# 哈密顿图

## 定义

通过图中所有顶点一次且仅一次的通路称为哈密顿通路。

通过图中所有顶点一次且仅一次的回路称为哈密顿回路。

具有哈密顿回路的图称为哈密顿图。

具有哈密顿通路而不具有哈密顿回路的图称为半哈密顿图。

## 性质

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密顿图，则对于 $V$ 的任意非空真子集 $V_1$，均有 $p(G - V_1) \leq |V_1|$。其中 $p(x)$ 为 $x$ 的连通分支数。

推论：设 $G = \langle V, E \rangle$ 是半哈密顿图，则对于 $V$ 的任意非空真子集 $V_1$，均有 $p(G - V_1) \leq |V_1| + 1$。其中 $p(x)$ 为 $x$ 的连通分支数。

完全图 $K_{2k+1}(k \geq 1)$ 中含 $k$ 条边不重的哈密顿回路，且这 $k$ 条边不重的哈密顿回路含 $K_{2k+1}$ 中的所有边。

完全图 $K_{2k}(k \geq 2)$ 中含 $k-1$ 条边不重的哈密顿回路，从 $K_{2k}$ 中删除这 $k-1$ 条边不重的哈密顿回路后所得图含 $k$ 条互不相邻的边。

## 充分条件

设 $G$ 是 $n(n \geq 2)$ 的无向简单图，若对于 $G$ 中任意不相邻的顶点 $v_i, v_j$，均有 $d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1$，则 $G$ 中存在哈密顿通路。

推论 1：设 $G$ 是 $n(n \geq 3)$ 的无向简单图，若对于 $G$ 中任意不相邻的顶点 $v_i, v_j$，均有 $d(v_i) + d(v_j) \geq n$，则 $G$ 中存在哈密顿回路，从而 $G$ 为哈密顿图。

推论 2：设 $G$ 是 $n(n \geq 3)$ 的无向简单图，若对于 $G$ 中任意顶点 $v_i$，均有 $d(v_i) \geq \frac{n}{2}$，则 $G$ 中存在哈密顿回路，从而 $G$ 为哈密顿图。

设 $D$ 为 $n(n \geq 2)$ 阶竞赛图，则 $D$ 具有哈密顿通路。

若 $D$ 含 $n(n \geq 2)$ 阶竞赛图作为子图，则 $D$ 具有哈密顿通路。

强连通的竞赛图为哈密顿图。

若 $D$ 含 $n(n \geq 2)$ 阶强连通的竞赛图作为子图，则 $D$ 具有哈密顿回路。

---