t.41(1924),1-25.

[5] É. Cartan : La géometrie des groupes de transformations, *J.Math.pures et appliquées*, t.6(1927),1-119.

[6] É. Cartan : Les espaces riemanniens symétriques, *Verh.Int.Math.Kongresses Zürich*, I,152-161, 1932.

[7] M.A.Akivis - B.A.Rosenfeld : Élie Cartan (1869-1951), *Transl.Math.Monographs* 123,*A.M.S.*, 1993.

[8] ブルバキ：数学原論 リー群とリー環 歴史覚えがき (杉浦光夫訳), 東京図書, 1973.

[9] P.Günther : Spinorkalkül und Normalkoordinaten, *Z.Angew.Math.Mech.*, 55 (1975), 205-210.