イギリス形式主義とハミルトン

津田塾大学
長岡亮介

§0　<敗者>に目を向けた数学史

「数学史の目的は何か？」―――最近わが国でも、ようやく数学史が日の目を見つつある。「純粋数学」に未来の暗雲を感ずる数学者の鋭敏な感性が、数学史に好意的な態度を増加させているのだろうが、だからこそ、この問を発することはいまより一層重要である。

数学史は、しばしば、数学教育との関係で語られてきた。「個体発生は系統発生を辿る」という生物学の深遠な謎を持ち出すまでもなく、人間の認識の自然な発展過程を無視した論理的整合性だけでカリキュラムを組織することの無理と失敗は、今さら繰り返すまでもない。より重大なのは、数学という名前の下に包括される学問的分野が、必ずしも、単一の文化的原理（たとえば論理法則）によって指導されているのではなく、文化総体とのダイナミックな関連をもった、すぐれて歴史的な所産であるということが確認されることは、数学教育の実践において、単なる息抜きの話題を提供する以上の役割を果たすことも確実である。

一方、現代にあってとりわけ数学史が、声高に叫ばれることの理由は、現代数学の極度の専門化と無関係ではない。　多くの研究者は、自分が扱っているテーマに極めて近接したものに対してしか、その意味を理解することは容易ならざる状況に陥っている。自分の研究している分野の拠って来る由来を知れば、遥かに豊かな数学のイメージをそこから紡ぎ出すこともできるという期待は極めてもっともである。　少し離れた分野の研究に関心をもとうとするなら、まずその分野が発生した源に遡ることは、もっとも実直な方法である。進化の枝別れの地点まで遡れば、分化した異なる種の間の連関が見えるということである。

さらに、自分の扱っている問題の歴史的起源をしっかりと捉えることによって、いわば正しく数学する、歴史的に正当な数学をすることができる、という意義もある。一時的な流行に左右されない本当に良い問題と取り組もうと思うのは、優れた数学者の本能のような自然の欲求であろう。実際、歴史的な天才の中には、数学史に大きな関心を寄せた者が少なくない。

しかし、このような数学史は重大な弱点をもっている。それは、現代数学の立場、あるいは自分の数学の立場を無条件に肯定し、その立場から見て、都合の良い事例だけを拾い、他を切り捨てることになってしまうことである。　現代数学の立場から見て価値のあるものだけを拾い上げるとすれば、たとえ過去を蔑視する意図をもっていないとしても、現代の価値を無批判的に過去に外挿する危険を冒していることになる。過去の歴史を過去の歴史として、慎重に再現するのではなく、現代の価値観に基づいて、過去の解釈を捏造してしまうということである。

もちろん、厳しくいえば、過去をそのままの形で復元することは、困難であるばかりか、原理的に不可能である。そもそも、もしそれが可能であるとしたら、数学のように保存性の容易な文化においては、過去の復元は骨董品の意義すらもたないであろう。歴史をかたることが間接的に、しかしときにもっとも鋭角的に現代を語ることであるからこそ、歴史が意味をもつのである。

したがって、我々は、過去をなんらかの形で「現代」的にで語ることを躊躇する必要はない。唯一つ注意しなければならないのは、過去の数学を無批判的に現代語に翻訳してはならないということ、言い換えれば、過去の数学者の成果を、その後に続いた発展だけを視野において評価してはならないということである。不謹慎な例えを許してもらえば、現代数学という勝者による戦争裁判的な、一方的な歴史評価をしてはならないということである。そのような「偏った」歴史に基づいたなら、「歴史に学べ」という教訓ですら、体制翼賛的なプロパガンダになってしまう。

では、「戦争裁判」的でない歴史は、いかにして可能であろうか？　数学史の場合特に、これは難しい。というのも他の歴史以上に、記録されているのは勝者の勝利の記録であるからである。　敗者の側の資料は見つけるのも難しい。　権力闘争の結果で決まるのではなく、論理的に決着がつくために、敗者の記録はますます残りづらいからである。そしてまた、我々現代人が、すでに、だいぶ昔に終戦になった戦争の現代数学という勝者の側にいて、それ以外の目で見ることそのものが極めて困難になっているということもある。

したがって我々が歴史に対して公平になろうとするなら、意図して、「敗者」の側に立つことが重要になる。言い換えれば、時代々々にはそれなりの活躍をしながら結局は破れて行ってしまった、そういう数学や数学者にできる限り焦点を当てるということである。

単に、忘れ去られた過去を単に復活することを目指すのではない。破れた側、亡びた側から歴史を見ることによって、勝者の歴史的存在・本質がより深く見えて来る可能性があるのではないかということである。

§１．代数的形式主義

「敗者の数学」としてここでは、18世紀の数学を取り上げてみたい。

従来数学史は、この18世紀を、「偉大な神々の17世紀」と「偉大な英雄の活躍する19世紀」の狭間にあってあまり目立たない世紀と考える傾向があった。実際、この世紀の数学に焦点を当てた数学史の叙述は、目立って少ない。　確かにこの18世紀には、17世紀に起こった数学上の大革命に匹敵するものはないし、19世紀のように今日の数学の直接的な源流になる大展開もない、18世紀は、発展史観にたつ数学史から見れば、あまり価値がないのである。言い換えれば、18世紀は敗者の数学の世紀であるのだ。　言うまでもなく、ここで言う18世紀は、狭義の百年間ではない。また18世紀の数学がすべて敗者の数学と言うわけでもない。ここ17世紀を受け継いで１８世紀に大いに発展した数学思想---この後に述べる<代数的形式主義>という精神を体現した数学が、19世紀に入って次第に敗色濃厚に

なって行ったという意味で、それを敗者の数学と呼ぼうというのである。

代数的形式主義とは、代数的記号法で表された表現は、その中に使われている記号文字が何かを表しているということを特定しなくても、普遍的に正しい、という主張である。今日の目から見るとほとんど信じられないようなこの主張は、その時代の数学者にとっては、疑うことさえ不可能な前提であったという意味である。単なる主張というよりは、時代精神、あるいはパラダイムと呼んだ方が良いものである。（当時の表現法に忠実になるなら、代数解析主義と呼ぶべきだが、最近ではこの言葉が特別の－－－しかし由緒正しい－－－意味で使われているので、誤解を避けるために、この耳慣れない表現を用いることにしたい。）

代数的形式主義の起源は遠くは、ヴィエトにまで遡ることができる。しかし、このような代数的記号法はあくまでも発見の場面で使われる便利な術 ars にすぎず、厳密な証明法とは見なされていなかった。伝統的な幾何で作図問題を解く際に、まず与えられた条件を満足する点の存在を仮定してその点の満足すべき条件を分析的に調べる。このような作業が「解析」の名で呼ばれていたために、代数的記号法に基づく方程式の解法やさらに広く、代数的記号の計算に依拠するすべての数学的推論も<解析>の名で呼ばれるようになったのである。17世紀から18世紀にかけて、<解析>は<代数>とほとんど同義であった。しかし、留意すべきは17世紀においてはまだ、<解析>は 総合的＝論理演繹的 証明の下に位していたということである。ニュートンは『流率法』を出版しなかったという話はこの状況を端的に物語るエピソードである。

しかしやがて代数的記号法に基ずくこの新しい発見術は、微積分の手法の開発を通して、次第に地位を向上させていく。そして、これが他の数学手法を押えて数学の中心に居座るようになるのが18世紀なのである。この傾向は、18世紀の巨人オイラーに、典型的である。

オイラーについては、すでに多くのことが語られてきているから、ここでは、あまり有名でない事例を引用しよう。

彼とダランベールとの間でかわされた振動弦に関する論争はあまりにも有名であるが、実はこれ以外にもいくつかの話題で論争している。論争と言っても、手紙のやりとりが中心であるが、その中でここでは、$\log(-1)$に関するものを取り上げたい。というのも、この問題はすでに、ライプニッツとベルヌーイの間ですでに論じられているものであるが、それと比較すると、新しいこの論争の中には、18世紀的特徴が鮮明に現れているからである。

この論争がきっかけとなって、オイラーは $\log(-1)$ を巡るライプニッツ・ベルヌーイの論争に関する論文を書く。この中で、オイラーはライプニッツとベルヌーイが上げた論拠を再度とり上げて18世紀的な観点から再吟味を与えている。その中でとりわけ興味深いのは次ぎの点である。

$d\log(x)=x$、$d\log(-x)=-x$ だから、$\log(-x)=\log(x)$

であると言うベルヌーイの主張に対し、ライプニッツは

微分公式は元々正の数に対してしか意味を持たない

という批判を展開したが、オイラーはこの批判はあたらない、と主張し、積分定数の不定性を考慮していないと反論する。もっと面白いのは、ベルヌーイが、「対数法則の普遍的正当性」に基づく

$$\log(-1)^2=\log(-1)$$

を根拠に、

$$\log(-1)=0$$

を主張したのであるが、これをオイラーが「もっとも反論しにくい根拠」といっていることである。オイラーは、対数法則のような「代数的」公式は森羅万象を貫いて貫徹しなければならないという信念と信じている。

このような数式の普遍的妥当性に対する信念は、17世紀の頃は ”普遍算術arithmetica universalis ”という名で呼ばれていた。 つまり、代数は、個々の数ではなく、記号の間に成立する普遍的な関係を扱う、より一般的な数論であると考えられた。この主張は18世紀に入って、”代数学の一般性 la generalite d'algebre ”というより先鋭な名を獲得する。代数的記号法に基づく推論で得られる結論が、この”代数学の一般性”によって、正当化されるという段階に至る。実数の場合に承認されている規則を、虚数や無限に「拡張」して適用することは、”実から虚への移行 le passage du reel a l'imaginaire ”とか、”有限から無限への移行 le passage du fini a l'infini ”と呼ばれた。

このような放縦とも言うべき代数的形式主義をもっとも明確に批判した人の一人はコーシーであった。（コーシーが、自分の研究の中では、代数的形式主義の体現者であった。それが、教育の場面に立ったときには、その鋭い批判者になったのである。）

その批判として有名な「解析教程Cours d'analyse」,1821 の有名な序文には、「解析学に幾何学の厳密さを与えるために……一見、まさかと思われることを承認せざるを得なかった」という下りがある。その例として上げられているものな中には、「発散級数は和をもたない」という現代的には意味不明なまでに自明なものも含まれている。”まさかと思われる”は dur という言葉の翻訳である。dur は、本来「堅い」という意味であるが、ここではコンテクストを考えれば、「耳障りな」とか「納得の難しい」という程度の意味であろう。ともかく我々にとって自明のことをdurと言っている点が注目に値するのである。

「代数」的な表現

$$u_1+u_2+u_3+\cdots$$

があればその指示対象である和は、この級数が収束するか否かにかかわらず、存在するに決まっていると考えられていたということである。これをコーシはひっくり返したのである。

同様の事態は、虚数の相等性についての叙述にもはっきりしている。代数的形式主義に従えば、まったく区別する必要のない実数と虚数の相当性を明確に区別して、虚数の相等性（等式）は、二組の実数の相等性（等式）にほかならないという立場を鮮明にしている。これは、虚数を２つの実数の順序対と見なそうという立場にも対応している。

ここに現れたような、複素数の形式的定義を与えたのは、よく、ハミルトンであると指摘されてきた。この「真相」が、次節テーマである。

ともかく、この本が出版された1821年当時のフランスでは、これらの表現が依然 "dur" であったということは、フランスにおいて、それほど代数的形式主義が深く根付いていたということである。

代数的形式主義は何故克服されることになるのか---最近数学史でもっとも興味深い話題の一つがこれである。

様々な要因が考えられる。まず第一には、啓蒙主義という<時代の精神>があげられるであろう。一切の不合理を排して、すべてを<理性の光>の中に照らし出そうというこの思想運動は、数学の合理化・体系化を促した。(「百科全書」に於けるダランベールは、極限の定義はそのような合理化の典型である。)

また18世紀末から19世紀前半の数学先進国フランスにおいては、よく指摘されるように、フランス革命という巨大な社会体制の変革の影響も考慮されるべきであろう。18世紀まで、数学者は、専ら王立アカデミーを舞台に活動するいわば「芸術家」であったが、大学の教授職という体制の中に組み込まれていったということである。 数学者が専門家向けに活動すればよいアカデミー会員から学生に理解を求める教授職になると、論理的に不十分なもの、修練によって初めて理解できるようなものは、排除しなければならなくなった。これが、代数的形式主義の批判へと発展していくのだという指摘には、確かに説得力がある。

しかしこれから述べるように、フランスは、少数の先駆的例外を除いて、代数的形式主義の数学がもっとも盛んであったのだから、これだけでは、代数的形式主義克服の歴史的説明にはならないだろう。

代数的形式主義に対する痛打は、数学の内部から与えられた。<代数学の一般性>に反する代数系---ハミルトンの四元数----の発見である。

§2 ハミルトンに至るイギリス数学

ヨーロッパには中世から続く大学の伝統はあったが、ほとんどの大学は、神学、哲学、法学を中心とするもので、数学は、いわゆる liberal arts、つまり教養として教えられていただけであった。数学の講義の目標は、計算法と論理的推論能力の修得にあったから、講義の方法も、暗唱が中心になるほど、低い水準であった。

大陸では啓蒙主義の影響下で作られた新しい大学は、その一つ ecole polytechnique の名が物語っているように、様々な技術と科学の統合を目指すものであった。数学も当然応用可能な技術でなければならなかった。そのような空気の中にあって、解析的方法は、諸科学への応用に便利な、しかも修得に永年の経験や超越的霊感を必要としない「ブルジョワジー的」数学の方法として、広く普及していった。

一方、イギリスでは、数学教育に対する中世以来の伝統が根強く残っていた。すなわち、数学教育の目標は、一人前の紳士を育てるための必須の一般教養を身につけさせることであった。だから、論理的に曖昧な新数学＝解析法は、たとえ発見法としては強力であっても、精神の推論能力を鍛えるための素材としては、明晰性、厳密性を備えている総合に劣るとされ、大学教育においては、旧態依然とした総合幾何が重視されてきた。伝統的に数学が比較的重視されてきた ケンブリッジ大學においてさえ、ほとんどの カレッジでは、

ユークリッド、円錐曲線、平面球面三角法

と

流率法、『プリンキピア』第一巻

が中心で、代数は、それに付属するものでしかなかった。ケンブリッジの優等生wranglerであった メイザース Francis Masers 、フレンド William Frend 等が、負数、虚数の使用に対して、今日理解することが困難なほど naive な批判を展開したことは、まことに時代を象徴している。彼等は、

「減法の定義に照らして、小さい量から大きい量を引くことには意味がない。」

「不可能な量による推論は単なる類比にすぎない。」

といった批判を展開したのである。

しかし、一方、最終試験(the Senate House examination, いわゆる mathematical Tripos)で 好成績をとることは、イギリスにおいては極めて重要なことであったため、学生の間では、その受験勉強として、わかりやすい解析的方法で叙述されたフランスの本（とりわけ　ラクロアやラグランジュの書いた教科書）がよく読まれていた。

こうした中で学生の中から急進的改革派が登場して来る。「解析協会 the Analytical Society」である。イギリス数学の立ち後れを痛感したハーシェル J.Herschel、バベッジ C.Babbage、ピーコック G.Peacock等を中心に、ケンブリッジ大學の数学教育の改革、すなわち解析的数学の普及を目指し、そのための試験問題の改革を手掛けていく。この急進的な運動は、永くは続かなかったが、その影響力は、「解析協会」解散の後も継続し、やがて、1820年代に入り、イギリスの中にも、解析的数学が次第に根を下ろすようになる。ウッドハウス R.Woodhouse による解析的方法を盛り込んだ教科書や、フランスの解析的教科書（たとえば、ラクロア）の翻訳も出版される。また、バッベッジ、ハーシェル、ピーコックの 解析的問題を集めた "A Collection of Examples" などの出版もなされる。ピーコックの"Treatise on Algebra" はこの流れの最高潮である。　そして、イギリス数学教育の理想が、一般教養から、専門家・専門技術者の育成を目指すものに変容していくのである。

ところが「改革」は一息に進むものではない。1830,40年代に保守派による「巻き返し」が起こる。教育改革で名を遂げた フウィーウェル W.Whewell はイギリス数学の「有害な解析的傾向を排除」を自慢している。

ハミルトンが、有名な「共役関数すなわち代数対の理論；純粋時間の学としての代数学

の基礎的試論 Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time」, 1833を書いたのはこのような時代的状況においてであった。この論文は、虚数を実数の順序対として"定義"したということで有名である。これから、この論文が、極めて現代的=形式主義的な色彩の強いものであると誤解されがちであるが、それは、ハミルトンの論文の読みづらさに伴う内容の無理解によるのである。ハミルトンの仕事は、むしろ正反対に、これまで述べてきたような大陸の新しい数学を取り入れようとする解析主義的改革派に対する保守的な反動の一つと見るべきなのである。実際、この論文の冒頭で、ハミルトンは代数学を

単なる便利な道具instrumentと見て、その道具を司る規則を探せばよいと考える実用派the Practical

と、

数学における一般的な言語と見なし、その言語を統括する公式を探すと考える言語学派the Philological

を批判して、

思索としての代数学を研究する理論派the Theoretical

を認じ、真理である定理を探求することがその仕事であると考えた。 我々の目から見ると奇異に写る、"algebra as the science of pure time" は、伝統的に数学の基本的対象である（と彼は考えた）時間という根源的原理に基づいて、代数学の基本にある数を厳密に概念化しようという、極めて野心的な試みであって、単に、時間の先験的な直観形式というKant哲学の権威に依拠しようという試みなのではない。

そして二つの移動を表す「実数」の対としての彼の複素数の定義は、複素数が平面上の変換を表すという、当時すでによく知られていた数学的事実を、数と量の本質的属性に基づいて、自然に演繹することを目指したものであった。ハミルトンの、このような虚数の定義は、運動という、形式主義的立場からは数学と相容れない概念に基づくものであったということは、特筆しておかなければならない。つまり、ハミルトンは形式主義的な定式化を目指していたのではなく、正反対に、<代数学の総合数学化>を目指していたのである。ハミルトンが代数的形式主義に対するどれほど厳格な批判的姿勢をもっていたかは、彼の記号に対する慎重な取り扱いの姿勢の中に現れている。実際、彼は、a+b の逆 θ(a+b) を θb+θa のように表す慎重さをもっていた。非可換代数の発見に先立つこのような慎重な記号の取り扱いは、ハミルトンの立場をよく表している。

しかし歴史の展開はまことに弁証法的である。平面運動を表す数としての虚数の定式化の成功は、空間における運動を表すはずの超虚数の発見へと数学者を駆り立てた。ハミルトン自身、この仕事を仕上げた後、直ちに３次元の虚数の発見へと向かっている。
これが、やがて、四元数の発見へと繋がるのである。しかし、演算に関して代数系の満足すべき性質（代数的閉性、結合律、交換律、絶対値の同型性、etc.）のうち、他を残して積に関する交換可能性を放棄すべきであるという結論に到達するに、ハミルトン が払った

苦労を思い起こすとき、それがいかに大きな飛躍であったかが分かる。それは ハミルトン 自身がとらわれていた代数的形式主義の頸木の重さの現れである。ここにおいて、18世紀的代数的形式主義は、最終的な宣告を受けることになる。

しかしここでもまた歴史は皮肉な展開をする。つまり解析的数学の批判として代数学を科学に高めようとしたハミルトンの仕事は、むしろ、すべての数学的量の領域を貫く普遍的法則の不在を主張するだけでなく、むしろ、記号的表現がここの具体的数の領域とはさしあたり無関係な存在を許容されるという自由を与えることになってしまったということである。実際、グラースマン H.Grassmann による、遙かに「高次の」極めて一般的な外延量（延長量）の理論 Ausdehnungslehre が提出されたとき、もはや ハミルトン はいち早く歓迎の意向を表明し、「純粋時間の学としての代数学」という得意の看板を下ろしたという。