Alpha-Beta 剪枝

本页面将简要介绍 Minimax 算法和 Alpha-Beta 剪枝。

Minimax 算法

Minimax 算法又叫极小化极大算法，是一种最小化最差（即最大损失）情境下的潜在损失的算法。

过程

在局面确定的双人零和对弈中，常需要进行对抗搜索，构建一棵每个节点都为一个确定状态的搜索树。奇数层为己方先手，偶数层为对方先手。搜索树上每个叶子节点都会被赋予一个估值，估值越大代表我方赢面越大。我方追求更大的赢面，而对方会设法降低我方的赢面；体现在搜索树上就是，奇数层节点（我方节点）总是会选择赢面最大的子节点状态，而偶数层（对方节点）总是会选择（我方）赢面最小的子节点状态。

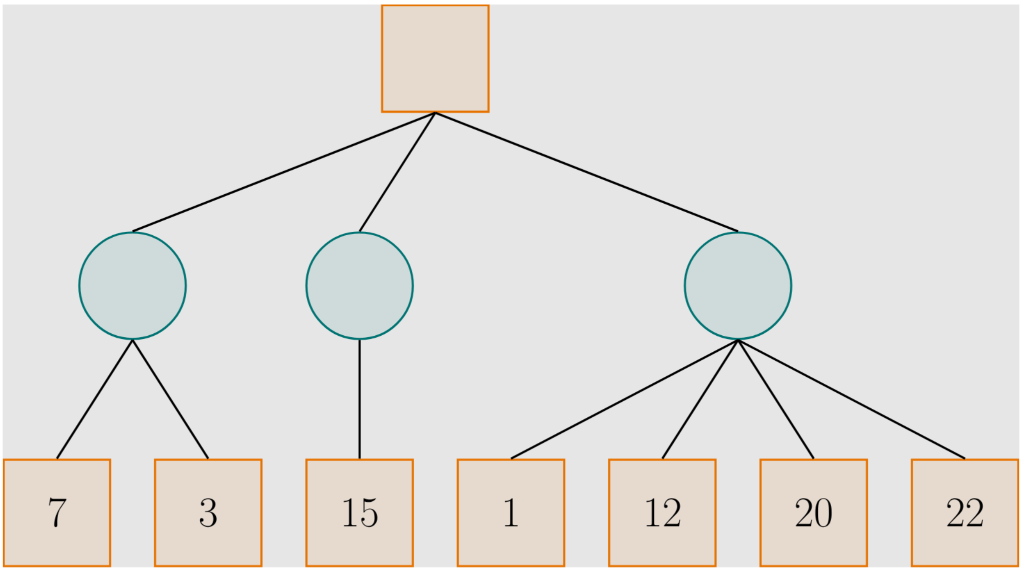
Minimax 算法中，会从上到下遍历搜索树，回溯时利用子树信息更新答案，最后得到根节点的值——这就是我方在双方都采取最优策略下能获得的最大分数。

示例

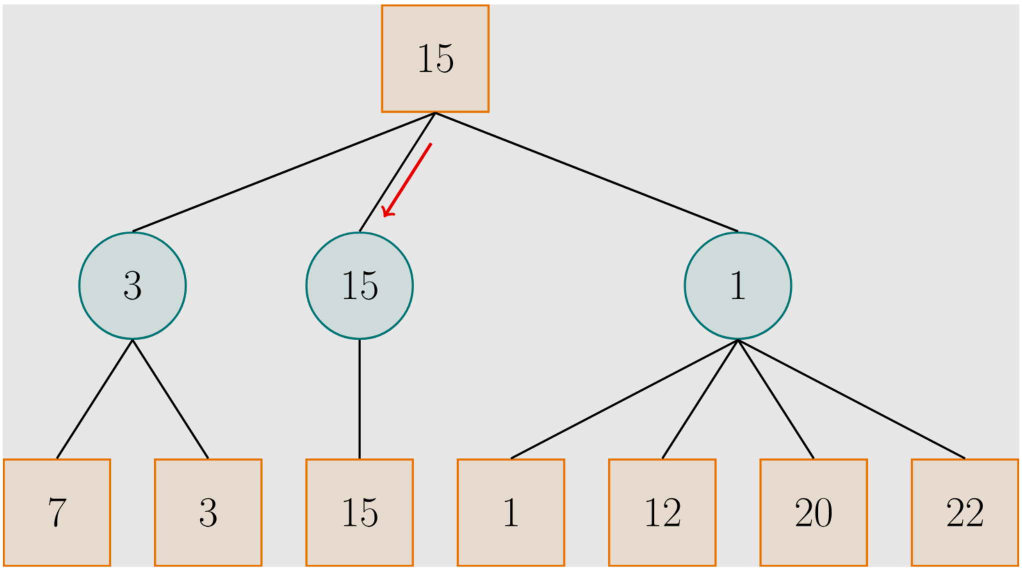
来看一个简单的例子。

称我方为 MAX，对方为 MIN，图示如下：

例如，对于如下的局势，假设从左往右搜索，根节点的数值为我方赢面：



我方应选择中间的路线。因为，如果选择左边的路线，最差的赢面是 3；如果选择中间的路线，最差的赢面是 15；如果选择右边的路线，最差的赢面是 1。虽然选择右边的路线可能有 22 的赢面，但足够理性的对方将会使我方只有 1 的赢面。那么，经过权衡，显然选择中间的路线更优。



实际上，在看右边的路线时，当发现赢面可能为 1 后就不必再去看赢面为 12、20、22 的分支了。因为相较于左侧两条路线的赢面，已经可以确定右边的路线不是最好的。

朴素的 Minimax 算法常常需要构建一棵庞大的搜索树，时间和空间复杂度都将不能承受。而 Alpha-Beta 剪枝就是利用搜索树每个节点双方分数的上下界来对 Minimax 进行剪枝优化的一种方法。

需要注意的是，对于不同的问题，搜索树每个节点上的值有着不同的含义，它可以是估值、分数、赢的概率等等。为方便起见，下文统一用分数来称呼。

Alpha-Beta 剪枝

Alpha–Beta 剪枝是针对 Minimax 算法的搜索剪枝。

过程

Minimax 算法中，若已知某节点的所有子节点的分数，则可以算出该节点的分数：对于 MAX 节点，取最大分数；对于 MIN 节点，取最小分数。

在搜索进行到某节点但尚未完成时，虽然不能算出该节点的分数，但是可以算出 **目前已经搜索过的节点中**，双方分数的取值范围。搜索时，维护两个变量 α 和 β，分别表示局面进行到该节点时，**考虑所有已经搜索过的节点**，Alpha 玩家（即寻求最大分数的一方）和 Beta 玩家（即寻求最小分数的一方）能够保证取得的分数的下界和上界。

Alpha–Beta 剪枝的剪枝策略依赖于搜索当前节点时 α 和 β 的取值。如果当前节点是 MAX 节点，那么，Alpha 可以继续搜索它的子节点来提高分数下界 α。但是，如果某次搜索后已经有 $\alpha \geq \beta$ 了，那么这个节点就不可能出现在一次对弈中：只要到达该节点处，Alpha 玩家就能够保证分数至少是 α；可是 Beta 玩家已经知道存在一种（偏离当前路径的）策略，能够保证分数不超过 $\beta \leq \alpha$，那么，Beta 玩家自然不会任由局面发展到 **当前节点** 处。同理，如果当前节点是 MIN 节点，且搜索它的某个子节点后已经发现该节点处有 $\beta \leq \alpha$ 成立，那么，同样无需继续搜索其他子节点，因为 Alpha 玩家不会让局面进入 **当前节点**。总结两种情形可以发现：当 $\alpha \geq \beta$ 时，该节点剩余的分支就不必继续搜索了（也就是可以进行剪枝了）。注意，当 $\alpha = \beta$ 时，也需要剪枝，这是因为不会有更好的结果了，但可能有更差的结果。

搜索过程中，无需维护节点分数，只需要维护 α 和 β 即可。初始时，令 $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$。向下搜索时，需要一并下传 α 和 β 的信息，以记录两名玩家的备选方案。

搜索完子节点时，需要更新当前节点处的信息。不妨假设当前节点 X 是 MAX 节点，且刚刚搜索完它的子节点 Y。那么，节点 X 处的 β 值不会改变，只有 α 值需要与子节点 Y 的分数取最大值。如果子节点 Y 是叶子节点，直接用子节点 Y 的分数更新当前节点 X 处的 α 值；否则，只需要用子节点 Y 的 β 值更新当前节点 X 的 α 值。此时，有三种可能性：

1. 子节点 Y 的 β 值严格位于节点 X 的 α 值和 β 值之间。因为子节点 Y 继承了节点 X 的 α 值且不会更新它，所以，搜索子节点 Y 完后仍然有 $\beta > \alpha$，就说明搜索子节点 Y 时没有发生剪枝。子节点 Y 最终的 β 值，就等于它继承的节点 X 的 β 值和它（指子节点 Y）的所有子节点的分数中，最小的那个。既然这个最小值严格小于节点 X 的 β 值，就说明它一定是子节点 Y 的所有子节点的分数最小值。因此，作为 MIN 节点，子节点 Y 的分数就是这个 β 值。用它更新节点 X 的 α 值是合理的。
2. 子节点 Y 的 β 值就等于节点 X 的 β 值。如上文所述，这说明子节点 Y 的所有子节点的分数均不小于节点 X 的 β 值。这进一步说明 Beta 玩家不会任由局面进入节点 X：因为 Alpha 玩家只要选择了子节点 Y，Beta 玩家就不能取得比 β 更低的分数。因此，此时使用子节点 Y 的 β 值更新节点 X 的 α 值，是为了使得节点 X 处 $\alpha = \beta$，以触发剪枝条件。它的效果与使用 Y 处实际分数——一个大于等于节点 X 处 β 值的数字——更新节点 X 的 α 值的效果是一样的。
3. 子节点 Y 的 β 值小于等于节点 X 的 α 值。此时，子节点 Y 触发了剪枝条件，它的实际分数不会超过子节点 Y 的 β 值，更不会超过节点 X 的 α 值。用子节点 Y 的实际分数更新节点

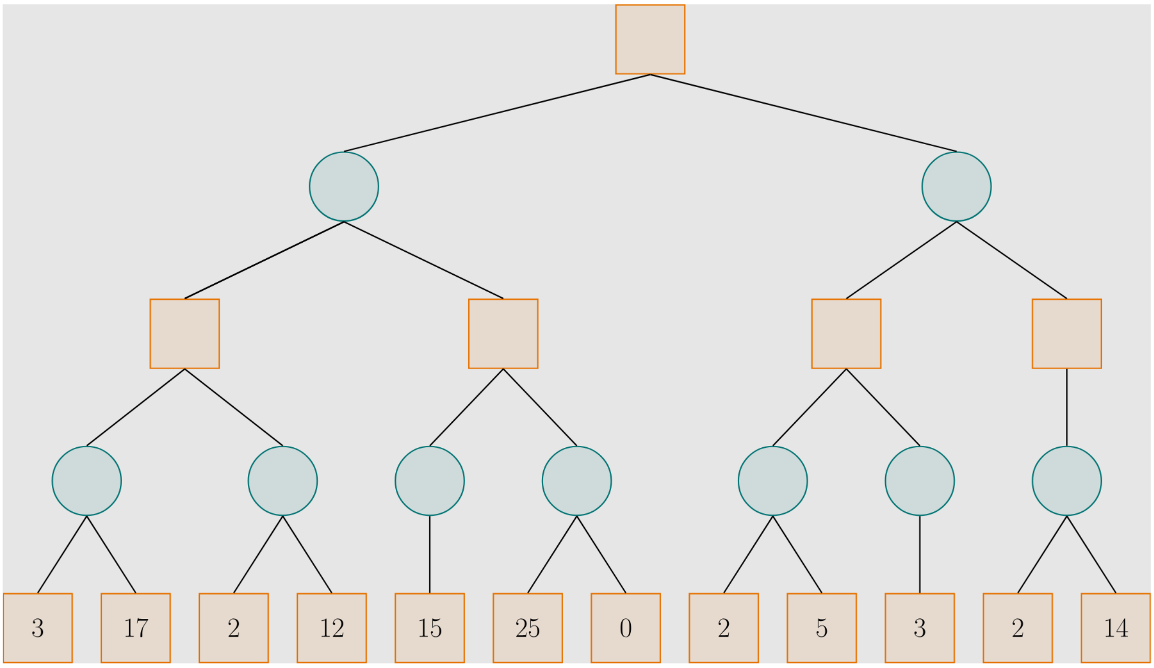
X 的 α 值不会改变 α 值。这与使用子节点 Y 的 β 值更新节点 X 的 α 值的效果是一样的。

这一分析说明，当某个子节点搜索完成后，只有它的分数处于第一种情形时，α（或 β）才准确记录了这个子节点作为一个 MAX 节点（或 MIN 节点）的实际分数。对于其他情形，虽然它未必是准确的分数，但是它提供的信息足以保证剪枝的正确进行，从而不影响根节点处的分数记录。

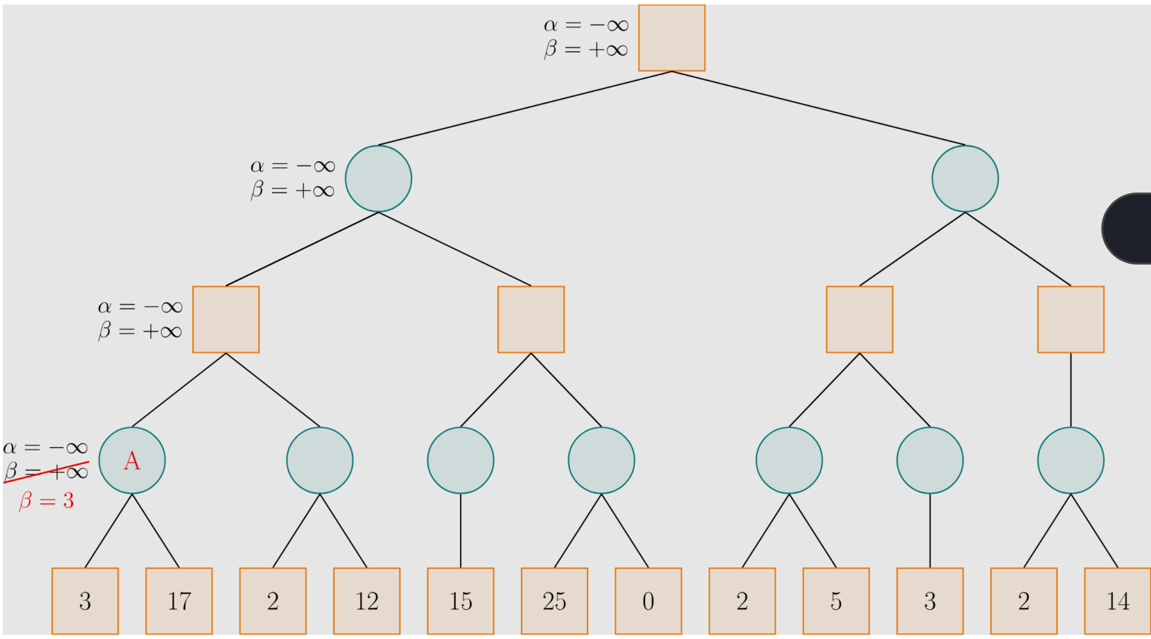
示例

本节通过分析一个例子，来展示如何在搜索过程中更新各个节点处的 α 和 β 值。过程中，也一并计算了所涉及的节点处的分数。由此，就可以观察每个节点处的实际分数与所记录的 α 和 β 值的关系。但应注意，实现这一算法时，并不会计算这些节点的实际分数。

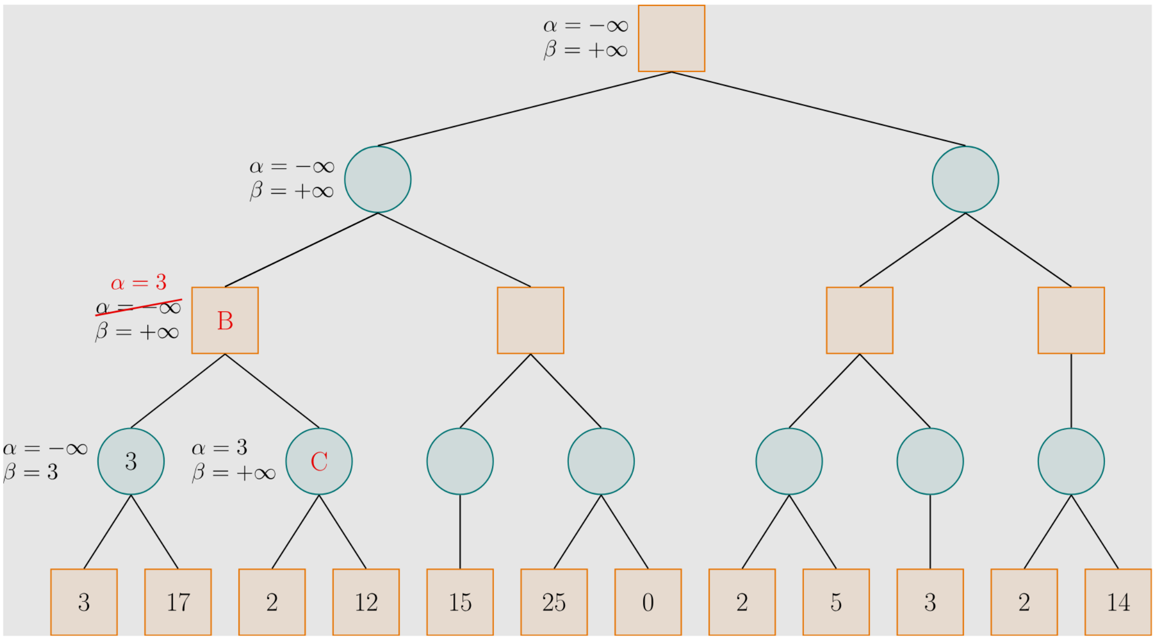
对于如下的局势，假设从左往右搜索：



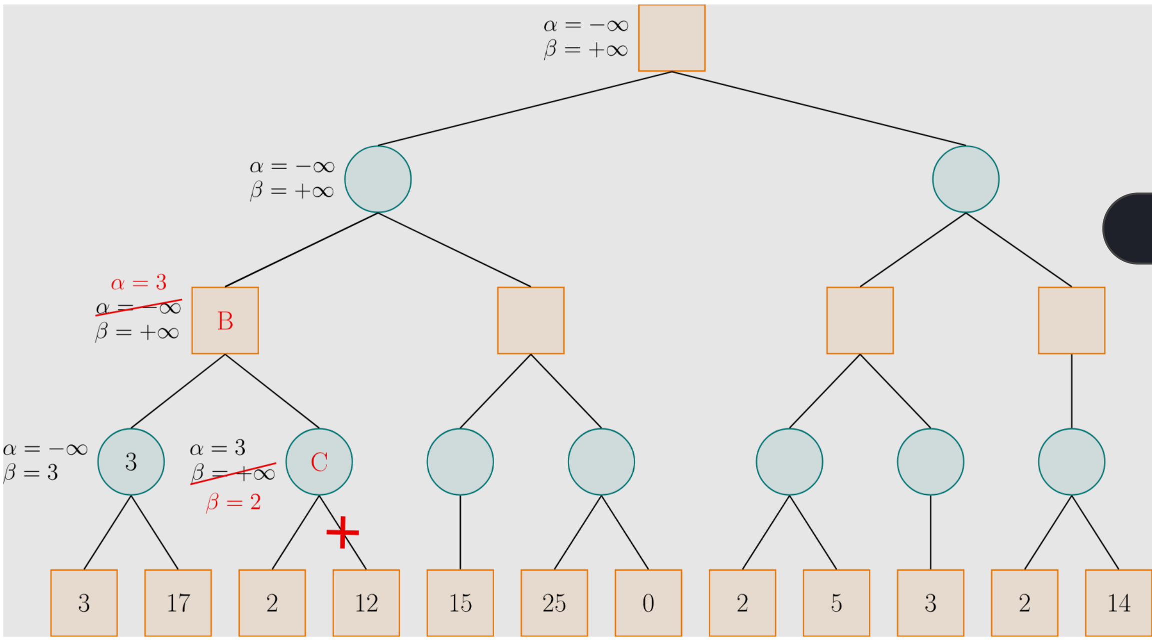
初始化时，令 $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$，并将这一信息沿着搜索路径下传。



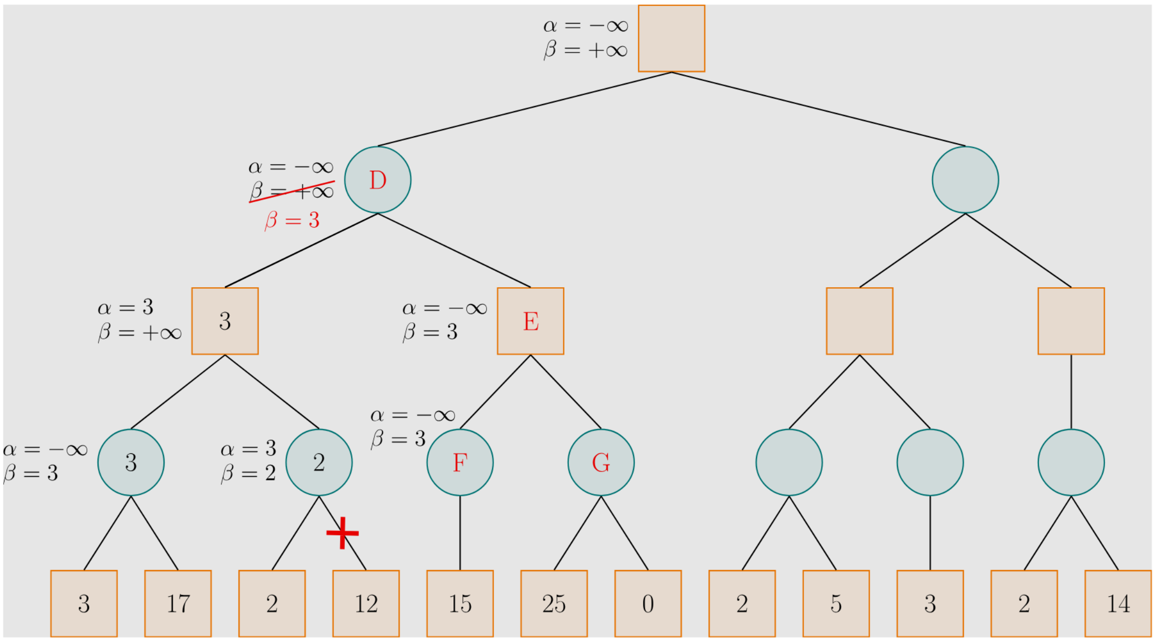
搜索到节点 A 时，由于左子节点的分数为 3，而节点 A 是 MIN 节点，试图找分数小的走法，于是将 β 值修改为 3，这是因为 3 小于当前的 β 值（$\beta = +\infty$）。然后节点 A 的右子节点的分数为 17，此时不修改节点 A 的 β 值，这是因为 17 大于当前的 β 值（$\beta = 3$）。此时，节点 A 的所有子节点已搜索完毕，即可计算出节点 A 的分数为 3，这与该节点处记录的 β 值一致（前文的情形 1）。



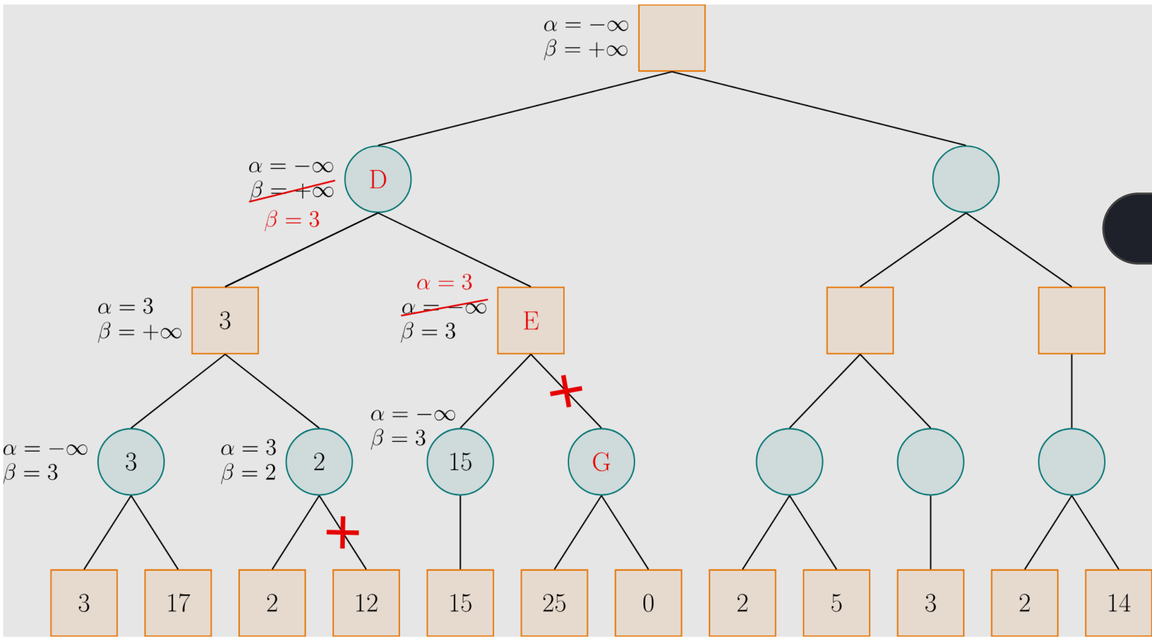
节点 A 是节点 B 的子节点，计算出节点 A 的分数后，可以更新节点 B 的 α 和 β 值。由于节点 B 是 MAX 节点，试图找分数大的走法，于是将 α 值修改为 3，这是因为子节点 A 处的 β 值（$\beta = 3$）大于当前的 α 值（$\alpha = -\infty$）。之后，搜索节点 B 的右子节点 C，并将节点 B 的 α 和 β 值传递给节点 C。



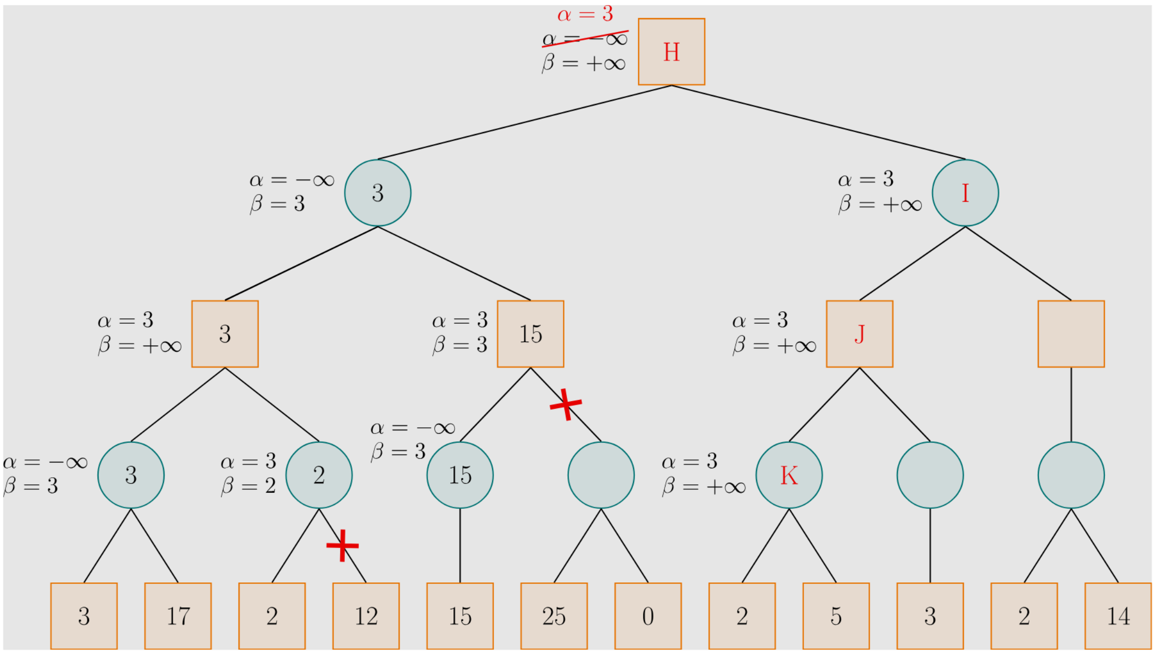
对于节点 C，由于左子节点的分数为 2，而节点 C 是 MIN 节点，于是将 β 值修改为 2。此时 $\alpha \geq \beta$，故节点 C 的剩余子节点就不必搜索了，因为可以确定，Alpha 玩家不会允许局面发展到节点 C。此时，节点 C 是 MIN 节点，它的分数就是 2，不超过记录的 β 值（前文的情形 3）。由于节点 B 的所有子节点搜索完毕，即可计算出节点 B 的分数为 3，与记录的 α 值相同（前文的情形 1）。



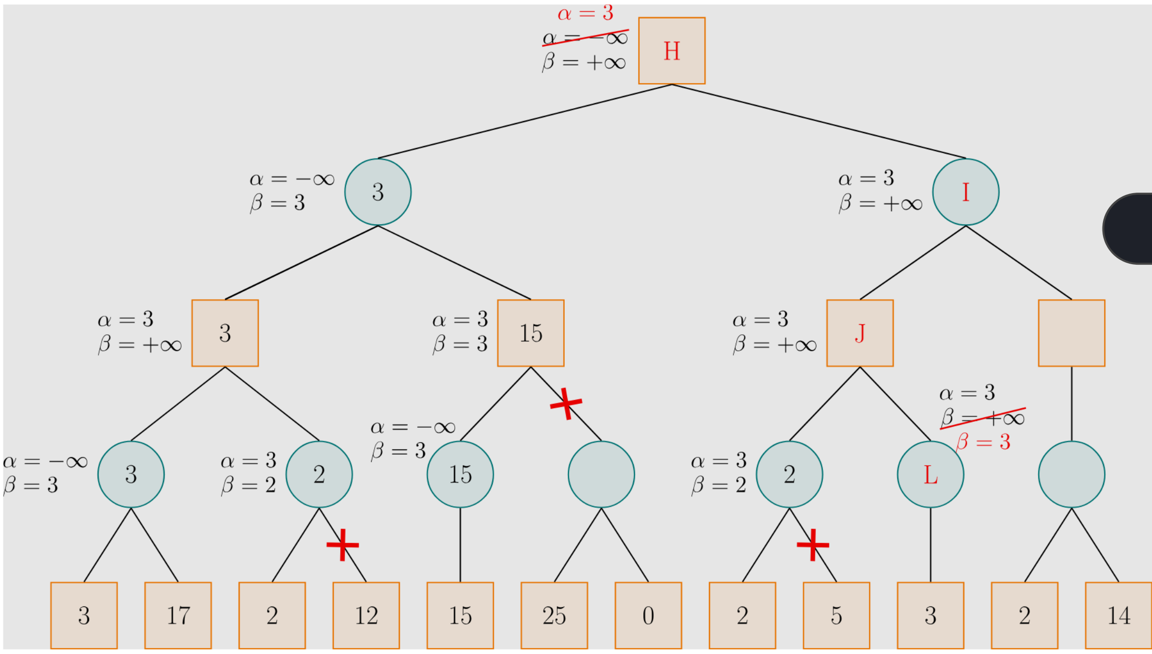
计算出节点 B 的分数后，节点 B 是节点 D 的一个子节点，故可以更新节点 D 的 α 和 β 值。由于节点 D 是 MIN 节点，于是将 β 值修改为 3。然后节点 D 将 α 和 β 值传递给节点 E，节点 E 又传递给节点 F。对于节点 F，它只有一个分数为 15 的子节点，由于 15 大于当前的 β 值，而节点 F 为 MIN 节点，所以不更新其 β 值，然后可以计算出节点 F 的分数为 15，大于记录的 β 值（前文的情形 2）。



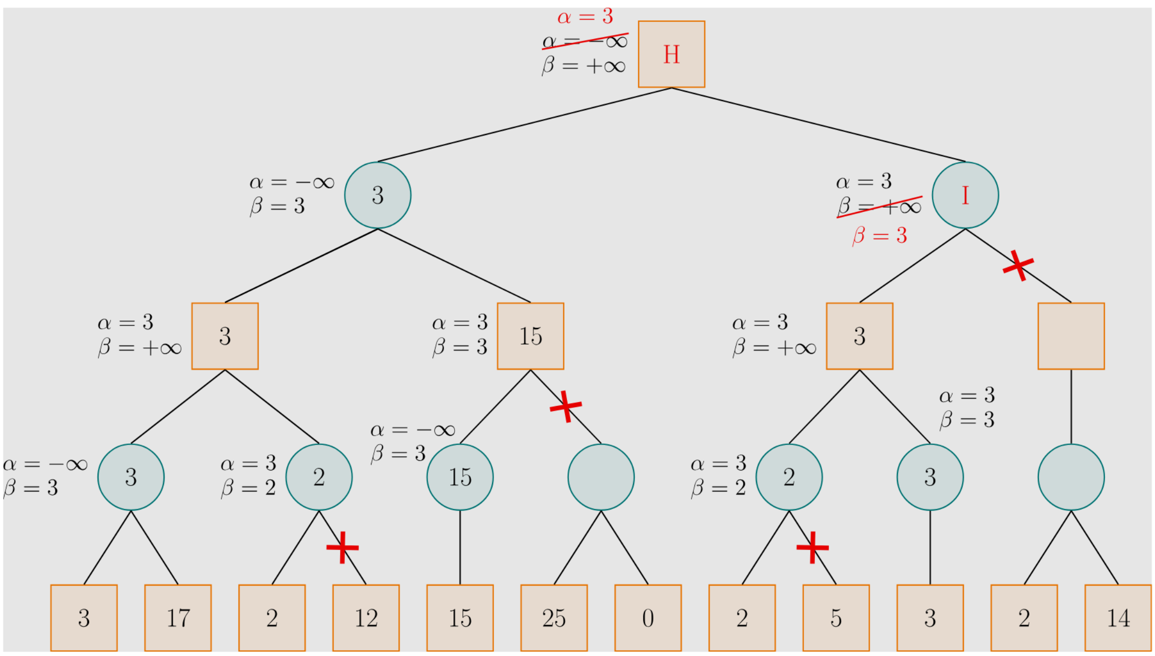
计算出节点 F 的分数后，节点 F 是节点 E 的一个子节点，故可以更新节点 E 的 α 和 β 值。节点 E 是 MAX 节点，更新 α 值，此时 $\alpha \geq \beta$，故可以剪去节点 E 的余下分支（即节点 G）。然后，节点 E 是 MAX 节点，将节点 E 的分数设为 15，严格大于记录的 α 值（前文的情形 3）。利用节点 E 的 α 值更新节点 D 的 β 值，仍然是 3。此时，节点 D 的所有子节点搜索完毕，即可计算出节点 D 的分数为 3，等于记录的 β 值（前文的情形 1）。



计算出节点 D 的分数后，节点 D 是节点 H 的一个子节点，故可以更新节点 H 的 α 和 β 值。节点 H 是 MAX 节点，更新 α。然后，按搜索顺序，将节点 H 的 α 和 β 值依次传递给节点 I、J、K。对于节点 K，其左子节点的分数为 2，而节点 K 是 MIN 节点，更新 β，此时 $\alpha \geq \beta$，故可以剪去节点 K 的余下分支。然后，将节点 K 的分数设为 2，小于等于记录的 β 值（前文的情形 3）。



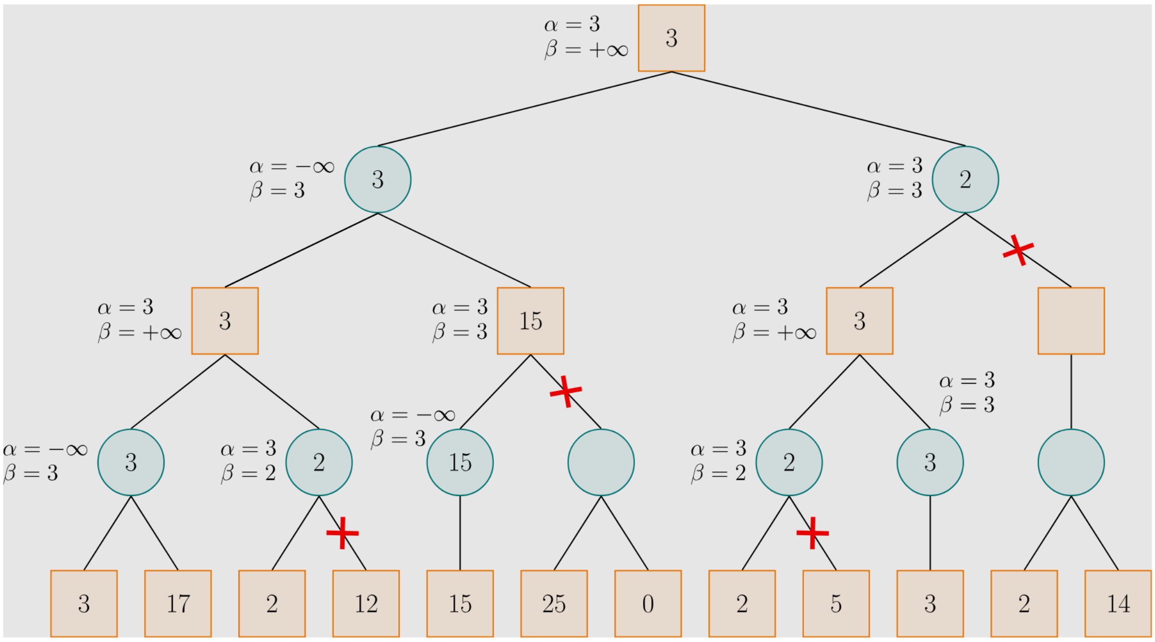
计算出节点 K 的分数后，节点 K 是节点 J 的一个子节点，故可以更新节点 J 的 α 和 β 值。节点 J 是 MAX 节点，更新 α，但是，由于节点 K 的分数小于 α，所以节点 J 的 α 值维持 3 不变。然后，将节点 J 的 α 和 β 值传递给节点 L。由于节点 L 是 MIN 节点，更新 $\beta = 3$，此时 $\alpha \geq \beta$，故可以剪去节点 L 的余下分支。由于节点 L 没有余下分支，所以此处并没有实际剪枝。然后，将节点 L 的分数设为 3，它小于等于记录的 β 值（前文的情形 3）。



计算出节点 L 的分数后，节点 L 是节点 J 的一个子节点，故可以更新节点 J 的 α 和 β 值。节点 J 是 MAX 节点，更新 α，但是，由于节点 L 的分数小于等于 α，所以节点 J 的 α 值维持 3 不变。此时，节点 J 的所有子节点搜索完毕，即可计算出节点 J 的分数为 3，它等于记录的 α 值（前文的情形 2）。

计算出节点 J 的分数后，节点 J 是节点 I 的一个子节点，故可以更新节点 I 的 α 和 β 值。节点 I 是 MIN 节点，更新 β，此时 $\alpha \geq \beta$，故可以剪去节点 I 的余下分支。值得注意的是，由于右子节点的存在，节点 I 的实际分数是 2，小于记录的 β 值（前文的情形 3）。

计算出节点 I 的分数后，节点 I 是节点 H 的一个子节点，故可以更新节点 H 的 α 和 β 值。节点 H 是 MAX 节点，更新 α，但是，由于节点 I 的分数小于等于 α，所以节点 H 的 α 值维持 3 不变。此时，节点 H 的所有子节点搜索完毕，即可计算出节点 H 的分数为 3，它等于记录的 α 值（前文的情形 1）。



这就是最终结果。

实现

参考代码

```cpp
int alpha_beta(int u, int alph, int beta, bool is_max) {
  if (!son_num[u]) return val[u];
  if (is_max) {
    for (int i = 0; i < son_num[u]; ++i) {
      int d = son[u][i];
      alph = max(alph, alpha_beta(d, alph, beta, !is_max));
      if (alph >= beta) break;
    }
    return alph;
  } else {
    for (int i = 0; i < son_num[u]; ++i) {
      int d = son[u][i];
      beta = min(beta, alpha_beta(d, alph, beta, !is_max));
      if (alph >= beta) break;
    }
    return beta;
  }
}
```

参考资料与注释

- Minimax Algorithm - Wikipedia
- Alpha–beta pruning - Wikipedia

本文部分引用自博文 详解 Minimax 算法与α-β剪枝_文剑木然，遵循 CC 4.0 BY-SA 版权协议。内容有改动。

本页面最近更新：2025/9/6 01:17:22，更新历史

发现错误？想一起完善？ 在 GitHub 上编辑此页！

本页面贡献者：Tiphereth-A, Alphnia, c-forrest, iamtwz, Marcythm, Pierceby, Xeonacid

本页面的全部内容在 **CC BY-SA 4.0 和 SATA** 协议之条款下提供，附加条款亦可能应用