二分

本页面将简要介绍二分查找，由二分法衍生的三分法以及二分答案。

二分法

定义

二分查找（英语：binary search），也称折半搜索（英语：half-interval search）、对数搜索（英语：logarithmic search），是用来在一个有序数组中查找某一元素的算法。

过程

以在一个升序数组中查找一个数为例。

它每次考察数组当前部分的中间元素，如果中间元素刚好是要找的，就结束搜索过程；如果中间元素小于所查找的值，那么左侧的只会更小，不会有所查找的元素，只需到右侧查找；如果中间元素大于所查找的值同理，只需到左侧查找。

性质

时间复杂度

二分查找的最优时间复杂度为 $O(1)$。

二分查找的平均时间复杂度和最坏时间复杂度均为 $O(\log n)$。因为在二分搜索过程中，算法每次都把查询的区间减半，所以对于一个长度为 n 的数组，至多会进行 $O(\log n)$ 次查找。

空间复杂度

迭代版本的二分查找的空间复杂度为 $O(1)$。

递归（无尾调用消除）版本的二分查找的空间复杂度为 $O(\log n)$。

实现

```
int binary_search(int start, int end, int key) {
  int ret = -1;  // 未搜索到数据返回-1下标
  int mid;
  while (start <= end) {
    mid = start + ((end - start) >> 1);  // 直接平均可能会溢出，所以用这个算法
    if (arr[mid] < key)
      start = mid + 1;
```

```
    else if (arr[mid] > key)
      end = mid - 1;
    else {  // 最后检测相等是因为多数搜索情况不是大于就是小于
      ret = mid;
      break;
    }
  }
  return ret;  // 单一出口
}
```

Note

参考 编译优化 #位运算代替乘法，对于 n 是有符号数的情况，当你可以保证 $n \geq 0$ 时，`n >> 1` 比 `n / 2` 指令数更少。

最大值最小化

注意，这里的有序是广义的有序，如果一个数组中的左侧或者右侧都满足某一种条件，而另一侧都不满足这种条件，也可以看作是一种有序（如果把满足条件看做 1，不满足看做 0，至少对于这个条件的这一维度是有序的）。换言之，二分搜索法可以用来查找满足某种条件的最大（最小）的值。

要求满足某种条件的最大值的最小可能情况（最大值最小化），首先的想法是从小到大枚举这个作为答案的「最大值」，然后去判断是否合法。若答案单调，就可以使用二分搜索法来更快地找到答案。因此，要想使用二分搜索法来解这种「最大值最小化」的题目，需要满足以下三个条件：

1. 答案在一个固定区间内；
2. 可能查找一个符合条件的值不是很容易，但是要求能比较容易地判断某个值是否是符合条件的；
3. 可行解对于区间满足一定的单调性。换言之，如果 x 是符合条件的，那么有 $x+1$ 或者 $x-1$ 也符合条件。（这样下来就满足了上面提到的单调性）

当然，最小值最大化是同理的。

STL 的二分查找

C++ 标准库中实现了查找首个不小于给定值的元素的函数 `std::lower_bound` 和查找首个大于给定值的元素的函数 `std::upper_bound`，二者均定义于头文件 `<algorithm>` 中。

二者均采用二分实现，所以调用前必须保证元素有序。

bsearch

bsearch 函数为 C 标准库实现的二分查找，定义在 `<stdlib.h>` 中。在 C++ 标准库里，该函数定义在 `<cstdlib>` 中。qsort 和 bsearch 是 C 语言中唯二的两个算法类函数。

bsearch 函数相比 qsort（排序相关 STL）的四个参数，在最左边增加了参数「待查元素的地址」。之所以按照地址的形式传入，是为了方便直接套用与 qsort 相同的比较函数，从而实现排序后的立即查找。因此这个参数不能直接传入具体值，而是要先将待查值用一个变量存储，再传入该变量地址。

于是 bsearch 函数总共有五个参数：待查元素的地址、数组名、元素个数、元素大小、比较规则。比较规则仍然通过指定比较函数实现，详见 排序相关 STL。

bsearch 函数的返回值是查找到的元素的地址，该地址为 void 类型。

注意：bsearch 与上文的 lower_bound 和 upper_bound 有两点不同：

- 当符合条件的元素有重复多个的时候，会返回执行二分查找时第一个符合条件的元素，从而这个元素可能位于重复多个元素的中间部分。
- 当查找不到相应的元素时，会返回 NULL。

用 lower_bound 可以实现与 bsearch 完全相同的功能，所以可以使用 bsearch 通过的题目，直接改写成 lower_bound 同样可以实现。但是鉴于上述不同之处的第二点，例如，在序列 1、2、4、5、6 中查找 3，bsearch 实现 lower_bound 的功能会变得困难。

利用 bsearch 实现 lower_bound 的功能比较困难，是否一定就不能实现？答案是否定的，存在比较 tricky 的技巧。借助编译器处理比较函数的特性：总是将第一个参数指向待查元素，将第二个参数指向待查数组中的元素，也可以用 bsearch 实现 lower_bound 和 upper_bound，如下文示例。只是，这要求待查数组必须是全局数组，从而可以直接传入首地址。

```
int A[100005];  // 示例全局数组

// 查找首个不小于待查元素的元素的地址
int lower(const void *p1, const void *p2) {
  int *a = (int *)p1;
  int *b = (int *)p2;
  if ((b == A || compare(a, b - 1) > 0) && compare(a, b) > 0)
    return 1;
  else if (b != A && compare(a, b - 1) <= 0)
    return -1;  // 用到地址的减法，因此必须指定元素类型
  else
    return 0;
}

// 查找首个大于待查元素的元素的地址
int upper(const void *p1, const void *p2) {
  int *a = (int *)p1;
  int *b = (int *)p2;
  if ((b == A || compare(a, b - 1) >= 0) && compare(a, b) >= 0)
    return 1;
  else if (b != A && compare(a, b - 1) < 0)
    return -1;  // 用到地址的减法，因此必须指定元素类型
  else
```

```
        return 0;
}
```

因为现在的 OI 选手很少写纯 C，并且此方法作用有限，所以不是重点。对于新手而言，建议老老实实地使用 C++ 中的 lower_bound 和 upper_bound 函数。

二分答案

解题的时候往往会考虑枚举答案然后检验枚举的值是否正确。若满足单调性，则满足使用二分法的条件。把这里的枚举换成二分，就变成了「二分答案」。

Luogu P1873 砍树

伐木工人米尔科需要砍倒 M 米长的木材。这是一个对米尔科来说很容易的工作，因为他有一个漂亮的新伐木机，可以像野火一样砍倒森林。不过，米尔科只被允许砍倒单行树木。

米尔科的伐木机工作过程如下：米尔科设置一个高度参数 H（米），伐木机升起一个巨大的锯片到高度 H，并锯掉所有的树比 H 高的部分（当然，树木不高于 H 米的部分保持不变）。米尔科就得到树木被锯下的部分。

例如，如果一行树的高度分别为 $20, 15, 10, 17$，米尔科把锯片升到 15 米的高度，切割后树木剩下的高度将是 $15, 15, 10, 15$，而米尔科将从第 1 棵树得到 5 米木材，从第 4 棵树得到 2 米木材，共 7 米木材。

米尔科非常关注生态保护，所以他不会砍掉过多的木材。这正是他尽可能高地设定伐木机锯片的原因。你的任务是帮助米尔科找到伐木机锯片的最大的整数高度 H，使得他能得到木材至少为 M 米。即，如果再升高 1 米锯片，则他将得不到 M 米木材。

解题思路

我们可以在 1 到 10^9 中枚举答案，但是这种朴素写法肯定拿不到满分，因为从 1 枚举到 10^9 太耗时间。我们可以在 $[1,\ 10^9]$ 的区间上进行二分作为答案，然后检查各个答案的可行性（一般使用贪心法）。**这就是二分答案。**

参考代码

```cpp
int a[1000005];
int n, m;

bool check(int k) {  // 检查可行性, k 为锯片高度
  long long sum = 0;
  for (int i = 1; i <= n; i++)        // 检查每一棵树
    if (a[i] > k)                     // 如果树高于锯片高度
      sum += (long long)(a[i] - k);  // 累加树木长度
  return sum >= m;                    // 如果满足最少长度代表可行
}

int find() {
  int l = 1, r = 1e9 + 1;   // 因为是左闭右开的, 所以 10^9 要加 1
  while (l + 1 < r) {        // 如果两点不相邻
    int mid = (l + r) / 2;  // 取中间值
    if (check(mid))          // 如果可行
      l = mid;               // 升高锯片高度
    else
      r = mid;  // 否则降低锯片高度
  }
  return l;  // 返回左边值
}

int main() {
  cin >> n >> m;
  for (int i = 1; i <= n; i++) cin >> a[i];
  cout << find();
  return 0;
}
```

看完了上面的代码，你肯定会有两个疑问：

1. 为何搜索区间是左闭右开的?

   因为搜到最后，会这样（以合法的最大值为例）：

合法			不合法			
最小值	L	MID	R	......	......	最大值

或者

合法				不合法		
最小值	......	......	L	MID	R	最大值

   然后会

合法			不合法			
最小值	……	L,MID	R	……	……	最大值

或者

合法				不合法		
最小值	……	……	L	MID,R	……	最大值

合法的最小值恰恰相反。

2. 为何返回左边值？

同上。

三分法

引入

二分法可以用于近似求出函数的零点。如果需要求出单峰函数的极值点，通常需要使用三分法（ternary search）。

对于一个函数 $f(x)$，如果存在 x^* 使得 $f(x)$ 在 $x < x^*$ 时单调递增且 $f(x)$ 在 $x > x^*$ 时单调递减，就称 $f(x)$ 为单峰函数（unimodal function）。显然，x^* 就是它的最大值点，而 $f(x^*)$ 则是它的最大值。

为什么不通过求导函数的零点来求极值点？

客观上，求出导数后，通过二分法求出导数的零点（由于函数是单峰函数，其导数在同一范围内的零点是唯一的）得到单峰函数的极值点是可行的。

但首先，对于一些函数，求导的过程和结果比较复杂。

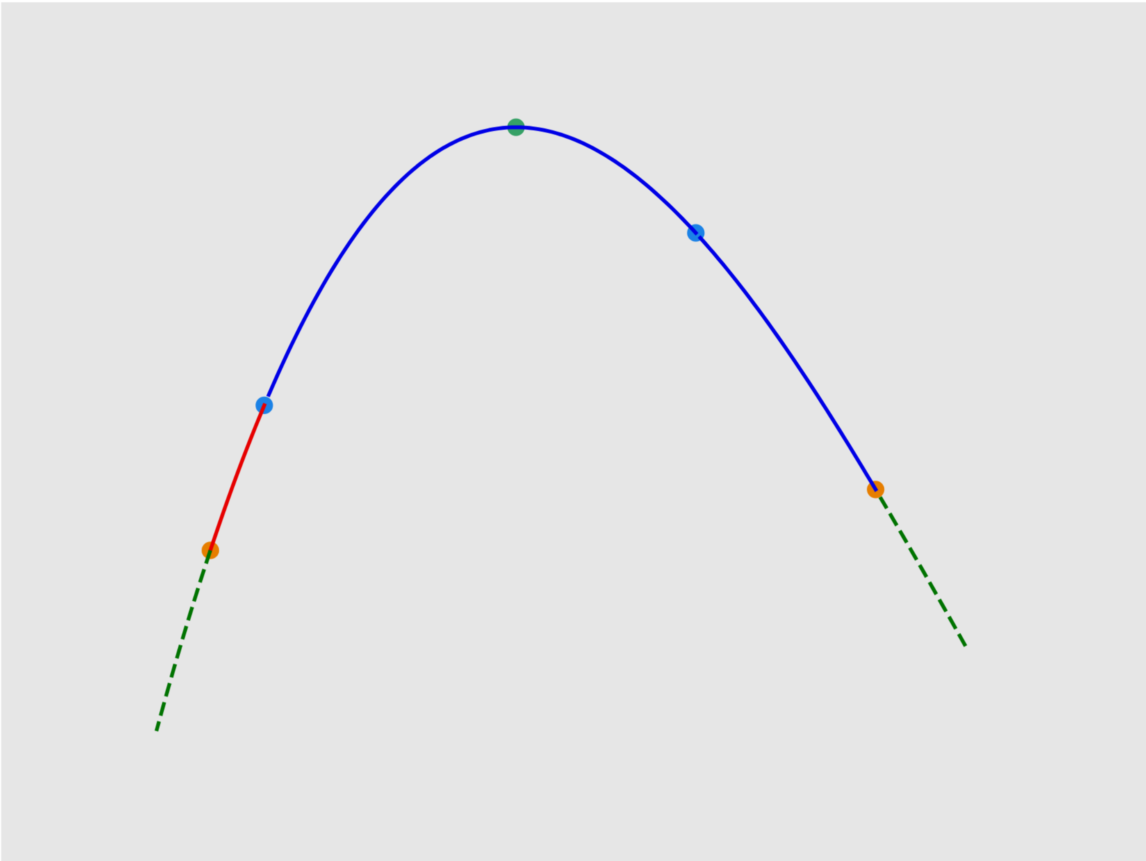
其次，某些题中需要求极值点的单峰函数并非一个单独的函数，而是多个函数进行特殊运算得到的函数（如求多个单调性不完全相同的一次函数的最小值的最大值）。此时函数的导函数可能是分段函数，且在函数某些点上可能不可导。

注意

三分法既可以求出单峰函数的最大值，也可以求出「单谷函数」的最小值。为行文方便，除特殊说明外，下文中均以求单峰函数的最大值为例。

过程

三分法与二分法的基本思想类似，但每次操作需在当前区间 $[l, r]$（下图中两个橙点之间）内任取两点 $lmid < rmid$（下图中的两个蓝点）。如下图所示，如果 $f(lmid) < f(rmid)$，则在 $[l, lmid)$（下图中的红色部分）中函数必然单调递增，最大值点（下图中的绿点）必然不在这一区间内可舍去这一区间；但是，无法排除最大值点在 $rmid$ 右侧的可能性，所以无法舍去更多区间。之亦然。



三分法的正确性并不依赖于 $lmid$ 和 $rmid$ 的选择，通常可以取两个三等分点。但是，它们的选择确实会影响三分法的效率。这是因为三分法的每次操作都会舍去两侧区间中的其中一个。为减少三分法的操作次数，应使两侧区间尽可能大。因此，每一次操作时的 $lmid$ 和 $rmid$ 分别取 $mid - \varepsilon$ 和 $mid + \varepsilon$ 是一个不错的选择。

实现

伪代码如下：

Algorithm TernarySearch(f, l, r) :
Input. A unimodal function $f(x)$ and its domain $[l, r]$.
Output. The maximizer x^*, up to an error of ε, and its value $f(x^*)$.
Method.

while $r - l > \varepsilon$
    $mid \leftarrow (l + r)/2$
    $lmid \leftarrow mid - \varepsilon$
    $rmid \leftarrow mid + \varepsilon$
    if $f(lmid) < f(rmid)$
        $l \leftarrow lmid$
    else
        $r \leftarrow rmid$
$x^* \leftarrow (l + r)/2$
return $x^*,\ f(x^*)$

整数的情形

如果函数 $f(x)$ 的定义域是整数，那么上述三分法和后文的黄金分割法都应该在 $r - l$ 很小时就终止。对于 $r - l$ 很小的情形，需要通过暴力遍历的方法求得最大值点。

优化：黄金分割法

如果单次调用 $f(x)$ 的成本很高，需要进一步减少 $f(x)$ 的调用次数，可以通过黄金分割法（golden-section search）进一步改进三分法的常数。这也是华罗庚提出的优选法的重要内容。

三分法中，每轮迭代需要两次函数调用，且单轮迭代后区间长度至多缩短到原来的 $1/2$。这意味着，要达到精度 ε，至少需要

$$2 \log_2 \frac{r - l}{\varepsilon}$$

次函数调用。这是三分法能够取得的最好的结果。如果选取其他分点，例如三等分点，那么调用次数会进一步增加，因为单轮迭代后区间缩短得更慢。

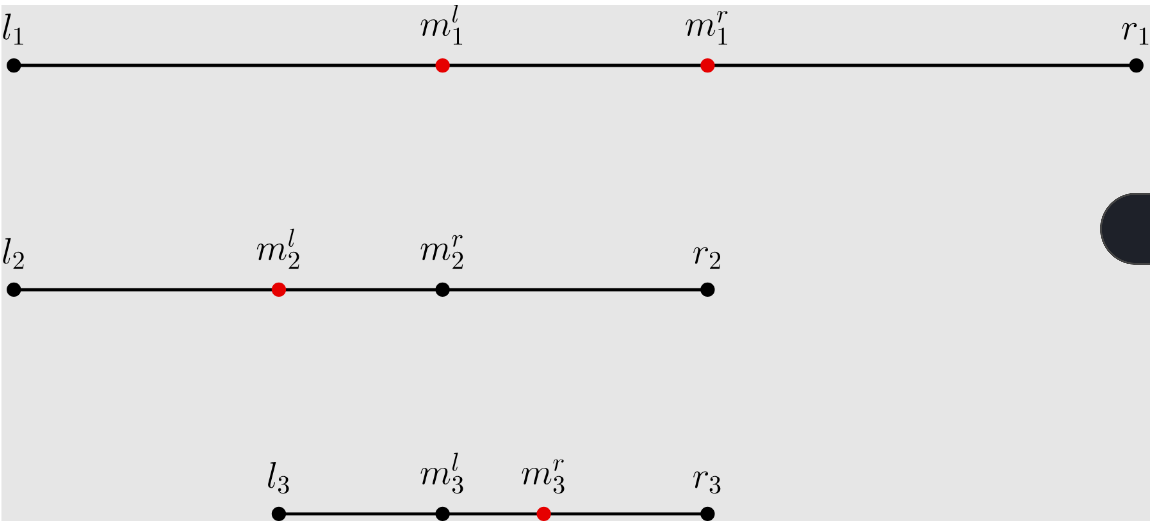
黄金分割法的改进思路是，复用前文已经计算过的分点。这样，除了第一轮迭代需要两次函数调用外，其余轮次的迭代只需要一次函数调用。设黄金分割比为

$$\phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618.$$

每轮迭代时，选取的分点是左右两个黄金分割点：

$$m^l = \phi l + (1 - \phi) r,\ m^r = (1 - \phi) l + \phi r.$$

黄金分割点分割线段具有自相似结构。也就是说，m^l 是线段 $[l, r]$ 的左黄金分割点，也是线段 $[l, m^r]$ 的右黄金分割点。这样选取分点的好处是，第 $k > 1$ 轮迭代选取的分点中，一定有一个分点是之前已经计算过的，可以直接复用之前的计算结果。



这样选取分点后，要达到精度 ε，只需要

$$1+\log_{\phi^{-1}}\frac{r-l}{\varepsilon}\approx 1+1.44\log_2\frac{r-l}{\varepsilon}$$

次函数调用。渐进意义上，函数的调用次数更少。

伪代码如下：

Algorithm $\mathrm{GoldenSectionSearch}(f,l,r)$:
Input. A unimodal function $f(x)$ and its domain $[l,r]$.
Output. The maximizer x^*, up to an error of ε, and its value $f(x^*)$.
Method.

$\quad lmid \leftarrow \phi l+(1-\phi)r$
$\quad rmid \leftarrow (1-\phi)l+\phi r$
$\quad lval \leftarrow f(lmid)$
$\quad rval \leftarrow f(rmid)$
$\quad$ **while** $r-l>\varepsilon$
$\qquad$ **if** $lval>rval$
$\qquad\quad r\leftarrow rmid$
$\qquad\quad rmid\leftarrow lmid$
$\qquad\quad rval\leftarrow lval$
$\qquad\quad lmid\leftarrow \phi l+(1-\phi)r$
$\qquad\quad lval\leftarrow f(lmid)$
$\qquad$ **else**
$\qquad\quad l\leftarrow lmid$
$\qquad\quad lmid\leftarrow rmid$
$\qquad\quad lval\leftarrow rval$
$\qquad\quad rmid\leftarrow (1-\phi)l+\phi r$
$\qquad\quad rval\leftarrow f(rmid)$
$\quad x^*\leftarrow (l+r)/2$
$\quad$ **return** $x^*,\ f(x^*)$

例题

洛谷 P3382 -【模板】三分法

给定一个 N 次函数和范围 $[l,r]$，求出使函数在 $[l,x]$ 上单调递增且在 $[x,r]$ 上单调递减的唯一的 x 的值。

解题思路

本题要求求 N 次函数在 $[l,r]$ 取最大值时自变量的值，显然可以使用三分法。

参考代码

C++

```cpp
#include <cmath>
#include <iomanip>
#include <iostream>
using namespace std;

constexpr double eps = 1e-7;
int N;
double l, r, A[20], mid, lmid, rmid;

double f(double x) {
  double res = (double)0;
  for (int i = N; i >= 0; i--) res += A[i] * pow(x, i);
  return res;
}

int main() {
  cin.tie(nullptr)->sync_with_stdio(false);
  cin >> N >> l >> r;
  for (int i = N; i >= 0; i--) cin >> A[i];
  while (r - l > eps) {
    mid = (l + r) / 2;
    lmid = mid - eps;
    rmid = mid + eps;
    if (f(lmid) > f(rmid))
      r = mid;
    else
      l = mid;
  }
  cout << fixed << setprecision(6) << l;
  return 0;
}
```

Python

```python
eps = 1e-6
n, l, r = map(float, input().split())
a = tuple(map(float, input().split()))[::-1]


def f(x):
    return sum(x**i * j for i, j in enumerate(a))


while r - l > eps:
    mid = (l + r) / 2
    if f(mid - eps) > f(mid + eps):
        r = mid
```

```
    else:
        l = mid
print(l)
```

习题

- UVa 1476 - Error Curves
- UVa 10385 - Duathlon
- UOJ 162 -【清华集训 2015】灯泡测试
- 洛谷 P7579 -「RdOI R2」称重（weigh）

分数规划

参见：分数规划

分数规划通常描述为下列问题：每个物品有两个属性 c_i，d_i，要求通过某种方式选出若干个，使得 $\frac{\sum c_i}{\sum d_i}$ 最大或最小。

经典的例子有最优比率环、最优比率生成树等等。

分数规划可以用二分法来解决。

参考资料

- Ternary search - Wikipedia
- Golden-section search - Wikipedia
- Ternary search - CP Algortihms

本页面最近更新：2025/8/24 15:26:32，更新历史

发现错误？想一起完善？ 在 GitHub 上编辑此页！

本页面贡献者：Ir1d, H-J-Granger, StudyingFather, NachtgeistW, sshwy, yusancky, countercurrent-time, Enter-tainer, AngelKitty, CBW2007, CCXXXI, cjsoft, diauweb, Early0v0, ezoixx130, GekkaSaori, Henry-ZHR, Konano, ksyx, LovelyBuggies, Makkiy, mgt, minghu6, P-Y-Y, PotassiumWings, SamZhangQingChuan, Suyun514, weiyong1024, Xeonacid, billchenchina, c-forrest, ChungZH, FinParker, flylai, gavinliu266, GavinZhengOI, Gesrua, Great-designer, HanwGeek, HeRaNO, i-yyi, iamtwz, inclyc, kxccc, LeiJinpeng, leoleoasd, lychees, Marcythm, Peanut-Tang, Selflocking, shawlleyw, shuzhouliu, SukkaW, Tiphereth-A, TNO-C137