

数学者は嘘をついてはいけないのか

キオスのヒッポクラテスの「誤謬」をめぐる

斎藤憲

数学史シンポジウム発表要旨

2003年10月25日

論証数学の歴史をめぐる二つの物語

ギリシア人が発明した論証数学は、ピュタゴラス（派）にはじまり、プラトンがその意義を認めて、彼の指導のもと、その学園アカデメイアで大いに発展したとされている。

これは嘘だと思う。せいぜいで、プラトンを崇める人々が作り出した物語でしかない¹。これに対して私は次のような、別の物語を語りたい。

論証数学は、議論による説得が重要な意味をもった民主政のアテネの全盛期に、ソフィストの議論の方法にヒントを得て発明された。しかし個別の場面での議論を重視したソフィストたちは必ずしも数学を重視しなかった。しかし証明の積み重ねで、確実な知識を増大させる他に例を見ないシステムにプラトンが注目し、彼の哲学体系に取り入れた。そこで問題になったのは、プラトンが敵対したソフィストに起源をもつという数学の「卑しい」出自であったらう。プラトンはあれほど重視した論証数学の起源について、ほとんど何も語っていないことは注目に値する。民主政やソフィストに批判的であったプラトンにとって論証数学が民主政のアテネで、ソフィストたちの活動と並行して生まれたことは、あえて言及したい事実ではなかったらう。師の無言の意向を忖度した弟子たちは、論証数学は、神秘的（オカルト的）数学に興味を示したピュタゴラスが発明したという物語をでっちあげたと考えられる。ピュタゴラス派の哲学と神秘的数学はもともとプラトンに大きな影響を与えていたから、これは大変都合のよい物語だった。この物語は紀元後5世紀のプロクロスの『原論第一巻への注釈』に現われるが、その起源はアリストテレスの弟子（プラトンの孫弟子）で、『幾何学史』を著したエウデモスにある。

二つの物語のどちらを採用するかは選択は、初期のギリシア数学の解釈に影響され、また解釈に影響することになる。その一例としてキオスのヒッポクラテスの「誤謬」を検討する。

¹これは基本的にプロクロスが伝えるエウデモスの『幾何学史』に基づく歴史記述であるが、この物語がタレス、ピュタゴラスに関しては単なる作り話であることは、[10]が決定的に論じている。発表者もすでに [7], [8], [1] などでもこの問題は扱っていて、過去の数学シンポジウムでも発表したことがあるので、今回の発表では割愛した。疑問のある方はまず上記の文献に当たりたい。なお、シンポジウム当日は「やはりピュタゴラスに数学上の業績があったに違いない」と発表者に長い時間をかけてご教示くださる方が現れて、ディスカッションのかなりの時間を空費する結果となってしまった。参加者の顔ぶれは毎回同じでないので、煩を厭わず、基本的な前提については説明すべきであったと反省している。

キオスのヒポクラテスとその誤謬

キオスのヒポクラテス（医学で有名なコスのヒポクラテスと別人）の盛年は前 440 年頃。月形の求積の議論の詳細がシンプリキオスによって伝わる。

アリストテレス 「ヒポクラテスは幾何学に長じていたが、しかし他の事柄についてはのろまで無慮と思われていた。それで、彼は公開旅行中、その愚直さのゆえに、ビュザンティオンの五十分の一税〔輸出入の関税〕徴収人たちのため、多額の銀貨をすっかり失ったということである。」（『エウデモス倫理学』1247a）²

ピロポノス 「ヒポクラテスは商人であり、海賊船に遭って全てを失い、海賊を訴えるためにアテネにやってきて、裁判のために長いこと滞在した。その間に哲学者たちのところに通って、円の正方形化〔円と面積の等しい正方形を作図すること、つまり円の求積〕を試みるほど幾何学に秀でた」（『自然学注釈』31,3）

アリストテレス 『詭弁論駁論』 ヒポクラテスのそれ〔誤った図形による証明〕すなわち〔あるいは？〕月形による正方形化も…（171b13）（ただし多くの解釈がある）

アリストテレス 『自然学』 原理から論証したのではない誤りについては、その誤謬を解くのは、われわれの任ではない。たとえば切片による方形化〔の誤謬〕を解くことは、幾何学者のやるべき仕事であるが、アンティフォンの方形化〔の誤謬〕を解くことは、幾何学者の仕事ではない。（185a14-17. 伊東の引用による）

ヒポクラテスほどの数学者が本当に勘違いをしていたとか、わざと嘘を述べたとは考えられないから、アリストテレスが言っているのは別の何か、あるいはアリストテレスの誤解である、というのがこれまでの解釈であった。

しかし、数学（論証数学）を哲学の究極目標であるアイデアの認識の準備となるトレーニングとして位置付け、その重要性を強調したのはヒポクラテスより半世紀後のプラトンである。しかし論証数学が最初からこのような「たいそうな」ものとして考えられていた証拠はない。

むしろ論証数学がソフィストの活躍した民主政のアテネで、知的遊戯として始まったとすれば、最初の数学者キオスのヒポクラテスが、たとえば一時の座興に間違った議論をしてみせてもおかしくない³。

ソフィストの議論として最も有名なのは、プロタゴラスの

²訳文は岩波書店『アリストテレス全集』によるが、『二分税徴収吏』を上記のように変更した。

³ここで言う「数学」とは生まれたばかりの論証数学である。実用上の数学を用いる人々、たとえば測量師や会計検査官には、正確に数学を用いて正しい結果を報告する義務があったことは言うまでもない。アテネの民主政は説明責任を強く求めるところにその特徴があったからなおさ

「万物の尺度は人間である、あるものについてはあるということの、あらぬものについてはあらぬということの」(ディゲネス・ラエルティオス『哲学者伝』9,51)

という言葉であろう。しかしプロタゴラスはアテネが南イタリアに植民市トゥーリオイを作った際に(前444)、その法制の制定を担当したと伝えられる。詭弁を弄ぶ不真面目な連中というソフィスト像はプラトン以降に作られたものであり、彼らは基本的には、議論と弁論の技術を教えることによって民主政の基盤を支えた知識人である。しかし後でゴルギアスについて見るように、ソフィストたちは時に詭弁を展開してみせる遊び心も十分に持ち合わせていた(ソフィストに関しては[9], [6] 参照)。

三種類の月形の求積

月形の求積については、[4] に詳しいのでここでは図を掲げるにとどめる。求積される三種類の月形において、外側の弧はそれぞれ半円、半円より大、半円より小である。このことは求積に何の関係もないが、わざわざ証明されていて、したがって「すべての」月形が求積された、と述べられている。そこでこの後に第四の、「月形+円」の求積を示せば、「『すべての』月形が求積され、また月形+円の求積ができたので、円の求積ができる」という(誤った)議論が可能である。この誤謬がヒポクラテスのものか、ということが古代後期以来論じられてきた。ここで発表者が提案するのは、ヒポクラテスが軽い冗談として、この誤謬推理を披露したのではないか、ということである。

切片が1対2の場合(直角の弧)

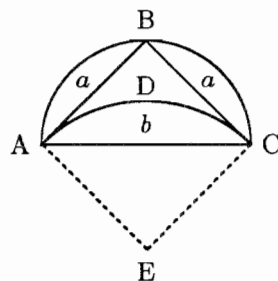


図1：第一の月形の求積

らである(アテネの民主政については[2] 参照)。

しかしここでテーマになっている円の幾何学的に厳密な求積には実用上の目的があるわけではなく、この時点において純粋な知的探求(あるいは知的遊戯)であったと考えられる。したがって、この文脈で「キオスのヒポクラテスがわざと間違ったことを言ったはずはない」という推論は説得力をもたない、というのがこの議論の趣旨である。

なお、シンポジウム当日の発表後の質問の時間に「数学者が嘘をつく」という表現に立腹したのか「あなたの言う数学者とはどういう人のことか」と詰問する参加者があり、何を答えてもこの同じ質問を執拗に繰り返すため、貴重な時間を無意味なやりとりで費やすこととなった。この責任の一端は発表者の説明不足にある。当日の参加者の皆様にこの場を借りてお詫びしたい。

切片が1対3の場合（直角より大きい弧）

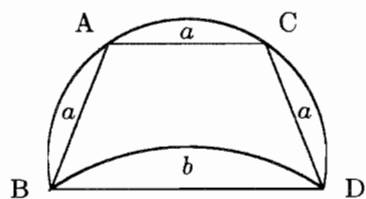


図2：第二の月形の求積

切片が2対3の場合（直角より小さい弧）

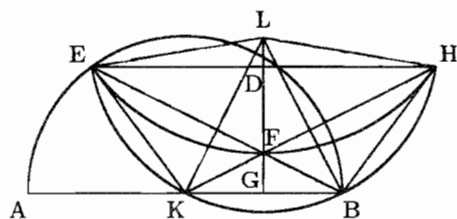
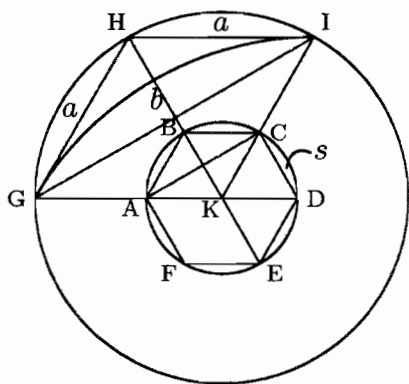


図3：第三の月形の求積

円＋月形の求積

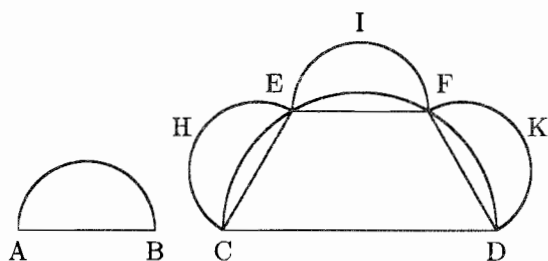
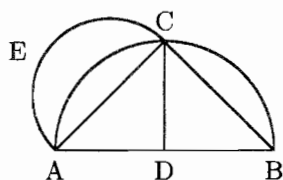
外側の円の半径は内側の $\sqrt{6}$ 倍。内側の円に正六角形を内接（これによって出来る六個の円の切片の各々を s とする）。図のようにKA, KB, KCをG, H, Iまで延長し, GH, HIを結ぶ。GI上にGH上の円の切片(a とする)と相似な切片を作る。

すると GI 上の切片を b として, $b = 3a$. また $a = 6s$ であるから, $b = 3a = 2a + 6s$ を得る. これより 月形 $GHIH +$ 円 $ABCDEF =$ 三角形 $GHI +$ 六角形 $ABCDEF$ を得る.



お手軽版「円の求積」

これはキオスのヒッポクラテスのものでないことがほぼ確実である。詳細は[4]を参照されたい。



上図で半円 ACB の中心 D から垂線 DC を立てる。AC を直径とする半円 AEC を描くと、半円 ACB は半円 AEC の二倍だから、四分円 ADC=半円 AEC。よって左上の月形 AEC=三角形 ADC を得る。ゆえにこの月形は求積

可能。

次に下の図で、 $CD=2AB$ で、 CD 上に半円を描き、 CE , EF , FD は正六角形の辺であるとする。よって CE , EF , FD は直径 CD の半分、すなわち AB に等しい。図のように半円を描くと、 AB , CE , EF , FD 上の半円は互いに等しく、 CD 上の半円の四分の一だから、四個の半円の和 = CD 上の半円。重なっている部分を引くと、半円 AB + 三つの月形 CHE , EIF , FKD = 台形 $CEFD$ 。月形の求積はすでに出来ているので、この両辺から三つの月形を引くことによって、半円 AB の求積ができる。

ゴルギアスの『ヘレネ礼賛』

プロタゴラスと並んで有名なソフィストのゴルギアスはシケリア島レオンティノイの人で、前 480 年代後半の生まれである。前 427 年にシュラクサイに脅かされた祖国のために援軍を要請する使節としてアテネを訪れた際の雄弁ぶりが評判になり、アテネで名を知られた。

悪女の代名詞であったヘレネに何の罪もないという議論がゴルギアスの著作『ヘレネ礼賛』である⁴。

ヘレネはスパルタ王メネラオスの妻であったが、トロイの王子パリスに誘惑され出奔し、彼女を取り返すためにギリシア勢がトロイを攻めることになり、トロイ戦争が勃発した。ゴルギアスはヘレネがパリスになびいた原因として、(神が定めた) 運命、暴力 (による強制)、言葉 (による説得)、(絶世の美男子パリスの) エロス (による誘惑) を順にあげ、それぞれの場合にヘレネに責任はないと論じ、最後に、エロスに誘惑されたにせよ、言葉で説得されたにせよ、暴力で連れ去られたにせよ、運命に強制されたにせよ、ヘレネを責めるいわれはないと結論する。数学での場合分けによる議論に酷似した形式が注目される。

さらに、この著作の結びは「これはヘレネの礼賛であり著者自身にとっては、遊び (暇潰し) である」というここまで展開した議論全体を茶化すようなものとなっている。ゴルギアスは、レオンティノイの存亡をかけて救援を求めるための使者としてアテネに派遣されたことから考えても、不真面目な人物だったわけではない。しかしソフィストの活動にはこのような気楽な遊びの部分が伴っている (ソクラテスやプラトンにさえそういう要素はあるだろう)。これと同じことをキオスのヒポクラテスにのみ否定することができるだろうか？

棟梁としてのプラトン

プラトンは「棟梁」として数学者を指導したと言われている。しかし、著作のあちこちに見えるプラトンの数学観は、はっきり言ってセンスが悪い。数学

⁴Diels-Kranz の断片集 82B11 に全文が収録されている。邦訳は [11], 第 V 分冊 pp.71-75.

者を指導するのはプラトンの願望に過ぎなかったのかもしれない（下の『国家』528bc も参照）。

ピロデモス 数学的諸学において、この時代に大きな進歩があった。プラトンは建築家^{アーキテクト}として働いて、数学者たちに問題を与え、数学者たちがそれを熱心に探求したのである。（『アカデメイアの歴史』Y）

シンプリキオス エウデモスが『天文学史』の第二巻で触れ、またエウデモスに依拠しているソシゲネスが確認しているように、クニドスのエウドクソスがギリシア人の中で最初にこの種の仮説を研究した。それは、ソシゲネスが述べるように、プラトンがこれらの問題に真剣に取り組む人々に次の問題を設定した後のことである。どのような均等で規則的な運動を仮定すれば、惑星の運動に関する現象を救うことが可能になるだろうか？（『アリストテレス天体論への注釈』CAG 7:488,18-24）

プラトン 『国家』研究者たちは上に立つ指導者が必要であり、それなしには発見はありえないのに、まずそういう指導者はなかなか現れがたいし、さらにたとえいたとしても、現状では、この種の問題に研究能力のある人たちは誇りが高くて、指導に服そうとしないだろうということがある（『国家』528bc）。

プラトンの数学観

- 彼ら〔数学者〕の遣っている言葉は、大へん滑稽で無理強いされたようなところがある。というのは、彼らはまるで自分たちが実際に行為しているかのように、そして自分たちの語る言葉はすべて行為のためにあるかのように、『正方形化する』だとか『〔与えられた直線上に与えられた領域を〕添付する』だとか『加える』だとか、すべてこのような言い方をするからだ。実際には、この学問のすべては、もっぱら知ることを目的として研究されているはずなのにね」（『国家』527ab）。
- 王〔哲学を修め、正しい統治をする理想の支配者〕は、僭主より 729 倍も快い生活を送る（『国家』587e）。
- 理想の国家の人口は 5040 人である（『法律』737e）。
- 諸君の言っておられることのうちには証明も、必然にそうなければならぬようなものも何ひとつありはしない。ただ諸君はそこにおいてまことしやかなものを用いておられるのである。ところが、このものは、もしテオドロスなり、幾何学者の誰か他の者なりが、これを用いて幾何をやろうとするならば、ほんの采の目一つの値打ちもないことになるかもしれないものである。（『テアイテトス』162e）

- 私たちは、これと違って、かなり早くから、ただ素のままの言論があるばかりで他に何のよりどころもないこれらのものには見切りをつけて、幾何学の方へ河岸をかえてしまったのですよ。(『テアイトス』165a)

まとめ

ここで語った物語は、少なくとも通常受け入れられているプラトン版数学史と同じ程度に残された資料をよく説明する。次の言葉がこの物語のしめくりにふさわしい。

あらゆる事柄には対立する二つの議論（ロゴス）がある（プロタゴラス）

（ディゲネス・ラエルティオス『哲学者伝』9,51）

参考文献

- [1] B. チェントローネ、斎藤憲訳『ピュタゴラス派—その生と哲学』（岩波書店、2000）
- [2] 橋場弦『丘のうえの民主政』（東京大学出版会、1997）
- [3] ヒース『復刻版ギリシア数学史』（共立出版、1998）
- [4] 伊東俊太郎「ユークリッド以前」彌永昌吉他『ギリシャの数学』所収（「数学の歴史」Ⅰ、共立出版、1979）
- [5] Lloyd, G.E.R. “The Alleged Fallacy of Hippocrates of Chios.” *Apeiron* 20(1987): 103–128.
- [6] ジルベール・ロメイユ＝デルベ著、神崎繁、小野木芳伸訳『ソフィスト列伝』白水社文庫クセジュ862.
- [7] 斎藤憲『ユークリッド『原論』の成立』（東京大学出版会、1997）
- [8] 斎藤憲 “Difficilior lectio potior: もっともらしい話ほど怪しい。”『UP』27-1(1998): 28–34. (『UP』は東京大学出版会発行のPR誌、1998年1月号)
- [9] 田中美知太郎『ソフィスト』講談社学術文庫
- [10] Vitrac, B. 1996. “Mythes (et réalités?) dans l’histoire des mathématiques grecques anciennes.” in *L’Europe mathématique*. Edited by C. Goldstein et al. 33–51. Paris: Éditions de la Maison des sciences de l’homme.
- [11] 『ソクラテス以前哲学者断片集』岩波書店