ワイルのリー群論

杉浦 光夫（津田塾大学）

ワイル（1885－1955）のリー群論の主要な内容とその評価については，以前に「ワイルの表現論」[21] として発表したことがあるので，こゝでは，重複を最小限にとどめ、主としてその形成過程と、ワイルの他の研究や先行者の仕事との関連に重点を置いた。以下引用するワイルの論文は便宜上 "H. Weyl, Ges. Abhandlungen"[W] における論文番号を丸括弧に入れて (30) のように示す。またワイルの著書は (B1) のように記し，ワイル以外の文献は角括弧で [21] のように記す。これら三種類の引用文献は，この文章の終りに題等を記しておいた。

1. 1922 年までのワイルの研究

ワイルは 1885 年 11 月 9 日 シュレスウィヒ・ホルスタンのエルムスホルンで、銀行家の父 ルートウィヒと母 アンナの間に生れた。アルトナのギムナジウムで、数学，物理に興味を抱き、1904 年アビドゥアを取得し、大学は主として ゲッティン

ゲンのヒルベルトの下で学んだ。(2学期だけミュンヘンで過す。) 1908年ヒルベルトの下で「特異積分方程式」についての論文(1)で学位を得た。この学位論文と続く(3)では、ヒルベルトの無限個の変数の有界二次形式論を用いて、無限区間[0,+∞)上の実対称核の積分作用素の研究を行った。エルミット函数やラゲール函数による展開や、通常と少し異なる形でのフーリエ積分定理などが例として扱われている。積分作用素と言っても無限区間なので、一般に完全連続でなく、連続スペクトルも現われるような場合をワイルは取り上げたのである。

しかし内容的に重要なのは、翌年彼が講師資格論文として書いた、二階の自己共役常微分方程式の特異境界値問題と、固有函数展開に関する論文(6)(7)(8)である。このような方程式の正則境界値問題については、既に19世紀中に、スチュルムとリューヴィルによって理論が作られていた。しかし多くの物理学の偏微分方程式の境界値問題、初期値問題を、変数分離と重ね合わせの原理に基いて解くフーリエの解法から生ずる二階常微分方程式の固有函数展開は、フーリエ級数の場合以外は、殆んどすべて特異境界値問題に属する。すなわち考える区間が無限区間であるか、有限区間でも区間の端で二階の項の係数が0となり、そこが特異点となるのである。従ってスチュルム・リューヴィルの理論は、実用上は殆んど役に立たず、特

異境界値の場合を扱える理論が待望されていたのであった。ワイルはグリーン函数を用いて、問題を特異積分方程式に転換して、この問題を見事に解き、第一級の解析家としての手腕を示した。

ダルムシュタットの数学教授であったヴォルフスケールが、フェルマの大定理の完全な証明を与えた者に与えるべき賞金として10万マルクの遺産を残したが、その授与者の決定と、利子の使途はゲッティンゲン科学協会に委ねられた。ヒルベルトはその決定をする委員会の長となり、利子の有効な使途として、内外の有力な学者を招くことにした。1909年にはポアンカレが招かれ、1910年には、H.A.ローレンツが招かれた。このとき、ローレンツは講演の中で、次の問題を提示した。「一様な振動体の固有振動数の分布は、振動数→∞の極限では、物体の形状によらず、体積だけできまる」ことは、物理的には確かと思われる根拠があるが、数学的にこれを証明できるかというのがその問題であった。固有値問題を研究していたワイルは直ちにこれに取組み、簡単な場合には、ローレンツの予想が成立つことを短期間の内に証明した(13)。(13)では平面上の面積Jの膜の振動において、n番目の固有値をλ_nとするとき、

$$\lim_{n\to\infty} n/\lambda_n = J/4\pi$$

であることを証明している。(16)では、3次元空間での同様の問題は、音波のようなスカラー波の場合には

$$\lim_{n\to\infty} n^2/\lambda_n^3 = J/6\pi^2 \qquad (J\text{は領域の体積})$$

となり、電磁波（ベクトル波）の場合には、$6\pi^2$ が $3\pi^2$ となることを示している。また境界条件のとり方は、上の結果に影響しないことも示されている。ワイルはこの問題についてさらに研究を続け、(17)(18)(19)(22)を書いた。(22)では一番一般な弾性波の場合が扱われて居り、(19)では上のような漸近近似の相対誤差が $\lambda\to\infty$ のとき0に収束することが示されて居る。より精密に言えばスカラー波の場合相対誤差は $\log\lambda_n/\sqrt{\lambda_n}$ の定数倍で上から押えられることが証明されている。このように外部から示された問題に、直ちに反応し解を与えることが出来た点に、ワイルの実力が示されている。

講師となったワイルは1911/12年の冬学期に、リーマン面についての講義を行い、その内容をまとめて1913年に「リーマン面の理念」(B1)として出版した。これはリーマン，クライン，ヒルベルト，ケーベなどゲッティンゲンの伝統の成果に、ポアンカレのフックス群山と位相幾何学山を取入れてできた本である。その出来上りを見ると一変数函数論の主要な内容を一つの完結した体系として見事にまとめている。そこではリーマン面は、三角形分割を許す一次元複素多様体として定義さ

れている。三角形分割は、少し前にポアンカレが導入したもので、当時はまだあまり普及していなかったが、ワイルはこれを取入れることによって、リーマン面の位相的考察を確実な基礎の上に置くことができたのであった。基本的なリーマン面上の解析函数の存在定理の証明や一意化定理の証明は、ヒルベルトのものによっているが、豊富な内容の理論を、本文179ページの中に、書き切った手際は見事なものであり、今日まで古典として読み継がれてきたのもうなづける。

この本が出版された1913年に、ワイルはフッサールの学生であったヘレーネ(ヘラ)・ヨーゼフと結婚し、チューリッヒの連邦工科大学(ETH)の教授に就任した。

ワイルは、1910年に発表した球函数展開におけるギッブス現象に関する論文(10)の中で二つの異なる金属の半円からなる円環上の熱方程式の初期値問題において、金属の熱伝導率が無理数のとき、ディオファントス近似の定理を用いた。この研究とボールの平均運動についての研究について聞いたことから、mod. 1 での一様分布の研究(20)(23)(1914、16年)が生れた。これについては、この論文集中の鹿野健氏の論文を参照されたい。

1914年始まった第一次大戦は、数学者にも大きな影響を及ぼした。ワイルも1915年召集され、ザールブリュッケンの

守備隊に一兵卒として一年間勤務したが、スイス政府の要請で16年に除隊し、研究と教育の生活にもどることができるようになった。チューリヒにもどったワイルが最初手をつけたのは、卵形面の剛体性に関する微分幾何学的研究(27)であったが、間もなく1915年に発表されたアインシュタインの一般相対論の研究[7-9]にワイルは夢中になった。アインシュタインが重力と相対性理論の関係を考え出したのは、かなり以前からで、1907年の論文で既にこれを論じている。しかし、アインシュタインが目指す一般共変性原理をみたす理論をどのように定式化すべきかは、容易に解決できなかった。結局親友グロスマンの助言と共同研究(1914年)によって、リッチのテンソル解析が、その目的に適する数学であることがわかったが、なお十分満足すべき定式化には到達できなかった。しかし1915年になって、やっと一般共変原理と等価原理に基づく一般相対論の数学的定式化に成功し、それによる水星の近日点移動の計算が、43″/世紀となり観測値と合致することが確められたのである[8]。この定式化によると、時空は符号定数(3, 1)の不定符号リーマン計量(ローレンツ計量)を持つ4次元多様体で、質点の軌跡は、このリーマン計量に関する測地線となる。そしてこのリーマン計量の成分が、質量分布に対応する重力のポテンシャルを与える。そしてニュートン力学で、連続的

に分布する質量のニュートン・ポテンシャル u のみたす方程式であるポアッソンの方程式 $\Delta u = -4\pi m$ (m は密度を表わす)に対応するのが、アインシュタインの方程式

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -T_{ik}$$

である。こゝで g_{ik} はリーマン計量，R_{ik} はリッチ・テンソル，R はスカラー曲率，T_{ik} はエネルギー運動量テンソルである。ワイルは，相対論に関する最初の論文(29)で既に、アインシュタイン方程式の軸対称な静的解を見出している。ワイルはこの外にも相対論について(33)，(35)，(39)，(40)，(46)，(47)，(48)，(51)，(52)，(55)，(64)，(65)，(66)など多くの論文を書いた。

一方ワイルは，一般相対論では，重力場は時空の計量として，完全に幾何学化してとらえられているのに対し，電磁場は，この時空にマックスウェル方程式を与えるという形でしか扱えない点に不満を抱いた。そこでワイルは重力場と電磁場を共に時空に内在する幾何学的なもので表現するような理論(いわゆる統一場理論)を求めて研究を始めた。数学的には，(30)においてアフィン接続の概念を導入したことが重要である。これはレヴィ・チヴィタの平行性 [13] に示唆を得たものであるが，ワイルはレヴィ・チヴィタのように、多様体がユークリッド空間に埋め込まれているという仮定は用いず，直接無限に近い二点の接空間の間の一次変換を与えるものとしてアフィン接

続を定義した。さらにワイルは，(43)で射影接続，共形接続をも定義している。これらは，後にいわゆる接続の幾何学として発展を遂げることになる。

さてワイルは，統一場理論を得るために，「各点ごとに異なる倍率で長さの基準(ゲージ)を変更をしても，物理法則は不変である」という要請を原理として提唱した。これをゲージ不変の原理という。これによって，無限に近い二点におけるベクトルの長さの変化は，計量テンソルとゲージの変化を表わす一次微分式 $\varphi_i dx^i$ で表わされる。ワイルは，この φ_i が電磁場のベクトル・ポテンシャルの成分だと考えた。ワイルは(31)を，ベルリンのアカデミーの紀要(Sitzungsberichte)に投稿した。

アインシュタインは，その原稿を見て，次のような批判を行った。「ワイルの理論では，無限に近い二点の間のベクトルの長さの変化が記述されているから，それを"積分"することにより，任意の二点の間のベクトルの長さの変化が定まるはずであるが，"積分"するためには二点間の道を一つ定めなければならず，一般に道のとり方によって結果が異なるから，ワイルの理論では，各元素のスペクトル線の波長が一定しているというようなことが説明できない。」論文(31)は，このアインシュタインの批判と，それに対するワイルの答をつけて

印刷された。さらにワイルの理論では、荷電粒子の運動方程式がきめられないなどの難点があって、物理理論としては、ワイルの理論は失敗に終った。しかし1950年以後、ゲージ変換の考えが見直され、非アーベル的ゲージ場の理論が広く用いられるようになっている。

ワイルは1918年相対論の教科書「空間・時間・物質」(B2)を出版した。1919年エディントン等による日食観測によって太陽の近くでの光線の湾曲が実証されて、一般相対論がにわかに有名になり、多くの人々の関心を集めるようになったこともあり、この本は、僅かの間に五版を重ねた。

2. 空間問題

「空間・時間・物質」では、n次元(実)ベクトル空間Vの公理を与え、それが単純推移的に作用する集合Xとして、n次元アフィン空間を定義する。そしてVに正値二次形式Qが与えられているとき、Xをユークリッド空間と呼ぶ。電磁場を時空に内在する量で説明しようとしたワイルは、こゝでも計量Qが外から二次形式として与えられるのではなく、もっと内在的に与えられないかという問題を考えた((B2)第4版1921及び(45))。そのような問題は既にヘルムホルツの有名な仕事[11]

において解かれていた。ワイルのまとめによれば、ヘルムホルツの結果は、「アフィン空間Xの旗(各次元の部分空間の減少列)全体の集合の上に、単純推移的に作用するアフィン変換群の部分群として、(ユークリッド)合同変換群は特徴付けられる」と述べることができる。こゝでは二次形式が正値であることが本質的であり、不定符号の二次形式を持つミンコウスキ空間では、この定理は成立たない。この場合に非斉次ローレンツ群は、どのように特徴付けられるのであろうか。これがワイルの問題であった。平行移動の部分は、問題の本質的な部分には関係しないから、一次変換の問題として考えると次のようになる。「n変数正則二次形式Qの直交群を、Qを用いないで、内在的に特徴付けられないか?」

これに対し、ワイルの与えた答は次の定理に要約できる。

定理　n次実(または複素)行列の作るリー環$\mathfrak{g}$が、あるn変数正則二次形式の直交群のリー環となるための必要十分条件は、次の(a)(b)(c)がみたされることである;

(a) $\dim\mathfrak{g} = n(n-1)/2$, (b) $\mathrm{tr}\,X = 0$ $(\forall X \in \mathfrak{g})$,

(c) $\mathfrak{g}$の元 $A_1, \cdots\cdots, A_n$ で

$$A_i\text{の第}k\text{列} = A_k\text{の第}i\text{列} \quad (1 \leqq i, k \leqq n)$$

をみたすものは、$A_1 = A_2 = \cdots\cdots = A_n = 0$ しかない。

始めワイルは、$n = 1, 2, 3$ のとき、この定理が成立つこと

を直ちに確めることができたが、間もなく(49)で行列のかなり長い計算によって，任意のnに対しこの定理を証明することができた。

これに対し，E. カルタンは，「空間・時間・物質」(49)における$n=1, 2, 3$の場合の解を見て，自分の単純リー環と既約表現の分類定理を用いれば，一般のnの場合も証明できることに気付き，これを発表した[4]。ワイルは，このカルタンの論文を読んで，リー群について既にカルタンの構造論，表現論についての大きな系統的研究がなされて居ることを知ったのであった。幾何学の群論的基礎付けに関心を持っていたワイルは、このカルタンの理論を熱心に研究した。後にカルタン宛の手紙の中で、ワイルは次のように述べている。

「一般相対性理論を知った時以来，あなたの連続群の研究ほど，私を感動させ，夢中にさせたものはありませんでした。」(ボレル[1]より引用)。

このように空間問題をきっかけにして，カルタンのリー群論についての大きな研究を知ったことが，ワイルがリー群の研究を開始する一番大きな動機であったように思われる。

3. 不変式論

しかしもう一つの出来事も無視することはできない。1923年シュトゥディは、その著「一次変換の不変式論入門」[20]の序文の中で、「何人かの著者は、豊かな文化の領域(すなわち不変式論)をないがしろにし、その名前さえも完全に無視した」ことを批判した。その何人かの名前をシュトゥディは挙げていないが、「空間、時間・物質」が脚注に引用されているため、ワイルは「他の面では学識豊富な著者が、不変式論の文献については貧弱な知識しか持ち合わせず、それについては殆んど経験を積んでいない」という言葉が自分に向けられていることを知ったのである。ワイルは、「空間・時間・物質」では不変式論を使う必要はなかったと弁明したが、不変式論を決して無視しているわけではないことを示すために、典型群のベクトル不変式に関する小論文(60)を書いた。その内容は後に「典型群」(B 6)の中に取り入れられた。(もっともこの論文の後半は、ワイルが当時関心を持っていたブラウアーの直観主義とヒルベルトの形式主義を論ずる基礎論的内容になっている)このシュトゥディとの一件が機縁となった不変式論との関係が、ワイルのリー群論のもう一つの要素となったのである。

4. シューアの研究

1924/25年に、I.シューアは、重要な論文[16]「不変式論の問題における積分の応用 I, II, III」を発表した。シューアの当初の目標は、n次元回転群$\mathfrak{D}=SO(n)$のr次同次式である不変式の空間の次元の計算に、$\mathfrak{D}$上の不変積分を応用しようというものであった。回転群$\mathfrak{D}$の不変式の研究に、積分を用いるという考えは、既に1897年のフルウィッツの論文[12]で用いられている。こゝでフルウィッツは、ヒルベルトが$PGL(n, \mathbb{C})$の不変式環が有限生成であることを示すのに、イデアル基底の有限性の外に用いたケーリーのΩ-processという微分作用素を用いる方法の代りに、$\mathfrak{D}$上の不変積分を用いたのであった。

シューアは、不変式が有限生成というだけでなく、$\mathfrak{D}$のr次同次式で一次独立のものがどれだけあるかを定めようとしたのである。このより精密な問題を扱うため、シューアは、フルウィッツにない二つの有力な武器を用いた。一つは、有限群で有効性が実証された指標を、コンパクト・リー群である回転群でも用いたことである。もう一つは、類函数に対し行列の固有値だけを用いる新しい$\mathfrak{D}$上の積分の表示式を与えたことである。フルウィッツは、オイラーが剛体の回転を表わすパラメタとして用いたオイラーの角を一般化したパラメタによって$\mathfrak{D}$上の不変積分を具体的に与えたのであった。

これに対し、シューアは指標のような類函数（各共役類上

で定数である函数）に対しては、$\mathfrak{D}$の元Aのパラメタとして、Aの固有値を$(e^{\pm i\phi_1},\cdots,e^{\pm i\phi_\nu}\ (1))$（ここで$\nu=[\frac{n}{2}]$，最後の1は$n=2\nu+1$のときだけ）とするときの，$\phi_1,\cdots,\phi_\nu$を取ることにより，はるかに簡単で便利な積分公式が得られることを発見したのである。n次回転群$\mathfrak{D}=SO(n)$の次元は$\nu(\nu-1)/2$であるのに対し，ϕ_iはν個であるから，ずっと簡単であることがわかる。特に不変積分を用いて，シューアは，有限群の場合の既約指標の直交関係を，コンパクト群$\mathfrak{D}=SO(n)$，$\mathfrak{D}'=O(n)$に拡張した。

またシューアはA^{-1}の固有多項式$f(z,A)=\det(1-zA)$（$A\in\mathfrak{D}'$，zは変数）を用いて母函数

$$\frac{1-z^2}{f(z,A)}=g_0+g_1z+g_2z^2+\cdots$$

を作り，この係数g_kを用いて，$\mathfrak{D}'$の既約指標を表わす公式を得た。この既約指標は，ν個の自然数の組

$$\alpha_1\geqq\alpha_2\geqq\cdots\geqq\alpha_\nu\geqq 0$$

によって定まる。この指標に対応する$\mathfrak{D}'$の既約表現を，$\mathfrak{D}$に限定すると，既約であるか，二つの共役な既約表現の直和となる。$n=2,3$の場合は，フーリエ級数論における三角函数系の完全性によって，こうして得られた$\mathfrak{D}$，$\mathfrak{D}'$の既約表現以外に，それらと同値でない表現は存在しないことが証明されて

いる。一般の n に対しても，これが $\mathfrak{D}'$，$\mathfrak{D}$ の既約表現の全部であるとシューアは述べている。証明は $n=2, 3$ の場合と同様と考えたのであろうか，明確に述べていない。しかしその結果は正しく，シューアは，事実上 $O(n)$，$SO(n)$ の既約表現を決定したのである。

5. ワイルの表現論「半単純連続群の線型表現の理論」(68)

シューアの論文[19]は三部に分れ，Iは24年6月12日，II，IIIは25年1月21日に受理されている。上述の直交群の既約表現に関する部分はIIにある。シューアは，論文の印刷前に，原稿のコピーをワイルに送った。同じころワイルは，典型群さらに，一般の半単純リー群の表現論を研究していた。ワイルはシューアに答えて，自分の結果の概要を，シューアの論文と同じベルリン学士院の紀要に(61)として発表した。この論文は24年11月28日に受理されている。シューアとワイルの研究の関連については，二人の書簡などを調べれば，さらに詳しい事情がわかると思われるが，彼等の全集所収の論文から読み取れることは，二人は同じ頃，直交群の既約表現をともに決定したということである。ただしワイルは，直交群だけでなく，一般のコンパクト半単純リー群について，同様

の定理を得た。ただし指標の存在性については、ワイルはシューアから学んだと思われる。(61)で予報された内容の本論文は、110ページの長篇(68)として発表された。この(68)の前半では典型群、即ち $SL(n,\mathbb{C})$, $Sp(n,\mathbb{C})$, $SO(n,\mathbb{C})$ と、それからユニタリ制限によって得られる(即ちユニタリ群との交わりとして得られる)コンパクト群 $SU(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$ の既約表現と指標が求められている。(第I, II章), 後半の第III章で複素半単純リー環の構造論、第IV章で連結コンパクト・リー群の構造論と表現論が述べられている。これからもわかるように、この論文の方法の基礎は二つあり、一つはキリング・カルタンの複素半単純リー環の構造論と表現論(カルタン部分環(この言葉はまだ使われていない)、ルート、ウエイト、最高ウエイト等)と、ワイル独自の連結コンパクト・リー群の構造論と積分公式である。

後者について若干説明しよう。Gを連結コンパクト・リー群、Tをその極大トーラス部分群とする。ワイルの考察の基礎は、写像

$$\psi : G/T \times T \longrightarrow G, \qquad \psi(gT, t) = gtg^{-1}$$

である。ワイルは無限小の変位と言っているが、現代的に言えば、写像 ψ の引起す接空間上の一次写像 $(d\psi)_{(gT,t)}$ を計算するのである。これからもが正則元($\mathrm{rank}(Ad\,t-1)$ が最

小値となる元）であるとき，$(d\psi)_{(gT,t)}$ は全単写で，従って ψ は (gT,t) の近傍で局相同相写像になる。さらに立入った考察をすると，G の正則元全体の集合を G' とするとき，特異元の集合 $G-G'$ は，$\dim G-3$ 次元の解析的多様体の像となる。これから，(1) $T'=G'\cap T$ とすれば，$\psi(G/T\times T')=G'$．(2) $G-G'$ は弧状連結，(2) $\pi_1(G)=\pi_1(G-G')$ が示される。（この部分のワイルの証明は簡潔すぎて難解であるが，後人によって詳しい証明が与えられた。例えばベルガッソン［10］参照）．そうしてこれから，ワイルは(68)第IV章で二つの基本的結果を導いた。

定理1．"G の任意の元は T の元と共役である：$G=\bigcup_{g\in G} gTg^{-1}$．"

定理2．"G が連結コンパクト半単純リー群ならば，G の基本群 $\pi_1(G)$ は有限群であり，G の普偏被覆群 G^* はコンパクトである。"

さらに，これから G の正規化されたハール測度 dg を T と G/T 上の積分で表わすワイルの積分公式

$$\int_G f(g)dg=\frac{1}{\omega}\int_{G/T}\int_T f(gtg^{-1})\,|D(t)|^2\,dt\,d(gT)$$

を得る。こゝで ω はワイル群 $W=N(T)/T$ の位数，dt は T の正規化されたハール測度，$|D(t)|^2$ は，写像 ψ のヤコービアンで，ルートを用いて具体的に表わされる（後述）。特に f

が類函数であるときには，

$$\int_G f(g)\,dg = \frac{1}{w}\int_T f(t)\,|D(t)|^2\,dt$$

となる。シューアが回転群の場合に得たのは、この特別な場合なのであった。

Gが連結コンパクト半単純リー群であるとき、定理2によりGの普遍被覆群G^*もコンパクトである。Gの任意の表現Dは，G^*の表現と見なせるから，以下Gを単連結と仮定する。Gのリー環$\mathfrak{g}$のキリング形式$B(X,Y)=Tr(\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y)$は、$\mathfrak{g}$上負値定符号であるから$(X,Y)=-B(X,Y)$は、$\mathfrak{g}$上の内積となる。この内積により$T$のリー環$\mathfrak{t}$（カルタン部分環）をその双対空間と同一視する。$G$の表現$D$の微分表現を$dD$とするとき$dD(\mathfrak{t})$の固有値として生ずる$\mathfrak{t}$上の一次形式を，$D$のウェイトという。特に随伴表現の$0$以外のウエイトを$\mathfrak{g}$のルートという。その全体を$R$とする。$\mathfrak{t}$上の一次形式$\lambda$は，$2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in\mathbb{Z}$ $(\forall\alpha\in R)$となるとき、整形式という。Rに一つの字引式順序を入れ，それに関する正のルートの全体をPとするとき$2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in\mathbb{N}$ $(\forall\alpha\in P)$となるλを，優整形式という。このとき次のことが成立つ。

定理4　"Gの表現のウエイトは、すべて整形式であり、最高ウエイトは優整形式である。Dの既約表現は、その最高

ウエイトによって同値を除いて定まる。"

各ルートαに対し、$\mathfrak{t}$の超平面$\pi_\alpha=\{H\in\mathfrak{t}\mid(\alpha,H)=0\}$に関する対称変換（鏡映）を$s_\alpha$とし、$\langle s_\alpha\mid\alpha\in R\rangle$から生成される$GL(\mathfrak{t})$の部分群$W$をワイル群という。これは自然な対応で$N(T)/T$と同型になる。整形式$\lambda$に対し次のようにおく。

$$\xi(\lambda,H)=\sum_{\sigma\in W}\det\sigma\,\exp(2\pi i(\lambda,H)),\quad \delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in P}\alpha$$

定理5 "最高ウエイトがλのGの既約表現D_λの指標χ_λは

(1) $$\chi_\lambda(\exp H)=\xi(\lambda+\delta,H)/\xi(\delta,H),\quad H\in\mathfrak{t}$$

で与えられる。またD_λの次元$\deg D_\lambda$は次式で与えられる。

(2) $$\deg D_\lambda=\prod_{\alpha\in P}(\lambda+\delta,\alpha)\Big/\prod_{\alpha\in P}(\delta,\alpha)"$$

さて、Gの既約表現がどれだけあるかを知るには、定理4により、既約表現の最高ウエイトとなる優整形式を決定すればよい。典型群の場合の結果から、ワイルは、次の定理6が成立つことを予想したが(68)ではその証明を与えることはできなかった。

定理6 "任意の優整形式λに対し、λを最高ウエイトとする単連結群Gの既約表現が存在する。従ってGの最高ウエイトの全体と優整形式の全体は一致する。"

ワイルは定理6を証明するには、単連結コンパクト群Gの極大トーラスの周期格子に関する二つの命題1.2と、次の定理6aを証明すればよいことを指摘した。

定理6a　"Gの正規化された不変測度に関する$L^2(G)$の中で，類函数の作る閉部分空間を$C^2(G)$とするとき，Gの既約指標の全体は，$C^2(G)$の完全正規直交系となる。"

実際このとき，類函数χ_λは，定理6aにより

(3)　$$\chi_\lambda = \sum_\mu c_\mu \chi_\mu, \quad c_\mu = (\chi_\lambda, \chi_\mu)$$

のように，既約指標χ_μによって展開される。そこである優整形式λが，すべての最高ウエイトμに対し$\lambda \neq \mu$であると仮定するとき，積分公式の$D(t)$は，$D(\exp H) = \xi(\delta, H)$であることに注意すれば，$\mu \neq \lambda$のとき$(\chi_\mu, \chi_\lambda) = 0$だから

(4)　$$1 = (\chi_\lambda, \chi_\lambda) = \sum_\mu c_\mu (\chi_\lambda, \chi_\mu) = 0$$

となり矛盾が生ずる。従ってλはある最高ウエイトμに対し，$\lambda = \mu$となり，定理6が証明される。

しかし，定理6aも二つの命題1 2も(68)では証明されずに，宿題として残されたのである。

定理6aの証明を得るため，ワイルはコンパクト・リー群G上の調和解析を組織的に研究した。すなわち通常のフーリエ級数論は，一次元トーラス群$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$上の函数を，$\mathbb{T}$の既約ユニタリ表現$e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$によって展開するものであると考え，そのコンパクト・リー群Gへの一般化として，G上の函数を，Gの既約ユニタリ表現の行列成分で展開しようというのである。この理論は，1927年のペーター（ワイルの学生）

との共著論文(73)で発表された。その主定理は次のように述べられる。

ペーター・ワイルの定理"コンパクト・リー群Gの既約ユニタリ表現の同値類の完全代表系を$\hat{G}$とする。$\hat{G}$の各元Dの次元を$d(D)$，行列成分をu_{ij}^Dとし

$$B=\{\sqrt{d(D)}\,u_{ij}^D \mid D\in\hat{G},\ 1\leqq i,j\leqq d(D)\}$$

とおく。このときBは$L^2(G)$の完全正規直交系である。"

この定理の証明には、コンパクト積分作用素の固有空間の有限次元であることが有効に用いられている。全体の構成は有限群の群環の類似が、コンパクト・リー群に対し成立つという形になっている。面倒な計算によるのではなく、新しい見方，とらえ方の勝利という感が深い。

一つの既約表現の行列成分の一次結合の中で、類函数となるものは，指標の定数倍だけであるから，上のペーター・ワイルの定理から，上述の定理6aは直ちに導かれる。

ワイルは、1930年ヒルベルトの後任として，ゲッティンゲンにもどるが，夫人がユダヤ系であるため，ナチスが政権をとった1933年，アメリカに渡り，プリンストンに新設された高等研究所の教授に就任した。1934/35年度にこゝで行った講義の記録「連続群の構造と表現」(B5)において，上の定理6の証明を与え，リー群論における彼の主著である(68)の

基本定理を確立したのであった。

6. ワイルのリー群論のまとめ

リー群論の研究は、多彩なワイルの仕事の中でも、その内容の豊富さとその後の研究への影響において特に重要なものである。この研究に、ワイルはそれまでの彼の研究を大いに活用し、また他の研究者のすぐれた仕事を吸収して、大きな理論を作り上げた。ワイルは「リーマン面の理念」で導入した、大域的な多様体の概念が、リー群の本質的部分であることを始めて明確に意識し利用した。リーの連続変換群では、局所的な観点しかなく、群の元は、ユークリッド空間のある開集合を動くパラメタで表わされていた。また1924年までのE.カルタンは、連続群というときも実際には、その無限小変換しか考えていなかったのである。これに対してワイルはリー群の実解析多様体としての構造を十分に活用した。上に述べた(68)オ11章の定理1,2の証明はこれによって始めて可能になったのである。その際ワイルは「リーマン面」でも重要な役割を演じた被覆空間と基本群を基本的な道具として用いたのである。またワイルは、そのリー群論において、カルタンによるリー環の構造論と表現論及びフロベニウス・シューアの指標の理論を取り入れて活用している。

またワイルは、ペーター・ワイルの定理（73）の証明では、若い時のワイルの主要な研究目標であった　積分方程式と固有値問題を巧みに用いている。またここでも，フロベニウス・シューア　の有限群の表現論における群環の概念が取り入れられ，そのコンパクト群への巧みな拡張が理論の骨組になっているのである。

ワイルのリー群論研究に対しては、なお語るべきことが多いけれども紙数が盡きたので、以下リー群論の歴史における、ワイルの研究の意義をまとめて項目化したものを述べるに止めよう。

1. リー群を大域的な実解析多様体として始めてとらえた。

2. 無限小変換の全体を始めて、リー環という代数系としてとらえた。リーではその基底だけが考えられていた（(B3)，(68)(B5)　では無限小群という言葉が用いられ，(B6)で始めてリー環（Lie algebra）という言葉が用いられている）。

3. 連結コンパクト・リー群の構造論を作り、その基本定理（(68) 第IV章 定理 1，2）を発見，証明した。またこの証明によって，ワイルの積分公式も同時に得られた。

4. 連結コンパクト・リー群の表現論を作った。特に既約表現がどれだけあるかを最高ウエイトで定める基本定理（(68) IV，定理 6)を統一的な方法で始めて証明した。また既約表現

の指標と次元を最高ウエイトにより具体的に表現する公式(定理5)を発見し、これを証明した。

5. コンパクト・リー群上の調和解析の基本理論を作った。すなわちL^2理論の基本定理であるペーター・ワイルの定理と、その系である近似定理(任意の連続函数が表現の行列成分の一次結合で一様近似できる)を証明した(73)。

6. 複素半単純リー環のコンパクト実形$\mathfrak{g}_u$の存在を一般的に証明し、$\mathfrak{g}_u$をリー環とする連結リー群がすべてコンパクトであること((68)IV定理2)を証明して、ユニタリ制限の原理を確立した。これにより複素半単純リー群に関する命題を、そのコンパクト実形の対応する命題に帰着できることを明らかにした(68)。特に複素半単純リー群の表現の完全可約性をこれによって証明した((68)IV. 定理3)。(ただしフルヴィッツ[12]が$SL(n,\mathbb{C})$の不変式が$SU(n)$の不変式と同じであることを指摘し利用したことが、この考えの始まりである。この原理はシュヴァレー[5]により、淡中双対定理と結びつけられた。)

7. 典型群Gの自然な表現のテンソル積を、既約表現に分解し、Gの既約表現はこれらでつきることを示した((68)第I.II章)。

8. クリッフォード環を用いて、一般のスピノルを定義し、スピノル表現の理論を作った((105) R.ブラウアーと共著)。

9. 「群論と量子力学」(B4)によって、群論特に表現論の量子力学における有効性を示した。

10. 典型群のベクトル不変式の基底とその間の基本関係を与えた。特に斜交群 $Sp(n, \mathbb{C})$ に関する結果はワイルが始めて与えたものである(B6)。

ワイルのリー群研究で論じられていない重要テーマとしては、既約表現の統一的具体的な構成法，非コンパクト実半純リー群，その無限次元表現 例外リー群などがあり、これらがワイルの次の世代の研究目標となった。

文献

[1] A.Borel, Hermann Weyland Lie groups, "Hermann Weyl 1885-1985" Springer, Berlin, 1986.

[2] E.Cartan, Sur la structures des groupes de transformations finis et continues, Thèse, Paris, Nony, 1894. (Oeuvres I_1,137-287).

[3] E.Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invăriante aucune multiplicité plane, Bull.Soc.Math.France 41(1913),53-96. (Oeuvres I_1,355-398).

[4] E.Cartan, Sur la théorème fondamental de M.H.Weyl, J.Math.pures Appl. 2(1923),167-192. (Oeuvres III_1 633-648).

[5] C.Chevalley, Theory of Lie Groups, Princeton Univ.Press, 1946.

[6] C.Chevalley et A.Weil, Hermann Weyl(1885-1955), L'Ens.Math.3 (1957), 157-187. (Hermann Weyl Ges.Abh. IV, 655-685).

[7]A.Einstein, Zur allgemeine Relativitätstheorie, Sitz.Preuss. Akad.Wiss. 1915, 778-786,799-801.

[8] A.Einstein, Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie, Sitz.Preuss.Akad.Wisss.1915,831-839.

[9] A.Einstein, Feldgleichungen der Gravitation, Sitz.Preuss.Akad. Wiss. 1915, 844-847.

[10] S.Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1978.

[11] H.von Helmholtz, Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, Nachr.Ges.Wiss.Göttingen,1868, 193-221.

[12] A.Hurwitz, Über Erzeugung der Invarianten durch Integration, Nachr.Ges.Wiss.Göttingen 1897, 71-90. (Werke II, 546-564).

[13] Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varieta qualunque e consequente specificazione geometrica della curvature Riemanniana, Rend.Circ.Mat.Palermo, 42(1917), 73-205.

[14] H.Poincaré, Théorie des groupes fuchsiens, ActaMath. 1(1882), 1-62. (Oeuvres t.2).

[15] H.Poincaré, Sur les fonctions fuchsiennes, Acta Math.1(1882), 193-294. (Oeuvres t.2).

[16] H.Poincaré, Analysis situs, J.Math.pures appl.1(1895),1-121. (Oeuvres t.6, 193-288).
[17] H.Poincaré, Complément a l'analysis situs, Rend.Circ.Mat.Palermo, 13(1899), 285-343. (Oeuvres t.6, 290-337).
[18] H.Poincaré, Second complément a l'anlysis situs, Proc.London Math.Soc. 32(1900), 287-308. (Oeuvres t.6, 338-370).
[19] I.Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie, I 1.Mitteilung, II Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen, III Vereinfachung des Integralkalküls. Realitätsfragen, Sitz.Preuss.Akad.Wiss. 1924, 189-208, 297-321, 346-355. (Ges.Abh.II 440-484).
[20] E.Study, Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorrechnung, Vieweg, Braunschweig, 1923.
[21] 杉浦光夫, ワイルと表現論, 数学セミナー, 1985−9, 19-23.

ワイルの論文

(1) Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtung des Fourierschen Integraltheorems, Dissertation Göttingen (1908).G.I,1-88.
(3)Singuläre Integralgleichungen, Math.Ann.66(1908), 273-324.G.I,102-153.
(6) Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, Nachr.Ges.Wiss.Göttingen 1909, 37-63. G.I, 195-221.
(7) Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen (2. Note), ibid.442-467.G.I,222-247.
(8) Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math.Ann. 68(1910), 220-269. G.I,248-297.
(10) Die Gibbssche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen, Rend.Circ.mat.Palermo 29(1910), 308-323. G.I,305-320.
(13) Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, Nachr.Ges. Wiss.Göttingen 1911, 110-117. G.I, 368-367.
(16) Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwert linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung), Math.Ann. 71(1912), 441-479. G.I, 393-430.

(17) Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung, J.reine u. angew.Math. 141(1912),1-11. G.I,431-441.
(18) Über das Spektrum der Hohlraumstrahlung, J.reine u.angew.Math. 141(1912), 163-181. G.I, 442-460.
(19) Über die Randwertaufgabe der Strahlungtheorie und asymptotische Spektralgesetze, J.reine u.angew.Math. 143(1913), 177-202. G.I,461-486.
(20) Über ein Problem aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen, Nachr.Ges.Wiss.Göttingen 1914, 234-244. G.I, 487-497.
(22) Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwungungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers, Rend.Circ.Mat.Palermo 39 (1915), 1-50. G.I, 511-562.
(23) Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math.Ann. 77 (1916), 313-352. G.I,563-599.
(27) Über die Sarrheit der Eiflächen und konvexer Polyeder, Sitz. Preuss.Akad.Wiss. 1917, 250266. G.I, 646-662.
(29) Zur Gravitationstheorie, Ann.Phys. 54(1917), 117-145. G.I, 670-698.
(30) Reine Infinitesimalgeometrie, Math.Zeits. 2(1918), 384-411. G.II,1-28.
(31) Gravitation und Elektrizität, Sitz.Preuss.Akad.Wiss. 1918, 465-480. G.II, 29-42.
(33) Über die statischen kugelsymmetrischen Lösungen von Einsteins "kosmologischen" Gravitationsgleichungen, Phys.Zeits. 20(1919), 31-34. G.II, 51-54.
(35) Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Ann.Phys. 59(1919),185-188. G.II, 88-91.
(39) Die Einsteinsche Relativitätstheorie, Schweitzerland. G.II,123-140.
(40) Elektrizität und Gravitation, Phys.Zeits. 21(1920), 649-650. G.II, 141-142.
(43) Zur Infinitesimageometrie: Einordnung der projektiven und konformen Auffassung, Nachr.Ges.Wiss.Göttingen 1921, 99-112. G.II,195-208.
(46) Über die physikalischen Grundlagen der erweiterten Relativitätstheorie, Phys.Zeits. 22(1921), 473-480. G.II, 229-236.
(47) Feld und Materie, Ann.Phys. 65(1921), 541-563. G.II, 260-262.
(48) Electricity and Gravitation, Nature 106(1922), 800-802. G.II, 260-262.

(49) Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Massbestimmung, Math. Zeits. 12(1922), 114-146. G.II, 263-295.
(51) Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Math. Zeits. 13(1922), 134-145. G.II, 303-314.
(52) Die Relativitätstheorie auf der Naturforschungsversammlung, Jahresb.Deutchen Math. 31(1922), 51-63. G.II, 315-327.
(55) Entgegnung auf die Bemerkung von Herrn Lanczos über die de Sittersche Welt, Phys.Zeits. 24(1923), 130-131. G.II, 375-377.
(60) Randbemekungen zu Hauptproblemen der Mathematik, Math.Zeits. 20(1924), 131-150. G.II, 433-452.
(61) Zur Theorie der Darstellung der einfachen Kontinuierlichen Gruppen, (Aus einem Schreiben an Herrn I.Schur), Sitz.Preuss.Akad. Wiss. 1924, 338-345. G.II, 453-460.
(62) Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung, Nachr. Ges.Wiss.Göttingen 1924, 218-224. G.II, 461-467.
(63) Über die Symmetrie der Tensoren und die Tragweit der symbolischen Methode in der Invariantentheorie, Rend.Circ.Mat.Palermo 48 (1924), 29-36. G.II, 468-477.
(64) Observations on the Note of Dr. L.Silberstein: Determination of the Curvature Invariant of Space-Time, The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magzine and Journal of Science 48(1924),348-349. G.II, 476-477.
(65) Massenträgheit und Kosmos. Ein Dialog, Naturwissenschaften 12 (1924), 197-204. G.II, 478-485.
(66) Was ist Materie ?, Naturwissenschaften, 12(1924), 561-568,585-593, 604-611. G.II, 486-510.
(68) Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen I,II,III und Nachtrag, Math.Zeits. I 23(1925), 271-305, II 24(1926), 328-376, III 24(1926), 377-395, Nachtrag 24(1926), 789-791. G.II, 543-647.
(73) Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math.Ann.97(1927), 737-755. G.III, 58-75.(F.Peter und H.Weyl)
(105) Spinors in n-dimensions, Ann.Math. 57(1935), 425-449. G.III, 493-516.(R.Brauer and H.Weyl).

ワイルの著書・講義録

(B1) Die Idee der Riemannschen Flächen, 1913, 2.Auflage 1923, 3. Auflage, verändert, Teubner, Leipzig. 田村一郎訳, リーマン面, 岩波, 1974(初版).

(B2) Raum,Zeit,Materie,1913, 3.Auflage, wesentlich verändert,1920, 4.Auflage, wesentlich verändert,1921, 5.Auflage, verändert, 1923. 内山龍雄訳, 空間・時間・物質, 講談社, 1973. 菅原正夫訳. 空間・時間・物質, 東海大学出版会, 1973.

(B3) Mathematische Analyse des Raumproblems, 1923, Springer, Berlin.

(B4) Gruppentheorie und Quantenmechanik, 1926, Oldenbourg, München. 山内恭彦訳, 群論と量子力学, 裳華房, 1932. (現代工学社より再刊).

(B5) The structure and representations of continuous groups, Mimeographed Notes taken by N.Jacobson and R.Brauer of lectures delivered in 1934-35. Institute for Advanced Study, Princeton.

(B6) The classical groups, their invariants and representations, 1939, Princeton University Press, Princeton.

(B7) Gesammelte Abhandlungen, Bd.I-IV, 1968, Springer,Berlin.

上の文献表では(B7)をG.と記した.