升幂引理

国

内容

升幂(Lift the Exponent,LTE)引理是初等数论中比较常用的一个定理。

定义 $\nu_p(n)$ 为整数 n 的标准分解中素因子 p 的幂次,即 $\nu_p(n)$ 满足 $p^{\nu_p(n)}\mid n$ 且 $p^{\nu_p(n)+1}\wr n$.

由于升幂引理内容较长,我们将其分为三部分介绍:

以下内容设 p 为素数, x, y 为满足 $p \times x$ 且 $p \times y$ 的整数, n 为正整数。

第一部分

对所有的素数 p 和满足 (n,p)=1 的整数 n,

1. 若 $p \mid x - y$,则:

$$u_p\left(x^n-y^n
ight)=
u_p(x-y)$$

2. 若 $p \mid x + y$,则对奇数 n 有:

$$u_p\left(x^n+y^n
ight)=
u_p(x+y)$$

📿 证明

若 $p \mid x-y$,则不难发现 $p \mid x-y \iff x \equiv y \pmod{p}$,则显然有:

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i} \equiv n x^{n-1} \not\equiv 0 \pmod p$$

进而由 $x^n-y^n=(x-y)\sum_{i=0}^{n-1}x^iy^{n-1-i}$ 可知命题得证。

对 $p \mid x + y$ 的情况证明方法类似。

第二部分

若p是奇素数,

1. 若 $p \mid x - y$, 则:

$$\nu_p\left(x^n-y^n\right)=\nu_p(x-y)+\nu_p(n)$$

2. 若 $p \mid x + y$,则对奇数 n 有:

$$\nu_p\left(x^n+y^n\right)=\nu_p(x+y)+\nu_p(n)$$

╱ 证明

若 $p \mid x-y$, 令 y=x+kp, 我们只需证明 $p \mid n$ 的情况。

$$egin{aligned} \sum_{i=0}^{p-1} x^{p-1-i} y^i &= \sum_{i=0}^{p-1} x^{p-1-i} \sum_{j=0}^i inom{i}{j} x^j (kp)^{i-j} \ &\equiv p x^{p-1} \pmod{p^2} \end{aligned}$$

从而

$$\nu_p\left(x^n-y^n\right)=\nu_p(x-y)+1$$

• 若 $n=p^a$,则由数学归纳法可得

$$\nu_p\left(x^n-y^n\right)=\nu_p(x-y)+a$$

因此命题得证。

对 $p \mid x + y$ 的情况证明方法类似。

第三部分

若 p=2 且 $p \mid x-y$,

1. 对奇数 n 有(与第一部分的 1 相同):

$$\nu_p\left(x^n-y^n\right)=\nu_p(x-y)$$

2. 对偶数 n 有:

$$u_p\left(x^n - y^n\right) =
u_p(x - y) +
u_p(x + y) +
u_p(n) - 1$$

另外对上述的 x, y, n,我们有:

若 4 | x - y, 则:

•
$$\nu_2(x+y)=1$$

•
$$u_2(x^n-y^n) = \nu_2(x-y) + \nu_2(n)$$

~

我们只需证明 n 为偶数的情况。由于此时 $p_{\ell}\binom{p}{2}$,故我们不能用第二部分的方法证明。

令 $n=2^ab$,其中 $a=
u_p(n)$,2 u u 从而

$$egin{aligned}
u_p\left(x^n-y^n
ight) &=
u_p\left(x^{2^a}-y^{2^a}
ight) \ &=
u_p\left((x-y)(x+y)\prod_{i=1}^{a-1}\left(x^{2^i}+y^{2^i}
ight)
ight) \end{aligned}$$

注意到 $2 \mid x-y \implies 4 \mid x^2-y^2$,从而 $(\forall i \geq 1), \ x^{2^i}+y^{2^i} \equiv 2 \pmod 4$,进而上式可变为:

$$u_p\left(x^n-y^n
ight)=
u_p(x-y)+
u_p(x+y)+
u_p(n)-1$$

因此命题得证。

参考资料

1. Lifting-the-exponent lemma - Wikipedia

▲ 本页面最近更新: 2024/12/16 13:10:29,更新历史

▶ 发现错误?想一起完善? 在 GitHub 上编辑此页!

▲ 本页面贡献者: c-forrest, Enter-tainer, Great-designer, iamtwz, Tiphereth-A, Xeonacid

ⓒ 本页面的全部内容在 CC BY-SA 4.0 和 SATA 协议之条款下提供,附加条款亦可能应用