费马小定理 & 欧拉定理

本文讨论费马小定理、欧拉定理及其扩展。这些定理解决了任意模数下任意大指数的幂的计算问题。

费马小定理

费马小定理（Fermat's little theorem）是数论中最基础的定理之一。它也是 Fermat 素性测试的理论基础。

费马小定理

设 p 是素数。对于任意整数 a 且 $p \nmid a$，都成立 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

定理

设 p 是素数。对于任意整数 a，都成立 $a^p \equiv a \pmod{p}$.

这两个同余关系在 $p \nmid a$ 时是等价的；而在 $p \mid a$ 时，$a^p \equiv 0 \equiv a \pmod{p}$ 平凡地成立。因此，这两个命题是等价的。这两个命题常常都称作费马小定理。

证明一

设 p 是素数，且 $p \nmid a$。首先证明：对于 $i = 1, 2, \cdots, p-1$，余数 $ia \bmod p$ 各不相同。反证法。如果有 $1 \le i < j < p$ 使得

$$ia \bmod p = ja \bmod p. \iff (j-i)a \equiv 0. \pmod p$$

但是，$(j-i)$ 和 a 都不是 p 的倍数，这显然矛盾。

换句话说，这些余数是 $\{1, 2, \cdots, p-1\}$ 的一个排列。因此，有

$$\prod_{i=1}^{p-1} i = \prod_{i=1}^{p-1} (ia \bmod p) \equiv \prod_{i=1}^{p-1} ia = a^{p-1} \prod_{i=1}^{p-1} i. \pmod p$$

这说明

$$(a^{p-1} - 1) \prod_{i=1}^{p-1} i \equiv 0. \pmod p$$

也就是说，等式左侧是 p 的倍数，但是 $i = 1, 2, \cdots, p-1$ 都不是 p 的倍数，所以，只能有 $p \mid (a^{p-1} - 1)$，亦即费马小定理成立。

证明二

注意到费马小定理的第二种表述对于所有 $a \in \mathbf{N}$ 都成立，因此，可以考虑使用数学归纳法。负整数的情形容易转化为非负整数的情形。

归纳起点为 $0^p \equiv 0 \pmod p$，显然成立。假设它对于 $a \in \mathbf{N}$ 成立，需要证明的是，它对于 $a+1$ 也成立。由二项式定理可知

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1} a + 1.$$

除了首尾两项，组合数的表达式 $\binom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ 中，p 都能整除分子，而不能整除分母，因此，这些系数对于 $k \ne 0, p$ 都是 p 的倍数。因此，有

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1 \equiv a + 1. \pmod p$$

其中，第二步应用了归纳假设。因此，利用数学归纳法可知，费马小定理成立。

费马小定理的逆命题并不成立。即使对于所有与 n 互素的 a，都有 $a^{n-1} \equiv 1 \pmod n$，那么，n 也未必是素数。相关讨论详见 Fermat 素性测试 一节。

欧拉定理

欧拉定理（Euler's theorem）将费马小定理推广到了一般模数的情形，但仍然要求底数与指数互素。

欧拉定理

对于整数 $m>0$ 和整数 a，且 $\gcd(a,m)=1$，有 $a^{\varphi(m)}\equiv 1\pmod m$，其中，$\varphi(\cdot)$ 为 欧拉函数。

证明

与费马小定理的证明一类似，仍然是取一个与 m 互质的数列，再进行操作。考虑集合

$$R=\{r\in\mathbf{N}:0<r<m,\ \gcd(r,m)=1\}.$$

这是模 m 的 既约剩余系。根据欧拉函数的定义可知，$|R|=\varphi(m)$。类似上文，将它们乘以 a 相当于对该集合重新排列：

$$R=\{ar \bmod m:r\in R\}.$$

这是因为，容易验证 $\gcd(ar,m)=1$ 且不同的 $r_1,r_2\in R$ 对应的 $ar_1 \bmod m$ 和 $ar_2 \bmod m$ 也一定不同。因此，有

$$\prod_{r\in R}r\equiv\prod_{r\in R}ar=a^{\varphi(m)}\prod_{r\in R}r.\pmod m$$

再次重复之前的论证，消去 $\prod_{r\in R}r$，就得到 $a^{\varphi(m)}\equiv 1\pmod m$。

对于素数 p，有 $\varphi(p)=p-1$，因此，费马小定理是欧拉定理的一个特例。另外，欧拉定理中的指数 $\varphi(m)$ 在一般情形下并非使得该式成立的最小指数。它可以改进到 $\lambda(m)$，其中，$\lambda(\cdot)$ 是 Carmichael 函数。关于相关结论的代数背景，可以参考 整数同余类的乘法群 一节。

扩展欧拉定理

扩展欧拉定理[1]进一步将结论推广到了底数与指数不互素的情形。由此，它彻底解决了任意模数下任意底数的幂次计算问题，将它们转化为指数小于 $2\varphi(m)$ 的情形，从而可以通过 快速幂 在 $O(\log\varphi(m))$ 时间内计算。

扩展欧拉定理

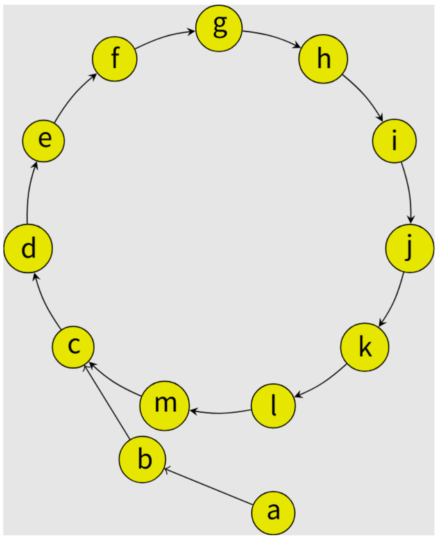
对于任意正整数 m、整数 a 和非负整数 k，有

$$a^k\equiv\begin{cases}a^{k \bmod \varphi(m)}, & \gcd(a,m)=1,\\ a^k, & \gcd(a,m)\neq 1,k<\varphi(m),\\ a^{(k \bmod \varphi(m))+\varphi(m)}, & \gcd(a,m)\neq 1,k\geq\varphi(m).\end{cases}\pmod m$$

第二种情形是在说，如果 $k<\varphi(m)$，那么，就无需继续降幂，直接应用快速幂即可；而第三种和第一种情形的最大区别是，通过取余降幂之后，是否需要加上一项 $\varphi(m)$。当然，将第一种情形合并进入第二、三种情形也是正确的。

直观理解

在严格证明定理之前，可以首先直观理解定理的含义。



考虑余数 $a^k \bmod m$ 随着 b 增大而变化的情况。由于余数的取值一定在区间 $[0,m)$ 内，而 k 有无限多个。将 $a^k \bmod m \mapsto a^{k+1} \bmod m$ 看作这些余数结点之间的有向边。那么，一定可以构成如图所示的循环。

扩展欧拉定理说明，这些循环可能是纯循环（第一种情形）或者混循环（第二、三种情形）。纯循环中，没有结点存在两个前驱，而混循环中就会出现这样的情形。因此，对于一般的情况，只需要能够求出循环节的长度和进入循环节之前的长度，就可以利用这个性质进行降幂。

严格证明

本节给出扩展欧拉定理的严格证明。

证明

首先说明，存在 $k_0 \in \mathbf{N}$，使得整数 a 和 $m' := \dfrac{m}{\gcd(a^{k_0}, m)}$ 互素。为此，设 $\nu_p(n)$ 是整数 n 的质因数分解中素数 p 的幂次，那么，不妨取

$$k_0 = \max\left\{\left\lceil\frac{\nu_p(m)}{\nu_p(a)}\right\rceil : \nu_p(a) > 0\right\}.$$

因为 m 中所有和 a 的公共素因子的幂次都已经包含在 a^{k_0} 中，所以，a 就与 m 中剩下的因子 $m' = \dfrac{m}{\gcd(a^{k_0}, m)}$ 互素。

进而，对 $k \geq k_0$ 考察同余关系

$$b \equiv a^k. \pmod m$$

由于 $\gcd(a^{k_0}, m) = \gcd(a^k, m) \mid b$，所以，将等式两侧（包括模数）同时除以 $\gcd(a^{k_0}, m)$，就有

$$\frac{b}{\gcd(a^{k_0}, m)} = \frac{a^{k_0}}{\gcd(a^{k_0}, m)} \cdot a^{k-k_0}. \pmod{m'}$$

此时，因为 a 与模数 m' 互素，可以直接应用欧拉定理，得到

$$\frac{b}{\gcd(a^{k_0}, m)} \equiv \frac{a^{k_0}}{\gcd(a^{k_0}, m)} \cdot a^{(k-k_0) \bmod \varphi(m')}. \pmod{m'}$$

因此，再将因子 $\gcd(a^{k_0}, m)$ 乘回去，就得到

$$b \equiv a^{k_0} \cdot a^{(k-k_0) \bmod \varphi(m')} = a^{k_0 + (k-k_0) \bmod \varphi(m')}. \pmod m$$

这就得到了扩展欧拉定理的形式。式子说明，循环节的长度是 $\varphi(m')$，而进入循环节之前的长度为 k_0。

此处得到的参数比扩展欧拉定理中的更紧，但是相对来说，这些参数的计算并不容易。可以说明，这些参数可以放宽到扩展欧拉定理中的情形。首先，利用 欧拉函数的表达式 可知，因为 $m' \mid m$，所以 $\varphi(m') \mid \varphi(m)$。也就是说，$\varphi(m)$ 也是它的循环节。其次，k_0 也可以放宽到 $\varphi(m)$。这是因为对于所有 $m \in \mathbf{N}_+$ 和任意 $p \mid m$，都有

$$\begin{aligned}\varphi(m) &\geq \varphi(p^{\nu_p(m)}) = (p-1)p^{\nu_p(m)-1} \geq p^{\nu_p(m)-1} \\ &= (1 + (p-1))^{\nu_p(m)-1} \geq 1 + (p-1)(\nu_p(m) - 1) \\ &\geq 1 + (\nu_p(m) - 1) = \nu_p(m).\end{aligned}$$

其中，第二行的不等式利用了二项式展开，并只保留常数项和一次项。因此，有

$$k_0 \leq \max\{\nu_p(m) : p \in \mathbf{P}\} \leq \varphi(m).$$

这就完全证明了所述结论。

例题

本节通过一道例题展示扩展欧拉定理的一个经典应用——计算任意模数下的幂塔。**幂塔**（power tower）指形如 $A \uparrow (B \uparrow (C \uparrow (D \uparrow \cdots)))$ 的式子，其中，$\uparrow$ 是 Knuth 箭头记号，即 $A \uparrow B$ 表示幂

A^B，而 $A, B, C, D, \cdots$ 是一系列非负整数。

Library Checker - Tetration Mod

T 组测试。每组测试中，给定 A, B, M，求 $(A \uparrow\uparrow B) \bmod M$。其中，$A \uparrow\uparrow B$ 表示由 B 个 A 组成的幂塔。或者，形式化地，定义

$$A \uparrow\uparrow B = \begin{cases} 1, & B = 0, \\ A \uparrow (A \uparrow\uparrow (B-1)), & B > 0. \end{cases}$$

规定 $0^0 = 1$。

解答

利用 $A \uparrow\uparrow B$ 的定义，递归计算即可。要计算 $(A \uparrow\uparrow B) \bmod M$，只需要应用扩展欧拉定理，计算 $(A \uparrow\uparrow (B-1)) \bmod \varphi(M)$。由于 $\varphi(\varphi(n)) \leq n/2$ 对所有 $n \geq 2$ 都成立，所以，递归过程一定在 $O(\log M)$ 步内完成。由于需要应用扩展欧拉定理，所以需要区分当前的计算结果是否严格小于当前模数。为此，只需要在取余的时候多判断一步即可。另外，需要注意边界情况的处理。

参考代码

```cpp
#include <iostream>

// Calculate Euler's totient for n.
int phi(int n) {
  int res = n;
  for (int i = 2; i * i <= n; ++i) {
    if (n % i == 0) {
      res = res / i * (i - 1);
      while (n % i == 0) n /= i;
    }
  }
  if (n > 1) res = res / n * (n - 1);
  return res;
}

// Find remainder as in the exponent of extended Euler theorem.
int mod(long long v, int m) { return v >= m ? v % m + m : v; }

// Modular power.
int pow(int a, int b, int m) {
  long long res = 1, po = a;
  for (; b; b >>= 1) {
    if (b & 1) res = mod(res * po, m);
    po = mod(po * po, m);
  }
  return res;
}

// Modular tetration.
int tetra(int a, int b, int m) {
  if (a == 0) return !(b & 1);
  if (b == 0 || m == 1) return 1;
  if (b == 1) return mod(a, m);
  return pow(a, tetra(a, b - 1, phi(m)), m);
}

int main() {
  int t;
  std::cin >> t;
  for (; t; --t) {
    int a, b, m;
    std::cin >> a >> b >> m;
    std::cout << (tetra(a, b, m) % m) << std::endl;
  }
}
```

习题

- Luogu P5091【模板】扩展欧拉定理
- Codeforces 906 D. Power Tower
- Luogu P3747 [六省联考 2017] 相逢是问候
- Luogu P4139 上帝与集合的正确用法
- Luogu P3934 [Ynoi Easy Round 2016] 炸脖龙 I
- Luogu P6736「Wdsr-2」白泽教育

参考资料与注释

- Fermat's little theorem - Wikipedia
- Euler's theorem - Wikipedia
- Hardy, Godfrey Harold, and Edward Maitland Wright. An introduction to the theory of numbers. Oxford university press, 1979.

---

1. 这一名字主要出现在算法竞赛圈中，而并非该结论的通用名称。↩
