『九章算術』劉徽註における円周率の計算の再現

宮田　義美

平成 28 年 8 月 31 日

目次

第1章　序論

古代中国の数学書である『九章算術』は紀元前 100 年から紀元 100 年ごろに成立したと考えられていた．しかし，1984 年湖北省江陵県（現在の荊州市荊州区）張家山 247 号墓から，1,200 枚余の竹簡が出土した．その中に『算数書』と題された竹簡は 190 枚，竹簡長 29.6〜30.4cm，幅 0.6〜0.7mm，上中下に紐で綴じた跡が残っていた．この『算数書』という題名は出土した竹簡の最初と考えられる竹簡の背面に書かれていたので『算数書』と名付けられた．

それまでは,『九章算術』が現存する最古の数学書と考えられていたので，研究者の間で大きな話題となった．日本では大阪産業大学の「中国古算書研究会」によって研究されている．新たに出土した『算数書』によって古代中国における数学の見直しがなされている.「中国古算書研究会」の「『九章算術』訳注稿（1)」には，つぎのように述べられている．

> 大阪産業大学の大川俊隆は，2001 年 10 月に「張家山『算数書』研究会」を組織した．この研究会の目的は下記の通りであった．
>
> （1）『算数書』の写真版に基づいて独自の釈読を行い，数学・数学史的考察を加え，『算数書』の各算題の正確な解釈を与える．
> （2）竹簡の出土状況，およびそれまでの中国最古の数学書であった『九章算術』との比較により,『算数書』算題の配列を確定させる．
> （3）『九章算術』を含む算経十書との比較を行い,『算数書』から『九章算術』に展開していく二，三百年の質的差異を数学的数学史的に解明する．
>
> 上記の（1）と（2）に基づいた成果として，2006 年 10 月に張家山漢簡『算数書』研究会編「漢簡『算数書』—中国最古の数学書—」（朋友書店）が出版された．また,「張家山漢簡『算数書』研究会」の各人の研究成果が「張家山漢簡『算数書』の総合的研究」（大阪産業大学産業研究所・産研叢書 26，2007 年 2 月）としてまとめられた．しかし (3) の課題に関する研究は現在もまだ途上である．
>
> これ以後，残された課題を探求していくに当たって，我々は,「張家山漢簡『算数書』研究会」を発展的に解消し,「中国古算書研究会」を組織することとなった．
>
> —中略—
>
> これまでの算経十書，とくに『九章算術』の研究は,『九章算術』が中国最古の算書であるという前提に立っていた．また，中国の学者はその成立年代をできるだけ古い時代に置こうとする傾向が見られた．ところが,『算数書』の発見によってその前提が崩

れ去り,『九章算術』の成立年代は現在考えられているよりも後代に置かねばならないと考えられる．その問題をさらに明確にするために,『算数書』と『九章算術』の関係が詳細に検討されねばならない．[1]

このように，古代中国の数学史の研究は新たな段階を迎えている．

ここでは，上記に引用した『九章算術』の新たな訳註を踏まえて,『九章算術』の劉徽註にある円周率の計算を再現することにする．劉徽は正 192 角形までの計算を具体的な数値を上げてあり，再現することが可能である．

この劉徽の註に関する先行研究は次の章で述べることにする．

[1]大川俊隆著「『九章算術』訳注稿 (1)」大阪産業大学論集　人文・社会科学編 2　p12-13

第2章　劉徽の円周率の計算についての先行研究

日本語に訳された中国の数学史は，李厳著「支那数学史」[1]と銭宝綜編「中国数学史」[2]，ジョセフ・ニーダム著『中国の科学と文明』第4巻「数学」[3]等である．

劉徽の円周率の計算については，日本の研究者も言及している．中国では「割円術」と言っているようである．

2.1　李厳著「支那数学史」の「割円術」

李厳は次のように述べている．

劉徽の割圓術　劉徽の円周率は，旧率周三径一が疎略であるので，先ず円に正六角形を内接せしめ，漸次その辺数を倍にし，終に円の弧と実合せしめ，亦その面積も亦終に円の面積と蜜合せしめた．

始め ln を正 n 辺形の一辺の長さとし，r を円の半径とする．r を弦とし，$\frac{ln}{2}$ を句とし，$\sqrt{(r^2-(\frac{ln}{2})^2)}$ を計算して股とする．次に半径より股を減じて $r-\sqrt{(r^2-(\frac{ln}{2})}^2)$ を得て小句とする．$\frac{ln}{2}$ を小股として，小弦 ln を求めることが出来る．即ち正 $2n$ 辺形の一辺の長さである．l_{2n} が $2n$ 辺形の一辺の長さとなれば，前の如くにして小弦 ln を求めることが出来る．即ち小弦 l_4n は正 $4n$ 辺形の一辺の長さである．$n=6, r=1$ として，順次求めて 96 辺形の辺に至り，此の時の円周率として，$\pi_9 6 = 3.1410243.14 \fallingdotseq \frac{64}{625}$ を得る．即ちその次第は下の如くである．

辺数	毎辺数	π	差
6	1.000000	π_6=3	
12	0.517638	$\pi_1 2$=3.105828=3.10$\frac{364.25}{625}$	$\frac{6614.25}{625}$
24	0.2610523	$\pi_2 4$=3.132624=3.13$\frac{164}{625}$	$\frac{1675}{625}$
48	0.130806	$\pi_4 8$=3.139344=3.13$\frac{584}{625}$	$\frac{420}{625}$
96	0.065438	$\pi_9 6$=3.141024=3.14$\frac{64}{625}$	$\frac{105}{625}$

劉徽は，計算する場合には π=3.14 を使用した．隋書に次のように謂っている．劉徽が九章の商功に注して，今の大司農の斛は円径一尺三寸五分五厘，深さ一尺，容積は一

[1]李厳著　島本一男・藪内清訳「支那数学史」昭和 15 年 10 月 16 日印刷　昭和 15 年 10 月 20 日発行　生活社
[2]銭宝綜編 川原秀城訳「中国数学史」1990 年 2 月 20 日印刷　1990 年 2 月 25 日発行　みすず書房
[3]ジョセフニーダム著 監修=東畑精一・藪内清　訳=芝原茂・吉沢保枝・中山茂・山田慶児　1991 年 8 月 20 日発行　思索社

千四百四十一，十分之三立方寸であると曰っている．之によれば半径は $\frac{1}{2} \times 13.55$ 寸＝6.775 寸，その自乗は 45.900625 平方寸であるから，$\pi = 3.14$ として丁度

$$10 \times \pi \times (6.775)^2 = 1441.279625 \fallingdotseq 1441\tfrac{3}{10} \text{ 立法寸}$$

となる．[4]

以上が李厳の「支那数学史」に記述されている劉徽の円周率に関する内容である．

2.2　祖沖之・祖□□の円周率について

1．祖沖之・祖□□の合伝

祖沖之[429-500 年]，あざなは文遠，劉宋王朝の奉朝請，祖朔之の子である．青年のころ，南徐州 [いまの鎮江] の従事史 [州刺史の属員] に官し，後に健康 [劉宋の首都，今の南京] に帰り，公府参軍に任ぜられた．かれは国家が公布施行した何承天の元嘉暦を十分精密でないとみなし，自ら大明暦法をつくり，大明六年 [462 年] に元嘉暦の修改を上申した．その主要な改革点は，十九年七閏なる古法を止めて，三百九十一年に百四十四閏月をおく閏周期をたてたこと（破章法の採用），冬至点が年々西に移ることから，”歳差”を始めて立てて四十五年十一月ごとに太陽は一度しりぞくとしたこと（歳差の初採用）であり，その他の修訂箇所にも幾多の創見がみられる．ところが，当時の専制政権の妨害をうけ，ついにかれの新法は採用されることがなかった．

―中略―

祖沖之はその後，婁県 [いまの崑山県の東北部] 令に左遷され，また健康に帰って謁者僕射に任ぜられた．蕭斉王朝になると長水校尉に升り，四品の俸禄をうけ，永元二年 [500 年] に卒した．年は七十二である．かつて指南車，欹器，千里船，水碓磨などの機械をつくり，その試験の結果はいずれも良好であったという．

祖沖之の子の祖□□も，博学多才の人である．生卒年代は調査する方法がない．かれは梁朝の初年に二たび暦法の修改を上申し [504,509 年]，父祖沖之の大明暦を示して，何承天の元嘉暦の不備を正すべきことを説いた．かくして太史令などによる天象の観測や新旧暦法の比較検討をへた後に，政府は 510 年から，大明暦法によって暦書を推算しはじめた．

―中略―

祖□□の最後の官職については，現在，結論を得るすべがない．[5]

銭宝琮は次のように述べている．

唐初に学官に立てられた”十部算経”の一つ<<綴術>>は，祖沖之，祖□□父子の数学方面における輝かしい成果である．だが<<綴術>>はもはや失伝し，その具体的内容は詳考しがたい．[6]

[4] 李厳著　島本一男・薮内清訳「支那数学史」昭和 15 年 10 月 16 日印刷　昭和 15 年 10 月 20 日発行　生活社　p14-15
[5] 銭宝琮編 川原秀城訳「中国数学史」1990 年 2 月 20 日印刷　1990 年 2 月 25 日発行　みすず書房　p90-92
[6] 銭宝琮編 川原秀城訳「中国数学史」1990 年 2 月 20 日印刷　1990 年 2 月 25 日発行　みすず書房　p93

李厳著「支那数学史」には以下のようにある．

26．祖沖之父子の円周率

隋書律暦志に劉宋の末に南徐州従事史の祖沖之が更に精密な法を始め，円の直径一億以て一丈となし，円周の盈数を三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，□□数を三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽，その正数は盈□□二数の間にある．精密な円周率は，円の直径百十三に対し，円周は三百五五，大約の円周率は，円の直径七に対し，円周は二十二である．又開差冪，開差立を設け，兼ねて正負を以てまじへ，その指要は精密で，数学者の最たるものである，著すところの書を綴術と名づけ，官の学者はその深奥を究めることが出来なかったので，廃せられて研究されなかった.」といっている．即ちその円周率 π は

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

$$\pi = 3.14159265$$

蜜率　$\pi = \frac{355}{113}$

約率　$\pi = \frac{22}{7}$

隋書律暦志及び晋書律暦志の嘉量の條には，何れも $\pi = 3.14159265$ なる祖沖之の円周率を以て計算している．隋書では更に，劉□□の斛の銘文及び後周武帝保定元年の玉斗をしらべるのに，亦祖沖之の円周率を用いている．惜しいことには，その証明法はもはや失伝している．その子の祖□□之は劉徽の割円術の方法によって推算をつづけ

辺数	毎辺数	π	差
6	1.000000	$\pi_6=3$	
12	0.517638	$\pi_{12}=3.10\frac{364.25}{625}$	$\frac{6614.25}{625} \fallingdotseq \frac{105}{625}(4)^3$
24	0.2610523	$\pi_{24}=3.13\frac{164}{625}$	$\frac{1675}{625} \fallingdotseq \frac{105}{625}(4)^2$
48	0.130806	$\pi_{48}=3.13\frac{584}{625}$	$\frac{420}{625} \fallingdotseq \frac{105}{625}(4)^1$
96	0.065438	$\pi_{96}=3.14\frac{64}{625}$	$\frac{105}{625} = \frac{105}{625}(4)^0$

となるから，更に之を推して行くと，$\pi_{192} - \pi_{96} \fallingdotseq \frac{105}{625}(4)^{-1}$，$\pi_{384} - \pi_{192} \fallingdotseq \frac{105}{625}(4)^{-2}\cdots\cdot$ として正 n 角形を考えると

$$\pi_n = \pi_{96} + \frac{105}{625}(4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \ldots..)$$

[7]

次に，銭宝琮編「中国数学史」の記述を見ることにする．

[7] 李厳著　島本一男・薮内清訳「支那数学史」昭和 15 年 10 月 16 日印刷　昭和 15 年 10 月 20 日発行　生活社　p22-23

2.3 銭宝綜編「中国数学史」の劉徽《九章算術》のいくつかの創作の円周率

銭宝綜は「3．劉徽《九章算術》のいくつかの創作」で次のように劉徽を評価している．

> 劉徽は"九章算術注"において，それぞれの解法の思想系統を整理し，《九章算術》の学術レベルを向上させただけでなく，多くの新しい算法を作り出し，数学発展の進むべき進路を切り開いた．本項では以下，かれの主要な数学創作を概説する．
>
> **（一）円周率と円の面積について**
>
> 《九章算術》は円の面積を求めるばあい，一律に古法の"周三径一"[$\pi = 3$] をもちいたが，その値は精密ではない．前漢の元始年間 [1-5 年] に，劉きんは王莽のために円柱形の標準量器をつくり，器上にこう銘した．"律嘉量斛，方一尺にしてその外を円にす．□旁，九釐五毫．冪，一百六十二寸．深さ，一尺．積，一百六十二寸．十斗容る．"と．銘文によれば，この銅斛の円径は $1.4142 + 2 \times 0.095 = 1.4332$ 尺，円の面積は 1.62 平方尺である．したがって，その円径と円積から，円周率がほぼ $4 \times 1.62 \div 1.4332^2 = 3.1547$ に等しいことが算出することができる．二世紀の初めには，張衡 [78-139 年] が《霊憲》において，$\pi = \frac{730}{232}$[=3.1466] をもちい，球の求積公式中，$\pi = \sqrt{10}$ [3.162] をつかった．また三国呉の王蕃 [228-266 年] は，渾儀の論説のなかで $\pi \frac{142}{45}$[= 3.1556] を採用した．だがかかる円周率の近似値には，理論的な根拠があったわけではない．劉徽はこれにたいして，方田章の円田術中，初めて割円術をつかって円周率を計算し，そこに中国数学発展の一部門たる円周率研究の新次元を切り開いている．[8]

これから，この劉徽の円周率の計算を劉徽の注によって再現するわけであるが，この劉徽の円周率の計算において未解明の部分がある．
銭宝綜編「中国数学史」でこう述べている．

> また劉徽はこういう，"差冪が六百二十五分の一百五平方寸であり，十二弧（内接正十二角形）の冪を率として消息すれば，この分（六百二十五分）の三十六平方寸を一百九十二觚（内接正百九十二角形）の冪を加えた三百一十四平方寸と二十五分の四平方寸が円冪となる"．と．その意味は，円の面積が $314\frac{64}{625} + \frac{36}{625} = 314\frac{4}{25}$ 平方寸となるべきことであり，ここから $\pi = 314\frac{4}{25} \div 100 = \frac{3927}{1250}$ が求められる．この近似の分数値は十進小数に直すと 3.1416 であり，当然ながら更に精密になっている．なお，上に引いた"十二觚の冪を率として消息する（以十二觚之冪為率消息）"の十字はどう解釈すべきか，現在なお定論がなく，やむなく保留した．かれはまたこうもいう．"まさに内接正千五百三十六角形の一辺を求め，正三千七十二角形の面積を得て，その微数部分を定めるべきだ，かくのごとくすれば，数もまた当然しかるべくなり，その験（検証）をかさねる"と．これによれば，かれは実際に円に内接する正 3072 角形の面積を求め，円周率 $\frac{3927}{1250}$ を実証していたのである．なお実用算術の方面では，かれは $\pi = \frac{157}{50}$ をつかって円の面積を計算することを主張し，"徽術"によって得られた解答を問題の原解答の後に逐一補っている．[9]

[8]銭宝綜編 川原秀城訳「中国数学史」1990 年 2 月 20 日印刷　1990 年 2 月 25 日発行　みすず書房　p72
[9]銭宝綜編 川原秀城訳「中国数学史」1990 年 2 月 20 日印刷　1990 年 2 月 25 日発行　みすず書房　p72

この"十二觚の冪を率として消息する（以十二觚之冪為率消息）"については，劉徽の計算のところで言及することにする．

2.4 ジョセフ・ニーダム著『中国の科学と文明』第4巻「数学」の古代の円周率についての記述

ジョセフニーダムの『中国の科学と文明』第 4 巻「数学」[10]で次のように述べている．

> (4)　π の算法
>
> 歴史家たちは，円周と直径の比の値（円周率）の近似値を求めての，古代の数学者たちの努力に対して多大の関心を示した．それは，その結果しだいに増してゆく正確度が，続く時代の数学的技術を判定する際の一種の尺度を提供するようにおもえるからである．この論題については，三上 (Mikami,1) の 2 つの章，および李儼 (1) の数章に書かれている．その他多くの論文があり，その中には，茅以昇 (1)，三上 (Mikami,19) および張永立 (1) などがある．
>
> 古代エジプト人や古代バビロニア人が，3.1604 とか 3.125 とかいう値を得たという証拠はあるが，古代文明において最も一般に使用されたのは，比として単に 3 をとることであった．これは 2 つの偉大な漢の算術書（『周髀』と『九章』）の中に見え，そして また『周禮』の中の「考工記」にも見える．この値は，大まかな近似値として何世紀も使われ続けた．もっと精度の高い値が求められたという最初の兆候は，嘉量斛標準枡に表れている．これは劉□によって，＋1 年から＋5 年の間に王莽の作製されたものであり，いまなお北京で保存されている，重要な考古学的関心の対象である (Fergusin,3)．これは堅い青銅の円筒から切り取った単なる 3 次元の空間で，次のような銘が刻まれている．
>
> 標準化された嘉量斛は，各辺の長さが 1 尺の 1 つの正方形を持っていて，その外側は円になっている．正方形の各頂点から円までの距離（□旁）は，9 釐 5 毫である．円の面積（冪）は 162（平方）寸，深さは 1 尺，そして（全体の）体積は 1,620（立法）寸である．
>
> 律嘉量斗．方尺而圓其外．□旁 9 釐 5 毫．冪百六十二寸．深尺．積百六十二寸．容十升．(容庚 (2)[漢金文禄]，巻三釋文，一葉表，裏)
>
> これから銭宝綜 (1) は，劉□が π の値として 3.154 を使用したに違いないとみた．しかし，劉がいかにしてそれを求めたかという記録はない．
>
> もっと正確な数値を得るための最初の明確な努力は，＋130 年頃の張衡のものであった．『後漢書』の中の彼の伝記によれば，かれは'天と地に網を打って（運動と次元を）計算した'という．恐らく，彼の π の値は，かれの亡佚書，『算罔論』の中に含まれていたに違いない．

[10]ジョセフニーダム著 監修＝東畑精一・藪内清　訳＝芝原茂・吉沢保枝・中山茂・山田慶児　1991 年 8 月 20 日発行 思索社

2.5　「中国天文学・数学集」における藪内清の解説

藪内清は科学の名著2「中国天文学・数学集」における解説「中国の天文学と数学」で円周率について次のように述べている．

> 古代および中世の数学史では円周率の精度はきわめて重要な意味を持っている．無理数である円周率をどれほど正確に求めるかによって，数学発達の程度を示す目印と見ることができるのである．すでに述べたように『九章算術』での円周率は三であるが，もちろんこれは計算の便宜上採用されたもので，この書物が完成した漢代にこれ以上精しい値を知られていなかったわけではない．前漢を滅ぼして短期間「新」王朝を建てた王莽は西暦九年に円筒形の枡を造って一般に公布したが，断面である円の面積から算定すると π=3.1547 に近い値を採用していたことがわかる．さらに少しおくれて出た後漢の張衡は，

$$\pi = \sqrt{10} = (\fallingdotseq 3.16) \tag{2.1}$$

または $\pi = \frac{92}{29}(\fallingdotseq 3.16)$ などの値を知っていた．しかしさらに詳細な値とそれを求める方法は劉徽の註釈にはじめて展開されたのである．この方法と成果とは方田章第三二問についての註釈にみえている．ここに述べられている方法は円に内接もしくは外接する正多角形によって円を近似する方法であり，ギリシアの数学にもみられる．周知のように円周率を三とするのは，円周を内接する正六角形で置き換える場合，円の直径と正六角形の周のあいだに成り立つ関係である．いま正六角形より進んで，しだいにその辺数を二倍にし，こうした正多角形の極限として円との一致を考えるのである．劉徽はまず半径十寸の円について内接する六角形より進んでしだいに正十二角形，正二十四角形，…，さらに正九十六角形，正一九二角形の面積を計算した．最後に二つの正多角形の面積を S_{96}, S_{192} とすると，次に示すような値を得る．この値の百分の一は，とりもなおさず円周率の π の近似値である．

$$S_{96} = 314\frac{584}{625}, \quad S_{192} = 314\frac{64}{625} \tag{2.2}$$

彼はまた次のような考察から，π の上下限を求めている．いま内接 n 角形と正 $2n$ 角形の面積を左図について考える．

$$nAB \cdot CD = 2(S_{2n} - S_n) \tag{2.3}$$

となるから，外接正 n 角形の面積は次のようになり，
その値は円の面積 S より大きい．

$$S_n + 2(S_{2n} - S_n) = S_{2n} + (S_{2n} - S_n) > S : \text{円の面積} \tag{2.4}$$

$$S_{96}\text{および}S_{192}\text{の値から}\quad 314\frac{64}{625} < 100\pi < 314\frac{169}{625}\text{を得る．} \tag{2.5}$$

> 以上の式で $S_{2n} - S_n$ は差冪とよばれるもので，$n = 96$ の場合の差冪は $\frac{105}{625}$ となる．ところで内接正多角形の辺を増せば増すほど正多角形は円に接近するとともに，また上下限の値も接近し，従って差冪の値も減少する．最終的にどのような算法を用いて結果に到達したかについては，やや問題が残っている．[11]

このあと三上義夫の「関孝和の業績と京城の算家並に支那の算法との関係及び比較」において述べた「以十二觚之冪為率消息」の解釈を巡って多様な見解がある．

2.6　三上義夫著「関孝和の業績と京城の算家並に支那の算法との関係及び比較」の円周率についての見解

三上義夫の「関孝和の業績と京城の算家並に支那の算法との関係及び比較(6)」は「東洋学報」第22巻　「二十八　魏の劉徽の円の算法」に上記に述べられた記述がある．以下で見ることにする．

> 其算法は次々に開平法を施していくのであるが，開平方の演算に於いて
>
> 開方除之　下至秒忽　又一退法　求其微数　微数無名者　以為分子　以下為分母　約作五分忽之二　故得股八寸六分六釐二秒五忽五分之二
>
> と云うのは，小数の計算をして居るのであり，忽の桁まで計算して，其以下は割算を使って忽の五分の二と云う数字をも求めたのである．これは恰(あたか)も関孝和が割り算に依って省略計算をしたのと同じ原則を使用するのであるが，その使い方は勿論関孝和の方が進んで居る．此の計算は九十六觚即ち九十六角形まで至り，冪三万一千四百一十億二千四百万忽となり，百億にて除して冪三百一十四寸六百二十五分寸六十四を得る．百億で除するのは単位を平方忽から寸の平方に変ずるのである．冪は面積を云う．
> 此の一百九十二觚の冪より九十六觚の冪を引き去ると，残り六百二十五寸之一百五となる．之を差冪と名付ける．差冪の二倍は九十六觚の外弧田九十六個，即ち弦と矢との相乗の凡冪である．此冪を九十六觚の冪に加えると，三百一十寸六百二十五分寸之一百六十九を得る．此れは「出於円之表」即ち円冪より溢れて出るのである．円冪は此数よりは小さいのである．故に一百九十二觚の全冪即ち冪の正数値の部分三百十四寸を取って之を円冪の定率とし，余分は之を棄てる．
> 此れから円冪百五十七で方冪二百とする．即ち $\pi = \frac{157}{50}$ とする．此れは所謂徽率と謂われるものである．
> 此算法が記された次に晋の武器庫中にある王莽の銅斛の事を説き，「以此術求之」とありて，銅斛の円周率を論ずるのである．
> 続いて次の記事がある．

[11] 銭宝綜編 川原秀城訳「中国数学史」1990年2月20日印刷　1990年2月25日発行　みすず書房　p15-17

此術微少而斛差冪六百二十五分寸之一百五　以十二觚之冪為率消息
當取此分寸之三十六. 以增於一百九十二觚之冪以為円冪三百一十四寸二十五分寸之四

この記事は何分王莽銅斛の事を記された後に出て居るのであり，微少而の次に斛字のあるものは解し難いし，怪しいようにも思われる．　けれども具さに其意義を考察するに，立派に算法を説いたものであろうと思われる．そうして銅斛の事を除いた前の部分に接触するものと見ても宜いのである．
今一百九十二觚の冪三百十四寸六百二十五分寸之六十四へ六百二十五分寸之三十六を加えると，恰も三百十四寸二十五分寸之四となる．一百九十二觚の冪を取るよりも精密だとしたのであろう．

十二觚の冪を以て率と為して消息すると云うのは，十二觚からして二十四觚...と次々の差を考え，其次々の差が次第に減少する割合を定めて，一百九十二觚の冪へ六百二十五分の三十六を加える事とすると，一層精密になると云う事であるらしい．

今此の意味の算法を試してみよう．

前記の周径率を求める算法中に九十二觚及び一百九十二觚の冪は挙げてあるが，その前のものは挙げていない．併し其算法中に示された方法によって容易に補う事ができる．清の李□□の「九章算術細草圖説」に依ると，十二觚の一面は五寸一分七六三八，二十四觚では二寸六分一五二であり，之に一尺を乗じ，且つ夫々六と十二を乗ずるときは，二十四觚と四十八觚の冪となる．依って，

12 觚冪	300	差	10.5828	
24 觚冪	310.5828	差	0.6796	6614/625
48 觚冪	313.2624	差	0.6720	1675/625
96 觚	313.9344	差	0.1680	420/625
192 觚冪	314.1024	差		105/625

此の表の如くなるのであり，斯くして得たる諸分子を次々に割って見ると，

$$\frac{6614}{1675} = 3.948 \qquad \frac{1675}{420} = 3.988, \qquad \frac{420}{105} = 4 \tag{2.6}$$

となる．故に次々の差の比は 4 と 1 との割合が近いことが知れる．従って 192 觚の冪と次の 384 觚の冪との差は 625 分寸の $105 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ となり，次第に四分の一になると見る事が出来る．然らば此等を次第に加えれば，次々の觚形の冪を得る訳で，つまり

$$105 \times \frac{1}{4} + 105 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \dots \tag{2.7}$$

の項数が限りなく増した場合の和を求め，之から円冪が得られる筈である．此の無限の和は

$$\frac{105\frac{1}{4}}{(1-\frac{1}{4})} = 105 \times \frac{1}{3} = 35 \tag{2.8}$$

となる故に斯くの如き算法を使用したとすれば，百九十二觚の冪へ六百二十五分寸の三十五を加えて円冪とすべきである．

然るに注には三十六とありて，三十五ではない．併し此の三十五は三十六の誤写などではない．即ち

$$314\frac{64}{625} + \frac{36}{625} = 314\frac{100}{625} = 314\frac{4}{25} \tag{2.9}$$

となるのであり，其れで恰も結果が整合する．[12]

以上が三上義夫の見解である．この三上の見解に『劉徽註九章算術』の註で川原秀城は「つまり「消息」とは無限等比級数の関係を示すと考えるのである．だが「消息」の用法として有限個の差率の合計を示すことがあり（『唐書』暦志），かつこの段の最後に「正三千七十二角形の面積」などとあるから，ただ割円法を有限回繰り返すことによって「差冪」を加えていき，面積を求めることと解釈しておく.」[13]

2.7　狩谷えき斎著『本朝度量権衡攷』に於ける円周率

狩谷えき斎は富谷至によれば,「今日の人名辞典・百科事典の類は，狩谷えき斎を江戸期の「考証学者」として紹介している.」[14]とある．狩谷えき斎について紹介されることが少ないので，富谷至の解説を見ることにする．

『本朝度量権衡攷』は，狩谷えき斎が終生をかけて行った研究の成果であった．原稿は四度にわたって改められたが，なおそれでも満足がいかなかったのか，生前に公刊されるには至らなかった．今日，えき斎の自筆稿本が慶応大学斯道文庫と東北大学狩野文庫に残っているが，東北大所蔵のものは初稿に近いもの，慶大のそれは四稿に近いものとされている（詳しくは,『書誌学』第四巻六号・狩谷えき斎号，1935 年，参照）[15]

とある．

2.7.1　富谷至の解説

狩谷えき斎，安永四年 (1775)12 月 1 日，江戸生まれ．父は高橋高敏といい，高橋家は，青裳堂という屋号をもった江戸下谷池端の書肆であった．真末（あるいは真秀）という名で呼ばれていたえき斎は，寛政十一年（1799），25 歳のとき，従祖弟である狩谷保古の養嗣子となり，庶子であるが，唯一残っていた保古の子・善と結婚し，狩谷家を継ぐことになる．

狩谷家は，もともと三州刈谷の出身であり，江戸神田須田町で米屋を営んでいたが，四代目三右衛門（この代より，狩谷家の当主は，代々三右衛門を名乗り，えき斎もその

[12]「東洋学報」第 22 巻　三上義夫著「関孝和の業績と京坂の算家並に支那の算法との関係及び比較（六）」p61-p65
[13]責任編集　薮内清　科学の名著 2「中国天文学・数学集」川原秀城訳『劉徽注九章算術』昭和 55 年 11 月 15 日第 1 刷発行　昭和 63 年 4 月 10 日第 2 刷発行　朝日出版社　p106
[14]狩谷えき斎著　富谷至　校注『本朝度量権衡攷 2』1992 年 3 月 10 日　初版第 1 刷発行　東洋文庫 546　平凡社 p266
[15]狩谷えき斎著　富谷至　校注『本朝度量権衡攷 2』1992 年 3 月 10 日　初版第 1 刷発行　東洋文庫 546　平凡社 p271

通称を有す）から本郷湯島に移り，貞享元年（1684）以降，津軽藩御用達の商家となる．えき斎が養子となったとき，狩谷家はいわゆる江戸の豪商だったのである．

狩谷姓になって以後，えき斎は名を望之と改める．えき斎という号自身も，実はその段階で初めて付けられたものであって，「□□」とは「合歓の木」の異称，実家高橋の屋号「青裳」も「合歓の木」を意味し，その結びつきによるものであろう．彼は卿雲という字をもち，晩年には □ 翁とも号す．狩谷家前代から引き継いだものとしては，求古楼・越花亭という号もあり，別に六漢老人と自らを呼んでいた．

生家が書肆であったことが影響を与えたのであろう．えき斎は弱年の頃から書物に親しみ，狩谷姓となる寛政年間頃までに，制度・有職故実の学に傾倒する．その過程で影響を受けた学者は，国学者・村田春海（1764 − 1811）と，幕府右筆役であり，『古今要覧稿』を編集した屋代弘賢（1758-1841）であったという．青年時代のえき斎が著述したものとして今に残るのが「延喜式東把考」「木工式之内土工葺瓦工考」である．

有職故実・制度の研究は，もとより日本を対象とするのだが，その場合，中国の制度・典籍を研究せねばならないということは言うまでもない．

—中略—

えき斎といえば，彼は儒者でもなければ，国学者にも入らない．今日の人名辞典・百科辞典の類は，狩谷えき斎を江戸期の「考証学者」として紹介しているのである．

考証学とは，思弁哲学・観念哲学の対極に位置し，広く資料を蒐集し，厳密な証拠に基づいて実証的に研究する実事求是の学である．この定義に従えば，確かにえき斎の学は考証学に属するといってよい．孔孟の教を受容する仁斎・徂徠が儒者であり，宣長がやまとごころ・もののあはれを主唱するのに比し，えき斎にあったては，儒学の経典，記紀は，あくまで実証の”道具”であり，機能的実証方法を推し進めるにあたっての一史料でしかなかった．[16]

2.7.2　狩谷えき斎の円周率

『本朝度量権衡攷 2』には，以下のようにある．

「猶ほ，未だ尾数を尽くすこと能わずにより，仮りに円径二兆と定め，内に六觚形を容れ，
劉徽・祖沖之，皆な此の法を用ひしなり．『九章算術』方田の条の注に見えたり．
屡しば勾股を求め，一千０三十億０七千九百二十一万五千百０四辺とすれば，一面六十０，
小余，九五四九一九九六九四六四九八六七一三七０有奇．
形数，相ひ乗ずれば，六兆二千八百三十億八千五百三十０万七千百七十九
小余，五八六四七七二五八一六０有奇．
を得，円径二兆を以って除すれば，三一四一五九二六五三五八九七九三二三八六二九０有奇．
是れ，径数一の周数なり．今，予が算するは，皆な此の新率を用ふ．
今，この有奇と云ふもの，皆な纖微の数あれども，此の書，小数の名，りん，毫，絲，忽の外は，古書に見ゆること無く，
且つ要する所にあらざれば，今ま截去りしなり．[17]」

[16]狩谷えき斎著　富谷至　校注『本朝度量権衡攷 2』1992 年 3 月 10 日　初版第 1 刷発行　東洋文庫 546　平凡社 p263-266

[17]狩谷えき斎著　富谷至　校注『本朝度量権衡攷 2』1992 年 3 月 10 日　初版第 1 刷発行　東洋文庫 546　平凡社　p27

この狩谷えき斎の円周率はあまり注目されることがないので，ここに載せておく．

第3章　『九章算術』劉徽註の円周率計算

ここで劉徽の円周率の計算を実際に行うことにする．

3.1　『九章算術』巻第一「方田」における円周率に関する問題とその問題に対する劉徽と李淳風の註

ここでは，大阪産業大学論集　人文・社会科学編 2 の「『九章算術』訳注稿（1）～(9)」を使用する．
円周率に関する問題は，「『九章算術』訳註稿（3)」p26 の「31」「32」と番号付けられた問題である．「『九章算術』訳注稿 (3)」の P26 から P52 であり，訳注稿のほとんどを占める．引用はこの訳注稿からである．

3.1.1　「『九章算術』訳注稿（3)」の円周率に関する問題と計算法と解答

[三一] **今有圓田．周三十步．徑十步**
問為田幾何．荅曰七十五步

[三二] **又有圓田．周一百八十一步．徑六十步三分步之一．問為田幾何．荅曰．十一畝九十步十二分之一**
術曰．半周半徑相乘得積步．
又術曰．周徑相乘．四而一
又術曰．徑自相乘．三之．四而一
又術曰．周自相乘．十二而一．

訓読 [三一] 今，円田有り，周三十歩，径十歩．問う，田を為すこと幾何ぞ．答に曰う，七十五歩
[三二] 又，円田有り，周一百八十一歩，径六十歩の一．問う，田を為すこと幾何ぞ．
答に曰う，十一畝九十歩十二分の一．
術に曰う，周を半にし径を半にし相乗ずれば積歩を得．
又，術に曰う，周・径乗じて，四にして一とす．
又，術に曰う，径自ら相乗じて，これを三し，四にして一となす．
又，術に曰う，周自ら相乗じて，十二にして一とす．

訳 [三一] 今，円周 30 歩，直径 10 歩の円田がある．問う，田の面積は如何ほどか．答にいう，75 平方歩．[三二] 又，円周 181 歩，直径 $60\frac{1}{3}$ 歩の円田がある．問う，田の面積は如何ほどか．答にいう，11 畝 $90\frac{1}{12}$ 平方歩
術にいう，円周を半分にし，直径を半分にし，これらを掛け合わせると円の面積が得られる．
又，術に曰う，円周と直径を掛け，4 分の 1 にする．

また，術に曰う，直径を自乗して，これを 3 倍し，4 分の 1 にする．
また，術に曰う，円周を自乗して，12 分の 1 にする．

[34] **臣淳風等謹按．術意以周三徑一為率．周三 十步．合徑十步．今依宓率合徑九步十一分步之六**

訓読　臣淳風等謹みて按ずるに，術の意は，周三・径一を以て率と為し，周三十歩は径十歩に合す．今，宓率に依れば，(周三十歩は）径九歩十一分歩の六に合す．
訳　臣淳風等謹みて按じますに，この術の意は，円周 3 対直径 1 を率としているので，円周 30 歩だと，直径は 10 歩に見合う．今，宓率によって計算すると，(円周 30 歩だと）直径は $9\frac{6}{11}$ 歩に見合う．
[35] [劉註] **此於徽術．當為田七十一步一百五十七分之一百三**
訓読：此れ徽の術に於て，当に田七十一歩一百五十七分の一百三と為すべし．
訳：この場合，私の計算術によれば，(周 30 歩の）田の面積は 71 歩 $\frac{103}{157}$ 平方歩となるはずである．
[36] **臣淳風等謹按依宓率．為田七十一步二十二分步之一十三**
訓読：　臣淳風等謹みて蜜率に依れば，田七十一歩，二十二分歩の一十三と為す．
訳：臣淳風等謹みて宓率に依って計算しますと，田の面積は 71 平方歩 13/22 平方歩となります．

[37] **臣淳風等謹按，周三徑一．周一百八十一步．徑六十步三分步之一．依宓率．徑五十七步二十二分步之十三**

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに，周三径一なれば，周一百八十一歩にして，径六十歩三分歩の一．宓率に依れば，径五十七歩二十二分歩の十三
訳：臣淳風等謹みて按じますに，周 3，直径 1 の比率では，円周 181 歩だと，直径は $60\frac{1}{3}$ 歩となる．宓率によれば，(円周 181 歩だと)，直径は $57\frac{13}{22}$ 歩となります．
[38] [劉注]　**此於徽術．當為田十畝二百八步三百一十四分之一十三．**

訓読 此れ徽の術に於いて，当に田十畝二百八歩三百一十四分歩の一百一十三と為すべし．
訳 この場合，私の計算術によれば，田の面積は 10 畝 $205\frac{113}{314}$ 平方歩となるはずである．

[39] 臣淳風等謹依宓率，為田十畝二百五步八十八分步之八十七

訓読 臣淳風等謹みて宓率に依れば，田十畝二百五歩八十八分歩の八十七と為す．
訳 臣淳風等謹みて宓率に依って計算しますと，田の面積は 10 畝 $205\frac{87}{88}$ 平方歩となります．

このあとに劉徽の円周率の計算の説明が続く．

3.1.2　劉徽の円周率の計算法の説明

古代

[劉注]　按，半周為従，半徑為廣．故廣従相乗為積歩也．假令圓徑二尺．圓中容六（弧）[觚] 之一面，與圓徑之半，其數均等，(令) [合] 徑率一而觚周率三也．又按為圖，以六觚之一面乗一弧半徑（二因而六）[三] 之，得十二觚之冪．若又割之，次以十二觚之一面乗一弧半徑（四因而）六之，則得二十四觚之冪．割之彌細，所失彌細．割之又割，以至於不可割．則與圓周合體，而無所失矣．觚面之外，猶有餘徑，則冪不外出矣．以一面乗半徑，觚而裁之，毎輒自倍．故以半周乗半徑而為圓冪．此以周・徑謂至然數．非周三徑一之率也．周三者，従其六觚之環耳．以推圓規多少之覺，乃弓之與弦也．然世傳此法，莫肯精覈．學者踵古，習其誤失．不有明□（フォントなし），凡物類形象，不圓則方．方圓之率，誠著於近，則雖遠可知也．由此言之，其用博矣．謹按（圓）[圖] 験，更造　率．恐空設法，數昧而難譬．故置諸検括，謹詳其記注焉

宻

訓読：按ずるに，半周を従（縦）と為し，半径を広と為す．故に広・従（縦）相乗じて積歩と為す也．仮令に円径二尺とす．円中に六觚を容るるの一面は，円径の半と其の数均等なれば，径率一にして觚の周率三と合する也．又，按じて図を為すに，六觚の一面を以って一弧の半径に乗じ，之を三すれば，十二觚の冪を得．若し又之を割り，次いで十二觚の一面を以って一弧の半径に乗じ，之を六すれば，則ち二十四は觚の冪を得．之を割ることや弥々（いよいよ）細なれば，失う所弥々（いよいよ）少なし．之を割り又割りて，以て割るべからずに至れば，則ち円周と合体して，失う所なし．觚の面の外，猶お余径有り．面を以て余径に乗ずれば，則ち冪は弧の表に出づ．若し夫の觚の細なる者，円と合体すれば，則ち表に余径なし．表に余径無ければ，則ち冪は外出せず．一面を以て半径に乗じ，觚にして之を裁てば，毎に輒ち自ら倍す．故に半周を以て半径に乗じて円の冪と為る．此れ周・径を以て至然の数と謂う．周三・径一の率に非ざる也．周三なる者は，其の六觚の環に従うのみ．以て円規（と觚）の多少の覚（較）を推せば，乃ち弓と弦也．然れども世々此の法を伝うるに，肯て精覈する莫し．学ぶ者古えを踵ぎ，其の謬失を習う．明拠有らざれば，之を弁ずること欺れ難し．凡そ物類の形象は，円ならざれば則ち方．方円の率，誠に近きに著（あきら）かなれば，則ち遠しと雖も知るべき也．此れにより之を言えば，其の用や博し．謹んで図を按じて験し，更に蜜率を造る．空しく法を設くるのみなれば，数昧（くら）くして譬え難きを恐る．故に諸を検括に置き，謹んで其の記注を詳しくす．[1]

訓読：案ずるに，円の場合は，半周を縦とし，半径を広とせよ．故に，(方田の面積と同様に) 広・縦を互いに掛けると円の面積が出る．

今，仮に円の直径を 2 尺とする．円に内接する正 6 角形を考えるとその 1 辺は，円の

[1]大阪産業大学論集　人文・社会科学編 2「『九章算術』訳注稿 (3)」p28-29

直径の半分とその数値が等しいので，直径の比率 1 で正 6 角形の外周の比率 3 と合致する．また，図を作って考えると，正 6 角形の 1 辺をその半径に掛け，これを 3 倍すると，正 12 角形の面積が得られる．[2]もし更に正 6 角形を割って（正 12 角形を作り），次いでその正 12 角形の 1 辺をその半径に掛けて，これを 6 倍すると正 24 角形の面積が得られる．これを割ってますます細かくすると，失うところ（即ち，円と正多角形の差）がますます少なくなる．之を割り続けてゆき，もう割れないところまで至れば，その正多角形は円周と合体し，失うところは無くなるのである．正多角形の 1 辺の外になお余径がある．1 辺を余径に掛けると，その面積は弧の外表に出る．もし正多角形が細くなって，円と合体すると，弧の外表に余径がなくなる．弧の外表に余径がなくなると，面積は外へ出なくなる．觚の 1 辺をその半径に乗じたものは，その觚の 1 辺を裁ってできる 2 つの觚の面積の，いつでも常に 2 倍になっている．故に半周を半径に掛けると円の面積となる．これで円周と直径の比率を「至然の数」と謂う．円周 3，直径 1 の率ではない．円周 3 というのは，そのうちの正 6 角形の外周に従っているにすぎない．そこで円弧と（この外周）がいかほどかという差を推しはると，乃ち弓の弦に対する関係となるのである．しかし，世間ではこの法を伝えるに，精密に考証しようとしなかった．学ぶ者も古えを継ぎその誤りを習った．明らかな証拠がなければ，これを弁じても難しいのである．凡そ物の形象は，円でなければ方である．方円の率が誠に近い処で顕かとなれば，遠きものといえども知ることができるのである．このことから方円の率を言えば，その用途は広い．そこで，図を案じて証明し，更に蜜率を造ったのである．ただ，法（数値）を設けるだけでは，数値（の根拠）が不明で諭すに難しいのではなかろうか．そこで，これを点検・概括の場を置き，謹んでその注記を詳しくした次第である．[3]

この部分は証明の方針を示している．この証明の方針の中で「円の直径を 2 尺」としていることが特筆される．この円の直径が 2 尺という仮定は後の計算の便宜を考えて設定されたと考えられる．以下で上記の続きを見ることにする．

[2]訳註稿の注 (90) に次のようにある．

図 1 のように（図は略），正 6 角形の 1 辺 (l_6) と円の半径 (r) を掛けて，これを 3 倍すると，円に内接する正 12 角形の面積 (S_{12}) となるということ．計算で示すと，$S_{12} = \frac{1}{2} \times l_6 \times r \times 6 = 3 \times l_6 \times r$ となる．

[3]大阪産業大学論集　人文・社会科学編 2「『九章算術』訳注稿 (3)」p32

第4章　『九章算術』の劉徽注のπの計算

中国の数学書である『九章算術』には劉徽が註記を書いて，その中で内接多角形による円周の計算により，$\frac{157}{50}$ という円周率を求めたことが知られている．

劉徽の註記には，その計算手順と計算結果が記されている．その手順に従って計算過程を追うことが可能である．劉徽は内接正6角形から始めて，正12角形，正24角形，正48角形，正192角形の円周に内接する多角形の一辺の長さを「勾股の術」(三平方の定理）で求め，その値を内接多角形の辺の数を掛け合わせることで円周を求めた．

劉徽の註記には，内接正6角形から始まり内接正192角形までの具体的数値も記している．この数値に基づき，その検算を行うことが可能である．

以下で,「科学の名著2　中国天文学・数学集」『九章算術』,「『九章算術』魏劉徽註　(唐) 音義　(宋) 李籍撰　清刊」の印影本をテキストとして，劉徽の計算過程を明らかにする．

4.1　『九章算術』について

この『九章算術』は題名の通り「九章」から成り立っている．その成立年代はユークリッドの『原論』と同様詳しくは知られていない．数学史家の説によると，紀元前100年から紀元100年頃までに編纂されたとされている．編者の名は知られていなく，何人もの算学者の補修編纂を経て成立したと考えられている．

現在伝えられている『九章算術』は3世紀半ばに，三国魏の劉徽（りゅうき）の註記と唐の李淳風の注釈を加えられてものである．古代中国では，周代から官僚制が制度として成立し，前8世紀の斉桓公の時代に九九をもって仕官を求めた人物があったことが古文献にみえており，数学者も役人として召し抱えられていた．漢の時代にいたっては，封建領主たちが，彼らの租税の取り立てや，国家の必要とする土木工事などの為に，高度の数学が必要であった．その土木工事については『史記』「河渠書」に述べられている．

4.1.1　『九章算術』の章立て

巻一「方田」（田地の面積計算，38問）

巻二「粟米（ぞくべい）」（穀物の換算，46問）

巻三「衰分（しぶん）」（按分比例，20問）

巻四「少広」（面積・体積計算，24問）

巻五「商功」（体積計算，28問）

巻六「均輸」（田租の運搬，28問）

巻七「盈不足（えいぶそく）」（複仮定法，20問）

巻八「方程」（多元一次方程式，18問）

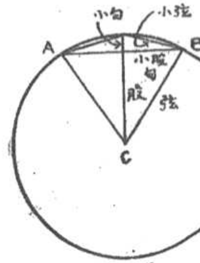
巻九「勾股（こうこ）」（直角三角形，24問）

計246問である．
紀元263年に劉徽（りゅうき）が，この『九章算術』に註記を加えた．πの計算は「巻一「方田」の章」に出てくる．

4.2　劉徽の計算の前提

1.　『九章算術』の円周率の求め方では3を使用していること，その円周率が内接正6角形の辺の長さに基づいたものであることを明らかにした．
2.　劉徽は内接正6角形を次々と二等分することで円周率を求めた．
3.　「勾股の術」が適用できるように，直径2尺 (20寸) の円の内接正6角形から始めた．

4.2.1　計算の手順



「勾股の術」が適用できる方法を考える．

1. 右の図のように，円の中心から内接正6角形の一つの内接正3角形の円周に向かって垂線を引く．その垂線の長さは，半径の10寸となる．
2. その垂線と円周の交点から，内接正3角形の一方の頂点と結び，その辺を「弦」とする．
3. 円周側の内接正3角形の辺は，垂線により二等分されるので
その半分の辺の長さは5寸となる．これを「句」とする．
内接正6角形版の長さは同じである．その内の一つの内接正3角形を取り出しているので，
内接正6角形の辺の長さは10寸であり，
その半分は5寸となる．
4. 垂線の円周側の内接正3角形の辺との交点までの長さを「小股」とし，
その交点と中心までの長さを「股」とする．
5. 「小股」と「句」の正3角形の弦を「小弦」とする．

このように，作図された内接正 12 角形から「勾股の術」を適用すれば，内接正 12 角形の辺「小弦」が求められる．

図から明らかなように，小弦は「勾股の術」（小弦^2 = 句^2 + 小股^2）から求めることが出来る．

「小股」は「弦」から「股」から引けばよい．式で表せば，小股＝弦－股となる．従って，弦，股を求めれば小股が求めることが出来る．

以上が劉徽の計算の手順である．以下でその手順に従い具体的に計算してみよう．

4.2.2　正 6 角形から正 12 角形の一辺の長さを求める計算

劉徽の与えた値; 弦（半径）:10 寸，句（半径の $\frac{1}{2}$):5 寸

勾股の術；弦^2＝句^2 + 股^2 **より，** 股^2＝弦^2 − 句^2 **である．**

具体的数値を入れる．

股^2 = 弦$^2(10^2)$ − 句$^2(5^2)$ = 75 となる．これを開平する．

$$股=\sqrt{75} = 8.660254037844386$$

この値を弦（半径 10 寸）から引けば，小股となる．

$$股 = 10 - 8.660254037844386 = 1.339745962155615(劉徽の求めた値は, 1.339746)$$

従って，正 12 角形の弦の値を小弦とすれば，小弦^2 = 句^2 + 小股^2 で与えることが出来る．

$$小弦^2 = 5^2 + 1.339745962155615^2 = 26.79491924311228(劉徽の求めた値は, 26.7949193445)$$

この値が正 12 角形の弦冪である．この値を開平すれば，正 12 角形の一辺の長さとなる．

$$小弦=\sqrt{26.79491924311228} = 5.176380902050416$$

この値を ~~12~~ 6 倍すれば正 12 角形の円周となる．

$$5.176380902050416 \times 6 = 31.0582854123025 \ (寸)$$

寸に直すと，310.582854123025 尺となる．

4.2.3　正 12 角形から正 24 角形の一辺の長さを求める計算

半径（10 寸）を弦，正 12 角形の一辺の半分（5.176380902050416/2) を句とする．

正 12 角形の小弦冪を 4 を割る

$$26.79491924311228 \div 4 = 6.69872981077807(この値を正 24 角形の句べきとする.)$$

正 24 角形の句冪を弦冪（半径；10 × 10=100）より引く．

$$100 - 6.69872981077807 = 93.30127018922192$$

この値を正 24 角形の股冪とする．この値を開平すると股が求められる．

$$股=\sqrt{93.30127018922192} = 9.659258262890683$$

劉徽の値；$9.65925\frac{4}{5} = 9.659258$

この値を股とする．

小句を求める計算

$$小句=股 - 半径 \ (10 寸) = 10 - 9.659258262890683 = 0.34074173710932$$

劉徽の値; 0.3407452

正 24 角形の一辺の長さを求める計算

正 12 角形の半分が，正 24 角形の一辺の長さとなるので，正 12 角形の一辺の長さを 2 で割ると正 24 角形の一辺の長さ，小股が求められる．

$$正 24 角形の小股 = \frac{5.176380902050416}{2} = 2.588190451025208$$

正 24 角形の弦冪を求める計算

$$正 24 角形の弦冪= 0.34074173710932^2 + 2.588190451025208^2 =$$
$$0.11610493140828 + 6.698729810778069 = 6.814834742186349$$

劉徽の値　；6.8148349466

4.2.4　正 24 角形の円周側の一辺の長さを求める計算

上記の弦冪を開平すると求められる.

$$\sqrt{6.814834742186349} = 2.610523844401033$$

この値を 12 倍すれば，正 24 角形の円周となる.

$$2.610523844401033 \times 12 = 31.3262861328124$$

寸に変換すると，313.262861328124 となる.

4.2.5　正 24 角形から正 48 角形の一辺を求める計算

半径；10 寸，正 24 角形の一辺の半分を句とし，股を求める.
正 24 角形の一辺の長さ (2.610523844401033) の半分が正 48 角形の一辺

$$\frac{2.610523844401033}{2} = 1.305261922200517$$

正 24 角形の小弦冪；6.814834742186349　(劉徽の値; 6.8148349466)

4.2.6　正 24 角形の小弦冪を 4 で割る

$$\frac{6.814834742186349}{4} = 1.703708685546587$$

劉徽の値；1.7037087366
この値を正 48 角形の句冪とする.

小句の計算

正 48 角形の句冪を弦冪 (100) から引く.

$$100 - 1.703708685546587 = 98.29629131445341$$

そして，この値を開平する.

$$\sqrt{98.29629131445341} = 9.914448613738104$$

これを半径 (10 寸) から引く.

$$10 - 9.914448613738104 = 0.085551386261896$$

この値を正 48 角形の小句とする.

正 48 角形の弦を求める計算

$$\text{正 48 角形の小弦}^2 = 0.085551386261896^2 + 1.305261922200517^2$$

$$= 0.0073190396913321 + 1.703708685546589 = 1.711027725237921$$

劉徽の値；　1.7110278813
この正 48 角形の小弦冪を開平すれば，正 48 角形の円周側の一辺の長さが求まる.

$$\sqrt{1.711027725237921} = 1.308062584602863$$

劉徽の値の開平計算

$$\sqrt{1.7110278813} = 1.308062644256765$$

この値を 24 倍すれば正 96 角形の円周になる.

$$1.308062584602863 \times 24 = 31.39350203046871$$

劉徽の値での計算

$$1.308062644256765 \times 24 = 31.39350346216236$$

寸に直すと，313.9350203046871　となる.

4.2.7　正 48 角形から正 96 角形の一辺の長さを求める計算

半径 10 寸；弦　　正 48 角形の半分を句として，股を求める.
正 96 角形の一辺の長さ；正 48 角形の一辺の長さの半分

$$1.308062584602863 \div 2 = 0.65403129230143$$

正 48 角形の弦冪；　1.711027725237921 (劉徽の値；　1.7110278813)

正 48 角形の弦冪を 4 で割る

$$\frac{1.711027725237921}{4} = 0.42775693130948$$

劉徽の値での計算

$$\frac{1.7110278813}{4} = 0.427756970325$$

この値を正 96 角形の句冪とする.

小句の計算

上記の句冪を弦冪 (100) から引く.

$$100 - 0.42775693130948 = 99.57224306869053$$

この値を開平する.

$$\sqrt{99.57224306869053} = 9.978589232386035$$

劉徽の値； 9.978589
これを半径 (10 寸) から引く.

$$10 - 9.978589232386035 = 0.021410767613965$$

劉徽の値； 0.021411

「勾股の術」の適用

正 96 角形の小股は正 48 角形の半分の値；0.65403129230143

$$\text{正 96 角形の小弦}^2 = 0.021410767613965^2 + 0.65403129230143^2 =$$

$$0.00045842096981921253 + 0.42775693130948 = 0.4282153522793$$

この 小弦^2 を開平すれば，正 192 角形の一辺の長さになる.

$$\sqrt{0.4282153522793} = 0.65438165643552$$

劉徽の値；0.65438
これに尺 (10 寸) を掛け，48 を掛けると正 192 角形の円冪，円周率となる.

$$0.65438165643552 \times 10 \times 48 = 314.1031950890496$$

劉徽の値； 314.102400

4.2.8　正 192 角形から正 384 角形の計算

半径；10 寸，　正 192 角形の一辺の長さの半分を句として，股を求める.
正 192 角形の一辺の長さ；0.65438165643552　半分の長さ；　0.32719082821776
正 192 角形の小弦冪；0.4282153522793

正 192 角形の小弦冪を 4 で割る

$$\frac{0.4282153522793}{4} = 0.10705383806983$$

この値を正 384 角形の句冪とする.

この句冪を弦冪 (100) から引く

$$100 - 0.10705383806983 = 99.89294616193017$$

開平する.

$$\sqrt{99.89294616193017} = 9.994645874763656$$

この値を半径 (10) から引く.

$$10 - 9.994645874763656 = 0.0053541252363445$$

この値を正 384 角形の小句とする.

勾股の術

正 384 角形の小股は，正 192 角形の半分；0.32719082821776

$$\text{正 384 角形の小弦}^2 = 0.0053541252363445^2 + 0.32719082821776^2 =$$

$$0.000028666657046461055 + 0.10705383806982 = 0.10708250472687$$

この 小弦^2 を開平すれば，正 384 角形の一辺の長さとなる.

$$\sqrt{0.10708250472687} = 0.32723463252973$$

この値に 10 と 96 を掛ける.

$$0.32723463252973 \times 10 \times 96 = 314.1452472285408$$

この値が正 768 角形の面積である.

4.2.9　正 768 角形から正 1536 角形の計算

半径；10 寸，正 768 角形の一辺の長さの半分を句として，股を求める.
正 768 角形の一辺の長さ；0.32723463252973,　半分の長さ；0.16361731626487
正 768 角形の小弦冪；0.10708250472687

正 768 角形の小弦冪を 4 で割る

$$\frac{0.10708250472687}{4} = 0.026770626181717$$

この値を正 1536 角形の句冪とする．

この句冪を弦冪 (100) から引く

$$100 - 0.026770626181717 = 99.97322937381829$$

開平する．

$$\sqrt{99.97322937381829} = 9.998661379095617$$

これを半径 (10 寸) から引く．

$$10 - 9.998661379095617 = 0.0013386209043826$$

この値を正 1536 角形の小句とする．

勾股の術

正 1536 角形の小股は，正 768 角形の半分；0.16361731626487

$$\text{正 1536 角形の小弦}^2 = 0.0013386209043826^2 + 0.16361731626487^2 =$$

$$0.0000017919059256500901 + 0.026770626181718 = 0.026772418087644$$

この値を開平すれば，正 1536 角形の一辺の長さとなる．

$$\sqrt{0.026772418087644} = 0.16362279207874$$

この値に 10 を掛け，192 を掛ける．

$$10 \times 192 \times 0.16362279207874 = 314.1557607911807$$

4.2.10 正 1536 角形から正 3072 角形の計算

半径；10 寸，　正 1536 角形の一辺の長さの半分を句として，股を求める．
正 1536 角形の一辺の長さ；0.16362279207874　　半分の長さ；0.08181139603937
正 1536 角形の小弦冪；0.026772418087644

正 1536 角形の小弦冪を 4 で割る

$$\frac{0.026772418087644}{4} = 0.006693104521911$$

これを正 3072 角形の句冪とする．

弦冪 (100) から引く

$$100 - 0.006693104521911 = 99.99330689547809$$

開平する．

$$\sqrt{99.99330689547809} = 9.99966533917401$$

半径 10 寸から引く

$$10 - 9.99966533917401 = 0.00033466082598998526$$

この値を正 3072 角形の小句とする．

勾股の術

正 3072 角形の小股は，正 1536 角形の一辺の半分の長さ；0.08181139603937

$$\text{正 3072 角形の小弦}^2 = 0.00033466082598998526^2 + 0.08181139603937^2 =$$

$$0.00000011199786845229923 + 0.0066931045219106 = 0.0066932165197791$$

この値を開平すると，正 3072 角形の一辺の長さとなる．

$$\sqrt{0.0066932165197791} = 0.081812080524695$$

この値に 384 を掛け，10 を掛けると正 3072 角形の面積となる．従って，円周率となる．

$$0.081812080524695 \times 384 \times 10 = 314.1583892148288$$

以上が劉徽の π の計算である．具体的な数値は正 192 角形までであるが，劉徽の方法に従って正 3072 角形までの計算をしてみた．

次に，劉徽は「律嘉量斛」による円周率の計算を取り上げている．これの計算を見ることにしよう．

4.3　『九章算術』巻第一劉徽註記「律嘉量斛」の計算

この「律嘉量斛」は，現在「漢嘉量」と呼ばれており，王莽が一時漢の政権を奪って新 (8～24A.D) と号した時に枡の標準器として，劉きんが作ったとされるものである．

台湾の故宮博物館に現存している．やく，合，升，斗および斛の五つの標準枡が一体となって銅で作られている．

劉徽はその「律嘉量斛」の銘「内方一尺，その外を円にす．ちょう旁九厘五毛，円冪百六十二寸，深さ一尺，円積千二百二十寸，十斗容る」とある値を用いて円冪を計算した．この計算過程を追ってみよう．

4.3.1　「この定数で円冪を求めると，百十一平方寸と少しで銘の値に近い」の計算

「律嘉量斛」の「斛」の上面を図のように対角線を引く．

対角線の交点は円の中心となる．円の中心から正四角形へ垂線をおろすと，

正三角形を 2 分する．従って，内方一尺 (10 寸) となっているので，その長さは 5 寸である．

垂線の長さは，外接円の半径と見なせば，その長さも 5 寸となる．

直角三角形の斜辺の長さは，勾股の術によって求めることが出来る．

斜辺の長さを弦とすれば，

$$弦^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

これを開平すれば，弦の長さが求められる．

$$\sqrt{50} = 7.071067811865475$$

この値が，内接正 4 角形の弦の長さ，対角線の半分の長さになる．

これに,「ちょう旁」（すきま）の値　0.095 を加えた値が外接円の半径の長さになる．

$$7.071067811865475 + 0.095 = 7.166067811865474$$

円の面積は πr^2 で与えられるので

$$3.14 \times 7.166067811865474^2 = 161.2469375565589$$

この値が劉徽が言う円冪である．

4.3.2　『「差冪」が六百二十五分の百五平方寸もあった所の値である』の計算

1) 劉徽の内接正 192 角形の面積；

$$314\frac{64}{625} = 314.1024$$

2) 劉徽の内接正 96 角形の面積；

$$313\frac{584}{625} = 313.9344$$

差冪の計算

$$1) - 2) = 314\frac{64}{625} - 313\frac{584}{625} = \frac{196314}{625} - \frac{196209}{625} = \frac{105}{625} = 0.168$$

4.3.3　「内接正 12 角形の面積を基点として，つぎつぎに「差冪」を加えていくと，六百二十五分の三十六平方寸を内接正 192 角形の面積を加えた三百十四平方寸と二十五分の四平方寸が円冪となる」計算

劉徽の内接正 192 角形の面積；

$$314\frac{64}{625} = 314.1024$$

劉徽の内接正 12 角形の面積；

$$310.5828$$

この内接正 12 角形の面積の値は，劉徽は明示していないので，計算で求めた値の下 4 桁までの数値である．下 5 桁以降は切り捨ててある．

差冪をつぎつぎ加える計算

1) 0.168 × 19=3.192

2) 0.168 × 20=3.36

3) 0.168 × 21=3.528

4) 0.168 × 22=3.696

これらの値を内接正 12 角形の面積 310.5828 に加える．

5) 310.5828+3.192=313.7748

6) 310.5828+3.36=313.9428

7) 310.5828+3.528=314.1108

8) 310.5828+3.696=314.2788

となる．劉徽はこれらの計算の前に π の評価を行っている．

そこで劉徽は，π の値を $314\frac{64}{625} = 314.1024$ と $314\frac{169}{625} = 314.2704$ の間と評価している．

「六百二十五分の三十六平方寸と内接正 192 角形の面積を加えた三百十四平方寸と二十五分の四平方寸が円冪となる」計算

劉徽の π の評価は，最終的に $\frac{4}{25} = \frac{100}{625} = 314.16$ としている．$314\frac{36}{625}$ をどのように求めたのであろうか？

以下で推測する．計算過程から見ると, 内接正 192 角形の面積 $314\frac{64}{625}$ と内接正 96 角形の面積に 2 倍の差冪を加えた値 $314\frac{169}{625}$ の間に π の値があると考えたのであるので，整数部分を除いて分数部

分について考える．内接正 192 角形の面積の分数部分から内接正 96 角形に 2 倍の差冪を加えた面積の分数部分から引くと，$\frac{105}{625}$ となる．この値は差冪である．

従って，劉徽は π の分数部分について内接正 192 角形の面積の分数部分 $\frac{64}{625}$ を引いた値

$$\frac{105}{625}-\frac{64}{625}=\frac{41}{625}$$

の近くに π の値があると考えたのではなかろうか？分数部分を差冪の値とすれば $314\frac{105}{625}=314.168$ となる．

即ち，分子の部分の $\frac{1}{625}$ から $\frac{41}{625}$ の間に π の分数部分の値があると考えた．

それを求めるために「差冪をつぎつぎ加える計算」を「差冪をつぎつぎ引く計算」と見たのではなかろうか？実際に計算してみる．

「差冪をつぎつぎ引く計算」

$$\frac{41}{625}=0.656,\ \frac{40}{625}=0.064,\ \frac{39}{625}=0.0625,\ \frac{38}{625}=0.0608$$
$$\frac{37}{625}=0.0592,\ \frac{36}{625}=0.0576,\ \frac{35}{625}=0.056,\ \frac{34}{625}=0.0544$$

ここで内接正 12 角形の面積に差冪を 21 回加えた値 314.1108 を内接正 192 角形の面積の値 314.1024 から引くと，0.0572 となり，この値に一番近い値 $\frac{36}{625}=0.0576$ を π の値に加える値として考えたのであろう．

従って，内接正 192 角形の面積 $314\frac{64}{625}$ に $\frac{36}{625}$ を加えた値 $314\frac{100}{625}=314\frac{4}{25}$ としたと推測できる．

劉徽が内接正 394 角形の面積から内接正 3072 角形の面積までの π の値を計算していたとすれば，次のような推測も成り立つ．

劉徽の方法で計算した値は，

内接正 768 角形の面積 : 314.1452472285408

内接正 1536 角形の面積 : 314.1557607911807

内接正 3072 角形の面積 : 314.1583892148288

となるから，劉徽の計算力を考えれば，$314\frac{4}{25}$ という π の評価も十分に考えることが可能である．

4.3.4　π の 100 桁の数値

2002 年東京大学　金田康正教授の π の計算式

$$\pi=48\arctan\frac{1}{49}+128\arctan\frac{1}{57}-20\arctan\frac{1}{239}+48\arctan\frac{1}{110443}$$

この式で計算した 100 桁の π の値

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510
58209749445923078164062862089986280348253421170 68