树基础

引入

图论中的树和现实生活中的树长得一样，只不过我们习惯于处理问题的时候把树根放到上方来考虑。这种数据结构看起来像是一个倒挂的树，因此得名。

定义

一个没有固定根结点的树称为 **无根树**（unrooted tree）。无根树有几种等价的形式化定义：

- 有 n 个结点，$n-1$ 条边的连通无向图
- 无向无环的连通图
- 任意两个结点之间有且仅有一条简单路径的无向图
- 任何边均为桥的连通图
- 没有圈，且在任意不同两点间添加一条边之后所得图含唯一的一个圈的图

在无根树的基础上，指定一个结点称为 **根**，则形成一棵 **有根树**（rooted tree）。有根树在很多时候仍以无向图表示，只是规定了结点之间的上下级关系，详见下文。

有关树的定义

适用于无根树和有根树

- **森林（forest）**：每个连通分量（连通块）都是树的图。按照定义，一棵树也是森林。
- **生成树（spanning tree）**：一个连通无向图的生成子图，同时要求是树。也即在图的边集中选择 $n-1$ 条，将所有顶点连通。
- **无根树的叶结点（leaf node）**：度数不超过 1 的结点。

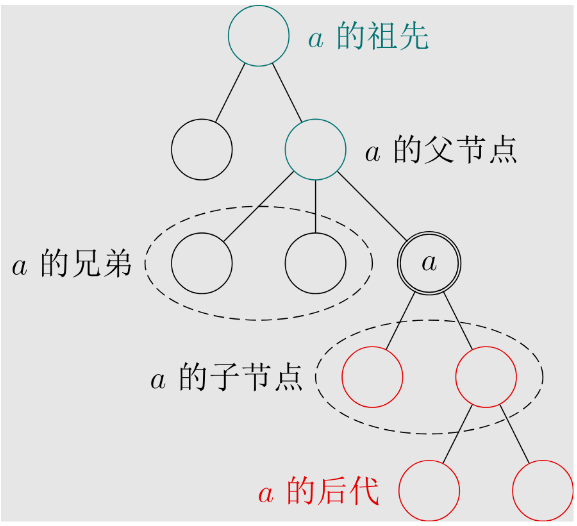
  为什么不是度数恰为 1？

  考虑 $n=1$。

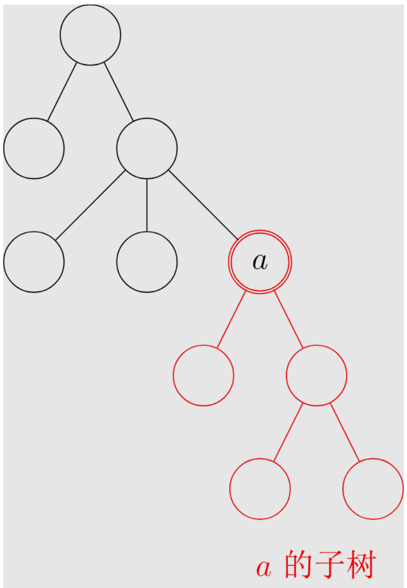
- **有根树的叶结点（leaf node）**：没有子结点的结点。

只适用于有根树

- **父亲（parent node）**：对于除根以外的每个结点，定义为从该结点到根路径上的第二个结点。
  根结点没有父结点。
- **祖先（ancestor）**：一个结点到根结点的路径上，除了它本身外的结点。
  根结点的祖先集合为空。
- **子结点（child node）**：如果 u 是 v 的父亲，那么 v 是 u 的子结点。
  子结点的顺序一般不加以区分，二叉树是一个例外。
- **结点的深度（depth）**：到根结点的路径上的边数。
- **树的高度（height）**：所有结点的深度的最大值。
- **兄弟（sibling）**：同一个父亲的多个子结点互为兄弟。
- **后代（descendant）**：子结点和子结点的后代。
  或者理解成：如果 u 是 v 的祖先，那么 v 是 u 的后代。

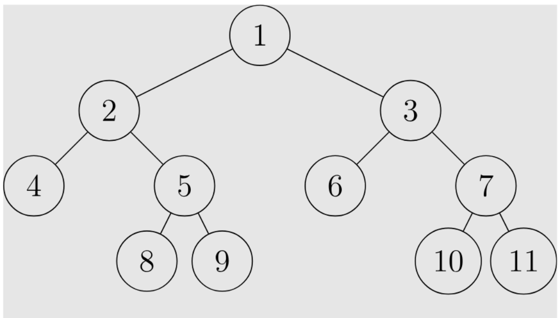


- **子树（subtree）**：删掉与父亲相连的边后，该结点所在的子图。



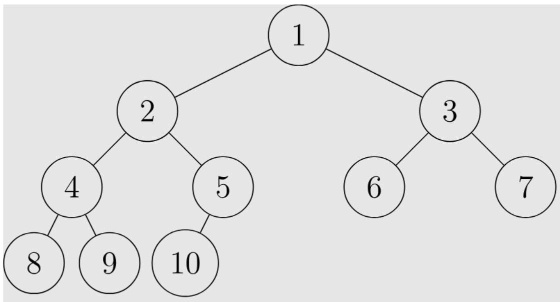
特殊的树

- **链（chain/path graph）**：满足与任一结点相连的边不超过 2 条的树称为链。
- **菊花/星星（star）**：满足存在 u 使得所有除 u 以外结点均与 u 相连的树称为菊花。
- **有根二叉树（rooted binary tree）**：每个结点最多只有两个儿子（子结点）的有根树称为二叉树。常常对两个子结点的顺序加以区分，分别称之为左子结点和右子结点。
  大多数情况下，**二叉树** 一词均指有根二叉树。
- **完整二叉树（full/proper binary tree）**：每个结点的子结点数量均为 0 或者 2 的二叉树。换言之，每个结点或者是树叶，或者左右子树均非空。



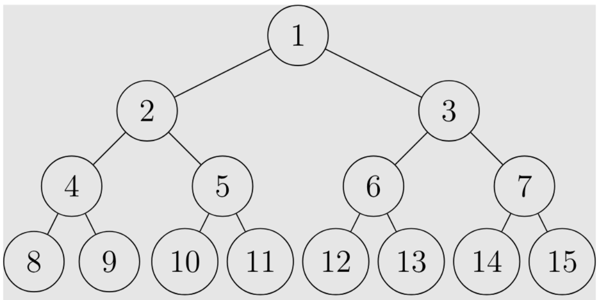
完整二叉树（proper binary tree）

- **完全二叉树（complete binary tree）**：只有最下面两层结点的度数可以小于 2，且最下面一层的结点都集中在该层最左边的连续位置上。



完全二叉树（complete binary tree）

- **完美二叉树（perfect binary tree）**：所有叶结点的深度均相同，且所有非叶节点的子节点数量均为 2 的二叉树称为完美二叉树。



完美二叉树（perfect binary tree）

> **Warning**
>
> Proper binary tree 的汉译名称不固定，且完全二叉树和满二叉树的定义在不同教材中定义不同，遇到的时候需根据上下文加以判断。

OIers 所说的「满二叉树」多指完美二叉树。

存储

只记录父结点

用一个数组 `parent[N]` 记录每个结点的父亲结点。

这种方式可以获得的信息较少，不便于进行自顶向下的遍历。常用于自底向上的递推问题中。

邻接表

- 对于无根树：为每个结点开辟一个线性列表，记录所有与之相连的结点。

```
std::vector<int> adj[N];
```

- 对于有根树：
  - 方法一：若给定的是无向图，则仍可以上述形式存储。下文将介绍如何区分结点的上下关系。
  - 方法二：若输入数据能够确保结点的上下关系，则可以利用这个信息。为每个结点开辟一个线性列表，记录其所有子结点；若有需要，还可在另一个数组中记录其父结点。

    ```
    std::vector<int> children[N];
    int parent[N];
    ```

    当然也可以用其他方式（如链表）替代 `std::vector`。

左孩子右兄弟表示法

过程

对于有根树，存在一种简单的表示方法。

首先，给每个结点的所有子结点任意确定一个顺序。

此后为每个结点记录两个值：其 **第一个子结点** `child[u]` 和其 **下一个兄弟结点** `sib[u]`。若没有子结点，则 `child[u]` 为空；若该结点是其父结点的最后一个子结点，则 `sib[u]` 为空。

实现

遍历一个结点的所有子结点可由如下方式实现。

```
int v = child[u];  // 从第一个子结点开始
while (v != EMPTY_NODE) {
  // ...
  // 处理子结点 v
  // ...
  v = sib[v];  // 转至下一个子结点，即 v 的一个兄弟
}
```

也可简写为以下形式。

```
for (int v = child[u]; v != EMPTY_NODE; v = sib[v]) {
  // ...
  // 处理子结点 v
  // ...
}
```

二叉树

需要记录每个结点的左右子结点。

实现

```cpp
int parent[N];
int lch[N], rch[N];
// -- or --
int child[N][2];
```

树的遍历

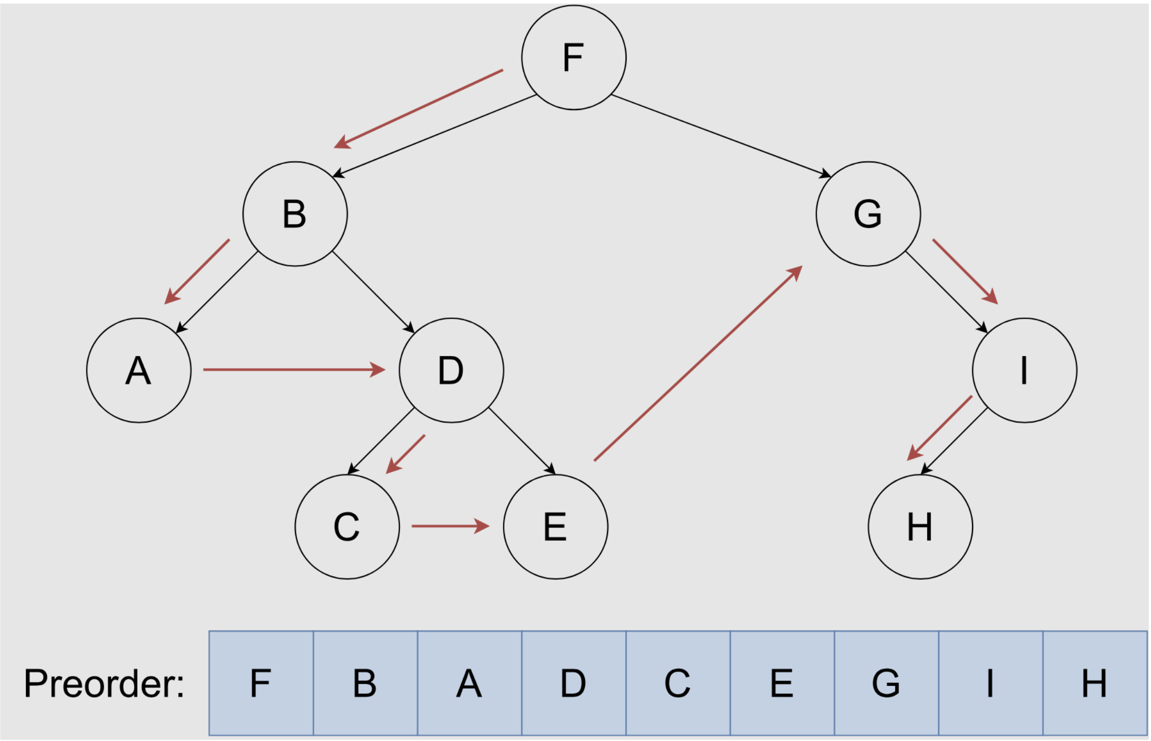
树上 DFS

在树上 DFS 是这样的一个过程：先访问根节点，然后分别访问根节点每个儿子的子树。

可以用来求出每个节点的深度、父亲等信息。

二叉树 DFS 遍历

先序遍历

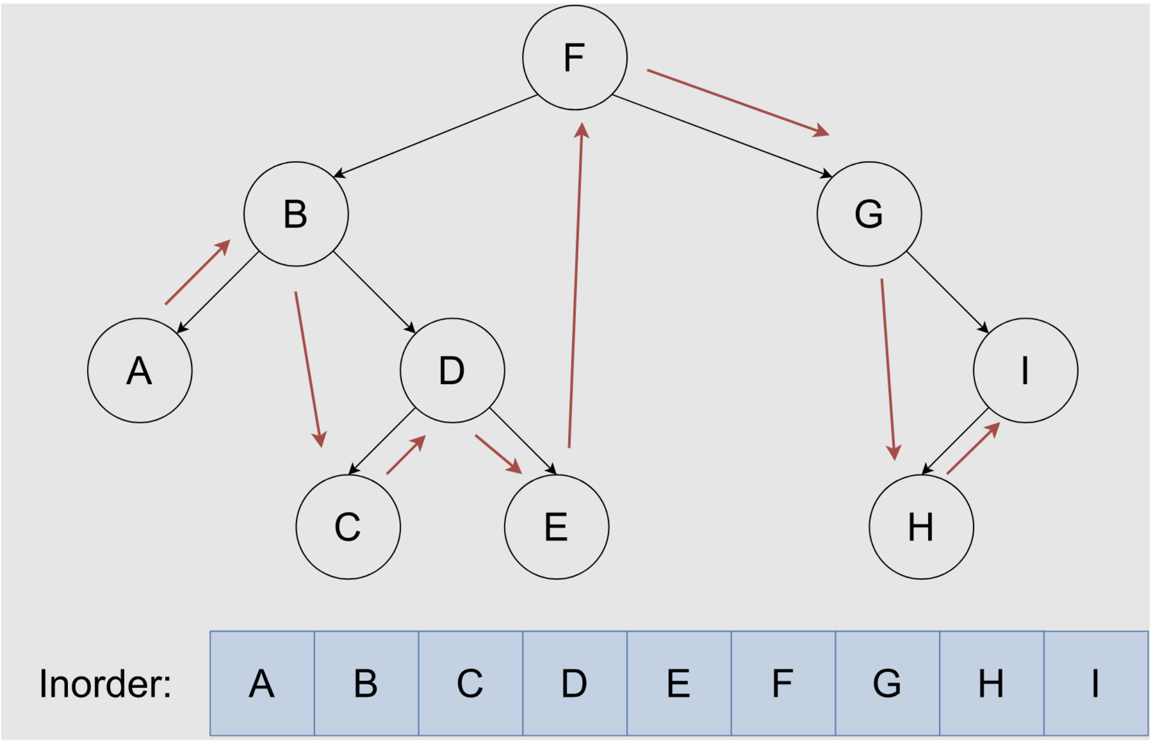


按照 **根，左，右** 的顺序遍历二叉树。

实现

```
void preorder(BiTree* root) {
  if (root) {
    cout << root->key << " ";
    preorder(root->left);
    preorder(root->right);
  }
}
```

中序遍历

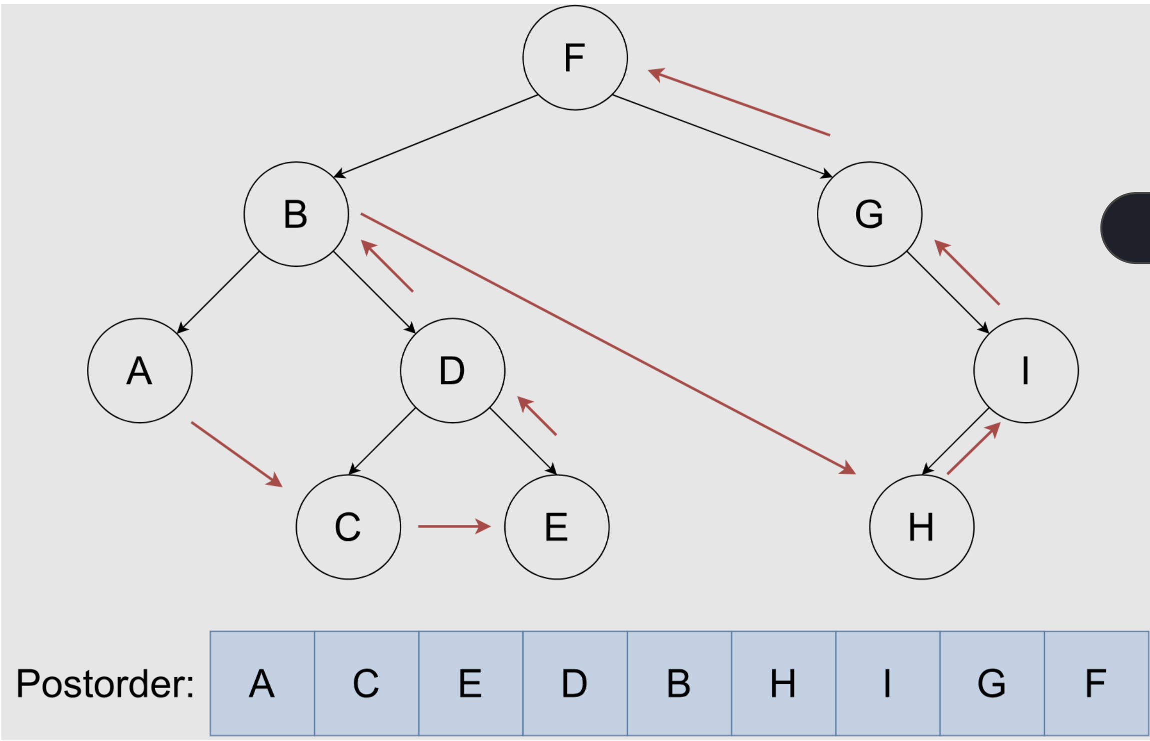


按照 **左，根，右** 的顺序遍历二叉树。

实现

```
void inorder(BiTree* root) {
  if (root) {
    inorder(root->left);
    cout << root->key << " ";
    inorder(root->right);
  }
}
```

后序遍历



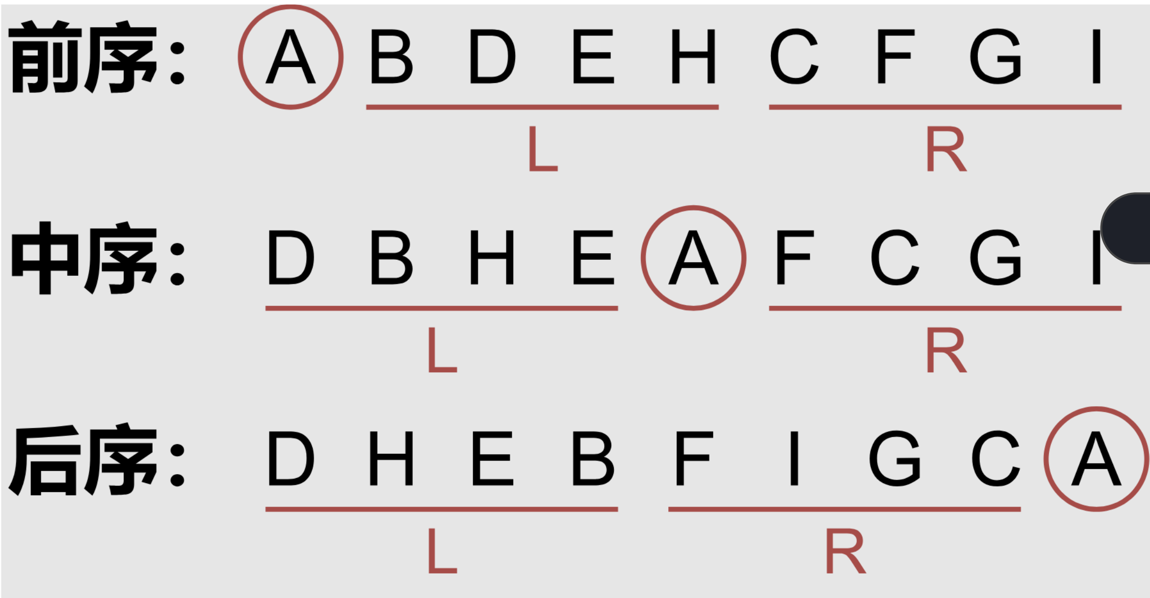
按照 **左，右，根** 的顺序遍历二叉树。

实现

```
void postorder(BiTree* root) {
  if (root) {
    postorder(root->left);
    postorder(root->right);
    cout << root->key << " ";
  }
}
```

反推

已知中序遍历序列和另外一个序列可以求第三个序列。



1. 前序的第一个是 `root`，后序的最后一个是 `root`。
2. 先确定根节点，然后根据中序遍历，在根左边的为左子树，根右边的为右子树。
3. 对于每一个子树可以看成一个全新的树，仍然遵循上面的规律。

树上 BFS

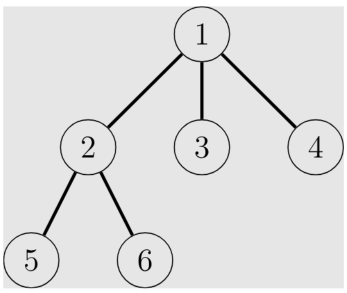
从树根开始，严格按照层次来访问节点。

BFS 过程中也可以顺便求出各个节点的深度和父亲节点。

树的层序遍历

树层序遍历是指按照从根节点到叶子节点的层次关系，一层一层的横向遍历各个节点。根据 BFS 的定义可以知道，BFS 所得到的遍历顺序就是一种层序遍历。但层序遍历要求将不同的层次区分开来，所以其结果通常以二维数组的形式表示。

例如，下图的树的层序遍历的结果是 `[[1], [2, 3, 4], [5, 6]]`（每一层从左向右）。



实现

```cpp
vector<vector<int>> levelOrder(Node* root) {
  if (!root) {
    return {};
  }
  vector<vector<int>> res;
  queue<Node*> q;
  q.push(root);
  while (!q.empty()) {
    int currentLevelSize = q.size();  // 当前层的节点个数
    res.push_back(vector<int>());
    for (int i = 0; i < currentLevelSize; ++i) {
      Node* cur = q.front();
      q.pop();
      res.back().push_back(cur->val);
      for (Node* child : cur->children) {  // 把子节点都加入
        q.push(child);
      }
    }
  }
  return res;
}
```

二叉树 Morris 遍历

二叉树遍历的核心问题是，当遍历当前节点的子节点后，如何返回当前节点并继续遍历。遍历二叉树的递归方法和非递归方法都使用了栈结构，记录返回路径，来实现从下层到上层的移动。其空间复杂度最好时为 $O(\log n)$，最坏时为 $O(n)$（二叉树呈线性）。

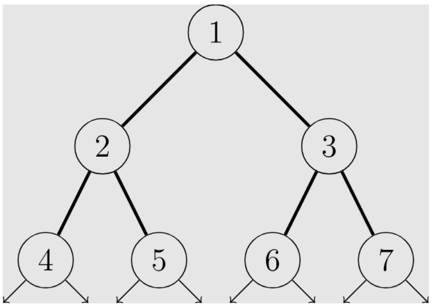
Morris 遍历的实质是避免使用栈，利用底层节点空闲的 `right` 指针指回上层的某个节点，从而完成下层到上层的移动。

Morris 遍历的过程

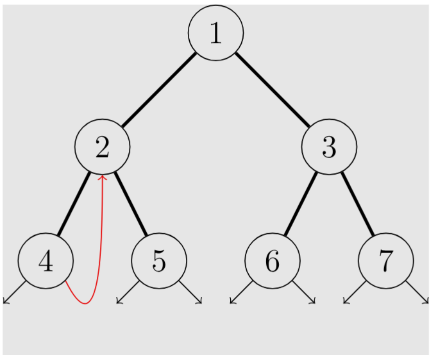
假设来到当前节点 `cur`，开始时来到根节点位置。

1. 如果 `cur` 为空时遍历停止，否则进行以下过程。
2. 如果 `cur` 没有左子树，`cur` 向右移动（`cur = cur->right`）。
3. 如果 `cur` 有左子树，找到左子树上最右的节点，记为 `mostRight`。
   - 如果 `mostRight` 的 `right` 指针指向空，让其指向 `cur`，然后 `cur` 向左移动（`cur = cur->left`）。
   - 如果 `mostRight` 的 `right` 指针指向 `cur`，将其修改为 `null`，然后 `cur` 向右移动（`cur = cur->right`）。

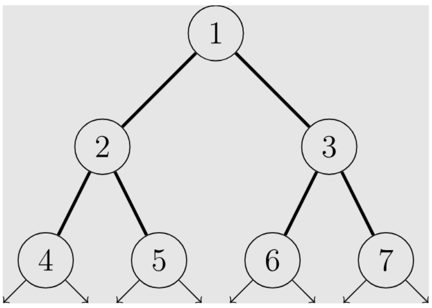
例如，`cur` 从节点 1 开始访问。



`cur` 第一次访问节点 2 时，找到左子树上最右的节点 4，将 4 的 `right` 指针指向 `cur`（节点 2)。



`cur` 通过 4 的 `right` 指针返回上层，第二次访问节点 2 时，找到左子树上最右节点 4，将 4 的 `right` 指针修改为 `null`，然后继续访问右子树。之后的过程省略。



整棵树的访问顺序是 `1242513637`。可以发现有左子树的节点访问两次，没有左子树的节点只访问一次。

实现

```cpp
void morris(TreeNode* root) {
  TreeNode* cur = root;
  while (cur) {
    if (!cur->left) {
      // 如果当前节点没有左子节点，则输出当前节点的值并进入右子树
      std::cout << cur->val << " ";
      cur = cur->right;
      continue;
    }
    // 找到当前节点的左子树的最右节点
    TreeNode* mostRight = cur->left;
    while (mostRight->right && mostRight->right != cur) {
      mostRight = mostRight->right;
    }
    if (!mostRight->right) {
      // 如果最右节点的right指针为空，将其指向当前节点，并进入左子树
      mostRight->right = cur;
      cur = cur->left;
    } else {
      // 如果最右节点的right指针指向当前节点，说明左子树已经遍历完毕，输出当前节点的值并进入右子树
      mostRight->right = nullptr;
      std::cout << cur->val << " ";
      cur = cur->right;
    }
  }
}
```

无根树

过程

树的遍历一般为深度优先遍历，这个过程中最需要注意的是避免重复访问结点。

由于树是无环图，因此只需记录当前结点是由哪个结点访问而来，此后进入除该结点外的所有相邻结点，即可避免重复访问。

实现

```
void dfs(int u, int from) {
  // 递归进入除了 from 之外的所有子结点
  // 对于出发结点，from 为空，故会访问所有相邻结点，这与期望一致
  for (int v : adj[u])
    if (v != from) {
      dfs(v, u);
    }
}

// 开始遍历时
int EMPTY_NODE = -1;  // 一个不存在的编号
int root = 0;         // 任取一个结点作为出发点
dfs(root, EMPTY_NODE);
```

有根树

对于有根树，需要区分结点的上下关系。

考察上面的遍历过程，若从根开始遍历，则访问到一个结点时 `from` 的值，就是其父结点的编号。

通过这个方式，可以对于无向的输入求出所有结点的父结点，以及子结点列表。

本页面部分内容引用自博文 二叉树：前序遍历、中序遍历、后续遍历，遵循 CC 4.0 BY-SA 版权协议。

本页面最近更新：2025/5/3 19:43:25，更新历史
发现错误？想一起完善？ 在 GitHub 上编辑此页！
本页面贡献者：Ir1d, ayuusweetfish, Marcythm, Xeonacid, yuhuoji, Alphnia, argvchs, c-forrest, CCXXXI, Enter-tainer, iamtwz, mcendu, StudyingFather, Tiphereth-A, yjl9903