２０ 世紀代数幾何学
－重複度と交点数をめぐって－

上野　健爾

代数幾何学は Descartes、Fermat による座標幾何学の導入によって始まったが、射影幾何学の発展とともに、Riemann による代数函数論の建設によって決定的な進展が始まった。Riemann による代数函数論は Riemann 面上の解析学の側面が大きいが、Riemann 自身幾何学への応用を考えていた。さらに本格的な応用は Clebsch によって行われた。Riemann の代数函数論は難解であり、かつその基礎付けに不安があったことも手伝い、代数函数論を幾何学の助けを借りて展開する試みが、Clebsch-Gordan たちによって始まり、さらに幾何学的な取り扱いは Max Noether を中心として行われ、代数曲線論が姿を現した。

一方、代数的整数論では Dedekind によってイデアル論が導入され Dedekind-Weber は代数函数論をイデアル論的に取り扱った。19 世紀後半の代数幾何学での中心的課題は 代数曲線論、Schubert による数え上げ幾何学、イタリア学派による曲面論、Picard による曲面上の積分論（正則、および有理微分形式の理論）等が挙げられる。これらは 20 世紀になって代数幾何学進展の原動力になった。

ここでは Bézout 定理、M. Noether による Noether の定理 ([NM]) 、および数え上げ幾何学 ([Sc]) を中心として考察する。問題の中心は代数曲線、さらには代数多様体の交点理論をどのように構成するか、特に、交点での重複度をどのように定義するかが問題であった。この問題を通して、多項式環の理論、可換環の理論が発展し ([La] [Ma] [St] [NE])、代数幾何学の基礎付けが可能になった。

これらの問題を正しく定式化する過程で代数多様体の既約性、非特異点の概念の重要性が意識されるようになった。これらの問題に対する最初のアプローチは Severi ([Se1] [Se2]) van der Waerden ([VW1]) によってなされた。E. Artin による合同ゼータ函数の導入により、正標数の体上の代数幾何学を展開する必要が生じた。これは Weil ([We]) によって van der Waerden の手法をさらに精緻なものにすることによってなされた。一方、 Zariski はイタリア学派の代数幾何学の基礎付けのため、Weil とは独立に代数幾何学を建設した ([Za])。

可換環論、ホモロジー代数の進展により、Serre は代数幾何学に層とそのコホモロジーを適用して代数幾何学の新しい進展の準備をした ([Se])。そして Grothendieck のスキーム理論 ([EGA]) により、代数幾何学の基礎付けはひとまず完成した。

参考文献

[Ar] Artin, E. : Quadratische Körper der Gebiete der höeren Kongruenzen, I, II, Math. Zeitschrift. **19**(1924), 153 - 246.

[Be] Bertini, E. : Zum Fundamentalsatz asu der Theorie der algebraischen Funktionen, Math. Ann. **34**(1889), 447–449.

[DW] Dedekind, R., & H. Weber : Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, J. rein u. angew. Math. **92**(1882), 181–290.

[EGA] Grothendieck, A. & Dieudonné : Elément de Géométrie Algébrique, Publ. Math. IHES, **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**, 1960 - 1967.

[La] Lasker, E. : Zur Theorie der Moduln und Ideale, Math. Ann. **60**(1905), 20– 116.

[Le] Lefschetz, S. : L'analysis situs et géométrie algébrique, Collection Borel, 1924.

[Ma] Macaulay, F. S. : Algebraic theory of modular systems, Cambridge Tracts **19**, Cambridge University Press, Cambridge, 1916.

[NE] Noether, E. Idealtheorie in Ringbereichen. Math. Ann. **83**(1921), 24– 66.

[NM] Noether, M. : Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen, Math. Ann. **6**(1873), 351–359.

[Sc] Schubert, H. : Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig, 1879.

[Se1] Severi, F. : Il Principio della conservazione del Numero, Rendiconti Circolo Mat. Palermo **33**(1912), 313– .

[Se2] Severi, F. : Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **9**(1933), 335 –364.

[Sr] Serre, J.-P. Faisceaux algébriques cohérens, Ann. of Math. **61** (1955), 197 - 278.

[St] Steiniz, E.: Algebraische Theorie der Körper, J. rein u. angew. Math., **137**(1910), 167–309.

[VW1] van der Waerden, B. L. : Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie, Math. Ann. **97**(1927), 756–.

[VW2] van der Waerden, B. L.: Zur algebraischen Geometire 1, 14 Math. Ann. **108**(1933)113–125, ibid., **115**(1938), 621–655.

[VW3] van der Waerden, B. L. : Einfürung in die algeraische Geometrie, Springer, 1939, second edition 1970.

[VW4] van der Waerden, B. L. : Zur algerbraischen Geometrie, Selected Papers, Springer, 1983.

[Wel] Weil, A.: Foundation of algebraic geometry, AMS Colloquium Publ. **30**, Amer. Math. Soc. Providence, 1946.

[Za] Zariski, O. : Collected papers I, Foundation of algebraic geometry and resolution of singularities, II, Holomorphic functions and linear systems, MIT Press, 1972, 1973.

京都大学理学部数学教室