基本概念

概述

在研究具体的随机现象时我们通常着重关注以下要素：

- 样本空间 Ω，指明随机现象所有可能出现的结果。
- 事件域 $\mathcal{F}$，表示我们所关心的所有事件。
- 概率 P，描述每一个事件发生的可能性大小。

样本空间、随机事件

定义

一个随机现象中可能发生的不能再细分的结果被称为 **样本点**。所有样本点的集合称为 **样本空间**，通常用 Ω 来表示。

一个 **随机事件** 是样本空间 Ω 的子集，它由若干样本点构成，用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示。

对于一个随机现象的结果 ω 和一个随机事件 A，我们称事件 A **发生了** 当且仅当 $\omega \in A$。

例如，掷一次骰子得到的点数是一个随机现象，其样本空间可以表示为 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$。设随机事件 A 为「获得的点数大于 4」，则 $A = \{5,6\}$。若某次掷骰子得到的点数 $\omega = 3$，由于 $\omega \notin A$，故事件 A 没有发生。

事件的运算

由于我们将随机事件定义为了样本空间 Ω 的子集，故我们可以将集合的运算（如交、并、补等）移植到随机事件上。记号与集合运算保持一致。

特别的，事件的并 $A \cup B$ 也可记作 $A + B$，事件的交 $A \cap B$ 也可记作 AB，此时也可分别称作 **和事件** 和 **积事件**。

事件域

研究具体的随机现象时我们需要明确哪些事件是我们感兴趣的。根据随机事件的定义，显然有 $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$（记号 2^{Ω} 表示由 Ω 的所有子集组成的集合族），但 $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ 却不是必须的。这在样本空间 Ω 有限时可能有些难以理解，毕竟 2^{Ω} 尽管更大了但仍然有限。而当 Ω 为无穷集时，2^{Ω} 的势

变得更大，其中也难免会出现一些「性质不太好」且我们不关心的事件，这时为了兼顾这些事件而放弃一些性质就显得得不偿失了。

尽管 $\mathcal{F}=2^\Omega$ 不是必须的，这并不代表 2^Ω 的任一子集都能成为事件域。我们通常会对一些事件进行运算得到的结果事件的概率感兴趣，因此我们希望事件域 $\mathcal{F}$ 满足下列条件：

- $\varnothing \in \mathcal{F}$；
- 若 $A \in \mathcal{F}$，则补事件 $\bar{A} \in \mathcal{F}$；
- 若有一列事件 $A_n \in \mathcal{F}, n=1,2,3\ldots$，则 $\bigcup A_n \in \mathcal{F}$。

简言之，就是事件域 $\mathcal{F}$ 对在补运算、和可数并下是封闭的，且包含元素 $\varnothing$。

可以证明满足上述三个条件的事件域 $\mathcal{F}$ 对可数交也是封闭的。

以掷骰子为例，当样本空间记为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 时，以下两个集合能够成为事件域：

- $\mathcal{F}_1=\{\varnothing,\Omega\}$
- $\mathcal{F}_2=\{\varnothing,\{1,3,5\},\{2,4,6\},\Omega\}$

但以下两个集合则不能

- $\mathcal{F}_3=\{\varnothing,\{1\},\Omega\}$（对补不封闭）
- $\mathcal{F}_4=\{\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$（不含有 $\varnothing$ 且对并不封闭）

概率

定义

古典定义

在概率论早期实践中，由于涉及到的随机现象都比较简单，具体表现为样本空间 Ω 是有限集，且直观上所有样本点是等可能出现的，因此人们便总结出了下述定义：

如果一个随机现象满足：

- 只有有限个基本结果；
- 每个基本结果出现的可能性是一样的；

那么对于每个事件 A，定义它的概率为

$$P(A)=\frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

其中 $\#(\cdot)$ 表示对随机事件（一个集合）大小的度量。

后来人们发现这一定义可以直接推广到 Ω 无限的一部分情景中，于是就有了所谓 几何概型。

公理化定义

上述基于直观认识的定义在逻辑上有一个很大的漏洞：在定义「概率」这一概念时用到了「可能性」这一说法，产生了循环定义的问题。同时「等可能」在样本空间无限时会产生歧义，由此产生了包括 Bertrand 悖论 在内的一系列问题。

经过不断探索，苏联数学家柯尔莫哥洛夫于 1933 年在他的《概率论基础》一书中第一次给出了概率的公理化定义：

概率函数 P 是一个从事件域 $\mathcal{F}$ 到闭区间 $[0,1]$ 的映射，且满足：

- **规范性**：事件 Ω 的概率值为 1，即 $P(\Omega)=1$。
- **可数可加性**：若一列事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两不交，则 $P\left(\bigcup_{i\geq 1}A_i\right)=\sum_{i\geq 1}P(A_i)$。

概率函数的性质

对于任意随机事件 $A,B\in\mathcal{F}$，有

- **单调性**：若 $A\subset B$，则有 $P(A)\leq P(B)$。
- **容斥原理**：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。
- $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，这里 $A-B$ 表示差集。

概率空间

我们在一开始提到，研究具体的随机现象时我们通常关注样本空间 Ω、事件域 $\mathcal{F}$ 以及概率函数 P。我们将三元组 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 称为一个概率空间。

概率只有在确定的概率空间下讨论才有意义。我们前面提到的 Bertrand 悖论归根结底就是因对样本空间 Ω 的定义不明确而产生的。

参考资料与注释

- 概率论（数学分支）_百度百科
- Probability - Wikipedia

本页面最近更新：2023/3/22 15:46:23，更新历史

发现错误？想一起完善？ 在 GitHub 上编辑此页！

本页面贡献者：Enter-tainer, MegaOwIer, aofall, billchenchina, CCXXXI, CoelacanthusHex, Marcythm, ouuan, Persdre, shuzhouliu, Tiphereth-A