基本予想をめぐって

松本幸夫

東京大学数理科学研究科

§1

L.Euler や E.Betti などの前史を経て，本格的な代数的位相幾何学は H.Poincaré によって創始された．Poincaré の段階では，単体的複体の概念に基づいてホモロジー論が組み立てられているとは言い難いが，しだいに，単体的複体がホモロジー論を展開する自然な舞台であることが認識されるようになった．

そうすると，次の問題が代数的位相幾何学の基本問題として浮上して来る．それを楽観的（肯定的）立場から述べたものが基本予想である．

基本予想: 2 つの単体的複体 X と Y が位相同形であれば，それらは組み合わせ的に同値であろう．

X と Y が組み合わせ的に同値であるとは X の適当な細分と Y の適当な細分とが単体的複体として同形なことである．現代的言葉遣いに従って，X と Y が組み合わせ的に同値であることを，"X と Y は PL 同値である" と言うことにする．

さて，X と Y が PL 同値であれば，X のホモロジーと Y のホモロジーは同型である．これは，ホモロジーが単体的複体の構造に基づいて定義されることと，ホモロジーが分割によって不変であることから明らかであるが，上記の基本予想が肯定的に証明されれば，互いに位相同形な単体的複体 X と Y が同型なホモロジーを持つという，より強いことが言えて，非常に嬉しい．

この基本予想は難しくてなかなか解決されなかったが，基本予想の動機であったホモロジーの位相不変性のほうは，J.W.Alexander によって，早々と証明されてしまった．

基本予想は一見動機を失ったようであるが，しかし，単体的複体の同相類と PL 同値類の差を問うという基本的問題としては残ることになった．

§2

基本予想の解決には戦後に発展した代数的位相幾何学と微分位相幾何学の強力な道具が必要であった．1960 年代はじめに，h-コボルディズム，Whitehead torsion，それに B.Mazur の無限反復法を用いて，J.Milnor は基本予想が一般の単体的複体に対しては成り立たないことを示した (1961)．Milnor の反例は特異点を

持っており, 組み合わせ的な多様体ではなかったので, 以後, 組み合わせ的多様体についての基本予想が問われることになる.

§3

1950 年代から 60 年代の微分位相幾何学の発展が, 基本予想に大きな進展をもたらした. とくに,J.Milnor,M.Kervaire,S.P.Novikov,W.Browder,C.T.C.Wall 達による "多様体の手術理論" の役割が大きい. 基本予想の立場からいえば, 手術理論は結局のところ, 多様体のホモトピー型と PL 同値類の差を記述するものだった. これを応用したのは D.Sullivan で, 彼の博士論文は当時相当の影響を与えた.

Sullivan 理論から数年を経て,R.Kirby と L.Siebenmann の決定的理論が現れる (1969). かれらの理論は手術理論の成果をひとつの Key Lemma として含んではいるが, 本質的には図形を直接相手にする "geometric な" 方法である. Kirby のトーラス法のアイデアが決定的だったのである.(彼らは位相多様体の PL 分割問題も同時に解いてしまった.)

§4

Kirby-Siebenmann 理論は,5 次元以上の多様体 M について基本予想や PL 分割問題が肯定的であるための障害として,3,4 次元のコホモロジー類 ($\in H^3(M;\mathbb{Z}_2)$, $H^4(M;\mathbb{Z}_2)$) を抽出した. ここに現れる係数 $\mathbb{Z}_2$ は 4 次元多様体の基本定理とも言うべき Rochlin の定理 (1952) に基づくものである. しかし肝心の 4 次元多様体については, これらの問題は未解決だった.(3 次元では E.Moise が 50 年代に肯定的に解決している.) 1980 年代初めに周知の 2 つのブレークスルーがあった. M.H.Freedman による単連結 4 次元位相多様体の分類理論は, PL 分割不可能な 4 次元位相多様体の例がいくらでも (無限個) 存在することを明らかにした. また,S.K.Donaldson はゲージ理論を持ち込んで, (たとえ複素曲面に限っても) 4 次元の基本予想には多数の反例があることを証明した. 彼らの理論を合わせて得られる "エキゾチックな $\mathbb{R}^4$" の存在は衝撃的だった. Taubes によればエキゾチックな $\mathbb{R}^4$ は非可算個存在する. Freedaman と Donaldson の理論は 4 次元の基本予想や PL 分割問題を全て解決したわけではない. 例えば,4 次元球面についてさえ未解決である.(エキゾチック S^4 の存在問題.) 4 次元の基本予想の完全な解決はどうも来世紀まで持ち越されそうである.

§5

最後に, 多様体に次元差のある場合について触れておこう. m 次元の多様体 M が q 次元の多様体 Q に位相的に埋め込まれているとき, これを PL 埋め込みで近似できるか, という問題である. $q-m=0$ の場合が基本予想である. 60 年代半ばに本間竜雄先生が $m \leq (2/3)q-1$ の次元範囲で肯定的に解決した. この結果は R.T.Miller(1970) と A.V.Cernavski(1969) により, $q-m \geq 3$ まで拡張された. 70 年代半ばに Ancel と Cannon が $q-m=1$ についてやはり肯定的な結果を出した. $q-m=2$ のときは余次元 2 の手術理論を使って多くの反例が構成出来る.(Eaton-Pixley-Venema, 松本 (1978).) しかし, 余次元 2 の場合の完全な解決はまだなされていない.(野性的結び目と関連する.)

郵便番号 153, 東京都目黒区駒場 3-8-1