Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρονικής και Υπολογιστών

3η Εργαστηριακή Άσκηση

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

Τσαμουρίδης Αναστάσιος Αθανάσιος

Δεκέμβριος 2022

Αυτή η σελίδα αφέθηκε σκοπίμως κενή

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα αναφορά παρουσιάζεται η μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή. Γίνεται εφαρμογή της μεθόδου στην συνάρτηση:

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^2 + 3y^2 \tag{1.1}$$

Με τους παρακάτω περιορισμούς:

- $-10 \leq x \leq 5$ και
- $-8 \leq y \leq 12$

1.1 Ο αλγόριθμος

Η μέθοδος μέγιστης καθόδου με προβολή είναι αλγόριθμος εφικτών σημείων. Αποτελεί μέθοδο βελτιστοποίησης στο πρόβλημα $\min_{x \in X} f(x)$. Ο αλγόριθμος ορίζει:

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k(\bar{x}_k - x_k), \gamma_k \in (0, 1]$$

$$\bar{x}_k = Pr_X\{x_k - s_k \nabla f(x_k)\}, s_k > 0$$

όπου:

- k: αριθμός επανάληψης
- x: διάνυσμα-σημείο του R^n
- $\bar{x}_k$ εφικτό σημείο του συνόλου X
- $Pr_X\{y\}$ ο τελεστής προβολής του σημείου y στο σύνολο X
- γ_k βήμα αναζήτησης νέου εφικτού σημείου
- s_k βήμα αναζήτησης στον αλγόριθμο μέγιστης καθόδου

Ο τελεστής προβολής, λόγω της μορφής των περιορισμών $X = \{x \in R^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, ..., n\}$ θα έχει την εξής μαθηματική έκφραση:

$$Pr_X(x_i) = \begin{cases} a_i, x_i \leq a_i \\ b_i, x_i \geq b_i \\ x_i, a_i < x_i < b_i \end{cases}$$

Κεφάλαιο 2

Μαθηματική Ανάλυση της συνάρτησης

Η αντικειμενική συνάρτηση της αναφοράς επιλέχτηκε, όπως ήδη αναφέρθηκε, ως:

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^2 + 3y^2 \tag{2.1}$$

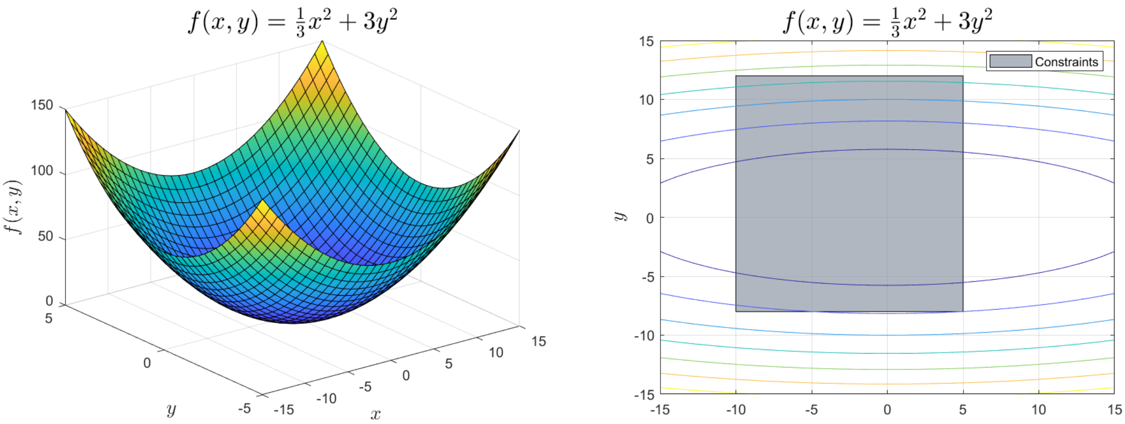
Η κλίση και ο Εσσιανός πίνακας της $f(x, y)$ γράφονται ως:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x \\ 6y \end{bmatrix}$$

$$H = \nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

με $det(H) = 4 \neq 0$. και ιδιοτιμές: $\lambda_1 = \frac{2}{3} > 0, \lambda_2 = 6 > 0$. Άρα ο Εσσιανός είναι θετικά ορισμένος για κάθε τιμή των x, y, οπότε η $f(x, y)$ είναι γνήσια κυρτή και έχει μοναδικό ολικό ελάχιστο. Για την εύρεση του σημείου ελαχίστου παίρνουμε την κλίση της συνάρτησης ίση με το μηδενικό διάνυσμα, οπότε:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x \\ 6y \end{bmatrix} = \vec{0} \Rightarrow (x*, y*) = (0, 0) \text{ το μοναδικό ολικό ελάχιστο της } f$$



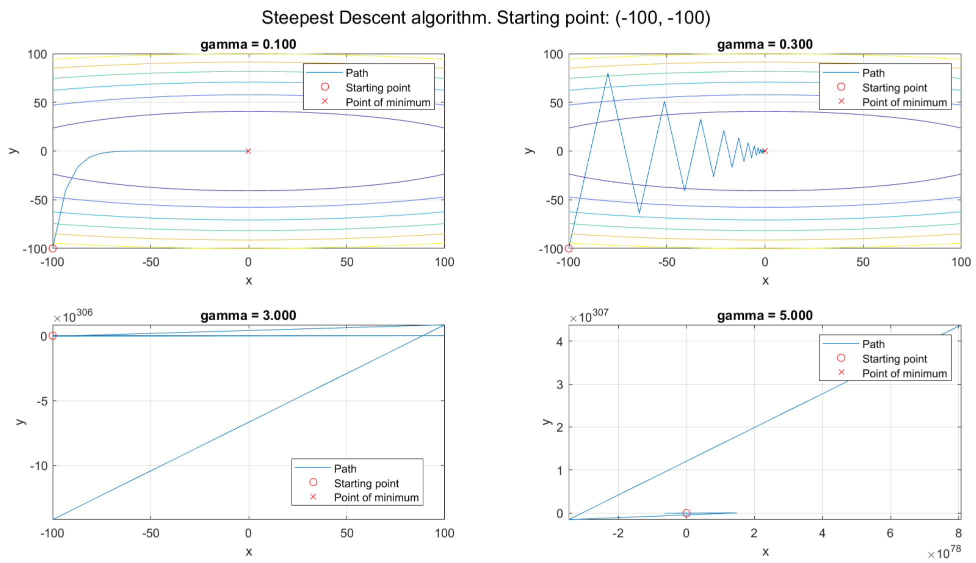
Σχήμα 2.1: Η συνάρτηση f(x,y). Δεξιά σημειώνεται και η περιοχή των περιορισμών.

Σημειώνεται ότι το (0,0) ικανοποιεί τους περιορισμούς και άρα είναι η ζητούμενη απάντηση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογή του αλγορίθμου Μέγιστης Καθόδου - Θέμα 1

Πριν γίνει η εφαρμογή του αλγορίθμου μέγιστης καθόδου με προβολή, εφαρμόζεται στην συνάρτηση ο κλασικός αλγόριθμος Μέγιστης κλίσης. Συγκεκριμένα, για αρχικά σημεία τα (-100, -100), (4,5), (5,0) και για σταθερές τιμές του βήματος γ: 0.1, 0.3, 3 και 5. Η πορεία του αλγορίθμου φαίνεται στα Σχήμα 3.1, Σχήμα 3.2 και Σχήμα 3.3.



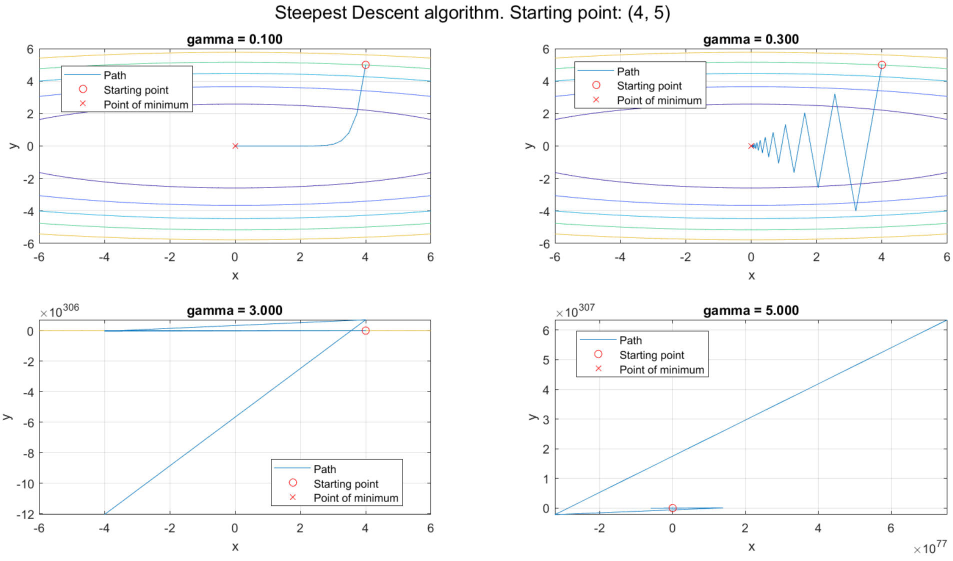
Σχήμα 3.1: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για αρχικό σημείο το (-100, -100)

Είναι εμφανές ότι ο αλγόριθμος αποκλίνει για γ = 3 και γ = 5. Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι ο αλγόριθμος απαιτεί λιγότερες επαναλήψεις για να πετύχει την επιθυμητή σύγκλιση για γ = 0.3 σε σύγκριση με γ = 0.1.

3.1 Μαθηματική απόδειξη των αποτελεσμάτων

Θα αναζητήσουμε τα βήματα γ, στα οποία πετυχαίνουμε σύγκλιση. Έχουμε:

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^2 + 3y^2$$



Σχήμα 3.2: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για αρχικό σημείο το (4, 5)

$$\nabla f(x, y) = [\tfrac{2}{3}x, 6y]^T$$

Από τον αλγόριθμο Μέγιστης Καθόδου, ισχύει:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \cdot \tfrac{2}{3}x_k \;\text{ και }\; y_{k+1} = y_k - \gamma_k \cdot 6y_k$$

Στόχος είναι να επιτύχουμε $f(x_{k+1}, y_{k+1}) < f(x_k, y_k)$. Αντικαθιστώντας τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$\tfrac{1}{3}x_{k+1}^2 + 3y_{k+1}^2 < \tfrac{1}{3}x_k^2 + 3y_k^2 \Rightarrow$$
$$\tfrac{1}{3}x_k^2(1 - \tfrac{2}{3}\gamma_k)^2 + 3y_k^2(1 - 6\gamma_k)^2 < \tfrac{1}{3}x_k^2 + 3y_k^2 \Rightarrow$$
$$\tfrac{1}{3}x_k^2((1 - \tfrac{2}{3}\gamma_k)^2 - 1) + 3y_k^2((1 - 6\gamma_k)^2 - 1) < 0$$

Θέλουμε η παραπάνω ανίσωση να ισχύει για οποιαδήποτε x_k, y_k επιλέξει ο αλγόριθμος. Αυτό θα γίνει, αν θεωρήσουμε τις παρενθέσεις αρνητικές, δηλαδή:

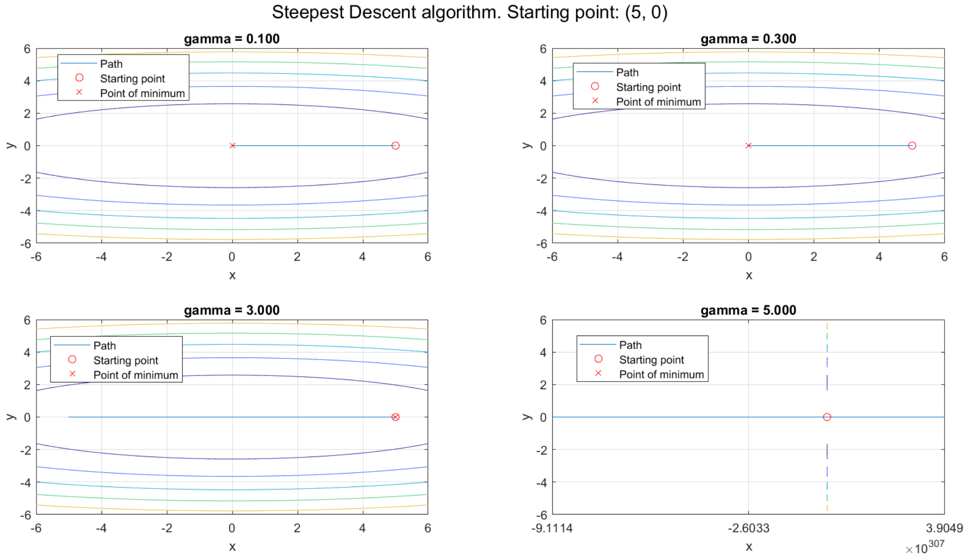
$$(1 - \tfrac{2}{3}\gamma_k)^2 - 1 < 0 \Rightarrow 0 < \gamma_k < 3 (I)$$

και

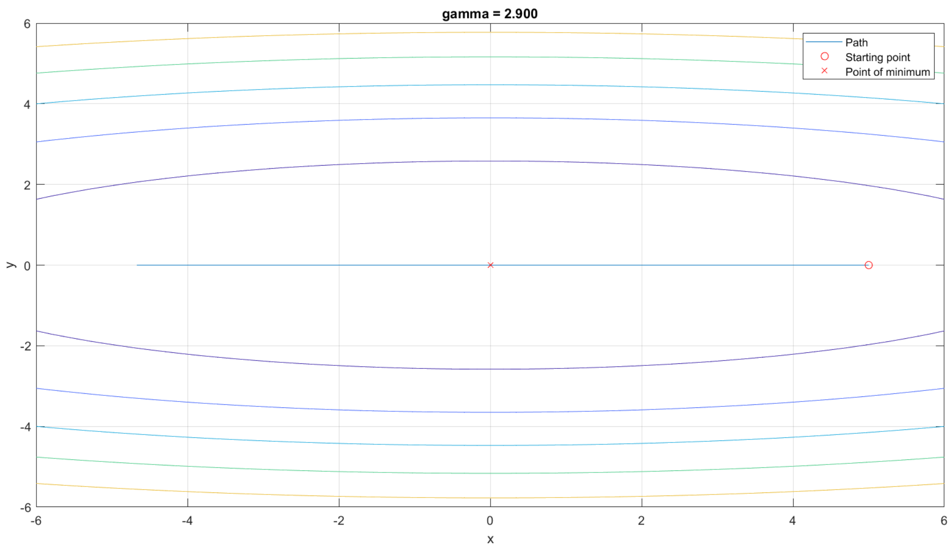
$$(1 - 6\gamma_k)^2 - 1 < 0 \Rightarrow 0 < \gamma_k < \tfrac{1}{3} (II)$$

Άρα θα έχουμε σίγουρη σύγκλιση αν το θετικό βήμα γ είναι: $\gamma < \frac{1}{3}$.

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι ο περιορισμός (I) αφορά την x_k συνιστώσα, ενώ ο (II) την y_k. Δηλαδή, αν ξεκινήσουμε από το σημείο (5,0) για γ = 2.9 < 3 θα έχουμε σύγκλιση παρόλο που δεν ικανοποιείται ο περιορισμός (II), διότι η y συνιστώσα βρίσκεται ήδη σε επιθυμητή τιμή. Στο Σχήμα 3.4 φαίνεται η επιτυχημένη αυτή σύγκλιση (αν και με ταλαντώσεις), η οποία γίνεται σε 119 επαναλήψεις.



Σχήμα 3.3: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για αρχικό σημείο το (5,0)



Σχήμα 3.4: Επιτυχημένη σύγκλιση για $\frac{1}{3} < \gamma < 3$ με αρχικό σημείο το (5,0)

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή του αλγορίθμου Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

Γίνεται εφαρμογή του αλγορίθμου για ανέχεια σφάλματος ε = 0.01 με διαφορετικά σημεία εκκίνησης και διαφορετικές παραμέτρους s και γ.

Εδώ πρέπει να σημειωθεί πως το βήμα s στον αλγόριθμο με προβολή είναι το βήμα γ του κλασικού αλγορίθμου μέγιστης καθόδου.

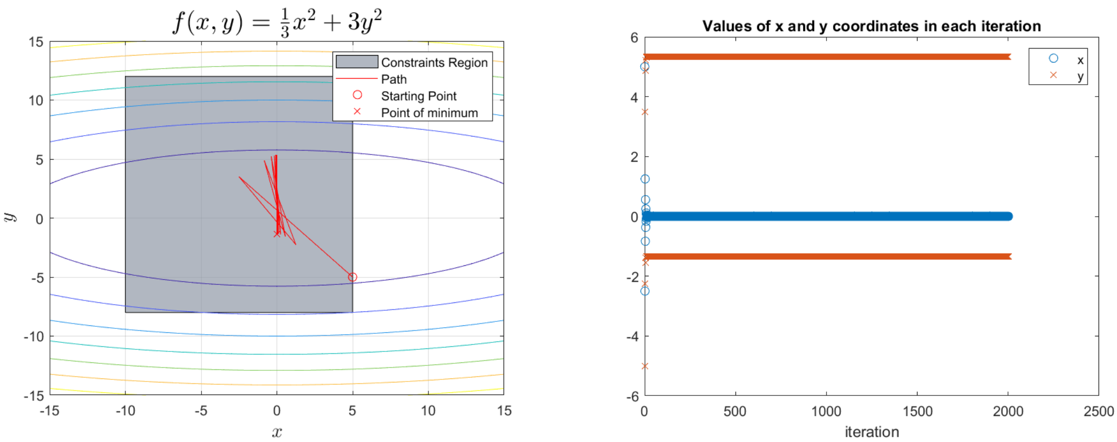
Ως άνω όριο επαναλήψεων στον αλγόριθμο πριν τον εξαναγκασμένο τερματισμό επιλέχτηκαν τα 2000 βήματα.

4.1 Σημείο εκκίνησης (5, -5) με s = 5, γ = 0.5 - Θέμα 2

Με τα δεδομένα αυτά ο αλγόριθμος παρουσιάζει την συμπεριφορά που φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Παρατηρείται έντονη ταλάντωση και μη επιτυχημένη σύγκλιση, αφού ο αλγόριθμος τερματίζει λόγω του ορίου επαναλήψεων στο σημείο (0, -1.333). Παρατηρώντας τις τιμές των σημείων από τα οποία διέρχεται ο αλγόριθμος φαίνεται πως η x συνιστώσα τείνει ορθά στο 0, ωστόσο δεν συμβαίνει το ίδιο για την συνιστώσα y. Αποτέλεσμα είναι ο αλγόριθμος να ταλαντεύεται μεταξύ των σημείων (0, 5.333) και (0, -1.333) μετά από έναν αριθμό επαναλήψεων και να μην συγκλίνει περαιτέρω.

4.1.1 Σύγκριση με το αποτέλεσμα του θέματος 1

Είναι εμφανές ότι παρά την μεγάλη τιμή του βήματος s που επιλέχτκε εδώ, ο αλγόριθμος δεν αποκλίνει υπέρμετρα, όπως συνέβαινε για μεγάλες τιμές του γ στο θέμα 1. Αυτό είναι λογικό, δεδομένου ότι μέσω του βήματος s προσδιορίζεται το σημείο $\bar{x}_k$ και έπειτα με προβολή και μέσω του βήματος γ προσδιορίζεται το νέο εφικτό σημείο x_{k+1}. Δηλαδή, η επιλογή του σημείου (x_{k+1}, y_{k+1}) γίνεται με τον συνδιασμό των βημάτων γ και s.



Σχήμα 4.1: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με προβολή για σημείο εκκίνησης το (5, -5) και s = 5, γ = 0.5

4.2 Σημείο εκκίνησης (-5, 10) με s = 15, γ = 0.1 - Θέμα 3

Με αυτά τα δεδομένα, ο αλγόριθμος επιστρέφει το (0,0) ως ελάχιστο μετά από 1561 επαναλήψεις και δίνει σωστό αποτέλεσμα, παρόλο που παρουσιάζει έντονες ταλαντώσεις (όχι όμως μεταξύ ιδίων σημείων όπως στο προηγούμενο παράδειγμα). Στο Σχήμα 4.2 φαίνεται η πορεία που ακολουθεί ο αλγόριθμος.

4.2.1 Σύγκριση με τα προηγούμενα αποτελέσματα

Εδώ, αν και το s_k τέθηκε μεγαλύτερο από εκείνο του θέματος 2, ο αλγόριθμος επιστρέφει σωστό αποτέλεσμα. Ωστόσο, αυτό δεν οφείλεται στην σωστή σύγκλιση του αλγορίθμου, αφού, όπως φαίνεται και στα γραφήματα, εμφανίζεται πολύ έντονη ταλάντωση γύρω από το (0,0). Ο αλγόριθμος εδώ δεν εγκλωβίζεται ανάμεσα σε δύο σημεία αλλά κάποια στιγμή φτάνει στο (0,0), χωρίς ωστόσο να μπορεί να εγγυηθεί η σύγκλιση σε ανάλογη περίπτωση.

4.2.2 Πρακτικός τρόπος για επιτυχημένη σύγκλιση

Ένας πρακτικός τρόπος για να συγκλίνει ο αλγόριθμος είναι η κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων s και γ, τα οποία μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^2 + 3y^2$$
$$\nabla f(x,y) = [\frac{2}{3}x, 6y]^T$$

με:

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k(\bar{x}_k - x_k) \text{ και } y_{k+1} = y_k + \gamma_k(\bar{y}_k - y_k)$$

όπου:

$$\bar{x}_k = Pr_X\{x_k - s_k \cdot \frac{2}{3}x_k\} \text{ και } \bar{y}_k = Pr_X\{y_k - s_k \cdot 6y_k\}$$

Αν θεωρήσουμε ότι τα $\bar{x}_k$ και $\bar{y}_k$ ισούνται πάντα με το όρισμα του τελεστή προβολής (δηλαδή η μέθοδος μέγιστης καθόδου δίνει πάντα σημείο εντός των περιορισμών), έχουμε:

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k(x_k - s_k\tfrac{2}{3}x_k - x_k) \Rightarrow x_{k+1} = x_k(1 - \tfrac{2}{3}\gamma_k s_k)$$
$$y_{k+1} = y_k + \gamma_k(y_k - s_k 6y_k - y_k) \Rightarrow y_{k+1} = y_k(1 - 6\gamma_k s_k)$$

Στόχος είναι να επιτύχουμε $f(x_{k+1}, y_{k+1}) < f(x_k, y_k)$. Αντικαθιστώντας τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$\tfrac{1}{3}x_{k+1}^2 + 3y_{k+1}^2 < \tfrac{1}{3}x_k^2 + 3y_k^2 \Rightarrow$$
$$\tfrac{1}{3}x_k^2(1 - \tfrac{2}{3}\gamma_k s_k)^2 + 3y_k^2(1 - 6\gamma_k s_k)^2 < \tfrac{1}{3}x_k^2 + 3y_k^2 \Rightarrow$$
$$\tfrac{1}{3}x_k^2((1 - \tfrac{2}{3}\gamma_k s_k)^2 - 1) + 3y_k^2((1 - 6\gamma_k s_k)^2 - 1) < 0$$

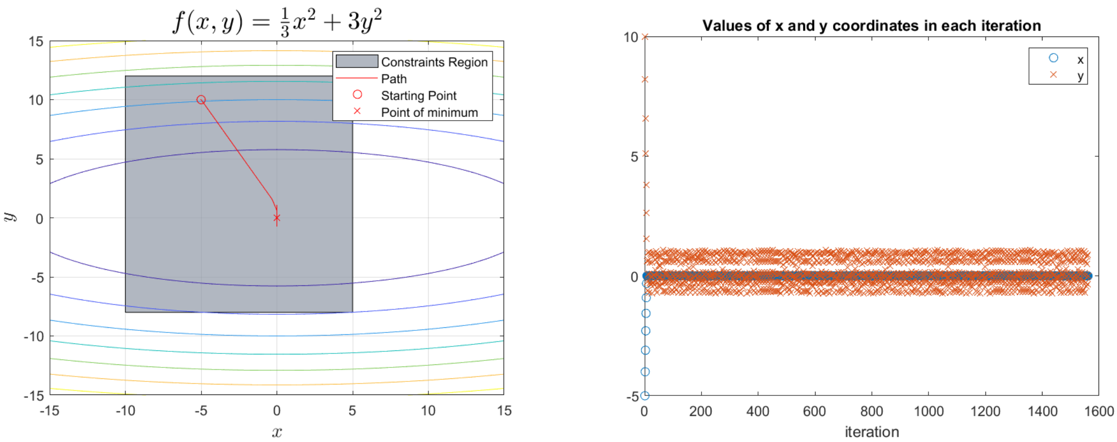
Θέλουμε η παραπάνω ανίσωση να ισχύει για οποιαδήποτε x_k, y_k επιλέξει ο αλγόριθμος. Αυτό θα γίνει, αν θεωρήσουμε τις παρενθέσεις αρνητικές, δηλαδή:

$$(1 - \tfrac{2}{3}\gamma_k s_k)^2 - 1 < 0 \Rightarrow 0 < \gamma_k s_k < 3$$

και

$$(1 - 6\gamma_k s_k)^2 - 1 < 0 \Rightarrow 0 < \gamma_k s_k < \tfrac{1}{3}$$

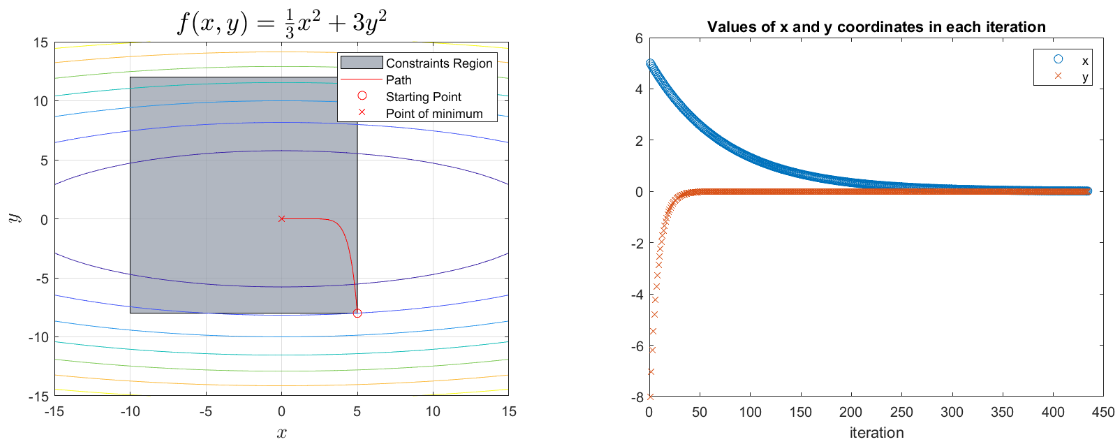
Άρα θα έχουμε εγγυημένη σύγκλιση αν το γινόμενο των βημάτων s και γ είναι: $s \cdot \gamma < \frac{1}{3}$.



Σχήμα 4.2: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με προβολή για σημείο εκκίνησης το (-5, 10) και s = 15, γ = 0.1

4.3 Σημείο εκκίνησης (8, -10) με s = 0.1, γ = 0.2 - Θέμα 4

Εδώ ως σημείο εκκίνησης επιλέγεται σημείο εκτός της περιοχής των περιορισμών. Αφού γίνει η προβολή του σημείου εντός των ορίων από τον αλγόριθμο, καθώς η αναζήτηση έξω από αυτά δεν έχει νόημα, η σύγκλιση είναι επιτυχής όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.2. Η επιτυχία της σύγκλισης ήταν αναμενόμενη αφού εδώ το γινόμενο των βημάτων είναι $\gamma \cdot s = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02 < \frac{1}{3}$ ικανοποιώντας την συνθήκη που αποδείχθηκε παραπάνω.



Σχήμα 4.3: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με προβολή για σημείο εκκίνησης το (8, -10) και s = 0.1, γ = 0.2

Κεφάλαιο 5

Κώδικας MATLAB

Στον φάκελο source μπορεί να βρεθεί ο κώδικας MATLAB. Οι υποφάκελοι είναι:

- utils: περιέχει κάποιες βασικές λειτουργίες που χρησιμοποιούνται σε διάφορα σημεία της εργασίας
- exercises: Περιέχει τα script για την επίλυση των ζητουμένων της εργασίας
- methods: Περιέχει τις δύο μεθόδους Μέγιστης Καθόδου που χρησιμοποιούνται στην επίλυση των ζητουμένων

Κάθε αρχείο MATLAB περιέχει στην αρχή σχόλια που επεξηγούν την λειτουργία και τον σκοπό του κώδικα που ακολουθεί.

Κατάλογος Σχημάτων