树状数组

引入

树状数组是一种支持 **单点修改** 和 **区间查询** 的，代码量小的数据结构。

什么是「单点修改」和「区间查询」？

假设有这样一道题：

已知一个数列 a，你需要进行下面两种操作：

- 给定 x, y，将 $a[x]$ 自增 y。
- 给定 l, r，求解 $a[l \dots r]$ 的和。

其中第一种操作就是「单点修改」，第二种操作就是「区间查询」。

类似地，还有：「区间修改」、「单点查询」。它们分别的一个例子如下：

- 区间修改：给定 l, r, x，将 $a[l \dots r]$ 中的每个数都分别自增 x；
- 单点查询：给定 x，求解 $a[x]$ 的值。

注意到，区间问题一般严格强于单点问题，因为对单点的操作相当于对一个长度为 1 的区间操作。

普通树状数组维护的信息及运算要满足 **结合律** 且 **可差分**，如加法（和）、乘法（积）、异或等。

- 结合律：$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$，其中 $\circ$ 是一个二元运算符。
- 可差分：具有逆运算的运算，即已知 $x \circ y$ 和 x 可以求出 y。

需要注意的是：

- 模意义下的乘法若要可差分，需保证每个数都存在逆元（模数为质数时一定存在）；
- 例如 $\gcd$，$\max$ 这些信息不可差分，所以不能用普通树状数组处理，但是：
  - 使用两个树状数组可以用于处理区间最值，见 Efficient Range Minimum Queries using Binary Indexed Trees。
  - 本页面也会介绍一种支持不可差分信息查询的，$\Theta(\log^2 n)$ 时间复杂度的拓展树状数组。

事实上，树状数组能解决的问题是线段树能解决的问题的子集：树状数组能做的，线段树一定能做；线段树能做的，树状数组不一定可以。然而，树状数组的代码要远比线段树短，时间效率常数也更小，因此仍有学习价值。

有时，在差分数组和辅助数组的帮助下，树状数组还可解决更强的 **区间加单点值** 和 **区间加区间和** 问题。

树状数组

初步感受

先来举个例子：我们想知道 $a[1\dots7]$ 的前缀和，怎么做？

一种做法是：$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$，需要求 7 个数的和。

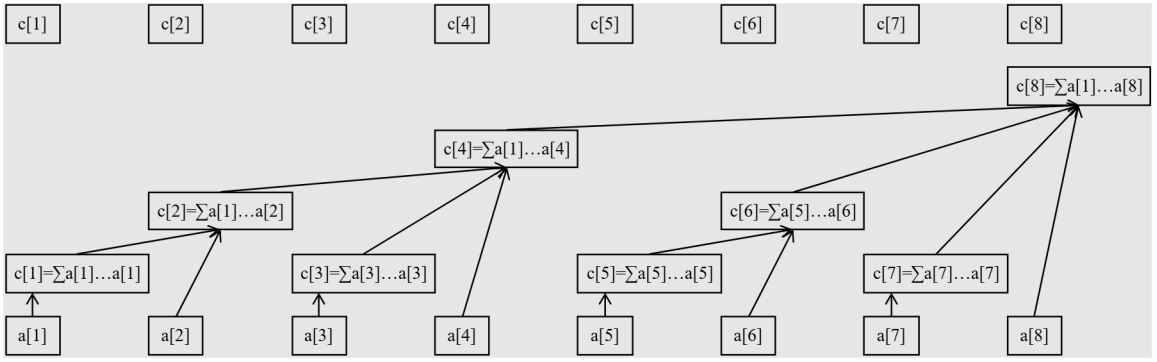
但是如果已知三个数 A，B，C，$A=a[1\dots4]$ 的和，$B=a[5\dots6]$ 的总和，$C=a[7\dots7]$ 的总和（其实就是 $a[7]$ 自己）。你会怎么算？你一定会回答：$A+B+C$，只需要求 3 个数的和。

这就是树状数组能快速求解信息的原因：我们总能将一段前缀 $[1,n]$ 拆成 **不多于 $\log n$ 段区间**，使得这 $\log n$ 段区间的信息是 **已知的**。

于是，我们只需合并这 $\log n$ 段区间的信息，就可以得到答案。相比于原来直接合并 n 个信息，效率有了很大的提高。

不难发现信息必须满足结合律，否则就不能像上面这样合并了。

下面这张图展示了树状数组的工作原理：



最下面的八个方块代表原始数据数组 a。上面参差不齐的方块（与最上面的八个方块是同一个数组）代表数组 a 的上级——c 数组。

c 数组就是用来储存原始数组 a 某段区间的和的，也就是说，这些区间的信息是已知的，我们的目标就是把查询前缀拆成这些小区间。

例如，从图中可以看出：

- c_2 管辖的是 $a[1\dots2]$；
- c_4 管辖的是 $a[1\dots4]$；
- c_6 管辖的是 $a[5\dots6]$；
- c_8 管辖的是 $a[1\dots8]$；

- 剩下的 $c[x]$ 管辖的都是 $a[x]$ 自己（可以看做 $a[x \dots x]$ 的长度为 1 的小区间）。

不难发现，$c[x]$ 管辖的一定是一段右边界是 x 的区间总信息。我们先不关心左边界，先来感受一下树状数组是如何查询的。

举例：计算 $a[1 \dots 7]$ 的和。

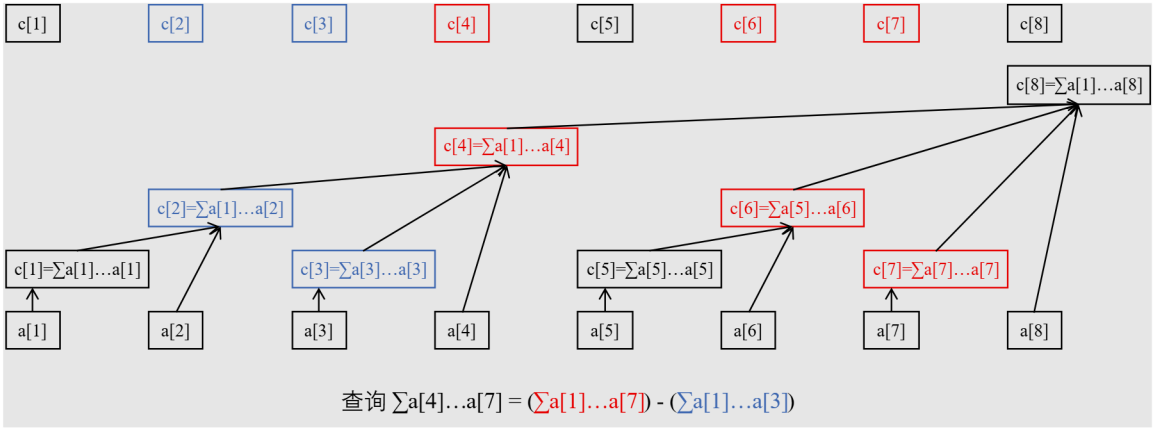
过程：从 c_7 开始往前跳，发现 c_7 只管辖 a_7 这个元素；然后找 c_6，发现 c_6 管辖的是 $a[5 \dots 6]$，然后跳到 c_4，发现 c_4 管辖的是 $a[1 \dots 4]$ 这些元素，然后再试图跳到 c_0，但事实上 c_0 不存在，不跳了。

我们刚刚找到的 c 是 c_7, c_6, c_4，事实上这就是 $a[1 \dots 7]$ 拆分出的三个小区间，合并得到答案是 $c_7 + c_6 + c_4$。

举例：计算 $a[4 \dots 7]$ 的和。

我们还是从 c_7 开始跳，跳到 c_6 再跳到 c_4。此时我们发现它管理了 $a[1 \dots 4]$ 的和，但是我们不想要 $a[1 \dots 3]$ 这一部分，怎么办呢？很简单，减去 $a[1 \dots 3]$ 的和就行了。

那不妨考虑最开始，就将查询 $a[4 \dots 7]$ 的和转化为查询 $a[1 \dots 7]$ 的和，以及查询 $a[1 \dots 3]$ 的和，最终将两个结果作差。



管辖区间

那么问题来了，$c[x](x \geq 1)$ 管辖的区间到底往左延伸多少？也就是说，区间长度是多少？

树状数组中，规定 $c[x]$ 管辖的区间长度为 2^k，其中：

- 设二进制最低位为第 0 位，则 k 恰好为 x 二进制表示中，最低位的 `1` 所在的二进制位数；
- 2^k（$c[x]$ 的管辖区间长度）恰好为 x 二进制表示中，最低位的 `1` 以及后面所有 `0` 组成的数。

举个例子，c_{88} 管辖的是哪个区间？

因为 $88_{(10)} = 01011000_{(2)}$，其二进制最低位的 `1` 以及后面的 `0` 组成的二进制是 `1000`，即 8，所以 c_{88} 管辖 8 个 a 数组中的元素。

因此，c_{88} 代表 $a[81\ldots88]$ 的区间信息。

我们记 x 二进制最低位 `1` 以及后面的 `0` 组成的数为 $\text{lowbit}(x)$，那么 $c[x]$ 管辖的区间就是 $[x-\text{lowbit}(x)+1, x]$。

这里注意：lowbit 指的不是最低位 `1` 所在的位数 k，而是这个 `1` 和后面所有 `0` 组成的 2^k。

怎么计算 `lowbit`？根据位运算知识，可以得到 `lowbit(x) = x & -x`。

lowbit 的原理

将 `x` 的二进制所有位全部取反，再加 1，就可以得到 `-x` 的二进制编码。例如，6 的二进制编码是 `110`，全部取反后得到 `001`，加 `1` 得到 `010`。

设原先 `x` 的二进制编码是 `(...)10...00`，全部取反后得到 `[...]01...11`，加 `1` 后得到 `[...]10...00`，也就是 `-x` 的二进制编码了。这里 `x` 二进制表示中第一个 `1` 是 `x` 最低位的 `1`。

`(...)` 和 `[...]` 中省略号的每一位分别相反，所以 `x & -x = (...)10...00 & [...]10...00 = 10...00`，得到的结果就是 `lowbit`。

实现

C++

```cpp
int lowbit(int x) {
  // x 的二进制中，最低位的 1 以及后面所有 0 组成的数。
  // lowbit(0b01011000) == 0b00001000
  //           ~~~~^~~~
  // lowbit(0b01110010) == 0b00000010
  //           ~~~~~~^~
  return x & -x;
}
```

Python

```python
def lowbit(x):
    """
    x 的二进制中，最低位的 1 以及后面所有 0 组成的数。
    lowbit(0b01011000) == 0b00001000
             ~~~~~^~~
    lowbit(0b01110010) == 0b00000010
             ~~~~~~~^~
    """
    return x & -x
```

区间查询

接下来我们来看树状数组具体的操作实现，先来看区间查询。

回顾查询 $a[4\dots7]$ 的过程，我们是将它转化为两个子过程：查询 $a[1\dots7]$ 和查询 $a[1\dots3]$ 的和，最终作差。

其实任何一个区间查询都可以这么做：查询 $a[l\dots r]$ 的和，就是 $a[1\dots r]$ 的和减去 $a[1\dots l-1]$ 的和，从而把区间问题转化为前缀问题，更方便处理。

事实上，将有关 $l\dots r$ 的区间询问转化为 $1\dots r$ 和 $1\dots l-1$ 的前缀询问再差分，在竞赛中是一个非常常用的技巧。

那前缀查询怎么做呢？回顾下查询 $a[1\dots7]$ 的过程：

> 从 c_7 往前跳，发现 c_7 只管辖 a_7 这个元素；然后找 c_6，发现 c_6 管辖的是 $a[5\dots6]$，然后跳到 c_4，发现 c_4 管辖的是 $a[1\dots4]$ 这些元素，然后再试图跳到 c_0，但事实上 c_0 不存在，不跳了。
>
> 我们刚刚找到的 c 是 c_7,c_6,c_4，事实上这就是 $a[1\dots7]$ 拆分出的三个小区间，合并一下，答案是 $c_7+c_6+c_4$。

观察上面的过程，每次往前跳，一定是跳到现区间的左端点的左一位，作为新区间的右端点，这样才能将前缀不重不漏地拆分。比如现在 c_6 管的是 $a[5\dots6]$，下一次就跳到 $5-1=4$，即访问 c_4。

我们可以写出查询 $a[1\dots x]$ 的过程：

- 从 $c[x]$ 开始往前跳，有 $c[x]$ 管辖 $a[x-\operatorname{lowbit}(x)+1\dots x]$；
- 令 $x\leftarrow x-\operatorname{lowbit}(x)$，如果 $x=0$ 说明已经跳到尽头了，终止循环；否则回到第一步。
- 将跳到的 c 合并。

实现时，我们不一定要先把 c 都跳出来然后一起合并，可以边跳边合并。

比如我们要维护的信息是和，直接令初始 $\text{ans}=0$，然后每跳到一个 $c[x]$ 就 $\text{ans}\leftarrow\text{ans}+c[x]$，最终 ans 就是所有合并的结果。

实现

C++

```cpp
int getsum(int x) {  // a[1]..a[x]的和
  int ans = 0;
  while (x > 0) {
    ans = ans + c[x];
    x = x - lowbit(x);
  }
  return ans;
}
```

Python

```python
def getsum(x):  # a[1]..a[x]的和
    ans = 0
    while x > 0:
        ans = ans + c[x]
        x = x - lowbit(x)
    return ans
```

树状数组与其树形态的性质

> 在讲解单点修改之前，先讲解树状数组的一些基本性质，以及其树形态来源，这有助于更好理解树状数组的单点修改。

我们约定：

- $l(x) = x - \text{lowbit}(x) + 1$。即，$l(x)$ 是 $c[x]$ 管辖范围的左端点。
- 对于任意正整数 x，总能将 x 表示成 $s \times 2^{k+1} + 2^k$ 的形式，其中 $\text{lowbit}(x) = 2^k$。
- 下面「$c[x]$ 和 $c[y]$ 不交」指 $c[x]$ 的管辖范围和 $c[y]$ 的管辖范围不相交，即 $[l(x), x]$ 和 $[l(y), y]$ 不相交。「$c[x]$ 包含于 $c[y]$」等表述同理。

性质 1：对于 $x \le y$，要么有 $c[x]$ 和 $c[y]$ 不交，要么有 $c[x]$ 包含于 $c[y]$。

证明

证明：假设 $c[x]$ 和 $c[y]$ 相交，即 $[l(x),x]$ 和 $[l(y),y]$ 相交，则一定有 $l(y)\le x\le y$。

将 y 表示为 $s\times 2^{k+1}+2^k$，则 $l(y)=s\times 2^{k+1}+1$。所以，x 可以表示为 $s\times 2^{k+1}+b$，其中 $1\le b\le 2^k$。

不难发现 $\text{lowbit}(x)=\text{lowbit}(b)$。又因为 $b-\text{lowbit}(b)\ge 0$，

所以 $l(x)=x-\text{lowbit}(x)+1=s\times 2^{k+1}+b-\text{lowbit}(b)+1\ge s\times 2^{k+1}+1=l(y)$，即 $l(y)\le l(x)\le x\le y$。

所以，如果 $c[x]$ 和 $c[y]$ 相交，那么 $c[x]$ 的管辖范围一定完全包含于 $c[y]$。

性质 2：$c[x]$ 真包含于 $c[x+\text{lowbit}(x)]$。

证明

证明：设 $y=x+\text{lowbit}(x)$，$x=s\times 2^{k+1}+2^k$，则 $y=(s+1)\times 2^{k+1}$，$l(x)=s\times 2^{k+1}+1$。

不难发现 $\text{lowbit}(y)\ge 2^{k+1}$，所以 $l(y)=(s+1)\times 2^{k+1}-\text{lowbit}(y)+1\le s\times 2^{k+1}+1=l(x)$，即 $l(y)\le l(x)\le x<y$。

所以，$c[x]$ 真包含于 $c[x+\text{lowbit}(x)]$。

性质 3：对于任意 $x<y<x+\text{lowbit}(x)$，有 $c[x]$ 和 $c[y]$ 不交。

证明

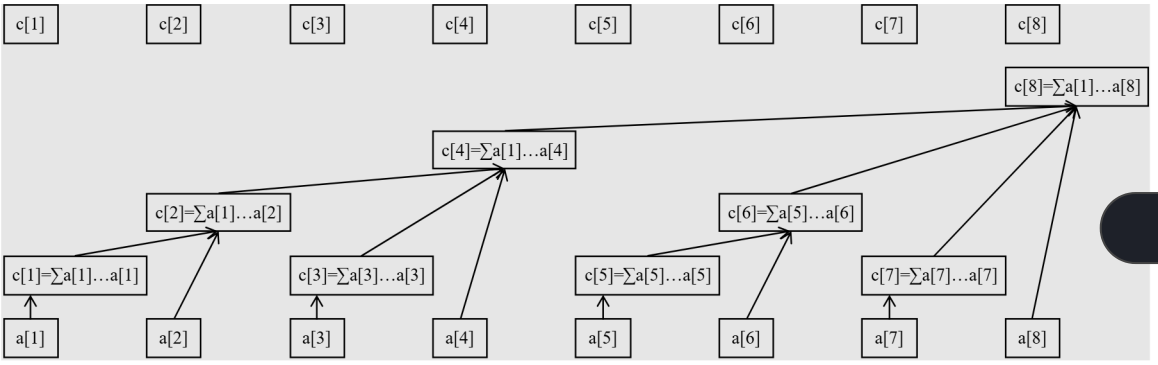
证明：设 $x=s\times 2^{k+1}+2^k$，则 $y=x+b=s\times 2^{k+1}+2^k+b$，其中 $1\le b<2^k$。

不难发现 $\text{lowbit}(y)=\text{lowbit}(b)$。又因为 $b-\text{lowbit}(b)\ge 0$，

因此 $l(y)=y-\text{lowbit}(y)+1=x+b-\text{lowbit}(b)+1>x$，即 $l(x)\le x<l(y)\le y$。

所以，$c[x]$ 和 $c[y]$ 不交。

有了这三条性质的铺垫，我们接下来看树状数组的树形态（请忽略 a 向 c 的连边）。



事实上，树状数组的树形态是 x 向 $x+\text{lowbit}(x)$ 连边得到的图，其中 $x+\text{lowbit}(x)$ 是 x 的父亲。

注意，在考虑树状数组的树形态时，我们不考虑树状数组大小的影响，即我们认为这是一棵无限大的树，方便分析。实际实现时，我们只需用到 $x \le n$ 的 $c[x]$，其中 n 是原数组长度。

这棵树天然满足了很多美好性质，下面列举若干（设 $fa[u]$ 表示 u 的直系父亲）：

- $u < fa[u]$。
- u 大于任何一个 u 的后代，小于任何一个 u 的祖先。
- 点 u 的 lowbit 严格小于 $fa[u]$ 的 lowbit。

证明

设 $y = x + \text{lowbit}(x)$，$x = s \times 2^{k+1} + 2^k$，则 $y = (s+1) \times 2^{k+1}$，不难发现 $\text{lowbit}(y) \ge 2^{k+1} > \text{lowbit}(x)$，证毕。

- 点 x 的高度是 $\log_2 \text{lowbit}(x)$，即 x 二进制最低位 `1` 的位数。

高度的定义

点 x 的高度 $h(x)$ 满足：如果 $x \bmod 2 = 1$，则 $h(x) = 0$，否则 $h(x) = \max(h(y)) + 1$，其中 y 代表 x 的所有儿子（此时 x 至少存在一个儿子 $x-1$）。

也就是说，一个点的高度恰好比它最高的那个儿子再高 1。如果一个点没有儿子，它的高度是 0。

这里引出高度这一概念，是为后面解释复杂度更方便。

- $c[u]$ 真包含于 $c[fa[u]]$（性质 2）。
- $c[u]$ 真包含于 $c[v]$，其中 v 是 u 的任一祖先（在上一条性质上归纳）。
- $c[u]$ 真包含 $c[v]$，其中 v 是 u 的任一后代（上面那条性质 u，v 颠倒）。
- 对于任意 $v' > u$，若 v' 不是 u 的祖先，则 $c[u]$ 和 $c[v']$ 不交。

证明

u 和 u 的祖先中，一定存在一个点 v 使得 $v < v' < fa[v]$，根据性质 3 得 $c[v']$ 不相交于 $c[v]$，而 $c[v]$ 包含 $c[u]$，因此 $c[v']$ 不交于 $c[u]$。

- 对于任意 $v < u$，如果 v 不在 u 的子树上，则 $c[u]$ 和 $c[v]$ 不交（上面那条性质 u，v' 颠倒）。
- 对于任意 $v > u$，当且仅当 v 是 u 的祖先，$c[u]$ 真包含于 $c[v]$（上面几条性质的总结）。这就是树状数组单点修改的核心原理。
- 设 $u = s \times 2^{k+1} + 2^k$，则其儿子数量为 $k = \log_2 \text{lowbit}(u)$，编号分别为 $u - 2^t (0 \le t < k)$。
  - 举例：假设 $k = 3$，u 的二进制编号为 `...1000`，则 u 有三个儿子，二进制编号分别为 `...0111`、`...0110`、`...0100`。

证明

在一个数 x 的基础上减去 2^t，x 二进制第 t 位会反转，而更低的位保持不变。

考虑 u 的儿子 v，有 $v + \text{lowbit}(v) = u$，即 $v = u - 2^t$ 且 $\text{lowbit}(v) = 2^t$。设 $u = s \times 2^{k+1} + 2^k$。

考虑 $0 \le t < k$，u 的第 t 位及后方均为 0，所以 $v = u - 2^t$ 的第 t 位变为 1，后面仍为 0，**满足** $\text{lowbit}(v) = 2^t$。

考虑 $t = k$，则 $v = u - 2^k$，v 的第 k 位变为 0，**不满足** $\text{lowbit}(v) = 2^t$。

考虑 $t > k$，则 $v = u - 2^t$，v 的第 k 位是 1，所以 $\text{lowbit}(v) = 2^k$，**不满足** $\text{lowbit}(v) = 2^t$。

- u 的所有儿子对应 c 的管辖区间恰好拼接成 $[l(u), u - 1]$。
  - 举例：假设 $k = 3$，u 的二进制编号为 `...1000`，则 u 有三个儿子，二进制编号分别为 `...0111`、`...0110`、`...0100`。
  - `c[...0100]` 表示 `a[...0001 ~ ...0100]`。
  - `c[...0110]` 表示 `a[...0101 ~ ...0110]`。
  - `c[...0111]` 表示 `a[...0111 ~ ...0111]`。
  - 不难发现上面是三个管辖区间的并集恰好是 `a[...0001 ~ ...0111]`，即 $[l(u), u - 1]$。

证明

u 的儿子总能表示成 $u-2^t(0\le t<k)$，不难发现，t 越小，$u-2^t$ 越大，代表的区间越靠右。我们设 $f(t)=u-2^t$，则 $f(k-1),f(k-2),\dots,f(0)$ 分别构成 u 从左到右的儿子。

不难发现 $\text{lowbit}(f(t))=2^t$，所以 $l(f(t))=u-2^t-2^t+1=u-2^{t+1}+1$。

考虑相邻的两个儿子 $f(t+1)$ 和 $f(t)$。前者管辖区间的右端点是 $f(t+1)=u-2^{t+1}$，后者管辖区间的左端点是 $l(f(t))=u-2^{t+1}+1$，恰好相接。

考虑最左面的儿子 $f(k-1)$，其管辖左边界 $l(f(k-1))=u-2^k+1$ 恰为 $l(u)$。

考虑最右面的儿子 $f(0)$，其管辖右边界就是 $u-1$。

因此，这些儿子的管辖区间可以恰好拼成 $[l(u),u-1]$。

单点修改

现在来考虑如何单点修改 $a[x]$。

我们的目标是快速正确地维护 c 数组。为保证效率，我们只需遍历并修改管辖了 $a[x]$ 的所有 $c[y]$，因为其他的 c 显然没有发生变化。

> 管辖 $a[x]$ 的 $c[y]$ 一定包含 $c[x]$（根据性质 1），所以 y 在树状数组树形态上是 x 的祖先。因此我们从 x 开始不断跳父亲，直到跳得超过了原数组长度为止。

设 n 表示 a 的大小，不难写出单点修改 $a[x]$ 的过程：

- 初始令 $x'=x$。
- 修改 $c[x']$。
- 令 $x'\leftarrow x'+\text{lowbit}(x')$，如果 $x'>n$ 说明已经跳到尽头了，终止循环；否则回到第二步。

区间信息和单点修改的种类，共同决定 $c[x']$ 的修改方式。下面给几个例子：

- 若 $c[x']$ 维护区间和，修改种类是将 $a[x]$ 加上 p，则修改方式则是将所有 $c[x']$ 也加上 p。
- 若 $c[x']$ 维护区间积，修改种类是将 $a[x]$ 乘上 p，则修改方式则是将所有 $c[x']$ 也乘上 p。

然而，单点修改的自由性使得修改的种类和维护的信息不一定是同种运算，比如，若 $c[x']$ 维护区间和，修改种类是将 $a[x]$ 赋值为 p，可以考虑转化为将 $a[x]$ 加上 $p-a[x]$。如果是将 $a[x]$ 乘上 p，就考虑转化为 $a[x]$ 加上 $a[x]\times p-a[x]$。

下面以维护区间和，单点加为例给出实现。

实现

C++

```cpp
void add(int x, int k) {
  while (x <= n) {  // 不能越界
    c[x] = c[x] + k;
    x = x + lowbit(x);
  }
}
```

Python

```python
def add(x, k):
    while x <= n:  # 不能越界
        c[x] = c[x] + k
        x = x + lowbit(x)
```

建树

也就是根据最开始给出的序列，将树状数组建出来（c 全部预处理好）。

一般可以直接转化为 n 次单点修改，时间复杂度 $\Theta(n \log n)$（复杂度分析在后面）。

比如给定序列 $a = (5, 1, 4)$ 要求建树，直接看作对 $a[1]$ 单点加 5，对 $a[2]$ 单点加 1，对 $a[3]$ 单点加 4 即可。

也有 $\Theta(n)$ 的建树方法，见本页面 $\Theta(n)$ 建树 一节。

复杂度分析

空间复杂度显然 $\Theta(n)$。

时间复杂度：

- 对于区间查询操作：整个 $x \leftarrow x - \text{lowbit}(x)$ 的迭代过程，可看做将 x 二进制中的所有 1，从低位到高位逐渐改成 0 的过程，拆分出的区间数等于 x 二进制中 1 的数量（即 $\text{popcount}(x)$）。因此，单次查询时间复杂度是 $\Theta(\log n)$；
- 对于单点修改操作：跳父亲时，访问到的高度一直严格增加，且始终有 $x \leq n$。由于点 x 的高度是 $\log_2 \text{lowbit}(x)$，所以跳到的高度不会超过 $\log_2 n$，所以访问到的 c 的数量是 $\log n$ 级别。因此，单次单点修改复杂度是 $\Theta(\log n)$。

区间加区间和

前置知识：前缀和 & 差分。

该问题可以使用两个树状数组维护差分数组解决。

考虑序列 a 的差分数组 d，其中 $d[i] = a[i] - a[i-1]$。由于差分数组的前缀和就是原数组，所以 $a_i = \sum_{j=1}^{i} d_j$。

一样地，我们考虑将查询区间和通过差分转化为查询前缀和。那么考虑查询 $a[1 \dots r]$ 的和，即 $\sum_{i=1}^{r} a_i$，进行推导：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r} a_i \\ =&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i} d_j\end{aligned}$$

观察这个式子，不难发现每个 d_j 总共被加了 $r-j+1$ 次。接着推导：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i} d_j \\ =&\sum_{i=1}^{r} d_i \times (r-i+1) \\ =&\sum_{i=1}^{r} d_i \times (r+1) - \sum_{i=1}^{r} d_i \times i\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{r} d_i$ 并不能推出 $\sum_{i=1}^{r} d_i \times i$ 的值，所以要用两个树状数组分别维护 d_i 和 $d_i \times i$ 的和信息。

那么怎么做区间加呢？考虑给原数组 $a[l \dots r]$ 区间加 x 给 d 带来的影响。

因为差分是 $d[i] = a[i] - a[i-1]$，

- $a[l]$ 多了 v 而 $a[l-1]$ 不变，所以 $d[l]$ 的值多了 v。
- $a[r+1]$ 不变而 $a[r]$ 多了 v，所以 $d[r+1]$ 的值少了 v。
- 对于不等于 l 且不等于 $r+1$ 的任意 i，$a[i]$ 和 $a[i-1]$ 要么都没发生变化，要么都加了 v，$a[i]+v-(a[i-1]+v)$ 还是 $a[i]-a[i-1]$，所以其它的 $d[i]$ 均不变。

那就不难想到维护方式了：对于维护 d_i 的树状数组，对 l 单点加 v，$r+1$ 单点加 $-v$；对于维护 $d_i \times i$ 的树状数组，对 l 单点加 $v \times l$，$r+1$ 单点加 $-v \times (r+1)$。

而更弱的问题，「区间加求单点值」，只需用树状数组维护一个差分数组 d_i。询问 $a[x]$ 的单点值，直接求 $d[1 \dots x]$ 的和即可。

这里直接给出「区间加区间和」的代码：

实现

C++

```cpp
int t1[MAXN], t2[MAXN], n;

int lowbit(int x) { return x & (-x); }

void add(int k, int v) {
  int v1 = k * v;
  while (k <= n) {
    t1[k] += v, t2[k] += v1;
    // 注意不能写成 t2[k] += k * v，因为 k 的值已经不是原数组的下标了
    k += lowbit(k);
  }
}

int getsum(int *t, int k) {
  int ret = 0;
  while (k) {
    ret += t[k];
    k -= lowbit(k);
  }
  return ret;
}

void add1(int l, int r, int v) {
  add(l, v), add(r + 1, -v);  // 将区间加差分为两个前缀加
}

long long getsum1(int l, int r) {
  return (r + 1ll) * getsum(t1, r) - 1ll * l * getsum(t1, l - 1)
-
         (getsum(t2, r) - getsum(t2, l - 1));
}
```

Python

```python
t1 = [0] * MAXN
t2 = [0] * MAXN
n = 0


def lowbit(x):
    return x & (-x)


def add(k, v):
    v1 = k * v
    while k <= n:
        t1[k] = t1[k] + v
```

```
        t2[k] = t2[k] + v1
        k = k + lowbit(k)


def getsum(t, k):
    ret = 0
    while k:
        ret = ret + t[k]
        k = k - lowbit(k)
    return ret


def add1(l, r, v):
    add(l, v)
    add(r + 1, -v)


def getsum1(l, r):
    return (
        (r) * getsum(t1, r)
        - l * getsum(t1, l - 1)
        - (getsum(t2, r) - getsum(t2, l - 1))
    )
```

根据这个原理，应该可以实现「区间乘区间积」，「区间异或一个数，求区间异或值」等，只要满足维护的信息和区间操作是同种运算即可，感兴趣的读者可以自己尝试。

二维树状数组

单点修改，子矩阵查询

二维树状数组，也被称作树状数组套树状数组，用来维护二维数组上的单点修改和前缀信息问题。

与一维树状数组类似，我们用 $c(x,y)$ 表示 $a(x-\text{lowbit}(x)+1,y-\text{lowbit}(y)+1)\dots a(x,y)$ 的矩阵总信息，即一个以 $a(x,y)$ 为右下角，高 $\text{lowbit}(x)$，宽 $\text{lowbit}(y)$ 的矩阵的总信息。

对于单点修改，设：

$$f(x,i)=\begin{cases}x & i=0\\ f(x,i-1)+\text{lowbit}(f(x,i-1)) & i>0\end{cases}$$

即 $f(x,i)$ 为 x 在树状数组树形态上的第 i 级祖先（第 0 级祖先是自己）。

则只有 $c(f(x,i),f(y,j))$ 中的元素管辖 $a(x,y)$，修改 $a(x,y)$ 时只需修改所有 $c(f(x,i),f(y,j))$，其中 $f(x,i)\le n$，$f(y,j)\le m$。

正确性证明

$c(p,q)$ 管辖 $a(x,y)$，求 p 和 q 的取值范围。

考虑一个大小为 n 的一维树状数组 c_1（对应原数组 a_1）和一个大小为 m 的一维树状数组 c_2（对应原数组 a_2）。

则命题等价为：$c_1(p)$ 管辖 $a_1[x]$ 且 $c_2(q)$ 管辖 $a_2[y]$ 的条件。

也就是说，在树状数组树形态上，p 是 x 及其祖先中的一个点，q 是 y 及其祖先中的一个点。

所以 $p=f(x,i)$，$q=f(y,j)$。

对于查询，我们设：

$$g(x,i)=\begin{cases}x & i=0\\ g(x,i-1)-\operatorname{lowbit}(g(x,i-1)) & i,g(x,i-1)>0\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

则合并所有 $c(g(x,i),g(y,j))$，其中 $g(x,i),g(y,j)>0$。

正确性证明

设 $\circ$ 表示合并两个信息的运算符（比如，如果信息是区间和，则 $\circ=+$）。

考虑一个一维树状数组 c_1，$c_1[g(x,0)]\circ c_1[g(x,1)]\circ c_1[g(x,2)]\circ\cdots$ 恰好表示原数组上 $[1\dots x]$ 这段区间信息。

类似地，设 $t(x)=c(x,g(y,0))\circ c(x,g(y,1))\circ c(x,g(y,2))\circ\cdots$，则 $t(x)$ 恰好表示 $a(x-\operatorname{lowbit}(x)+1,1)\dots a(x,y)$ 这个矩阵信息。

又类似地，就有 $t(g(x,0))\circ t(g(x,1))\circ t(g(x,2))\circ\cdots$ 表示 $a(1,1)\dots a(x,y)$ 这个矩阵信息。

其实这里 $t(x)$ 这个函数如果看成一个树状数组，相当于一个树状数组套了一个树状数组，这也就是「树状数组套树状数组」这个名字的来源。

下面给出单点加、查询子矩阵和的代码。

实现

单点加

```
void add(int x, int y, int v) {
  for (int i = x; i <= n; i += lowbit(i)) {
    for (int j = y; j <= m; j += lowbit(j)) {
      // 注意这里必须得建循环变量，不能像一维数组一样直接 while (x <=
n) 了
      c[i][j] += v;
    }
  }
}
```

查询子矩阵和

```
int sum(int x, int y) {
  int res = 0;
  for (int i = x; i > 0; i -= lowbit(i)) {
    for (int j = y; j > 0; j -= lowbit(j)) {
      res += c[i][j];
    }
  }
  return res;
}

int ask(int x1, int y1, int x2, int y2) {
  // 查询子矩阵和
  return sum(x2, y2) - sum(x2, y1 - 1) - sum(x1 - 1, y2) + sum(x1
- 1, y1 - 1);
}
```

子矩阵加，求子矩阵和

前置知识：前缀和 & 差分 和本页面 区间加区间和 一节。

和一维树状数组的「区间加区间和」问题类似，考虑维护差分数组。

二维数组上的差分数组是这样的：

$$d(i,j) = a(i,j) - a(i-1,j) - a(i,j-1) + a(i-1,j-1)。$$

为什么这么定义？

这是因为，理想规定状态下，在差分矩阵上做二维前缀和应该得到原矩阵，因为这是一对逆运算。

二维前缀和的公式是这样的：

$s(i,j)=s(i-1,j)+s(i,j-1)-s(i-1,j-1)+a(i,j)$。

所以，设 a 是原数组，d 是差分数组，有：

$a(i,j)=a(i-1,j)+a(i,j-1)-a(i-1,j-1)+d(i,j)$

移项就得到二维差分的公式了。

$d(i,j)=a(i,j)-a(i-1,j)-a(i,j-1)+a(i-1,j-1)$。

这样以来，对左上角 (x_1,y_1)，右下角 (x_2,y_2) 的子矩阵区间加 v，相当于在差分数组上，对 $d(x_1,y_1)$ 和 $d(x_2+1,y_2+1)$ 分别单点加 v，对 $d(x_2+1,y_1)$ 和 $d(x_1,y_2+1)$ 分别单点加 $-v$。

至于原因，把这四个 d 分别用定义式表示出来，分析一下每项的变化即可。

举个例子吧，初始差分数组为 0，给 $a(2,2)\dots a(3,4)$ 子矩阵加 v 后差分数组会变为：

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&v&0&0&-v\\0&0&0&0&0\\0&-v&0&0&v\end{pmatrix}$$

（其中 $a(2,2)\dots a(3,4)$ 这个子矩阵恰好是上面位于中心的 2×3 大小的矩阵。）

因此，子矩阵加的做法是：转化为差分数组上的四个单点加操作。

现在考虑查询子矩阵和：

对于点 (x,y)，它的二维前缀和可以表示为：

$$\sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{y}\sum_{h=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}d(h,k)$$

原因就是差分的前缀和的前缀和就是原本的前缀和。

和一维树状数组的「区间加区间和」问题类似，统计 $d(h,k)$ 的出现次数，为 $(x-h+1)\times(y-k+1)$。

然后接着推导：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{y}\sum_{h=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}d(h,k)\\
=&\sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{y}d(i,j)\times(x-i+1)\times(y-j+1)\\
=&\sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{y}d(i,j)\times(xy+x+y+1)-d(i,j)\times i\times(y+1)-d(i,j)\times j\times(x+1)+d(i,j)\times i\times
\end{aligned}
$$

所以我们需维护四个树状数组，分别维护 $d(i,j)$，$d(i,j)\times i$，$d(i,j)\times j$，$d(i,j)\times i\times j$ 的和信息。

当然了，和一维同理，如果只需要子矩阵加求单点值，维护一个差分数组然后询问前缀和就足够了。

下面给出代码：

实现

```cpp
using ll = long long;
ll t1[N][N], t2[N][N], t3[N][N], t4[N][N];

void add(ll x, ll y, ll z) {
  for (int X = x; X <= n; X += lowbit(X))
    for (int Y = y; Y <= m; Y += lowbit(Y)) {
      t1[X][Y] += z;
      t2[X][Y] += z * x;  // 注意是 z * x 而不是 z * X，后面同理
      t3[X][Y] += z * y;
      t4[X][Y] += z * x * y;
    }
}

void range_add(ll xa, ll ya, ll xb, ll yb,
               ll z) {  //(xa, ya) 到 (xb, yb) 子矩阵
  add(xa, ya, z);
  add(xa, yb + 1, -z);
  add(xb + 1, ya, -z);
  add(xb + 1, yb + 1, z);
}

ll ask(ll x, ll y) {
  ll res = 0;
  for (int i = x; i; i -= lowbit(i))
    for (int j = y; j; j -= lowbit(j))
      res += (x + 1) * (y + 1) * t1[i][j] - (y + 1) * t2[i][j] -
             (x + 1) * t3[i][j] + t4[i][j];
  return res;
}

ll range_ask(ll xa, ll ya, ll xb, ll yb) {
  return ask(xb, yb) - ask(xb, ya - 1) - ask(xa - 1, yb) + ask(xa
- 1, ya - 1);
}
```

权值树状数组及应用

我们知道，普通树状数组直接在原序列的基础上构建，c_6 表示的就是 $a[5\ldots6]$ 的区间信息。

然而事实上，我们还可以在原序列的权值数组上构建树状数组，这就是权值树状数组。

什么是权值数组？

一个序列 a 的权值数组 b，满足 $b[x]$ 的值为 x 在 a 中的出现次数。

例如：$a=(1,3,4,3,4)$ 的权值数组为 $b=(1,0,2,2)$。

很明显，b 的大小和 a 的值域有关。

若原数列值域过大，且重要的不是具体值而是值与值之间的相对大小关系，常 离散化 原数组后再建立权值数组。

另外，权值数组是原数组无序性的一种表示：它重点描述数组的元素内容，忽略了数组的顺序，若两数组只是顺序不同，所含内容一致，则它们的权值数组相同。

因此，对于给定数组的顺序不影响答案的问题，在权值数组的基础上思考一般更直观，比如 [NOIP2021] 数列。

运用权值树状数组，我们可以解决一些经典问题。

单点修改，查询全局第 k 小

在此处只讨论第 k 小，第 k 大问题可以通过简单计算转化为第 k 小问题。

该问题可离散化，如果原序列 a 值域过大，离散化后再建立权值数组 b。注意，还要把单点修改中的涉及到的值也一起离散化，不能只离散化原数组 a 中的元素。

对于单点修改，只需将对原数列的单点修改转化为对权值数组的单点修改即可。具体来说，原数组 $a[x]$ 从 y 修改为 z，转化为对权值数组 b 的单点修改就是 $b[y]$ 单点减 1，$b[z]$ 单点加 1。

对于查询第 k 小，考虑二分 x，查询权值数组中 $[1,x]$ 的前缀和，找到 x_0 使得 $[1,x_0]$ 的前缀和 $<k$ 而 $[1,x_0+1]$ 的前缀和 $\geq k$，则第 k 大的数是 x_0+1（注：这里认为 $[1,0]$ 的前缀和是 0）。

这样做时间复杂度是 $\Theta(\log^2 n)$ 的。

考虑用倍增替代二分。

设 $x=0$，$\mathrm{sum}=0$，枚举 i 从 $\log_2 n$ 降为 0：

- 查询权值数组中 $[x+1\dots x+2^i]$ 的区间和 t。
- 如果 $\mathrm{sum}+t<k$，扩展成功，$x\leftarrow x+2^i$，$\mathrm{sum}\leftarrow \mathrm{sum}+t$；否则扩展失败，不操作。

这样得到的 x 是满足 $[1\dots x]$ 前缀和 $<k$ 的最大值，所以最终 $x+1$ 就是答案。

看起来这种方法时间效率没有任何改善，但事实上，查询 $[x+1\dots x+2^i]$ 的区间和只需访问 $c[x+2^i]$ 的值即可。

原因很简单，考虑 $\mathrm{lowbit}(x+2^i)$，它一定是 2^i，因为 x 之前只累加过 2^j 满足 $j>i$。因此 $c[x+2^i]$ 表示的区间就是 $[x+1\dots x+2^i]$。

如此一来，时间复杂度降低为 $\Theta(\log n)$。

实现

C++

```cpp
// 权值树状数组查询第 k 小
int kth(int k) {
  int sum = 0, x = 0;
  for (int i = log2(n); ~i; --i) {
    x += 1 << i;                    // 尝试扩展
    if (x >= n || sum + t[x] >= k)  // 如果扩展失败
      x -= 1 << i;
    else
      sum += t[x];
  }
  return x + 1;
}
```

Python

```python
# 权值树状数组查询第 k 小
def kth(k):
    sum = 0
    x = 0
    i = int(log2(n))
    while ~i:
        x = x + (1 << i)  # 尝试扩展
        if x >= n or sum + t[x] >= k:  # 如果扩展失败
            x = x - (1 << i)
        else:
            sum = sum + t[x]
        i = i - 1
    return x + 1
```

全局逆序对（全局二维偏序）

相关阅读和参考实现：逆序对

全局逆序对也可以用权值树状数组巧妙解决。问题是这样的：给定长度为 n 的序列 a，求 a 中满足 $i < j$ 且 $a[i] > a[j]$ 的数对 (i, j) 的数量。

该问题可离散化，如果原序列 a 值域过大，离散化后再建立权值数组 b。

我们考虑从 n 到 1 倒序枚举 i，作为逆序对中第一个元素的索引，然后计算有多少个 $j > i$ 满足 $a[j] < a[i]$，最后累计答案即可。

事实上，我们只需要这样做（设当前 $a[i] = x$）：

- 查询 $b[1 \dots x-1]$ 的前缀和，即为左端点为 $a[i]$ 的逆序对数量。
- $b[x]$ 自增 1；

原因十分自然：出现在 $b[1 \dots x-1]$ 中的元素一定比当前的 $x = a[i]$ 小，而 i 的倒序枚举，自然使得这些已在权值数组中的元素，在原数组上的索引 j 大于当前遍历到的索引 i。

用例子说明，$a = (4, 3, 1, 2, 1)$。

i 按照 $5 \to 1$ 扫：

- $a[5] = 1$，查询 $b[1 \dots 0]$ 前缀和，为 0，$b[1]$ 自增 1，$b = (1, 0, 0, 0)$。
- $a[4] = 2$，查询 $b[1 \dots 1]$ 前缀和，为 1，$b[2]$ 自增 1，$b = (1, 1, 0, 0)$。
- $a[3] = 1$，查询 $b[1 \dots 0]$ 前缀和，为 0，$b[1]$ 自增 1，$b = (2, 1, 0, 0)$。
- $a[2] = 3$，查询 $b[1 \dots 2]$ 前缀和，为 3，$b[3]$ 自增 1，$b = (2, 1, 1, 0)$。
- $a[1] = 4$，查询 $b[1 \dots 3]$ 前缀和，为 4，$b[4]$ 自增 1，$b = (2, 1, 1, 1)$。

所以最终答案为 $0 + 1 + 0 + 3 + 4 = 8$。

注意到，遍历 i 后的查询 $b[1 \dots x-1]$ 和自增 $b[x]$ 的两个步骤可以颠倒，变成先自增 $b[x]$ 再查询 $b[1 \dots x-1]$，不影响答案。两个角度来解释：

- 对 $b[x]$ 的修改不影响对 $b[1 \dots x-1]$ 的查询。
- 颠倒后，实质是在查询 $i \le j$ 且 $a[i] > a[j]$ 的数对数量，而 $i = j$ 时不存在 $a[i] > a[j]$，所以 $i \le j$ 相当于 $i < j$，所以这与原来的逆序对问题是等价的。

如果查询非严格逆序对（$i < j$ 且 $a[i] \ge a[j]$）的数量，那就要改为查询 $b[1 \dots x]$ 的和，这时就不能颠倒两步了，还是两个角度来解释：

- 对 $b[x]$ 的修改 **影响** 对 $b[1 \dots x]$ 的查询。
- 颠倒后，实质是在查询 $i \le j$ 且 $a[i] \ge a[j]$ 的数对数量，而 $i = j$ 时恒有 $a[i] \ge a[j]$，所以 $i \le j$ **不相当于** $i < j$，与原问题 **不等价**。

如果查询 $i \le j$ 且 $a[i] \ge a[j]$ 的数对数量，那这两步就需要颠倒了。

另外，对于原逆序对问题，还有一种做法是正着枚举 j，查询有多少 $i < j$ 满足 $a[i] > a[j]$。做法如下（设 $x = a[j]$）：

- 查询 $b[x+1 \dots V]$（V 是 b 的大小，即 a 的值域（或离散化后的值域））的区间和。
- 将 $b[x]$ 自增 1。

原因：出现在 $b[x+1 \dots V]$ 中的元素一定比当前的 $x = a[j]$ 大，而 j 的正序枚举，自然使得这些已在权值数组中的元素，在原数组上的索引 i 小于当前遍历到的索引 j。

此外，逆序对的计数还可以通过 归并排序 解决。这一方法可以避免离散化。时间复杂度同样为 $O(n \log n)$。两种算法的参考实现都在 逆序对 章节。

树状数组维护不可差分信息

比如维护区间最值等。

注意，这种方法虽然码量小，但单点修改和区间查询的时间复杂度均为 $\Theta(\log^2 n)$，比使用线段树的时间复杂度 $\Theta(\log n)$ 劣。

区间查询

我们还是基于之前的思路，从 r 沿着 lowbit 一直向前跳，但是我们不能跳到 l 的左边。

因此，如果我们跳到了 $c[x]$，先判断下一次要跳到的 $x - \text{lowbit}(x)$ 是否小于 l：

- 如果小于 l，我们直接把 $\boldsymbol{a}[\boldsymbol{x}]$ **单点** 合并到总信息里，然后跳到 $c[x-1]$。
- 如果大于等于 l，说明没越界，正常合并 $c[x]$，然后跳到 $c[x - \text{lowbit}(x)]$ 即可。

下面以查询区间最大值为例，给出代码：

实现

```
int getmax(int l, int r) {
  int ans = 0;
  while (r >= l) {
    ans = max(ans, a[r]);
    --r;
    for (; r - lowbit(r) >= l; r -= lowbit(r)) {
      // 注意，循环条件不要写成 r - lowbit(r) + 1 >= l
      // 否则 l = 1 时，r 跳到 0 会死循环
      ans = max(ans, C[r]);
    }
  }
  return ans;
}
```

可以证明，上述算法的时间复杂度是 $\Theta(\log^2 n)$。

时间复杂度证明

考虑 r 和 l 不同的最高位，一定有 r 在这一位上为 1，l 在这一位上为 0（因为 $r \geq l$）。

如果 r 在这一位的后面仍然有 1，一定有 $r - \operatorname{lowbit}(r) \geq l$，所以下一步一定是把 r 的最低位 1 填为 0；

如果 r 的这一位 1 就是 r 的最低位 1，无论是 $r \leftarrow r - \operatorname{lowbit}(r)$ 还是 $r \leftarrow r - 1$，r 的这一位 1 一定会变为 0。

因此，r 经过至多 $\log n$ 次变换后，r 和 l 不同的最高位一定可以下降一位。所以，总时间复杂度是 $\Theta(\log^2 n)$。

单点更新

注

请先理解树状数组树形态的以下两条性质，再学习本节。

- 设 $u = s \times 2^{k+1} + 2^k$，则其儿子数量为 $k = \log_2 \operatorname{lowbit}(u)$，编号分别为 $u - 2^t (0 \leq t < k)$。
- u 的所有儿子对应 c 的管辖区间恰好拼接成 $[l(u), u - 1]$。

关于这两条性质的含义及证明，都可以在本页面的 树状数组与其树形态的性质 一节找到。

更新 $a[x]$ 后，我们只需要更新满足在树状数组树形态上，满足 y 是 x 的祖先的 $c[y]$。

对于最值（以最大值为例），一种常见的错误想法是，如果 $a[x]$ 修改成 p，则将所有 $c[y]$ 更新为 $\max(c[y], p)$。下面是一个反例：$(1, 2, 3, 4, 5)$ 中将 5 修改成 4，最大值是 4，但按照上面的修改这样会得到 5。将 $c[y]$ 直接修改为 p 也是错误的，一个反例是，将上面例子中的 3 修改为 4。

事实上，对于不可差分信息，不存在通过 p 直接修改 $c[y]$ 的方式。这是因为修改本身就相当于是把旧数从原区间「移除」，然后加入一个新数。「移除」时对区间信息的影响，相当于做「逆运算」，而不可差分信息不存在「逆运算」，所以无法直接修改 $c[y]$。

换句话说，对每个受影响的 $c[y]$，这个区间的信息我们必定要重构了。

考虑 $c[y]$ 的儿子们，它们的信息一定是正确的（因为我们先更新儿子再更新父亲），而这些儿子又恰好组成了 $[l(y), y - 1]$ 这一段管辖区间，那再合并一个单点 $a[y]$ 就可以合并出 $[l(y), y]$，也就是 $c[y]$ 了。这样，我们能用至多 $\log n$ 个区间重构合并出每个需要修改的 c。

实现

```
void update(int x, int v) {
  a[x] = v;
  for (int i = x; i <= n; i += lowbit(i)) {
    // 枚举受影响的区间
    C[i] = a[i];
    for (int j = 1; j < lowbit(i); j *= 2) {
      C[i] = max(C[i], C[i - j]);
    }
  }
}
```

容易看出上述算法时间复杂度为 $\Theta(\log^2 n)$。

建树

可以考虑拆成 n 个单点修改，$\Theta(n \log^2 n)$ 建树。

也有 $\Theta(n)$ 的建树方法，见本页面 $\Theta(n)$ 建树 一节的方法一。

Tricks

$\Theta(n)$ 建树

以维护区间和为例。

方法一：

每一个节点的值是由所有与自己直接相连的儿子的值求和得到的。因此可以倒着考虑贡献，即每次确定完儿子的值后，用自己的值更新自己的直接父亲。

实现

C++

```cpp
// O(n) 建树
void init() {
  for (int i = 1; i <= n; ++i) {
    t[i] += a[i];
    int j = i + lowbit(i);
    if (j <= n) t[j] += t[i];
  }
}
```

Python

```python
# O(n) 建树
def init():
    for i in range(1, n + 1):
        t[i] = t[i] + a[i]
        j = i + lowbit(i)
        if j <= n:
            t[j] = t[j] + t[i]
```

方法二：

前面讲到 $c[i]$ 表示的区间是 $[i - \text{lowbit}(i) + 1, i]$，那么我们可以先预处理一个 sum 前缀和数组，再计算 c 数组。

实现

C++

```cpp
// O(n) 建树
void init() {
  for (int i = 1; i <= n; ++i) {
    t[i] = sum[i] - sum[i - lowbit(i)];
  }
}
```

Python

```python
# O(n) 建树
def init():
    for i in range(1, n + 1):
        t[i] = sum[i] - sum[i - lowbit(i)]
```

时间戳优化

对付多组数据很常见的技巧。若每次输入新数据都暴力清空树状数组，就可能会造成超时。因此使用 tag 标记，存储当前节点上次使用时间（即最近一次是被第几组数据使用）。每次操作时判断这个位置 tag 中的时间和当前时间是否相同，就可以判断这个位置应该是 0 还是数组内的值。

实现

C++

```cpp
// 时间戳优化
int tag[MAXN], t[MAXN], Tag;

void reset() { ++Tag; }

void add(int k, int v) {
  while (k <= n) {
    if (tag[k] != Tag) t[k] = 0;
    t[k] += v, tag[k] = Tag;
    k += lowbit(k);
  }
}

int getsum(int k) {
  int ret = 0;
  while (k) {
    if (tag[k] == Tag) ret += t[k];
    k -= lowbit(k);
  }
  return ret;
}
```

Python

```python
# 时间戳优化
tag = [0] * MAXN
t = [0] * MAXN
Tag = 0


def reset():
    Tag = Tag + 1


def add(k, v):
    while k <= n:
        if tag[k] != Tag:
            t[k] = 0
        t[k] = t[k] + v
        tag[k] = Tag
        k = k + lowbit(k)


def getsum(k):
    ret = 0
    while k:
        if tag[k] == Tag:
```

```
            ret = ret + t[k]
        k = k - lowbit(k)
    return ret
```

例题

- 树状数组 1：单点修改，区间查询
- 树状数组 2：区间修改，单点查询
- 树状数组 3：区间修改，区间查询
- 二维树状数组 1：单点修改，区间查询
- 二维树状数组 2：区间修改，单点查询
- 二维树状数组 3：区间修改，区间查询
