一様分布論の小史

（鹿野　健／岡山大）

§1. 実数θが無理数のとき，数列$(\{n\theta\})$ $(n=1,2,\ldots)$を考える。　ここに，$\{x\}=x-[x]$ であり，xの小数部分を表わす記号とする。　この数列が区間（0，1）で稠密であることは，Kronecker によって，ディオファンタス近似の定理の応用として知られていたが，それが実はもっと強い性質を有すること，すなわち一様分布列であることは，20世紀の初頭に相次いで示された。

P. Bohl (1909) は天体力学におけるいわゆる永年摂動の理論に関連して$\{n\theta\}$の一様分布性を示し，W. Sierpiński (1910) は無理数性の問題として考察し，H. Weyl (1910) は三角級数論におけるいわゆる Gibbs 現象に関連して導いた。　Weyl は特にその後もこの問題に関心を持ち続け，1914年には2つの論文を著して，一方ではディオファンタス近似の問題として考察し，他方では Bohl を発展させて天体力学の問題との関連性を論じたのである。　しかしここまでは，あくまで$\{n\theta\}$という特殊な数列の問題であり，しかも方法に一般性，普偏性が欠けていて，まさに理論発生の第一段階というところであろう。

§2. Weyl の関心はその後も続き，彼は遂にこの問題の核心に達した。　そして，彼が1916年に著した論文 [3] において，一様分布という概念が初めて一般的に捉えられ，数学的に明確に定義されると同時に，重要な基本定理がいくつか与えられて，ここに一様分布論の幕が開けたのである。

与えられた実数列 (x_n) が「1を法として一様分布する」とは，単位区間 $I=[0,1)$ の任意の部分区間 $E=[a,b)$ に対して

$$A(E,N) =: \# \left\{ n \leq N \,\middle|\, \{x_n\} \in E \right\}$$

と定義すると，

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A(E,N)}{N} = b - a. \tag{1}$$

となることを言う。　つまり，点列 (x_n) の小数部分が，どんな E の中にもその長さに"比例"しただけの個数含まれている（もちろん $N \to \infty$ のときの話）という状態を言う。　§1 で述べた Bohl, Sierpiński, Weyl 等は，この (1) を計算することによって $(n\theta)$ $(\theta \notin \mathbb{Q})$ の一様分布性を示したのであるが，明かに一般的な (x_n) について (1) を直接計算することは不可能である。　従って，(1)とは異なる定義あるいは定理で (1) と同値なものを必要とする。

これに対する Weyl (1916) の解答が次の 3 つの結果である。

[定理 A] (x_n) が 1 を法として一様分布するための必要十分条件は，周期 1 の任意の有界なリーマン可積周期函数 $f(x)$ に対して

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x_n)=\int_0^1 f(x)\,dx, \tag{2}$$

となることである。

[定理 A′] (x_n) が 1 を法として一様分布するための必要十分条件は，I 上の任意の連続函数 $f(x)$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\{x_n\})=\int_0^1 f(x)\,dx, \tag{3}$$

となることである。

[定理 B] (x_n) が 1 を法として一様分布するための必要十分条件は，任意の正整数 h に対して，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n}=0, \tag{4}$$

となることである。

Weyl の証明のアイディアは，階段函数 → 連続函数 →（リーマン可積分函数）→ 三角多項式　という図式で示されるが，その基本となるものが「近似定理」の適用である。特に，定理 B は Weierstraß の（三角）多項式近似定理の直接の帰結である。話は少しずれるが，S. Ulam は数学におけるこの種の証明法（思想）を“ε－近似法”とよんで自らも愛用したが，これは要するに，最終目標の P という性質を直接対象としにくいときは，これにある意味で“近い”性質の Q で，P よりも扱い易いものをうまく見付けて代用し，この Q と P を結びつけることによって最終的には P に達する，という方法である。

ところで，具体的に与えられた数列 (x_n) について，これが定理 A や定理 A′ の条件を満たしているか否かを調べることは事実上不可能である。それに反して定理 B の方は，ただ 1 つの周期函数 $f(x) = e^{2\pi i h x}$ について条件(2)を調べれば良いと言っている訳であるから実際的である。これを，例えば §1 における例 $x_n = n\theta$ $(\theta \notin \mathbb{Q})$ について見れば，いかに定理 B が有用であるかがわかる。実際，この場合 (4) の左辺はいわゆる等比級数の和の公式から直ちに計算でき，しかもそこでは，$\theta \notin \mathbb{Q}$ という条件が分母を 0 にしないという本質的な条件として現われているのである。

このように，具体的な検証には定理Bが適しいが，一方，定理A，A′の方は(2)の左辺のような有限和が右辺のような定積分で“近似”できる，という事実を示しているので，逆に定積分の近似計算法の1つとして(2)を利用する，という考え方が生じる。　これは，定理Aの多次元版においては特に意義深くなり，いわゆるモンテ・カルロ法に替る新らしい近似計算法として注目され，中国や旧ソ連の専門家達によって特に発展させられた分野である。

§3.　いま(1)を少し書き直すと，

$$\lim_{N\to\infty}\left|\frac{A(E,N)}{N}-(b-a)\right|=0$$

となるので，

$$D(N)=:\sup_{E}\left|\frac{A(E,N)}{N}-(b-a)\right| \tag{5}$$

と定義すれば，(1)は

$$\lim_{N\to\infty}D(N)=0 \tag{1′}$$

と同値である。　この $D(N)$ のことを，(x_n) の *discrepancy*（偏差）という。　(x_n) のより詳しい性質は，従ってこの $D(N)$ 大きさの評価によって知ることができるが，その一般的な評

価式としては，下からの評価を与える

$$(6)\qquad \left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i x_n}\right| \leq 4\,N\,D(N),$$

がまずあり，上からの評価を与えるものとしては，P. Erdös と P. Turán (1948) による次の不等式が知られている。

$$(7)\qquad D(N) \leq \frac{A}{m} + \frac{B}{N}\sum_{h=1}^{m}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{m}\right)\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}\right|,$$

ここで，mは任意の自然数，A，B はある正定数である。

注目すべき点は，(6)も(7)も(4)に現われるタイプの三角和の評価に帰着されていることであり，一様分布性がいかに本質的に三角和の評価と関連しているかがこれらからもわかる。

やはり上からの評価である次の不等式は Le Veque (1965) によるものだが，完全な証明は Kuipers－Niederreiter [2] で与えられた。

$$(8)\qquad D(N) \leq \left(\frac{6}{\pi^2}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^2}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}\right|^2\right)^{\frac{1}{3}}.$$

この不等式の注目すべき点は，右辺に現われる定数 $6/\pi^2$ と指数 $1/3$ がいずれも最良値であることであり，ここでも(6)(7)と同様な三角和が現われていることである。

§4. 話を定理Aに戻してみると，次のような問題が自然に起きるであろう。

θが与えられた正の実数であるとき，どんな実数列(λ_n)とどんな関数$f(x)$に対して等式

$$(9) \qquad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\lambda_n\theta) = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

が成り立つであろうか？　（fは周期1としてよい）

$\theta \notin \mathbb{Q}$　のときは，$\lambda_n = n$　で$f(x)$がリーマン可積分な周期函数のときに成り立つことは§1で述べた通りであるが，これをある意味で一般化して考える訳である。

この他の例としては，

i)　$\theta > 0$，$\lambda_n = (\log n)^\alpha$，$(\alpha > 1)$　のとき(9)はすべてのリーマン可積分な周期函数$f(x)$について成り立つ。

ii)　（ルベーグ測度の意味で）ほとんどすべてのθについて，λ_nが異なる整数列（必ずしも単調列でなくてよい）ならば，やはりi)と同じ$f(x)$について(9)が成り立つ。

このii)のように，θの値の集合をルベーグ測度の観点から考察したのもWeyl [3]であり，現今この種の結果（定理）のことを"metric result"とよぶ。　そしてこれが示唆するのは，(9)が果して$f \in L^1$について成り立つだろうか，という問題である。

これについて，まず D. A. Raikov (1936)は，

$$\lambda_n = a^n \quad (a \geq 2,\ 整数)$$

については，(9) がほとんどすべての θ と，任意の $f \in L^1$ に対して成り立つことを示したが，後に F. Riesz (1945) はこの結果がエルゴード定理の系として導かれることを発見したが，確率論（大数の強法則）を応用することが行なわれるようになってから（1949 以降）は，(λ_n) が gap sequence，すなわち，十分大きいすべての n について

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq c > 1 \quad (c\ 定数)$$

となるような (λ_n) については (9) の問題が考え易いことが分かって来た。しかし，どのような λ_n と f に対して，(9) がほとんどすべての θ について成り立つのか，最終的な解決は与えられていない。例えば Erdős (1949) は，任意の $p \geq 1$ について $f \in L^p$ であるにもかかわらず，(9) の左辺が ほとんどすべての θ について $N \to \infty$ のとき非有界であるような gap sequence (λ_n) を構成してみせて，この問題のデリケートさを浮き彫りにしたのである。なお Erdős は，$f(x)$ が有界であるならば，(9) はどんな gap sequence (λ_n) に対しても，ほとんどすべての θ についても成り立つであろう，と予想している [1]。

〈主要文献〉

[1] P. Erdős ; *Problems and results on diophantine approximation*, Compositio Math. 16 (1964), 52–65.

[2] L. Kuipers & H. Niederreiter; *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, 1974.

[3] H. Weyl ; *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Annalen 77 (1916), 313 – 352.
= Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, 563 – 599, Springer, 1968.