网络流简介

本页面主要介绍网络流相关的基本知识。

概述

网络（network）是指一个特殊的有向图 $G=(V,E)$，其与一般有向图的不同之处在于有容量和源汇点。

- E 中的每条边 (u,v) 都有一个被称为容量（capacity）的权值，记作 $c(u,v)$。当 $(u,v)\notin E$ 时，可以假定 $c(u,v)=0$。
- V 中有两个特殊的点：源点（source）s 和汇点（sink）t（$s\neq t$）。

对于网络 $G=(V,E)$，流（flow）是一个从边集 E 到整数集或实数集的函数，其满足以下性质。

1. 容量限制：对于每条边，流经该边的流量不得超过该边的容量，即 $0\leq f(u,v)\leq c(u,v)$；
2. 流守恒性：除源汇点外，任意结点 u 的净流量为 0。其中，我们定义 u 的净流量为 $f(u)=\sum_{x\in V}f(u,x)-\sum_{x\in V}f(x,u)$。

对于网络 $G=(V,E)$ 和其上的流 f，我们定义 f 的流量 $|f|$ 为 s 的净流量 $f(s)$。作为流守恒性的推论，这也等于 t 的净流量的相反数 $-f(t)$。

对于网络 $G=(V,E)$，如果 $\{S,T\}$ 是 V 的划分（即 $S\cup T=V$ 且 $S\cap T=\varnothing$），且满足 $s\in S,t\in T$，则我们称 $\{S,T\}$ 是 G 的一个 s-t 割（cut）。我们定义 s-t 割 $\{S,T\}$ 的容量为 $||S,T||=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T}c(u,v)$。

常见问题

常见的网络流问题包括但不限于以下类型问题。

- 最大流问题：对于网络 $G=(V,E)$，给每条边指定流量，得到合适的流 f，使得 f 的流量尽可能大。此时我们称 f 是 G 的最大流。
- 最小割问题：对于网络 $G=(V,E)$，找到合适的 s-t 割 $\{S,T\}$，使得 $\{S,T\}$ 的总容量尽可能小。此时我们称 $\{S,T\}$ 的总容量是 G 的最小割。
- 最小费用最大流问题：在网络 $G=(V,E)$ 上，对每条边给定一个权值 $w(u,v)$，称为费用（cost），含义是单位流量通过 (u,v) 所花费的代价。对于 G 所有可能的最大流，我们称其中总费用最小的一者为最小费用最大流。

我们将在稍后的章节中对它们进行详细介绍。

例题：网络流 24 题

网络流 24 题是中文互联网上广泛流传的一个题单（LibreOJ/洛谷），至少在 2010 年前后就已经存在。该题单引入了一些经典的将其他问题建模为网络流问题的技巧。由于时代的局限性，这些问题未必是最具代表性的网络流问题，但仍值得有志于算法竞赛的读者一阅。

本页面最近更新：2025/6/25 00:27:36，更新历史

发现错误？想一起完善？ 在 GitHub 上编辑此页！

本页面贡献者：Ir1d, StudyingFather, MegaOwIer, sshwy, MingqiHuang, Nanarikom, Tiphereth-A, Anguei, Chrogeek, EndlessCheng, Enter-tainer, liaoyanxu, Macesuted, ouuan, Xarfa, Xeonacid