

Μέθοδοι Βέλτιστης Ανίχνευσης σε αστερισμούς HQAM

Παππά Βασιλική¹, Τσαμουρίδης Αναστάσιος Αθανάσιος¹

Abstract

Στην παρούσα αναφορά περιγράφονται οι μέθοδοι που ακολουθήθηκαν για την απάντηση των τριών ζητούμενων της εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, για το πρώτο βήμα γίνεται αναφορά στον τρόπο σχηματισμού των αστερισμών M-HQAM, αναφερόμενο στην βιβλιογραφία και ως TQAM, και ανίχνευσης των εκπαισόμενων σημάτων. Μετά την περιγραφή της υλοποίησης των προαναφερθέντων αλγορίθμων ακολουθεί αναφορά στις θεωρητικές μεθόδους υπολογισμού της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου. Τέλος, όσον αφορά το πρώτο ερώτημα της εργασίας, γίνεται περιγραφή της προσομοίωσης που υλοποιήθηκε για τον υπολογισμό της πιθανότητας αυτής όταν χρησιμοποιείται η τεχνική ανίχνευσης που περιγράφεται στο [1]. Αναφορικά με το δεύτερο βήμα της εργασίας που ζητά την πρόταση εναλλακτικής μεθόδου ανίχνευσης συμβόλων αξιοποιώντας τεχνικές Μηχανικής Μάθησης κ.ά., έγινε χρήση ενός νευρωνικού δικτύου κατάλληλο για την ανίχνευση του σταλθέντος σήματος δεδομένου του μεγέθους του αστερισμού. Σε επόμενο κεφάλαιο γίνεται επεξήγηση του νευρωνικού που χρησιμοποιήθηκε και σύγκριση της απόδοσης του σε σχέση με τις τεχνικές που περιγράφηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Τέλος, όπως ζητείται από το τελευταίο ερώτημα της εργασίας, γίνεται περιγραφή ενός εναλλακτικού τρόπου ανίχνευσης σημάτων αστερισμών υπερ-υψηλής τάξης.

¹Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Περιεχόμενα

1	Σχηματισμός Αστερισμού	1
2	Ανίχνευση	2
3	Θεωρητική Ανάλυση	2
4	Προσομοίωση	3
5	Ανίχνευση με την χρήση άλλων τεχνικών	3
6	Μέθοδοι Ανίχνευσης Αστερισμών Υπερ-υψηλής Τάξης ($M \geq 1024$)	3
7	Πρόταση Βελτίωσης της Ανίχνευσης	5
	Αναφορές	5

1. Σχηματισμός Αστερισμού

Για την εκτέλεση των προσομοιώσεων σχηματίστηκαν οι αστερισμοί Regular HQAM και Irregular HQAM, όπως περιγράφονται στα [2], [3] και [4].

Οι HQAM αστερισμοί διαθέτουν περιοχές απόφασης σε σχήμα κανονικών εξαγώνων, δημιουργώντας πυκνή κατανομή συμβόλων στο επίπεδο, προσφέροντας καλύτερη επίδοση στην ισχύ σε σύγκριση με το QAM.

Επίσης, υλοποιήθηκε ο σχηματισμός ενός είδους QAM αστερισμού, ο οποίος έχει τα εξής χαρακτηριστικά: Η κάθετη και οριζόντια απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων ισούνται με $\frac{\sqrt{3} \cdot d_{min}}{2}$ και d_{min} αντίστοιχα. Ως d_{min} ορίζεται η ελάχιστη απόσταση δύο γειτονικών διαδοχικών

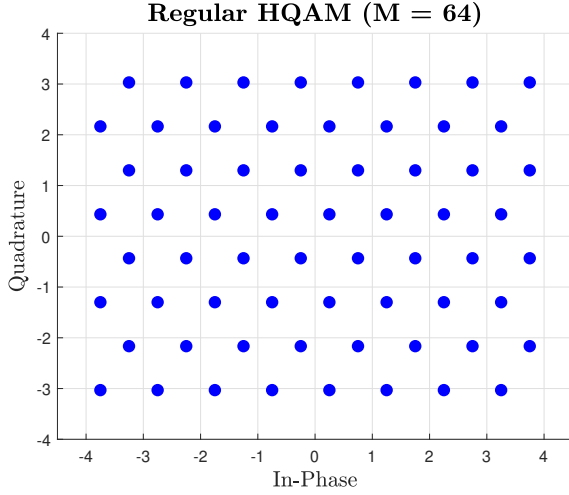
σημείων στους αστερισμούς Regular HQAM και Irregular HQAM. Ο αστερισμός αυτός δεν έχει πρακτική αξία, αλλά χρησιμοποιείται ως βάση για την παραγωγή των δύο προαναφερθέντων αστερισμών.

Αναλυτικότερα, για τον σχηματισμό του Regular HQAM, γίνεται μετατόπιση των συμβόλων του QAM κατά $\frac{d_{min}}{4}$ και $-\frac{d_{min}}{4}$ εναλλάξ ανά σειρά συμβόλων στον I άξονα και κινούμενοι από τις αρνητικότερες τιμές του άξονα X προς τις θετικότερες. Με αυτή την διαδικασία σχηματίζεται ο ζητούμενος αστερισμός με κεντρικό σημείο την αρχή των αξόνων $0 + j \cdot 0$, όπως περιγράφεται και στο [4].

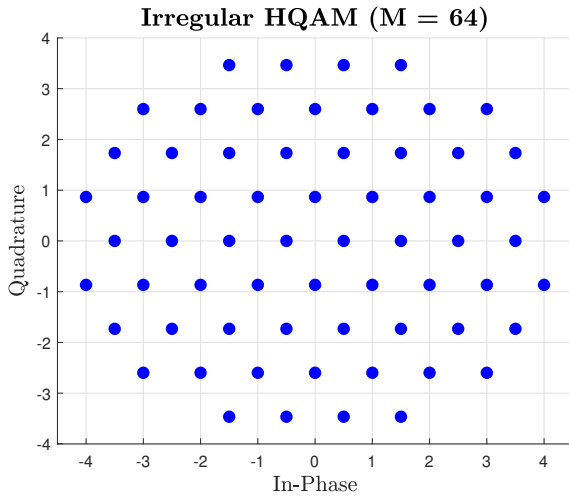
Για τον σχηματισμό του Irregular HQAM έγινε χρήση του αλγορίθμου που περιγράφεται στο [4]. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αυτό, με βάση έναν Regular HQAM, γίνεται ανακατανομή των συμβόλων, ώστε να γίνει πιο συμπαγής ο αστερισμός και να μειωθεί η συνολική ισχύς του. Στο Σχήμα 2 παρουσιάζονται δύο αστερισμοί για $d_{min} = 1$, όπως αυτοί σχηματίζονται από τους αλγορίθμους που περιγράφηκαν.

Οι αλγόριθμοι παραγωγής των αστερισμών μπορούν να βρεθούν στα αρχεία:

- constellations/QAM.m για τους QAM
- constellations/rHQAM.m Regular HQAM
- constellations/irHQAM.m για τους Irregular HQAM



Σχήμα 1. Αστερισμός Regular 64 συμβόλων



Σχήμα 2. Αστερισμός Irregular HQAM 64 συμβόλων

2. Ανίχνευση

Για την υλοποίηση της ανίχνευσης του σταλθέντος σήματος ακολουθήθηκε η τεχνική που περιγράφεται στο [1].

Πιο συγκεκριμένα, όπως αναλύεται και στο [1], πρώτο βήμα αποτελεί η χάραξη ενός κύκλου με κέντρο το ληφθέν σήμα r και ακτίνα R_m και στην συνέχεια ο υπολογισμός των σημείων x_1, x_2 και y_1, y_2 . Τα σημεία x_1, x_2 είναι τα σημεία του I άξονα που αντιστοιχούν στις τομές του I άξονα με τις εφαπτόμενες του κύκλου, οι οποίες είναι παράλληλες με τον Q άξονα. Αντιστοίχως, τα σημεία y_1, y_2 είναι τα σημεία του Q άξονα που αντιστοιχούν στις τομές των εφαπτομένων του κύκλου, οι οποίες είναι παράλληλες με τον I άξονα.

Στην συνέχεια γίνεται αναζήτηση των σημείων του αστερισμού με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $[x_2, x_1]$ και για όσα ικανοποιούν την συνθήκη αυτή γίνεται αναζήτηση αυτών που έχουν τεταγμένη που ανήκει στο διάστημα $[y_2, y_1]$.

Στην περίπτωση που κανένα σημείο δεν ικανοποιεί τις προηγούμενες συνθήκες, υπολογίζεται με την χρήση του MLD η απόσταση του σημείου r από τα εξωτερικά σημεία του αστερισμού που βρίσκονται στο ίδιο τεταρτημόριο και ως εκπεμπόμενο σήμα θεωρείται αυτό που βρίσκεται πλησιέστερα στο r .

Από την άλλη, αν βρεθούν σημεία που να ικανοποιούν τις προαναφερθείσες συνθήκες, τότε υπολογίζεται με την χρήση του MLD η απόσταση του σημείου r από τα σημεία αυτά και ως εκπεμπόμενο σήμα θεωρείται αυτό που βρίσκεται πλησιέστερα στο r .

Οι αλγόριθμοι για την υλοποίηση της ανίχνευσης μπορούν να βρεθούν στο αρχείο `simulations/detection.m` του παραδοτέου.

3. Θεωρητική Ανάλυση

Στην θεωρητική ανάλυση γίνονται προσεγγίσεις για τον υπολογισμό της Πιθανότητας Σφάλματος Συμβόλου (SEP - Symbol Error Probability). Σύμφωνα με το [5] η προσέγγιση του SEP, για αστερισμό HQAM μεγέθους M , ισούται με

$$SEP = K \cdot Q(\sqrt{\alpha \cdot \gamma_s}) + \frac{2}{3} \cdot K_c \cdot Q^2(\sqrt{2 \cdot \alpha \cdot \gamma_s / 3}) - 2K_c \cdot Q(\sqrt{\alpha \gamma_s}) \cdot Q(\sqrt{\alpha \cdot \gamma_s / 3}) \quad (1)$$

όπου $\alpha = \frac{[d/(2\sigma)]^2}{\gamma_s}$, $\gamma_s = \frac{E_s}{N_0}$, K_c είναι ο αριθμός των ζευγαριών των παρακείμενων γειτονικών συμβόλων του συμβόλου s_i , K είναι ο μέσος αριθμός γειτονικών συμβόλων, υπολογισμένο ως $K = M^{-1} \sum_{i=0}^{M-1} K(i)$, όπου $K(i)$ ο αριθμός γειτονικών συμβόλων του s_i .

Στο [1] η προσέγγιση του SEP γίνεται με την εξής μαθηματική σχέση:

$$SEP = \frac{2M-b}{2M} e^{-\frac{\rho^2}{N_0}} + \frac{b}{M} Q\left(\frac{\rho \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (2)$$

όπου $\rho = kR' + (1-k)R$ με $k \in [0, 1]$ και $Q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_x^\infty \exp(-\frac{u^2}{2}) du$ η Gaussian Q-συνάρτηση. Ως R και R' ορίζονται οι ακτίνες των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κύκλων των κανονικών εξαγώνων αντίστοιχα. Η τιμή του k για τους Regular HQAM αστερισμούς επιλέγεται από τον πίνακα II του [1]. Για τους Irregular HQAM επιλέχθηκε για τις προσομοιώσεις $k = 0.5$.

Σημειωτέον ότι η 2 μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά ως $SEP \approx e^{-\frac{\rho^2}{N_0}}$, ενώ για $k = 0$, ένα πιο απλό άνω όριο για το SEP δίνεται από το $SEP \leq e^{-\frac{R^2}{N_0}}$.

Στις προσομοιώσεις χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις 2 και 1. Παράλληλα, έγινε προσομοίωση της μεθόδου που περιγράφεται στο [1]. Η προσομοίωση περιγράφεται αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο.

Οι παραπάνω εξισώσεις βρίσκονται στο `utils/SEP` και πιο συγκεκριμένα:

- `utils/SEP/approximatedSEP.m`: 1
- `utils/SEP/proposedSEP.m`: 2.

4. Προσομοίωση

Απαραίτητη θεωρήθηκε και η σύγκριση της θεωρητικής πιθανότητας σφάλματος συμβόλου με αυτή που προκύπτει όταν χρησιμοποιείται η τεχνική ανίχνευσης που περιγράφεται στο [1].

Για τον σκοπό αυτό, υλοποιήθηκε προσομοίωση κατά την οποία για αυξανόμενες τιμές του SNR γίνεται υπολογισμός της θεωρητικής τιμής της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου όπως περιγράφηκε στο 3.

Ταυτόχρονα, γίνεται ανίχνευση του εκπομπόμενου σήματος, με την χρήση του αλγορίθμου που περιγράφεται στο [1], και υπολογισμός του ποσοστού των σφαλμάτων της μεθόδου αυτής.

5. Ανίχνευση με την χρήση άλλων τεχνικών

Για αυτό το κομμάτι της εργασίας χρησιμοποιήθηκαν νευρωνικά δίκτυα κατάλληλα για την ανίχνευση του εκπεμπόμενου σήματος.

Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε το νευρωνικό δίκτυο `patternnet`, στο οποίο ως είσοδος ορίστηκε ένας πίνακας $A_{2 \times S}$, όπου S ο αριθμός των εκπεμπόμενων σημάτων r για τα οποία πρέπει να γίνει ανίχνευση. Ως έξοδος ορίστηκε ένας πίνακας $B_{M \times S}$, όπου M το μέγεθος του αστερισμού.

Ο πίνακας της εισόδου A περιέχει στην πρώτη γραμμή του το πραγματικό μέρος των εκπεμπόμενων σημάτων ($A_{1,:} = \text{Real}(r)$) και στην δεύτερη γραμμή του το φανταστικό μέρος τους ($A_{2,:} = \text{Imag}(r)$). Όσον αφορά τον πίνακα στην έξοδο του νευρωνικού δικτύου, B , κάθε στήλη $i \in [1, S]$ $B_{:,i}$ φέρει δεδομένα για την ανίχνευση του i -οστού σήματος r_i που λήφθηκε. Δεδομένης μια στήλης i , το στοιχείο $B_{i,j}$, με $j \in [1, M]$, φέρει τιμή ανάλογης της πιθανότητας το ληφθέν σήμα r_i να αντιστοιχεί στο j -οστό σύμβολο του αστερισμού.

Όσον αφορά την υλοποίηση της προσομοίωσης, για αρχή ορίζεται το μέγεθος του αστερισμού που θα χρησιμοποιηθεί ενώ στην συνέχεια γίνεται το τραινινγκ του δικτύου. Για το τραινινγκ χρησιμοποιείται η συνάρτηση `train` στην οποία δίνεται ως είσοδος το νευρωνικό, ένας πίνακας που περιέχει τα απεσταλμένα σήματα με χαμηλό SNR, όπως επίσης και ένας πίνακας που περιέχει την επιθυμητή έξοδο του δικτύου δεδομένων των απεσταλμένων σημάτων που προαναφέρθηκαν. Όσον αφορά την επιθυμητή έξοδο, αυτή υπολογίζεται με την χρήση `MLD` για τα απεσταλμένα σήματα. Αφού ολοκληρωθεί το τραινινγκ, το δίκτυο είναι έτοιμο να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση των απεσταλμένων σημάτων.

Στο Σχήμα 4 γίνεται σύγκριση του SEP για την ανίχνευση μέσω Νευρωνικού δικτύου (SEP of Neural Network) και μέσω της μεθόδου που προτείνεται στο [1]

για αστερισμό Regular HQAM 16 συμβόλων (Simulated SEP). Παρατηρείται ότι για την επίτευξη ενός συγκεκριμένου SEP, η ανίχνευση μέσω Νευρωνικού Δικτύου απαιτεί μικρότερο SNR.

Με τροποποίηση του νευρωνικού, όπως η μεταβολή των κόμβων στο Hidden Layer, η ανίχνευση του συμβόλου μπορεί να γενικευθεί και για άλλες τάξεις αστερισμού.

Οι αλγόριθμοι για την ανίχνευση με χρήση νευρωνικών δικτύων μπορούν να βρεθούν στον φάκελο `detection with neural networks`, και πιο συγκεκριμένα:

- `detection with neural networks/training.m`: τραινινγκ του νευρωνικού
- `detection with neural networks/NN.m`: η προσομοίωση ανίχνευσης με την χρήση του νευρωνικού

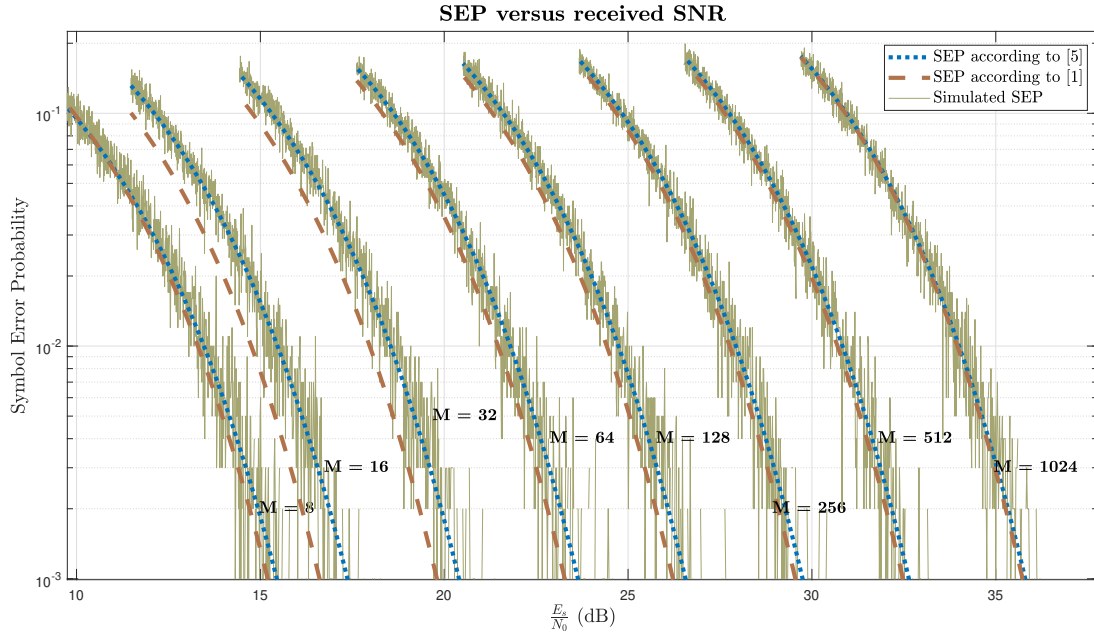
6. Μέθοδοι Ανίχνευσης Αστερισμών Υπερ-υψηλής Τάξης ($M \geq 1024$)

Οι αστερισμοί τάξης μεγαλύτερης του 1024 απαιτούν πολύ μεγάλη ταχύτητα του αλγορίθμου ανίχνευσης, ώστε να γίνει δυνατή η πρακτική υλοποίηση του.

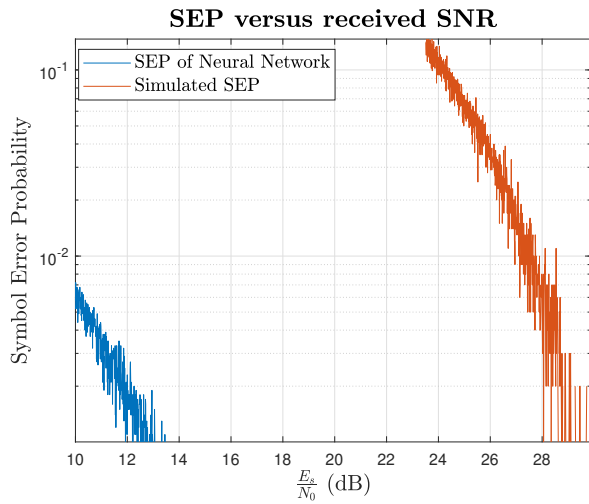
Μια πιθανή λύση σε αυτό, θα ήταν η χρήση νευρωνικών, όπως περιγράφονται στο Κεφάλαιο 5. Με κατάλληλη μαθηματική ανάλυση, ο αριθμός των κόμβων μπορεί να πάρει μια βέλτιστη τιμή, ανάλογα με την τάξη του αστερισμού, ώστε να περιορίζονται στο μέγιστο τα λάθη και οι περιττές μαθηματικές πράξεις.

Επιπρόσθετα, μια διαφορετική τεχνική για την ανίχνευση του σταλθέντος συμβόλου, αφορά την σύγκριση της ενέργειας του ληφθέντος συμβόλου με την ενέργεια των συμβόλων του αστερισμού. Αναλυτικότερα, δεδομένου ενός ληφθέντος σήματος $r = s + n$ (με s το εκπεμπόμενο σήμα και n ο προσθετικός θόρυβος του καναλιού) ακολουθούνται τα εξής βήματα:

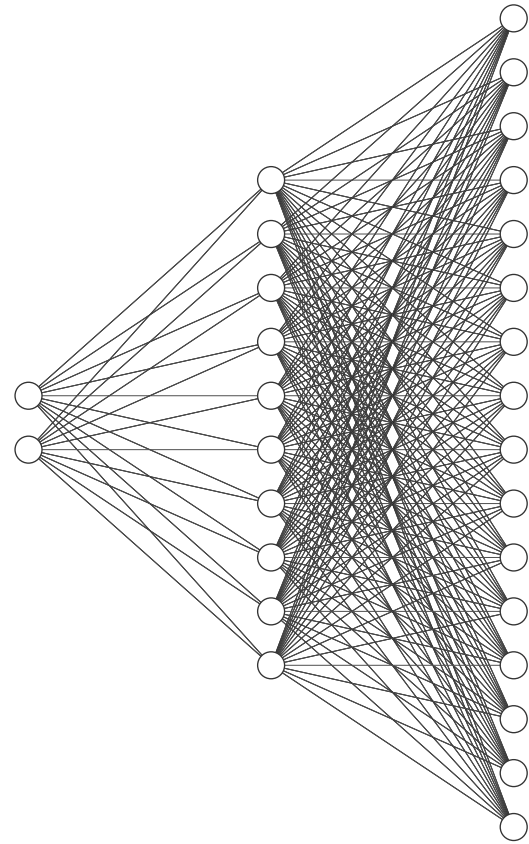
- Χρησιμοποιούνται 4 πίνακες A_j , καθένας εκ των οποίων περιέχει την ενέργεια των συμβόλων του κάθε τεταρτημορίου, με τρόπο ώστε να είναι εύκολη η αντιστοίχιση της ενέργειας του συμβόλου με το ίδιο το σύμβολο.
- Για το ληφθέν σήμα r υπολογίζεται η ενέργεια του E_r και με βάση το πρόσθετο των συντεταγμένων του προσδιορίζεται το τεταρτημόριο j , στο οποίο ανήκει.
- Υπολογίζεται η απόλυτη διαφορά όλων των στοιχείων και αποθηκεύονται σε έναν πίνακα B , τέτοιο ώστε $B = |A_j[:]-E_r|$. Από τον πίνακα B , εντοπίζονται τα στοιχεία με την μικρότερη τιμή. Τα στοιχεία αυτά αντιστοιχούν στα σύμβολα του αρχικού αστερισμού με την μικρότερη ενεργειακή διαφορά από το r .



Σχήμα 3. Πιθανότητα Σφάλματος Συμβόλου για Διαφορετικές Τάξεις Αστερισμού Regular HQAM



Σχήμα 4. Νευρωνικό Δίκτυο για την Ανίχνευση Σημάτων 16-HQAM



Input Layer $\in \mathbb{R}^2$ Hidden Layer $\in \mathbb{R}^{10}$ Output Layer $\in \mathbb{R}^{16}$

Σχήμα 5. Νευρωνικό Δίκτυο για την Ανίχνευση Σημάτων 16-HQAM

- Εδώ μπορεί να εφαρμοσθεί ένας αλγόριθμος ώστε να αποκλειστούν τα μη επιθυμητά σύμβολα (αν για παράδειγμα πρέπει να ανιχνευθεί το σύμβολο $3 + 6j$, πρέπει να αποκλειστεί το σύμβολο $6 + 3j$, το οποίο έχει ίδια ενέργεια και εφόσον υφίσταται ως σύμβολο στον αστερισμό, με βάση το MLD ή σύμφωνα με μία από τις συντεταγμένες του r) και να γίνει επιτυχημένη ανίχνευση.

Με αυτή την μέθοδο η ανίχνευση περιορίζεται σε λιγότερες μαθηματικές πράξεις (κυρίως προσθέσεις) σε σχέση με το MLD, το οποίο χρησιμοποιεί πληθώρα πολλαπλασιασμών, οι οποίοι απαιτούν πολύ χρόνο για να πραγματοποιηθούν. Η αναλυτική υλοποίηση της μεθόδου δεν έγινε λόγω έλλειψης χρόνου.

7. Πρόταση Βελτίωσης της Ανίχνευσης

Μια πιθανή βελτίωση που αφορά τον αλγόριθμο που περιγράφεται στο [1] αφορά την αποφυγή της χρήσης της Ευκλείδειας απόστασης ($d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$) όπως περιγράφεται από το MLD. Αντίθετα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το τετράγωνο της Ευκλείδειας απόστασης ($\hat{d} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$), δεδομένου ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι αύξουσα συνάρτηση και ο υπολογισμός της δεν έχει πρακτική αξία. Αυτό μπορεί να εφαρμοσθεί σε όλες τις χρήσεις του MLD, όπως για παράδειγμα και στην τεχνική του **Κεφαλαίου 7**.

Επίσης ο αλγόριθμος του **Κεφαλαίου 7** μπορεί να αντικαταστήσει/συμπληρώσει το MLD (όπου χρησιμοποιείται) στην μέθοδο του [1], οδηγώντας σε ταχύτερη ανίχνευση.

- [1] Thrassos Oikonomou, Sotiris Tegos, Dimitrios Tyrovolas, Panagiotis Diamantoulakis, and George Karagiannidis. On the Error Analysis of Hexagonal-QAM Constellations.
- [2] Praveen Kumar Singya, Parvez Shaik, Nagendra Kumar, Vimal Bhatia, and Mohamed-Slim Alouini. A Survey on Higher-Order QAM Constellations: Technical Challenges, Recent Advances, and Future Trends. *IEEE Open Journal of the Communications Society*, 2021.
- [3] Fatih Cogen and Erdogan Aydin. Performance analysis of Hexagonal QAM constellations on quadrature spatial modulation with perfect and imperfect channel estimation. *Physical Communication*, 2021.
- [4] Erdogan Aydin. A New Hexagonal Quadrature Amplitude Modulation Aided Media-Based Modulation. *International Journal of Communication Systems*, 2021.
- [5] Luca Rugini. Symbol Error Probability of Hexagonal QAM. *IEEE COMMUNICATIONS LETTERS*, 20(8), 2016.