Προγραμματιστικές Εργασίες στην Αριθμητική Ανάλυση

Παππά Βασιλική
Τσαμουρίδης Αναστάσιος Αθανάσιος

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
4ο εξάμηνο

Περιεχόμενα

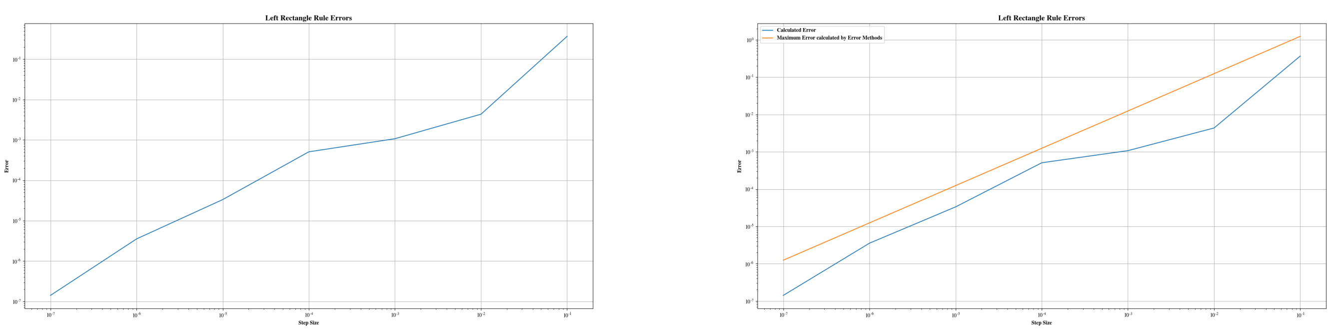
1 Εργασία 1

1.1 Ερώτημα α

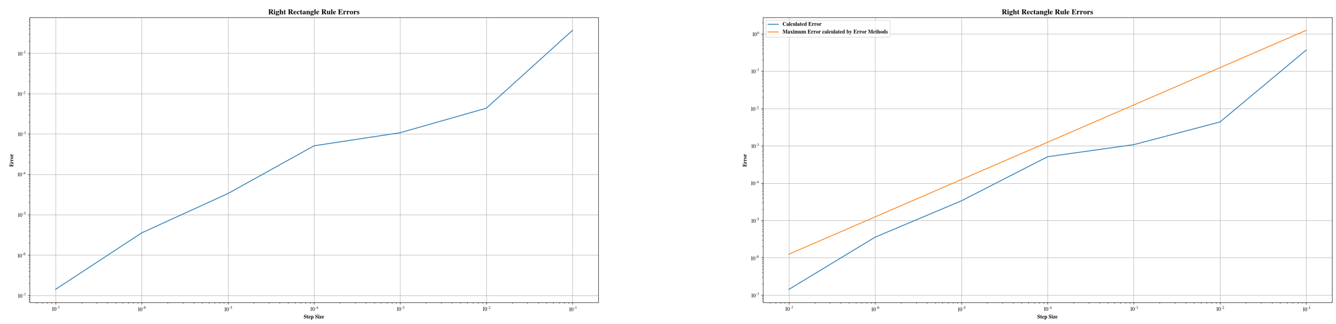
Η υλοποίηση των Κανόνων Αριθμητικής ολοκλήρωσης εμπεριέχονται στο αρχείο με ονομασία Numerical_Integration_Methods.py

1.2 Ερώτημα β

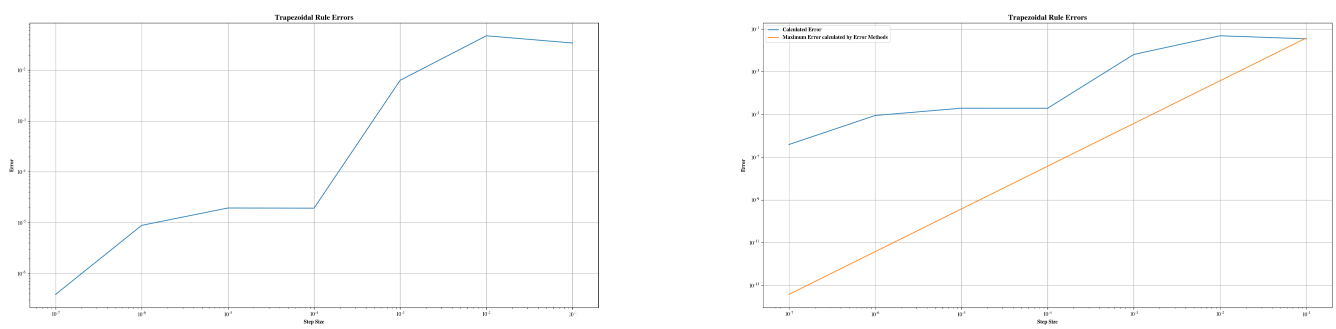
Στα Σχήμα 1, Σχήμα 2, Σχήμα 3 και Σχήμα 4 απεικονίζονται τα γραφήματα του απολύτου σφάλματος για κάθε μέθοδο. Για κάθε διάδα γραφημάτων, στα αριστερά απεικονίζεται το απόλυτο σφάλμα, το οποίο υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη το πραγματικό αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης (όπως αυτό δόθηκε από την εκφώνηση) και την τιμή του ολοκληρώματος που προκύπτει με την χρήση των μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης που υλοποιήθηκαν στο αρχείο Numerical_Integration_Methods.py. Στα δεξιά φαίνεται η σύγκριση του σφάλματος που αναφέρθηκε προηγουμένως με το σφάλμα, όπως αυτό υπολογίστηκε από τους γνωστούς κανόνες υπολογισμού μεγίστου σφάλματος οι οποίοι υπάρχουν υλοποιημένοι στο αρχείο Numerical_Integration_Methods_Errors.py.



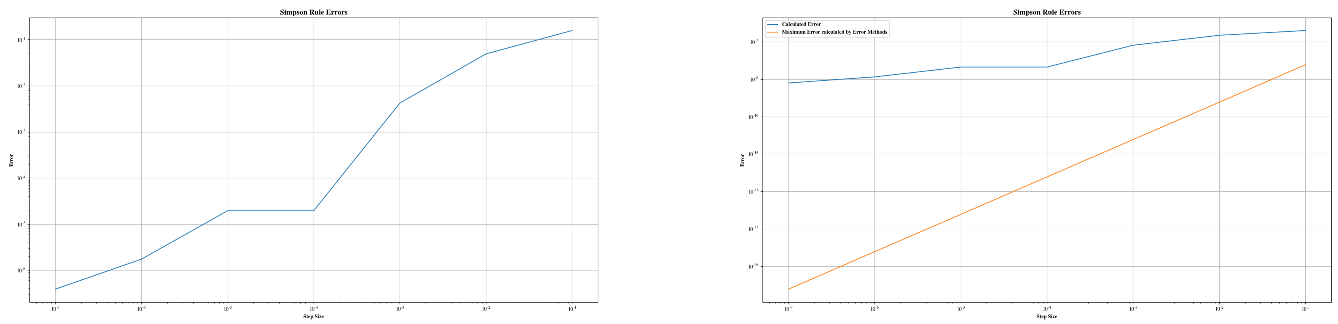
Σχήμα 1: Κανόνας Αριστερού Παραλληλογράμμου



Σχήμα 2: Κανόνας Δεξιού Παραλληλογράμμου



Σχήμα 3: Κανόνας Τραπεζίου



Σχήμα 4: Κανόνας Simpson

1.3 Ερώτημα γ

Όπως αναμέναμε, το υπολογιζόμενο απόλυτο σφάλμα κάθε μεθόδου, όπως αυτό υπολογίζεται από το πραγματικό αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης (το οποίο δόθηκε από την εκφώνηση) και την τιμή του ολοκληρώματος που προκύπτει με την χρήση των μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι παντού μικρότερο από το μέγιστο σφάλμα, το οποίο δίνεται από τους κανόνες υπολογισμού σφάλματος των μεθόδων.

2 Εργασία 2

2.1 Ερώτημα α

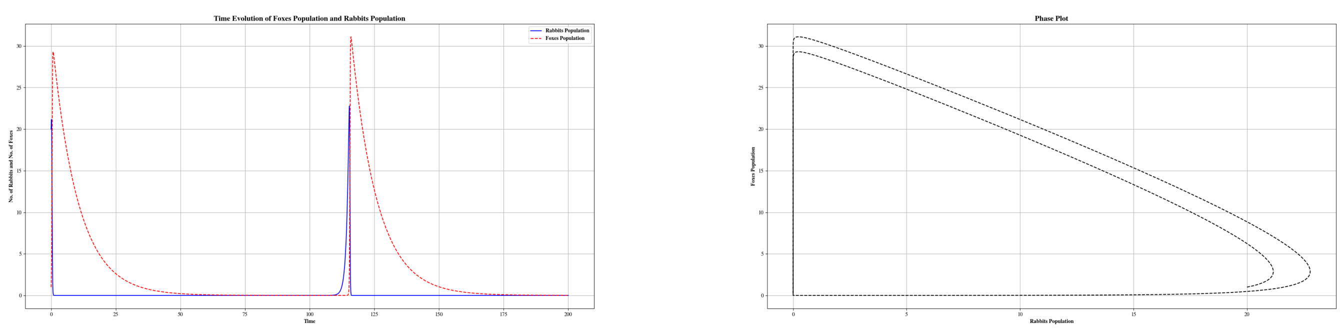
Η υλοποίηση της μεθόδου του Euler μπορεί να ευρεθεί στο αρχείο Differential_Equation_Method.py.

2.2 Ερώτημα β

Το πρόβλημα που αναφέρεται στην εκφώνηση μοντελοποιείται και επιλύεται στο αρχείο Differential_Equations_Problem_Solving.py. Όπως αναφέρουν οι οδηγίες της εκφώνησης χρησιμοποιούμε αρχικές συνθήκες $x_0(0) = 20, x_1(0) = 1, t_{max} = 200$ και μικρό βήμα διακριτοποίησης $dt = 0.01$.

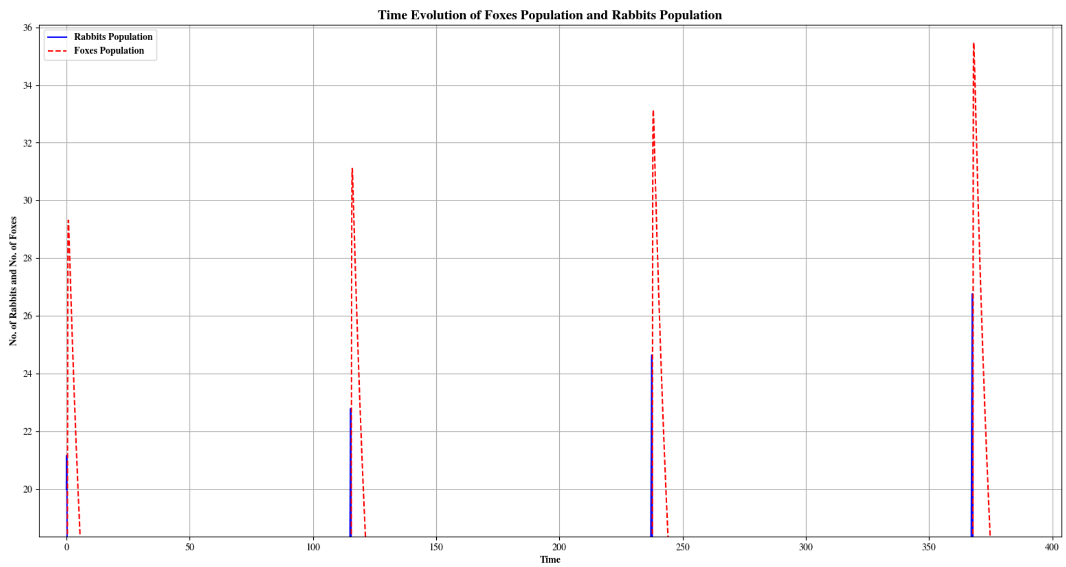
2.3 Ερώτημα γ

Στο Σχήμα 5, εμφανίζονται τα αποτελέσματα της επίλυσης της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης. Στα αριστερά σχεδιάζεται η πληθυσμιακή εξέλιξη των δύο ειδών σε σχέχη με τον χρόνο. Στα δεξιά, απεικονίζεται η ανταλλαγή πληθυσμιακής κυριαρχίας.



Σχήμα 5: Βήμα Διακριτοποίησης 0.01

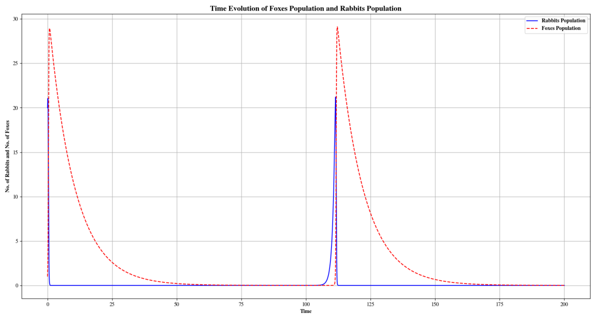
Όπως είναι εμφανές στο Σχήμα 5, η πληθυσμιακή εξέλιξη των λαγών εξαρτάται άμεσα από αυτήν των αλεπούδων και αντίστροφα. Πιο συγκεκριμένα, αύξηση των λαγών συνεπάγεται την ραγδαία εκθετική αύξηση των αλεπούδων. Από την άλλη, μείωση των λαγών οδηγεί σε εκθετική μείωση (με μικρότερη κλίση συγκριτικά με αυτή της αύξησης) των αλεπούδων, ενώ αύξηση των αλεπούδων οδηγεί στην μείωση των λαγών. Το μοτίβο επαναλαμβάνεται περιοδικά. Επιπροσθέτως, ο μέγιστος αριθμός ατόμων κάθε είδους δείχνει να αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6, στο οποίο το t_max είναι ίσο με 400.

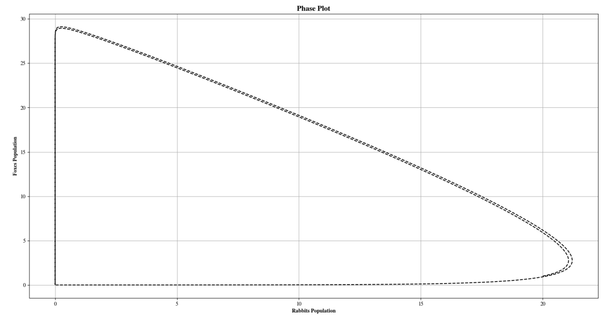


Σχήμα 6: Μέγιστα πληθυσμών συναρτήσει του χρόνου

2.4 Ερώτημα δ

Μειώνουμε το βήμα διακριτοποίησης στο $\frac{1}{10}$ της προηγούμενης τιμής ($dt = 0.001$) και επαναλαμβάνουμε την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης. Τα αποτελέσματα για το νέο dt φαίνονται στα παρακάτω γραφήματα.





Σχήμα 7: Βήμα Διακριτοποίησης 0.001

Όσον αφορά το πρώτο γράφημα παρατηρούμε ότι η πληθησμιακή αύξηση που παρατηρείται για $dt = 0.01$ δεν είναι πλέον τόσο έντονη. Παράλληλα, υπάρχει μια μικρή χρονική μετατόπιση όσον αφορά την περιοδικότητα του φαινομένου.

Το γράφημα στα αριστερά παρουσιάζει και αυτό διαφορές συγκριτικά με το Phase Plot (Σχήμα 5) του προηγούμενου ερωτήματος. Φαίνεται ότι η επανάληψη του φαινομένου δεν συνεπάγεται πλέον την ραγδαία αύξηση πληθυσμών.