卡特兰数

Catalan 数列

Catalan 数列 H_n 可以应用于以下问题：

1. 有 $2n$ 个人排成一行进入剧场。入场费 5 元。其中只有 n 个人有一张 5 元钞票，另外 n 人只有 10 元钞票，剧院无其它钞票，问有多少种方法使得只要有 10 元的人买票，售票处就有 5 元的钞票找零？
2. 有一个大小为 $n \times n$ 的方格图左下角为 $(0,0)$ 右上角为 (n,n)，从左下角开始每次都只能向右或者向上走一单位，不走到对角线 $y=x$ 上方（但可以触碰）的情况下到达右上角有多少可能的路径？
3. 在圆上选择 $2n$ 个点，将这些点成对连接起来使得所得到的 n 条线段不相交的方法数？
4. 对角线不相交的情况下，将一个凸多边形区域分成三角形区域的方法数？
5. 一个栈（无穷大）的进栈序列为 $1,2,3,\cdots,n$ 有多少个不同的出栈序列？
6. n 个结点可构造多少个不同的二叉树？
7. 由 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 组成的 $2n$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$，其部分和满足 $a_1+a_2+\cdots+a_k \geq 0\ (k=1,2,3,\cdots,2n)$，有多少个满足条件的数列？

其对应的序列为：

H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	...
1	1	2	5	14	42	132	...

递推式

该递推关系的解为：

$$H_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+)$$

关于 Catalan 数的常见公式：

$$H_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} H_{i-1} H_{n-i} & n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+ \\ 1 & n = 0, 1 \end{cases}$$

$$H_n = \frac{H_{n-1}(4n-2)}{n+1}$$

$$H_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

例题 洛谷 P1044 栈

题目大意：入栈顺序为 $1, 2, \ldots, n$，求所有可能的出栈顺序的总数。

C++

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;
int n;
long long f[25];

int main() {
  f[0] = 1;
  cin >> n;
  for (int i = 1; i <= n; i++) f[i] = f[i - 1] * (4 * i - 2) / (i + 1);
  // 这里用的是常见公式2
  cout << f[n] << endl;
  return 0;
}
```

Python

```python
f = [0] * 25
f[0] = 1
n = int(input())
for i in range(1, n + 1):
    f[i] = int(f[i - 1] * (4 * i - 2) // (i + 1))
    # 这里用的是常见公式2
print(f[n])
```

封闭形式

卡特兰数的递推式为

$$H_n = \sum_{i=0}^{n-1} H_i H_{n-i-1} \quad (n \geq 2)$$

其中 $H_0 = 1, H_1 = 1$。设它的普通生成函数为 $H(x)$。

我们发现卡特兰数的递推式与卷积的形式很相似，因此我们用卷积来构造关于 $H(x)$ 的方程：

$$
\begin{aligned}
H(x) &= \sum_{n\geq 0} H_n x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1}\sum_{i=0}^{n-1} H_i x^i H_{n-i-1} x^{n-i-1} x \\
&= 1 + x\sum_{i\geq 0} H_i x^i \sum_{n\geq 0} H_n x^n \\
&= 1 + xH^2(x)
\end{aligned}
$$

解得

$$
H(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}
$$

那么这就产生了一个问题：我们应该取哪一个根呢？我们将其分子有理化：

$$
H(x) = \frac{2}{1\mp\sqrt{1-4x}}
$$

代入 $x=0$，我们得到的是 $H(x)$ 的常数项，也就是 H_0。当 $H(x)=\dfrac{2}{1+\sqrt{1-4x}}$ 的时候有 $H(0)=1$，满足要求。而另一个解会出现分母为 0 的情况（不收敛），舍弃。

因此我们得到了卡特兰数生成函数的封闭形式：

$$
H(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}
$$

接下来我们要将其展开。但注意到它的分母不是斐波那契数列那样的多项式形式，因此不方便套用等比数列的展开形式。在这里我们需要使用牛顿二项式定理。我们来先展开 $\sqrt{1-4x}$：

$$
\begin{aligned}
(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\underline{n}}}{n!}(-4x)^n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^{\underline{n}} &= \frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\,\frac{-3}{2}\cdots\frac{-(2n-3)}{2} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n(2n-2)!!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}
\end{aligned}
$$

这里使用了双阶乘的化简技巧。那么带回 (1) 得到

$$
\begin{aligned}
(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}(-4x)^n \\
&= 1 - \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} 2x^n \\
&= 1 - \sum_{n\geq 1} \binom{2n-1}{n} \frac{1}{(2n-1)} 2x^n
\end{aligned}
$$

带回原式得到

$$
\begin{aligned}
H(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\
&= \frac{1}{2x} \sum_{n\geq 1} \binom{2n-1}{n} \frac{1}{(2n-1)} 2x^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \binom{2n-1}{n} \frac{1}{(2n-1)} x^{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 0} \binom{2n+1}{n+1} \frac{1}{(2n+1)} x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} x^n
\end{aligned}
$$

> 这样我们就得到了卡特兰数的通项公式。

路径计数问题

非降路径是指只能向上或向右走的路径。

1. 从 $(0,0)$ 到 (m,n) 的非降路径数等于 m 个 x 和 n 个 y 的排列数，即 $\binom{n+m}{m}$。
2. 从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的除端点外不接触直线 $y=x$ 的非降路径数：

   先考虑 $y=x$ 下方的路径，都是从 $(0,0)$ 出发，经过 $(1,0)$ 及 $(n,n-1)$ 到 (n,n)，可以看做是 $(1,0)$ 到 $(n,n-1)$ 不接触 $y=x$ 的非降路径数。

   所有的的非降路径有 $\binom{2n-2}{n-1}$ 条。对于这里面任意一条接触了 $y=x$ 的路径，可以把它最后离开这条线的点到 $(1,0)$ 之间的部分关于 $y=x$ 对称变换，就得到从 $(0,1)$ 到 $(n,n-1)$ 的一条非降路径。反之也成立。从而 $y=x$ 下方的非降路径数是 $\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n}$。根据对称性可知所求答案为 $2\binom{2n-2}{n-1}-2\binom{2n-2}{n}$。
3. 从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的除端点外不穿过直线 $y=x$ 的非降路径数：

   用类似的方法可以得到：$\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}$

本页面最近更新：2023/12/14 16:23:38，更新历史
发现错误？想一起完善？ 在 GitHub 上编辑此页！
本页面贡献者：Ir1d, StudyingFather, H-J-Granger, countercurrent-time, Enter-tainer, NachtgeistW, Xeonacid, MegaOwIer, AngelKitty, CCXXXI, cjsoft, diauweb, Early0v0, ezoixx130, GekkaSaori, Konano, ksyx, LovelyBuggies, Makkiy, mgt, minghu6, P-Y-Y, PotassiumWings SamZhangQingChuan, sshwy, Suyun514, Tiphereth-A, weiyong1024, Chrogeek, Fidelxyz, GavinZhengOI, Gesrua, Great-designer, Henry-ZHR, hsfzLZH1, iamtwz, kenlig, kfy666, kxccc, lychees, Marcythm, Menci, Peanut-Tang, purple-vine, refinedcoding, shawlleyw, ShizuhaAki, Skyminers, SukkaW, ucSec, zryi2003