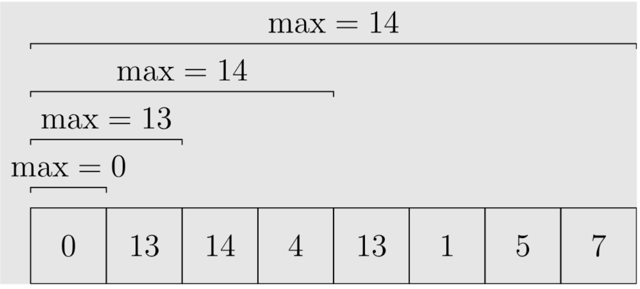
ST 表

定义



ST 表（Sparse Table，稀疏表）是用于解决 **可重复贡献问题** 的数据结构。

什么是可重复贡献问题？

可重复贡献问题 是指对于运算 opt，满足 $x \operatorname{opt} x = x$，则对应的区间询问就是一个可重复贡献问题。例如，最大值有 $\max(x,x)=x$，gcd 有 $\operatorname{gcd}(x,x)=x$，所以 RMQ 和区间 GCD 就是一个可重复贡献问题。像区间和就不具有这个性质，如果求区间和的时候采用的预处理区间重叠了，则会导致重叠部分被计算两次，这是我们所不愿意看到的。另外，opt 还必须满足结合律才能使用 ST 表求解。

什么是 RMQ？

RMQ 是英文 Range Maximum/Minimum Query 的缩写，表示区间最大（最小）值。解决 RMQ 问题有很多种方法，可以参考 RMQ 专题。

引入

ST 表模板题

题目大意：给定 n 个数，有 m 个询问，对于每个询问，你需要回答区间 $[l,r]$ 中的最大值。

考虑暴力做法。每次都对区间 $[l,r]$ 扫描一遍，求出最大值。

显然，这个算法会超时。

ST 表

ST 表基于 倍增 思想，可以做到 $\Theta(n\log n)$ 预处理，$\Theta(1)$ 回答每个询问。但是不支持修改操作。

基于倍增思想，我们考虑如何求出区间最大值。可以发现，如果按照一般的倍增流程，每次跳 2^i 步的话，询问时的复杂度仍旧是 $\Theta(\log n)$，并没有比线段树更优，反而预处理一步还比线段树慢。

我们发现 $\max(x,x)=x$，也就是说，区间最大值是一个具有「可重复贡献」性质的问题。即使用来求解的预处理区间有重叠部分，只要这些区间的并是所求的区间，最终计算出的答案就是正确的。

如果手动模拟一下，可以发现我们能使用至多两个预处理过的区间来覆盖询问区间，也就是说询问时的时间复杂度可以被降至 $\Theta(1)$，在处理有大量询问的题目时十分有效。

具体实现如下：

令 $f(i,j)$ 表示区间 $[i,i+2^j-1]$ 的最大值。

显然 $f(i,0)=a_i$。

根据定义式，第二维就相当于倍增的时候「跳了 2^j-1 步」，依据倍增的思路，写出状态转移方程：$f(i,j)=\max(f(i,j-1),f(i+2^{j-1},j-1))$。

$$\max\left(\boxed{\max(\{a_i,\ldots,a_{i+2^{j-1}-1}\})}\ \boxed{\max(\{a_{i+2^{j-1}},\ldots,a_{i+2^j-1}\})}\right)$$
$$\|$$
$$\boxed{\max(\{a_i,\ldots,a_{i+2^j-1}\})}$$

以上就是预处理部分。而对于查询，可以简单实现如下：

对于每个询问 $[l,r]$，我们把它分成两部分：$[l,l+2^s-1]$ 与 $[r-2^s+1,r]$，其中 $s=\lfloor\log_2(r-l+1)\rfloor$。两部分的结果的最大值就是回答。

$$\max=\max(\max_l,\max_r)=14$$
$$\max_r=f(4,2)=13$$
$$\max_l=f(2,2)=14$$

0	13	14	4	13	1	5	7

根据上面对于「可重复贡献问题」的论证，由于最大值是「可重复贡献问题」，重叠并不会对区间最大值产生影响。又因为这两个区间完全覆盖了 $[l,r]$，可以保证答案的正确性。

模板代码

ST 表模板题

C 风格

```cpp
#include <algorithm>
#include <iostream>
using namespace std;
constexpr int MAXN = 2000001;
constexpr int logN = 21;
int f[MAXN][logN + 1], Logn[MAXN + 1];

void pre() {  // 准备工作，初始化
  Logn[1] = 0;
  Logn[2] = 1;
  for (int i = 3; i < MAXN; i++) {
    Logn[i] = Logn[i / 2] + 1;
  }
}

int main() {
  cin.tie(nullptr)->sync_with_stdio(false);
  int n, m;
  cin >> n >> m;
  for (int i = 1; i <= n; i++) cin >> f[i][0];
  pre();
  for (int j = 1; j <= logN; j++)
    for (int i = 1; i + (1 << j) - 1 <= n; i++)
      f[i][j] = max(f[i][j - 1], f[i + (1 << (j - 1))][j - 1]);  // ST表具体实现
  for (int i = 1; i <= m; i++) {
    int x, y;
    cin >> x >> y;
    int s = Logn[y - x + 1];
    cout << max(f[x][s], f[y - (1 << s) + 1][s]) << '\n';
  }
  return 0;
}
```

C++ 风格

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

template <typename T>
class SparseTable {
  using VT = vector<T>;
  using VVT = vector<VT>;
  using func_type = function<T(const T &, const T &)>;

  VVT ST;

  static T default_func(const T &t1, const T &t2) { return max(t1, t2); }

  func_type op;

```

```cpp
 public:
  SparseTable(const vector<T> &v, func_type _func = default_func) {
    op = _func;
    int len = v.size(), l1 = ceil(log2(len)) + 1;
    ST.assign(len, VT(l1, 0));
    for (int i = 0; i < len; ++i) {
      ST[i][0] = v[i];
    }
    for (int j = 1; j < l1; ++j) {
      int pj = (1 << (j - 1));
      for (int i = 0; i + pj < len; ++i) {
        ST[i][j] = op(ST[i][j - 1], ST[i + (1 << (j - 1))][j - 1]);
      }
    }
  }

  T query(int l, int r) {
    int lt = r - l + 1;
    int q = floor(log2(lt));
    return op(ST[l][q], ST[r - (1 << q) + 1][q]);
  }
};
```

Python

```python
import sys

input = sys.stdin.readline


class SparseTable:
    def __init__(self, arr: list, func=min):
        self.func = func
        self.n = len(arr)
        self.log = [0] * (self.n + 1)

        for i in range(2, self.n + 1):
            self.log[i] = self.log[i // 2] + 1

        self.k = self.log[self.n]
        self.st = [[0] * (self.n) for _ in range(self.k + 1)]
        self.st[0] = arr

        for j in range(1, self.k + 1):
            i = 0
            while i + (1 << j) <= self.n:
                self.st[j][i] = self.func(
                    self.st[j - 1][i], self.st[j - 1][i + (1 << (j - 1))]
                )
                i += 1

    def query(self, left: int, right: int):
        j = self.log[right - left + 1]
        return self.func(self.st[j][left], self.st[j][right - (1 << j) +
1])
```

```python
n, m = map(int, input().split())
a = list(map(int, input().split()))
st = SparseTable(a, max)
for _ in range(m):
    left, right = map(int, input().split())
    print(st.query(left - 1, right - 1))
```

注意点

> 1. 输入输出数据一般很多，建议开启输入输出优化。
> 2. 每次用 std::log 重新计算 log 函数值并不值得，建议进行如下的预处理：

$$\begin{cases}\texttt{Logn}[1] \leftarrow 0, \\ \texttt{Logn}\left[i\right] \leftarrow \texttt{Logn}\left[\frac{i}{2}\right] + 1.\end{cases}$$

ST 表维护其他信息

除 RMQ 以外，还有其它的「可重复贡献问题」。例如「区间按位与」、「区间按位或」、「区间 GCD」，ST 表都能高效地解决。

需要注意的是，对于「区间 GCD」，ST 表的查询复杂度并没有比线段树更优（令值域为 w，ST 表的查询复杂度为 $\Theta(\log w)$，而线段树为 $\Theta(\log n+\log w)$，且值域一般是大于 n 的），但是 ST 表的预处理复杂度也没有比线段树更劣，而编程复杂度方面 ST 表比线段树简单很多。

如果分析一下，「可重复贡献问题」一般都带有某种类似 RMQ 的成分。例如「区间按位与」就是每一位取最小值，而「区间 GCD」则是每一个质因数的指数取最小值。

总结

ST 表能较好的维护「可重复贡献」的区间信息（同时也应满足结合律），时间复杂度较低，代码量相对其他算法很小。但是，ST 表能维护的信息非常有限，不能较好地扩展，并且不支持修改操作。

练习

RMQ 模板题

「SCOI2007」降雨量

[USACO07JAN] 平衡的阵容 Balanced Lineup

附录：ST 表求区间 GCD 的时间复杂度分析

在算法运行的时候，可能要经过 $\Theta(\log n)$ 次迭代。每一次迭代都可能会使用 GCD 函数进行递归，令值域为 w，GCD 函数的时间复杂度最高是 $\Omega(\log w)$ 的，所以总时间复杂度看似有 $O(n \log n \log w)$。

但是，在 GCD 的过程中，每一次递归（除最后一次递归之外）都会使数列中的某个数至少减半，而数列中的数最多减半的次数为 $\log_2(w^n) = \Theta(n \log w)$，所以，GCD 的递归部分最多只会运行 $O(n \log w)$ 次。再加上循环部分（以及最后一层递归）的 $\Theta(n \log n)$，最终时间复杂度则是 $O(n(\log w + \log x))$，由于可以构造数据使得时间复杂度为 $\Omega(n(\log w + \log x))$，所以最终的时间复杂度即为 $\Theta(n(\log w + \log x))$。

而查询部分的时间复杂度很好分析，考虑最劣情况，即每次询问都询问最劣的一对数，时间复杂度为 $\Theta(\log w)$。因此，ST 表维护「区间 GCD」的时间复杂度为预处理 $\Theta(n(\log n + \log w))$，单次查询 $\Theta(\log w)$。

线段树的相应操作是预处理 $\Theta(n \log x)$，查询 $\Theta(n(\log n + \log x))$。

这并不是一个严谨的数学论证，更为严谨的附在下方：

更严谨的证明

理解本段，可能需要具备 时间复杂度 的关于「势能分析法」的知识。

先分析预处理部分的时间复杂度：

设「待考虑数列」为在预处理 ST 表的时候当前层循环的数列。例如，第零层的数列就是原数列，第一层的数列就是第零层的数列经过一次迭代之后的数列，即 `st[1..n][1]`，我们将其记为 A。

而势能函数就定义为「待考虑数列」中所有数的累乘的以二为底的对数。即：$\Phi(A) = \log_2\left(\prod\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$。

在一次迭代中，所花费的时间相当于迭代循环所花费的时间与 GCD 所花费的时间之和。其中，GCD 花费的时间有长有短。最短可能只有两次甚至一次递归，而最长可能有 $O(\log w)$ 次递归。但是，GCD 过程中，除最开头一层与最末一层以外，每次递归都会使「待考虑数列」中的某个结果至少减半。即，$\Phi(A)$ 会减少至少 1，该层递归所用的时间可以被势能函数均摊。

同时，我们可以看到，$\Phi(A)$ 的初值最大为 $\log_2(w^n) = \Theta(n \log w)$，而 $\Phi(A)$ 不增。所以，ST 表预处理部分的时间复杂度为 $O(n(\log w + \log n))$。

minghu6, P-Y-Y, PotassiumWings, SamZhangQingChuan, ShadowsEpic, sshwy, Suyun514, weiyong1024, Backl1ght, c-forrest, Chrogeek, DawnMagnet, firogh, Fomalhauthmj, GavinZhengOI, Gesrua, Great-designer, hsfzLZH1, hsn8086, iamtwz, kenlig, ksyx, kxccc, lbdoknow, leoleoasd, lychees, mcendu, MingqiHuang, ouuan, Peanut-Tang, purinliang, shuzhouliu, Siger Young, SukkaW, Tiphereth-A, zymooll