

高次元データ科学と スパースモデリング

基礎勉強会(20210830-20210903)

酒井研究室
長崎大学

High Dimensional Data Science and Sparse Modeling
Summer Seminar

by Tomoya Sakai, Dr. Eng., Assoc. Prof., Nagasaki University

<https://www.cis.Nagasaki-u.ac.jp/~tsakai/lecture>

スペースモデリング

Sparse Modeling

森羅万象の解明と記述：日経5月3日掲載



宇宙や津波 数学で迫る 少ないデータで「本質」解析

キーワード

スペースモデリング

目的が明確なとき有効

測定時間が不足したり、信号が弱かったりした場合でも、必要な情報を抽出して本質をつかむ新たな計算方法。何を知りたいかが明確な場合に使える方法だ。ブラックホールの穴が見たい、血管を形が知りたいなど目的が明確であれば、何が必要なデータで何が不要かが見えてくる。

科学は観察から理論をつくる「帰納」と、理論から現象を予測する「演繹」の繰り返しだ。技術進歩で大量のデータが得られる今、数学の力で帰納の威力を高める「データ駆動科学」が世界的に活発だ。スペースモデリングもその手法のひとつ。研究は東京大学大学院の岡田真人教授を中心に進められている。



サイエンス

ZERO



Eテレ
毎週日曜 夜11時30分～
翌週土曜 昼 0時30分～
※都合により放送予定が変わることがあります

ホーム · これまでの放送 · 2015.08.23 放送

- トップページ
- 次回の放送
- これまでの放送
- スペシャル
- 番組について
- よくあるご質問
- テーマ募集中



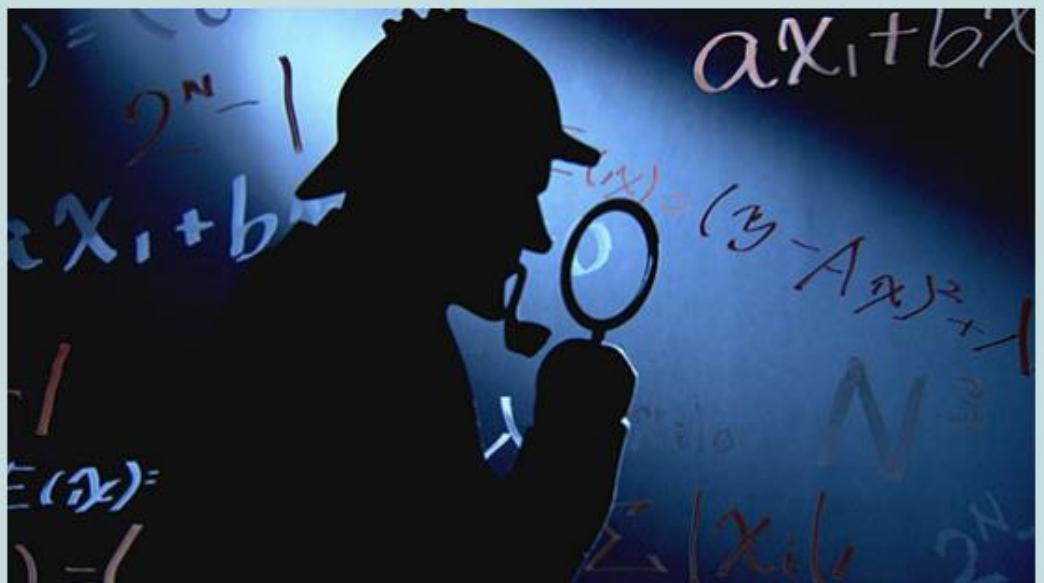
この番組をシェア
NHKサイトを離れます

これまでの放送

No.514

情報科学の名探偵！ 魔法の数式 スパースモデリング

2015年8月23日 放送



NHKオンデマンド

過去放送分 約50本を公開中

テーマ募集中

マガジン形式で旬な科学を丸かじり！

ZEROマガジン

あなたの取り上げてほしいトピックなどを
お寄せください。「ZEROマガジン」
はみなさんの“知りたい”にお答えしま
す！

▼ テーマを投稿する

酒井 聰弥 長崎大学

圧縮センシングに基づく超高次元
非線形写像の機械学習に関する研究

田口 順弘 中央大学

上田 卓見 東京大学

スパース性を使った新規多次元NMRスペクトル
再構成法の開発とGPCR研究への応用

宇田 新介 九州大学

疎性を用いた
多階層ネットワークの同定

宮脇 陽一 電気通信大学

スパースモデリングによるヒト脳内の
物体画像表現ダイナミクスの解明

佐々木 岳彦 東京大学

エネルギー・バイス界面の動的電気測定

による疎性モデリングの産業応用

島田 敏宏 北海道大学

スパース最適制御理論によるバイオ
メカニクスのためのスパースモデリング

齋生 麻子 産業技術総合研究所
スパースモデリングによる個体認知
顔の個体認知の神経機構の解明

土居 明広 宇宙航空研究開発機構

ブラックホール直接撮像を行う気球
サブミリ波VLBIのキーテクノロジー

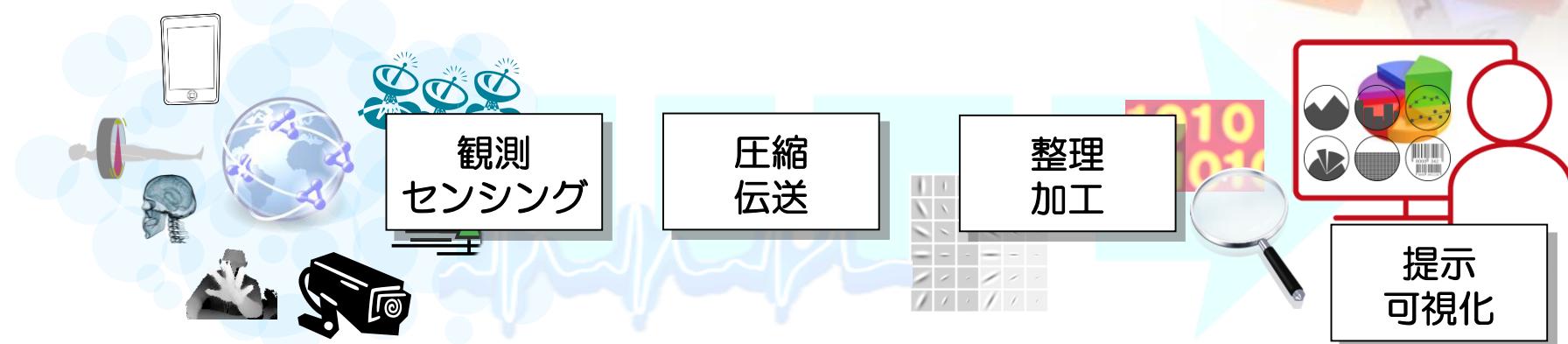
スペースモデリング

(Sparse Modeling; SpM)

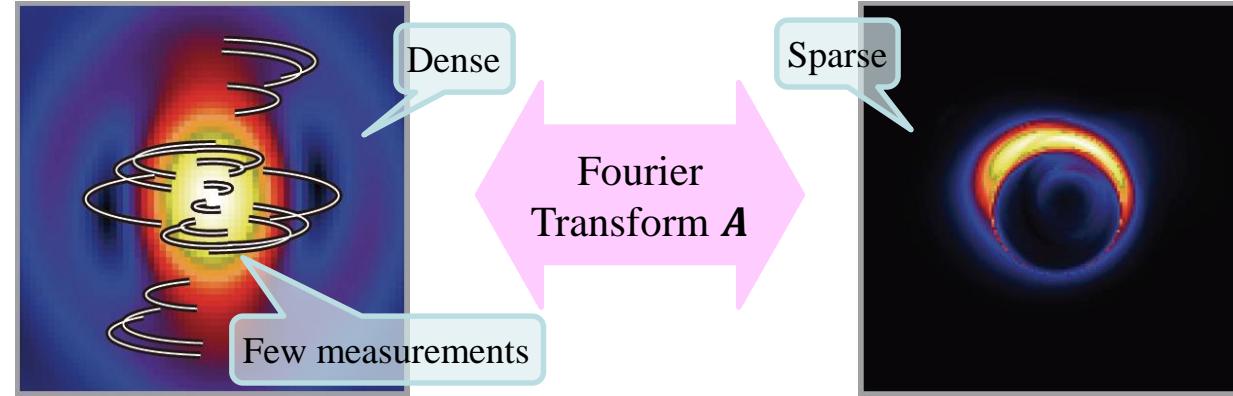
offers a concise insight into high-dimensional data

平たく言うと、データを簡潔に表せる数学的な模型作りのこと。

- データの内訳を明らかにする
- 的確に知識を組み合わせてデータを説明する



Radio interferometric imaging



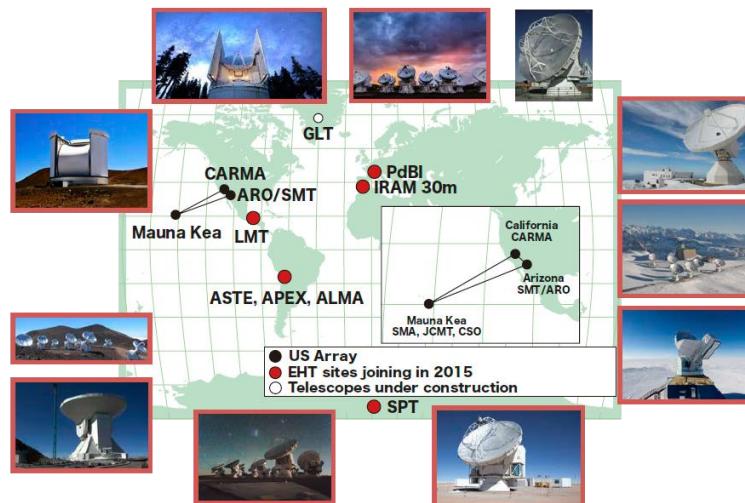
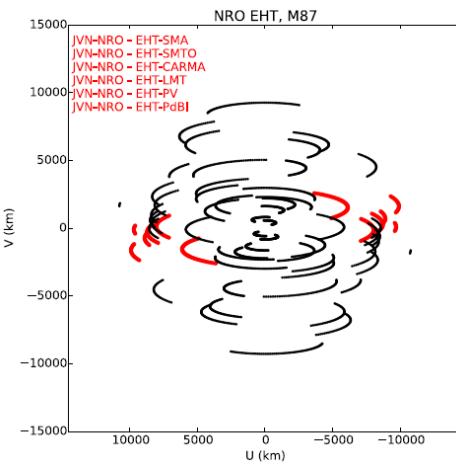
Visibility on uv coverage \tilde{b}

(Partial measurement of
2D Fourier coefficients)

$$= R\mathbf{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$$

Image \mathbf{x}

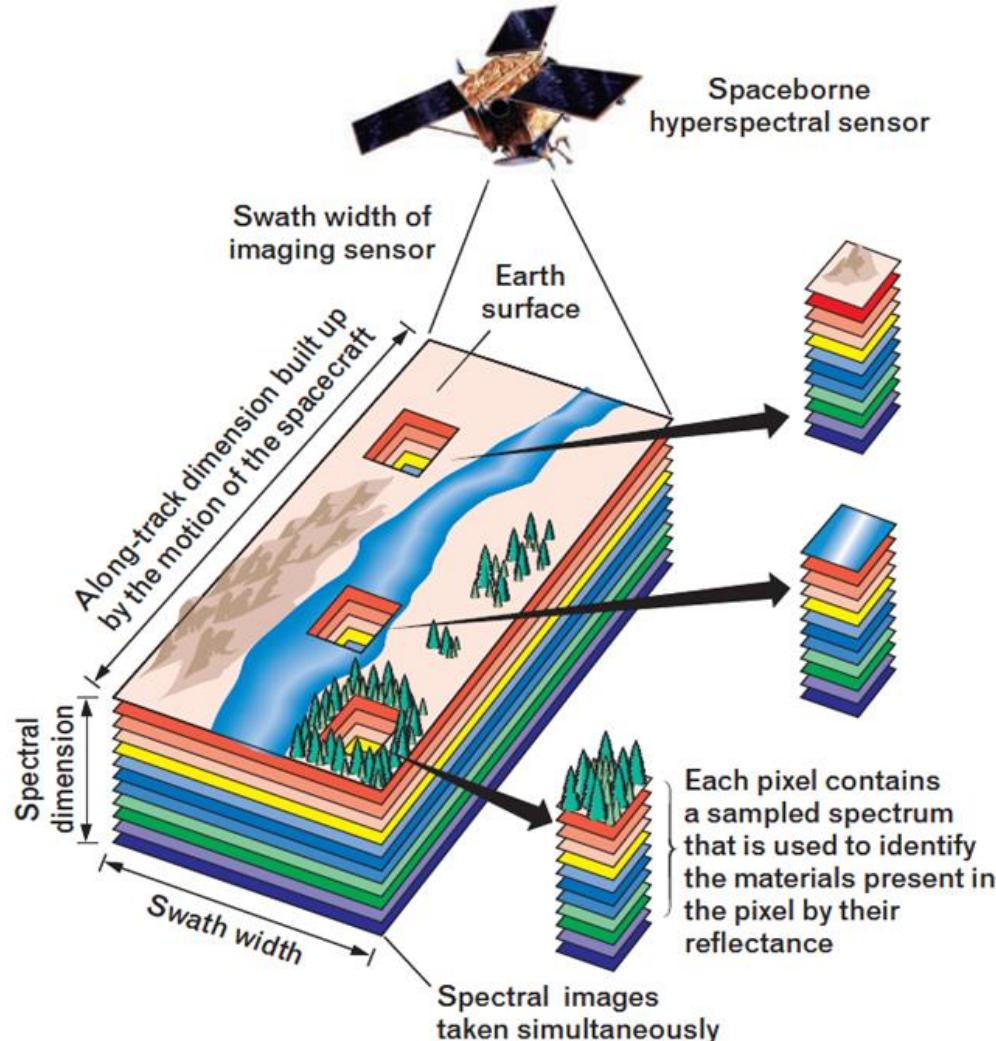
(distribution of wave sources)



[Akiyama+, 05]

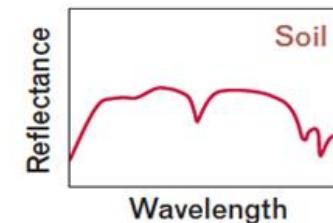
Event Horizon Telescope 2015-2016

Hyperspectral Imaging (HSI)

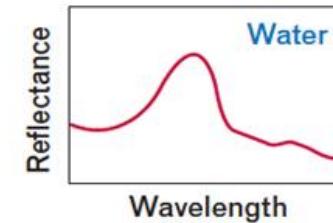


$$\mathbf{b}^{(j)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(j)}$$

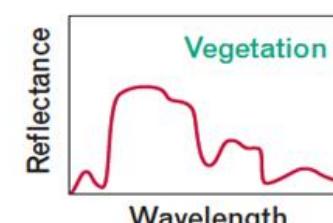
Sparse



$$\mathbf{b}^{(1)}$$



$$\mathbf{b}^{(2)}$$



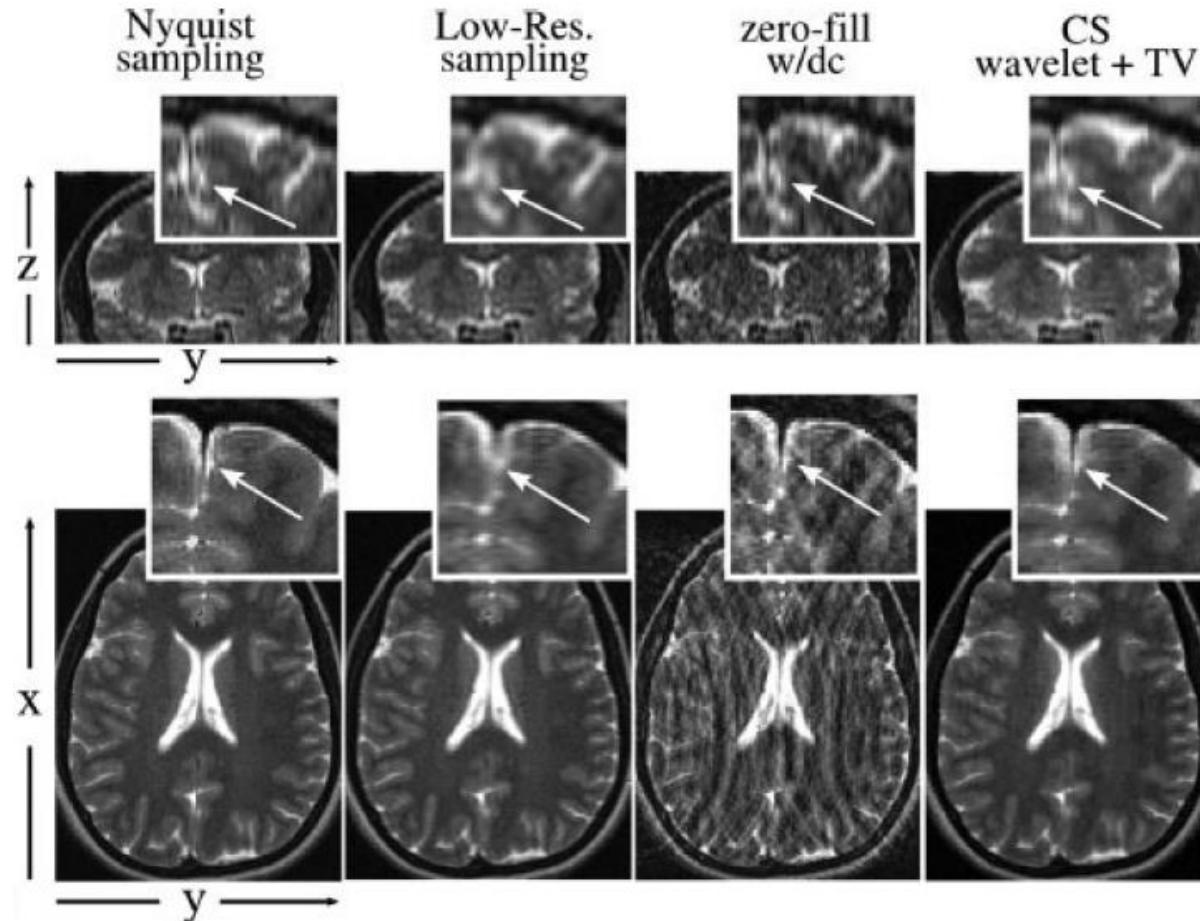
$$\mathbf{b}^{(3)}$$

⋮

Sparse MRI

[Lustig+, 07]

Minimize $\|\Psi\mathbf{m}\|_1 + \alpha TV(\mathbf{m})$ subject to $\|F\mathbf{m} - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon$



Ψ : sparsifying linear transform operator,
e.g., wavelet transform

F : Fourier transform

$TV(\mathbf{m}) = \sum_i \sqrt{(\mathbf{D}_x \mathbf{m})_i^2 + (\mathbf{D}_y \mathbf{m})_i^2}$:
total variation,
i.e., the sum of gradient magnitudes

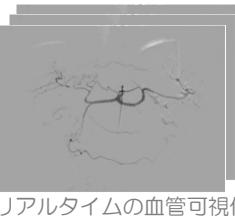
医用イメージング

体内を可視化する

Efficient medical imaging and visualization



X線血管造影動画



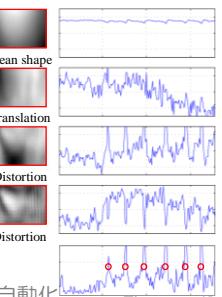
リアルタイムの血管可視化



共同研究: 4D-MRIの圧縮センシング
千葉大学フロンティア医工学センター
教授 羽石 秀昭, 2015~



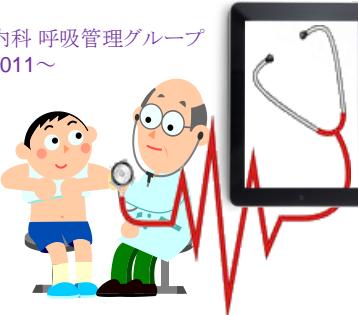
反復唾液嚥下テストの自動化
による誤嚥リスクの早期発見



聴診

肺音を聞きやすくする・解析する

Computer-aided lung-sound/biosignal analysis

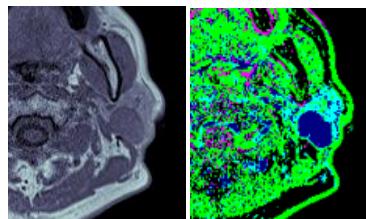


共同研究:
西九州大学 生活支援科学研究科
リハビリテーション学専攻
教授 東嶋 美佐子, 2015~

嚥下評価

飲み込む能力を測る

CV/PR approach to health assessment



MR撮像法を組み合わせた唾液腺腫瘍の識別

共同研究:
長崎大学大学院 医歯薬学総合研究科
医療科学専攻 口腔診断・情報科学分野
教授 角 美佐, 2020~

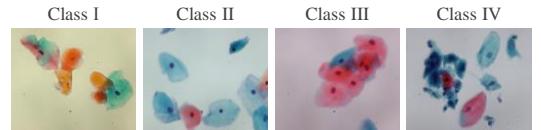
We stream live 24/7 on YouTube
長崎大学 情報データ科学部 酒井研究室



画像診断

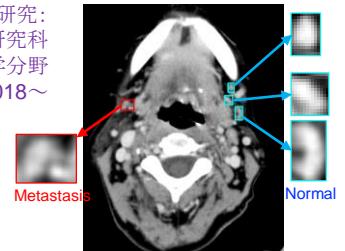
深層学習で診断を支援する

Medical image diagnosis using reasonable deep learning

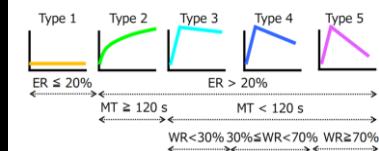


Normal ← → Malignant
口腔擦過細胞診による口腔がんスクリーニング検査の自動化

共同研究:
長崎大学大学院 医歯薬学総合研究科
医療科学専攻 顎口腔再生外科学分野
講師 見立 英史, 2018~



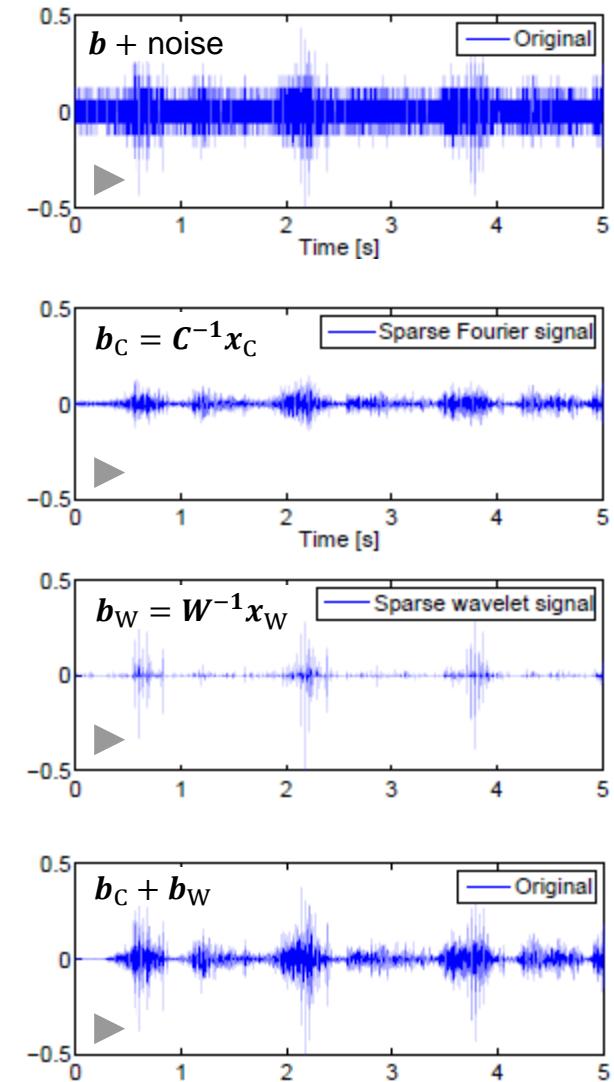
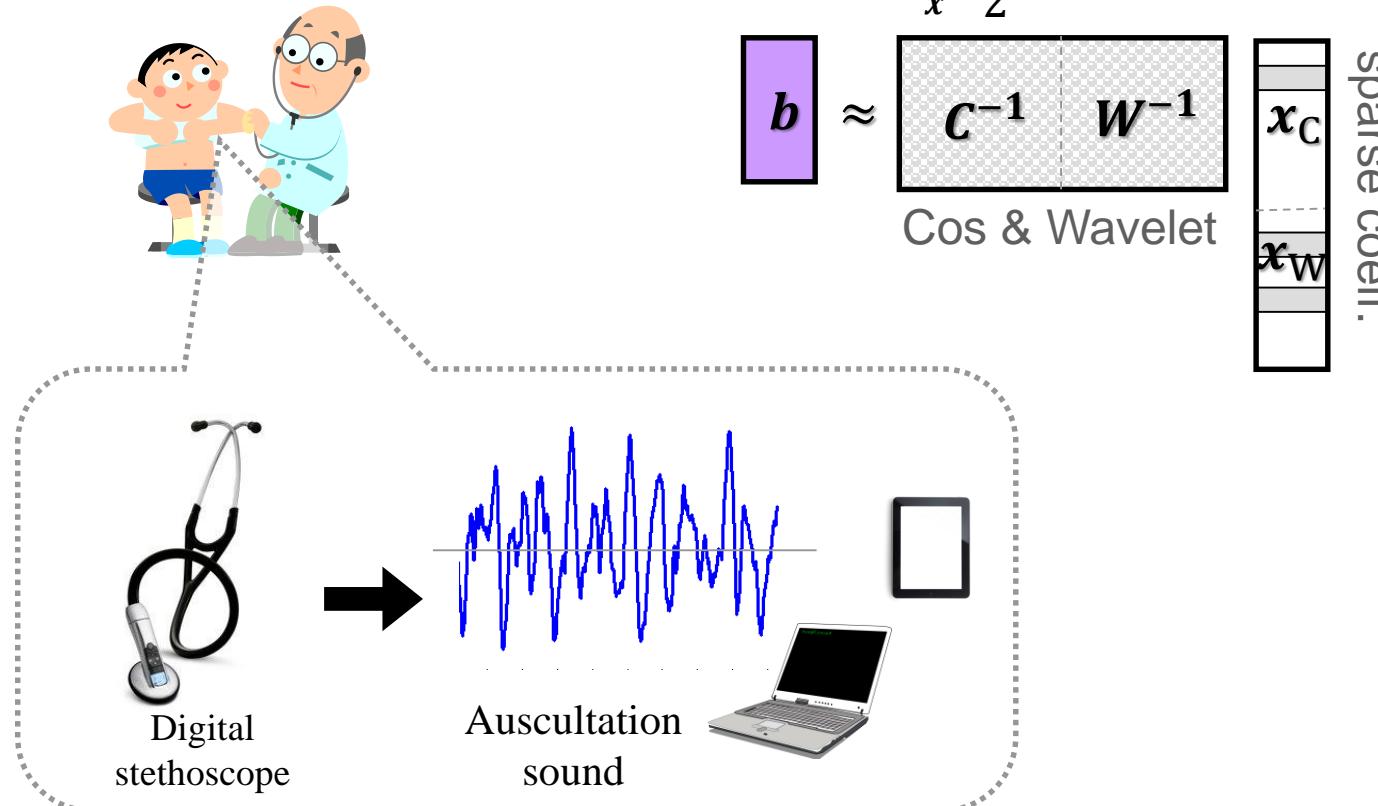
リンパ節の自動検出と
がん転移の有無の識別



<http://www.cis.nagasaki-u.ac.jp/~tsakai/>
tsakai@cis.nagasaki-u.ac.jp

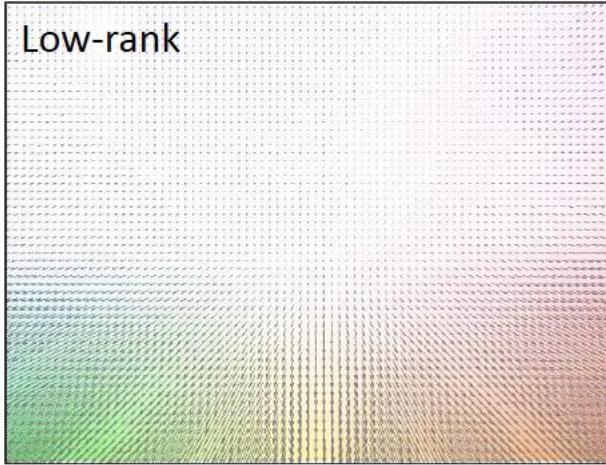
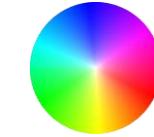
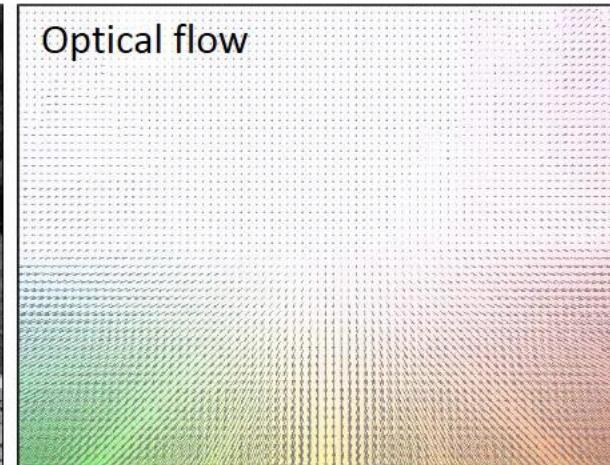
Lung sound separation (crackles)

[Sakai+11]



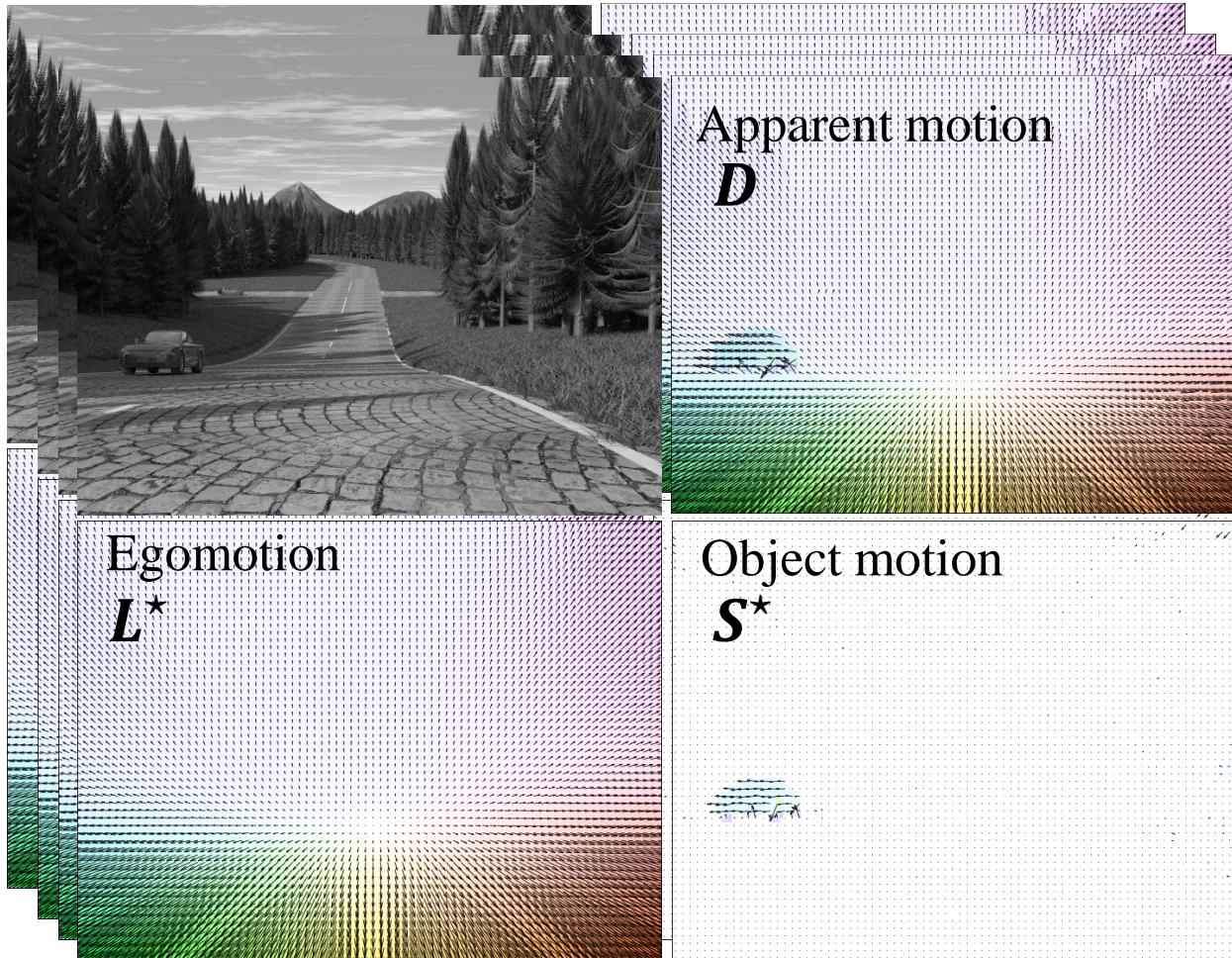
Separating back and foreground motions

[Sakai&Kuhara15]



Separating back and foreground motions

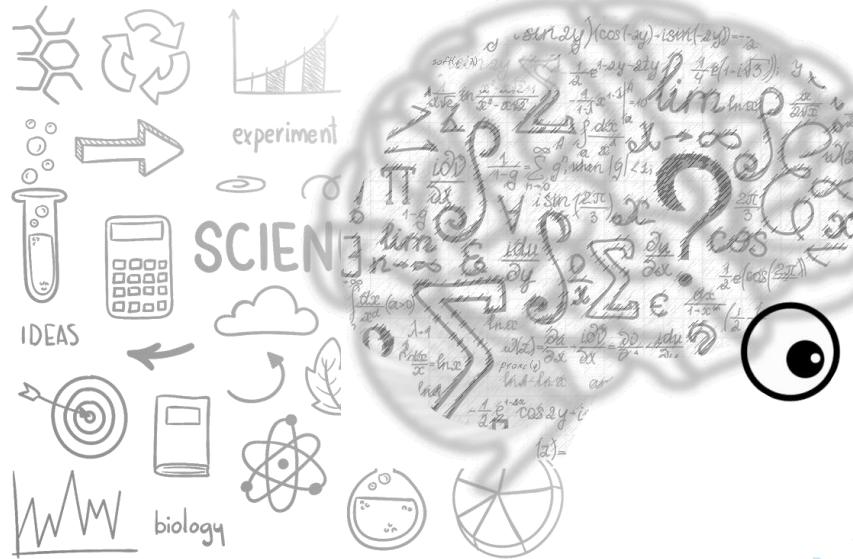
[Sakai&Kuhara15]



$$(\mathbf{L}^*, \mathbf{S}^*) := \operatorname{argmin}_{(\mathbf{L}, \mathbf{S})} \|\mathbf{L}\|_* + \lambda_S \|\mathbf{S}\|_1 + \iota_C(\mathbf{D} - (\mathbf{L} + \mathbf{S}))$$

SCIENCE PARADIGM

Transfer Science And Knowledge to AI

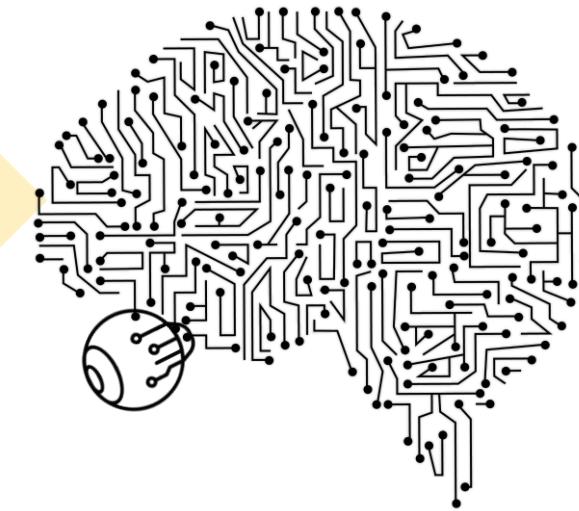


科学
知識



人：数理モデル

- ✓ 法則・経験則の記述
- ✓ アルゴリズムの設計



AI：深層学習

- ✓ データの解析、推論の高性能化
- ✓ モデルの更新、差分知識の獲得

高次元データ

High-Dimensional Data

数値の集まりで表されるデータについて

PR/MLでは、目標・課題を

計算問題に翻訳することが鍵！

∴ 計算機ができることは「計算」だから。
computer computation



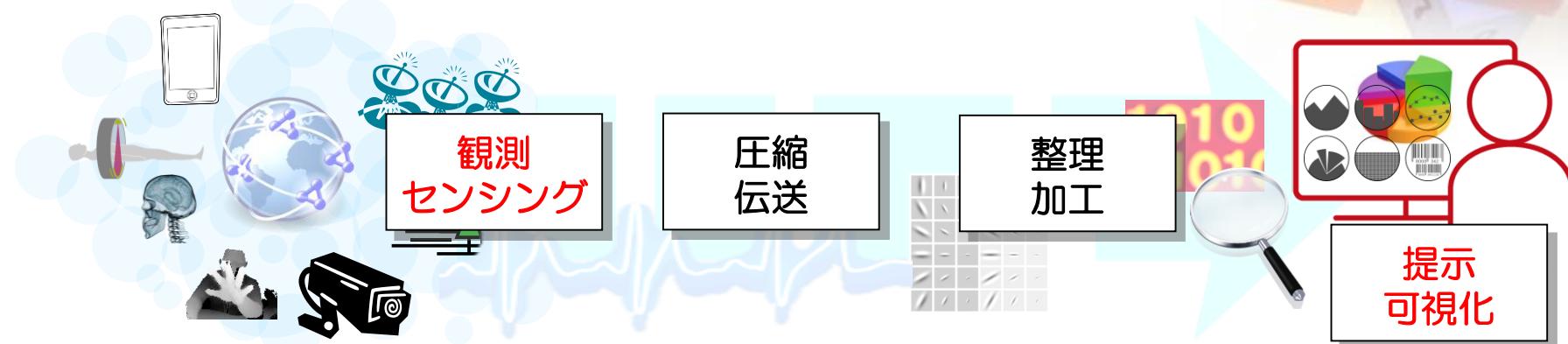
スペースモデリング

(Sparse Modeling; SpM)

offers a concise insight into high-dimensional data

平たく言うと、データを簡潔に表せる数学的な模型作りのこと。

- データの内訳を明らかにする
- 的確に知識を組み合わせてデータを説明する

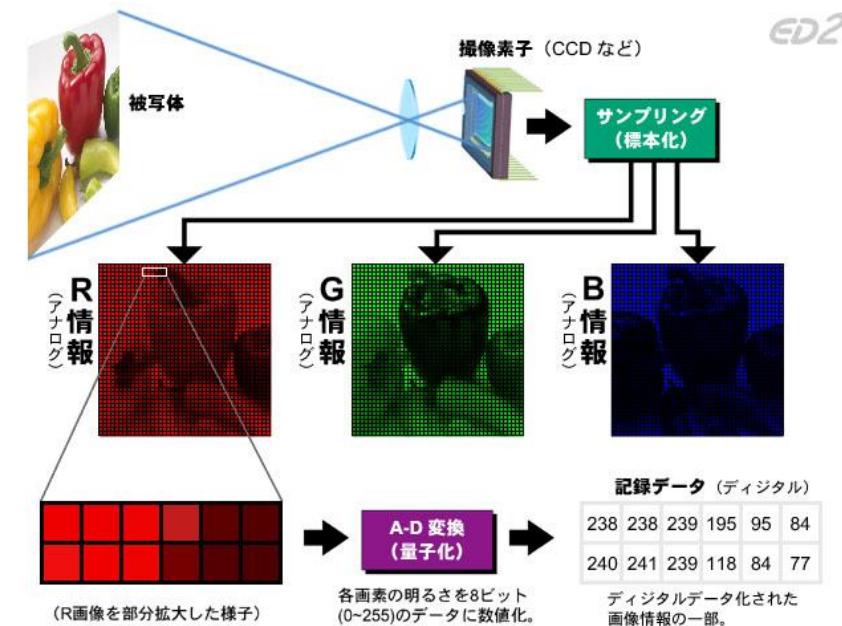
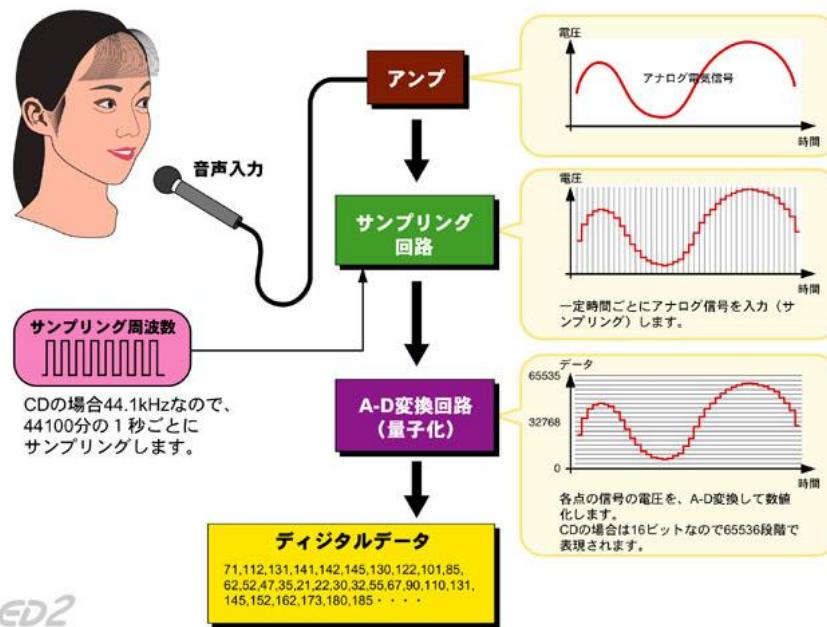


音・画像のデジタル化

コンピュータに取り込む手順:

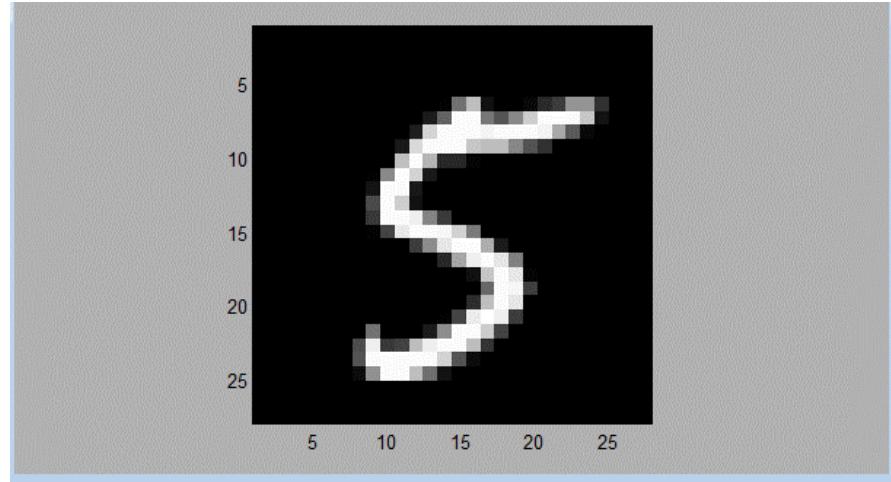
1. 音波、光等を電気の信号に変換する。
2. 信号の波形を標本化(サンプリング)する。
3. 標本値を量子化する。
4. デジタルデータとして記録する。

} Analog-to-Digital (A-D) 変換



離散画像

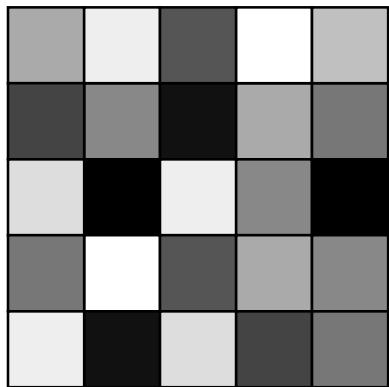
コンピュータにとって、画像は数値の集まり



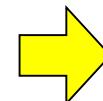
離散画像をベクトルとして扱う

数ベクトルによる画像の表現

画像



170	238	85	255	221
68	136	17	170	119
221	0	238	136	0
119	255	85	170	136
238	17	221	68	119



$$\begin{bmatrix} 170 \\ 68 \\ 221 \\ 119 \\ 238 \\ 238 \\ 136 \\ 0 \\ 255 \\ 17 \\ 85 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 136 \\ 119 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{x}$$

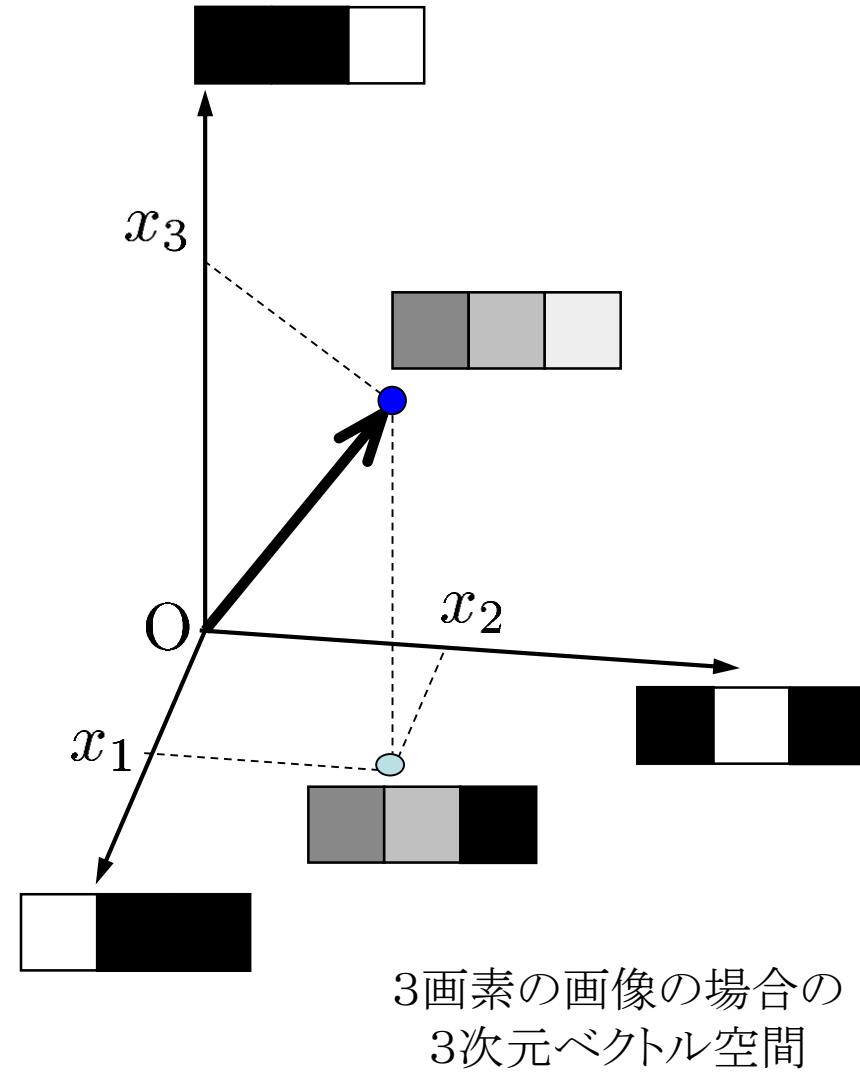
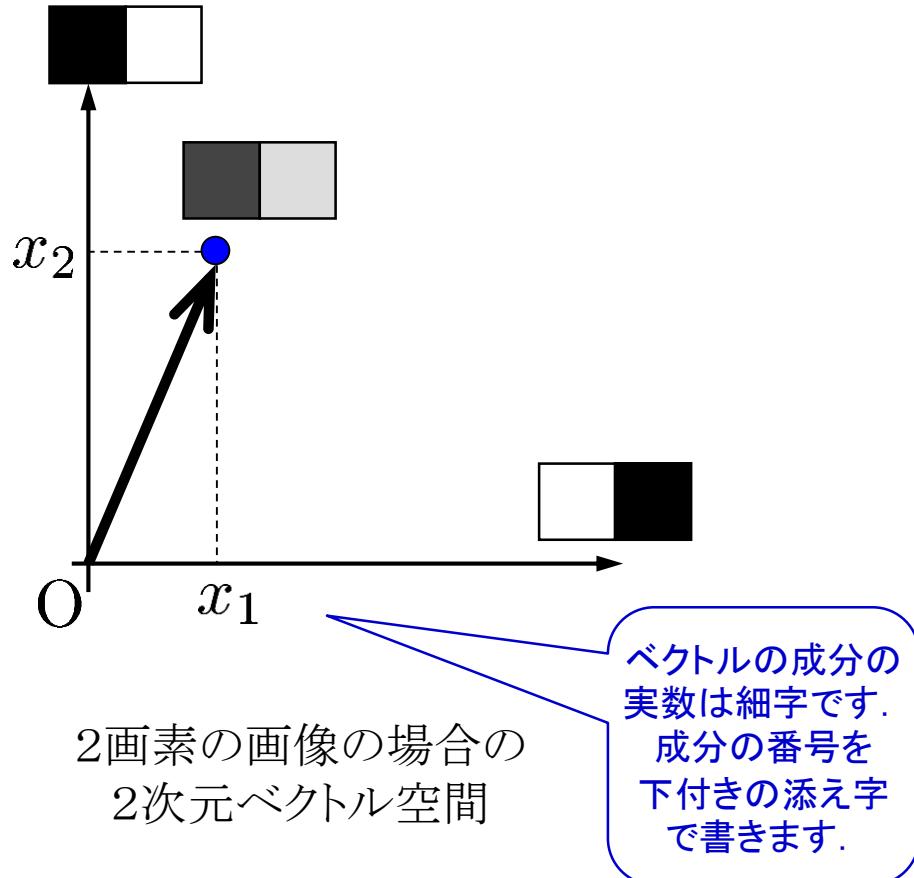
この分野では
ベクトルを
太字で書きます。

- 規則的に画素値を並べたベクトルで濃淡画像を表現する。
ベクトルの成分の数(次元数) = 画素の数

図の例では、25個の画素値を並べた25次元ベクトルで
画像を表現している。
左上から縦に各列を並べる順序としている
(並べる順序は自由に定義してよい)。

画素値の多次元空間

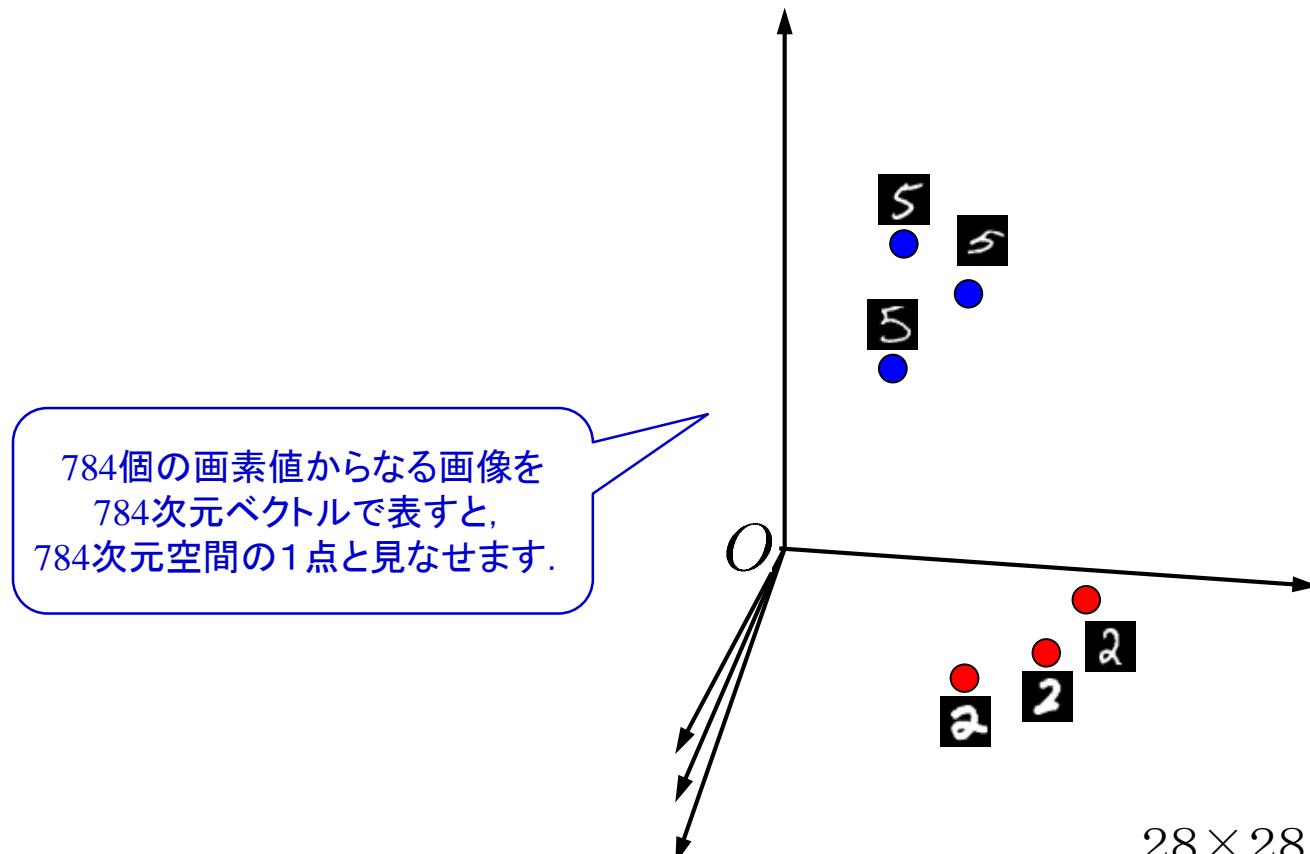
2次元, 3次元, ⋯, n 次元



画像の類似性

2次元, 3次元, ..., n 次元

似ている画像は、ベクトル空間で互いに近いのでは？



$28 \times 28 = 784$ 画素の画像の場合の
784次元ベクトル空間

数ベクトル・行列の記述

- d 次元の実ベクトル: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$
- m 行 n 列の実行列: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- 列(縦)ベクトル (column vector)
特に断りがない場合, n 次元ベクトルは n 行 1 列の行列として扱う. 紙面の都合上, そのようなベクトルを転置記号 \top を用いて $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^\top$ のように記述することがある.

例:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \mathbf{x}^\top = [11, 12, 13, 14] \quad \mathbf{x} = [11, 12, 13, 14]^\top$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \quad \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 11 & 21 & 31 \\ 12 & 22 & 32 \end{bmatrix}$$

内積, ノルム

- ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} の内積 $\mathbf{a}^\top \mathbf{b}$
- ベクトル \mathbf{a} のノルム $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}}$
- 位置ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} の2点間の距離 $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$

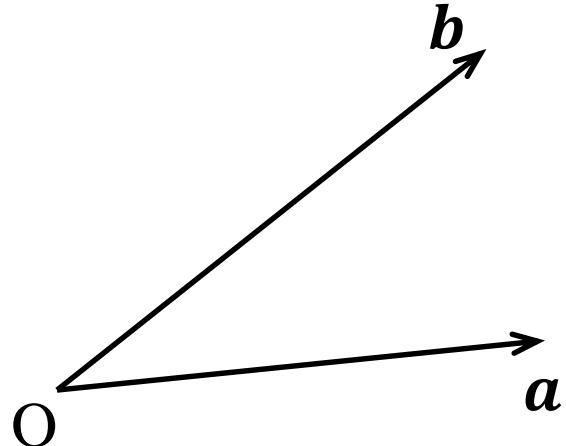
問 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ のとき,

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{b} = 20$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$$

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{3}$$



開発環境

Python のサンプルコードを動かすには、Anaconda がお勧め。
JupyterLab, Spyder, NumPy, SciPy, scikit-learn



<https://www.anaconda.com/distribution/>

The screenshot shows the JupyterLab interface. On the left, there's a sidebar with tabs for Files, Running, Commands, Cell Tools, and Tabs. The main area displays a code cell containing Python code for performing k-nearest neighbor classification on the Iris dataset. The code includes imports for numpy, pandas, and scikit-learn, and uses a color map for the classification results.

```
# Create color maps for 3-class classification problem, as with iris
cmap_light = ListedColormap(['#FFAAAA', '#AAFFAA', '#AAAAFF'])
cmap_bold = ListedColormap(['#FF0000', '#00FF00', '#0000FF'])

iris = datasets.load_iris()
X = iris.data[:, :2] # we only take the first two features. We could
                     # avoid this ugly slicing by using a two-dim dataset
y = iris.target

knn = neighbors.KNeighborsClassifier(n_neighbors=1)
knn.fit(X, y)

x_min, x_max = X[:, 0].min() - .1, X[:, 0].max() + .1
y_min, y_max = X[:, 1].min() - .1, X[:, 1].max() + .1
xx, yy = np.meshgrid(np.linspace(x_min, x_max, 100),
```

The screenshot shows the official scikit-learn website. At the top, there's a navigation bar with links for Home, Installation, Documentation, Examples, Google Custom Search, and a search bar. Below the navigation, there's a grid of nine small images showing various data visualizations and plots. The main content area is divided into several sections: Classification, Regression, Clustering, Dimensionality reduction, Model selection, and Preprocessing. Each section contains a brief description, applications, algorithms, and links to examples.

Classification
Identifying to which category an object belongs to.
Applications: Spam detection, Image recognition.
Algorithms: SVM, nearest neighbors, random forest, ...
[Examples](#)

Regression
Predicting a continuous-valued attribute associated with an object.
Applications: Drug response, Stock prices.
Algorithms: SVR, ridge regression, Lasso, ...
[Examples](#)

Clustering
Automatic grouping of similar objects into sets.
Applications: Customer segmentation, Grouping experiment outcomes
Algorithms: k-Means, spectral clustering, mean-shift, ...
[Examples](#)

Dimensionality reduction
Reducing the number of random variables to consider.
Applications: Visualization, Increased efficiency
Algorithms: PCA, feature selection, non-negative matrix factorization.
[Examples](#)

Model selection
Comparing, validating and choosing parameters and models.
Goal: Improved accuracy via parameter tuning
Modules: grid search, cross validation, metrics.
[Examples](#)

Preprocessing
Feature extraction and normalization.
Application: Transforming input data such as text for use with machine learning algorithms.
Modules: preprocessing, feature extraction.
[Examples](#)

<http://scikit-learn.org/>

開発環境

ipynb形式でPythonを使えるWebサービス Google Colaboratory もお勧め.

<https://colab.research.google.com/>

ドライブにアプリを追加

すべて

colaboratory

+ 接続

仕事効率化

★★★★★ (63)

新しいフォルダ...

ファイルをアップロード...

フォルダをアップロード...

Google ドキュメント

Google スプレッドシート

Google スライド

その他 >

Google フォーム

Google 図形描画

Google マイマップ

Google サイト

Colaboratory

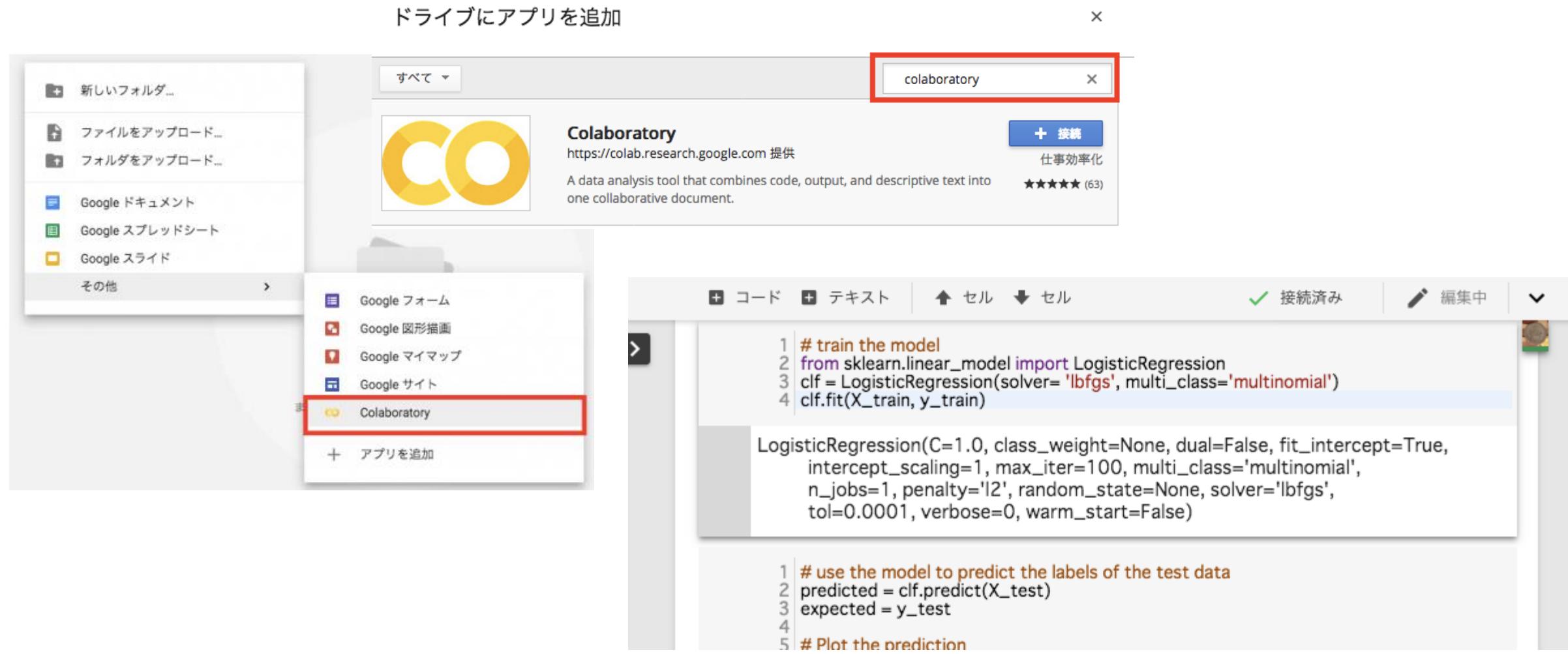
+ アプリを追加

+ コード + テキスト ↑ セル ↓ セル ✓ 接続済み 編集中

```
1 # train the model
2 from sklearn.linear_model import LogisticRegression
3 clf = LogisticRegression(solver='lbfgs', multi_class='multinomial')
4 clf.fit(X_train, y_train)

LogisticRegression(C=1.0, class_weight=None, dual=False, fit_intercept=True,
intercept_scaling=1, max_iter=100, multi_class='multinomial',
n_jobs=1, penalty='l2', random_state=None, solver='lbfgs',
tol=0.0001, verbose=0, warm_start=False)

1 # use the model to predict the labels of the test data
2 predicted = clf.predict(X_test)
3 expected = y_test
4
5 # Plot the prediction
```



線形写像の行列表現

- 写像 $f: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ が、任意の $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ について $f(ax + by) = af(\mathbf{x}) + bf(\mathbf{y})$ を満たすとき、
 - f は線形写像である。
 - 行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ を用いて $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ と表せる。

$$\begin{matrix} \mathbf{b} \\ \in \mathbb{R}^m \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{x} \\ \in \mathbb{R}^n \end{matrix}$$

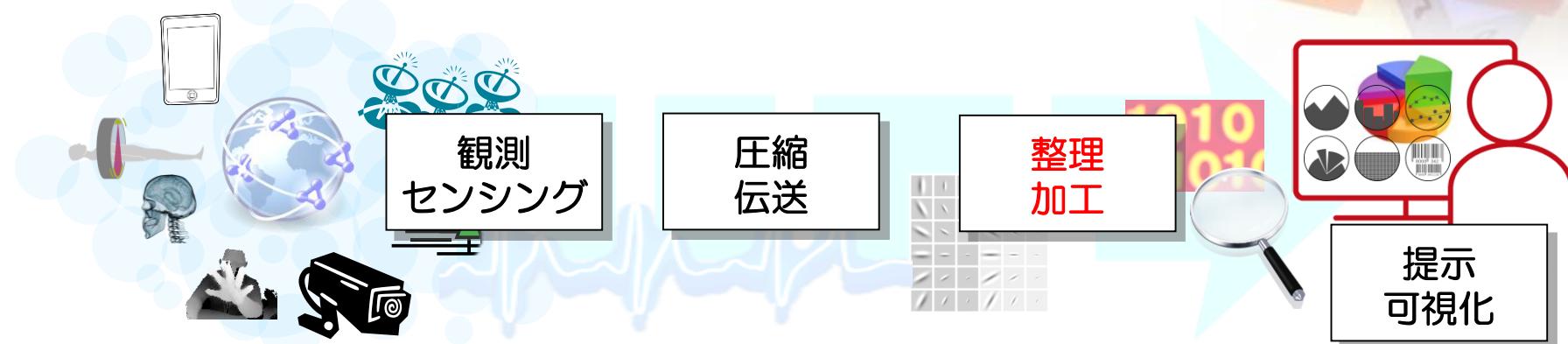
スペースモデリング

(Sparse Modeling; SpM)

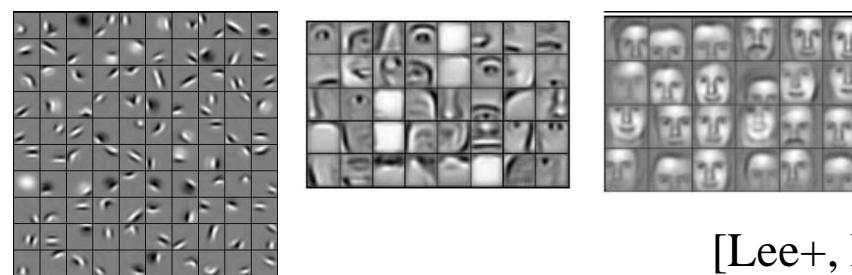
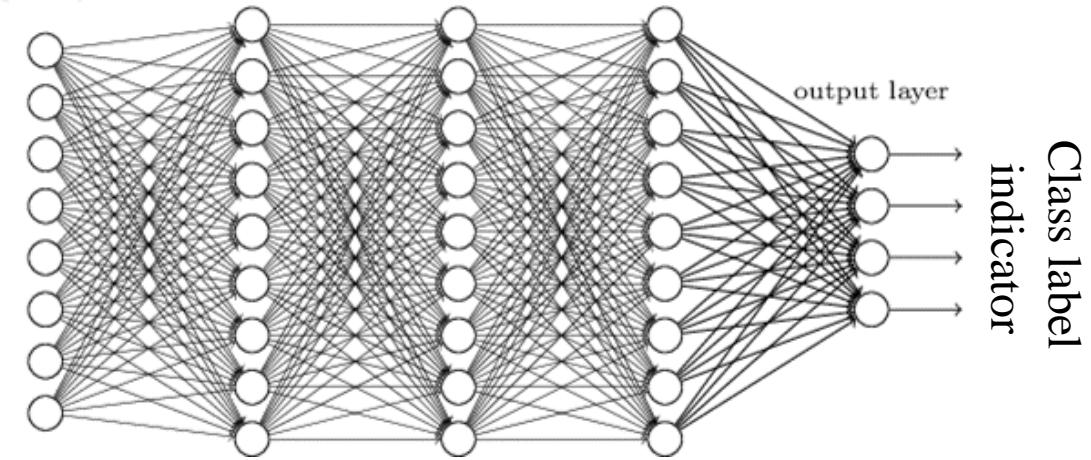
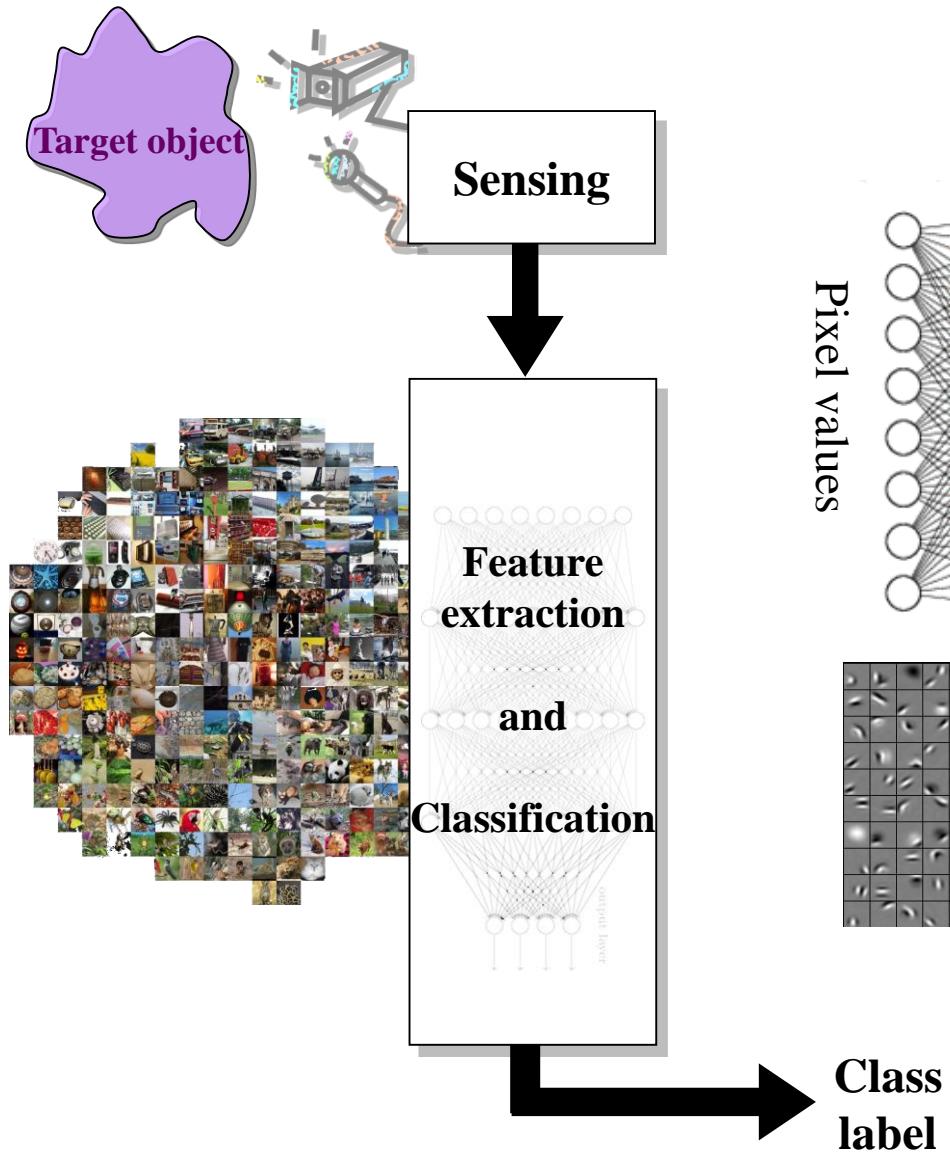
offers a concise insight into high-dimensional data

平たく言うと、データを簡潔に表せる数学的な模型作りのこと。

- データの内訳を明らかにする
- 的確に知識を組み合わせてデータを説明する



Deep Neural Network



[Lee+, ICML09]

特徴ベクトルと特徴空間

□ 特徴ベクトル (feature vector)

データから算出した特徴量を成分にもつベクトル. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

□ 特徴空間 (feature space)

特徴ベクトルの全体集合. 例: \mathbb{R}^3 (右図).

□ パターン認識に適した特徴の性質

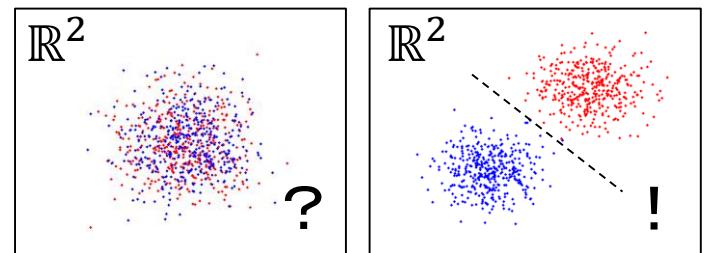
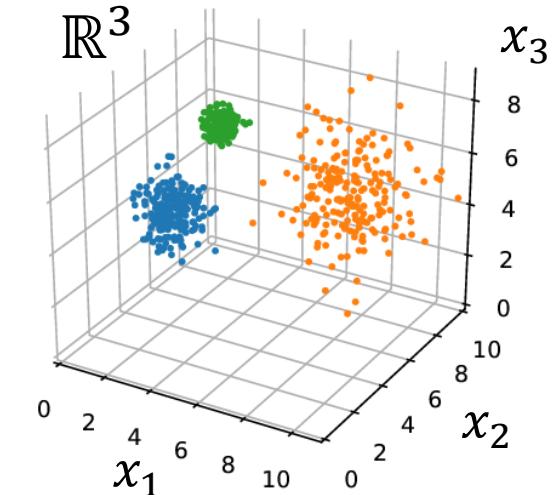
- 識別的 (discriminative)

クラス間で特徴が顕著に異なり, クラス内で特徴が似ていること.
(どのクラスにも共通する特徴は, クラスを見分ける役に立たない)

- 不変的 (invariant)

算出した特徴量が, 観測の違いに影響され難いこと.

例: 物体認識における物体の向き・遠近, 画像の明暗・解像度等.

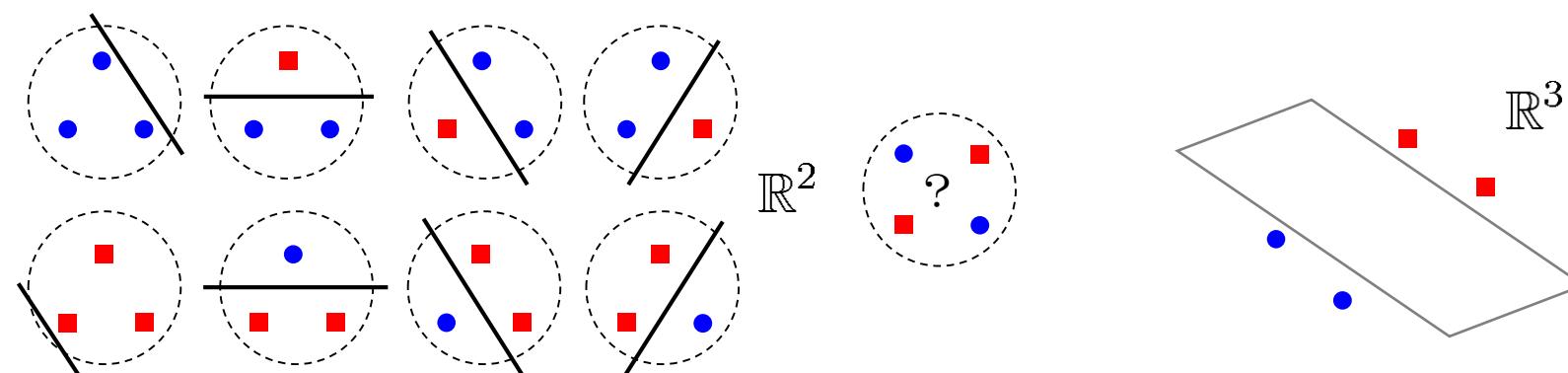
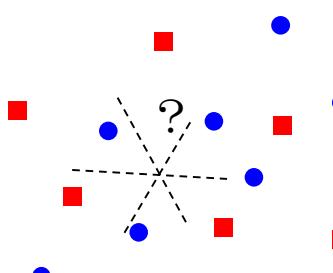
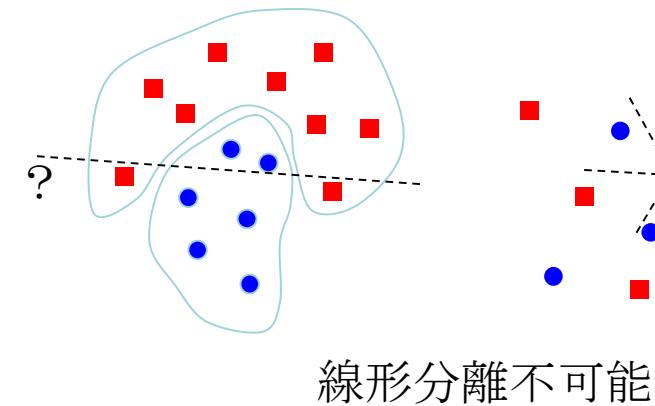
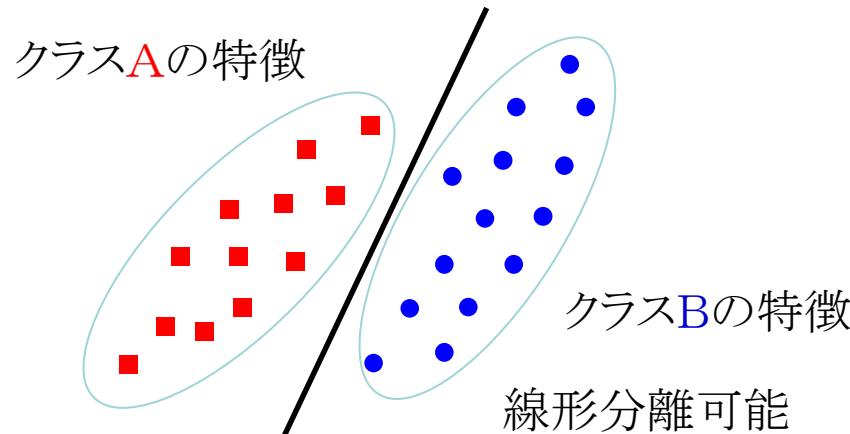


識別的・不変的な特徴量を
データから算出することが重要.

線形分離可能性

Linear separability

n 次元空間にあるふたつの点集合が、ひとつの $n - 1$ 次元の超平面で分離できるとき、ふたつの点集合は線形分離可能 (linearly separable) であるという。



n 次元空間では少なくとも「 $n + 1$ 」点が線形分離可能である。

ランダム射影

Random Projection

上手な不完全計測

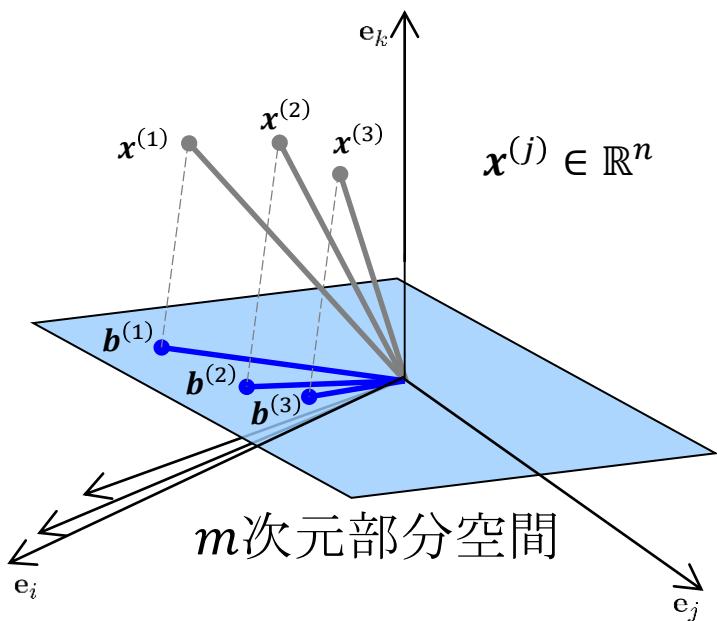
ランダム射影

乱数を要素にもつ行列による線形写像

$$\begin{matrix} \textcolor{purple}{b} \\ \in \mathbb{R}^m \end{matrix} = \begin{matrix} \textcolor{green}{R} \\ \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{matrix} \begin{matrix} x \\ \in \mathbb{R}^n \end{matrix}$$

異なる次元数のベクトル

高次元ベクトル
成分の数 n が多い
(例えば数千次元以上)



JLの補題

[Johnson&Lindenstrauss, 84][Frankl&Maehara, 88]

$$\begin{matrix} \mathbf{b} \\ \in \mathbb{R}^m \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{R} \\ \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{x} \\ \in \mathbb{R}^n \end{matrix}$$

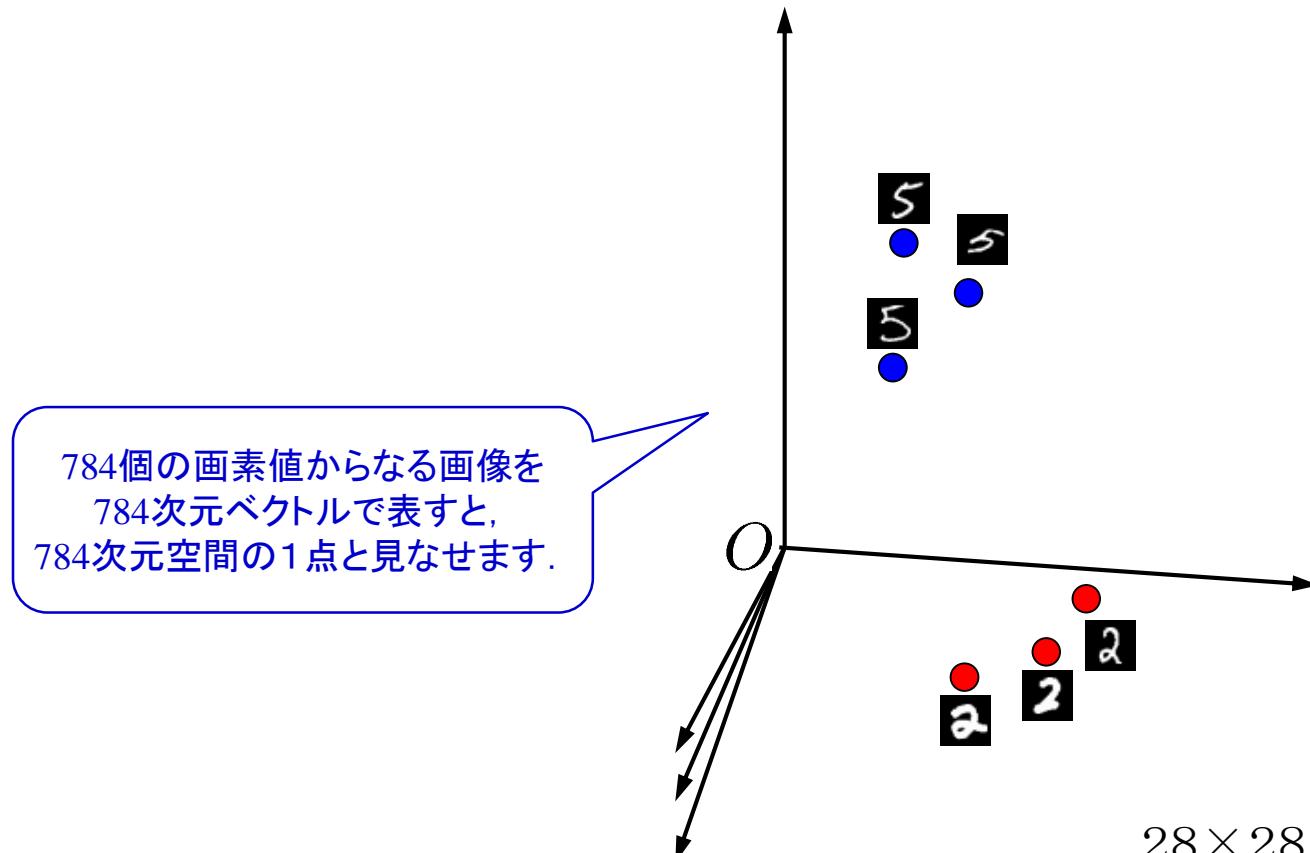
平均 0, 分散 $1/m$ の正規分布に従う独立同分布の要素をもつ行列 \mathbf{R} で線形写像すると, 非常に高い確率で, ノルム(ベクトルの大きさ)は近似的に維持される.

$$\|\mathbf{b}\|_2 \approx \|\mathbf{x}\|_2$$

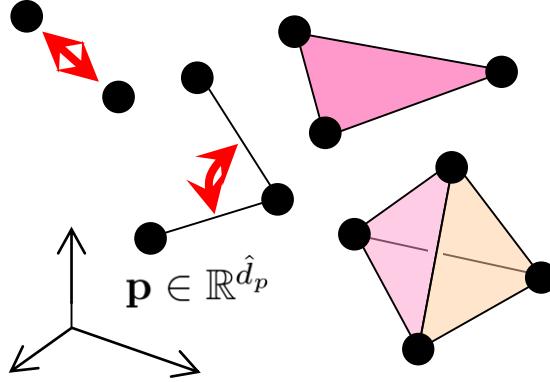
画像の類似性

2次元, 3次元, ..., n 次元

似ている画像は、ベクトル空間で互いに近いのでは？



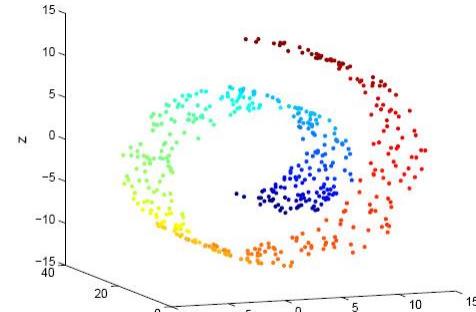
ランダム射影で維持できるもの



距離, なす角, 面積, 体積 (Metrics)

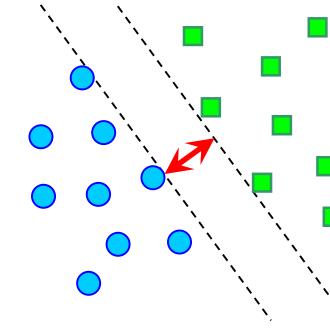
[Johnson & Lindenstrauss, 84]

[Magen, 02] [Agarwal et al., 04]



多様体 (Manifold structures)

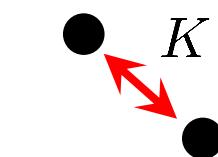
[Wakin et al., 06] [Haupt et al., 07]



マージン (Margins)

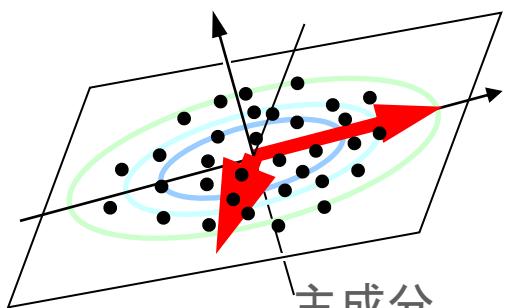
[Arriaga & Vempala, 99]

[Balcan et al., 04] [Blum 04]

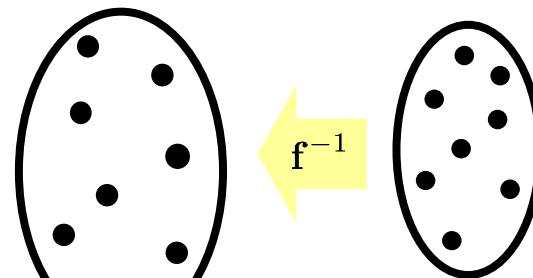


内積, 類似性
(Kernels)

[McSherry et al., 02]
[Vempala, 04]



[Papadimitriou et al., 00] [Achlioptas, 01]
[Vempala, 04]



スペースベクトルの逆変換性

[Candes ,06] [Donoho, 06] [R. Baraniuk et al., 07]

なぜランダム射影で維持できるのか？

□ 直交行列 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

✓ 正規直交性

$$\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

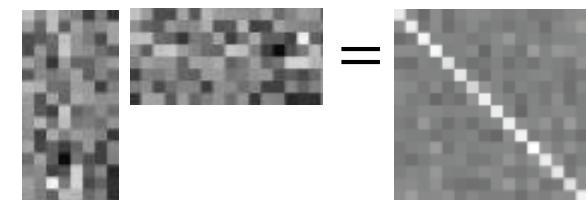
✓ ℓ_2 ノルムの不変性
 $\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2$

✓ 可逆性
 $\mathbf{Q}^\top(\mathbf{Q}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

□ ランダム行列 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(R_{ij} : iid Gaussian with mean zero and variance $1/m$)

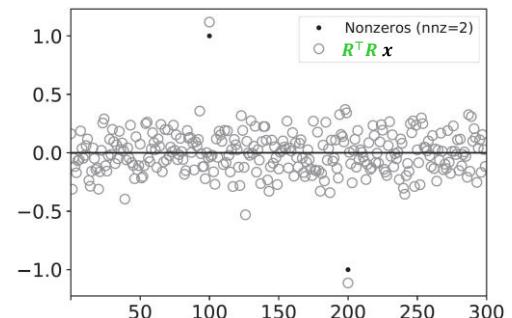
✓ 近似的な正規直交性
(mutual incoherence)

$$\mathbf{R}^\top \quad \mathbf{R} \quad \approx \quad \mathbf{I}$$


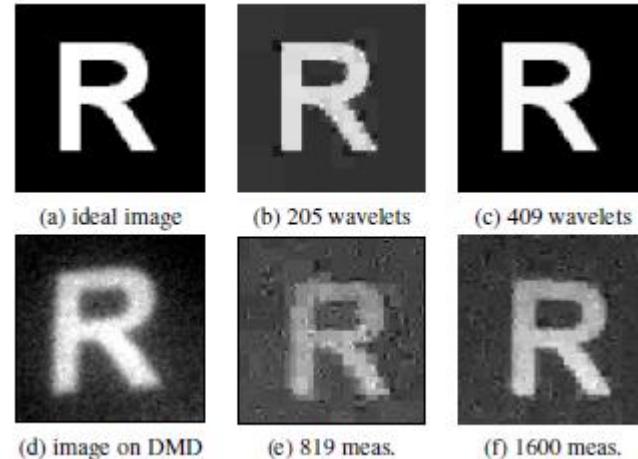
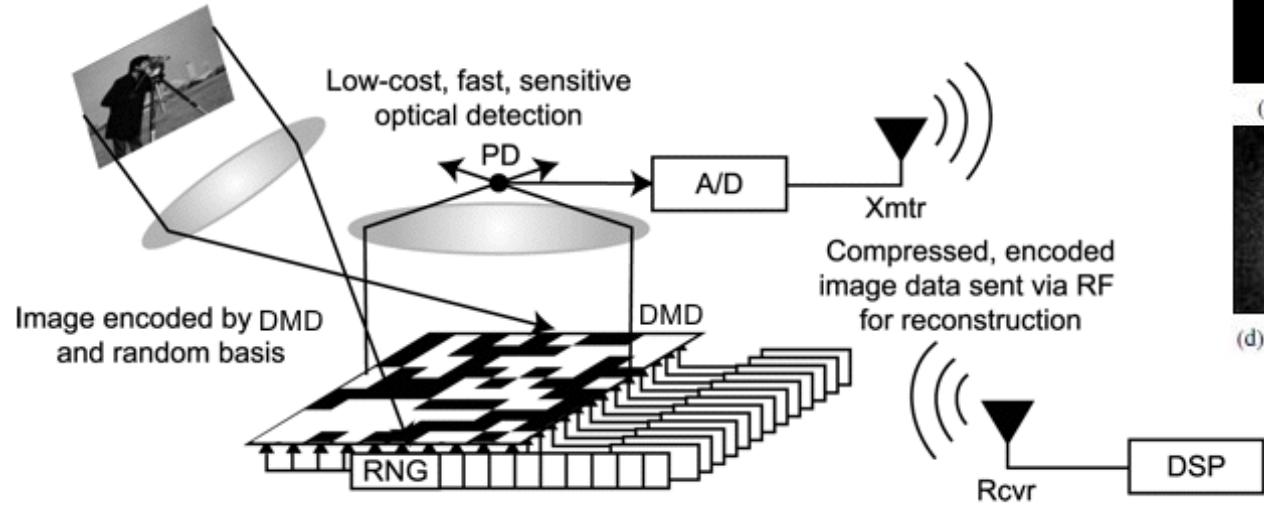
✓ 近似的な ℓ_2 ノルムの不変性 (JL変換)
 $(1 - \varepsilon)\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{R}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}\|_2^2$

✓ 近似的な可逆性
(スペースベクトルに限る)

$$\mathbf{x} = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0]^\top$$
$$\mathbf{x}^{\text{est}} = \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{x}$$



Single Pixel Camera

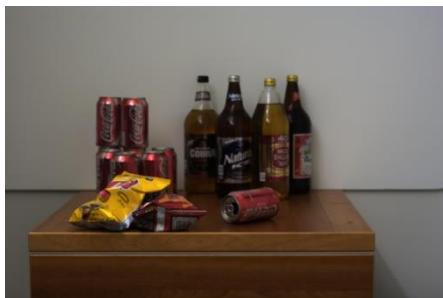
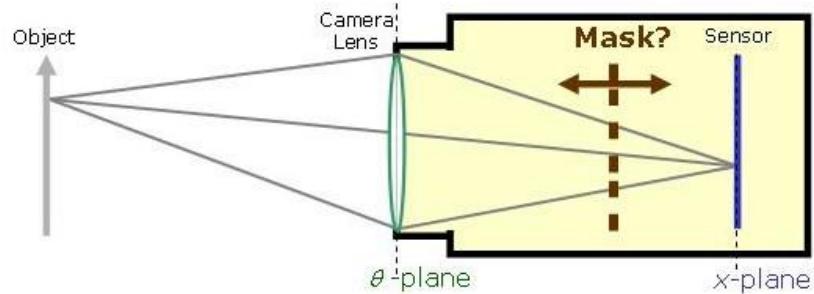


“One can exactly and stably reconstruct an image
from fewer measurements than the number of reconstructed image pixels.”

[Wakin+, 06]

Computational Photography

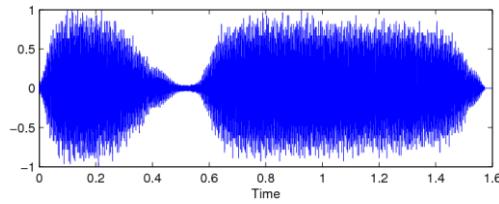
Coding Light Field Entering a Camera via a Mask



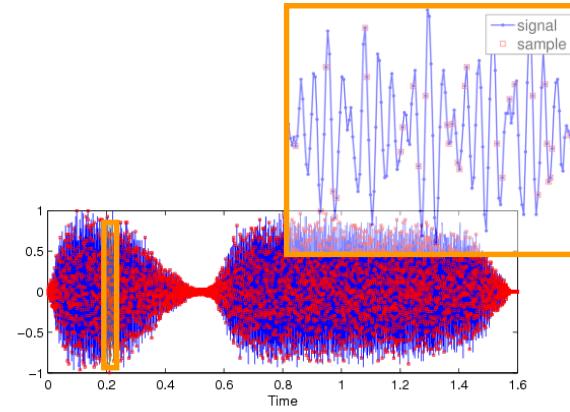
“By blocking light over time and space,
we can preserve more details about the scene in the recorded single photograph.”

[Raskar+, 07]

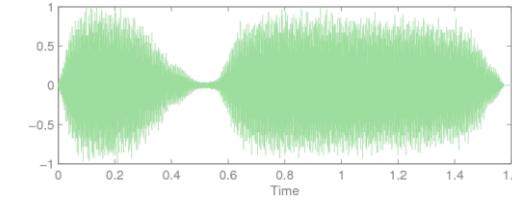
ランダム計測とスペース再構成



信号

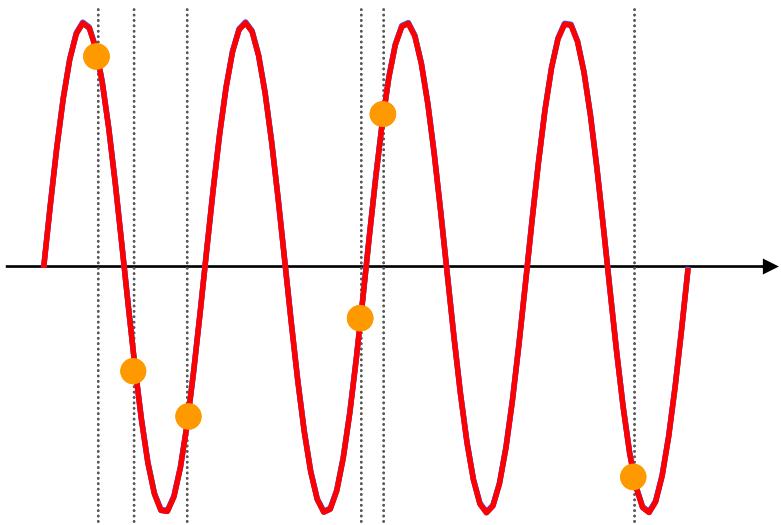


ランダム計測

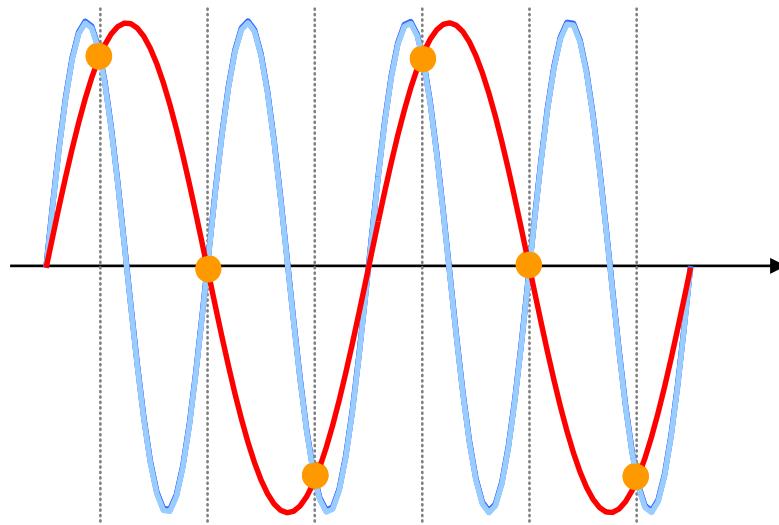


再構成

ランダム計測の利点



ランダムサンプリングの場合
信号が一意に求められる。



規則的なサンプリングの場合
エイリアシングが起こる。

効率的なランダム射影の算法

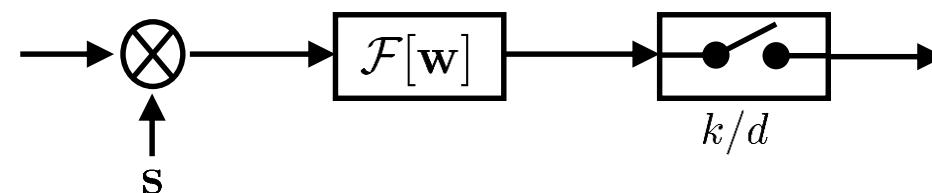
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \text{スパースランダム射影} & & & & & \\ & & & & & \\ \pm & 0 & \cdots & 0 & \pm & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & + & \cdots & + & + \\ + & - & \cdots & + & - \\ & & & & \\ \text{アダマール変換} & & & & \\ & & & & \\ + & - & \cdots & - & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ \text{符号のランダム化} & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \pm & \end{bmatrix}$$

[Ailon+, 06]

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-1} & r_n \\ r_2 & r_3 & \cdots & r_n & r_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_m & r_{m+1} & \cdots & r_{m-2} & r_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ \text{符号のランダム化} & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \pm & \end{bmatrix}$$

[酒井, 09]

拡散符号 \mathbf{s} 白色雑音 \mathbf{w} との
との乗算 巡回畳み込み 低レート
巡回畳み込み サンプリング



～今日は
ここまで

