Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρονικής και Υπολογιστών

1η Εργαστηριακή Άσκηση

Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα

Τσαμουρίδης Αναστάσιος Αθανάσιος

Νοέμβριος 2022

Αυτή η σελίδα αφέθηκε σκοπίμως κενή

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα αναφορά γίνεται η παρουσίαση των μέθοδων και των αποτελεσμάτων κάποιων αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται σε προβλήματα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, οι αλγόριθμοι που παρουσιάζονται βασίζονται στις παρακάτω μεθόδους:

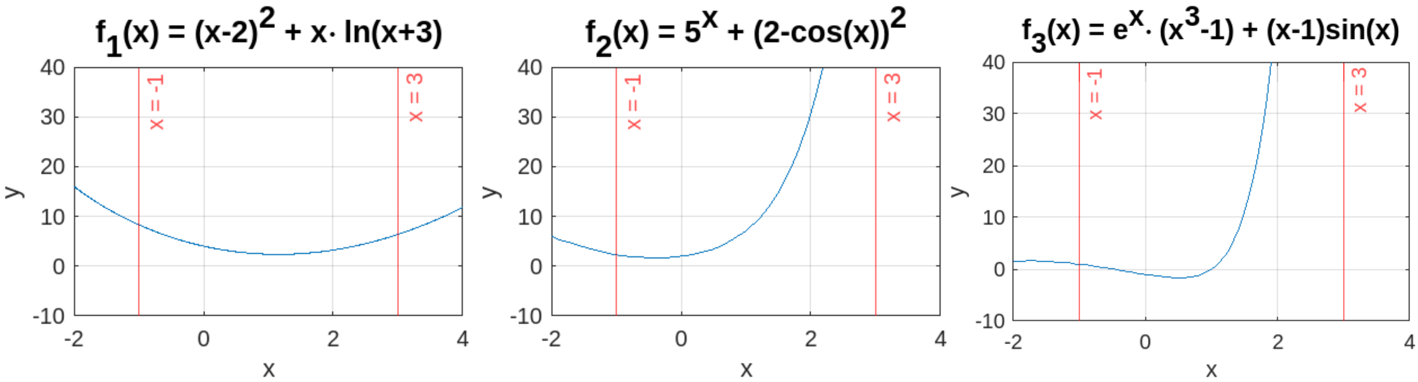
- Μέθοδος διχοτόμου
- Μέθοδος χρυσού τομέα
- Μέθοδος Fibonacci
- Μέθοδος διχοτόμου με χρήση παραγώγων

Οι παραπάνω μέθοδοι εφαρμόζονται σε προβλήματα βελτιστοποίησης μονοδιάστατων συναρτήσεων, χωρίς την ύπαρξη περιορισμών. Οι τρεις πρώτες βρίσκουν εφαρμογή σε αυστηρά σχεδόν κυρτές συναρτήσεις, ενώ η τελευταία σε ψευδοκυρτές.

Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στην αναφορά για την εφαρμογή των παραπάνω αλγορίθμων είναι οι:

- $f_1(x) = (x-2)^2 + xln(x+3)$
- $f_2(x) = 5^x + (2 - cos(x))^2$
- $f_3(x) = e^x(x^3 - 1) + (x-1)sin(x)$

και το διάτημα αναζήτησης ελαχίστου είναι το $[-1, 3]$. Δίνεται ότι οι συναρτήσεις είναι κυρτές στο διάστημα αυτό, συνεπώς οι αλγόριθμοι που αναφέρθηκαν προηγουμένως μπορούν εφαρμοσθούν χωρίς πρόβλημα. Οι γραφικές παραστάσεις των f_1, f_2 και f_3 δίνονται στο Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Γραφικές Παραστάσεις των Συναρτήσεων προς ελαχιστοποίηση.

Κεφάλαιο 2

Θέμα 1 - Μέθοδος Διχοτόμου

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η ανάλυση του αλγορίθμου της Διχοτόμου.

2.1 Ο αλγόριθμος

Ορίζονται η σταθερά $\epsilon > 0$, k και $l > 0$, όπου ε: η επιθυμητή ακρίβεια στον προσδιορισμό ελαχίστου, k: ο αριθμός επανάληψης του βρόχου του αλγορίθμου και l: το τελικό εύρος του διαστήματος αναζήτησης. Εδώ σημειώνεται ότι θα πρέπει να ισχύει $l > 2\epsilon$, ώστε ο αλγόριθμος να τερματίζει και να μην καταλήγει σε ατέρμονα βρόχο. Ξεκινώντας από το διάστημα αναζήτησης του ελαχίστου $[a, b]$ ορίζονται τα σημεία $x_{1k} = \frac{a_k+b_k}{2} - \epsilon$ και $x2k = \frac{a_k+b_k}{2} + \epsilon$, δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά της διχοτόμου του αρχικού διαστήματος. Το νέο διάστημα αναζήτησης ορίζεται ως:

- $[x_{1k}, b_k]$, εάν $f(x_{1k}) \geq f(x_{2k})$
- $[a_k, x_{2k}]$, εάν $f(x_{1k}) < f(x_{2k})$

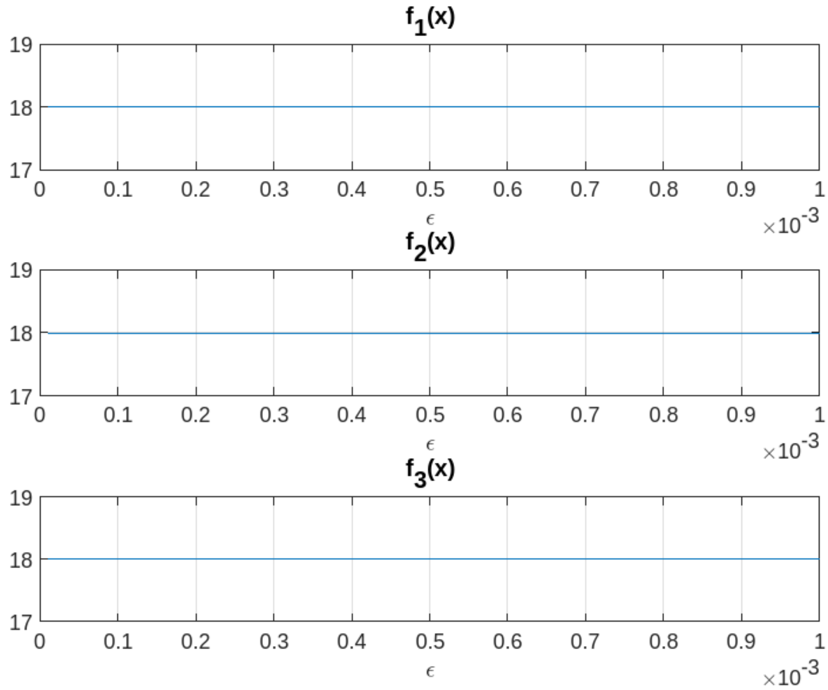
Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται για το νέο διάστημα αναζήτησης και τερματίζει όταν $|a_k - b_k| < l$.

2.2 Εφαρμογή για σταθερό l και μεταβλητό ε

Επιλέγεται l = 0.01 και ο αλγόριθμος εφαρμόζεται για διαφορετικές τιμές του ϵ. Υπολογίζεται ο αριθμός κλήσεων της συνάρτησης. Τα αποτελέσματα της υλοποίησης της παραπάνω μεθόδου φαίνονται στο Σχήμα 2.1.

2.3 Εφαρμογή για σταθερό ε και μεταβλητό l

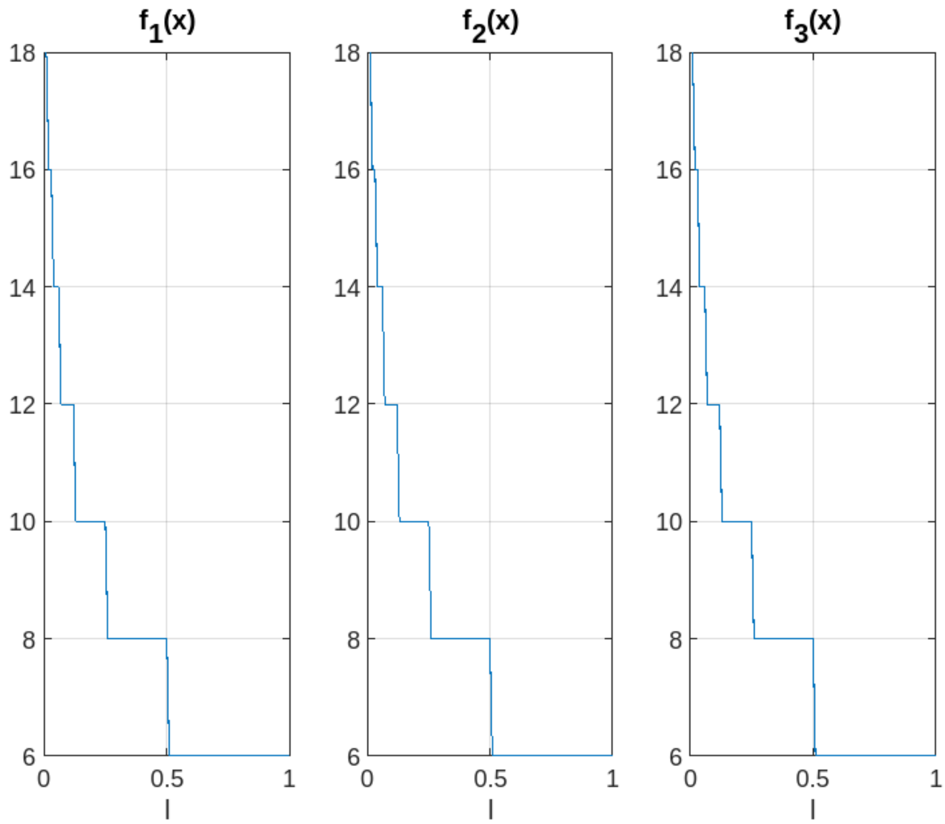
Επιλέγεται ε = 0.001 σταθερό και ο αλγόριθμος εφαρμόζεται για διαφορετικές τιμές του l και υπολογίζεται ξανά ο αριθμός κλήσεων της συνάρτησης. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 2.2.



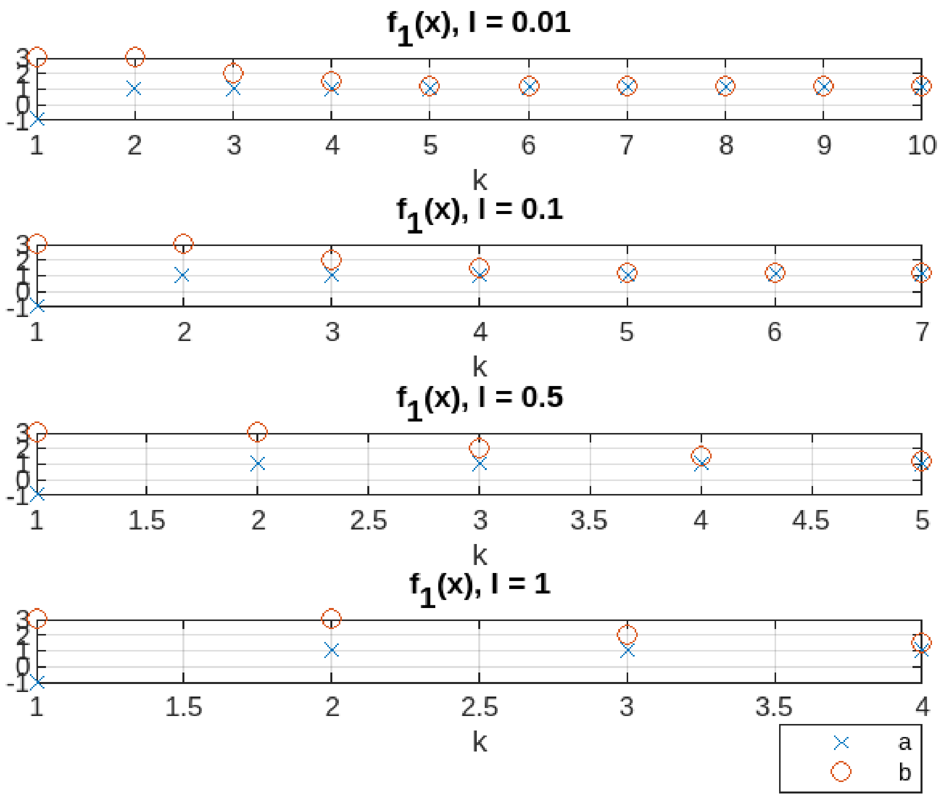
Σχήμα 2.1: Υπολογισμοί της συνάρτησης για μεταβαλλόμενο ε και σταθερό l

2.4 Άκρα διαστημάτων συναρτήσει της επανάληψης k

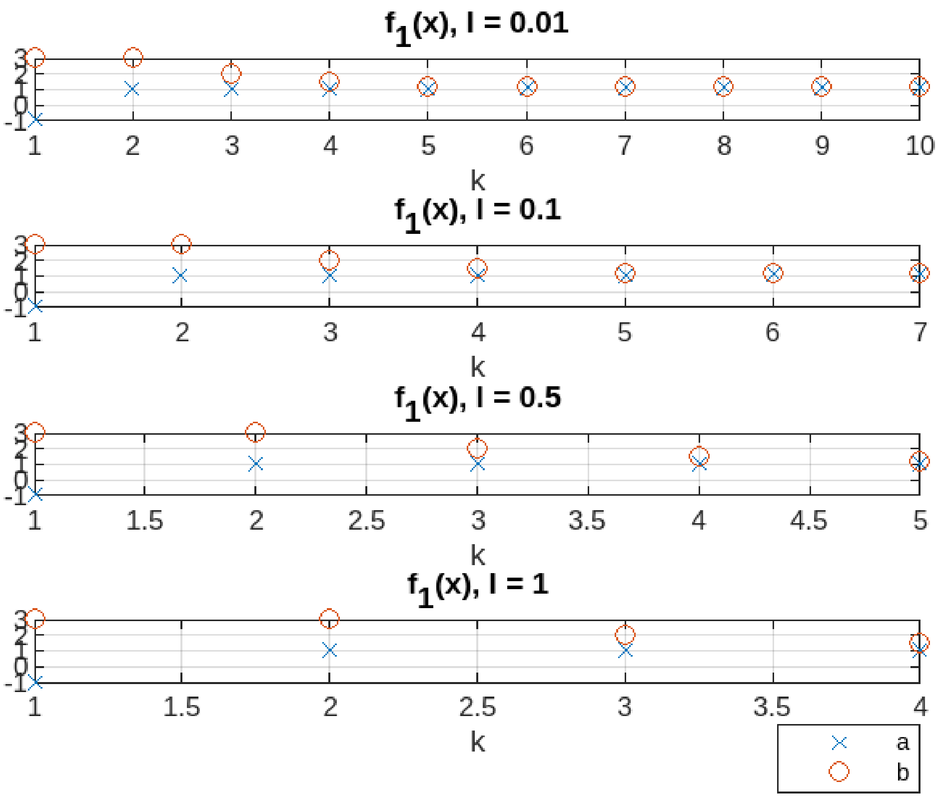
Επιλέγεται σταθερή τιμή ε = 0.001 και εφαρμόζεται ο αλγόριθμος της διχοτόμου για διαφορετικές τιμές του l. Για κάθε επανάληψη του βρόχου αποθηκεύονται οι τιμές των άκρων κάθε νέου υποδιαστήματος. Στα Σχήμα 2.3, Σχήμα 2.4 και Σχήμα 2.5 φαίνονται τα αποτελέσματα για την εφαρμογή των παραπάνω στις συναρτήσεις f_1, f_2 και f_3, για l = 0.01, 0.1, 0.5, 1.



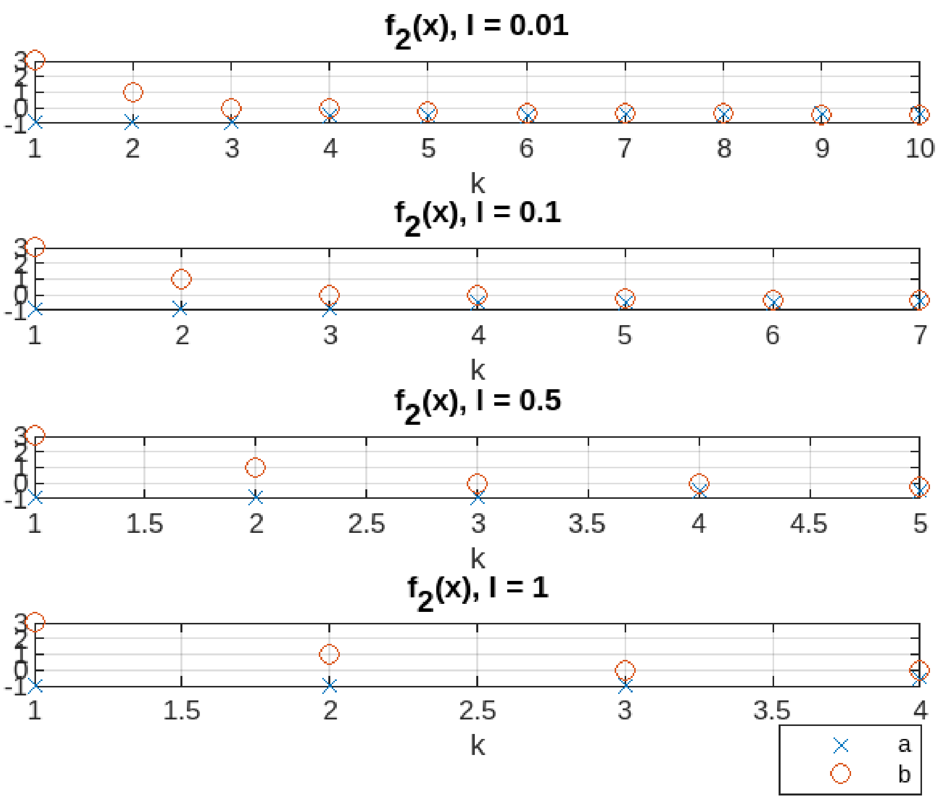
Σχήμα 2.2: Αλγόριθμος Διχοτόμου - Υπολογισμοί της συνάρτησης για μεταβαλλόμενο l και σταθερό ε



Σχήμα 2.3: Αλγόριθμος διχοτόμου για την f_1 - κλήσεις της συνάρτησης για διαφορετικές τιμές l και σταθερό ε



Σχήμα 2.4: Αλγόριθμος διχοτόμου για την f_2 - κλήσεις της συνάρτησης για διαφορετικές τιμές l και σταθερό ε



Σχήμα 2.5: Αλγόριθμος διχοτόμου για την f_3 - κλήσεις της συνάρτησης για διαφορετικές τιμές l και σταθερό ε

Κεφάλαιο 3

Θέμα 2 - Αλγόριθμος Χρυσού Τομέα

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η ανάλυση του αλγορίθμου του χρυσού τομέα.

3.1 Ο αλγόριθμος

Ορίζονται k και $l > 0$, όπου k: ο αριθμός επανάληψης του βρόχου του αλγορίθμου και l: το τελικό εύρος του διαστήματος αναζήτησης. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί την σταθερά γ = 0.618 (γνωστή και ως χρυσή τομή), για τον καθορισμό του νέου διαστήματος αναζήτησης σε κάθε βρόχο. Ξεκινώντας από το διάστημα $[a, b]$, ορίζονται τα:

- $x_{11} = a_1 + (1 - \gamma)(b_1 - a1)$
- $x_{21} = a_1 + \gamma(b_1 - a1)$

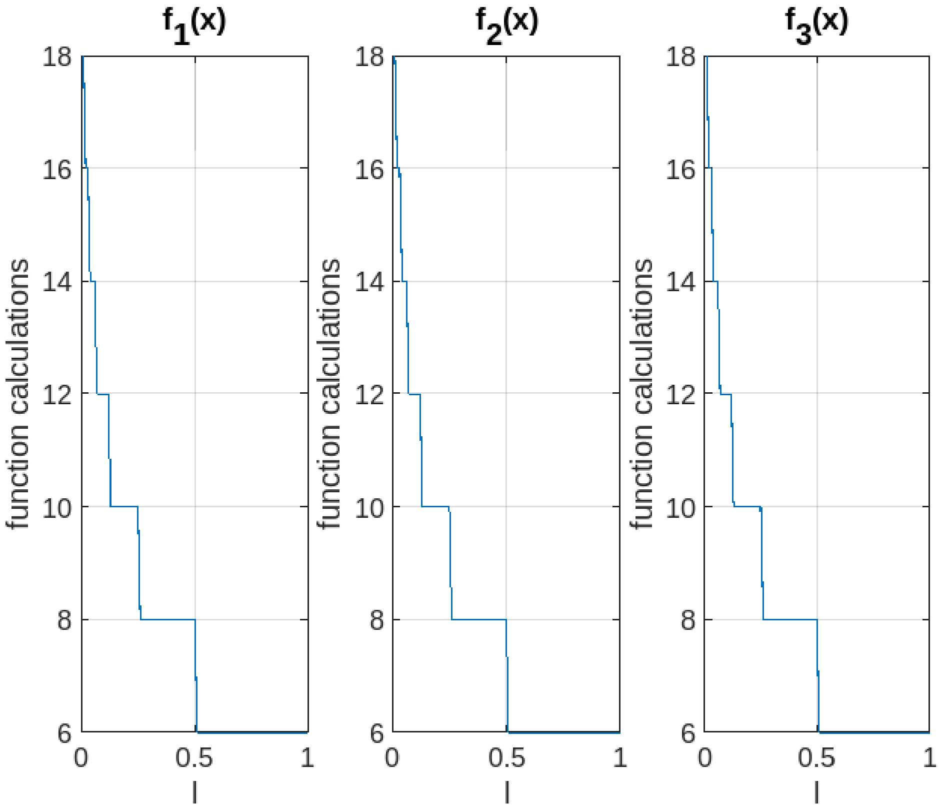
Αν $|b_1 - a_1| < l$, ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά, ξεκινά ο βρόχος επανάληψης και ισχύει:

- Αν $f(x_{1k} > f(x_{2k})$, τότε:
  $a_{k+1} = x_{1k}$
  $b_{k+1} = b_k;$
  $x2_{k+1} = a_{k+1} + \gamma * (b_{k+1} - a_{k+1})$
  $x1_{k+1} = x_{2k}$
- Για $f(x_{1k} \leq f(x_{2k})$:
  $a_{k+1} = a_k$
  $b_{k+1} = x_{2k}$
  $x2_{k+1} = x1_k$
  $x1_{k+1} = a_{k+1} + (1 - \gamma) * ((b_{k+1} - a_{k+1}))$

Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν $|b_k - a_k| < l$

3.2 Εφαρμογή για μεταβλητό l

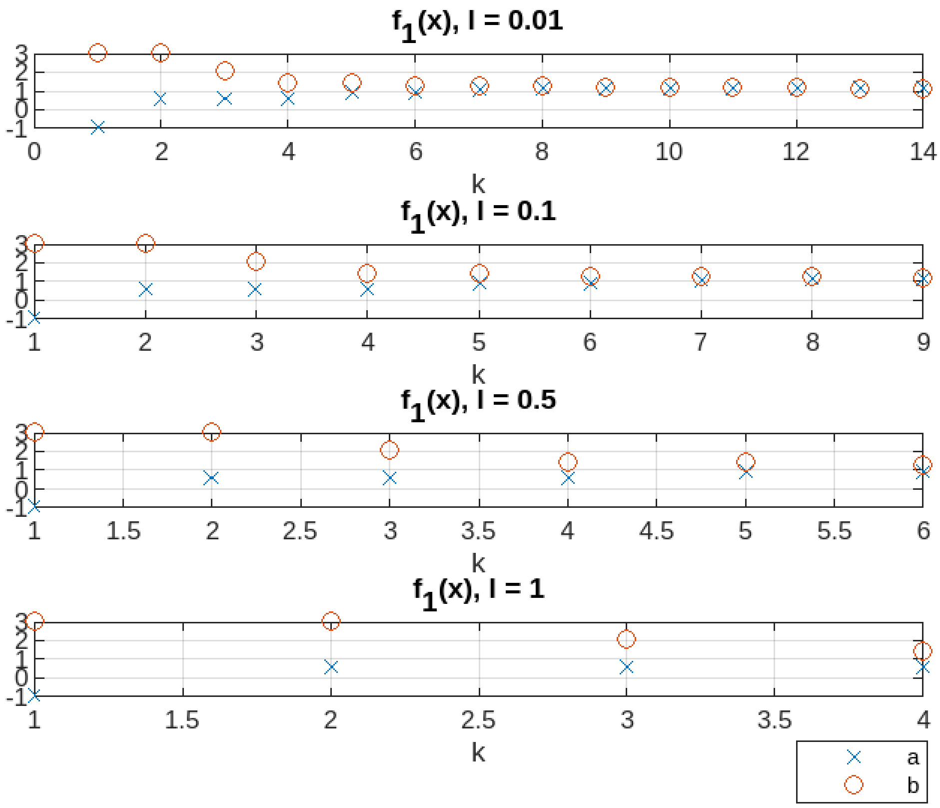
Εφαρμόζεται ο αλγόριθμος για τις τιμές του l = 0.01, 0.1, 0.5, 1 και μετράται πόσες φορές κλήθηκε η συνάρτηση f_i, $i = 1, 2, 3$. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής φαίνονται στο Σχήμα 3.1.



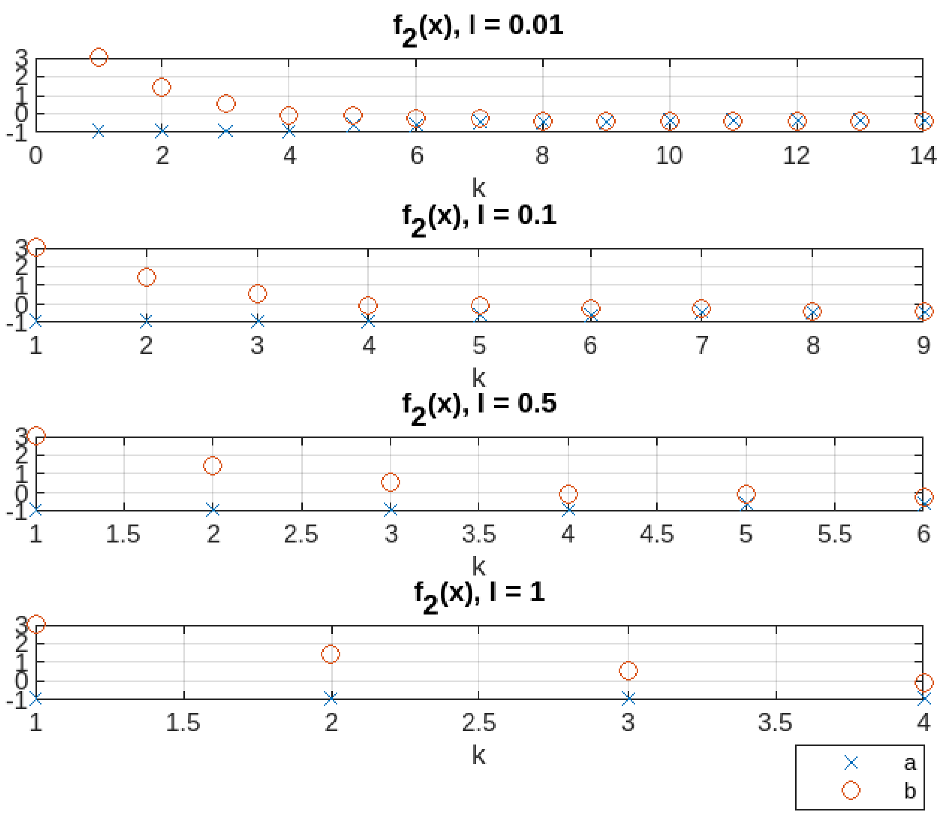
Σχήμα 3.1: Αλγόριθμος Χρυσού Τομέα - Υπολογισμοί της συνάρτησης για μεταβαλλόμενο l

3.3 Άκρα διαστημάτων συναρτήσει της επανάληψης k

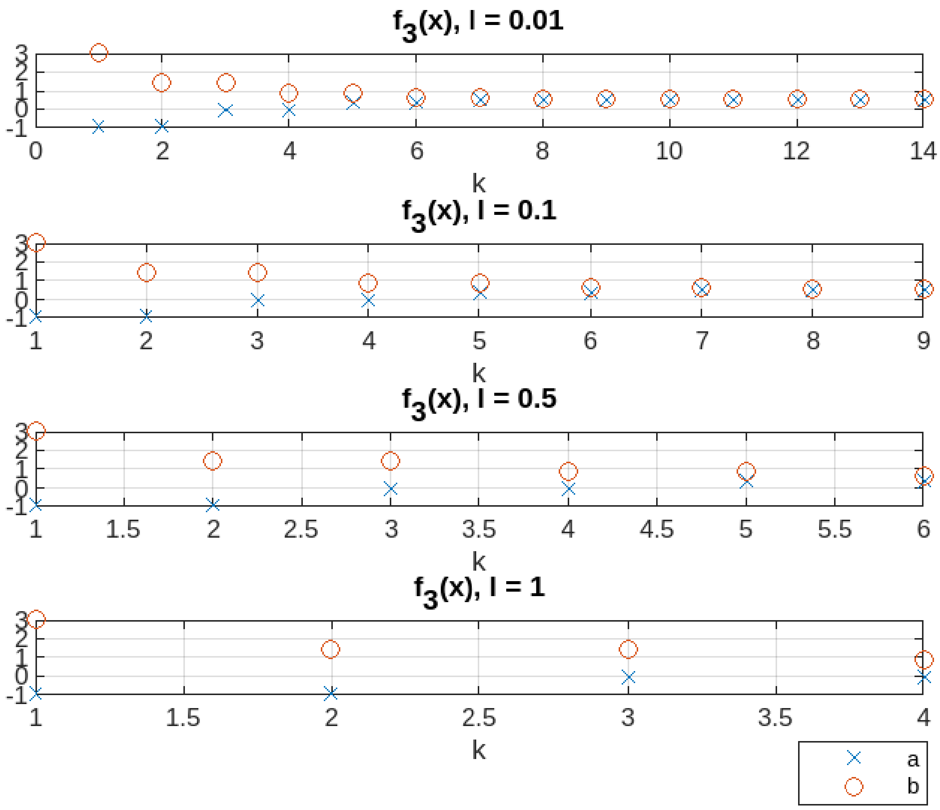
Σε αυτή την υποενότητα εφαρμόζεται ο αλγόριθμος του χρυσού τομέα για διαφορετικές τιμές του l και μετράται ο αριθμός κλήσεων της συνάρτησης f_i. Οι γραφικές παραστάσεις των αποτελεσμάτων φαίνονται στα Σχήμα 3.2, Σχήμα 3.3 και Σχήμα 3.4



Σχήμα 3.2: Αλγόριθμος Χρυσού Τομέα για την f_1 - κλήσεις της συνάρτησης για διαφορετικές τιμές l



Σχήμα 3.3: Αλγόριθμος Χρυσού Τομέα για την f_2 - κλήσεις της συνάρτησης για διαφορετικές τιμές l



Σχήμα 3.4: Αλγόριθμος Χρυσού Τομέα για την f_3 - κλήσεις της συνάρτησης για διαφορετικές τιμές l

Κεφάλαιο 4

Θέμα 3 - Αλγόριθμος Fibonacci

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η ανάλυση του αλγορίθμου Fibonacci.

4.1 Ο αλγόριθμος

Η μέθοδος του Fibonacci μοιάζει με την μέθοδο του χρυσού τομέα, ωστόσο το νέο υποδιάστημα δεν συνδέεται πλέον με μια σταθερά γ με το προηγούμενο υποδιάστημα. Η σύνδεση πλέον γίνεται με μια τιμή που μεταβάλλεται σε κάθε επανάληψη και η τιμή της βασίζεται στην ακολουθία Fibonacci. Εδώ σημειώνεται πως για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων n του βρόχου στις δύο μεθόδους, η μέθοδος Fibonacci και η μέθοδος χρυσού τομέα είναι σχεδόν ταυτόσημες.

Για την υλοποίηση του αλγορίθμου επιλέγεται το εύρος του τελικού διαστήματος αναζήτησης $l > 0$ και η σταθερά $\epsilon > 0$. Ο συνολικός αριθμός υπολογισμών n της αντικειμενικής συνάρτησης επιλέγεται έτσι, ώστε: $F_n \geq \frac{b_1 - a_1}{l}$. Στην συνέχεια ορίζονται:

- $x_{11} = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1)$
- $x_{21} = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1)$

και ξεκινά ο βρόχος επανάληψης.

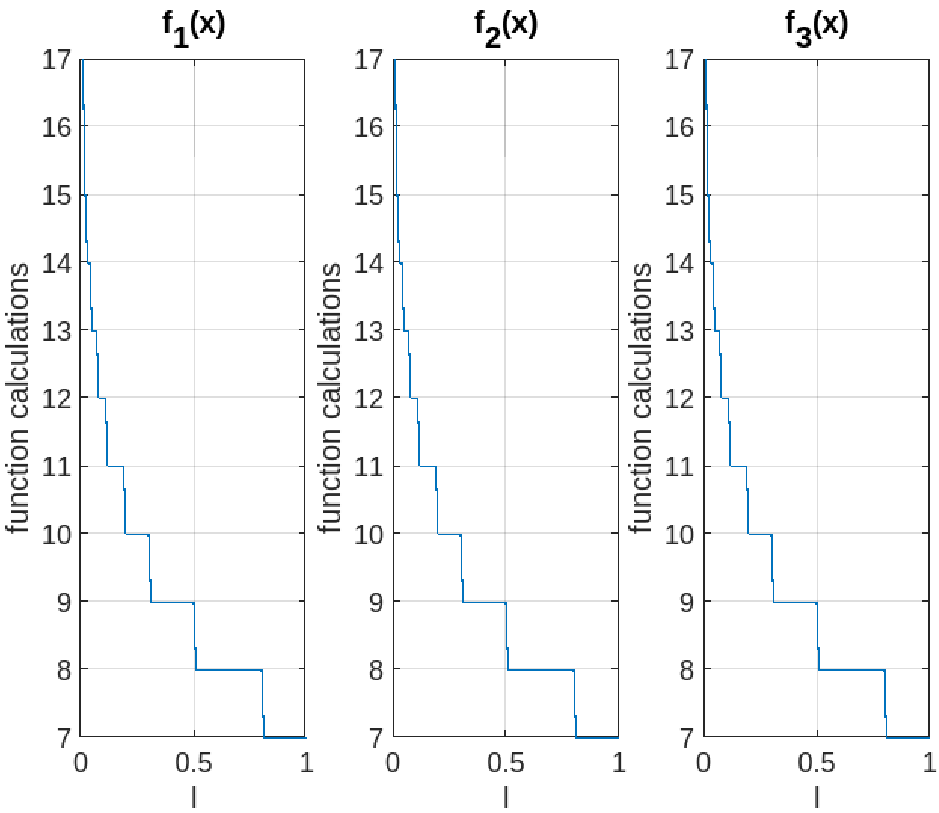
- Αν $k = n$-1, ο αλγόριθμος τερματίζει αφού πρώτα ορισθούν τα παρακάτω:
  $x_{1n} = x_{1n-1}$
  $x_{2n} = x_{2n-1}$
  Έπειτα γίνονται οι παρακάτω έλεγχοι:
  - Εάν $f(x_{1n}) \geq f(x_{2n})$:
    $a_n = x_{1n}$
    $b_n = b_{n-1}$
  - Αλλιώς:
    $a_n = a_{n-1}$
    $b_n = x_{2n}$

  Και το επιστρεφόμενο διάστημα είναι το $[a_n, b_n]$.

- Αν $f(x_{1k} \geq f(x_{2k})$, τότε:
  $a_{k+1} = x_{1k}$
  $b_{k+1} = b_k;$
  $x2_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}} * (b_{k+1} - a_{k+1})$
  $x1_{k+1} = x_{2k}$
- Για $f(x_{1k} < f(x_{2k})$:
  $a_{k+1} = a_k$
  $b_{k+1} = x_{2k}$
  $x2_{k+1} = x1_k$
  $x1_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}} * ((b_{k+1} - a_{k+1}))$

4.2 Εφαρμογή για μεταβλητό l

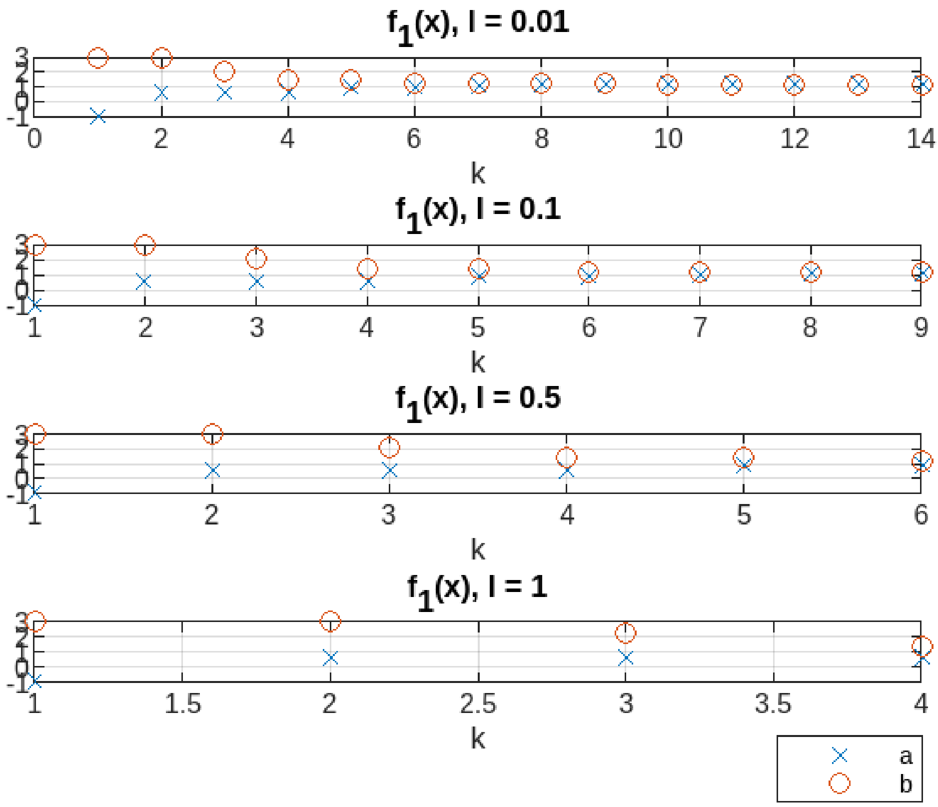
Ακολουθείται ξανά η μεθοδολογία που περιγράφεται στην ενότητα 3.2 και το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.1.



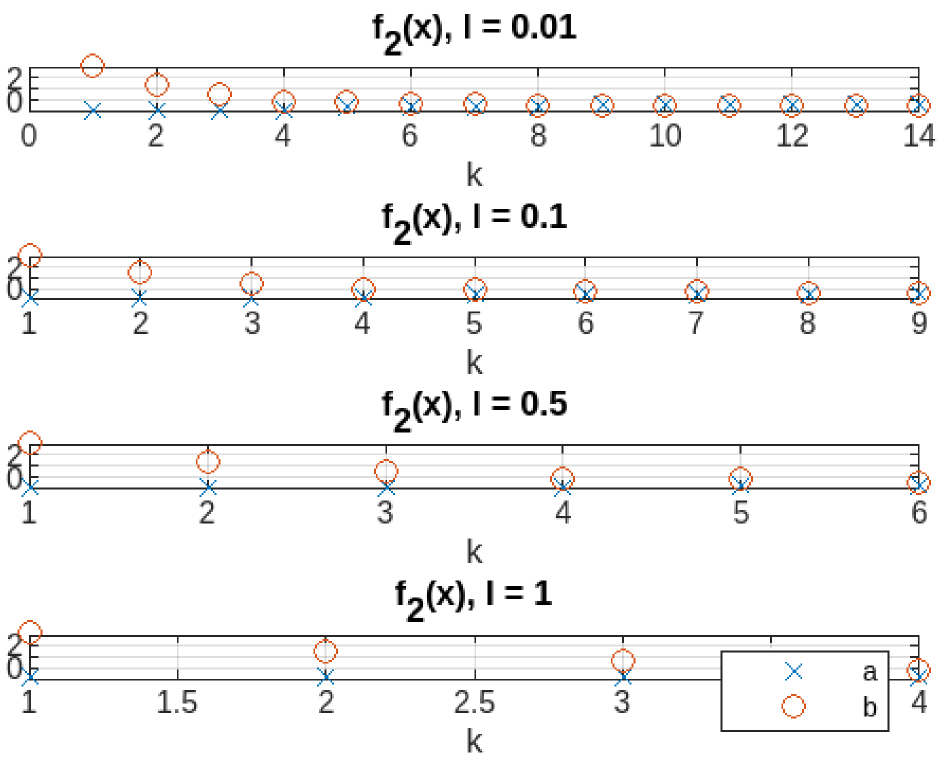
Σχήμα 4.1: Αλγόριθμος Fibonacci - Υπολογισμοί της συνάρτησης για μεταβαλλόμενο l

4.3 Άκρα διαστημάτων συναρτήσει της επανάληψης k

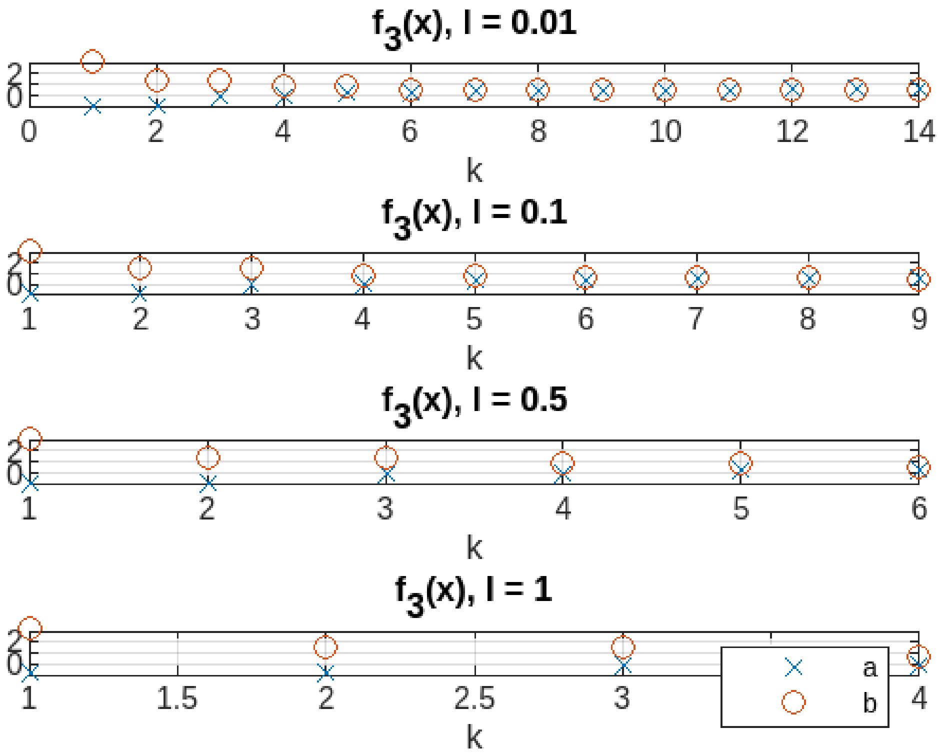
Με την μεθοδολογία που περιγράφεται στην ενότητα 3.3, παίρνουμε τα Σχήμα 4.2, Σχήμα 4.3 και Σχήμα 4.4:



Σχήμα 4.2: Αλγόριθμος Fibonacci για την f_1 - κλήσεις της συνάρτησης για διαφορετικές τιμές l



Σχήμα 4.3: Αλγόριθμος Fibonacci για την f_2 - κλήσεις της συνάρτησης για διαφορετικές τιμές l



Σχήμα 4.4: Αλγόριθμος Fibonacci για την f_3 - κλήσεις της συνάρτησης για διαφορετικές τιμές l

Κεφάλαιο 5

Θέμα 4 - Αλγόριθμος Διχοτόμου με Χρήση Παραγώγων

Ως εδώ έγινε περιγραφή των αλγορίθμων, οι οποίοι δεν χρησιμοποιούν παράγωγο για την εύρεση ελαχίστου. Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η ανάλυση του αλγορίθμου της Διχοτόμου με την χρήση παραγώγων.

5.1 Ο αλγόριθμος

Έστω ότι ζητείται η ελαχιστοποίηση της $f(x)$, η οποία είναι ψευδοκυρτή και διαφορίσιμη στο $[a_1, b_1]$, με $\frac{df(x)}{dx} = g(x)$. Στην k-οστή επανάληψη, για το υποδιάστημα $[a_k, b_k]$, ορίζεται το σημείο της διχοτόμου $x_k = \frac{a_k - b_k}{2}$.

- Αν $g(x_k) = 0$, το x_k ορίζεται ως το σημείο ελαχίστου.
- Αν $g(x_k) > 0$, το νεό διάστημα αναζήτησης ορίζεται ως το $[a_k, x_k]$
- Αν $g(x_k) < 0$, το νεό διάστημα αναζήτησης ορίζεται ως το $[x_k, b_k]$

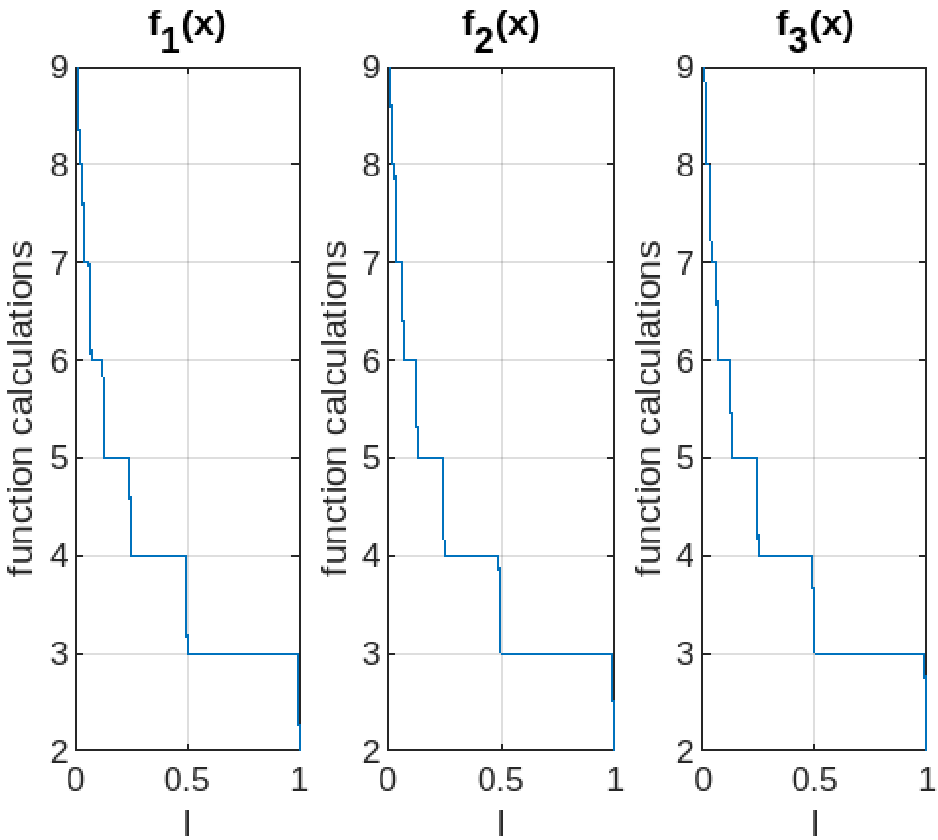
Αν δεν προκύψει μηδενισμός της παραγώγου στις n επαναλήψεις του αλγόριθμου, το σημείο ελαχίστου ανήκει στο $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

5.2 Εφαρμογή για μεταβλητό l

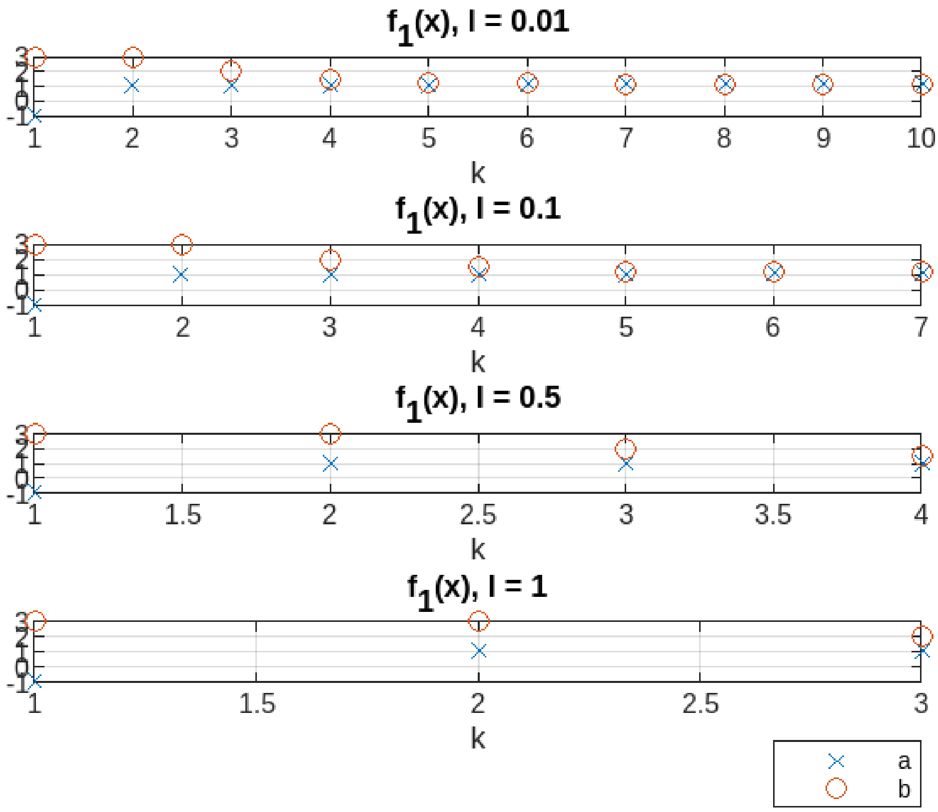
Και εδώ ακολουθείται η μεθοδολογία που περιγράφεται στην ενότητα 3.2 και το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 5.1.

5.3 Άκρα διαστημάτων συναρτήσει της επανάληψης k

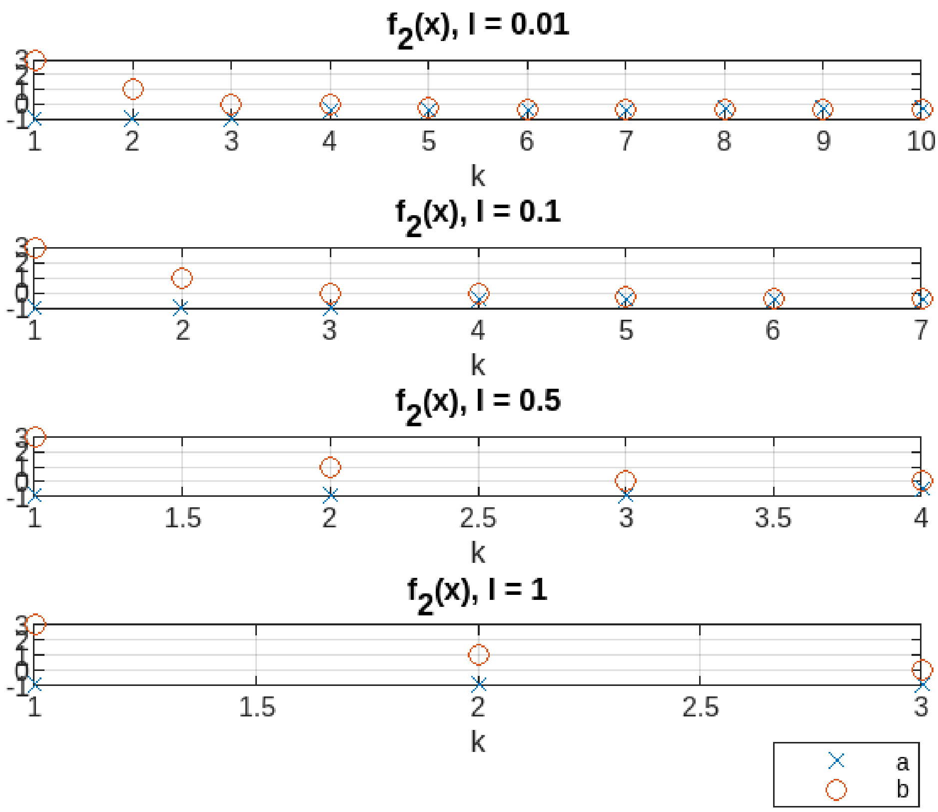
Κάνοντας ξανά χρήση της μεθοδολογίας που περιγράφεται στην ενότητα 3.3 παίρνουμε τα Σχήμα 5.2, Σχήμα 5.3 και Σχήμα 5.4.



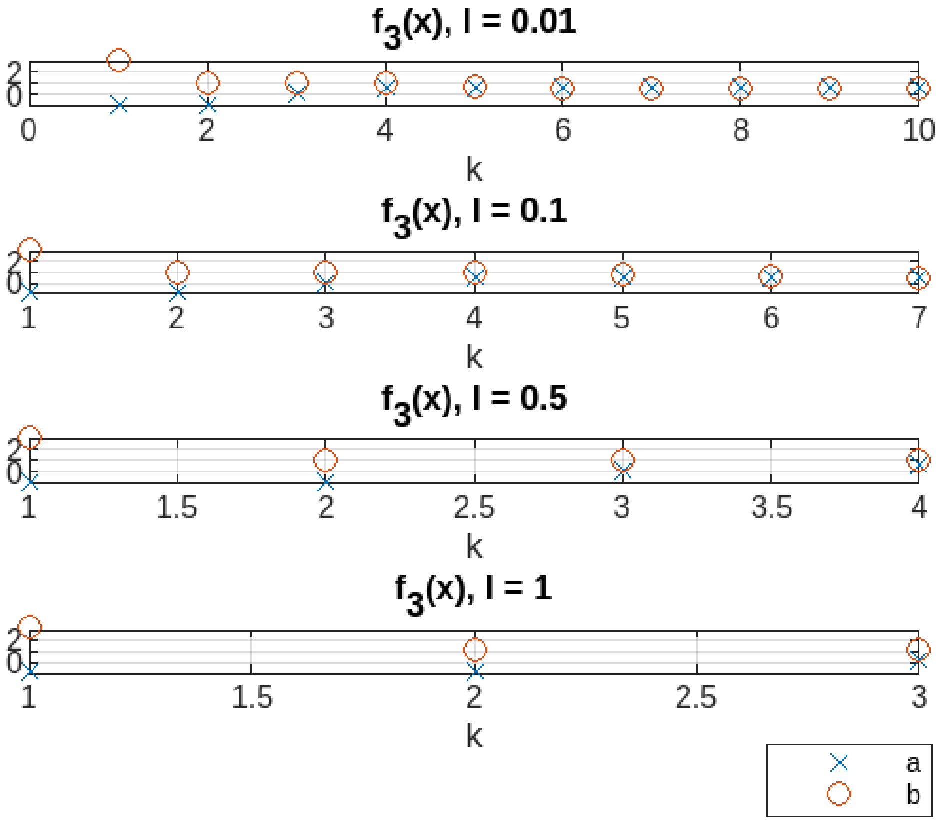
Σχήμα 5.1: Αλγόριθμος Διχοτόμου με Χρήση Παραγώνων - Υπολογισμοί της συνάρτησης για μεταβαλλόμενο l



Σχήμα 5.2: Αλγόριθμος Διχοτόμου με χρήση παραγώγων για την f_1 - κλήσεις της συνάρτησης για διαφορετικές τιμές l



Σχήμα 5.3: Αλγόριθμος Διχοτόμου με χρήση παραγώγων για την f_2 - κλήσεις της συνάρτησης για διαφορετικές τιμές l



Σχήμα 5.4: Αλγόριθμος Διχοτόμου με χρήση παραγώγων για την f_3 - κλήσεις της συνάρτησης για διαφορετικές τιμές l

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Σύγκριση των Αλγορίθμων

6.1 Γενικά Συμπεράσματα

6.1.1 Σταθερό l και μεταβλητό ε - Αλγόριθμος Διχοτόμου

Στην ενότητα 2.2 έγινε εφαρμογή του αλγορίθμου της διχοτόμου για σταθερό l και μεταβαλλόμενο ε. Όπως μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 2.2, ο αριθμός κλήσεων της συνάρτησης f_i είναι σταθερός και ανεξάρτητος από την επιλογή του ε και την συνάρτηση f_i. Αυτό είναι λογικό, διότι το ε στον αλγοριθμό προσδιορίζει απλά την απόσταση από την διχοτόμο και δεν συμμετέχει στην λήψη απόφασης για τον τερματισμό ή μη του αλγορίθμου. Υπενθυμίζεται ότι ισχύει $l > 2\epsilon$. Συνεπώς το l είναι αυτό που συνεισφέρει στον καθορισμό του αριθμού κλήσεων της συνάρτησης f_i και ο αλγόριθμος, όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2, τερματίζει μόνο για $|a_k - b_k| < l$.

6.1.2 Σταθερό ε και μεταβλητό l - Αλγόριθμος Διχοτόμου

Στην ενότητα 2.3 έγινε η αντίστροφη διαδικασία από αυτή που δίνεται στην ενότητα 2.2. Διατηρώντας σταθερό το ε και μεταβάλλοντας το l, σχηματίστηκε το Σχήμα 2.2. Είναι πλέον εμφανές, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, πως υπάρχει άμεση εξάρτηση του αριθμού κλήσεων της συνάρτησης από το l που επιλέγεται. Συγκεκριμένα, για μικρό l, άρα για μεγάλη ακρίβεια προσδιορισμού του τελικού διαστήματος, η συνάρτηση f_i καλείται περισσότερες φορές. Επίσης, και σε αυτές τις γραφικές παραστάσεις φαίνεται πως ο αριθμός κλήσεων είναι ανεξάρτητος από το ποια αντικειμενική συνάρτηση χρησιμοποιείται.

6.1.3 Μεταβλητό l - Αλγόριθμοι Χρυσού Τομέα, Διχοτόμου με παράγωγο και Fibonacci

Στα χωρία ενότητα 3.2, ενότητα 4.2 και ενότητα 5.2 της αναφοράς εφαρμόσθηκαν οι αλγόριθμοι του χρυσού τομέα, της διχοτόμου με χρήση παραγώγων και Fibonacci για μεταβλητό l. Όπως και στην περίπτωση του αλγορίθμου με διχοτόμο, οι γραφικές παραστάσεις μας δείχνουν ότι το πλήθος των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης είναι άμεσα εξαρτώμενος από το τελικό εύρος αναζήτησης και μάλιστα μικρή τιμή του l οδηγεί σε πολλές κλήσεις της f_i. Χρήση διαφορετικής αντικειμενικής συνάρτησης δεν οδηγεί σε μεταβολή του αριθμού των υπολογισμών της f_i.

6.1.4 Μεταβλητό l και τιμές υποδιαστημάτων

Στην τελευταία ενότητα κάθε κεφαλαίου επιλέγονται διαφορετικές τιμές του l (και σταθερό ε για τον αλγόριθμο διχοτόμου) και γίνεται γραφική παράσταση των υποδιαστημάτων $[a_k, b_k]$ που προκύπτουν μετά από κάθε επανάληψη του βρόχου κάθε αλγορίθμου. Είναι εμφανές ότι καθώς αυξάνεται το k σε κάθε αλγόριθμο, η σύγκλιση είναι καλύτερη. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι στις περιπτώσεις που ζητείται μεγαλύτερη ακρίβεια (μικρό l), όλοι οι αλγόριθμοι εκτελούν περισσότερες επαναλήψεις, επιβεβαιώνοντας τα όσα αναφέρθηκαν ως τώρα στις προηγούμενες δύο υποενότητες.

6.2 Συγκριτικά Συμπεράσματα

Οι αλγόριθμοι που παρουσιάστηκαν ως τώρα στην αναφορά συγκλίνουν με ακρίβεια τελικου υποδιαστήματος l μετά πό n επαναλήψεις. Ως n για κάθε αλγόριθμο επιλέγεται η μικρότερη τιμή του n που ικανοποιεί τις σχέσεις:

Μέθοδος Διχοτόμου	$(\frac{1}{2})^n \leq \frac{l}{b_1-a_1}$
Μέθοδος χρυσού τομέα	$\gamma^{n-1} \leq \frac{l}{b_1-a_1}$
Μέθοδος Fibonacci	$F_n \geq \frac{l}{b_1-a_1}$
Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση παραγώγων	$(\frac{1}{2})^n \leq \frac{l}{b_1-a_1}$

Από τα παραπάνω, φαίνεται πως για σταθερό πηλίκο $\frac{l}{b_1-a_1}$ όσο πιο μικρός είναι ο αριθμός n τόσο πιο αποτελεσματικός εμφανίζεται και ο αλγόριθμος. Προκύπτει, λοιπόν, ότι η μέθοδος Fibonacci έχει την καλύτερη απόδοση. Ακολουθεί η μέθοδος του χρυσού τομέα και τέλος οι αλγόριθμοι της Διχοτόμου με ή χωρίς παράγωγο(και οι δύο υλοποιήσεις εμφανίζουν ίδια απόδοση, ωστόσο, η χρήση παραγώγων, προϋποθέτει η αντικειμενική συνάρτηση να είναι διαφορίσιμη).

Όσον αφορά τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης οι αλγόριθμοι χωρίς την χρήση παραγώγων έχουν παρόμοιο αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Αντίθετα, η η μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγων αφού πρώτα υπολογίζει την παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης, έχει μειωμένο αριθμό υπολογισμών της $\frac{df(x)}{dx}$ σε σύγκριση με τις άλλες μεθόδους.

Κεφάλαιο 7

Κώδικας

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή των αποτελεσμάτων βρίσκεται στον φάκελο source. Ο φάκελος περιέχει τους υποφακέλους που περιγράφονται παρακάτω:

- methods: Περιέχει τα αρχεία, στα οποία υλοποιούνται οι μέθοδοι αναζήτησης ελαχίστου.
- exercises: Περιέχονται τα αρχεία που υλοποιούν τα ερωτήματα της εργασίας. Κάθε θέμα περιλαμβάνει δύο ή τρία script που επιλύει κάθε ζητούμενο του θέματος ξεχωριστά. Το όνομα κάθε αρχείου έχει την μορφή `exercise_[ΑριθμόςΘέματος][ΕρώτημαΘέματος]`.
- utils: Περιέχει κάποια script που χρησιμοποιούνται είτε απο τα αρχεία του φακέλου exercises, είτε για τον έλεγχο λειτουργίας των μεθόδων. Κάθε αρχείο του φακέλου utils φέρει σύντομη περιγραφή σε μορφή σχολίων για την λειτουργία του.
- latex: Περιέχει τα αρχεία που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή της αναφοράς (γραφήματα, κώδικας LaTeX).

Κατάλογος Σχημάτων