三维计算几何基础

三维几何的很多概念与 二维几何 是相通的，我们可以用与解决二维几何问题相同的方法来解决三维几何问题。

基本概念

点，向量，直线这些概念和二维几何是相似的，这里不再展开。

平面

我们可以用平面上的一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 和该平面的法向量（即垂直于该平面的向量）$\boldsymbol{n}$ 来表示一个平面。

因为 $\boldsymbol{n}$ 垂直于平面，所以 $\boldsymbol{n}$ 垂直于该平面内的所有直线。换句话说，设 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$，则该平面上的点 $P(x, y, z)$ 都满足 $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PP_0} = 0$。

根据向量点积的定义，上式等价于：

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

整理后得到：

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

令 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$，则上式变成 $Ax + By + Cz + D = 0$。我们称这个式子为平面的 **一般式**。

基本操作

直线、平面之间的夹角

运用空间向量的知识，空间中直线、平面之间的夹角可以很快求出。

对于两条异面直线 a，b，过空间中一点 P，作 $a' \parallel a$，$b' \parallel b'$，则 a' 与 b' 所成的锐角或直角被称为 a 和 b 两条 **异面直线所成的角**。

对于直线 a 和平面 α，若 a 与 α 相交于 A，过 a 上一点 P 引平面 α 的垂线交 α 于 O，则 a 与 PO 所成角的余角被称为 **直线与平面所成的角**。特别地，若 $a \parallel \alpha$ 或 $a \subset \alpha$，则它们之间的夹角为 0°。

对于两个平面 α，β，它们的夹角被定义为与两条平面的交线 l 垂直的两条直线 a, b（其中 $a \subset \alpha$，$b \subset \beta$）所成的角。

两直线夹角定义与关系充要条件

- 两直线的方向向量的夹角，叫做两直线的夹角。

有了这个命题，我们就可以得出以下结论：已知两条直线 l_1, l_2，它们的方向向量分别是 $s_1(m_1, n_1, p_1)$，$s_2(m_2, n_2, p_2)$，设 φ 为两直线夹角，我们可以得到 $\cos\varphi = \dfrac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$.

- $l_1 \perp l_2 \iff m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$
- $l_1 \parallel l_2 \iff \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

三维向量与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ（$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$）称为直线与平面的夹角。

设直线向量 $s(m, n, p)$，平面法线向量 $f(a, b, c)$，那么以下命题成立：

- 角度的正弦值：$\sin\varphi = \dfrac{|am + bn + cp|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$
- 直线与平面平行 $\iff am + bn + cp = 0$
- 直线与平面垂直 $\iff \dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{p}$

点到平面的距离

直线与平面的交点

直接联立直线方程和平面方程即可。

立体几何定理

三正弦定理

设二面角 $M - AB - N$ 的度数为 α，在平面 M 上有一条射线 AC，它和棱 AB 所成角为 β，和平面 N 所成的角为 γ，则 $\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta$。

三余弦定理

设 O 为平面上一点，过平面外一点 B 的直线 BO 在面上的射影为 AO，OC 为面上的一条直线，那么 $\angle COB$，$\angle AOC$，$\angle AOB$ 三角的余弦关系为：$\cos\angle BOC = \cos\angle AOB \cdot \cos\angle AOC$（$\angle AOC$

，$\angle AOB$ 只能是锐角）。

参考资料

- 3D 空间基础概念之一：点、向量（矢量）和齐次坐标

本页面最近更新：2025/7/26 18:57:10，更新历史

发现错误？想一起完善？ 在 GitHub 上编辑此页！

本页面贡献者：Ir1d, shuzhouliu, Tiphereth-A, Enter-tainer, 951753yyswys, billchenchina, Great-designer, ouuan, StudyingFather, Xeonacid