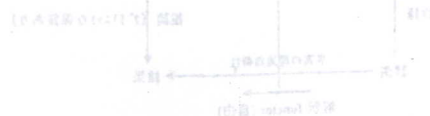


## 科学史上の事件としてのパラドックス

京都産業大学理学部 上村義明

特にワイルが「数学と自然科学の哲学」の中でユウブリデスを「うそつき」の発明者と認定してからは権威にさからうものはいない様である。真理が存在してそれが言語で表現できるとは限らないという認識は洋の東西を問わず神秘主義的傾向の中であまねく存在していたが、古代クレータ人は、なぜ表現出来ないのか、又は表現出来ない例として「クレータのうそつき」をとらえていたフシがあるという筆者の主張は、一方言語と離れて真理というものが存在しており、言語はそれを表現しているに過ぎないとする枠組みの発見として重大な意味をもつことを同時に主張することになる。これは後のソクラテス、プラトンにイデアの形で引き継がれ逆にプラトニズムの名で呼ばれる数学の世界の存在を認知した最初として特筆すべき事柄なのである。それは丁度感覚の向こうにこれとは異なる物理的世界が存在することを認知する発見（これはエレア派のパルメニデスやゼノンに帰される功績と考えられる。特にゼノンのパラドックスは物理学と数学の分離にかかわるものである）と双璧をなす。筆者の主張には、従来、こちらの方だけが重視されてきたギリシャ科学史の歪みを正したいという願いも込められている。

以上は「Liarの系譜」[1]からの引用であるが、ここから始めよう。単純化したスキーマで言えば「クレータのうそつき」は我々が数学的世界と呼ぶ世界の存在認知であり、その記述言語の記述能力の限界認識のはしりであり、「ゼノンのパラドックス」は我々が物理的世界と呼ぶ世界の存在認知とそれが数学的世界とは異なることの認識のはしりなのである。つまり物理的世界と数学的世界がまったく異なる存在である事を確認して、物理学と数学が分岐した歴史的事件であるというのが我々の主張である。如何に論理的に一貫していても、それが real world の理論である限り 実験に合わないならば、捨てられるという今日の常識となつている見解の最初の例なのである。



我々は先に「自己意識のモデルについて」[1]において、科学的理論の枠組みについて検討を行ったが、我々の立場からみると「ゼノンのパラドックス」の風景はどうなるだろうか？

ここで我々の科学理論の枠組みを見ておこう。「自己意識のモデル」から引用する。

### 科学理論の Diagram

ここで我々の出発点になった科学理論を反省しておく。

上の図 10 で示されるように real world の上に作られた普通に「理論」と呼ばれるものは描像と仮説（物語）からなっていて、いかなる実験・観測を行えば、いかなる対象の事実が得られるかを規定している。これに Platonic world の適当なモデルを対応させ仮説・物語に対応する広い意味での推論を通してえられる結果が観測の結果と一致すれば、これを科学理論と呼ぼうというのであった。この時、描像にモデルを対応させる手続きには原理的な必然性がない。大抵のやり方は描像・仮説を Platonic world での方程式とみることである。

よく教養の物理の講義でこの方程式を導くくどりが、物理と数学が未分の学生を苦しめる。この導入のくどりはいわば思い付きであって、要は方程式の解が観測値をどのように予見できるかにある。「思い付き」に対してはそんな具合に考えることの出来た自由な精神に感嘆すれば良いのである。また Platonic world と呼んでいるのはいわゆる数学の世界であるのだが Platonism の立場に立つのは場の量子論などで生ずるアノマリーを考慮して、自ら土俵を狭める形式主義や直感主義などの立場をとらないことにはかならない。また real にたいし Platonic を立てて一元論的単純化を避けてあくまでも人間の営為を強調したい狙いもあるのである。したがって、右側のモデルから結果への矢印はいわゆるアルゴリズム的な形式的推論だけに限定されるものではない。

以上のように、ともかく functor（横向の矢印）には恣意性があることから反論は意味がなく、また、縦向の矢印は左側では創作であり、右側では広義の推論であることからこれも反論は意味を成さない。したがっ

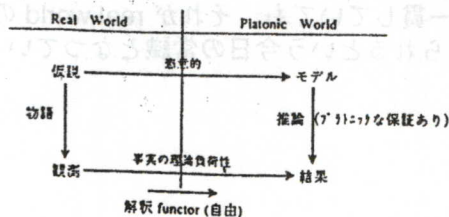


図 10

て、ただ実験・観測の値が推論によって出たものと一致するか否かだけに議論が煮詰まる。これが一致すると認められるとき科学的と呼ぼうというのである。「一致する」というのも人間の判断であるから程度の問題であるが、この程度で良しとするかどうかは人々の自由なのである。この一致が有りうること、すなわち科学的理論自体が可能な理由を少し考えておきたい。Platonic world には無数の理論が存在し得るが、その中から問題により良い解答を与えたものが生き残るのである。その threshold の設け方によっては科学的理論とする判断に幅がある。元を質せば、科学的理論が可能になったのは Platonic world を獲得するに至った人類の進化にあるのであろう。

図 10 はカテゴリー論を採用すれば簡単にまとめることが出来る。この diagram は左側を real world のカテゴリーとし、そこでのオブジェクトは描像と実験・観測、モルフィズムは物語とする。また、右側を Platonic world のカテゴリーとし、そこにおけるオブジェクトはモデル、モルフィズムは広義の推論とみなす。diagram は real world のカテゴリーから Platonic world のカテゴリーへの functor があるとき、つまり diagram が可換のときに科学的理論と呼ぶことにしておけば扱いやすい。モルフィズムの積の意味付けなどはいまのところ必要ない。

描像と物語、観測と事実及びモデルと相互作用は図 11 でしめすような関係にある。

古典力学の描像もチコ・ブラーエの観測事実の蓄積の上にケプラーの描像が生まれ、ニュートンの描像(3 法則)が生まれ、二階微分方程式のモデルが発見された。また、ファラデーの描像に対してマクスウェルのモデルが発見され、そのモデルの結果として電磁波が予見され、それが real world で改めて再発見された歴史はよく知られている。

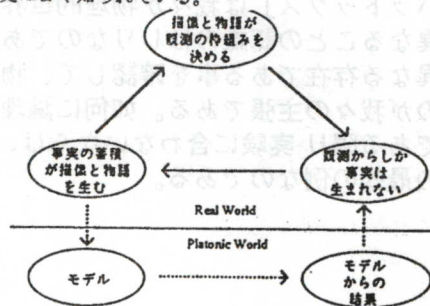


図 11



科学的理論の要点は実世界の事実を規定する記述にある。物語は仮説描像を駆使して実験・観測を規定せねばならない。つまり「事実の湧き口」を指示しなければならない。

先ず物理的世界について描像と物語が自然言語で構築される。

数学的世界の上で 或る数学的理論がこの描像と物語のモデルとして扱われて描像と物語に対応つけられる。描像と物語、とこの数学的理論の組、これが通常、物理的理論と呼ばれるものである。

我々の見解の要点を列記すれば次の様になる。

「ゼノンのパラドックス」は時刻、位置、質点を描像とする物理的理論である。その数学的理論のなかで時刻、位置に対応するものは時点、空間点である。

一方「ゼノンのパラドックス」は点は大きさを持ち、線分は有限個の点からなるとするピタゴラスの徒を論難するために編み出された論法で間接証明法の最初の例とされているから、以下の様な分類が自然であろう。[3]

「二分割」 : 時点は大きさを持つ。空間点は大きさを持たぬ。

「アキレス」 : 時点は大きさを持たぬ。空間点は大きさを持つ。

「飛矢静止」 : 時点は大きさを持たぬ。空間点は大きさを持たぬ。

「競争場」 : 時点は大きさを持つ。空間点は大きさを持つ。

「二分割」では、空間点は大きさを持たないので空間直線は無限に二分割できるので、対応する時間直線の方は、それができずに破綻する。「アキレス」では、時間、空間が入れ替わるだけで同様な議論が成り立つ。「競争場」ではすれ違う空間点が時刻の点を二分してしまう。このようにこれらの数学的モデルは運動の不可能性を導くので、real world の観測に合わない。

「飛矢静止」は、飛矢静止のみを結論するので運動の把握としては不十分である。運動を自然言語でとらえるとき、「A 質点は或る時刻に或る点に存在し、B 同時にその点に存在しない。」と言う形になる。これが運動の矛盾というものであるが、飛矢静止はAのみを反映した数学的モデルである。古典力学の描像は時刻、位置、質点の外に速度なるものを添加し、Bを反映するものとして時刻、位置の関係と平行して時刻、速度の関係を導入する。ある点における速度という概念がすでに矛盾であるがそれは描像であるから単なるオブジェにすぎない。AとBの矛盾は、位置の微分 = 速度 と置くことによつて処理される。これにはわけがあるわけではない。唯そう置かれるだけである。あとはその数学的理論の導く結論が描像の物語とうまく対応し整合するかにある。その辺は古典力学が示す如くわかりかし行くのである。運動する物体の'瞬間の位置'と'瞬間の速度'の二つの矛盾が相殺するとでも言う外あるまい。

結論を言えばこうなる。ゼノンの「飛矢静止」だけが数学的理論として生き残る。ただ運動をとらえるには描像としての「速度」が必要で自然言語による物語は位置と速度の二元論になる。速度についても、位置と同様に時刻の実数直線の関数として捉え、あとは数学的理論の中で速度を位置の導関数とおけばよい。(方程式)

数学的世界の中で矛盾は止揚されるといえよう。

描像において速度を位置と時間に還元することを断念することにより、即ち、位置と速度の二元論を採用することにより力学は姿を現す。これが解析力学の形式化ををいざない、量子力学まで共軌量の形で生き続けるのである。

このように、古典力学は「飛矢静止」の延長上に構成されているが、即ち「飛矢静止のパラドックス」を容認するが、量子力学も位置と速度を同時に確定することができないという形でこれを容認する。「二分割」も量子力学は容認する。何故なら量子力学では点 a にあった粒子が点 b に見いだされるとき一般にその経路を同定することは出来ないから経路の中点をもとめるという前提が成立しないのである。量子力学はこの限りにおいて時刻が大きさをもつことに抵触しない。

最近「ゼノンのパラドックスを解く」W.I.McLaughlinの翻訳が日経サイエンス1月号(1995)に掲載された。彼の議論の要点は実数の超準モデルの採用にある。我々の立場から見た時、これは殆ど何等、新しいものをもたらさない。少し引用しよう。

“無限小量の区間の両端を、具体的な数値で表現することは不可能になる。したがって、無限小量の区間を計測によって捉えることは出来ない。無限小量は観察の対象範囲を永遠に超えていることになる。”

つまり無限小量是我々が数学的とよぶ世界の存在であって、それは物理的世界の矛盾の解決をもたらすようなものではない。この引用が素直にそれを示しているように物理的世界と無関係なものである。科学的理論とは何かについて検討を要する所以である。ヘーゲル、マルクス、西田幾太郎等のいう矛盾と数学的世界の無矛盾性との関連を明確にしておかねばならない。

我々の思想を示すために、再び「自己意識のモデルについて」から引用しておわりにしよう。

#### Paradox of the Reality

Paradox のうちには reality を持っているものがある。いやむしろ reality のあるものは良く見れば paradoxical である。量子力学では EPR の paradox をはじめ paradoxical な reality には事欠かない。古典力学でも事情は同じで、たとえば運動は“Zenon の paradox”として知られている。

Platonic world に新しい数学的構造が発見されることによって real world の paradox がモデル化されその神秘性が吸収されて行くのである。Zenon の paradox は微分の発見によって古典力学にモデル化され、波動性と粒子性の矛盾は複素数を用いた確率振幅と重ね合わせ原理によってモデル化された。そういう意味で real world の paradox は Platonic world の新発見を促すのである(図 12)。

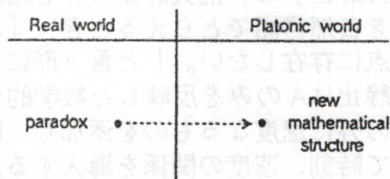


図 12

しかし、当の paradox は依然 paradox であることに変わりはない。古典力学による Zenon の paradox のモデル化にしても実は運動の中から微分可能なものに限ってモデル化したに過ぎないことに注意を向けなければならないであろう。Paradoxこそ更なる科学発展の原動力なのである。



I 「二分割」(二三九b、二三三a)

移動するものは、目的地に達するよりもまえに、その半分の点に達しなければならぬから、運動しない。

〔ゼノンの議論は、有限な時間において無限なものどもを通過することができない、あるいは、無限なものどもと一つ一つ接触することができないという誤った仮定に立っている。〕

II 「アキレウス」(二三九b)

走ることの最も遅いものですら、最も速いものによつて追いつかれないであろう。なぜなら、追うものは、追いつくまえに、逃げるものが走り始めた点に達しなければならず、したがって、より遅いものがいくらかはつねに先んじていなければならないからである。

〔先んじるものは、先んじているときには追いつかれない。しかし、それにもかかわらず、もし有限な距離を(有限な時間に)通過することができさえすれば、先んじるものは追いつかれるのである。〕

III 「飛矢静止」(二三九b)

どんなものも、自身に等しい場所を占めているときにはつねに静止しており、移動するものは今においてつねに自身に等しい場所を占めているから、移動する矢は動かない。

〔どんな大きさも分割不可能なものどもから成るのではないように、時間も、分割不可能な今から成るものではない。〕

IV 「競争場」(二三九b-四〇a)

競争場において一列の等しい物塊のかたわらを反対方向に、一方は競争場の終点から、他方はその折り返し点から、等しい速度で運動する二列の等しい物塊に関するもの。この議論では、ゼノンは、半分の時間がその二倍の時間に等しいという結論になると思っている。

〔この議論の誤りは、等しい大きさのものが自分と等しい大きさのもののかたわらを等しい速さで移動する際には、後者が運動していても静止していても、要する時間は等しいと考えているところにある。〕

( [ ]内はアリストテレスのコメント )

参考文献

- [1] 「自己意識のモデルについて」上村義明、黒田直樹  
科学基礎論研究 vol.20, No.3 (1991)
- [2] 「Liarの系譜」上村義明、数学史第3回シンポジウム  
津田塾大学 数学・計算機科学研究所報6 (1993)
- [3] 「古代ギリシャの思想」山川偉也 講談社学術文庫 (1993)
- [4] 「ゼノンのパラドックスを解く」W.I. McLaughlin 日経サイエンス一月号  
(1995)