



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου III
Εργασία Μαθήματος 2022 - 2023

Τσαμουρίδης Αναστάσιος Αθανάσιος

(Αυτή η σελίδα αφέθηκε σκοπίμως κενή)

Περιεχόμενα

Τμήμα Α - Σύστημα χωρίς την ύπαρξη ελέγχου	3
Φασικό Πορτραίτο	3
Συμπεριφορά Συστήματος για Μηδενική Ταχύτητα	7
Προσομοίωση	9
Τμήμα Β - Έλεγχος του συστήματος	13
Θεωρητική Ανάλυση	13
Προσομοίωση	17
Παράρτημα	23
Εύρεση συχνότητας ταλάντωσης για μηδενική τριβή	23

Τμήμα Α - Σύστημα χωρίς την ύπαρξη ελέγχου

Φασικό Πορτραίτο

Η εξίσωση του συστήματος όπως δίνεται από την εκφώνηση της εργασίας δίνεται από την μαθηματική σχέση:

$$m \cdot \ddot{x} + \mu mg \cdot \text{sign}(\dot{x}) + \kappa x = 0 \quad (1)$$

Όπου $\text{sign}()$ συνάρτηση προσήμου, όπως αυτή ορίζεται στην εκφώνηση.
Η σχέση (1) γράφεται ως προς \ddot{x} ισοδύναμα:

$$\ddot{x} = -\mu g \cdot \text{sign}(\dot{x}) - \frac{\kappa}{m} x$$

Για τις μεταβλητές κατάστασης $x_1 = x$ και $x_2 = \frac{\dot{x}}{\omega}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 = x &\Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x} \Rightarrow \\ \dot{x}_1 &= \omega x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{\dot{x}}{\omega} &\Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{\ddot{x}}{\omega} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \dot{x}_2 = -\frac{\mu g}{\omega} \cdot \text{sign}(\dot{x}) - \frac{\kappa}{\omega m} x \Rightarrow \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\mu g}{\omega} \cdot \text{sign}(\omega x_2) - \frac{\kappa}{\omega m} x_1 \end{aligned}$$

Μας δίνεται ότι το ω αντιστοιχεί στην ταλάντωση του συστήματος για συντελεστή τριβής $\mu = 0$. Είναι γνωστό πως το σύστημα ελατήριο-σώμα (χωρίς την ύπαρξη τριβών) με δύναμη ελατηρίου, η οποία δίνεται ως $F_{\kappa} = -\kappa x$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$. Στο παράρτημα παρατίθεται η απόδειξη. Με βάση τα παραπάνω οι εξισώσεις των καταστάσεων γράφονται και ως:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sqrt{\frac{\kappa}{m}} x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sqrt{\frac{m}{\kappa}} \mu g \cdot \text{sign}\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} x_2\right) - \sqrt{\frac{\kappa}{m}} x_1 \end{aligned}$$

Για την χάραξη του φασικού πορτραίτου έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_2} &= \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = \frac{\omega x_2}{-\frac{\mu g}{\omega} \cdot \text{sign}(\omega x_2) - \frac{\kappa}{\omega m} x_1} \Rightarrow \\ \omega x_2 \cdot dx_2 &= \left(-\frac{\mu g}{\omega} \cdot \text{sign}(\omega x_2) - \frac{\kappa}{\omega m} x_1\right) dx_1 \quad (2) \end{aligned}$$

Παίρνουμε περιπτώσεις για το όρισμα της συνάρτησης $\text{sign}()$: $\omega x_2 = \omega \frac{\dot{x}}{\omega} = \dot{x}$, οπότε:

- Για $\dot{x} > 0 \Rightarrow \dot{x}_1 > 0 \Rightarrow x_2 > 0$, είναι $\text{sign}(\dot{x}) = 1$, άρα:

$$(2) \Rightarrow \omega x_2 \cdot dx_2 = \left(-\frac{\mu g}{\omega} - \frac{\kappa}{\omega m} x_1\right) dx_1 \Rightarrow \int \omega x_2 \cdot dx_2 = \int \left(-\frac{\mu g}{\omega} - \frac{\kappa}{\omega m} x_1\right) dx_1 \Rightarrow$$

$$\frac{\omega x_2^2}{2} = -\frac{\mu g}{\omega} x_1 - \frac{\kappa}{2\omega m} x_1^2 + c_1 \xrightarrow{\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}}$$

$$\frac{\omega x_2^2}{2} = -\frac{\mu g}{\omega} x_1 - \frac{\omega}{2} x_1^2 + c_1 \xrightarrow{\cdot 1/\omega}$$

$$\frac{x_2^2}{2} = -\frac{\mu g}{\omega^2} x_1 - \frac{x_1^2}{2} + c_1 \Rightarrow$$

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{m\mu g}{\kappa} x_1 + \frac{x_1^2}{2} = c_1 \Rightarrow$$

$$x_2^2 + \left(x_1 + \frac{m\mu g}{\kappa}\right)^2 = c_1, \quad x_2 > 0$$

Όπου c_1 σταθερά.

- Για $\dot{x} < 0 \Rightarrow \dot{x}_1 < 0 \Rightarrow x_2 < 0$, είναι $\text{sign}(\dot{x}) = -1$, άρα:

$$(2) \Rightarrow \omega x_2 \cdot dx_2 = \left(\frac{\mu g}{\omega} - \frac{\kappa}{\omega m} x_1\right) dx_1 \Rightarrow \int \omega x_2 \cdot dx_2 = \int \left(\frac{\mu g}{\omega} - \frac{\kappa}{\omega m} x_1\right) dx_1 \Rightarrow$$

$$\frac{\omega x_2^2}{2} = \frac{\mu g}{\omega} x_1 - \frac{\kappa}{2\omega m} x_1^2 + c_2 \xrightarrow{\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}}$$

$$\frac{\omega x_2^2}{2} = \frac{\mu g}{\omega} x_1 - \frac{\omega}{2} x_1^2 + c_2 \xrightarrow{\cdot 1/\omega}$$

$$\frac{x_2^2}{2} = \frac{\mu g}{\omega^2} x_1 - \frac{x_1^2}{2} + c_2 \Rightarrow$$

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{m\mu g}{\kappa} x_1 + \frac{x_1^2}{2} = c_2 \Rightarrow$$

$$x_2^2 + \left(x_1 - \frac{m\mu g}{\kappa}\right)^2 = c_2, \quad x_2 < 0$$

Όπου c_2 σταθερά.

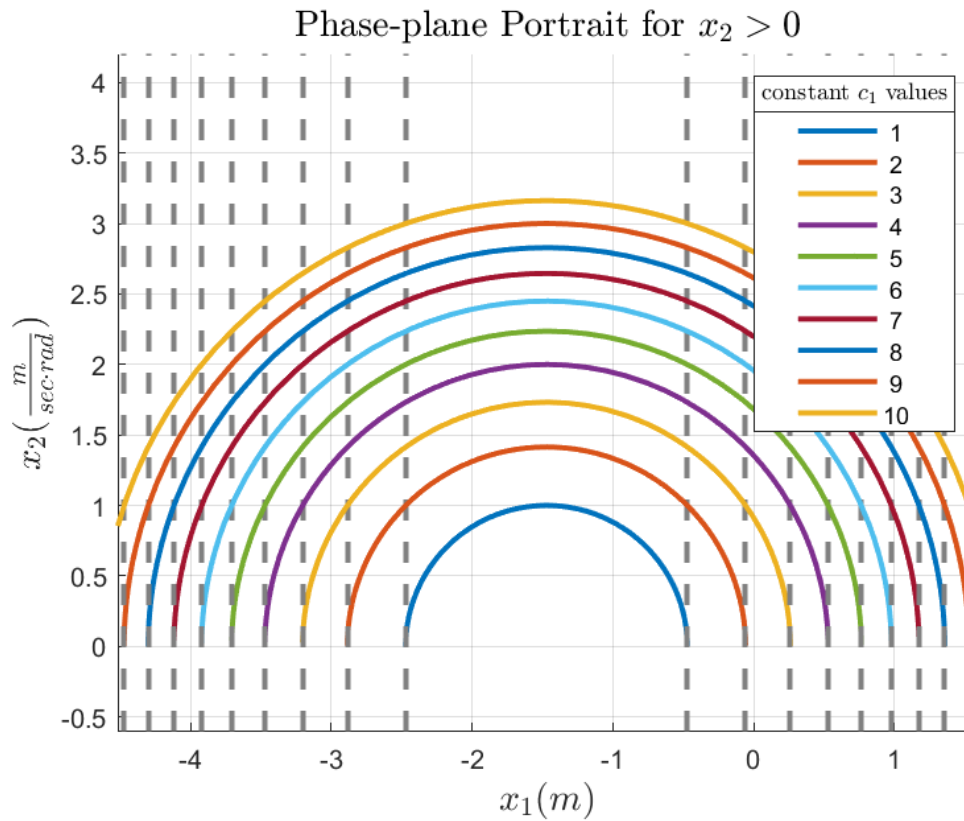
Υποσημείωση:

- Για τις παραπάνω αριθμητικές πράξεις ισχύει ότι πολλαπλασιασμός της σταθεράς $c_i, i = 1, 2$ με σταθερό αριθμό θα δώσει ξανά σταθερά. Για αυτό τον λόγο δεν αντικαταστάθηκε το c_i με άλλον αριθμό c_j .
- Η συχνότητα ταλάντωσης είναι σταθερά > 0 , οπότε επιτρέπεται η διαίρεση με αυτή (είναι $\omega \neq 0$).

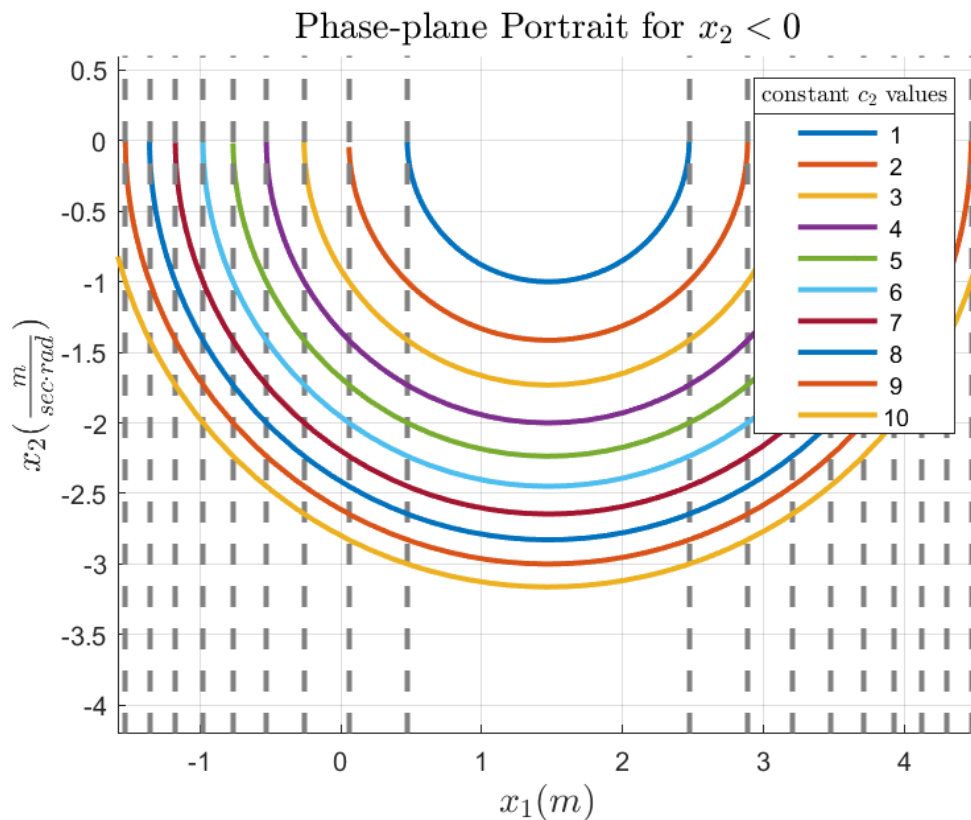
Επομένως οι τροχιές του συστήματος είναι τμήματα κύκλου. Για θετικά x_2 έχουμε κύκλο με κέντρο το $-\frac{m\mu g}{\kappa}$, και φορά τροχιάς προς τα θετικά x_1 , αφού $x_2 > 0 \Rightarrow \dot{x}_1 > 0 \Rightarrow x_1$ αυξάνεται. Για αρνητικά x_2 έχουμε κύκλο με κέντρο το $\frac{m\mu g}{\kappa}$, και φορά τροχιάς προς τα αρνητικά x_1 , αφού $x_2 < 0 \Rightarrow \dot{x}_1 < 0 \Rightarrow x_1$ μειώνεται. Στα σχήματα που ακολουθούν, εμφανίζονται οι φασικές τροχιές για τις τιμές που δίνονται στον πίνακα 1 και για διάφορες τιμές του c_1 .

Παράμετρος κ	Περιγραφή	Τιμή
κ	Σταθερά Ελατηρίου	5 N/m
m	Μάζα αντικειμένου	1 kg
μ	Συντελεστής τριβής	0.75
g	Επιτάχυνση της βαρύτητας	9.81 m/s ²

Πίνακας 1: Τιμές Παραμέτρων Συστήματος



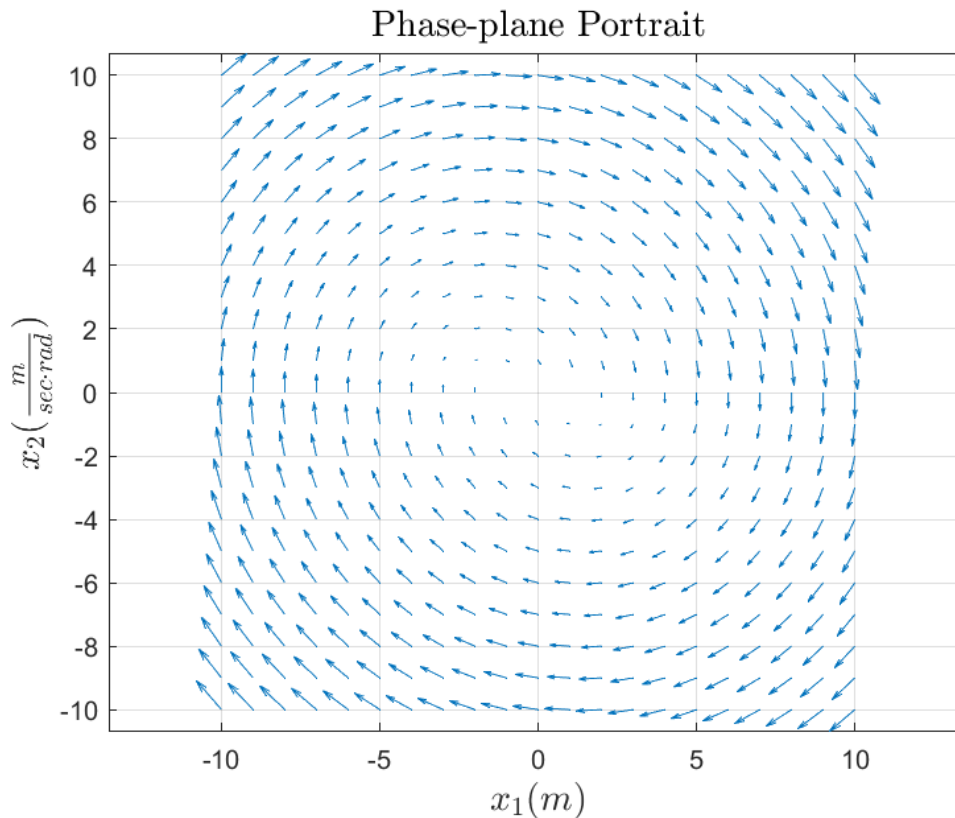
Εικόνα 1: Φασικό πορτραίτο για $x_2 > 0$. Το σύστημα κινείται προς τα θετικά x_1 , αφού $x_2 > 0 \Rightarrow \dot{x}_1 > 0 \Rightarrow x_1$ αυξάνεται.



Εικόνα 2: Φασικό πορτραίτο για $x_2 < 0$. Το σύστημα κινείται προς τα αρνητικά x_1 , αφού $x_2 < 0 \Rightarrow \dot{x}_1 < 0 \Rightarrow x_1$ μειώνεται.

Το φασικό πορτραίτο μπορεί να παρασταθεί και με την εντολή `quiver` της MATLAB, η οποία παράγει ένα γράφημα διανυσματικού πεδίου με βάση την διαφορική εξίσωση του συστήματος.

Η περίπτωση που $x_2 = 0$, εξετάζεται αναλυτικά στο ερώτημα ii. Το παραγόμενο γράφημα παρατίθεται παρακάτω:



Εικόνα 3: Το Φασικό Πορτραίτο του Συστήματος σε μορφή διανυσματικού πεδίου και αγνοώντας την συμπεριφορά του συστήματος για $x_2 = 0$.

Συμπεριφορά Συστήματος για Μηδενική Ταχύτητα

Για την διερεύνηση της συμπεριφοράς του ελατηρίου για $\dot{x} = 0$, λαμβάνονται περιπτώσεις για τις διάφορες καταστάσεις στις οποίες μπορεί να περιέλθει το σύστημα. Αρχικά, τονίζεται πως όταν $\dot{x} = 0$, προφανώς το σύστημα έχει μηδενική ταχύτητα και δεν είναι γνωστή η τιμή της συνάρτησης προσήμου.

- **Περίπτωση 1:** Μηδενική επιμήκυνση του ελατηρίου ($x \neq 0$)

Για μηδενική επιμήκυνση, το σώμα βρίσκεται στην θέση $x = 0$. Σε αυτή την θέση το σώμα δεν δέχεται δύναμη ελατηρίου επομένως θα πρέπει να παραμένει ακίνητο εφόσον δεν του ασκείται κάποια άλλη εξωτερική δύναμη. Η μοναδική δύναμη που ίσως ασκείται στο ελατήριο είναι στατική τριβή. Όμως, η θεωρία της κλασικής μηχανικής ορίζει ότι η στατική τριβή είναι:

$$|F_{\text{static}}| \leq |F_{\text{out}}|$$

όπου F_{out} : η εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σώμα. Άρα για $F_{\text{out}} = 0$ προκύπτει μηδενική τριβή. Άρα, το σώμα έχει θέση ισορροπία για $(x, \dot{x}) = (0, 0)$.

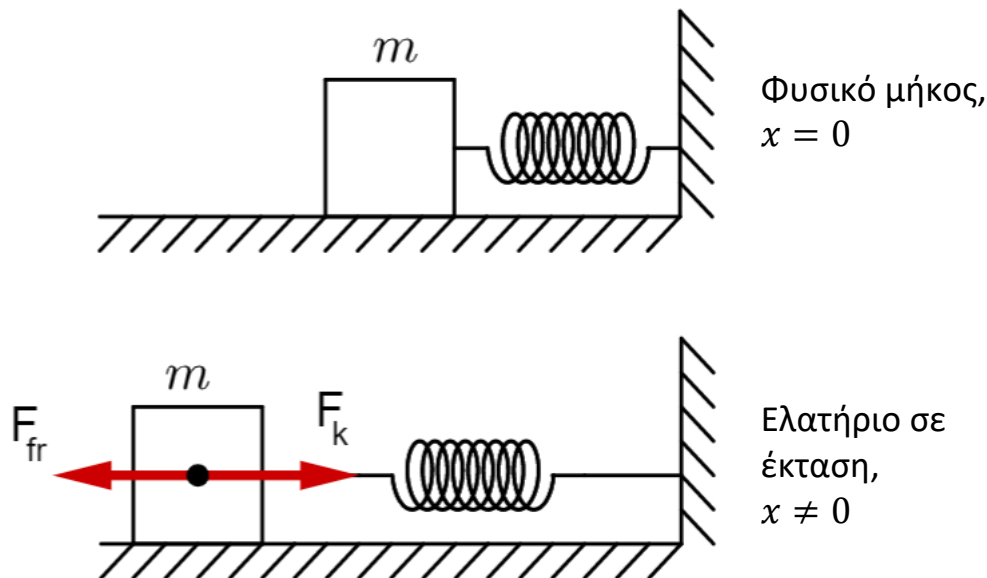
- **Περίπτωση 2:** Σώμα σε θέση $x \neq 0$

Η περίπτωση αυτή φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Στο σώμα σημειώνονται οι δύο δυνάμεις που δέχεται. Θεωρούμε ότι το σώμα αφήνεται στην θέση αυτή με μηδενική ταχύτητα και επιθυμούμε να βρούμε αν θα ξεκινήσει κίνηση του σώματος ή αν αυτό θα παραμείνει στην θέση που

αφέθηκε. Η συνθήκη για την εκκίνηση της κίνησης είναι το σώμα να βρίσκεται σε τέτοια θέση, ώστε η δύναμη ελατηρίου να είναι μεγαλύτερη από την τριβή ($F_{fr} \leq F_k$). Οπότε και το σώμα θα ξεκινήσει να κινείται αμέσως μετά την χρονική στιγμή 0. Άρα την στιγμή $t \rightarrow 0^+$ η συνάρτηση προσήμου γίνεται ίση με 1 ή -1, όπως εξηγείται παρακάτω. Στην οριακή περίπτωση έχουμε $|F_{fr}| = |F_k| \Rightarrow |kx| = |\mu mg| \Rightarrow x = \pm \frac{\mu mg}{k}$. Δηλαδή για επιμήκυνση πέραν του $x = \pm \frac{\mu mg}{k}$ το σώμα τείνει να κινείται. Αντίθετα για $x \in (-\frac{\mu mg}{k}, \frac{\mu mg}{k}) = A$, το σώμα ισορροπεί αφού η τριβή εξισορροπεί την δύναμη του ελατηρίου.

Η έξοδος της συνάρτησης $\text{sign}()$ σε περίπτωση που το σώμα αφεθεί πέραν του διαστήματος A θα είναι 1 αν το x είναι θετικό, ενώ θα είναι -1, αν το x είναι αρνητικό, ώστε η τριβή να έχει την προβλεπόμενη, από την Φυσική, φορά. Αν το σώμα αφεθεί εντός του διαστήματος A η έξοδος της συνάρτησης προσήμου προκύπτει σύμφωνα με την διαφορική εξίσωση του συστήματος:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\mu g \cdot \text{sign}(0) - \frac{k}{m} x \stackrel{\ddot{x}=0}{\Rightarrow} \\ \mu g \cdot \text{sign}(0) &= -\frac{k}{m} x \Rightarrow \\ \text{sign}(0) &= -\frac{k}{m\mu g} x \end{aligned}$$



Εικόνα 4: Μελέτη του συστήματος για θέση $x \neq 0$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι το σύνολο:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \{x_1 \in (-\frac{\mu mg}{k}, \frac{\mu mg}{k}) \text{ και } x_2 = 0\}.$$

Το σύνολο των σημείων ισορροπίας είναι ευσταθές, διότι για οποιαδήποτε μετατόπιση της μάζας μακριά από το $x = 0$, θα εμφανίζεται δύναμη ελατηρίου η οποία θα τείνει να επαναφέρει το σώμα στο $x = 0$ και επομένως η θέση ή η ταχύτητα του σώματος δεν γίνεται να απειριστούν. Αντίθετα, έχουν μειούμενη τιμή με την

αύξηση του χρόνου. Συνεπώς, ικανοποιείται ο ορισμός της ευστάθειας σημείου ισορροπίας, για τον οποίο ισχύει:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \\ ||x_0 - x_\varepsilon|| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow ||x(t; x_0, t_0) - x_\varepsilon|| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

Όσον αφορά την συνάρτηση προσήμου για το υπό μελέτη σύστημα, αυτή μπορεί να περιγραφεί ως:

$$\text{sign}(\dot{x}) = \begin{cases} -\frac{\kappa}{\mu mg}, & \dot{x} = 0 \text{ και } x \in \left(-\frac{\mu mg}{\kappa}, \frac{\mu mg}{\kappa}\right) \\ \text{sign_extended}(\dot{x}), & \text{Αλλιώς} \end{cases}$$

Όπου ως `sign_extended` ορίζουμε την κλασική συνάρτηση προσήμου, με την ιδιότητα να επιστρέφει 0 για μηδενικό όρισμα. Δηλαδή:

$$\text{sign_extended}(\dot{x}) = \begin{cases} 0, & \dot{x} = 0 \\ 1, & \dot{x} > 0 \\ -1, & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

Προσομοίωση

Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του συστήματος. Ο πίνακας 2 παρουσιάζει τις αρχικές συνθήκες των προσομοιώσεων, όπως αυτές δίνονται στην εκφώνηση της εργασίας.

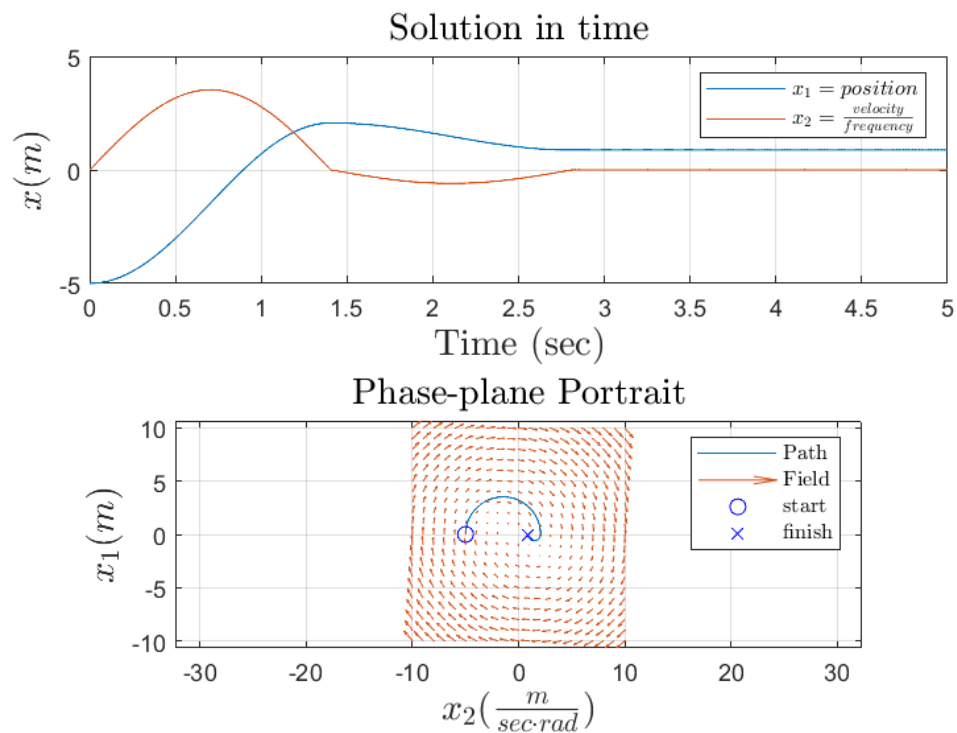
Αριθμός Προσομοίωσης	Αρχική Θέση	Αρχική Ταχύτητα
1	$x(0) = -5\text{m}$	$\dot{x} = 0 \text{ m/sec}$
2	$x(0) = 3\text{m}$	$\dot{x} = 0 \text{ m/sec}$
3	$x(0) = 0\text{m}$	$\dot{x} = -5 \text{ m/sec}$
4	$x(0) = -6\text{m}$	$\dot{x} = 6 \text{ m/sec}$
5	$x(0) = 4\text{m}$	$\dot{x} = 6 \text{ m/sec}$

Πίνακας 2: Αρχικές Συνθήκες Προσομοιώσεων

Εδώ σημειώνεται ότι οι αρχικές συνθήκες δόθηκαν σε μονάδες μέτρησης m/sec. Για τον λόγο αυτό και επειδή η x_2 ορίστηκε με την βοήθεια της συχνότητας ω , οι αρχικές συνθήκες στην προσομοίωση μετασχηματίστηκαν κατάλληλα.

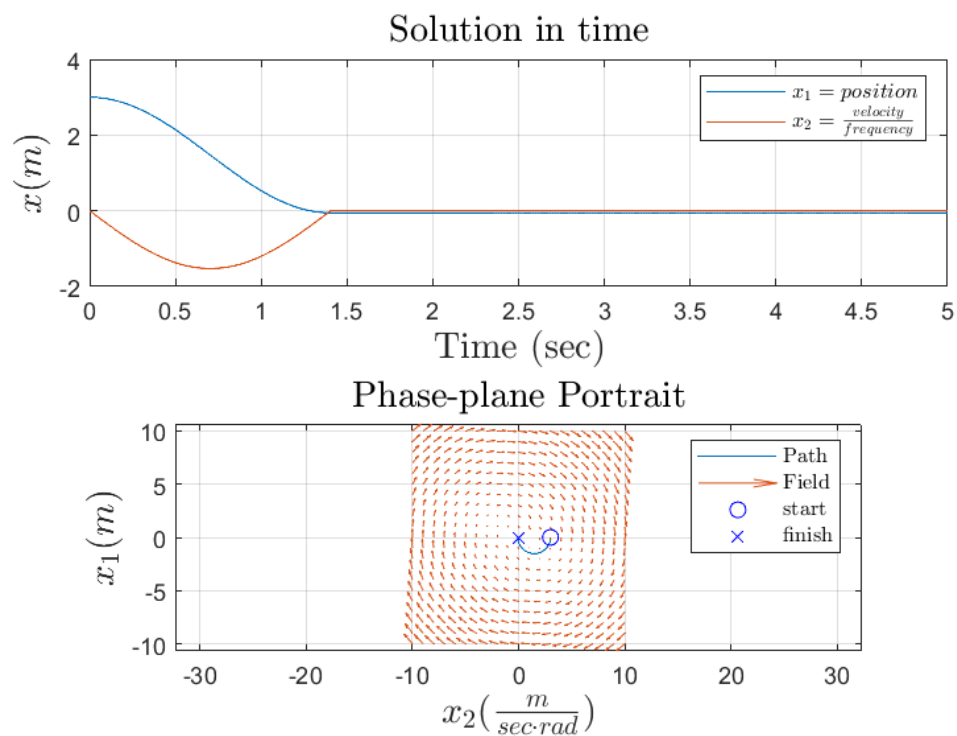
Προσομοίωση 1

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (-5m, 0m/(sec * rad))$



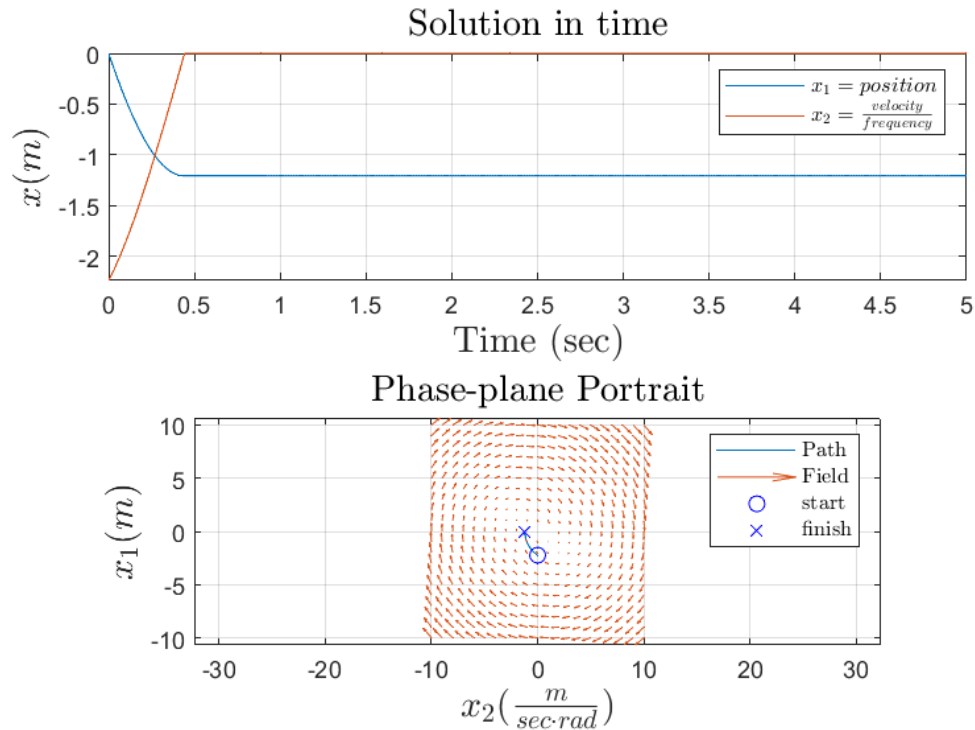
Προσομοίωση 2

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (3m, 0m/(sec * rad))$



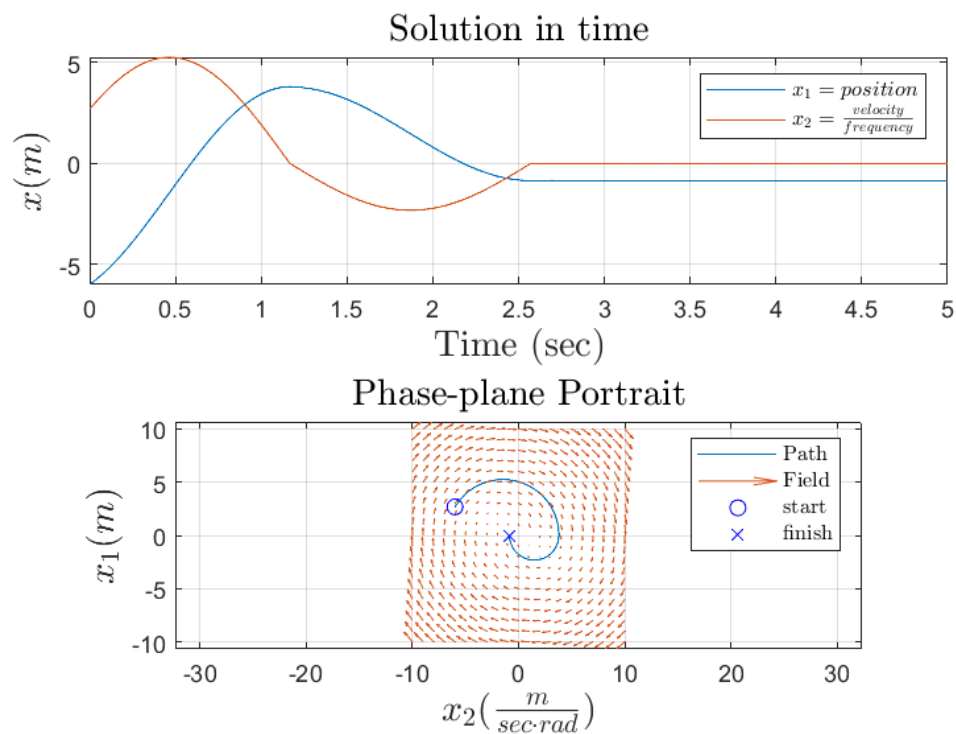
Προσομείωση 3

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (0m, -2.236068e + 00m/(sec * rad))$



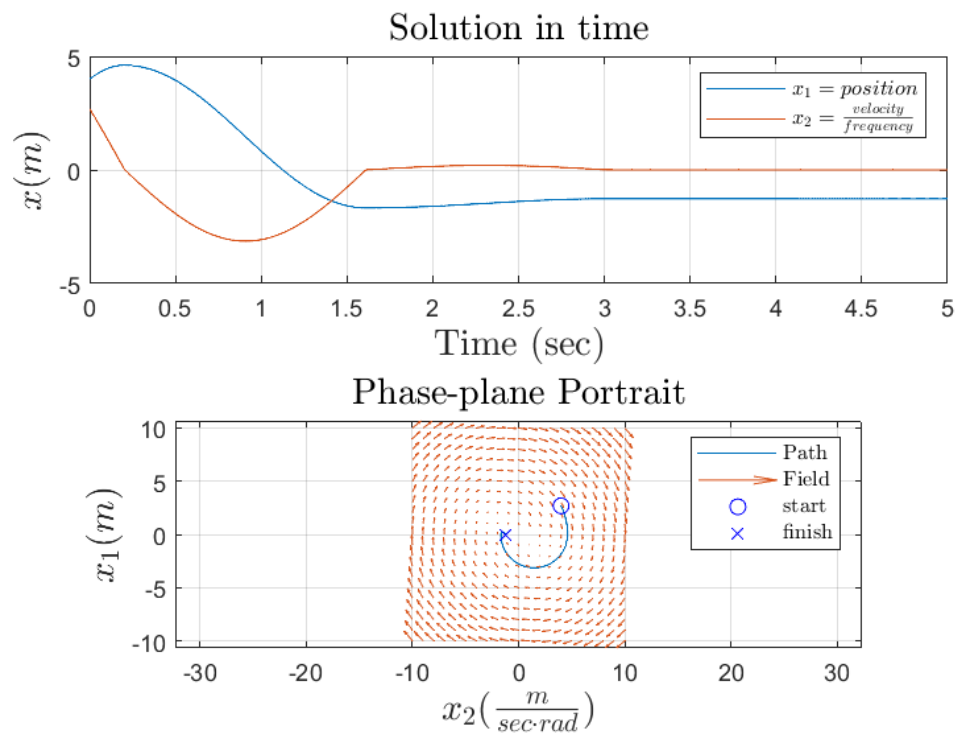
Προσομείωση 4

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (-6m, 2.683282e + 00m/(sec * rad))$



Προσομοίωση 5

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (4m, 2.683282e + 00m/(sec * rad))$



Είναι εμφανές ότι το σύστημα ακολουθεί το φασικό πορτραίτο που σχεδιάστηκε στο ερώτημα Α (στο οποίο και αγνοήθηκε η συμπεριφορά για $x_2 = 0$). Στα γραφήματα διακρίνονται επίσης τα σημεία ισορροπίας (της μορφής $(\alpha, 0)$, με $\alpha \in B$, όπου B διάστημα που ορίστηκε στο ερώτημα Aii), στα οποία σταθεροποιείται το σύστημα.

Τμήμα Β - Έλεγχος του συστήματος

Στο τμήμα αυτό γίνεται ανάλυση για μη γραμμικό ελατήριο με συνάρτηση της μορφής $F_k = -f(x)$ και είσοδο ελέγχου $F = u$. Η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$m\ddot{x} + \mu mg \text{sign}(\dot{x}) + f(x) = u \quad (3)$$

Η $f(x)$ επιλέγεται να έχει 2 δυνατές μορφές:

- Σενάριο 1: γνωστή μορφή με εξίσωση:

$$f(x) = (\kappa + \Delta\kappa(1 - \exp(-\beta t))) x(1 + \alpha x^2)$$
- Σενάριο 2: άγνωστη μορφή με την ιδιότητα:

$$|f(x)| \leq 22|x|^3$$

Οι παράμετροι του συστήματος είναι άγνωστες, και ισχύει:

Παράμετρος	Περιγραφή	Κάτω Όριο	Άνω Όριο
m	Μάζα αντικειμένου	0.5kg	2kg
μ	Συντελεστής τριβής	0.25	1
κ	Παράμετρος ελατηρίου	4N/m	10N/m
Δκ	Παράμετρος ελατηρίου	0.25N/m	1N/m
α	Παράμετρος ελατηρίου	0.5	1
β	Παράμετρος ελατηρίου	0.01	0.05

Πίνακας 3: Όρια Αγνώστων Παραμέτρων

Θεωρητική Ανάλυση

Θα σχεδιαστεί ελεγκτής για τα δύο σενάρια που αναφέρθηκαν προηγουμένως μέσω της μεθόδου ολίσθησης.

Ορίζουμε το σφάλμα ως:

$$e = x - x_d$$

Και προκύπτει:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_d$$

Επιφάνεια ολίσθησης:

$$s = \dot{e} + \lambda e$$

$$\dot{s} = \ddot{e} + \lambda \dot{e} \Rightarrow \dot{s} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e}$$

Από την εξίσωση (3) έχουμε:

$$\ddot{x} = \frac{u}{m} - \frac{f(x)}{m} - \mu g \text{sign}(\dot{x})$$

Άρα για την \dot{s} προκύπτει η εξίσωση:

$$\dot{s} = \frac{1}{m}(u - f(x)) - \mu g \text{sign}(\dot{x}) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e}$$

Αν υπήρχε πλήρη γνώση της συνάρτησης $f(x)$, η επιλογή ελεγκτή θα ήταν:

$$u = u_{eq} = f(x) + m(\mu g \text{sign}(\dot{x}) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e})$$

Σημείωση: Για αποφυγή σύγχυσης θα γίνει χρήση του συμβολισμού sign2 για να δηλωθεί η συνάρτηση προσήμου που ορίστηκε στο τμήμα Α. Ενώ ως sign συμβολίζεται η συνάρτηση προσήμου με απροσδιόριστη συμπεριφορά για μηδενικό όρισμα.

Λόγω της μη γνώσης της f , θεωρούμε τον ελεγκτή:

$$u = \widehat{u}_{eq} - \rho \cdot \text{sign}(s) = \hat{f}(x) + \hat{m}(\hat{\mu} \cdot g \cdot \text{sign2}(\dot{x}) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) - \rho \text{sign}(s) \Rightarrow$$

ΣΕΝΑΡΙΟ 1:

Αρχικά γράφουμε την $f(x)$ ισοδύναμα ως:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\kappa + \Delta\kappa(1 - \exp(-\beta t)))x(1 + \alpha x^2) \Rightarrow \\ f(x) &= \kappa x + \kappa \alpha x^3 + \Delta\kappa \cdot x + \Delta\kappa \cdot x^3 - \Delta\kappa \cdot e^{-\beta t} x - \Delta\kappa \cdot \alpha e^{-\beta t} x^3 \end{aligned}$$

Ο ελεγκτής γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} u &= \hat{\kappa}x + \hat{\kappa}\hat{\alpha}x^3 + \widehat{\Delta\kappa} \cdot x + \widehat{\Delta\kappa} \cdot x^3 - \widehat{\Delta\kappa} \cdot e^{-\hat{\beta}t}x - \widehat{\Delta\kappa} \cdot \hat{\alpha}e^{-\hat{\beta}t}x^3 \\ &\quad + \hat{m}(\hat{\mu} \cdot g \cdot \text{sign2}(\dot{x}) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) - \rho \text{sign}(s) \quad (3) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (3) και (3), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \mu m g \text{sign}(\dot{x}) + \kappa x + \kappa \alpha x^3 + \Delta\kappa \cdot x + \Delta\kappa \cdot x^3 - \Delta\kappa \cdot e^{-\beta t}x - \Delta\kappa \cdot \alpha e^{-\beta t}x^3 \\ = \hat{\kappa}x + \hat{\kappa}\hat{\alpha}x^3 + \widehat{\Delta\kappa} \cdot x + \widehat{\Delta\kappa} \cdot x^3 - \widehat{\Delta\kappa} \cdot e^{-\hat{\beta}t}x - \widehat{\Delta\kappa} \cdot \hat{\alpha}e^{-\hat{\beta}t}x^3 \\ + \hat{m}\hat{\mu} \cdot g \cdot \text{sign2}(\dot{x}) + \hat{m}(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) - \rho \text{sign}(s) \xrightarrow{\pm m(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e})} \\ m(\ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e}) = x(\hat{\kappa} - \kappa) + x^3(\hat{\kappa}\hat{\alpha}) + x(\widehat{\Delta\kappa} - \Delta\kappa) + x^3(\widehat{\Delta\kappa} - \Delta\kappa) \\ + x(\Delta\kappa \cdot e^{-\beta t} - \widehat{\Delta\kappa} \cdot e^{-\hat{\beta}t}) + x(\Delta\kappa \cdot \alpha e^{-\beta t} - \widehat{\Delta\kappa} \cdot \hat{\alpha}e^{-\hat{\beta}t}) + (\hat{m}\hat{\mu} - m\mu) \cdot g \cdot \text{sign2}(\dot{x}) \\ + (m - \hat{m})(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) - \rho \text{sign}(s) \xrightarrow{s = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m s \dot{s} &= s(x(\hat{\kappa} - \kappa) + x^3(\hat{\kappa}\hat{\alpha}) + x(\widehat{\Delta\kappa} - \Delta\kappa) + x^3(\widehat{\Delta\kappa} - \Delta\kappa) \\ &\quad + x(\Delta\kappa \cdot e^{-\beta t} - \widehat{\Delta\kappa} \cdot e^{-\hat{\beta}t}) + x(\Delta\kappa \cdot \alpha e^{-\beta t} - \widehat{\Delta\kappa} \cdot \hat{\alpha}e^{-\hat{\beta}t}) \\ &\quad + (\hat{m}\hat{\mu} - m\mu) \cdot \text{sign2}(\dot{x}) \cdot g + (m - \hat{m})(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e})) - \rho \cdot s \cdot \text{sign}(s) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$m s \dot{s} \leq |s|(|x||\hat{\kappa} - \kappa| + |x^3||\hat{\kappa}\hat{\alpha}| + |x||\widehat{\Delta\kappa} - \Delta\kappa| + |x^3||\widehat{\Delta\kappa} - \Delta\kappa|$$

$$+|x||\Delta\kappa \cdot e^{-\beta t} - \widehat{\Delta\kappa} \cdot e^{-\widehat{\beta}t}| + |x||\Delta\kappa \cdot \alpha e^{-\beta t} - \widehat{\Delta\kappa} \cdot \widehat{\alpha} e^{-\widehat{\beta}t}| \\ + |\widehat{m}\widehat{\mu} - m\mu| \cdot |\text{sign}2(\dot{x})| \cdot g + |m - \widehat{m}||\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}| - \rho) \quad (4)$$

Από τον πίνακα των ορίων των παραμέτρων έχουμε:

Παράμετρος	Κάτω Όριο	Άνω Όριο	Εκτίμηση	Μέγιστο απόλυτο σφάλμα
m	0.5kg	2kg	5/4	3/4
μ	0.25	1	5/8	3/8
κ	4N/m	10N/m	7	3
Δκ	0.25N/m	1N/m	5/8	3/8
α	0.5	1	3/4	1/4
β	0.01	0.05	0.03	0.02

Πίνακας 4: Εκτιμήσεις παραμέτρων και μέγιστα απόλυτα σφάλματα

Για την περίπτωση του όρου $e^{-\beta t}$, λόγω της ύπαρξης του όρου του χρόνου, μπορούμε να δεχούμε την εξής σχέση:

$$0.01 < \beta < 0.05 \Rightarrow \beta > 0 \Rightarrow 0 < e^{-\beta t} < 1 \Rightarrow \\ e^{-\widehat{\beta}t} = 0.5 \Rightarrow \\ |e^{-\beta t} - e^{-\widehat{\beta}t}| < 0.5$$

Σημειώνεται ότι στην προσομοίωση έγινε χρήση της εκτίμησης $\widehat{\beta} = 0.03$

Για τους υπόλοιπους όρους, οι οποίοι εμφανίζονται, με βάση τις παραπάνω εκτιμήσεις και τα παραπάνω όρια, παίρνουμε:

Όρος	Κάτω Όριο	Άνω Όριο	Εκτίμηση	Μέγιστο απόλυτο σφάλμα
κα	2	10	21/4	19/4
μμ	1/8	2	25/32	39/32
Δκ$e^{-\beta t}$	0	1	5/16	11/16
Δκ · α · $e^{-\beta t}$	0	1	15/64	49/64
μμ · sign2(\dot{x})	-1/8	2	0	2

Πίνακας 5: Εκτιμήσεις υπόλοιπων όρων της ανίσωσης

Έτσι η ανίσωση (4) γράφεται:

$$ms\dot{s} \leq |s|(3|x| + \frac{19}{4}|x^3| + \frac{3}{8}|x| + \frac{3}{8}|x^3| + \frac{11}{16}|x| + \frac{49}{64}|x| \\ + 2 \cdot g + \frac{3}{4}|\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}| - \rho) \Rightarrow \\ ms\dot{s} \leq |s|(|x|\frac{309}{64} + |x^3|\frac{41}{8} + 2 \cdot g + \frac{3}{4}|\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}| - \rho)$$

Επιλέγοντας $\rho = |x| \frac{309}{64} + |x^3| \frac{41}{8} + 2 \cdot g + \frac{3}{4} |\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}|$ ο ελεγκτής επιλέγεται ως:

$$u = 7x + \frac{21}{4}x^3 + \frac{5}{8} \cdot x + \frac{5}{8} \cdot x^3 - \frac{5}{16}x - \frac{15}{64}x^3 + \frac{5}{4}(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) - \left(|x| \frac{309}{64} + |x^3| \frac{41}{8} + 2 \cdot g + \frac{3}{4} |\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}| \right) \cdot \text{sign}(s)$$

ΣΕΝΑΡΙΟ 2:

Για το σενάριο 2 γνωρίζουμε ότι:

$$|f(x)| \leq 22|x|^3$$

Η εκτίμηση της δύναμης f επιλέγεται ως $\hat{f}(x) = 0$.

Ο ελεγκτής γράφεται:

$$\begin{aligned} u &= \hat{f}(x) + \hat{m}(\hat{\mu} \cdot g \cdot \text{sign}2(\dot{x}) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) - \rho \text{sign}(s) \xrightarrow{(2)} \\ m\ddot{x} + \mu m g \text{sign}(\dot{x}) + f(x) &= \hat{f}(x) + \hat{m}(\hat{\mu} \cdot g \cdot \text{sign}2(\dot{x}) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) - \rho \text{sign}(s) \xrightarrow{\pm m(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e})} \\ m(\ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e}) &= (f(x) - \hat{f}(x)) + (\hat{m}\hat{\mu} - m\mu) \cdot g \cdot \text{sign}2(\dot{x}) \\ &\quad + (m - \hat{m})(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) - \rho \text{sign}(s) \xrightarrow{s = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e}} \\ m \cdot s \cdot \dot{s} &= s((f(x) - \hat{f}(x)) + (\hat{m}\hat{\mu} - m\mu) \cdot g \cdot \text{sign}2(\dot{x}) \\ &\quad + (m - \hat{m})(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e})) - \rho s \cdot \text{sign}(s) \Rightarrow \\ m \cdot s \cdot \dot{s} &< |s| \left(|f(x) - \hat{f}(x)| + |\hat{m}\hat{\mu} - m\mu| |\text{sign}2(\dot{x})| \cdot g + |m - \hat{m}| |\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}| - \rho \right) \Rightarrow \\ m \cdot s \cdot \dot{s} &< |s| \left(22|x^3| + 2 \cdot g + \frac{3}{4} |\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}| - \rho \right) \end{aligned}$$

Επιλέγεται $\rho = 22|x^3| + 2 \cdot g + \frac{3}{4} |\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}|$, άρα ο ελεγκτής γράφεται:

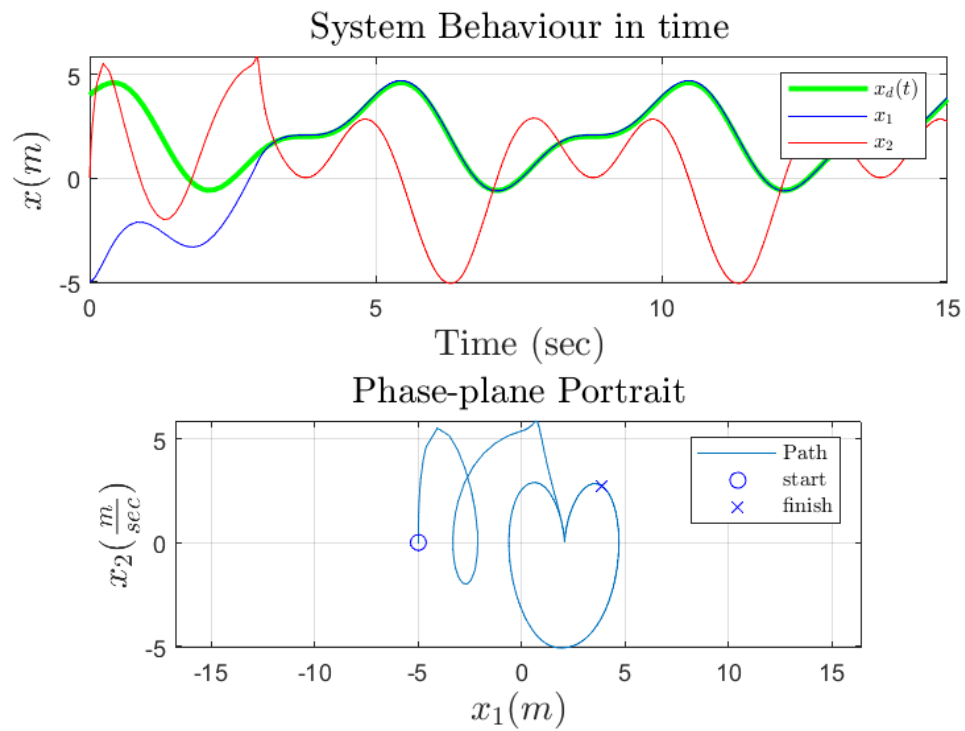
$$u = \hat{f}(x) + \hat{m} \cdot \hat{\mu} \cdot g \cdot \text{sign}2(\dot{x}) + \hat{m}(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) - (22|x^3| + 2 \cdot g + \frac{3}{4} |\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}|) \text{sign}(s)$$

Προσομοίωση

ΣΕΝΑΡΙΟ 1:

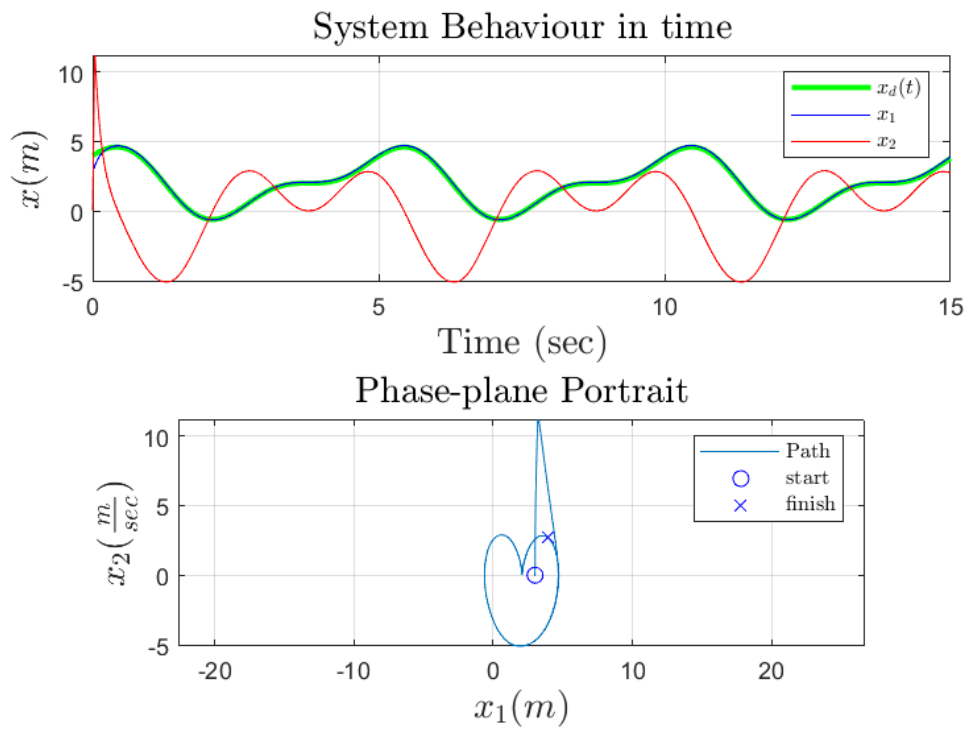
Προσομοίωση 1

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (-5m, 0m/sec)$



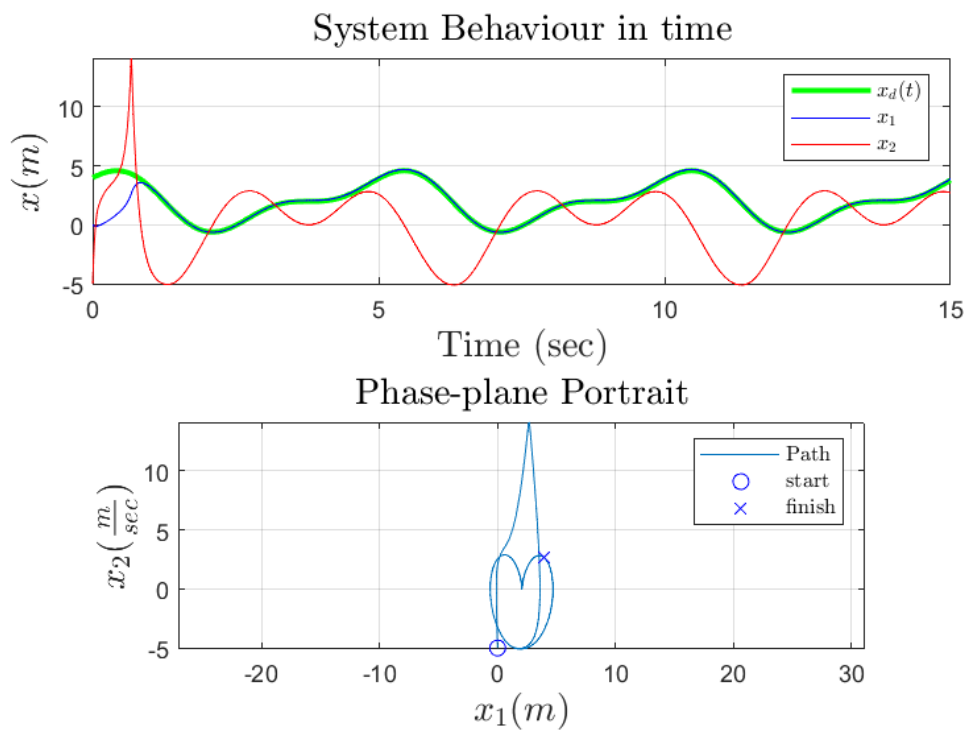
Προσομοίωση 2

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (3m, 0m/sec)$



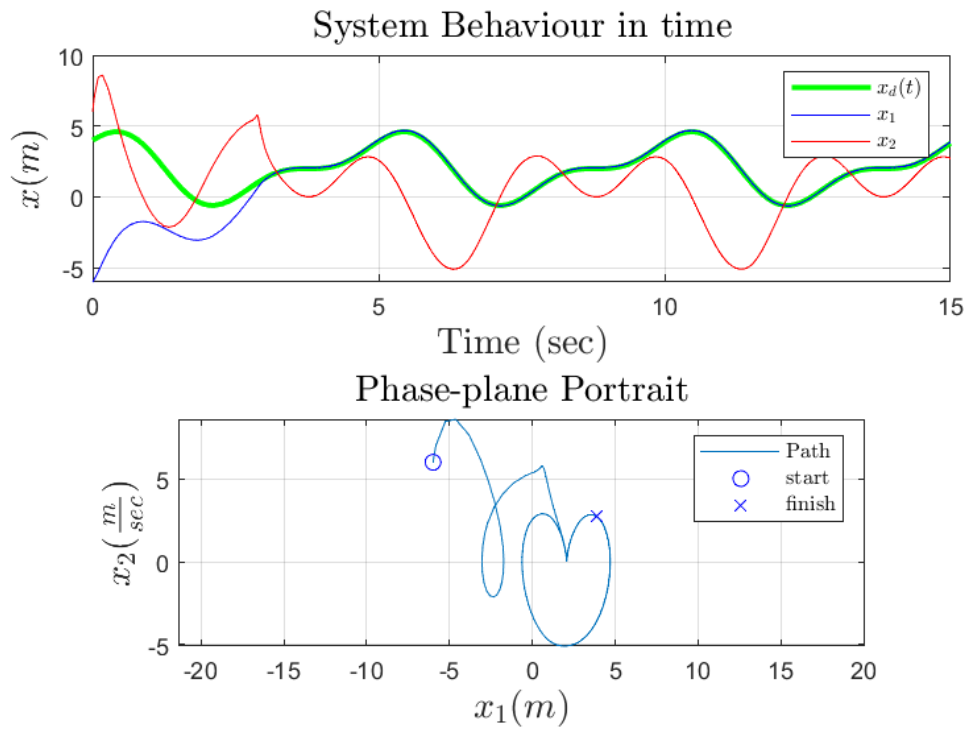
Προσομοίωση 3

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (0m, -5m/sec)$



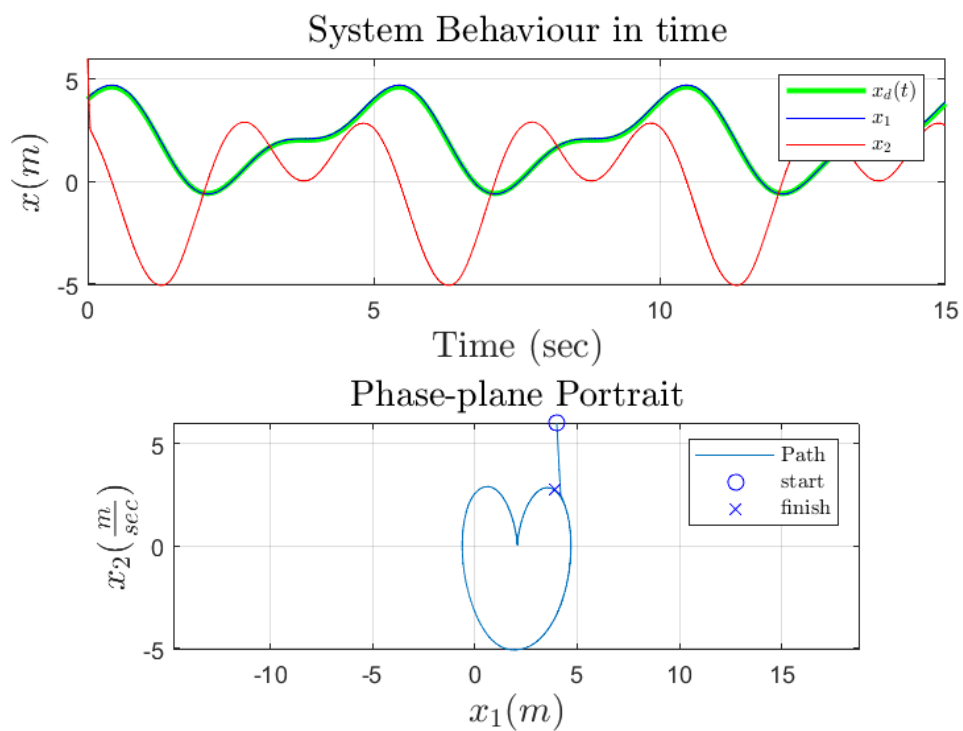
Προσομοίωση 4

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (-6m, 6m/sec)$



Προσομοίωση 5

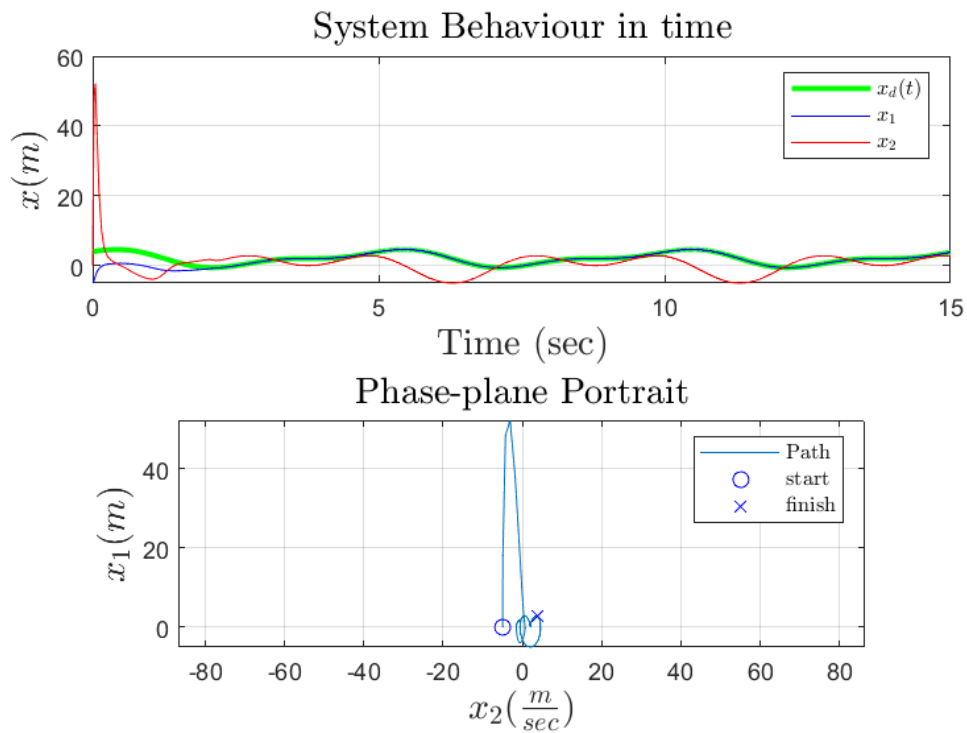
Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (4m, 6m/sec)$



ΣΕΝΑΡΙΟ 2:

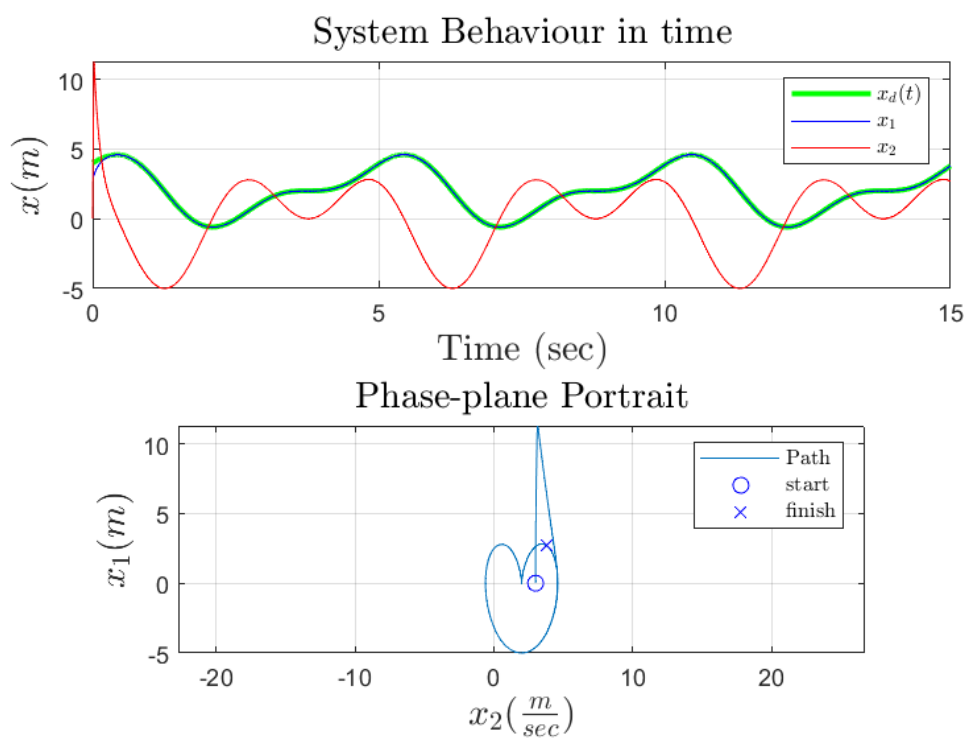
Προσομοίωση 1

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (-5m, 0m/sec)$



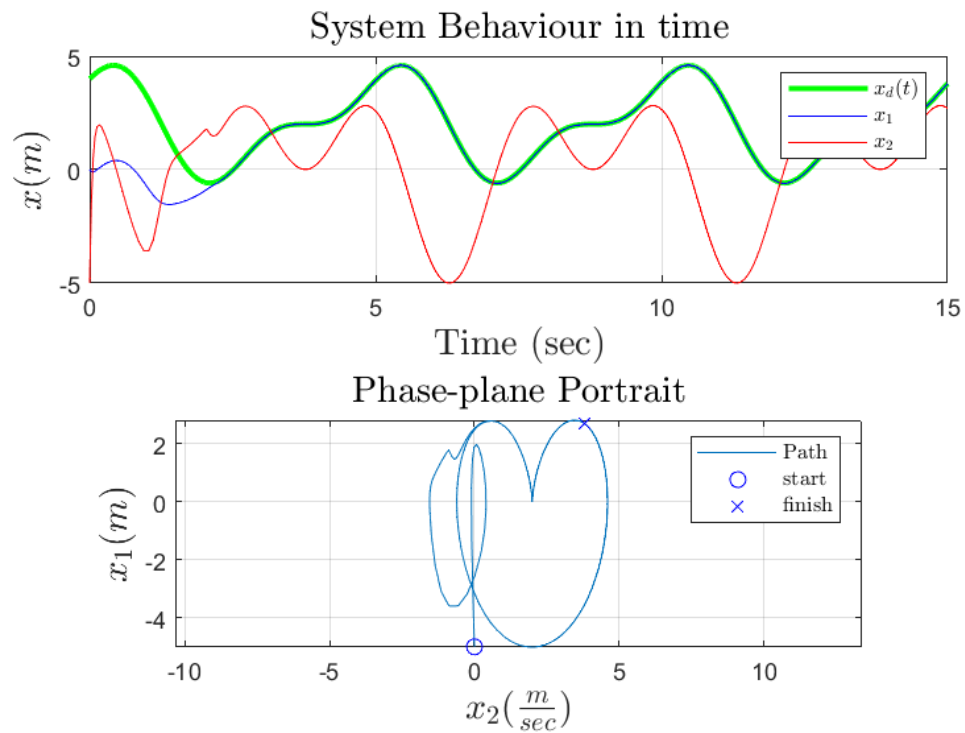
Προσομοίωση 2

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (3m, 0m/sec)$



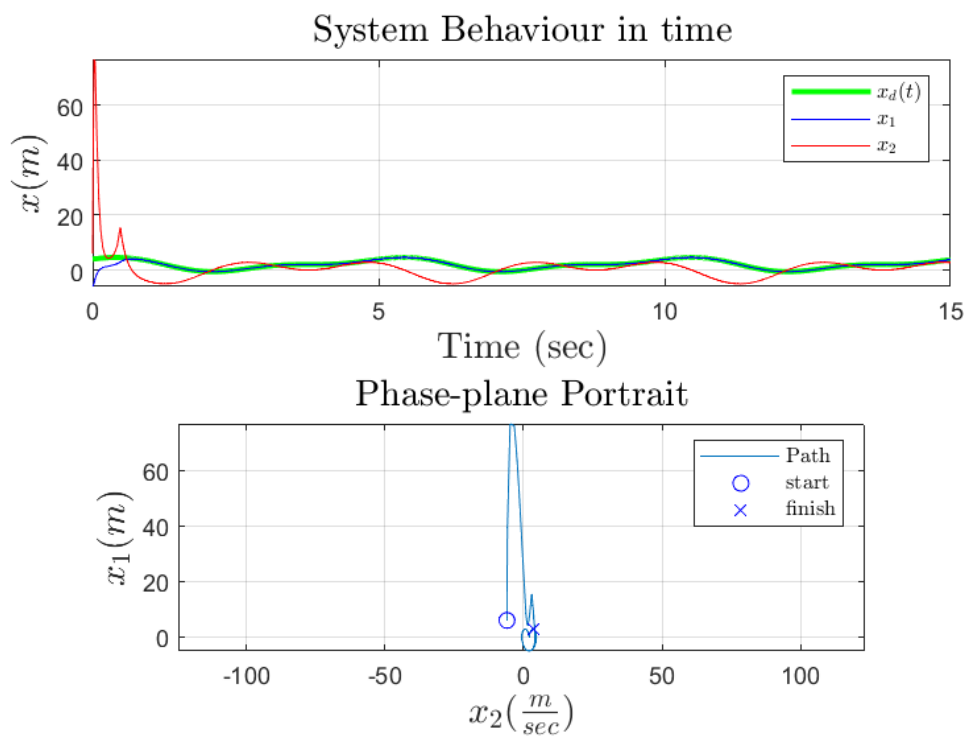
Προσομοίωση 3

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (0m, -5m/sec)$



Προσομοίωση 4

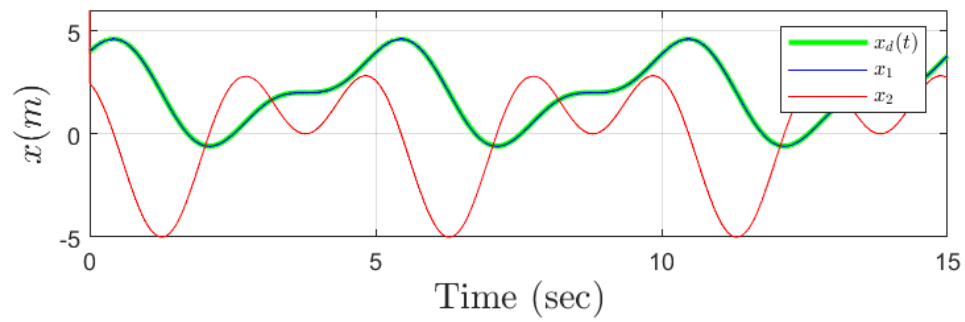
Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (-6m, 6m/sec)$



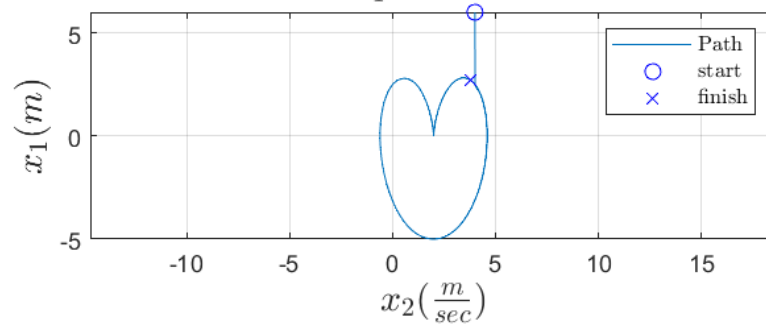
Προσομοίωση 5

Initial Conditions: $(x_1, x_2) = (4m, 6m/sec)$

System Behaviour in time



Phase-plane Portrait



Παράρτημα

Εύρεση συχνότητας ταλάντωσης για μηδενική τριβή

Η διαφορική εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Για την επίλυση της διαφορικής έχουμε:

$$mr^2 + k = 0 \Rightarrow r^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Οπότε:

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Για την συνάρτηση $x(t)$ η συχνότητα ταλάντωσης μπορεί να βρεθεί ως εξής:

Έστω η χρονική στιγμή t_1 , με:

$$x(t_1) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_1\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_1\right)$$

Έστω επίσης η χρονική στιγμή t_2 , με:

$$x(t_1) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_2\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_2\right)$$

Για να είναι περιοδική η συνάρτηση x θα πρέπει να βρούμε ένα $T = t_2 - t_1$, τέτοιο, ώστε:

$$x(t_1) = x(t_2) \Rightarrow$$

$$c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_1\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_1\right) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_2\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_2\right) \xrightarrow[\sqrt{\frac{k}{m}}t_2=b]{\sqrt{\frac{k}{m}}t_1=a}$$

$$c_1 \cos(a) + c_2 \sin(a) = c_1 \cos(b) + c_2 \sin(b) \Rightarrow$$

$$b = a + 2\pi n \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}t_2 - \sqrt{\frac{k}{m}}t_1 = 2\pi n \xrightarrow{\text{για } n=1} \sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Άρα η συχνότητα ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Τελικά, έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sqrt{\frac{m}{k}}\mu g \cdot \text{sign}(\omega x_2) - \sqrt{\frac{k}{m}}x_1 \end{cases}$$