ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

3η Άσκηση

Η συνάρτηση ωφέλειας του πελάτη μιας διαδικτυακής επιχείρησης είναι γνωστή και είναι η εξής:

$$\boldsymbol{u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1}$$

Ας υποθέσουμε ότι ο πελάτης κατά μέσο όρο διαθέτει για τα δύο προϊόντα που πουλά η επιχείρηση **300 €** και οι τιμές των δύο αυτών προϊόντων είναι $\boldsymbol{p_1 = 20}$ **€** & $\boldsymbol{p_2 = 30}$ **€**

Να βρεθεί:

1) **ο λόγος των ζητούμενων ποσοτήτων x_1/x_2 &**

2) **εάν πράγματι το σημείο της συνάρτησης ωφέλειας, που αντιστοιχεί σε αυτόν τον λόγο, αποτελεί τοπικό μέγιστο**

Επίλυση

Θα πρέπει να βρούμε τις συναρτήσεις ζήτησης $\boldsymbol{x_1}$ και $\boldsymbol{x_2}$ για τη συνάρτηση ωφέλειας που δίνεται.

Το πρόβλημα που πρέπει να επιλύσουμε διατυπώνεται ως εξής:

Να βρεθούν τα $\boldsymbol{x_1}$ & $\boldsymbol{x_2}$, για τα οποία

$$\boldsymbol{max\ x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1}$$

με τον περιορισμό

$$\boldsymbol{20x_1 + 30x_2 = 300} \text{ ή } \boldsymbol{2x_1 + 3x_2 = 30}$$

Η επίλυση μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της ***συνάρτησης Lagrange***:

$$\boldsymbol{L = x_1 x_2 + 2x_1 - \lambda(2x_1 + 3x_2 - 30)}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Παίρνουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -2x_1 - 3x_2 + 30 = 0$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις γράφονται:

$$x_2 - 2\lambda = -2$$

$$x_1 - 3\lambda = 0$$

$$-2x_1 - 3x_2 = -30$$

Το σύστημα γραμμικών εξισώσεων γράφεται υπό τη μορφή μητρών:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ***κανόνα Cramer*** :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -30 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -30 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}} \qquad \lambda = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}}$$

Υπενθυμίζεται ότι, εάν:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

τότε

$$det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ενώ, όταν:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

τότε

$$det(A) = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot$$
$$\cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

Επομένως,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -30 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0(0-9) - 1(0-6) - 2(-3+0) = 12 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -30 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -2(0-9) - 1(0-90) - 2(0+0) = 108$$

Άρα, $x_1 = \frac{108}{12} = 9$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -30 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -30 & 0 \end{vmatrix} = 0(0-90) + 2(0-6) - 2(-30+0) = 48$$

Άρα, $x_2 = \frac{48}{12} = 4$

Το άριστο σημείο είναι το $\boldsymbol{(x_1, x_2) = (9, 4)}$

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -30 \end{vmatrix} = 0(0+0) - 1(-30+0) - 2(-3+0) = 36$$

$$\lambda = \frac{36}{12} = 3$$

Για να είναι το σημείο $(9,4)$ τοπικό μέγιστο, θα πρέπει:

$|H_2| < 0$ και $|H_3| > 0$

όπου,

$|H|$ η ***διευρυμένη ορίζουσα Hessian***:

$$|H| = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & -p_1 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1$, άρα:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 1 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} = 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Και οι δύο συνθήκες ικανοποιούνται, επομένως το σημείο που αντιστοιχεί στον λόγο ζητούμενων ποσοτήτων $^9/_4$ αποτελεί τοπικό μέγιστο της συνάρτησης ωφέλειας