微分不可能な連続関数を巡っての小史

徳永 秀也（同志社高校） ＆ 鹿野 健（岡山大学理学部）

§１．Ｒｉｅｍａｎｎの例

Ｒｉｅｍａｎｎは1861年のある講義の中で、下記のようなことを述べた、と言われている（［３］，［４］，［５］）。

「

（１）　$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2}$$

は、いたるところで微分不可能な連続関数である。」　…　（＊）

ただし、Ｒｉｅｍａｎｎ自身による証明は残されていない。

（１）の連続性を示すのは用意であるが、微分不可能性を示すのはかなり困難であり、その最終決着をみるのは、この後100年以上も先のこととなった。この間、多くの数学者が（＊）に挑んだ。

Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓもその１人で、彼は1875年、この（＊）に触れているが、その証明については言及していない。その替り、彼は（１）とは別のいたるところで微分不可能な連続関数の例として（２）を挙げている（［３］）。

（２）　$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$$

$$\left(0<a<1,\ b:\mathrm{odd},\ \underline{ab>\frac{3}{2}\pi+1}\right)$$

（「＿」については、1916年にＨａｒｄｙ［８］が「$ab\geqq 1$」まで改良している。）

（２）では「b：ｏｄｄ」となっているが、これは証明のテクニカルな事情によるものであり、「b：ｉｎｔｅｇｅｒ」としても支障はない。

数学史では、この（２）がいたるところで微分不可能な連続関数である最初の例であるように言われているのであるが、実はそれ以前に、このような関数の他の例が、Ｃｅｌｌéｒｉｅｒ［６］により示されていた（（３）式、1830年）。

（３）　$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(a^nx)}{a^n}$$　　（a：十分大の整数）

このことは、Ｈｏｂｓｏｎ［７；P.402,406,407］にも証明付で詳しく載っている。

ここで、（２），（３）を比較してみると、$0 < a^{-1} < 1$であるから、bが偶数でも良しとした場合（前述済）、（３）は（２）の特別な一例であることがわかる。

さて、（＊）はその後多くの数学者によって証明しようという努力がなされ、例えばＨａｒｄｙ［８］は次のような結果を得た。

Ｔｈｅｏｒｅｍ １． $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2\pi x)}{n^a}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2\pi x)}{n^a}$ $\left(a < \dfrac{5}{2}\right)$

は、それぞれ任意の無理数点において微分不可能である。また、

$$\frac{2A+1}{2B}\ ,\quad \frac{2A}{4B+1}\qquad (A,\ B \in \mathbb{Z})$$

の形をした有理数点においても微分不可能である。

これは（＊）のうちの一部を立証していることになる。後は、$f(x)$が他のπの有理数倍についても微分不可能出あることを示せば良かったわけである。この真偽はともかくとして、この解決をみるには、さらに半世紀以上もの年月を待たねばならなかった。

§２． $f(x)$の微分可能性・不可能性の解決

Ｌａｎｇは［９］原書第２版の第15章で、「$f(x)$が連続であることを示せ。また、$f(x)$が微分可能であるかどうかを定めよ」という練習問題を与え、さらにその（注）として、「注目に値することであるが、これはまだ知られていないようである！」と記述している。また、同様のことを講義でも述べていたらしい。その講義を聴いていた当時学生であったＧｅｒｖｅｒは、この問題に興味を感じ、それに挑んだのである。かれは極めて初等的な方法によって、1970年、次のような驚くべき結果を得たのである（［10］）（［９］の原書第３版ではこのことが記述されている）。ただし、彼の用いた方法は初等的な方法である上に、しかもＬａｎｄａｕのO記号も使っていないので必要以上に長い論文となっている。

Ｔｈｅｏｒｅｍ ２． $f(x)$は$x_0 = \dfrac{b}{a}\pi$ （a，bは互いに素な奇数）

において微分可能で、しかも、$f'(x_0) = -\dfrac{1}{2}$ である。

さらに、[10]および翌年の[11]でx/πの他の有理数点では微分不可能であることも示している。

このことは長年信じられていた(＊)を大きく覆すものであり、Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓや Ｈａｒｄｙ等が解決できなかったのは、(＊)が正しいという先入観があったからではないだろうか。

後にこのニュースを知ったＭｏｈｒ[12]は、「実は、それ以前の1967年7月14日、Ｓｔｕｔｔｇａｒｔ大学において同じことを講演した。」と述べているが、このことはあまり知られていない。

さて、晦渋を極めたＧｅｒｖｅｒの証明も、不思議なことにこれが発表されると、一気にその別証明が続々と出現したのである([13], [14], [15])。Ｇａｕｓｓ和の性質を用いたり、Ｔｈｅｔａ関数の反転公式を用いたり、手法は様々である。

§3．Ｒｉｅｍａｎｎの就職論文(Ｈａｂｉｌｉｔａｔｉｏｎｓｓｃｈｒｉｆｔ)

ＲｉｅｍａｎｎはＧｏｔｔｉｎｇｅｎ大学へ就職したわけであるが、その際に、就職論文(Ｈａｂｉｌｉｔａｔｉｏｎｓｓｃｈｒｉｆｔ)として3つの論文を書かねばならなかった。そのうちの1つは、かの有名な非ユークリッド幾何学に関するものであったが、ここでは[1](三角級数で表現することのできる関数について)を取り上げてみる(1854年)。この中で、Ｒｉｅｍａｎｎは次のような事を述べている。

「 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty \quad (c_n > 0,\ c_n \downarrow 0)$ のとき、

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n^2 x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n^2 x)$

の収束性を、Ｇａｕｓｓ和

(5) $\sum_{n=0}^{m-1} \sin(n^2 x)$, $\sum_{n=0}^{m-1} \cos(n^2 x)$

の性質を用いることによって調べることができる。」 … (☆)

しかし、具体的な方法、収束点等については、言及していないのである(ちなみに、Ｂｏｔｔａｚｚｉｎｉ[18]の邦訳は「$c_n \downarrow 0$」の部分を「$c_n \to 0$で発散」と誤訳している)。Ｒｉｅｍａｎｎの意味するところを考えてみると、(☆)の直後には、次のようなことも記述されている。

<u>Lemma 1.</u> (Riemann [1]; *cf* Genocchi [2], Hobson [6] and Bottazzini [18])

（6）　$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n!x)$

は、$x=\dfrac{2\pi}{e}$，$\pi\sin 1$，$\pi\cos 1$で収束し、$x=e\pi$，$\dfrac{\pi}{4}$　$e-\dfrac{1}{e}$

で発散する。

この補題は、（6）がπの有理数倍での収束することは自明であるが、πの無理数倍でも収束する点があることを示すものになっており、大変興味深い。この点についても[18]は英訳こそきちっとなされているが、邦訳では「xのあらゆるπの有理数倍に対してのみばかりか、やはり例えば$\pi\sin 1$，$\pi\cos 1$，$2\pi/e$のような無数の無理数に対しても収束しない。」と誤訳してしまっている。Lemma 1の証明は例えばGenocchi［2］を参照されたい。彼は、Riemannの論文を数多くフォローした19世紀のイタリアの数学者である。

ところで、（4），（5）を比較してみると、c_nの有無が挙げられるが、（6）についてはc_nの付いたタイプのものが挙げられていない。そこで、（6）でc_nの付いたタイプにおいてLemma 1と同様のことを調べてみると、

<u>Lemma 2.</u> (徳永［16］)

$c_n>0$，$c_n\to 0$，$\dfrac{c_n}{n+1}\downarrow 0$　のとき、

（〔注〕「$c_n\downarrow 0$」より広い）

（7）　$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n!x)$

は、$x=\dfrac{2}{e}\pi$ で収束する。

という結果を得ることができる。

また、Riemann［1］は、その前半部分で次のような定理を述べている。

Theorem 3. (cf Hobson [7] p.645～648)

次のような三角級数を考える。

(8) $\quad A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)$

ただし、
$$\begin{cases} A_n(x)=a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx) \\ A_0=\dfrac{1}{2}a_0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0\ ,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=0\ .$$

このとき、次のような連続関数$G(x)$が存在する（C_1, C_2はともに定数）。

$$G(x)=C_1+C_2x+\frac{1}{2}A_0x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}A_n(x)$$

さらに、この$G(x)$には次の性質がある。

与えられた級数（8）が$x=x_0$で$g(x_0)$に収束するとき、

(9) $$\lim_{n\to\infty}\frac{G(x_0+h)+G(x_0-h)-2G(x_0)}{h^2}=g(x_0)$$

が成り立つ。

Remark
$$D^2(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{G(x+h)+G(x-h)-2G(x)}{h^2}$$

とおくと、この$D^2(x)$は$G(x)$の広い意味での第2次導関数となる。

$\left(i.e.\quad G''(x)\right.$が存在する。
$\Longrightarrow$ $D^2(x)$が存在し、$D^2(x)=G''(x)$ となる。)

このTheorem3とLemma 2を組み合わせると、次のような微分可能性に関する定理を得ることができる。

Theorem 4. (徳永 [16])

$c_n>0$, $c_n\to 0$, $\dfrac{c_n}{n+1}\downarrow 0$ のとき、

(10) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\cos(n!x)}{n!}$$

は、$x=\dfrac{2}{e}\pi$ において（9）の意味で微分可能である。

[Proof]「$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n \sin(n!x)}{(n!)^2}$ が $x=\frac{2}{e}\pi$ において広い意味で2階微分可能である。」…(＊＊) ことを示せば良い。

Theorem3において、

$$a_n = 0, \quad b_n = \begin{cases} c_m & (\text{if } n=m!) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とおけば、Lemma 2より(＊＊)が示せる。

一般には、各$f_n(x)$が区間$[a, b]$で微分可能であり、かつ$\Sigma f_n'(x)$が$[a, b]$で一様収束するとき、$\Sigma f_n(x)$は項別微分が許される。しかし、このTheorem4の証明の短さを見てもわかる通り、Theorem3の面白いところは、「____」を言わなくても、ある一点x_0において$\Sigma f_n''(x)$が収束しさえすれば、$\Sigma f_n(x)$はx_0において(9)の意味で微分可能であることが示せることにある。

では、(10)でc_nの付いていないものはどうか。これも初等的な証明で、次のような結果が導ける。

Theorem 5.（徳永[16]）

(11) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n!x)}{n!}$$

は、いたるところで微分不可能な連続関数である。

さらに、このTheorem5を一般化させて、いたるところで微分不可能な(連続)関数となるための十分条件を与えると次のようになる。

Theorem 6.（徳永[16]）

c_nと$\Psi(n)$が次のような(Ⅰ)～(Ⅴ)の条件を満たすとき、

(12) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\cos(\Psi(n)x)}{\Psi(n)}$$

は、いたるところで微分不可能な関数となる。

(Ⅰ) $\Psi(n)>0$, (Ⅱ) $\Psi(n) \uparrow \infty \quad (n\to\infty)$

(Ⅲ) $\dfrac{\Psi(n)}{\Psi(n+1)} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$

(Ⅳ) $\limsup_{n\to\infty}|c_n| = 0$, (Ⅴ) $0<|c_n|\leqq {}^{\exists}K\ (<\infty)$

さらに、次の（Ⅵ）の条件を満たすとき、（12）は連続関数となる。

$$(\mathrm{VI})\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Psi(n)} < \infty$$

これらの条件のうち、（Ⅳ）の評価は、Ｔｈｅｏｒｅｍ４とＴｈｅｏｒｅｍ５を比較することにより（広い、普通という微分の違いはあるにせよ）、かなり本質的なものであろうと予想できる。しかし、上からの評価（Ⅴ）も合わせて考えてみると、c_n は結局、定数（≠０）と全く同じｏｒｄｅｒになってしまう。つまり、$\dfrac{\Psi(n)}{c_n}$ を一つの数列と見なすと、この（12）のｃｏｓの中身の数列と分母の数列は結果として同じｏｒｄｅｒにしかならない。これはおそらく我々の証明方法上からくる限界であって、改良の余地はあると思われる。

また、Ｐｉｎｃｈｅｒｌｅ[17]（彼のことについては、次の節で詳しく紹介する）によると、Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓは、どうも（11）について、「ｃｏｓ」の部分を「ｓｉｎ」にしたものに関して、やはりＴｈｅｏｒｅｍ５と同じ結論を導いていたと思われるが、その証明は載っていない。不思議なことであるが、Ｐｉｎｃｈｅｒｌｅ[17]にはＲｉｅｍａｎｎという名前は一度も登場しない。

前述したように、［１］では、（４），（５）の直後にＬｅｍｍａ１が書かれている。したがって、おそらくＲｉｅｍａｎｎは「n！」のタイプと同様に、この論文を元にして、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \cos(n^2 x)}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \sin(n^2 x)}{n^2}$$

および、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

の微分可能性を調べようとしていたのではないだろうか。いや、そればかりではなく、Ｒｉｅｍａｎｎは、（４），（５）に関連した記述を見れば、（１）の$f(x)$が実は「ほとんどの点において微分不可能であるが、微分可能な点も存在する」ことを知っていたものさえ思われる。

§4. Bottazziniの本[18]について

Lemma 6の下で登場したGenocchiがRiemannの研究をフォローしたのに対して、前節の最後で登場した同じイタリアのPincherle（1853～1936年）は、1877～78年のWeierstrassのBerlin大学での講義に出席するという研究旅行をしていた。彼の書いた[17]はその内容をまとめたものである。当時、Weierstrassの見方がヨーロッパ中に拡がった理由のひとつとしては、Pincherleのような講義ノートを通してであったことが挙げられる。このことはBottazzini[18]に詳しく載っている（邦訳本ではP.322～323）。ただし、この[18]は邦訳段階でかなりの誤訳が登場する。このPincherleの読み方にしても「ピンセール」と書かれているが、正しくは「ピンケルレ」のはずである。また、この原書はイタリア語であり、英訳された時点でもかなりの数学的におかしな表現がある。その一例を挙げてみると、例えば、

邦訳（P.244）「次は、あらゆる有理点で不連続だが、積分可能である。

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{[nx]}{n^2}$$

ここで、$[nx] = x$引く最も近い整数、あるいはもしxが二つの整数から等距離だと$[nx] = 0$」

英訳（P.274）“

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{[nx]}{n^2}$$

where $[nx] = x$ minus the nearest integer, or $[nx] = 0$ if x is equidistant from two integers.”

これは表現だけでなく、Riemann［1］やHobson［7］を見てもわかる通り、まず“［ ］”の記号ではなく“（ ）”を使うべきこと、そしてもっと決定的なことは、分母のn^2は誤りで、分母はnなのである。残念ながらイタリア語の原本は未だ見れていないので何とも言えないが、この段階で既に記述ミスの可能性もある。

とにかく、[18]の邦訳は直訳調が目立ち、おかしな日本語の表現が多い。

§５．Ｒｉｅｍａｎｎの例（１）に関するその後の発展

§１でも述べたように、Ｈａｒｄｙ［８］は（１）の$f(x)$がπの無理数倍では微分不可能であることを示したが、彼はそれだけではなく、

$$(13)\quad f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^\alpha} \qquad \left(\alpha < \frac{5}{2}\right)$$

に対しても同じ結果を証明した。

また、最近ではＬｕｔｈｅｒ［15］により、次のような結果も得られている。

<u>Ｔｈｅｏｒｅｍ ７．</u>

$$f_\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^\mu} \qquad (1 \leqq \mu < 3)$$

とおくと、

（Ｉ）$1 \leqq \mu \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき、

$f_\mu(x)$は、いたるところで微分不可能な関数である。

（Ⅱ）$\dfrac{3}{2} < \mu < 3$ のとき、

$f_\mu(x)$が$x = \dfrac{b}{a}\pi$（a，bは互いに素な整数）において微分可能であるための必要十分条件は、

$$ab \equiv 1 \pmod 2$$

が成り立つことである。

これは、Ｒｉｅｍａｎｎの例（１）は勿論のこと、Ｈａｒｄｙ［８］による（13）の結果も当然含んでいる。

~ References ~

[1] B. Riemann: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe *(1854), Collected Works of B. Riemann, 228-264, Dover ed ; New York (1953)*

[2] A. Genocchi: Intorno ad Alcune Serie, *Atti delle R. Accademia delle Scienze di Torino 10 (1874-1875), 985-1016*

[3] K. Weierstrass: Über continuirliche Functionen einer reellen Arguments die für keinen werth des Letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, *Math. Werk, Bd. II, 71-76, Mayer & Müller Berlin (1895)*

[4] P. du Bois-Reymond: Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen, *Jour. für Math. 79 (1875), 28*

[5] E. Neuenschwander: Riemann's example of a continuous "nondifferentiable" function, *The Math. Intelligencer 1 (1978), 40-44*

[6] Ch. Cellérier: Note sur les principes fondamentaux de l'analyse, *Bull. des Sci. Math.* (2) 14 *(1890)*

[7] E. W. Hobson: The Theory of Functions of a real variable, *Cambridge Univ Press.* *vol* II (*2nd ed. 1926*),

[8] G. H. Hardy: Weierstrass's non-differentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc. 17* (*1916*), *301*–*325* (= *Collected Papers of G. H. Hardy vol* IV; *Oxford* (*1969*), *477*–*501*)

[9] S. Lang: A First Course in Calculus, *Addison-Wesley Published Company,* (*2nd ed. 1968, 3rd ed. 1973*)
：邦訳　「ラング解析入門Ｉ」 松坂和夫・片山孝次 訳，岩波書店
（原書第２版の初訳、*1968*；原書第3版の初訳、*1978*）

[10] J. Gerver: The differntiability of the Riemann's function at certain rational multiples of π, *Amer. Jour. Math. 92* (*1970*), *33*–*55*

[11] J. Gerver: More on the differentiability of the Riemann function, *Amer. Jour. Math. 93* (*1971*), *33*–*41*

[12] E. Mohr: Wo ist die Riemannsche Funktion $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2}$ nichtdifferenzierbar?, *Ann. Math. Pura Appl.* (*4*) *123* (*1980*), *93*–*104*

[13] A. Smith: The differentiability of Riemann's function, *Proc. Amer. Math. Soc. 34* (*1972*), *463*–*468*

[14] S. Itatsu(板津 誠一): Differentiability of Riemann's function, *Proc. Japan Acad. Sci. Ser.* A57(1981), 492–495

[15] W. Luther: The Differentiability of Fourier Gap Series and "Riemann's Example" of a Continuous, Nondifferentiable Function, *Journal of Approximation Theory* 48(1986), 303–321

[16] 徳永秀也：Riemannの三角級数の数論的研究，岡山大学大学院理学研究科修士論文(1990)

[17] S. Pincherle: Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del prof. C. Weierstrass, *Giorn. matem.* 18 (1880), 178–254, 317–357

[18] U. Bottazzini: Il Calcolo sublime: storia dell'analisi matematica du Euler a Weirestrass, *Boringhieri societa per azioni Torino, corso Vittorio Emanuele* 86(1981)
英訳：The Higher Calculus: A History of Rial and Complex Analysis from Euler to Weierstrass, Translated by W. V. Egmond, *Springer-Verlag New York Inc.* (1986)
邦訳：「解析学の歴史～オイラーからワイアストラスへ～」好田順治 訳，現代数学社(1990)