Επιχειρησιακη Ερευνα - Ασκησεις για Μεταπτυχιακ

Σαμαρας (Γραμμικος Προγραμματισμος)

① Γραφικη Επιλυση ΠΓΠ με 2 μεταβλητες

α) Να λυθει γραφικα το παρακατω Γ.Π.

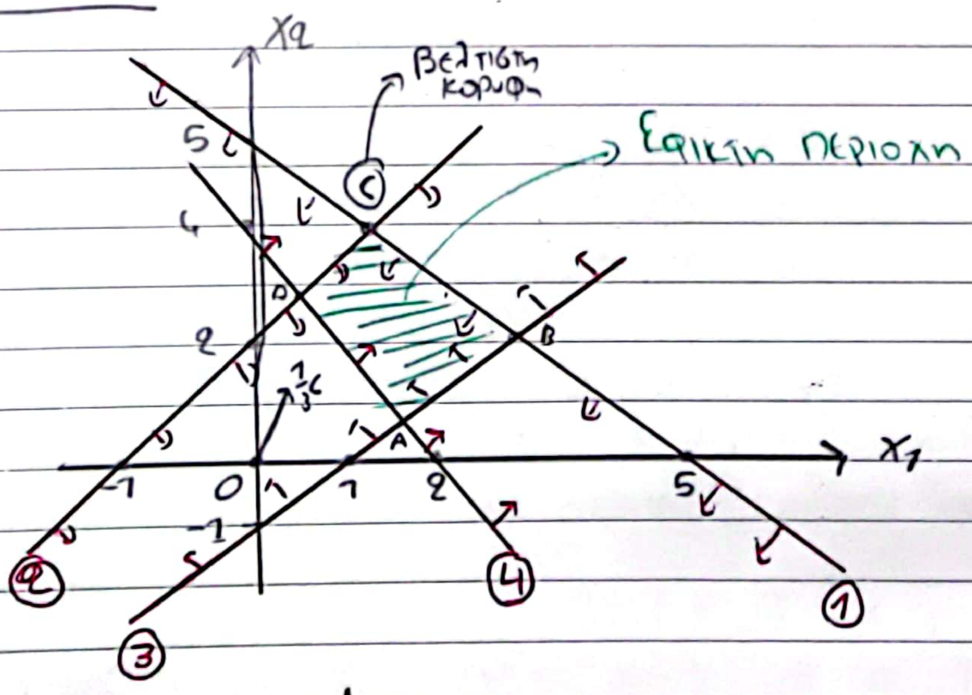
$$\max Z = x_1 + 3x_2$$

μ.π.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 5 && (1)\\
2x_1 - x_2 &\geq -2 && (2)\\
x_1 - x_2 &\leq 1 && (3)\\
2x_1 + x_2 &\geq 4 && (4)\\
x_j \geq 0,& \ (j = 1, 2)
\end{aligned}
$$

Αν το προβλημα ειναι βελτιστο να υπολογιστει ενα βελτιστο σημειο και η βελτιστη αντικειμενικη τιμη.

ΛΥΣΗ



$x_1 + 3x_2 \Rightarrow \frac{1}{3}x_1 + x_2$ (κινουμαστε στο c)

Επιλυουμε τη ② και τη ① και βρισκουμε λυση (z: 13)

② Μετατροπές ΠΓΠ από/προς κανονική σε τυποποιημένη μορφή

α) Δίνεται το παρακάτω γενικό Γ.Π.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4$$

μ.π.

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \geq 4$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 3$$
$$x_1 \text{ ελευθ.}, x_2 \geq -1, x_3 \leq 1, -1 \leq x_4 \leq 1$$

Να μετατραπεί στην τυποποιημένη μορφή.

ΛΥΣΗ

Μετά τη μετατροπή σε min και τη μετατροπή των ανισοτικών τεχνολογικών περιορισμών σε ισοτικούς το πρόβλημα γράφεται:

$$\min z = -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4$$

μ.π.

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 4$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 3$$
$$x_1 \text{ ελευθ.}, x_2 \geq -1, x_3 \leq 1, -1 \leq x_4 \leq 1, x_5, x_6 > 0$$

Βλέπουμε ότι έχουμε ελεύθερη και πρέπει να γίνει απαλοιφή.

- $x_2 \geq -1 \Rightarrow x_2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x_2 = (y_2 - 1)$ (διότι θέλουμε $y_3 \geq 0$)
- $x_3 \leq 1 \Rightarrow x_3 - 1 \leq 0 \Rightarrow y_3 = 1 - x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 = 1 - y_3$
- $-1 \leq x_4 \leq 1 \Rightarrow x_4 + 1 \geq 0 \Rightarrow y_4 = x_4 + 1 \geq 0 \Rightarrow x_4 = y_4 - 1$

Άρα καταλήγουμε εδώ;

$$
\begin{aligned}
\min\ & -2x_1 - 3(y_2-1) + 4(1-y_3) + (y_4-1) \\
\text{μ.π.}\ & 2x_1 - (y_2-1) + 3(1-y_3) + (y_4-1) = 5 \\
& x_1 + 3(y_2-1) + 2(1-y_3) - 2(y_4-1) - x_5 = 4 \\
& -x_1 + 3(y_2-1) + 2(1-y_3) + (y_4-1) + x_6 = 3 \\
& y_4 + y_5 = 2 \\
& y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ x_5,\ x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Μετά τις πράξεις γίνεται:

$$
\begin{aligned}
\min\ & -2x_1 - 3y_2 - 4y_3 + y_4 + 6 \\
\text{μ.π.}\ & 2x_1 - y_2 - 3y_3 + y_4 = 2 \\
& \boxed{x_1 + 3y_2 - 2y_3 - 2y_4 - x_5 = 3} \\
& -x_1 - y_2 - 3y_3 + y_4 + x_6 = 0 \\
& y_4 + y_5 = 2 \\
& y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ x_5,\ x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

λύνω ως προς x_1

Το τελευταίο πρόβλημα μετά την αντικατάσταση της ελεύθερης μεταβλητής x_1 και την απαλοιφή του σταθερού όρου από την αντικειμενική συνάρτηση γράφεται:

$$
\begin{aligned}
\min\ & 3y_2 - 8y_3 - 3y_4 - 2x_5 \\
\text{μ.π.}\ & -7y_2 + y_3 + 5y_4 + 2x_5 = -4 \\
& 2y_2 - 5y_3 - y_4 - x_5 + x_6 = 3 \\
& y_4 + y_5 = 2 \\
& y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ x_5,\ x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

③ Σχέσεις Πρωτεύοντος και δυικού προβλήματος (σχηματισμός, βασικά θεωρήματα, οικονομ. ερμηνεία κλπ)

α) Έστω το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

μ.π.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

Ελέγξτε αν οι λύσεις $(x_1, x_5) = (1,1)$ και $(w_1, w_2) = (4/5, 3/5)$ είναι βέλτιστες για το παραπάνω πρόβλημα και το δυικό του.

ΛΥΣΗ

$$\max\ 4w_1 + 3w_2$$
$$w_1 + 2w_2 \leq 2$$
$$w_1 - 2w_2 \leq 3$$
$$2w_1 + 3w_2 \leq 5$$
$$w_1 + w_2 \leq 2$$
$$3w_1 + w_2 \leq 3$$
$$(w_j \geq 0),\ (j = 1,2)$$

- Βλέπω εφικτή λύση (ικανοπ. περιορισμών) και μετά αν είναι βέλτιστη
- Δοκιμάζω τα x_1 έως x_5 στους περιορισμούς ⇒ εφικτή
- Δοκιμάζω τα w_1, w_2 ⇒ εφικτή
- Βέλτιστη λύση: Δοκιμάζω $x_1 - x_5$ στην αντ. πρωτ. και w_1, w_2 στην αντικ. δυικού

Αντικειμενική πρωτεύοντος : 5 } Βέλτιστη
Αντικειμενική δυϊκού : 5 } (εφόσον είναι ίσες)

(Αν έβρισκα Αντ. πρωτεύον > Αντ. δυϊκό θα έλεγχα εφικτές λύσεις)

(4) Revised Simplex (να μπορούμε να εκτελέσουμε 1 πλήρη επανάληψη και να γνωρίζουμε τα κριτήρια βελτιστότητας)

· Αν μας δίνεται το πρόβλημα σε κανονική μορφή το μετατρέπουμε σε εποποιημένη

π.χ. max $z = x_1 - x_2 - x_3$

μη

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq -4$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

Μετατροπή σε :

min $z = -x_1 + x_2 + x_3$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 3$$

Έπειτα το γράφουμε σε μορφή μητρών

$C = [-1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$B = [4\ 5\ 6]$, $N = [1\ 2\ 3]$

Βήμα 0

Υπολογίζουμε τις δυϊκές μεταβλητές και βλέπουμε ποιο αλγόριθμο θα χρησιμοποιήσουμε

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_B = B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1)$$

$$W^T = C_B^T \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_N = C_N^T - W^T \cdot A_N = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ngeq 0 \quad (2)$$

ΓΕΝΙΚΑ ΙΣΧΥΕΙ:

X_B	S_N	
≥ 0	$\ngeq 0$	→ Πρωτεύων
$\ngeq 0$	≥ 0	→ Δυϊκός
$\ngeq 0$	$\ngeq 0$	→ 2 φάσεων
(≥ 0	≥ 0	→ Βέλτιστο)

Οπότε από (1) και (2) θα χρησιμοποιήσουμε Primal Simplex (πρωτεύων)

Βήμα 1 IF $S_N \geq 0$ THEN STOP (αυτό ισχύει μόνο σε Primal)

Βήμα 2α

Εδώ βρίσκουμε τη εισερχόμενη τιμή (σε σχέση με το B) και βρίσκουμε και τη στήλη περιστροφής

$$S = \min\{S_j : S_j < 0 \wedge j \in N\}$$

Στο παράδειγμα:

$\min = \left\{ \underset{1_n}{-1} \quad \underset{2_n}{x} \quad \underset{3_n}{x} \right\} = -1$ και είναι στη πρώτη θέση

$\ell = N(r) = N(1) = 1$ οποτε $\boxed{X_1 \text{ εισερχομένη}}$

$$h_1 = B^{-1} \cdot A_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2Β

Εδώ βρίσκαμε την εξερχόμενη τιμή (σε σχέση με το Β)

$$X_K = X_{B[r]} = \min \left\{ \frac{X_{B[i]}}{h_{i1}} : h_{i1} > 0 \wedge i = 1, 2 \ldots m \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{4}{-1} , \frac{2}{3} , \frac{3}{2} \right\} = \left\{ \underset{1_n}{-4}, \underset{2_n}{x}, \underset{3_n}{x} \right\}$$

άρα $r = 1$

$K = B[r] = B[1] = 4$, οποτε $\boxed{X_4 \text{ εξερχομένη}}$

Βήμα 3

Σε αυτό το σημείο κάνουμε τη αλλαγή της βάσης

Πριν τη αλλαγή: $N = [1\ 2\ 3]$ $\quad B = [4\ 5\ 6]$

$r = 1, \ell = 1 \qquad r = 1, k = 4$

Μετα τη αλλαγη: $N = [4\ 2\ 3]$ $\quad B = [1\ 5\ 6]$

Βήμα 4

Υπολογισμός νέου B^{-1} με $\Rightarrow B^{-1} = E^{-1} \cdot B^{-1}$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/-1 & 0 & 0 \\ -3/-1 & 1 & 0 \\ -2/-1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε το νέο $B^{-1} \Rightarrow E^{-1} B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και συνεχίζουμε σε επόμενη επανάληψη...

5 Revised Dual Simplex (να μπορούμε να εκτελούμε 1 πλήρη επανάληψη και τα κριτήρια βελτιστότητας)

Έστω ότι μας δίνεται το πρόβλημα σε μορφή μητρών

$$C = [2\ 1\ 4\ 0\ 0\ 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad B = [4\ 5\ 6] \quad N = [1\ 2\ 3]$$

Βήμα 0

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix} \ngeq 0 \ (1)$$

$$W^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C_B^T \cdot B^{-1}$$

$$S_N = C_N^T - W^T \cdot A_N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \geq 0 \ (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι θα χρησιμοποιήσουμε τον Δυϊκό αλγόριθμο Simplex

Βήμα 1 IF $X_B \geq 0$ THEN STOP

Βήμα 2α

$$X_K = X_{B[r]} = \min\{X_{B[i]} : X_{B[i]} < 0 \land i = 1,2,3\}$$
$$= \min\{\underset{1η}{-6}, \underset{2η}{-2}, \underset{3η}{x}\} = -6$$ βρέθηκε στη θέση 1, άρα $r=1$

$K = B[r] = B[1] = 4 \rightarrow \boxed{X_4 \text{ Εξερχόμενη}}$

$$H_{rN} = B_r^{-1} A_N = B_1^{-1} \cdot A_N = (-1 \ 0 \ 0) \cdot A_N = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \ngeq 0$$

Δεν είναι απαγορευτικό

Βήμα 2b $$S_l = \min\left\{-\frac{S_j}{H_{rj}} : H_{rj} < 0 \land j \in N\right\}$$

$$= \left\{-\frac{2}{-2}, -\frac{1}{-4}, -\frac{4}{-2}\right\}$$

$$= \min\{\underset{1η}{1}, \underset{2η}{1/4}, \underset{3η}{2}\} = 1/4$$ ← Αν βρεθεί εδώ αρνητική τιμή $\boxed{\text{STOP}}$

$\ell = 2$

$\ell = N(t) = N(2) = 2 \longrightarrow$ $\boxed{\text{Χα εισερχόμενη}}$

Βήμα 3

Πριν την αλλαγή $N = [1\ 2\ 3]$ $B = [4\ 5\ 6]$

$t=2,\ \ell=2$ $r=1,\ k=4$

Μετα τη αλλαγη $N = [1\ 4\ 3]$ $B = [2\ 5\ 6]$

Βήμα 4

Το Ητω που βρηκαμε πριν είναι η γραμμή περιστροφής
Εδω χρειαζομαστε τη στηλη περιστροφής

$$h\ell = h_2 = B^{-1} \cdot A_{.2} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Το νεο $B^{-1} \Rightarrow E^{-1} \cdot B^{-1}$, οποτε ψαχνουμε το E^{-1}

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/-4 & 0 & 0 \\ -2/-4 & 1 & 0 \\ -2/-4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \Rightarrow B^{-1} \cdot E^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -2/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και συνεχιζουμε σε επομενη επαναληψη...

⑥ Ανάλυση Ευαισθησίας: Να μπορούμε να υπολογίζουμε τα διαστήματα ευαισθησίας για C_i, B_i

Έστω το παρακάτω πρόβλημα:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 + 24x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\
\text{st} \quad & -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\
& -x_1 + 4x_2 + x_4 - x_6 = 1
\end{aligned}
$$

i) Να ελεγχθεί αν η βασική διαμερ. $B=[5\ 4]$, $N=[1\ 2\ 3\ 6]$ είναι βέλτιστη

ii) Να βρεθούν τα εύρη συντελεστών

ΛΥΣΗ

i) Πρέπει να ισχύει ότι $\boxed{x_B \geq 0}$ και $\boxed{s_N \geq 0}$

$B=[5\ 4]$, $N=[1, 2\ 3\ 6]$

$B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$ ✓

$w^T = [0\ 3]$ $\quad s_N = [1\ 12\ 4\ 3] \geq 0$ ✓

Άρα η διαμέριση είναι βέλτιστη

ii) Εφόσον η διαμέριση είναι βέλτιστη, μπορούμε να βρούμε τα εύρη των συντελεστών C_i, B_i

• $j \in N$: $(j = 1, 2, 3, 6)$ [Δηλαδή ότι ο j είναι μη-βασικός]

ΓΕΝΙΚΑ ΙΣΧΥΕΙ: $[C_j - S_j, +\infty)$

Για $j=1$ $\rightarrow [C_1 - S_1, +\infty) = [-2-1, +\infty)$
$= [-3, +\infty)$

Για $j=2$ $\rightarrow [C_2 - S_2, +\infty) = [24-12, +\infty)$
$= [12, +\infty)$

Για $j=3$ $\rightarrow [C_3 - S_3, +\infty) = [4-4, +\infty)$
$= [0, +\infty)$

Για $j=6$ $\rightarrow [C_6 - S_6, +\infty) = [0-3, +\infty)$
$= [-3, +\infty)$

$\cdot\, j \in B: (j=5, 4)$ [Δηλαδή το j είναι βασικό]

Για $j=4$ $\rightarrow B(r) = j \Leftrightarrow B(r) = 4$ άρα $\boxed{r=2}$

$$H_{rN} = H_{2N} = B_2^{-1} \cdot A_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ 1_n \quad 2_n \quad 3_n \quad 4_n \end{array}$$

$$a_j = a_4 = \max \left\{ S_k / h_{jk} : k \in N \wedge h_{jk} < 0 \right\}$$

$$= \max \left\{ \frac{S_1}{h_{21}}, \frac{S_6}{h_{26}} \right\} = \left\{ \frac{1}{-1}, \frac{3}{-1} \right\} = -1$$

$$\beta_j = \beta_4 = \min\{S_k / h_{jk} : k \in N \wedge h_{jk} > 0\}$$

$$= \min\left\{\frac{S_2}{h_{22}}\right\} = \min\left\{\frac{12}{4}\right\} = 3$$

Άρα $[C_4 + \alpha_4, C_4 + \beta_4] = [3-1, 3+3] = [2, 6]$

$\max\{\emptyset\} = -\infty$

ΓΕΝΙΚΑ ΙΣΧΥΕΙ

$\min\{\emptyset\} = +\infty$

ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ: Στο α παίρνουμε τα ΑΡΝΗΤΙΚΑ, ενώ στο β τα ΘΕΤΙΚΑ

$\underline{\text{Για } j=5} \rightarrow B(r) = j \Rightarrow B(r) = 5 \Rightarrow r = 1$

$$H_{rN} = H_{1N} = B_1^{-1} \cdot A_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 1n & 2n & 3n & 4n \end{array} \end{array}$$

$$\alpha_j = \alpha_5 = \max\left\{\frac{S_2}{h_{12}}, \frac{S_3}{h_{13}}\right\} = \left\{\frac{12}{-3}, \frac{4}{-1}\right\}$$

$$= \{-4, -4\} = -4$$

$$\beta_j = \beta_5 = \min\left\{\frac{S_1}{h_{11}}\right\} = \min\left\{\frac{1}{1}\right\} = 1$$

Άρα $[C_5 + \alpha_5, C_5 + \beta_5] = [-4, 1]$

Αλλαγές στο δεξιό μέρος (b_i)

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i=1 \\ \leftarrow i=2 \end{matrix}$$

· Για $i=1$

$B^{-1}_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\gamma = \max\{-X_{B[k]}/(B^{-1})_{ki} : (B^{-1})_{ki} > 0\}$

$= \max\{\emptyset\} = -\infty$ (διότι δεν υπάρχει καμία θετική τιμή στο B^{-1})

$\delta = \min\{-X_{B[k]}/(B^{-1})_{ki} : (B^{-1})_{ki} < 0\}$

$= \min\{-0/1\} = 0$

Άρα $[b_1 + \gamma_1, b_1 + \delta_1] = (-\infty, 0]$

· Για $i=2$

$B^{-1}_{\cdot 2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\gamma_2 = \max\left\{-\frac{1}{1}\right\} = -1$

$\delta_2 = \min\{\emptyset\} = +\infty$

Άρα $[b_2 + \gamma_2, b_2 + \delta_2] = [1-1, +\infty) = [0, +\infty)$

Και φτιάχνουμε το πινακάκι $\Rightarrow$

Συντελεστής	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	b_1	b_2
Αριστ. άκρο	-3	12	0	2	-4	-3	$-\infty$	0
Δεξιό άκρο	∞	∞	∞	6	1	∞	0	∞
Σκιερή	-	-	-	-	-	-	0	3
Ελλ. κόστος	1	12	4	0	0	3	-	-

αυτό συνολικά όλο είναι το $S_N=[1\ 12\ 4\ 3]$

αυτό είναι το $w^T=[0\ 3]$

*

Σιφαλερας

7 Πρόβλημα Μεταφοράς

Άσκηση: Έστω ότι μια εταιρεία παράγει ένα αναψυκτικό. Το προϊόν παράγεται σε 3 εργοστάσια που βρίσκονται σε αντίστοιχες περιοχές, ικανοποιώντας την ζήτηση.

Τη τελευταία πενταετία εισάγει σε 4 πόλεις του εξωτερικού

Η μεταφορά του προϊόντος από τα 3 εργοστάσια στις 4 πόλεις γίνεται με οχήματα της εταιρίας. Το κόστος μεταφοράς ποικίλει ανάλογα με την απόσταση του χρόνου και το κόστος των καυσίμων και δίνεται σε χρηματικές μονάδες στον επόμενο πίνακα μαζί και με τη διαθέσιμη προσφορά και ζήτηση κάθε εργοστασίου και πόλης αντίστοιχα

	Πόλη 1	Πόλη 2	Πόλη 3	Πόλη 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	8	10	7	9	250
Εργοστάσιο 2	9	11	9	7	400
Εργοστάσιο 3	7	5	4	6	350
Ζήτηση	350	150	300	200	1000

ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα μεταφοράς ανάγεται στο παρακάτω:

$$\min\ z = 8x_{11} + 10x_{12} + 7x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 7x_{24} + 7x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 6x_{34}$$

μ.π

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\le 250 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 400 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\le 350 \end{aligned}\right\}$$ Περιορισμοί λόγω της διαθέσιμης προσφοράς των εργοστασίων

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\ge 350 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\ge 150 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\ge 300 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &\ge 200 \end{aligned}$$

$x_{ij} \ge 0$, $i = 1,2,3$ και $j = 1,2,3,4$

(Μέθοδος Βορειοδυτικής γωνίας)

	Πολη 1	Πολη 2	Πολη 3	Πολη 4	Προσφορα
Εργ1	250				~~250~~
Εργ2	100	150	150		~~400~~ ~~300~~ ~~150~~
Εργ3			150	200	~~350~~ ~~200~~
Ζητηση	~~350~~ ~~100~~	~~150~~	~~300~~ ~~150~~	~~200~~	1000

Εμφανίστηκε μια αρχική εφικτή λύση

$$\min\ z = 8x_{11} + 10x_{12} + 7x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 7x_{24} + 7x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 6x_{34}$$

$$\min\ z = 8 \times 250 + 9 \times 100 + 11 \times 150 + 9 \times 150 + 4 \times 150 + 6 \times 200 = 7700$$

Θέτουμε αυθαίρετα $u_1=0$ (στον αρχικό πίνακα)

$u_1+v_1=8 \Rightarrow v_1=8$
$u_2+v_1=9 \Rightarrow u_2=1$
$u_2+v_2=11 \Rightarrow v_2=10$
$u_2+v_3=9 \Rightarrow v_3=8$
$u_3+v_3=4 \Rightarrow u_3=-4$
$u_3+v_4=6 \Rightarrow v_4=10$

Γενικά ισχύει
$S_{ij}=C_{ij}-u_i-v_j$
Οπότε $S_{ij}=0$
$C_{ij}=u_i+v_j$

$S_{12}=C_{12}-u_1-v_2=10-0-10=0$
$S_{13}=C_{13}-u_1-v_3=7-0-8=-1$
$S_{14}=C_{14}-u_1-v_4=9-0-10=-1$
$S_{24}=C_{24}-u_2-v_4=7-1-10=\boxed{-4}$
$S_{31}=C_{31}-u_3-v_1=7-(-4)-8=3$
$S_{32}=C_{32}-u_3-v_2=5-(-4)-10=-1$

αυτά είναι τα υπόλοιπα κελιά στον πίνακα

Επιλέγουμε ως εισερχόμενη μεταβλητή (κελί), εκείνη η οποία βελτιώνει το συνολικό κόστος με μεγαλύτερο ρυθμό/μονάδα. Άρα, επιλέγουμε το κελί (2,4) με το πλέον αρνητικό υπολειμματικό κόστος $S_{24}=-4$

Εντοπίζουμε το μονοπάτι αναπροσαρμογής:

	Πόλη 1	Πόλη 2	Πόλη 3	Πόλη 4	Προσφορά
Εργοστ 1	250 / 8	10	7	9	250
Εργοστ 2	100 / 9	150 / 11	− 150 / 9	+ / 7	400
Εργοστ 3	7	5	+ 150 / 4	− 200 / 6	350
Ζήτηση	350	150	300	200	1000

Μετά την ανακατανομή

	Πόλη 1		Πόλη 2		Πόλη 3		Πόλη 4		Προσφορά
Εργοστάσιο 1	250	8		10		7		9	250
Εργοστάσιο 2	100	9	150	11		9	150	7	400
Εργοστάσιο 3		7		5	300	4	50	6	350
Ζήτηση	350		150		300		200		1000

$$\min z = 8X_{11} + 10X_{12} + 7X_{13} + 9X_{14} + 9X_{21} + 11X_{22} + 9X_{23} + 7X_{24} + 7X_{31} + 5X_{32} + 4X_{33} + 6X_{34}$$

$$= 8\times 250 + 9\times 100 + 150\times 11 + 300\times 4 + 7\times 150 + 6\times 50$$
$$= 7100$$

Υπολογίζουμε τις δυικές μεταβλητές, όπως πριν
Κριτήριο Βελτιστότητας $\rightarrow$ Όλα τα S_{ij} να είναι μη αρνητικά

(8) Προγραμματισμός Στόχων

ΑΣΚΗΣΗ: Μια εταιρεία έχει αναλάβει ένα πελάτη που θέλει να επενδύσει 80.000€ σε μετοχές:

Μετοχές	Τιμή/μερίδιο	Επιστροφή/μερίδιο	Δείκτης Ρίσκου/μερίδιο
U.S.Oil	25€	3€	0,5
Hub Prop	50€	5€	0,25

Για παράδειγμα, αν η εταιρεία αποφασίσει να πωλήσει όλο το ποσό στη μετοχή U.S. Oil (απόφαση μεγαλύτερου ρίσκου) τότε μπορεί να αγοράσει $80.000/25€ = 3200$ μερίδια
Δείκτης ρίσκου: $3200(0,5) = 1600$

Αντίθετως αν η εταιρεία αποφασίσει να μην αγοράσει κανένα μερίδιο τότε το χαρτοφυλάκιο δεν εμπεριέχει καθόλου ρίσκο ⊕ απόδοση.
Δείκτης Ρίσκου: 0

Έστω ότι ο πελάτης θέλει να αποφύγει ένα χαρτοφυλάκιο υψηλού ρίσκου, για αυτό έθεσε ως ένα αποδεκτό στόχο την εύρεση χαρτοφυλακίου με δείκτη ρίσκου το πολύ 700
Ακόμη ένας στόχος είναι η επιθυμία επιστροφή τουλάχιστον 9000€

(Εδώ μπορεί να ζητηθεί μαθηματική μοντελοποίηση ή γραφική παρουσίαση)

Λύση

Πρωτεύων στόχος (1ο επίπεδο προτεραιότητας)
Στόχος 1: Εύρεση ενός χαρτοφυλακίου με δείκτη ρίσκου το πολύ 700

Δευτερεύων στόχος (2ο επίπεδο προτεραιότητας)
Στόχος 2: Εύρεση χαρτοφυλακίου με επιστροφή τουλάχιστον 9000€

Μαθηματική Μορφοποίηση Προβλήματος

Έστω
x_1 = Το πλήθος αγοραζόμενων μεριδίων U.S. Oil
x_2 = Το πλήθος αγορασμένων μεριδίων Hub Properties

Ο περιορισμός (system constraint) είναι

$$25 \cdot X_1 + 50 \cdot X_2 \leq 80.000$$ (περιορισμός κεφαλαίου)

Οι περιορισμοί-στόχοι (goal constraints) είναι

$0,5X_1 + 0,25X_2 \leq 700$ (ικανοποίηση στόχου ρίσκου) (P_1)

$3X_1 + 5X_2 \geq 9000$ (ικανοποίηση στόχου απόδοσης) (P_2)

<u>Μετατροπή σε ισότητα</u>

$P_1 \Rightarrow 0,5X_1 + 0,25X_2 = 700 + d_1^+ - d_1^-$

$\Leftrightarrow 0,5X_1 + 0,25X_2 - d_1^+ + d_1^- = 700$

$d_1^+ \rightarrow$ Η ποσότητα που ο δείκτης ρίσκου ξεπερνάει το 700

$d_1^- \rightarrow$ -״- -״- υπολείπεται του 700

$P_2 \Rightarrow 3X_1 + 5X_2 = 9000 + d_2^+ - d_2^-$

$\Leftrightarrow 3X_1 + 5X_2 - d_2^+ + d_2^- = 9000$

$d_2^+ \rightarrow$ Η ποσότητα που η απόδοση ξεπερνάει τα 9000

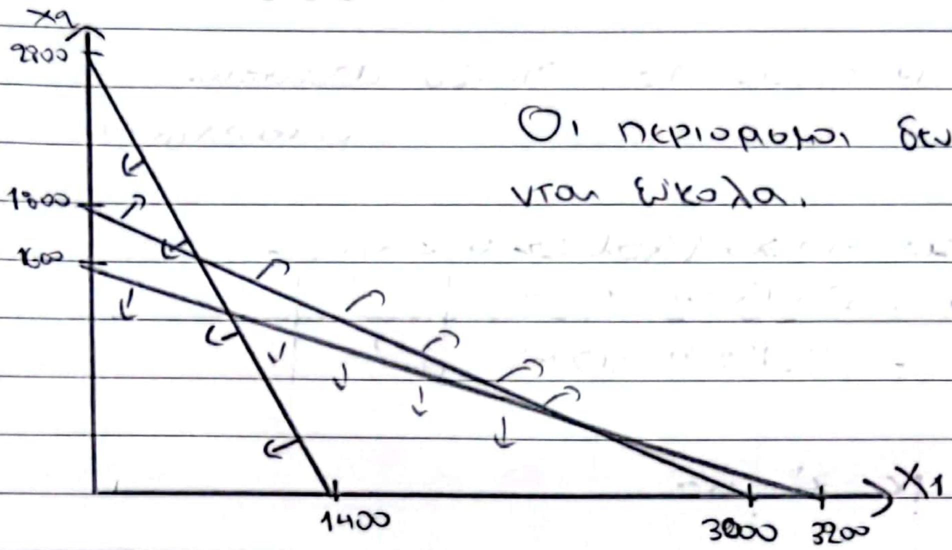
$d_2^- \rightarrow$ Η ποσότητα -״- υπολείπεται του 9000

<u>Αντικειμενική Συνάρτηση:</u>

min d_1^+

min d_2^-

Γραφική Αναπαράσταση



Οι περιορισμοί δεν ικανοποιούνται εύκολα.

9 Πρόβλημα Αποθεμάτων

Άσκηση: Μια επιχείρηση παραγγέλνει κάθε εβδομάδα ένα προϊόν για αποθήκευση και πώληση. Κάθε μονάδα την αγοράζει προς 150€ και τη πουλάει προς 300€

Το προϊόν έχει διάρκεια ζωής μιας εβδομάδας. Η επιχείρηση αντιμετωπίζει μια πιθανοτική ζήτηση για το προϊόν:

Ζήτηση (μονάδες)	Πιθανότητα ζήτησης
0	0,10
1	0,30
2	0,40
3	0,20

Τι παραγγελία πρέπει να κάνει;

Λυση

Πρεπει να φτιαξουμε τον πινακα αποδοσεων

Απόδοση = 300*(πωλησεις) − 150*(παραγγελια)

Αποθεμα (μον. παραγγ.)	Ενδεχομενη Ζητηση 0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	−150	150	150	150
2	−350	0	300	300
3	−450	−150	150	450

Αναμενομενες αποδοσεις (=Αποδοση · Πιθανοτητα Ζητησης)

$ER_0 = 0\cdot 0{,}10 + 0\cdot 0{,}30 + 0\cdot 0{,}40 + 0\cdot 0{,}20 = 0$

$ER_1 = -150\cdot 0{,}10 + 150\cdot 0{,}30 + 150\cdot 0{,}40 + 150\cdot 0{,}20 = 120$

$ER_2 = -300\cdot 0{,}10 + 0\cdot 0{,}30 + 300\cdot 0{,}40 + 300\cdot 0{,}20 = 150$

$ER_3 = -450\cdot 0{,}10 - 150\cdot 0{,}30 + 150\cdot 0{,}40 + 450\cdot 0{,}20 = 60$

- Κριτηριο Μεγιστοποιησης Αναμ. Αποδ. ⇒ Βελτιστη 2 μοναδες

- Κριτηριο Maximin ⇒ Βελτιστη 0 μοναδες
(Υπολ. ζημιας και παιρνουμε τη μικροτερη)
- Κριτηριο Maximax ⇒ Βελτιστη 3 μοναδες
(Υπολ. κερδους και παιρνουμε το μεγαλυτερο)

Τιμες κοστους ευκαιριας

Αποθεμα	Ζητηση 0	1	2	3
0	0	150	300	450
1	150	0	150	300
2	300	150	0	150
3	450	300	150	0

Αναμενόμενο Κόστος Ευκαιρίας (= ΚΕ * πιθανότητα ζήτησης)

$$EC_0 = 0 \cdot 0{,}10 + 150 \cdot 0{,}30 + 300 \cdot 0{,}40 + 450 \cdot 0{,}20 = 255$$
$$EC_1 = 150 \cdot 0{,}10 + 0 \cdot 0{,}30 + 150 \cdot 0{,}40 + 300 \cdot 0{,}20 = 135$$
$$EC_2 = 300 \cdot 0{,}10 + 150 \cdot 0{,}30 + 0 \cdot 0{,}40 + 150 \cdot 0{,}20 = 105$$
$$EC_3 = 450 \cdot 0{,}10 + 300 \cdot 0{,}30 + 150 \cdot 0{,}40 + 0 \cdot 0{,}20 = 195$$

· Κριτήριο Minimax Regret ⇒ Βέλτιστο 2η μονάδα (105)

Ζήτηση	Βελτ. παραγ. με πλήρη πληρ.	Προσδ. Απόδοση (R)	Πιθανότητα ζήτησης
0	0	0	0,10
1	1	150	0,30
2	2	300	0,40
3	3	450	0,20

Αναμενόμενη απόδοση με πλήρη πληροφόρηση ίσον του:

$$ER(\text{με πλήρη πληροφ.}) = 0 \cdot 0{,}10 + 150 \cdot 0{,}30 + 0{,}40 \cdot 300 + 0{,}20 \cdot 450 = 255$$

Είχαμε δει ότι η βέλτιστη παραγγελία που μεγιστοποιεί την Αναμ. Αποδ. είναι 150, οπότε:

$$ER = 150$$
$$\Rightarrow EVPI = 255 - 150 = 105$$

*Σαλαράς

(10) Μέθοδος δύο φάσεων

ΑΣΚΗΣΗ: Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα

$\min \quad x_2 + 10x_3$

$\mu.\pi. \quad -2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq -4$

$3x_1 + x_2 - x_3 \geq 5$

$x_j \geq 0, \; j = 1 \ldots 3$

Προσθέτουμε χαλ. μεταβλ.:

$C = [0 \; 1 \; 10 \; 0 \; 0]$

$b = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Αρχική διαμέριση

$B = [4 \; 5], \; N = [1 \; 2 \; 3]$

$m = 2, \; n = 5$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$

$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} \ngeq 0$ (και $S_N \neq 0$)

Οπότε χρησιμοποιούμε μέθοδο 2 φάσεων (από ανισώσεις)

Υπολογίζω το $d = -B \cdot e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [προσοχή στο πρόσημο]

($d \rightarrow$ συντελεστές μιας επιπλέον τεχνητής μεταβλητής)

$x_{n+1} = x_{5+1} = x_6$

<u>1η Επανάληψη</u>

$f = [0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 1]$

$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$B = [4 \; 5], \; N = [1 \; 2 \; 3 \; 6]$

$m = 2$

$n = 6, \; \ell = 6$

x_6 εισερχόμενη

$X_B = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}$ ⟶ παίρνω το min (αρκεί το ένα να είναι αρνητικό)

θέση του min στο B

Βρίσκω $k = B(r) = B(2) = 5$ άρα X_5 εξέρχομε νη

Οπότε $\bar{B} = [4 \;\; 6]$, $N = [1\;2\;3\;5]$

άρα $\bar{B} = [A.4 \;\; A.6]$

Εύρεση Αντίστροφης $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$X_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ εφικτό

(και συνεχίζουμε Simplex κανονικά)

Καλό Πτυχίο :D

@GeorgeApos

(ρίξτε κανένα star στο Github)