分解质因数

引入

给定一个正整数 $N \in \mathbf{N}_+$，试快速找到它的一个 非平凡因数。

考虑朴素算法，因数是成对分布的，N 的所有因数可以被分成两块，即 $[2, \sqrt{N}]$ 和 $[\sqrt{N}+1, N)$。只需要把 $[2, \sqrt{N}]$ 里的数遍历一遍，再根据除法就可以找出至少两个因数了。这个方法的时间复杂度为 $O(\sqrt{N})$。

当 $N \geq 10^{18}$ 时，这个算法的运行时间我们是无法接受的，希望有更优秀的算法。一种想法是通过随机的方法，猜测一个数是不是 N 的因数，如果运气好可以在 $O(1)$ 的时间复杂度下求解答案，但是对于 $N \geq 10^{18}$ 的数据，成功猜测的概率是 $\frac{1}{10^{18}}$，期望猜测的次数是 10^{18}。如果是在 $[2, \sqrt{N}]$ 里进行猜测，成功率会大一些。我们希望有方法来优化猜测。

朴素算法

最简单的算法即为从 $[2, \sqrt{N}]$ 进行遍历。

C++

```cpp
vector<int> breakdown(int N) {
  vector<int> result;
  for (int i = 2; i * i <= N; i++) {
    if (N % i == 0) {  // 如果 i 能够整除 N，说明 i 为 N 的一个质因子。
      while (N % i == 0) N /= i;
      result.push_back(i);
    }
  }
  if (N != 1) {  // 说明再经过操作之后 N 留下了一个素数
    result.push_back(N);
  }
  return result;
}
```

Python

```python
def breakdown(N):
    result = []
    for i in range(2, int(sqrt(N)) + 1):
        if N % i == 0:  # 如果 i 能够整除 N，说明 i 为 N 的一个质因子。
            while N % i == 0:
                N //= i
            result.append(i)
    if N != 1:  # 说明再经过操作之后 N 留下了一个素数
```

```
        result.append(N)
    return result
```

我们能够证明 `result` 中的所有元素即为 `N` 的全体素因数。

证明 `result` 中即为 N 的全体素因数

首先考察 `N` 的变化。当循环进行到 `i` 结束时，由于刚执行结束 `while(N % i == 0) N /= i` 部分，`i` 不再整除 `N`。而且，每次除去一个因子，都能够保证 `N` 仍整除 N。这两点保证了，当循环进行到 `i` 开始时，`N` 是 N 的一个因子，且不被任何小于 `i` 的整数整除。

其次证明 `result` 中的元素均为 N 的因子。当循环进行到 `i` 时，能够在 `result` 中存入 `i` 的条件是 `N % i == 0`，这说明 `i` 整除 `N`，且已经说明 `N` 是 N 的因子，故而有 `i` 是 N 的因子。当对 `i` 的循环结束时，若 `N` 不为一，也会存入 `result`。此时它根据前文，也必然是 N 的一个因子。

其次证明 `result` 中均为素数。我们假设存在一个在 `result` 中的合数 K，则必然存在 `i` 不超过 $\sqrt{K}$，满足 `i` 是 `K` 的一个因子。这样的 K 不可能作为循环中的某个 `i` 存入 `result`，因为第一段已经说明，当循环到 K 时，`N` 不被任何小于 K 的 `i` 整除。这样的 K 也不可能在循环结束后加入，因为循环退出的条件是 `i * i > N`，故而已经遍历完了所有不超过 $\sqrt{K}$ 的 `i`，而且据上文所说，这些 `i` 绝不能整除目前的 `N`，亦即 K。

最后证明，所有 N 的素因子必然出现在 `result` 中。不妨假设 p 是 N 的一个素因子，但并没有出现在 `result` 中。根据上文的讨论，p 不可能是循环中出现过的 `i`。设 `i` 是退出循环前最后的 `i`，则 `i` 严格小于 p，而退出循环后的 `N` 不被之前的 `i` 整除，故而 p 整除 `N`。所以最后的 `N` 大于一，则根据前文所述，它必然是素数，则 `N` 就等于 p，必会在最后加入 `result`，与假设矛盾。

值得指出的是，如果开始已经打了一个素数表的话，时间复杂度将从 $O(\sqrt{N})$ 下降到 $O(\frac{\sqrt{N}}{\ln N})$。去 筛法 处查阅更多打表的信息。

例题：CF 1445C

Pollard Rho 算法

引入

利用暴力算法获得一个非平凡因子的复杂度为 $O(p) = O(\sqrt{N})$，这里，p 是 N 的最小素因子。而下面要介绍的 Pollard-Rho 算法是一种随机化算法，可以在 $O(\sqrt{p}) = O(N^{1/4})$ 的期望复杂度获得一个非平凡因子（**注意**！非平凡因子不一定是素因子）。

它的核心想法是，对于一个随机自映射 $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$，从任何一点 x_1 出发，迭代计算 $x_n = f(x_{n-1})$，将在 $O(\sqrt{p})$ 期望时间内进入循环。如果能够找到 $x_i \equiv x_j \pmod p$，则 p 整除 $\gcd(|x_i - x_j|, N)$，这一最大公约数就是 N 的一个非平凡因子。

要理解进入循环的期望时间为 $O(\sqrt{p})$，可以从生日悖论中获得启发。

生日悖论

不考虑出生年份（假设每年都是 365 天），问：一个房间中至少多少人，才能使其中两个人生日相同的概率达到 50%?

解：假设一年有 n 天，房间中有 k 人，用整数 $1,2,\ldots,k$ 对这些人进行编号。假定每个人的生日均匀分布于 n 天之中，且两个人的生日相互独立。

设 k 个人生日互不相同为事件 A, 则事件 A 的概率为

$$P(A)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{n}$$

至少有两个人生日相同的概率为 $P(\overline{A})=1-P(A)$。根据题意可知 $P(\overline{A})\geq\frac{1}{2}$, 那么就有

$$P(A)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{n}\leq\frac{1}{2}$$

由不等式 $1+x\leq \mathrm{e}^x$ 可得

$$P(A)\leq\prod_{i=1}^{k-1}\exp\left(-\frac{i}{n}\right)=\exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right)$$

因此

$$\exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right)\leq\frac{1}{2}\implies P(A)\leq\frac{1}{2}$$

将 $n=365$ 代入，解得 $k\geq 23$。所以一个房间中至少 23 人，使其中两个人生日相同的概率达到 50%, 但这个数学事实十分反直觉，故称之为一个悖论。

当 $k>56$，$n=365$ 时，出现两个人同一天生日的概率将大于 99%[1]。那么在一年有 n 天的情况下，当房间中有 $\frac{1}{2}(\sqrt{8n\ln 2+1}+1)\approx\sqrt{2n\ln 2}$ 个人时，至少有两个人的生日相同的概率约为 50%。

类似地可以计算，随机均匀地选取一列生日，首次获得重复生日需要的人数的期望也是 $O(\sqrt{n})$。设这一人数为 X，则

$$E(X)=\sum_{x=1}^{n+1}P(X\geq x+1)=\sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{(n-x)!n^x}=\sqrt{\frac{\pi n}{2}}-\frac{1}{3}+o(1).$$

这启发我们，如果可以随机选取一列数字，出现重复数字需要的抽样规模的期望也是 $O(\sqrt{n})$ 的。

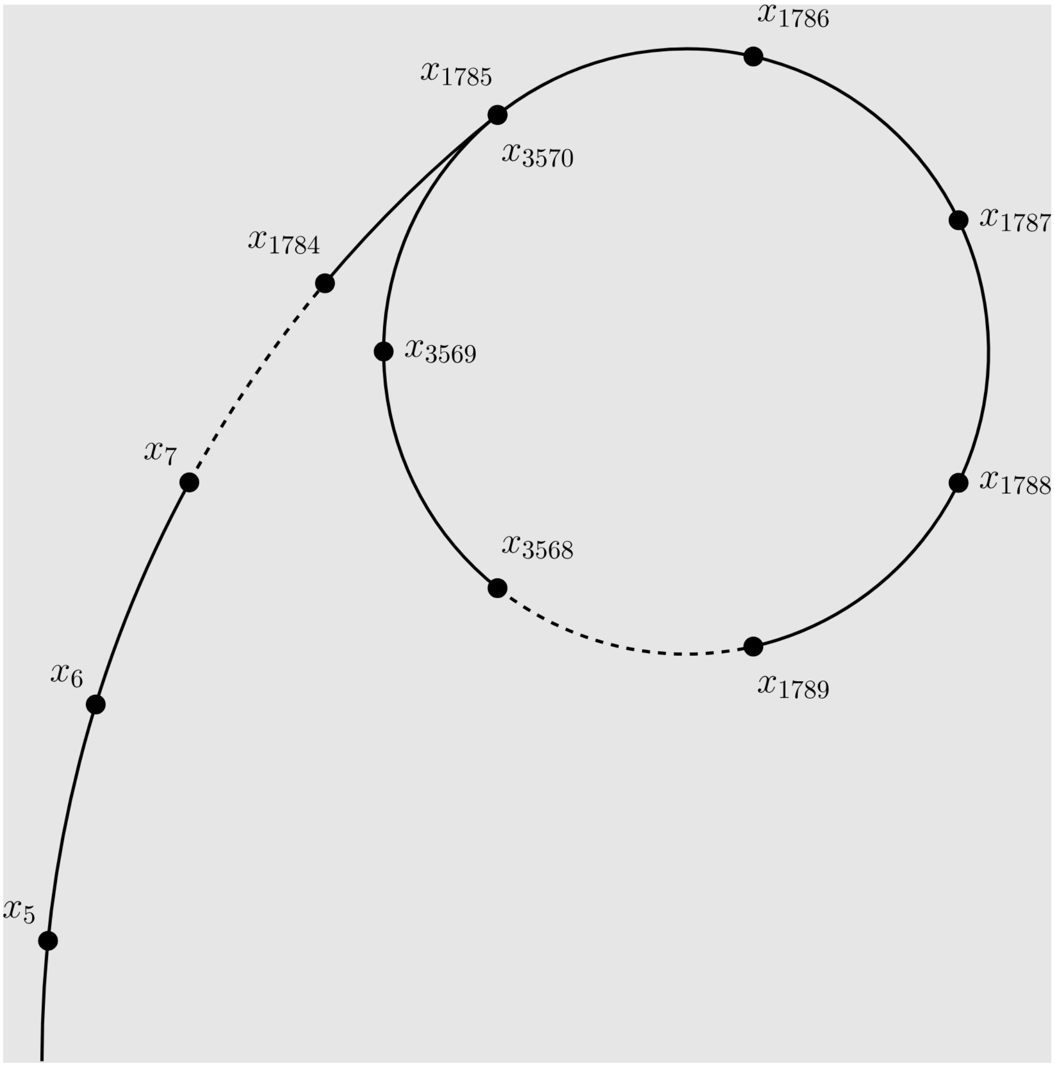
利用最大公约数求出一个约数

实际构建一列模 p 的随机数列并不现实，因为 p 正是需要求的。所以，我们通过 $f(x)=(x^2+c) \bmod N$ 来生成一个伪随机数序列 $\{x_i\}$：随机取一个 x_1，令 $x_2=f(x_1)$，$x_3=f(x_2)$，…，$x_i=f(x_{i-1})$，其中 $c \in [1,N)$ 是一个随机选取的常数。

这里选取的函数容易计算，且往往可以生成相当随机的序列。但它并不是完全随机的。举个例子，设 $n=50$，$c=6$，$x_1=1$，$f(x)$ 生成的数据为

$$1,7,5,31,17,45,31,17,45,31,\ldots$$

可以发现数据在 x_4 以后都在 $31,17,45$ 之间循环。如果将这些数如下图一样排列起来，会发现这个图像酷似一个 ρ，算法也因此得名 rho。



更重要的是，这样的函数确实提供了 $\mathbb{Z}_p$ 上一个自映射。也就是说，它满足性质：如果 $x \equiv y \pmod p$，则 $f(x) \equiv f(y) \pmod p$。

证明

若 $x \equiv y \pmod p$，则 $x^2+c \equiv y^2+c \pmod p$。注意到，$f(x)=x^2+c-k_xN$，这里 k_x 是一个依赖于 x 的整数，且 $p|N$，所以有 $f(x)=x^2+c \pmod p$，因而 $f(x)=f(y) \pmod p$。

作为 $\mathbb{Z}_p$ 上的伪随机自映射反复迭代得到的序列，$\{x_n \bmod p\}$ 在 $O(\sqrt{p})$ 的期望时间内就会出现重复。只要我们观察到这样的重复 $x_i \equiv x_j \pmod{p}$，就可以根据 $\gcd(|x_i - x_j|, N)$ 求出一个 N 的非平凡因子。注意到，由于 p 未知，我们并没有办法直接判断重复的发生，一个简单的判断方法正是 $\gcd(|x_i - x_j|, N)$ 严格大于一。

这一算法并不是总能成功的，因为 $\gcd(|x_i - x_j|, N)$ 可能等于 N。也就是说，$x_i \equiv x_j$ (mod
。此时，$\{x_n \bmod p\}$ 首次发生重复时，恰好 $\{x_n\}$ 也发生重复了。我们没有得到一个非平凡因子。而且，$\{x_n\}$ 开始循环后，再继续迭代也没有意义了，因为之后只会重复这一循环。该算法应输出分解失败，需要更换 $f(x)$ 中选取的 c 重新分解。

根据上文分析，理论上，任何满足 $\forall x \equiv y \pmod{p}, f(x) \equiv f(y) \pmod{p}$，且能够保证一定伪随机性的函数 $f(x)$（例如某些多项式函数）都可以用在此处。实践中，主要使用 $f(x) = x^2 + c \, (c \neq 0, -2)$。[2]

实现

我们需要实现的算法，能够在迭代过程中快速判断 $\{x_n \bmod p\}$ 是否已经出现重复。将 f 看成以 $\mathbb{Z}_p$ 为顶点的有向图上的边，我们实际要实现的是一个判环算法。只是将判等改为了判断 $\gcd(|x_i - x_j|, N)$ 是否大于一。

Floyd 判环

假设两个人在赛跑，A 的速度快，B 的速度慢，经过一定时间后，A 一定会和 B 相遇，且相遇时 A 跑过的总距离减去 B 跑过的总距离一定是圈长的倍数。

设 $a = f(0), b = f(f(0))$，每一次更新 $a = f(a), b = f(f(b))$，只要检查在更新过程中 a 和 b 是否相等，如果相等了，那么就出现了环。

我们每次令 $d = \gcd(|x_i - x_j|, N)$，判断 d 是否满足 $1 < d < N$，若满足则可直接返回 d。如果 $d = N$，则说明 $\{x_i\}$ 已经形成环，在形成环时就不能再继续操作了，直接返回 N 本身，并且在后续操作里调整随机常数 c，重新分解。

基于 Floyd 判环的 Pollard-Rho 算法

C++

```cpp
ll Pollard_Rho(ll N) {
  if (N == 4) return 2;  // 因为一开始跳了两步，所以需要特判一下 4
  ll c = rand() % (N - 1) + 1;
  ll t = f(0, c, N);
  ll r = f(f(0, c, N), c, N);
  while (t != r) {
    ll d = gcd(abs(t - r), N);
    if (d > 1) return d;
    t = f(t, c, N);
    r = f(f(r, c, N), c, N);
  }
  return N;
}
```

Python

```python
import random


def Pollard_Rho(N):
    if N == 4:
        return 2  # 因为一开始跳了两步，所以需要特判一下 4
    c = random.randint(1, N - 1)
    t = f(0, c, N)
    r = f(f(0, c, N), c, N)
    while t != r:
        d = gcd(abs(t - r), N)
        if d > 1:
            return d
        t = f(t, c, N)
        r = f(f(r, c, N), c, N)
    return N
```

Brent 判环

实际上，Floyd 判环算法可以有常数上的改进。Brent 判环从 $k=1$ 开始递增 k，在第 k 轮，让 A 等在原地，B 向前移动 2^k 步，如果在过程中 B 遇到了 A，则说明已经得到环，否则让 A 瞬移到 B 的位置，然后继续下一轮。

可以证明[3]，这样得到环之前需要调用 f 的次数永远不大于 Floyd 判环算法。原论文中的测试表明，Brent 判环需要的平均时间相较于 Floyd 判环减少了 24%。

倍增优化

无论是 Floyd 判环还是 Brent 判环，迭代次数都是 $O(\sqrt{p})$ 的。但是每次迭代都用 $\gcd$ 判断是否成环会拖慢算法运行速度。可以通过乘法累积来减少求 $\gcd$ 的次数。

简单来说，如果 $\gcd(a, N) > 1$，那么 $\gcd(ab \bmod N, N) = \gcd(ab, N) > 1$ 对于任意 $b \in \mathbb{N}_+$ 都成立。也就是说，如果计算得到 $\gcd(\prod |x_i - x_j| \bmod N, N) > 1$，那么必然有其中一对 (x_i, x_j) 满足 $\gcd(|x_i - x_j|, N) > 1$。如果该乘积在某一时刻得到零，则分解失败，退出并返回 N 本身。

如果每 k 对计算一次 $\gcd$，则算法复杂度降低到 $O(\sqrt{p} + k^{-1}\sqrt{p}\log N)$，这里，$\log N$ 为单次计算 $\gcd$ 的开销。注意到 k 和 $\log N$ 大致同阶时，可以得到 $O(\sqrt{p})$ 的期望复杂度。具体实现中，大多选取 $k = 128$。

这里提供 Brent 判环且加上倍增优化的 Pollard-Rho 算法实现。

实现

C++

```cpp
ll Pollard_Rho(ll x) {
  ll t = 0;
  ll c = rand() % (x - 1) + 1;
  ll s = t;
  int step = 0, goal = 1;
  ll val = 1;
  for (goal = 1;; goal <<= 1, s = t, val = 1) {
    for (step = 1; step <= goal; ++step) {
      t = f(t, c, x);
      val = val * abs(t - s) % x;
      // 如果 val 为 0，退出重新分解
      if (!val) return x;
      if (step % 127 == 0) {
        ll d = gcd(val, x);
        if (d > 1) return d;
      }
    }
    ll d = gcd(val, x);
    if (d > 1) return d;
  }
}
```

Python

```python
from random import randint
from math import gcd


def Pollard_Rho(x):
    c = randint(1, x - 1)
    s = t = f(0, c, x)
    goal = val = 1
    while True:
        for step in range(1, goal + 1):
            t = f(t, c, x)
            val = val * abs(t - s) % x
            if val == 0:
                return x  # 如果 val 为 0，退出重新分解
            if step % 127 == 0:
                d = gcd(val, x)
                if d > 1:
                    return d
        d = gcd(val, x)
        if d > 1:
            return d
        s = t
```

```
        goal <<= 1
        val = 1
```

复杂度

Pollard-Rho 算法中的期望迭代次数为 $O(\sqrt{p})$，这里 p 是 N 的最小素因子。具体实现无论是[redacted]用 Floyd 判环还是 Brent 判环，如果不使用倍增优化，期望复杂度都是 $O(\sqrt{p}\log N)$；在加上倍增优化后，可以近似得到 $O(\sqrt{p})$ 的期望复杂度。

值得一提的是，前文分析基于的是完全随机的自映射函数，但 Pollard-Rho 算法实际使用的是伪随机函数，所以该算法并没有严格的复杂度分析，实践中通常跑得较快。

例题：求一个数的最大素因子

例题：P4718【模板】Pollard-Rho 算法

对于一个数 n，用 Miller Rabin 算法 判断是否为素数，如果是就可以直接返回了，否则用 Pollard-Rho 算法找一个因子 p，将 n 除去因子 p。再递归分解 n 和 p，用 Miller Rabin 判断是否出现质因子，并用 max_factor 更新就可以求出最大质因子了。由于这个题目的数据过于庞大，用 Floyd 判环的方法是不够的，这里采用倍增优化的方法。

实现

```cpp
#include <algorithm>
#include <cstdlib>
#include <ctime>
#include <iostream>

using namespace std;
using ll = long long;
using ull = unsigned long long;

int t;
ll max_factor, n;

ll gcd(ll a, ll b) {
  if (b == 0) return a;
  return gcd(b, a % b);
}

ll bmul(ll a, ll b, ll m) {  // 快速乘
  ull c = (ull)a * (ull)b - (ull)((long double)a / m * b + 0.5L)
* (ull)m;
  if (c < (ull)m) return c;
  return c + m;
}

ll qpow(ll x, ll p, ll mod) {  // 快速幂
  ll ans = 1;
  while (p) {
    if (p & 1) ans = bmul(ans, x, mod);
    x = bmul(x, x, mod);
    p >>= 1;
  }
  return ans;
}

bool Miller_Rabin(ll p) {  // 判断素数
  if (p < 2) return false;
  if (p == 2) return true;
  if (p == 3) return true;
  ll d = p - 1, r = 0;
  while (!(d & 1)) ++r, d >>= 1;  // 将d处理为奇数
  for (ll k = 0; k < 10; ++k) {
    ll a = rand() % (p - 2) + 2;
    ll x = qpow(a, d, p);
    if (x == 1 || x == p - 1) continue;
    for (int i = 0; i < r - 1; ++i) {
      x = bmul(x, x, p);
      if (x == p - 1) break;
    }
    if (x != p - 1) return false;
```

```cpp
  }
  return true;
}

ll Pollard_Rho(ll x) {
  ll s = 0, t = 0;
  ll c = (ll)rand() % (x - 1) + 1;
  int step = 0, goal = 1;
  ll val = 1;
  for (goal = 1;; goal *= 2, s = t, val = 1) {  // 倍增优化
    for (step = 1; step <= goal; ++step) {
      t = (bmul(t, t, x) + c) % x;
      val = bmul(val, abs(t - s), x);
      if ((step % 127) == 0) {
        ll d = gcd(val, x);
        if (d > 1) return d;
      }
    }
    ll d = gcd(val, x);
    if (d > 1) return d;
  }
}

void fac(ll x) {
  if (x <= max_factor || x < 2) return;
  if (Miller_Rabin(x)) {              // 如果x为质数
    max_factor = max(max_factor, x);  // 更新答案
    return;
  }
  ll p = x;
  while (p >= x) p = Pollard_Rho(x);  // 使用该算法
  while ((x % p) == 0) x /= p;
  fac(x), fac(p);  // 继续向下分解x和p
}

int main() {
  cin >> t;
  while (t--) {
    srand((unsigned)time(NULL));
    max_factor = 0;
    cin >> n;
    fac(n);
    if (max_factor == n)  // 最大的质因数即自己
      cout << "Prime\n";
    else
      cout << max_factor << '\n';
  }
  return 0;
}
```

参考资料与链接

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem#Reverse_problem ↩
2. Menezes, Alfred J.; van Oorschot, Paul C.; Vanstone, Scott A. (2001). Handbook of Applied Cryptography. Section 3.11 and 3.12. ↩
3. Brent, R. P. (1980), An improved Monte Carlo factorization algorithm, BIT Numerical Mathematics, 20(2): 176–184, doi:10.1007/BF01933190 ↩