Численные методы для решения волнового уравнения в многомерном случае

Царапова Юлия, Б02-882

МФТИ 2021 г.

1 Введение

Численное решение волнового уравнения является наиболее интересным и имеющим множество точек применения. Рассмотрение же многомерного волнового уравнения делает данную задачу еще более актуальной для исследований поведения различных процессов.

Потому, рассмотрим теоретическое обоснование и численное решение волнового уравнения с заданным граничным условием, которое было подобрано из-за свойств симметрии и определенного поведения на границах изучаемой области, что позволяет не отвлекаться на возможные эффекты, влияющие на вид решения данной задачи.

2 Задача для моделирования

В качестве моделируемой задачи в данной работе рассматривается нахождение численного решения $u = u(x, y, t)$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{1}$$

в области $(x, y, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 3]$, дополненного начально-краевыми условиями:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_0 = v_0(x, y), \tag{2}$$

$$u(0, 0, t) = u(0, 1, t) = u(1, 0, t) = u(1, 1, t) = 0.\text{(условие полного отражения)} \tag{3}$$

коэффициент β задается так:

$$\beta = \begin{cases} 0.1, & x, y \in [0, 0.2] \times [0, 0.2] \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \tag{4}$$

Начальные данные определены следующим образом: $v_0(x, y) = 1$, u_0 - импульс Рикера с $\sigma = 10$.

Рассматриваемый импульс Рикера, иначе MHAT-вейвлет, имеет вид:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3\sigma}\pi^{1/4}}\left(1 - \left(\frac{t}{\sigma}\right)^2\right)e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

где t - расстояние от центра расчетной области до точки (x, y)

3 Численное моделирование методом «крест»

Простейшим способом численного моделирования данного волнового уравнения является двумерная схема «крест». Аппроксимация на этом шаблоне получается при замене вторых производных их разностными аналогами:

$$\frac{u_{n,m}^{l+1} - 2u_{n,m}^{l} + u_{n,m}^{l-1}}{\tau^2} = \beta\left(\frac{u_{n+1,m}^{l} - 2u_{n,m}^{l} + u_{n-1,m}^{l}}{h_x^2} + \frac{u_{n,m+1}^{l} - 2u_{n,m}^{l} + u_{n,m-1}^{l}}{h_y^2}\right) \tag{6}$$

В узле (x_n, y_m, t_l) разностное уравнение аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение с погрешностью $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$.

Для каждого фиксированного l неизвестными в уравнении являются $u_{n,m}^{l+1}$, которые могут быть легко выражены. После того, как все значения $u_{n,m}^{l+1}$ найдены, для завершения перехода на слой $l+1$ нужно лишь воспользоваться граничными условиями со значениями n, m на концах нашей размерной сетки.

$$u_{n,m}^{l+1} = 2u_{n,m}^{l} - u_{n,m}^{l-1} + \beta\tau^2\left(\frac{u_{n+1,m}^{l} - 2u_{n,m}^{l} + u_{n-1,m}^{l}}{h_x^2} + \frac{u_{n,m+1}^{l} - 2u_{n,m}^{l} + u_{n,m-1}^{l}}{h_y^2}\right) \tag{7}$$

Для исследования схемы «крест» на устойчивость по начальным данным можно использовать метод гармоник. Множители роста при этом удовлетворяют квадратному уравнению:

$$\lambda_{p,q}^2 - 2\lambda_{p,q} + 1 = -\lambda_{p,q}\left(\frac{4\beta\tau^2}{h_x^2} sin^2\frac{\alpha_q}{2} + \frac{4\beta\tau^2}{h_y^2} sin^2\frac{\alpha_p}{2}\right) \tag{8}$$

Условие $|\lambda_{p,q}| \leq 1$ выполняется, если дискриминант уравнения неположителен:

$$\frac{D}{4} = \left(1 - 2\beta\tau^2\left(\frac{sin^2\frac{\alpha_q}{2}}{h_x^2} + \frac{sin^2\frac{\alpha_p}{2}}{h_y^2}\right)\right)^2 - 1 \leq 0 \tag{9}$$

то есть когда справедливы неравенства

$$-1 \leq 1 - 2\beta\tau^2\left(\frac{sin^2\frac{\alpha_q}{2}}{h_x^2} + \frac{sin^2\frac{\alpha_p}{2}}{h_y^2}\right) \leq 1 \tag{10}$$

Последнее условие выполнено, если:

$$\beta\tau^2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) \leq 1 \tag{11}$$

откуда получаем условие устойчивости схемы «крест» в двумерном случае:

$$\sqrt{\beta}\tau\sqrt{\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}} \leq 1 \tag{12}$$

Схему «крест» удобно использовать в расчетах, не требующих высокой надежности вычислений, то есть когда не может возникнуть локальное нарушение условия.

4 Численное моделирование для неявной схемы

Рассмотрим двумерный аналог неявной схемы для уравнения колебаний:

$$u_{\bar{t}t} = \beta\sum_{s=1}^{2}\Lambda_s(\sigma\hat{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma\bar{u}) \tag{13}$$

где $\Lambda_1 u = u_{\bar{x}x}$ и $\Lambda_2 u = u_{\bar{y}y}$.

За счет своей симметрии относительно слоя l схема обладает погрешностью аппроксимации $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$, однако она не является экономичной, так как переход со слоя на слой требует слишком большого числа действий. Заметим, что для выражения, на которое действуют операторы Λ_s в правой части уравнения, справедливо равенство:

$$\sigma\hat{u} + (1-2\sigma)u + \sigma\bar{u} = \sigma\tau^2 u_{\bar{t}t} + u \tag{14}$$

которое позволяет переписать уравнение в виде:

$$B = \left(E - \sigma\tau^2\beta\sum_{s=1}^{2}\Lambda_s\right)u_{\bar{t}t} = \beta\sum_{s=1}^{2}\Lambda_s u \tag{15}$$

Рассмотрим приближенный факторизованный оператор $\bar{B}$ следующего вида:

$$\bar{B} = (E - \sigma\tau^2\beta\Lambda_1)(E - \sigma\tau^2\beta\Lambda_2) = E - \sigma\tau^2\beta(\Lambda_1 + \Lambda_2) + \sigma^2\tau^4\beta^2\Lambda_1\Lambda_2 \tag{16}$$

Операторы B и $\bar{B}$ отличаются на величину порядка $O(\tau^4)$. Таким образом, если в уравнении (15) заменить оператор B на оператор $\bar{B}$, погрешность аппроксимации этим разностным уравнением исходного дифференциального уравнения не будет испорчена (она останется равной $O(\tau^2)$). В результате замены получаем факторизованную разностную схему:

$$(E - \sigma\tau^2\beta\Lambda_1)(E - \sigma\tau^2\beta\Lambda_2)u_{\bar{t}t} = \beta\Lambda u \tag{17}$$

где $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$.

Исследовать схему (17) на устойчивость можно с помощью метода гармоник. При этом для множителей роста получаем следующее квадратное уравнение:

$$\left(1 + \frac{4\beta\tau^2}{h_x^2}sin^2\frac{\alpha_q}{2}\right)\left(1 + \frac{4\beta\tau^2}{h_y^2}sin^2\frac{\alpha_p}{2}\right)(\lambda_{p,q}^2 - 2\lambda_{p,q} + 1) = -\lambda_{p,q}4\beta\tau^2\left(\frac{sin^2\frac{\alpha_q}{2}}{h_x^2} + \frac{sin^2\frac{\alpha_p}{2}}{h_y^2}\right) \tag{18}$$

которое можно переписать в виде

$$\lambda_{p,q}^2 - 2\left(1 - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{(1+2\sigma\gamma_1)(1+2\sigma\gamma_2)}\right)\lambda_{p,q} + 1 = 0 \tag{19}$$

где введены обозначения

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{2\beta\tau^2}{h_x^2}sin^2\frac{\alpha_q}{2} \\ \gamma_2 = \frac{2\beta\tau^2}{h_x^2}sin^2\frac{\alpha_q}{2} \end{cases} \tag{20}$$

Условие $|\lambda_{p,q}| \le 1$ выполняется, если дискриминант уравнения неположителен, то есть если справедливы неравенства:

$$-1 \le 1 - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{(1+2\sigma\gamma_1)(1+2\sigma\gamma_2)} \le 1 \tag{21}$$

Последнее неравенство заведомо выполнено при $\sigma \ge \frac{1}{4}$. Следовательно, как и в одномерном случае, схема (17) безусловно устойчива при $\sigma \ge \frac{1}{4}$. На практике же целесообразно выбирать так чтобы вес $(1-2\sigma)$ центрального слоя не был отрицателен.

Введем вспомогательную функцию $u^{(1)}(E - \sigma\tau^2\beta\Lambda_2)u_{\bar{t}t}$. Тогда можно получить систему уравнений из граничных условий для функции $u_{n,m}^l$:

$$u_{0,m}^{(1)} = (E - \sigma\tau^2\beta\Lambda_2)\, u_{\bar{t}t}|_{n=0} = (E - \sigma\tau^2\beta\Lambda_2)\frac{\mu_1(y_m, t_{l+1}) - 2\mu_1(y_m, t_l) + \mu_1(y_m, t_{l-1})}{\tau^2} = \overline{\mu_{1,m}} \tag{22}$$

$$u_{N,m}^{(1)} = (E - \sigma\tau^2\beta\Lambda_2)\, u_{\bar{t}t}|_{n=N} = (E - \sigma\tau^2\beta\Lambda_2)\frac{\mu_2(y_m, t_{l+1}) - 2\mu_2(y_m, t_l) + \mu_2(y_m, t_{l-1})}{\tau^2} = \overline{\mu_{2,m}} \quad (23)$$

В результате для $u_{N,m}^{(1)}$ при каждом фиксированном m приходим к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} u_{0,m}^{(1)} = \overline{\mu_{1,m}} \\ \frac{\beta\tau^2}{h_x^2} u_{n-1,m}^{(1)} - \left(1 + \frac{2\beta\tau^2}{h_x^2}\right) u_{n,m}^{(1)} + \frac{\beta\tau^2}{h_x^2} u_{n+1,m}^{(1)} = \beta\left(\frac{u_{n+1,m}^l - 2u_{n,m}^l + u_{n-1,m}^l}{h_x^2} + \frac{u_{n,m+1}^l - 2u_{n,m}^l + u_{n,m-1}^l}{h_y^2}\right) \\ u_{N,m}^{(1)} = \overline{\mu_{2,m}} \end{cases} \quad (24)$$

где второе условие выполняется для $n = 1, ...N - 1$.

Для разрешения данной схемы требуется теперь только условие на границах сетки.

5 Результаты численного моделирования

Приведем некоторые результаты численного моделирования.

По изначальной задумке требовалось сравнение двух методов численного моделирования данной задачи: схемы «крест» и и эволюционнофакторизованной схемы. Но в данной работе приведены только результаты решения задачи в явном виде.

На рисунках ниже приведены решения данной задачи методом «крест» для разных моментов времени. Что наглядно показывает поведение решения в данной задаче.

Можно заметить наличие зеркальных на двумерном пространстве решений для разных моментов времени, что явно говорит о правильности полученного решения, из-за граничных условий, обладающих свойствами симметрии.

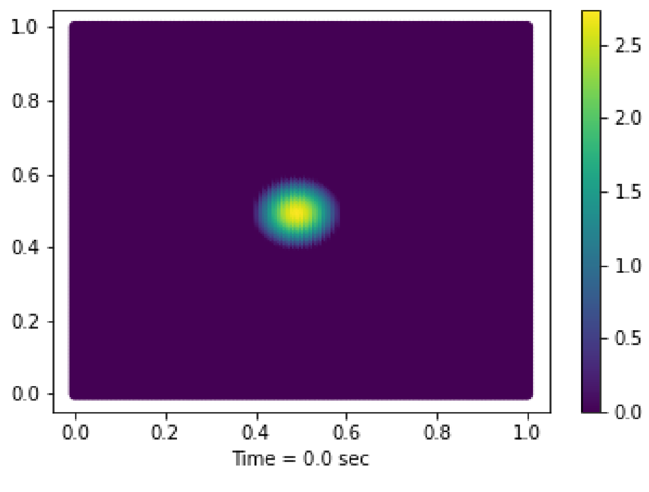

Рис. 1:

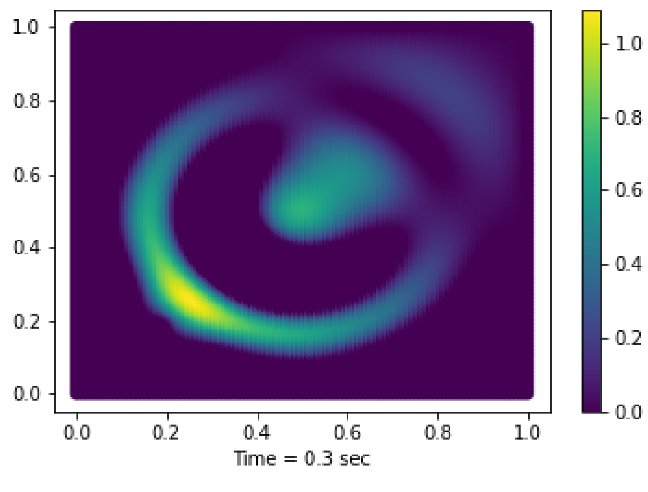

Рис. 2:

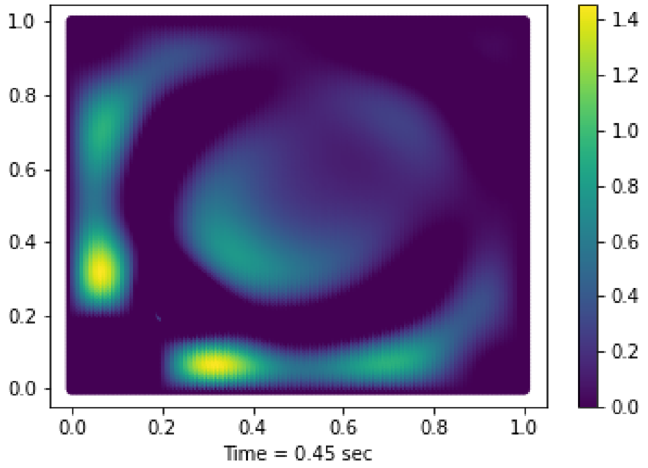

Рис. 3:

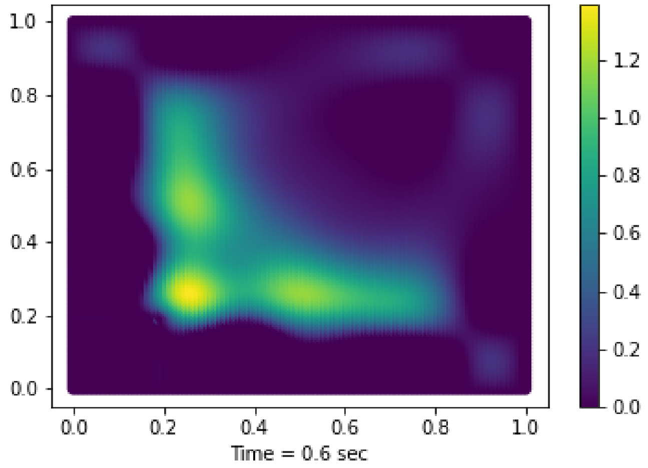

Рис. 4:

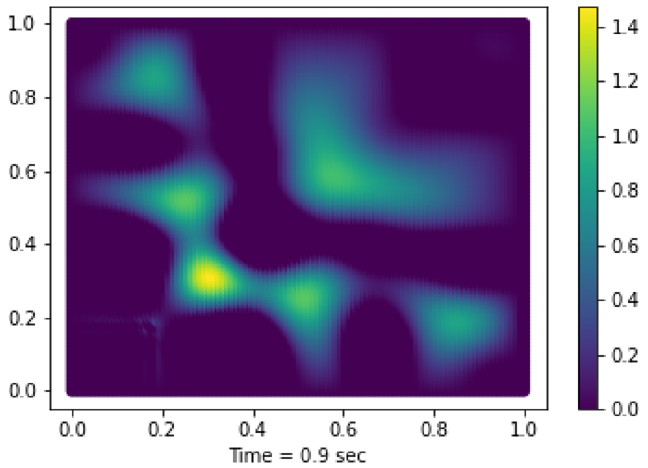

Рис. 5:

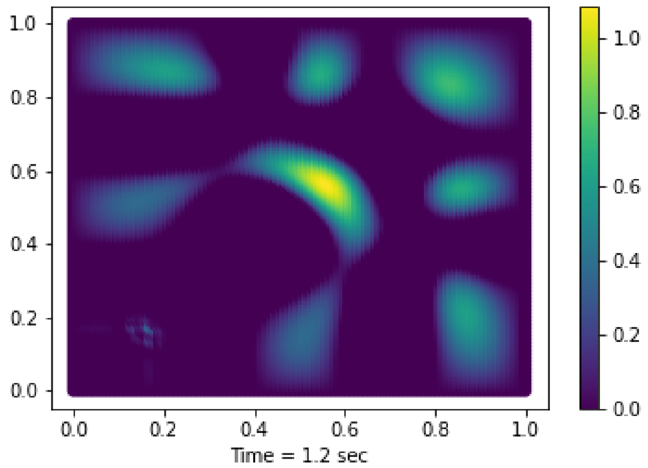

Рис. 6:

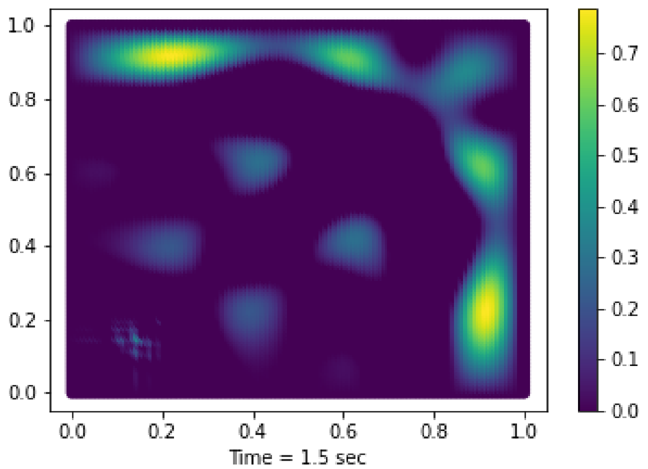

Рис. 7:

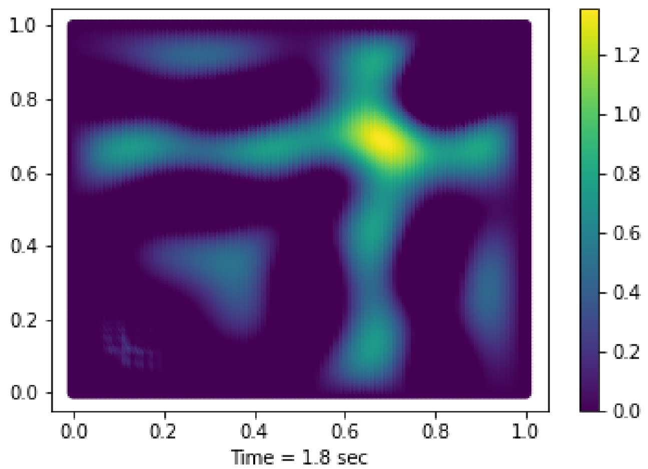

Рис. 8:

6 Заключение

В рамках данной работы можно отметить, что существует еще несколько не показанных здесь методов решения задач волнового типа, что является несомненным упущением. Но и

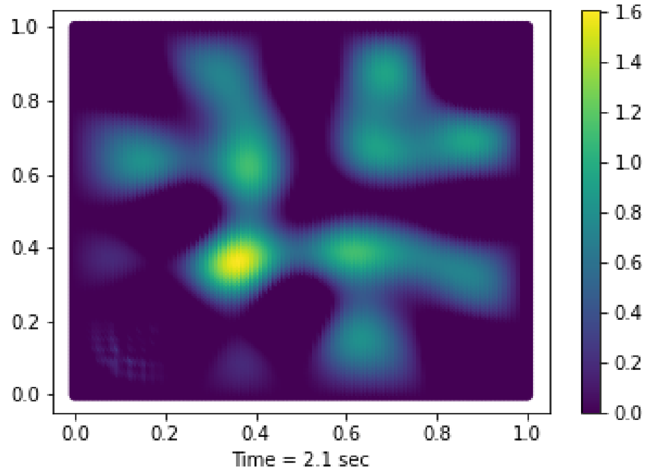

Рис. 9:

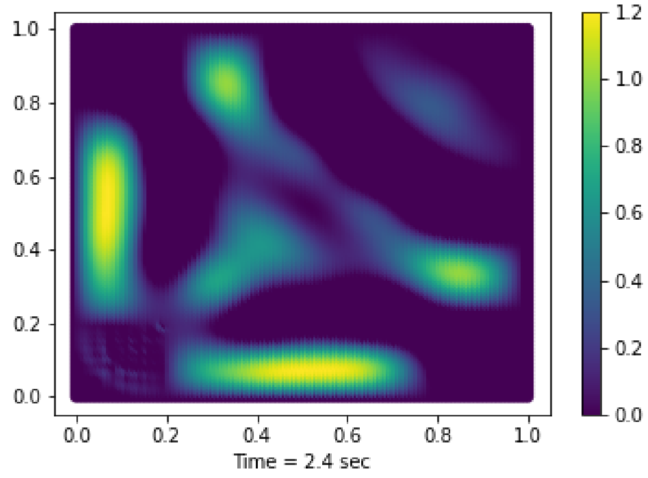

Рис. 10:

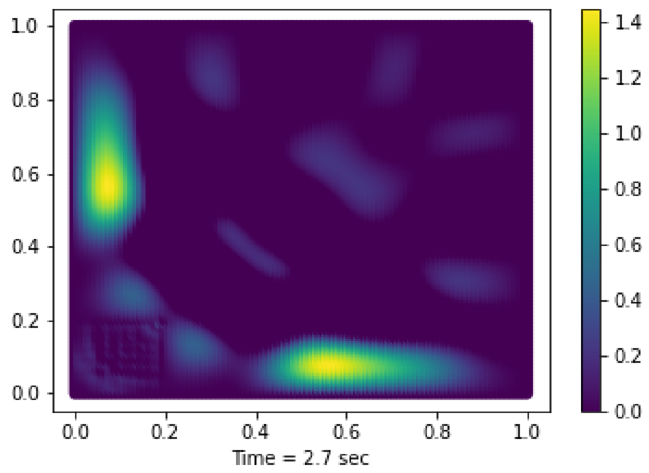

Рис. 11:

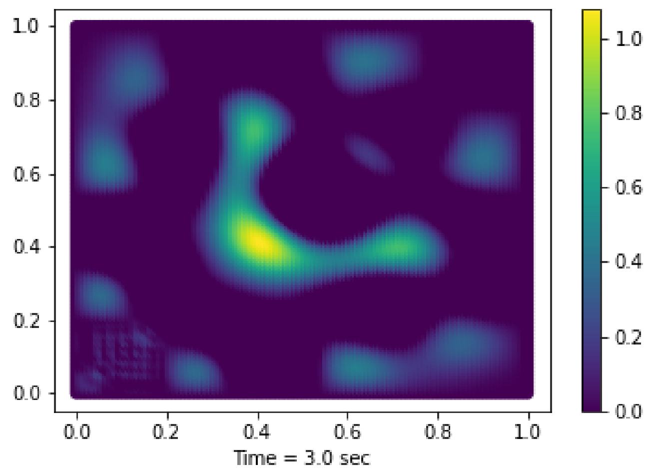

Рис. 12:

дает возможность продолжить данное исследование в дальнейшем.

7 Литература

[1] Grossmann A, Morlet J SIAM J. Math. Anal. 15 723 (1984)

[2] Е. Н. Аристова, А. И. Лобанов Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ Часть II

[3] Н. Н. Елкин Практикум по вычислительным методам физики

[4] Рябенький В. С., Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.

[5] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений