Описание задач по численным методам

Царапова Юлия, Б02-882

МФТИ 2021-2022 г.

1 Задача 1

Решить численно однородное уравнение переноса (уравнение адвекции):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

где $= const > 0$, $-\infty < x < \infty$, $u(0,x) = \phi(x)$

С начальной функцией в виде $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ exp(-\frac{x^2}{\delta^2}), & x > 0 \end{cases}$$

Выполнить расчеты с помощью трех разностных схем: 1) явной или неявной схемы "уголок 2) схемы Лакса-Вендроффа, 3) TVD-схемы с одним из лимитеров или схемы "кабаре".

Сравнить найденные численно решения с точным решением. Для нескольких моментов времени рассчитать максимальную и среднеквадратичную погрешности.

2 Задача 2

С помощью схем Лакса и Мак-Кормака для нелинейного одномерного уравнения переноса промоделировать движение волны сжатия.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Задать начальную функцию $u(0,x)$ в виде:

$$u(0,x) = \begin{cases} u_1, & x < x_1 \\ u_1 + \frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}(x-x_1), & x_1 < x < x_2 \\ u_2, & x > x_2 \end{cases}$$

Точки особенностей $x_1, x_2 \in [a,b]$, значение слева больше значения справа: $u_1 > u_2$. Убедиться, что в некоторый момент времени решение станет разрывным, значения функции слева и справа от точки разрыва будут равны соответственно u_1 и u_2. Охарактеризовать различие результатов, полученных схемами Лакса и Мак-Кормака. Определить с помощью численного эксперимента скорость движения точки разрыва.

Рассчитать движение уединенной волны. Задать начальную функцию в виде одиночного импульса:

$$u(0,x) = exp(-\frac{(x-x_0)^2}{d^2})$$

3 Задача 3

В задаче о стационарной теплопроводности в неоднородном стержне, на концах которого поддерживается постоянная температура:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = g_0, & u(1) = g_1 \end{cases}$$

где $f(x)$ - мощность тепловых источников, распределенных внутри стержня, $u(x)$ - распределение температуры по длине стержня

Разработать алгоритм и программу метода конечных элементов, использующую квадратичные элементы. Задать следующие входные данные:

$$f(x) = 1 + \frac{\pi}{2} sin(\pi x),$$
$$k(x) = 1,$$
$$g_0 = 0,$$
$$g_1 = 1$$

Выполнить расчеты, последовательно удваивая число элементов.

4 Задача 4

Рассмотреть задачу о стационарной теплопроводности в однородном прямоугольнике, одна сторона которого теплоизолирована, а на остальных поддерживается постоянная (нулевая) температура. Предположив, что внутри прямоугольника имеется источник тепла, мощность которого является заданной функцией координат. Математическая постановка данной задачи:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), & 0 < x < a, 0 < y < \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, & u(a,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, & u(x,b) = 0 \end{cases}$$

где $f(x,y)$ - мощность тепловых источников, распределенных внутри области, $u(x,y)$ - распределение температуры

Решить представленную задачу, воспользовавшись дискретным синус-преобразованием Фурье.

Задать мощность тепловых источников в виде:

$$f(x,y) = exp\left(-\frac{(x-a/2)^2 + (y-b/2)^2}{\delta^2}\right)$$

Построить график двумерного распределения температуры u(x, y). Построить график одномерного сечения u(0.5, y).