Finanzmathematik in diskreter Zeit

Version vom: 23. Juli 2020

Prof. Dr. Thorsten Schmidt[1]

[1]Universität Freiburg. www.stochastik.uni-freiburg.de/schmidt

Vorwort

Dieses Skriptum ist aus einer Vorlesung entstanden, die im SS2017 und im SS 2020 in Freiburg gehalten wurde. Es enthält sicher noch viele Fehler und wird kontinuierlich überarbeitet. Über Hinweise hierzu würde ich mich sehr freuen. Die Vorlesungen im SS 2020 werden mit

Motivation

Betrachten wir einen Index mit Wert $S_0 = 11.000$. Sie möchten auf steigende Kurse setzen und ziehen den Kauf eines Calls mit Ausübrungspreis (Strike) von $K = 11.500$ in Betracht. Als zugrundeliegendes Modell kommen für Sie zwei zukünftige Szenarien in Frage: der Kurs steigt auf 12.000 oder fällt auf 10.000. Hierzu ordnen Sie (subjektiv, oder aus statistischen Methoden) die Wahrscheinlichkeiten $^1/_3$ und $^2/_3$ zu. Das führt zu folgendem Modell:

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 12.000 & \omega = \omega_1, \\ 10.000 & \omega = \omega_2, \end{cases}$$

wobei S_1 der Wert des zufälligen Aktienkurses (Stock) zur Zeit 1 ist. Die Auszahlung des Calls and 1 ist $C_1 := (S_1 - K)^+ = \max\{S_1 - K, 0\}$, also

$$C_1(\omega) = \begin{cases} 500 & \omega = \omega_1, \\ 0 & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Was wären Sie bereit für dieses Derivat zu bezahlen?

Eine Umfrage unter den Teilnehmern des Kurses gibt einige Angebote in der Nähe von 167. Gehen wir also von einem Angebot von 167 aus. Als geschickter Marktteilnehmer kaufe ich den Call und verkaufe gleichzeitig (leer) 0,25 Aktien (wieso gerade 0,25??), den verbleibenden Betrag lege ich auf das Bankkonto. Das ergibt folgende Rechnung:

Call kaufen	-167
Erlös aus Aktienverkauf	2.750
Restgeld auf Konto	-2.583

und alles geht auf. Summe der Ausgaben an $t = 0$ sind 0.

An Zeitpunkt 1 gibt es zwei Möglichkeiten: Angenommen wir beobachten ω_1. Dann hat das Portfolio folgenden Wert:

Call zahlt aus:	500
-0.25 Aktie wird verkauft	-3.000
Restgeld auf Konto	2.583
Erlös	83

Für die Beobachtung von ω_2 erhalten wir folgenden Wert:

Call zahlt aus:	0
-0.25 Aktie wird verkauft	-2.500
Restgeld auf Konto	2.583
Erlös	83

In jedem Fall gewinne ich mit dieser Strategie 83, und zwar sicher(!). Der Call war offensichtlich 83 Geldeinheiten zu günstig. Wie kann man sich sicher sein, dass man solche Bewertungsfehler vermeidet? Dies ist ein Hauptziel dieser Vorlesung. Bemerkenswert auch, dass die Wahrscheinlichkeiten gar keine Rolle spielten! Woher bekomme ich die Anzahl der zu verkaufenden Aktien?

Wir werden noch weitere andere interessante Punkte streifen, unter anderem:

- No-Arbitrage Theorie in diskreter Zeit,
- Hedging,
- Risikomaße und deren Schätzung,
- Modellrisiken,
- Zinsmärkte und affine Modelle,
- Konsistente Kalibrierung,
- Unendlichdimensionale Finanzmärkte.

I Das Mehrperiodenmodell

Ein hervorragnedes Buch zu diesem Thema ist Föllmer and Schied (2011). Wir folgen zunächst im wesentlichen diesen Buch, beginnen aber gleich mit dem Mehrperiodenmodell. Wir betrachten im Folgenden stets einen festen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass P typischerweise in der Praxis nicht bekannt ist und hierdurch ein *Modellrisiko* entsteht. Manche der Resultate (etwa in einem vollständigen Modell wie dem Binomialmodell) werden sogar unabhängig von P formuliert werden können (genauer: lediglich von den Nullmengen von P abhängig). Es ist ein sehr aktuelles und interessantes Gebiet der Finanzmathematik, diese Annahme fallen zu lassen und wir werden diesen Punkt am Ende der Vorlesung ausführlicher diskutieren.

Für eine Zuvallsvariable X verwenden wir $X \geq 0$ als Abkürzung für $X \geq 0$ P-fast sicher und machen das im Folgenden nicht mehr kenntlich (ebenso natürlich für $=$ und $\leq$).

1 Einführung

Ein Finanzmarkt besteht aus $d+1$ Wertpapieren, welche alle nicht-negative Werte annehmen. Wir modellieren die Preise der Wertpapiere durch stochastische Prozesse. Den Preisprozess des i-ten Wertpapiers bezeichnen wir mit

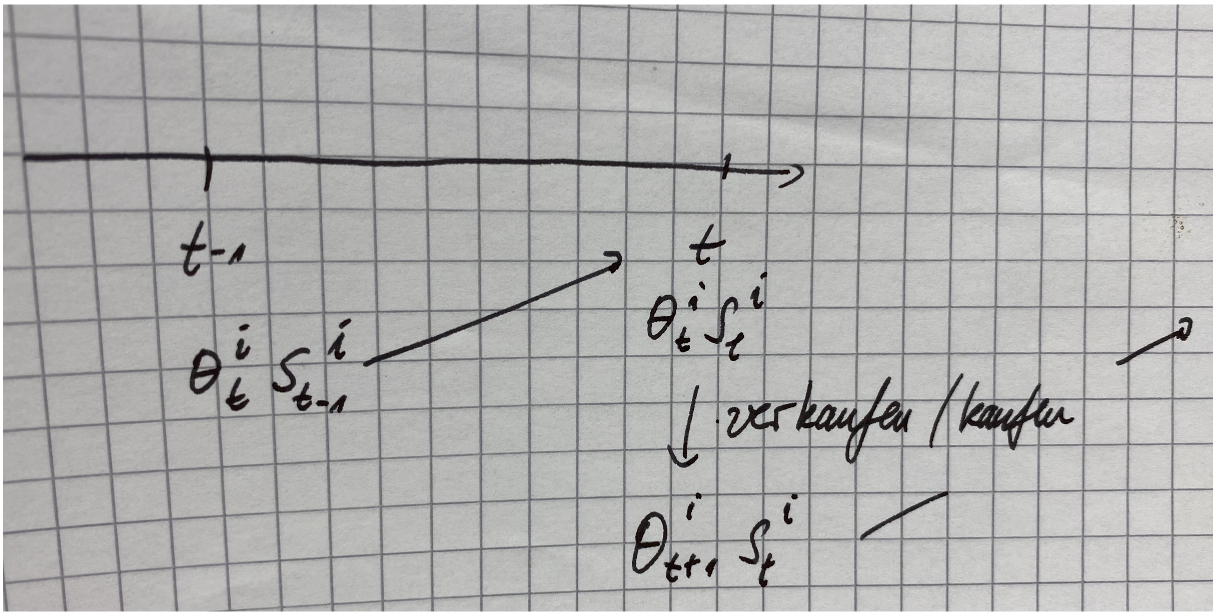
$$S^i = (S^i_t)_{t \in \mathbb{T}},$$

wobei $\mathbb{T} = \{0, \dots, T\}$ mit einem fixen Zeithorizont $T > 0$. Das 0-te Wertpapier ist das sogenannte Bankkonto (oder numéraire), und wir nehmen an, dass $P(S^0_t > 0) = 1$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Die zur Verfügung stehende Information wird durch eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ beschrieben, das ist eine wachsende Folge von Sub-σ-Algebren von $\mathscr{F}$. Im Allgemeinen schreiben wir $\bar{S} = (S^0, S)$ für alle $d+1$ Wertpapiere und $S = (S^1, \dots, S^d)$ für die d Wertpapiere ohne das Bankkonto.

Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t=0,\dots,T}$ heißt *adaptiert*, falls X_t $\mathscr{F}_t$-messbar ist für alle $t = 0, \dots, T$. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t=1,\dots,T}$ heißt *vorhersehbar*, falls X_t $\mathscr{F}_{t-1}$-messbar ist für alle $t = 1, \dots, T$.

Definition 1.1. Eine *Handelsstrategie* $\bar{H}$ ist ein vorhersehbarer, $(d+1)$-dimensionaler stochastischer Prozess. Sie heißt *selbstfinanzierend*, falls

$$\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{S}_t, \quad t = 1, \dots, T-1.$$



Bei einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie wird beim Umschichten des Portfolios kein neues Geld benötigt und der gesamte Betrag reinvestiert. Wir führen die Notation $\Delta S_k = S_k - S_{k-1}$ für die *Zuwächse* von S ein.

Lemma 1.2. *Für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ und $t \geq 1$ ist*

$$\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t = \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0 + \sum_{k=1}^{t} \bar{H}_k \cdot \Delta \bar{S}_k.$$

Beweis. Das sieht man in zwei Schritten:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t &= \bar{H}_t \cdot \bar{S}_t + \bar{H}_{t-1} \cdot \bar{S}_{t-1} - \bar{H}_{t-1} \cdot \bar{S}_{t-1} \\
&= \bar{H}_t \cdot \bar{S}_t + \bar{H}_{t-1} \cdot \bar{S}_{t-1} - \bar{H}_t \cdot \bar{S}_{t-1} \\
&= \bar{H}_t \cdot (\bar{S}_t - \bar{S}_{t-1}) + \bar{H}_{t-1} \cdot \bar{S}_{t-1} \\
&= \sum_{k=2}^{t} \bar{H}_k \cdot (\bar{S}_k - \bar{S}_{k-1}) + \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_1
\end{aligned}$$

wobei wir genutzt haben, dass $\bar{H}$ selbstfinanzierend ist. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_1 \cdot \bar{S}_1 &= \bar{H}_1 \bar{S}_1 + \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0 - \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0 \\
&= \bar{H}_1 (\bar{S}_1 - \bar{S}_0) + \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0
\end{aligned}$$

und Gleichung (1) ist erfüllt. $\square$

B 1.1 *Bankkonto*: Oft betrachtet man das Bankkonto als Numéraire. Dabei ist $(r_t)_{1\leqslant t\leqslant T}$ ein vorhersehbarer Prozess, der den Zins beschreibt. Das Bankkonto startet mit dem Wert $S_0^0 = 1$ und hat an t den folgenden Wert:

$$S_t^0 = \prod_{s=1}^{t}(1 + r_s).$$

Viele Resultate sind bezüglich diesem speziellen Numéraire definiert. Wir nehmen mindestens an, dass $r_s > -1$ für alle $s = 1, \ldots, T$. Typischerweise kann man sogar noch annehmen, dass r vorhersehbar ist und manchmal verlangt man auch nicht-negative Zinsen, also $r \geq 0$. ◇

Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten macht man vergleichbar, indem man mit einer Referenz *diskontiert*. Wir führen den *diskontierten Preisprozess*

$$X_t^i := \frac{S_t^i}{S_t^0}, \quad t = 0, \ldots, T, \quad i = 0, \ldots, d$$

ein. Hierbei ist $X_t^0 \equiv 1$ für alle $0 \leq t \leq T$ und die Referenz auf X^0 verschwindet sogar. Starten wir mit einer Handelstrategie $\bar{H}$, so nutzen wir die Notation H für den Verweis auf die letzten d Komponenten von H, verwenden also stets die Darstellung $H = (H^0, H)$. Dies sieht man insbesondere in der Darstellung des diskontierten Gewinnprozesses.

Definition 1.3. Der *diskontierte Wertprozess* $V = V^{\bar{H}}$ der Handelsstrategie $\bar{H}$ ist

$$V_t := \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t, \quad t = 1, \ldots, T$$

und $V_0 := \bar{H}_1 \cdot \bar{X}_0$. Der *diskontierte Gewinnprozess* $G = G^{\bar{H}}$ ist

$$G_t := \sum_{k=1}^{t} H_k \cdot \Delta X_k, \quad t = 1, \ldots, T$$

mit $G_0 = 0$.

Da $X_k^0 - X_{k-1}^0 = 0$ ist, folgt für alle $0 \leqslant t \leqslant T$, dass

$$G_t = \sum_{k=1}^{t} \bar{H}_k \cdot \Delta\bar{X}_k.$$

Weiterhin ist

$$V_t = \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = \frac{\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t}{S_t^0}.$$

Satz 1.4. *Sei $\bar{H}$ eine Handelsstrategie. Dann sind äquivalent:*

(i) $\bar{H}$ *ist selbstfinanzierend,*

(ii) $\bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{X}_t, \quad t = 1, \dots, T-1,$

(iii) $V_t = V_0 + G_t$ *für* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Beweis. $\bar{H}$ ist selbstfinanzierend,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \qquad & \bar{H}_t \cdot \bar{S}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{S}_t \quad t = 0, \dots, T-1, \\ \Leftrightarrow \qquad & \bar{H}_t \cdot \frac{\bar{S}_t}{S_t^0} = \bar{H}_{t+1} \frac{\bar{S}_t}{S_t^0}, \quad t = 0, \dots, T-1, \end{aligned}$$

und somit ist (i) äquivalent zu (ii). Außerdem gilt für alle $t = 0, \dots, T-1$, dass

$$\begin{aligned} & \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{X}_t \\ \Leftrightarrow \qquad & \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{X}_{t+1} - \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot (\bar{X}_{t+1} - \bar{X}_t) = H_{t+1}(X_{t+1} - X_t). \end{aligned}$$

Dies ist nun äquivalent zu

$$V_t - V_0 = \sum_{s=1}^{t} H_s (X_s - X_{s-1}), \quad t = 1, \dots, T$$

und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 1.1 (Selbstfinanzierende Handelsstrategie)**.** Startet man mit dem Betrag V_0 und einer d-dimensionalen Handelsstrategie H, so kann man eindeutig eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ bestimmen: Dies geschieht durch die die Wahl von

$$H_{t+1}^0 - H_t^0 = -(H_{t+1} - H_t) \cdot X_t$$

und $H_1^0 = V_0 - H_1 \cdot X_0$. Sprechen wir im Folgenden von einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie H, so meinen wir genau diese eindeutige Erweiterung $\bar{H}$.

1.1 Arbitrage und Martingalmaße

Wir kommen zu dem wichtigen Konzept einer Arbitrage. Das ist im Prinzip eine Möglichkeit, ohne Risiko Gewinne zu erwirtschaften. Natürlich gibt es solche Möglichkeiten an den Finanzmärkten, aber es wäre äußerst ungünstig, wenn ein Modell dies erlauben würde: Die Marktteilnehmer könnten das ausnutzen um auf unsere Kosten risikolose Gewinne zu erzielen! Wir beginnen mit einer präzisen Definition.

Definition 1.5. Eine *Arbitrage* ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H, so dass für den zugehörigen (diskontierten) Wertprozess V gilt, dass

(i) $V_0 \leqslant 0$,
(ii) $V_T \geqslant 0$ und
(iii) $P(V_T > 0) > 0$.

Ein Finanzmarkt, in dem keine Arbitragemöglichkeiten existierten, heißt *arbitragefrei.*

Für arbitragefrei nimmt man gerne auch die englische Abkürzung NA - no arbitrage. Die Definition ist unter den getroffenen Annahmen dazu äquivalent, dass der undiskontierte Wertprozess die obigen Bedingungen erfüllt (Wieso?).

Satz 1.6. *Ein Finanzmarkt ist arbitragefrei genau dann, wenn jeder Ein-Perioden-Finanzmarkt* (S_t, S_{t+1}), $t = 0, \dots, T-1$ *arbitragefrei ist.*

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz der Gegenaussagen: Es existiert eine Arbitrage genau dann, wenn ein $t \in \{1, \dots, T\}$ und eine $\mathscr{F}_t$-messbare Zufallsvariable $\xi \in \mathbb{R}^d$ existiert, s.d. $\xi \cdot \Delta X_t \geq 0$ P-fast sicher und $P(\xi \cdot \Delta X_t > 0) > 0$.

Wir starten mit der Hinrichtung: Sei $\bar{H}$ eine Arbitrage mit Wertprozess V. Wir setzen

$$t := \min\left\{s \in \{1, \dots, T\} : V_s \geqslant 0 \text{ und } P(V_s > 0) > 0\right\}$$

mit der Konvention $\min \emptyset = \infty$. Dann ist $t \leqslant T$, da $\bar{H}$ eine Arbitrage ist. Entweder ist $V_{t-1} = 0$, oder $P(V_{t-1} < 0) > 0$. Im ersten Fall gilt:

$$H_t \cdot (X_t - X_{t-1}) = V_t - V_{t-1} = V_t,$$

also erfüllt $\xi = H_t$ die Voraussetzungen. Im zweiten Fall setzen wir $\xi := H_t \mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}}$. Dann ist ξ $\mathscr{F}_{t-1}$-messbar und

$$\xi \cdot (X_t - X_{t-1}) = (V_t - V_{t-1})\mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}} \geqslant -V_{t-1}\mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}} \geqslant 0.$$

Die rechte Seite ist positiv mit positiver Wahrscheinlichkeit, also erfüllt auch in diesem Fall das gewählte ξ die Voraussetzungen.

Nun betrachten wir die Rückrichtung. Sei dafür ξ eine $\mathscr{F}_t$-messbare Zufallsvariable, so dass $\xi \cdot \Delta X_t \geqslant$ und $P(\xi \cdot \Delta X_t > 0) > 0$. Wir setzen:

$$H_s = \begin{cases} \xi & \text{für } s = t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dazu konstruieren wir mit $V_0 = 0$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ nach Bemerkung 1.1 mit

$$V_T = \xi \cdot (X_t - X_{t-1}),$$

eine Arbitrage. □

Es ist interessant, dass sich das Konzept der Arbitrage mit dem wichtigen Konzept der Martingale verbinden lässt, allerdings unter einem geeignet gewählten Maß Q. Wir führen hierzu eine präzise Definition für Martingale ein. Q sei ein Maß auf dem Maßraum $(\Omega, \mathscr{F})$ und wir betrachten nach wie vor die Filtration $\mathbb{F}$ (die wir in der folgenden Definition nicht besonders hervorheben, wohl aber das Maß Q).

Definition 1.7. Ein stochastischer Prozess M heißt *Q-Martingal*, falls gilt:

(i) M ist adaptiert,

(ii) $E_Q[|M_t|] < \infty$ für $t = 0, \dots, T$,

(iii) $M_s = E_Q[M_t | \mathscr{F}_s]$ für $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Dies führt uns nun zu dem Schlüsselkonzept Martingalmaß. Das ist ein Maß unter dem diskontierte Preisprozesse aller gehandelten Wertpapiere Martingale sind.

Definition 1.8. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ heißt *Martingalmaß*, falls der diskontierte Preisprozess X ein Q-Martingal ist.

Definition 1.9. Das Maß Q heißt *absolut stetig* zu P ($Q \ll P$) auf $\mathscr{F}_T$, falls

$$P(F) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(F) = 0 \quad \forall\, F \in \mathscr{F}_T.$$

Die Maße P und Q heißen *äquivalent* ($P \sim Q$), falls $Q \ll P$ und $P \ll Q$.

Der berühmte Satz von Radon-Nikodym behandelt genau die absolut stetigen Maße. Er sagt aus, dass für zwei absolut stetige Maße stets eine Dichte existiert.

Satz 1.10 (Satz von Radon-Nikodym)**.** *Sei $Q \ll P$. Dann existiert eine Zufallsvariable $L \geqslant 0$, s.d.*

$$\int \xi dQ = \int \xi L dP \tag{1}$$

für alle Zufallsvariablen $\xi \geqslant 0$.

Für den Beweis verweisen wir etwa auf Billingsley (1995) (dieser wurde auch in der Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie behandelt). Wir schreiben in diesem Fall kurz $dQ = LdP$ oder für die Dichte $L = \frac{dQ}{dP}$.

Satz 1.11 (Bayes-Theorem)**.** *Sei $Q \ll P$ mit Dichte L. Dann gilt für $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$, dass*

$$E_P[L|\mathscr{F}'] \cdot E_Q[\xi|\mathscr{F}'] = E_P[L \cdot \xi|\mathscr{F}'] \quad P - f.s.$$

Beweis. Wir wählen $F \in \mathscr{F}$

$$\begin{aligned}\int_F E^P[L \cdot \xi|\mathscr{F}']dP &= \int_F \xi \cdot LdP = \int_F \xi \cdot dQ = \int_F E^Q[\xi|\mathscr{F}']dQ = \int_F E^Q[\xi|\mathscr{F}']LdP \\ &= \int_F E^Q[\xi|\mathscr{F}'] \cdot E^P[L|\mathscr{F}']dP.\end{aligned}$$ □

Der diskontierte Preis-Prozess X ist genau dann ein Q-Martingal, falls Integrierbarkeit gilt und für $i = 1, \dots, N$

$$E_Q\Big[\frac{S_t^i}{S_t^0}|\mathscr{F}_s\Big] = \frac{S_s^i}{S_s^0}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Martingalmaße und L^p-Räume

Die Menge der *äquivalenten Martingalmaße* bezeichnen wir mit $\mathscr{M}_e(\mathbb{F}) = \mathscr{M}_e$. Die Menge der $\mathscr{F}$-messbaren Zufallsvariablen X für die $E_P[|X|^p] < \infty$ gilt, bezeichnen wir mit $\mathscr{L}^p(P, \mathscr{F})$. Für $p = \infty$ erhalten wir die Klasse der beschränkten Zufallsvariablen und für $p = 0$ die Klasse der $\mathscr{F}$-messbaren Abbildungen. Darüber hinaus bezeichen wir mit $\mathscr{L}^0_+(P, \mathscr{F})$ die Menge der positiven $\mathscr{F}$-messbaren Abbildungen.

Zufallsvariablen unter Momentenbedingungen führen zu den L^p-Klassen von messbaren Abbildungen, die in der Funktionalanalysis eine wichtige Rolle spielen, siehe etwa Werner (2000). Wir unterschieden die Abbildungen selbst ($\mathscr{L}^p$-Räume) von ihren Äquivalenzklassen (L^p-Räume).

Wir beginnen mit den Abbildungen. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ definieren wir den Raum der $\mathscr{F}$-messbaren Abbildungen (also aller Zufallsvariablen) mit Werten in $\mathbb{R}^d$ durch $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbb{R}^d)$. Wenn je nach Kontext einige der Argumente klar sind, lassen wir dementsprechend diese weg und schreiben etwa[1] $\mathscr{L}^0$. Mit $\mathscr{L}^p \subset \mathscr{L}^0$ definieren wir diejenige Teilmenge von Zufallsvariablen mit p-ten Momenten, wo also $\|Z\|_p < \infty$, mit

$$\|Z\|_p := \begin{cases} E[|Z|^p]^{1/p} & \text{für } 0 < p < \infty \\ \inf\{c > 0 : P(|Z| > c) = 0\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Entsprechend definieren wir für $p \in [0, \infty]$ den Raum L^p als die zugehörigen Äquivalenzklassen definiert durch

$$Z \sim Z' \qquad \Leftrightarrow \qquad P(Z = Z') = 1.$$

Satz 1.12. *Sei $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Dann sind äquivalent:*

(i) Q ist Martingalmaß.

(ii) Für jede beschränkte, selbstfininanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ ist $V^{\bar{H}}$ ein Q-Martingal.

(iii) Für jede selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ mit $E_Q[(V_T^{\bar{H}})^-] < \infty$ ist $V^{\bar{H}}$ ein Q-Martingal.

(iv) Für jede selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ mit $V_T = V_T^{\bar{H}} \geqslant 0$ gilt

$$V_0 = E_Q[V_T].$$

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Sei $\bar{H}$ selbstfinanzierend mit $|H_t^i| \leqslant c$, für $i = 0, \dots, d$, $t = 0, \dots, T$. Dann folgt, dass

$$|V_t| \leqslant |V_0| + \sum_{k=1}^{t} c \cdot \sum_{i=1}^{d} \Big(|X_k^i| + |X_{k-1}^i|\Big),$$

so dass $V_t \in L^1(Q)$ für $t \in \mathbb{T}$ folgt. Weiterhin ist:

$$\begin{aligned} E_Q[V_t|\mathscr{F}_{t-1}] &= E_Q[V_{t-1} + \bar{H}_t \cdot (\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1})|\mathscr{F}_{t-1}] \\ &= V_{t-1} + \bar{H}_t \cdot (E_Q[\bar{X}_t|\mathscr{F}_{t-1}] - \bar{X}_{t-1}) = V_{t-1}. \end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ iii): Wir beobachten, dass

$$E_Q[V_{T-1}^-] = E_Q[E_Q[V_T|\mathscr{F}_{T-1}]^-] \leqslant E_Q[E_Q[V_T^-|\mathscr{F}_{T-1}]] = E_Q[V_T^-] < \infty$$

[1] Für $1 \leq p \leq \infty$ sind die L^p-Räume Banachräume. Auf dem Raum L^0 betrachten wir die Metrik, die die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit erzeugt,

$$d(X, Y) = E[|X - Y| \wedge 1].$$

mit der Jensenschen Ungleichung und es folgt $E_Q[V_t^-] < \infty$ für alle $0 \leq t \leq T$.

$E_Q[V_t^-] < \infty$ impliziert, dass $E_Q[V_t|\mathscr{F}_{t-1}] = V_{t-1}$ wohldefiniert ist, auch wenn diese Erwartungswerte ∞ annehmen können. Sei nun $a > 0$, $\bar{H}$ selbstfinanzierend und $H_t^a := H_t 1_{\{|H_t| \leqslant a\}}$.

$$\begin{aligned} E_Q[V_t|\mathscr{F}_{t-1}]1_{\{|H_t|\leqslant a\}} &= E_Q[\bar{H}_t \cdot \bar{X}_t 1_{\{|H_t|\leqslant a\}}|\mathscr{F}_{t-1}] \\ &= E_Q[\bar{H}_t(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1})1_{\{|H_t|\leqslant a\}}|\mathscr{F}_{t-1}] + V_{t-1}1_{\{|H_t|\leqslant a\}} = V_{t-1}1_{\{|H_t|\leqslant a\}}. \end{aligned}$$

Mit $a \uparrow \infty$ folgt also $E_Q[V_t|\mathscr{F}_{t-1}] = V_{t-1}$ und somit V ist unter Q ein Martingal.
iii) $\Rightarrow$ iv): Klar.
iv) $\Rightarrow$ i): Zuerst zeigen wir die Integrierbarkeit von X_t^i. Wir betrachten die selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H} = (H^0, H)$, gegeben durch

$$H_s^i = \mathbb{1}_{\{s \leq t\}}$$

und $H_s^j = 0$ für alle $s \in \mathbb{T}$ und $j \neq i$. Wir starten mit dem Anfangskapital $V_0 = X_0^i$ und erhalten, dass

$$V_T = X_t^i \geqslant 0.$$

Diese Handelsstrategie erfüllt also die Voraussetzung für (iv), so dass

$$X_0^i = V_0 = E_Q[V_T] = E_Q[X_t^i] = E_Q[|X_t^i|] < \infty, \tag{2}$$

wobei die letzte Ungleichung aus $\infty > V_0 = E_Q[|X_t^i|]$ folgt. Wir zeigen als nächstes, dass

$$E_Q[X_{t+1}^i 1_F] = E_Q[X_t^i 1_F] \qquad \forall F \in \mathscr{F}_t.$$

Dazu wählen wir

$$H_s^i = \mathbb{1}_{\{s<t\}} + \mathbb{1}_{F^C} 1_{\{s=t\}},$$

$H^j = 0$ für $j \neq i$ und konstruieren mit $V_0 = X_0^i$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ nach Bemerkung 1.1. Wir erhalten für den Endwert dieser Handelsstrategie, dass

$$V_T = \mathbb{1}_F X_{t-1}^i + \mathbb{1}_{F^C} X_t^i \geq 0,$$

so dass ebenfalls die Voraussetzungen für (iv) erfüllt sind. Daraus folgt, dass

$$X_0^i = E_Q[V_T] = E_Q[\mathbb{1}_F X_{t-1}^i + \mathbb{1}_{F^C} X_t^i].$$

Zusammen mit Gleichung (2) erhalten wir

$$E_Q[X_t^i] = E_Q[\mathbb{1}_F X_{t-1}^i + \mathbb{1}_{F^C} X_t^i],$$

also $E_Q[1_F X_t^i] = E_Q[1_F X_{t+1}^i]$, und die Behauptung folgt. $\square$

2 Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung

Der folgende Satz ist der wichtigste Satz unserer Vorlesung. Wir nennen ihn den Hauptsatz der Wertpapierbewertung (Fundamental Theorem of Asset Pricing, FTAP). Mit $\mathscr{M}_e(\mathbb{F}) = \mathscr{M}_e$ bezeichnen wir die Menge der äquivalenten (equivalent) $\mathbb{F}$-Martingalmaße.

Theorem 2.1. *Ein Markt ist genau dann frei von Arbitrage, falls ein äquivalentes Martingalmaß existiert. In diesem Fall existiert ein $Q^* \in \mathscr{M}_e$ mit beschränkter Dichte $\frac{dQ^*}{dP}$.*

Wir beweisen den Hauptsatz in mehreren Schritten. Die Rückrichtung stellt sich als überraschend leicht heraus. Sie ist auch die in der Anwendung am meisten verwendete Anwendung des Satzes.

Satz 2.2. *Ist $\mathscr{M}_e \neq \emptyset$, so ist der Markt frei von Arbitrage.*

Beweis. Wir verwenden Satz 1.12 (iii) und zeigen einen Widerspruch. Sei hierzu H eine Arbitrage mit diskontiertem Wertprozess V. Wir wählen ein $Q \in \mathscr{M}_e$.

Aus $V_0 \leqslant 0$ P-f.s. folgt auch $V_0 \leqslant 0$ Q-f.s. Ebenso $V_T \geq 0$ Q-f.s. Es folgt $E_Q[V_T^-] = 0 < \infty$.

Weiterhin ist $P(V_T > 0) > 0$, also auch $Q(V_T > 0) > 0$, also $E_Q[V_T] > 0$. Mit Satz 1.12 (iii) erhalten wir, dass V ein Q-Martingal ist, also

$$V_0 = E_Q[V_T] > 0,$$

ein Widerspruch zu $V_0 \leqslant 0$. □

Wir kehren zurück zum Beweis des Hauptsatzes. Nach Satz 1.6 reicht es, Arbitrage in jeder Periode zu untersuchen. Wir fixieren ein $t \in \mathbb{T}$ mit $t > 0$ und definieren:

$$K = \{H \cdot \Delta X_t : \; H \in L^0(P, \mathscr{F}_{t-1}, \mathbb{R}^d)\}.$$

Dies sind alle bedingten Ansprüche, die wir zum Preis Null erreichen können. Dann können wir No-Arbitrage auch äquivalent ausdrücken durch

$$K \cap L^0_+(\mathscr{F}_t, P, \mathbb{R}) = \{0\}.$$

Da t fixiert ist, schreiben wir im Folgenden kurz $L^0_+(\mathscr{F}_t, P, \mathbb{R}) = L^0_+$. Für zwei Mengen A und B bezeichen wir mit

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, \; b \in B\}$$

die direkte Summe dieser Mengen und analog mit $A - B$ die direkte Differenz.

Satz 2.3. *Sei $t \in \mathbb{T}$ fixiert. Wir betrachten den Ein-Periodenmarkt von $t-1$ nach t. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $K \cap L^0_+ = \{0\}$,

(ii) $(K - L^0_+) \cap L^0_+ = \{0\}$,

(iii) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß mit beschränkter Dichte,

(iv) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß.

Beweis. Wir zeigen (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii) und (iii) $\Rightarrow$ (iv), der Teil (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist der Hauptteil des Beweises und wird im Anschluss studiert.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $Q \in \mathscr{M}_e$. Wir zeigen einen Widerspruch. Dazu sei H eine $\mathscr{F}_{t-1}$-messbare, d-dimensionale Zufallsvariable, so dass $H \cdot (X_t - X_{t-1}) \geqslant 0$ und $P(H \cdot (X_t - X_{t-1}) > 0) > 0$. Dann ist ebenso $Q(H \cdot (X_t - X_{t-1})) > 0$.

Für jedes $c > 0$ setzen wir $H^c := H\mathbb{1}_{\{|H| \leqslant c\}}$. Wegen der σ-Stetigkeit[2] des Wahrscheinlichkeitsmaßes Q gibt es ein c^*, so dass $Q(H^{c^*}(X_t - X_{t-1}) > 0) > 0$. Wäre nun $H^{c^*} \cdot (X_t - X_{t-1}) \in K \cap L^0_+ \setminus \{0\}$, so folgte, dass

$$E^Q[H^{c^*} \cdot (X_t - X_{t-1}) | \mathscr{F}_{t-1}] = H^{c^*} E^Q[X_t - X_{t-1} | \mathscr{F}_{t-1}] = 0,$$

was allerdings Widerspruch zu $H^{c^*}(X_t - X_{t-1}) \gneqq 0$ ist, so dass wir die Aussage (i) erhalten.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wir betrachten ein $Z \in (K - L^0_+) \cap L^0_+$. Dann existiert ein $\mathscr{F}_{t-1}$-messbares H und $U \in L^0_+$, s.d.

$$Z = H \cdot (X_t - X_{t-1}) - U \geqslant 0.$$

Es gilt also $H \cdot (X_t - X_{t-1}) \geqslant U \geqslant 0$, und somit $H \cdot (X_t - X_{t-1}) \in K \cap L^0_+$. Nach (i) folgt $H \cdot (X_t - X_{t-1}) = 0$, also $U = 0$ und somit $Z = 0$.

Die weiteren Aussagen (ii) $\Rightarrow$ (i) und (iii) $\Rightarrow$ (iv) folgen unmittelbar. $\square$

[2] Für eine monoton wachsend (fallende) Folge $A_n \in \mathscr{F}$ mit gilt $Q(A_n) \to Q(A)$, wobei A die Vereinigung (Durchschnitt) aller (A_n) ist.

Wir zeigen nun, dass es genügt, sich auf integrierbare Zufallsvariablen X_t und X_{t+1} zu konzentrieren.

Lemma 2.4. *Für den Schritt (ii) ⇒ (iii) reicht es $E[|X_t|] < \infty$, $E[|X_{t-1}|] < \infty$ zu betrachten.*

Beweis. Wir konstruieren zunächst $\tilde{P} \sim P$, so dass die Erwartungswerte existieren. Sei dazu $c > 0$ und

$$Z := \frac{c}{1 + |X_t| + |X_{t-1}|} \leqslant c$$

eine positive Dichte und $d\tilde{P} = ZdP$. Offensichtlich ist $\tilde{E}[|X_t|] < \infty$ und $\tilde{E}[|X_{t-1}|] < \infty$. Die Bedingung (ii) hängt nur von den Nullmengen von P ab, also gilt (ii) genau dann, wenn es für $\tilde{P}$ gilt. Ist $Q^* \in \mathscr{M}_e$, so ist

$$\frac{dQ^*}{dP} = \frac{dQ^*}{d\tilde{P}} \cdot \frac{d\tilde{P}}{dP} = \frac{dQ^*}{d\tilde{P}} \cdot Z.$$

Die Dichte von Q^* bezüglich P ist demnach genau dann beschränkt, wenn sie es bezüglich $\tilde{P}$ ist. □

Im Folgenden können wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit von $E[|X_t|] < \infty$ und $E[|X_{t-1}|] < \infty$ ausgehen.

Wir werden im Folgenden Erwartungswerte für eine Klasse von Zufallsvariablen betrachten, z.B. bedingte Erwartungen. Wir definieren den konvexen Kegel

$$C = (K - L^0_+) \cap L^1.$$

Lemma 2.5. *Sei $c \geqslant 0$ und $Z \in L^\infty(P, \mathscr{F}_t)$, so dass*

$$E[ZW] \leqslant c \qquad \text{für alle } W \in C. \tag{3}$$

Dann gilt:

(i) $E[ZW] \leqslant 0$ für alle $W \in C$,
(ii) $Z \geqslant 0$ P-f.s.,
(iii) Ist $P(Z > 0) > 0$, so ist durch

$$\frac{dQ}{dP} := Z$$

ein Martingalmaß (und $Q \ll P$) definiert.

Beweis. (i) C ist ein Kegel, denn mit $W \in C$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt $\alpha W \in C$. Dann ist

$$E[\alpha ZW] = \alpha \cdot E[ZW] \leqslant \alpha c.$$

Wir erhalten, dass diese Gleichung bereits für $c = 0$ gelten muss.

(ii) Wir wählen $W = -\mathbb{1}_{\{Z<0\}}$. Dann ist

$$E[Z_-] = E[ZW] \leqslant 0,$$

also $Z_- = 0$ und somit $Z \geq 0$ P-f.s.

(iii) Wir wählen H in $L^\infty(P, \mathscr{F}_{t-1}, \mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und setzen $Y = (X_t - X_{t-1}) \in C$. Dann ist

$$E[ZHY] \leqslant c \quad \text{und} \quad E[\alpha ZHY] \leqslant c,$$

so dass wie oben $E[ZHY] \leqslant 0$ folgt. Außerdem ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha E[ZHY] \leqslant 0,$$

also $E[ZHY] = 0 = E[H(X_t - X_{t-1})]$. Wir erhalten $E^Q[\mathbb{1}_F(X_t^i - X_{t-1}^i)] = 0$ für alle $F \in \mathscr{F}_{t-1}$, also ist X Q-Martingal. □

2.1 Exkurs: Hahn-Banach auf lokal konvexen Raumen

Ein *topologischer Vektorraum* E ist ein Vektorraum mit einer Topologie, so dass gilt:

(i) die Addition ist stetig,
(ii) die Skalarmultiplikation ist stetig.

Wir nennen einen topologischer Vektorraum E *lokal konvexen Raum*, falls seine Topologie von einer Basis aus konvexen Mengen erzeugt wird. Für weitere Informationen hierzu sei auf Werner (2000) verwiesen.

Theorem 2.6 (Hahn-Banach)**.** *Seien B und C nicht-leere Teilmengen des lokal konvexen Raumes E und*

(i) $B \cap C = \emptyset$,
(ii) B, C konvex,
(iii) B kompakt, C abgeschlossen.

Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional $\ell : E \to \mathbb{R}$, so dass

$$\sup_{x \in C} \ell(x) < \inf_{x \in B} \ell(x).$$

Nach Lemma 2.5 reduziert sich der Beweis des Hauptsatzes auf Konstruktion eines positiven Elements von

$$\mathcal{Z} := \{Z \in L^\infty,\ 0 \leqslant Z \leqslant 1,\ P(Z > 0) > 0,\ E[ZW] \leqslant 0\ \forall W \in C\}$$

mit dem konvexen Kegel $C = (K - L^0_+) \cap L^1$. Wir nehmen zunächst an, dass C abgeschlossen ist, so dass wir den Satz von Hahn-Banch anwenden können.

Lemma 2.7. *Angenommen C ist abgeschlossen in L^1, und $C \cap L^1_+ = \{0\}$. Dann existiert für alle $F \in L^1_+ \backslash \{0\}$ ein $Z \in \mathcal{Z}$, s.d. $E[FZ] > 0$.*

Beweis. Sei $B = \{F\}$, s.d. $B \cap C = \emptyset$, $C \neq \emptyset$, beide Mengen sind konvex, B ist kompakt und C abgeschlossen nach Voraussetzung.

Mit dem Satz von Hahn-Banach existiert ein stetiges lineares Funktional ℓ, s.d.

$$\sup_{W \in C} \ell(W) < \ell(F)$$

Der Dualraum L^1 kann mit L^∞ identifiziert werden, s.d. $Z \in L^\infty$ existiert mit

$$\ell(F') = E[Z \cdot F'], \qquad F' \in L^1.$$

O.B.d.A. $\|Z\|_\infty = 1$. Es folgt $E[ZW] < E[ZF]$ $\forall W \in C$, so dass Z die Voraussetzungen von Lemma 2.5 erfüllt. Es folgt, dass $Z \in \mathcal{Z}$. Mit $0 = W \in C$ erhalten wir $E[FZ] > 0$. $\square$

Der nächste Schritt ist es, ein $Z^* > 0$ auszuwählen.

Lemma 2.8. *Angenommen C ist abgeschlossen in L^1 und*

$$C \cap L^1_+ = \{0\}.$$

Dann existiert $Z^* \in \mathcal{Z}$ mit $Z^* > 0$ P-f.s.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{Z}$ abzählbar konvex ist: Das heisst für alle $\alpha_k \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k = 1$, und $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}$, gilt, dass

$$Z := \sum_{k=1}^\infty \alpha_k Z_k \in \mathcal{Z}.$$

Dies sieht man wie folgt: Für $W \in C$ gilt, dass

$$\sum_{k=1}^\infty |\alpha_k Z_k W| \leqslant |W| \sum_{k=1}^\infty |\alpha_k| = |W| \in L^1.$$

Mit dominierter Konvergenz erhalten wir

$$E[ZW] = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k E[Z_k W] \leqslant 0$$

und somit ist $Z \in \mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}$ ist in der Tat abzählbar konvex. Setze

$$c := \sup\{P(Z > 0) : \; Z \in \mathcal{Z}\}.$$

Wir wählen eine Folge $(Z_n) \in \mathcal{Z}$, so dass $P(Z_n > 0) \to c$. Dann ist

$$Z^* := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} Z_k \in \mathcal{Z}$$

nach der obigen Beobachtung. Darüber hinaus ist $\{Z^* > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{Z_k > 0\}$, also

$$P(Z^* > 0) \geqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} P(Z_k > 0) = c.$$

Wir zeigen die Behauptung mit einem Widerspruch. Dazu nehmen wir an, dass $P(Z^* = 0) > 0$. Dann ist $F := 1_{\{Z^*=0\}} \neq 0$ und $F \in L^1_+$. Nach Lemma 2.7 gibt es $Z' \in \mathcal{Z}$, s.d.

$$0 < E[FZ'] = E[1_{\{Z^*=0\}} Z'].$$

also $P(\{Z' > 0\} \cap \{Z^* = 0\}) > 0$. Dann ist

$$P\Big(\frac{1}{2}(Z' + Z^*) > 0\Big) > P(Z^* > 0)$$

ein Widerspruch zur Maximalität von Z^* und es folgt in der Tat $P(Z^* > 0) = 1$. □

Das folgende Lemma erlaubt uns aus einer Folge eine messbare und konvergente *Teilfolge* auszuwählen. Es ist eine Verallgemeinerung des Satzes von *Bolzano-Weierstraß*[3] auf unendlichdimensionale Räume, wie wir sie hier betrachten. Typischerweise reicht im Unendlichdimensionalen Beschränktheit nicht mehr, weswegen wir Existenz eines endlichen Häufungspunktes fordern.

Lemma 2.9. *Sei (H_n) eine Folge von d-dim. Zufallsvariablen mit $\liminf_n |H_n| < \infty$. Dann gibt es ein $H \in L^0(\mathbb{R}^d)$ und eine strikt monoton wachsende Folge (σ_m) von ganzzahligen Zufallsvariablen, so dass*

$$H_{\sigma_m(\omega)}(\omega) \to H(\omega)$$

für P-fast alle ω.

Beweis. Wir konstruieren die Teilfolge punktweise, so dass wir das Resultat auf den klassischen Bolzano-Weierstraß zurückführen können. Zunächst konstruieren wir eine Teilfolge so, dass $(|H_{\sigma_m^0}|)$ gegen den kleinsten Häufungspunkt $\lambda := \liminf_n |H_n|$ konvergiert (und zwar für fast alle $\omega \in \Omega$). Dann betrachten wir nacheinander jede Koordinate und beschleunigen die Folgen jeweils so, dass auch jede Koordinate konvergiert.

[3] Hierüber gibt es eine sehr schöne Wikipedia-Seite.

Sei $\sigma_m = m$ auf $\{\lambda = \infty\}$. Auf $\{\lambda < \infty\}$ definieren wir $\sigma_1^0 := 1$ und

$$\sigma_m^0(\omega) := \inf\left\{n > \sigma_{m-1}^0(\omega) : \ ||H_n(\omega)| - \lambda(\omega)| \leqslant \frac{1}{m}\right\} \qquad m = 2, 3, \ldots$$

Sei $H^i := \liminf_{m\to\infty} H^i_{\sigma_m^{i-1}}$ $i = 1, \ldots, d$. Sei $\sigma_1^i = 1$ und

$$\sigma_m^i(\omega) := \inf\left\{\sigma_n^{i-1}(\omega) : \ \sigma_n^{i-1}(\omega) > \sigma_{m-1}^i(\omega) \quad \text{und} \quad |H^i_{\sigma_n^{i-1}(\omega)}(\omega) - H^i(\omega)| \leqslant \frac{1}{n}\right\}$$

$\sigma_m := \sigma_m^d$ auf $\{\lambda < \infty\}$ gibt die gesuchte Folge. □

Eigentlich wären wir schon fast am Ziel unsere Beweises angelangt, allerdings können zwei verschieden Portfolien zu dem gleichen Endwert führen, oder: anders formuliert, es könnte sein, dass

$$H(X_t - X_{t-1}) = 0$$

gilt obwohl $H \neq 0$. Dieses Problem überwinden wir mit geeigneten Orthogonalkomplementen. Für das folgende Lemma versehen wir L^0 mit der Topologie der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit[4], erzeugt von der Halbmetrik $E[|X - Y| \wedge 1]$.

Lemma 2.10. *Wir definieren:*

$$N = \{H \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d) : \ H(X_t - X_{t-1}) = 0 \quad P - f.s.\}$$
$$N^\perp = \{G \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d) : \ G \cdot H = 0 \text{ für alle } H \in N\}$$

Dann gilt

(i) $N, N^\perp$ *sind abgeschlossen in* L^0, *und* $gH \in N$, *falls* $H \in N$, $g \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P; \mathbb{R})$, *sowie* $gG \in N^\perp$ *falls* $G \in N^\perp$.

(ii) $N \cap N^\perp = \{0\}$.

(iii) Jedes $G \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P, \mathbb{R}^d)$ *hat die eindeutige Zerlegung:*

$$G = H + G^\perp, \quad H \in N, \ G^\perp \in N^\perp.$$

Beweis. (i) Gilt $H_n \xrightarrow{P} H$, so gibt es eine f.s. konvergiernde Teilfolge (H_{σ_m}). Dann gilt:

$$H_{\sigma_m}(\omega) \cdot (X_t(\omega) - X_{t-1})(\omega) \to H(\omega)(X_t(\omega) - X_{t-1}(\omega)) \quad \text{für } P\text{-fast alle } \omega. \tag{4}$$

Ist $(H_n) \subseteq N$ eine Folge von Elemente aus N mit $H_n \to H$ f.s., so folgt, dass die linke Seite von (4) gleich Null ist, also auch der Grenzwert (die rechte Seite) und somit ist $H \in N$.

[4] Auch hier gibt es einen Wikipedia-Artikel, `https://de.wikipedia.org/wiki/Konvergenz_in_Wahrscheinlichkeit`.

Ebenso folgt aus $(G_k) \subseteq N^\perp$ mit $G_n \to^{f.s.} G$, dass $G \in N^\perp$, so dass N und $N^\perp$ abgeschlossen sind.

Aus $H\Delta X = 0$ folgt, dass $gH\Delta X = 0$, also ist $gH \in N$ und ebenso folgt $gG \in N^\perp$.

(ii) Angenommen $G \in N \cap N^\perp$, dann folgt:

$$0 = G \cdot G = |G| \Leftrightarrow G = 0 \quad P\text{-f.s.}.$$

(iii) Für $\xi \in \mathbb{R}^d$ stellen wir ξ dar als $\xi = \xi^1 e_1 + \ldots + \xi^d e_d$ mit einer Basis $\{e_1, \ldots, e_d\}$. Nehmen wir zunächst an, dass $e_i = n_i + e_i^\perp$ mit $n_i \in N$ und $e_i^\perp \in N^\perp$. Dann ist:

$$\xi = \underbrace{\sum_{i=1}^d \xi n_i}_{\in N} + \underbrace{\sum_{i=1}^d \xi_i e_i^\perp}_{\in N^\perp}$$

Die Zerlegung ist eindeutig, da $N \cap N^\perp = \{0\}$.

Wir zeigen noch $e_i = n_i + e_i^\perp$. Dazu betrachten wir den Hilbertraum $L^2 = L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$ mit Skalarprodukt $\langle X, Y\rangle = E[XY]$. Sowohl $N \cap L^2$ als auch $N^\perp \cap L^2$ sind abgeschlossene Unterräume von L^2, da stochastische Konvergenz L^2-Konvergenz impliziert und wir bereits Abgeschlossenheit von N und $N^\perp$ gezeigt haben. Wir definieren die orthogonalen Projektionen

$$\pi : L^2 \to N \cap L^2, \quad \pi^\perp : L^2 \to N^\perp \cap L^2$$

und setzen $n_i = \pi(e_i)$, $e_i^\perp = \pi^\perp(e_i)$.

Nun betrachten wir $\xi := e_i - \pi(e_i)$. Da $\pi(e_i)$ die orthogonale Projektion ist, gilt

$$\langle \xi, n\rangle = 0 \tag{5}$$

für alle $n \in N \cap L^2$. Zunächst ist $e_i \in L^2$ und ebenfalls $\pi(e_i)$, also ist $\xi \in L^2$. Wir zeigen, dass $\xi \in N^\perp$: Angenommen, $\xi \notin N^\perp \cap L^2$. Dann gibt es ein $H \in N$ mit $P(\xi \cdot H > 0) > 0$. Setze

$$\tilde{H} := H \mathbb{1}_{\{\xi \cdot H > 0\ ,\ |H| \leqslant c\}} \in N \cap L^2$$

für ein noch zu wählendes c. Ist c groß genug, so gilt

$$0 < E[\tilde{H} \cdot \xi] = \langle \tilde{H}, \xi\rangle,$$

ein Widerspruch zu (5).

□

B 1.2 *C ist nicht abgeschlossen*: Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathscr{F}_1 =$ Borel-σ-Algebra, $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\Delta X(\omega) = \omega$ (dies ist offensichtlich ein Markt mit Arbitrage).

Zunächst ist C eine echte Teilmenge von L^1: Ist $F \geqslant 1$, so ist F nicht aus C!

Wir betrachten

$$F_n = (F^+ \cap n)\mathbb{1}_{[1/n,1]} - F^- \quad \text{für } F \in L^1$$

und somit gilt $F_n \xrightarrow{L^1} F$. Weiterhin ist $F_n \in C$, da

$$(F^+ \wedge n)\mathbb{1}_{[1/n,1]} \leqslant \begin{cases} n & \omega \in [1/n,1], \\ 0 & \omega \in [0,1,n). \end{cases}$$

und somit $(F^+ \wedge n)\mathbb{1}_{[1/n,1]} \leqslant n \cdot n\Delta X = n^2 \Delta X$. $\Delta X \geqslant 1/n \iff n\Delta X \geqslant 1$ auf $\omega \geqslant 1/n$, also $(F^+ \wedge n)\mathbb{1}_{[1/n,1]} = U + n^2\Delta X$ mit $n \geqslant 0$.

Das folgende Lemma zeigt, dass die im obigen Beispiel nicht erfüllte Voraussetzung $K \cap L^0_+ = \{0\}$ bereits reicht, um Abgeschlossenheit zu erreichen.

Lemma 2.11. *Gilt $K \cap L^0_+ = \{0\}$, so ist $K - L^0_+$ abgeschlossen in L^0.*

Beweis. Sei $W_n \in K - L^0_+$, so dass $W_n \to W$ in L^0 (also in Wahrscheinlichkeit). Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir o.B.d.A. annehmen, dass $W_n \to W$ f.s. Es gilt

$$W_n = \tilde{H}_n \cdot \Delta X - U_n \overset{L.2.10}{=} \tilde{\tilde{H}}_n \Delta X + H_n^{\perp} \Delta X - U_n = H_n^{\perp} \Delta X - U_n =: H_n \Delta X - U_n,$$

da $\tilde{\tilde{H}}_n \Delta X = 0$.

Zunächst nehmen wir an, dass $\liminf |H_n| < \infty$ P-f.s. Nach Lemma 2.9 gilt, dass $H_{\sigma_n} \to H$ P-f.s. für eine monoton wachsende Folge (σ_n). Ebenso ist:

$$0 \leqslant U_{\sigma_n} = H_{\sigma_n} \Delta X - W_{\sigma_n} \to H\Delta X - W =: U \qquad P - \text{f.s.}$$

mit $U \geqslant 0$, also $W \in K - L^0_+$.

Wir zeigen noch, dass $\liminf |H_n| < \infty$ P-f.s. Definiere die normierte Handelsstrategie $\xi_n = \frac{H_n}{|H_n|}$ und setze $A = \{\omega \in \Omega \ : \ \liminf |H_n| = \infty\}$. Lemma 2.9 angewendet auf $\xi_n = \frac{H_n}{|H_n|}$ liefert eine Teilfolge (τ_n), so dass $\xi_{\tau_n} \to \xi$ P-f.s.. Nun gilt:

$$0 \leqslant \mathbb{1}_A \frac{U_{\tau_n}}{|H_n|} = \mathbb{1}_A \left(\frac{H_{\tau_n}}{|H_{\tau_n}|} \cdot \Delta X - \frac{W_{\tau_n}}{|H_{\tau_n}|} \right) \to \mathbb{1}_A \xi \Delta X \quad P - \text{f.s.},$$

da $\frac{W_{\tau_n}}{|H_{\tau_n}|} \to 0$. Nun ist $\mathbb{1}_A \xi \in L^0(\mathscr{F}_{t-1})$ und die Annahme $K \cap L^0_+ = \{0\}$ impliziert $\mathbb{1}_A \xi \Delta X = 0$.

Wir möchten schließen, dass hieraus $\mathbb{1}_A \xi = 0$ folgt und verwenden, wie bereits bemerkt, hierfür die Technik des Orthogonalkomplements. Damit zeigen wir, dass $\mathbb{1}_A \xi \in N^{\perp}$, so dass $\xi = 0$ und damit $P(A) = 0$ folgt. (wegen $|\xi| = 1$).

Hierzu gehen wir wie folgt vor: Für $\eta \in N$ gilt, dass

$$\xi_{\tau_n} \cdot \eta = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_n = k\}} \frac{1}{|H_k|} H_k \cdot \eta = 0,$$

da $H_k \in N^{\perp}$ und somit $H_k \cdot \eta = 0$. Wir erhalten $\xi_{\tau_n} \in N^{\perp}$. Da $N^{\perp}$ abgeschlossen ist, folgt $\xi \in N^{\perp}$. □

3 Beispiele

In diesem Kapitel werden einige wichtige Beispiele eingeführt, die die vorherigen Techniken illustrieren und zentral in der Anwendung sind.

3.1 Das Cox-Ross-Rubinstein Modell

Dieses wichtige Beispiel ist ein Binomialmodell mit mehreren Zeiperioden. Es ist überraschend, dass sich die zentralen Fragestellungen in der Finanzmathematik bereits an Bi- und Trinomialmodellen sehr gut illustrieren lassen. Ebenso kann über Verteilungskonvergenz etwa das Black-Scholes Modell als Grenzwert erreicht werden, und sich so auch gewisse Formeln erreichen. Man sollte allerdings auch im Hinterkopf haben, dass gewissen Regeln wie Freiheit von Arbitrage, Existenz von Hedging-Strategien, faire Bewertungsregeln, etc. nicht unbedingt unter Konvergenz erhalten bleiben. Das wird im Folgenden nicht weiter diskutiert.

Wir nehmen an, dass das Bankkonto der Gleichung

$$S_t^0 = (1+r)^t, \qquad t = 0, \dots, T$$

genügt mit der Bedingung $r > -1$. Somit ist S^0 deterministisch, als nicht zufällig.

Darüber hinaus sei $d = 1$, und wir schreiben kurz $S^1 = S$. Für den Aktienkurs S gelte, dass

$$S_t = S_0 \prod_{i=1}^{t} \xi_i, \qquad t = 1, \dots, T.$$

Hierbei sind $\xi_1, \dots, \xi_T$ Zufallsvariablen mit $\xi_i \in \{1+u,\ 1+d\}$ wobei wir $-1 \leq d \leq u$ fordern. Wir nehmen an, dass $P(\xi_i = 1+u) \in (0,1)$ für $i = 1, \dots, T$. Die zugehörige Filtration definieren wir durch

$$\mathscr{F}_t = \sigma(S_1, \dots, S_t), \qquad t = 0, \dots, T.$$

Satz 3.1. *Das CRR-Modell erfüllt (NA) genau dann, wenn $d < r < u$. Unter Q sind (ξ_t) i.i.d. mit $Q(\xi_t = 1+u) = \frac{r-d}{u-d}$ für $t = 1, \dots, T$.*

Beweis. Wir berechnen das äuquivalente Martingalmaß. Es wird sich herausstellen, dass es höchstens eines gibt. Die Martingal-Bedingung bedeutet, dass

$$E_Q\Big[\frac{S_t}{S_t^0} | \mathscr{F}_{t-1}\Big] = \frac{S_{t-1}}{S_{t-1}^0}, \qquad t = 1, \dots, T.$$

Nun kann man die multiplikative Struktur hervorragend ausnutzen und sieht, dass dies äquivalent ist zu

$$E_Q\Big[\frac{\xi_t}{1+r} | \mathscr{F}_{t-1}\Big] = 1, \qquad t = 1, \dots, T.$$

Da ξ_t jeweils nur zwei Werte annehmen kann, erhalten wir die folgende hinreichende und notwendige Bedingung für NA:

$$\begin{aligned}
& Q(\xi_t = 1+u|\mathscr{F}_{t-1})\frac{1+u}{1+r} + Q(\xi_t = 1+d|\mathscr{F}_{t-1})\frac{1+d}{1+r} = 1, \\
\Leftrightarrow \quad & Q(\xi_t = 1+u|\mathscr{F}_{t-1})\frac{1+u}{1+r} + (1 - Q(\xi_t = 1+u|\mathscr{F}_{t-1}))\frac{1+d}{1+r} = 1, \\
\Leftrightarrow \quad & Q(\xi_t = 1+u|\mathscr{F}_{t-1})\Big(\frac{1+u}{1+r} - \frac{1+d}{1+r}\Big) = 1 - \frac{1+d}{1+r}, \\
\Leftrightarrow \quad & Q(\xi_t = 1+u|\mathscr{F}_{t-1}) = \frac{r-d}{u-d}.
\end{aligned}$$

Wir lesen zunächst ab, dass $Q(\xi_t = 1+u|\mathscr{F}_{t-1})(\omega)$ deterministisch ist, also nicht von ω abhängen kann. Obwohl dies unter P der Fall sein kann, sind damit unter Q die (ξ_i) unabhängig und darüber hinaus identisch verteilt. Außerdem muss, um Äquivalenz zu erreichen

$$\frac{r-d}{u-d} \in (0,1)$$

gelten, also $d < r < u$. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, kann es kein äquivalentes Martingalmaß geben, also gibt es Arbitrage. Außerdem hatten □

3.2 Das Bachelier Modell

In der Dissertation ”Théorie de la Speculation” stellte Louis Bachelier bereits 1900 ein Modell für Aktienkurse vor. Es orientiert sich an der Brownschen Bewegung (und lässt negative Werte für den Aktienkurs zu). S^0 modellieren wir wie im vorigen Kapitel, aber dieses Mal ist

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \qquad t = 0, \dots, T$$

wobei W eine (diskrete) Brownsche Bewegung ist, das heisst

$$W_t = \sum_{i=1}^{t} \xi_i,$$

mit (ξ_i) i.i.d. und standardnormalverteilt. Ist dieses Modell frei von Arbitrage ?

3.3 Das (diskrete) Black-Scholes Modell

Die bahnbrechene Arbeit Black & Scholes (1973) verwendet statt der Brownschen Bewegung eine geometrische Brownsche Bewegung. Diese hat eine ähnliche multiplikative Struktur wie das CRR Modell, und garantiert positive Aktienkurse.

Wir nehmen an, dass

$$S_t = S_0 \prod_{i=1}^{t} e^{\eta_i},$$

mit

$$\eta_i = \tilde{\mu} + \sigma \Delta W_i = \tilde{\mu} + \sigma \xi,$$

wobei eben $\Delta W_t = W_t - W_{t-1} = \xi_t$ ist und W die obige disrekte Brownsche Bewegung. Ist dieses Modell frei von Arbitrage ? Konstruieren Sie ein Martingalmaß !

Wenn man den Erwartungswert von S_t ausrechnet, erhält man $\exp(\tilde{\mu}t + {}^1\!/\!_2\sigma^2 T)$. Aus diesem Grund verwendet man oft die Parametrisierung

$$S_t = S_0 \exp\Big(\mu t - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W_t\Big), \tag{6}$$

was wir im Folgenden als das *Black-Scholes Modell* bezeichnen werden.

4 Konvergenz gegen das Black-Scholes Modell

Wir betrachten die Zeitpunkte $0, \frac{T}{N}, \dots, \frac{NT}{N}$ und ein *Numéraire* für welches

$$\lim_{N\to\infty} (1 + r_N)^N = e^{rT} \tag{7}$$

gelte. Dies ist äquivalent dazu, dess $r_N N \longrightarrow rT$. Wir betten das Modell in das obige Gitter ein durch

$$S^N_{\frac{kT}{N}} = S_0 \prod_{i=1}^{k} (1 + \xi_i^N) \tag{8}$$

mit unabhängigen Zufallsvariablen $\xi_1^N, \xi_2^N, \dots$ Dazu nehmen wir lediglich an, dass

$$-1 < \alpha_N \leqslant \xi_i^N \leqslant \beta_N. \tag{9}$$

mit $\lim \alpha_N = \lim \beta_N = 0$ und, um NA zu erhalten, dass

$$E[\xi_i^N] = r_N. \tag{10}$$

Außerdem gelte

$$\sigma_N^2 := \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Var}(\xi_i^N) \to \sigma^2 \in (0, \infty). \tag{11}$$

Für den Beweis verwenden wir folgende Version des zentralen Grenzwertsatzes.

Theorem 4.1 (Zentraler Grenzwertsatz)**.** *Seien* $Y_1^N, \dots, Y_N^N$ *Zufallsvariablen auf* $(\Omega_n, \mathscr{F}_N, P_N)$*, so dass* $Y_1^N, \dots, Y_N^N$ *unabhängig sind und (jeweils für* $N \to \infty$*)*

(i) $\sum_{k=1}^N E_N[Y_k^N] \to \mu$,

(ii) $\sum_{k=1}^N \mathrm{Var}[Y_k^N] \to \sigma^2$,

(iii) Es gibt eine Nullfolge $(\gamma_n) \to 0$*, so dass* $P_N(|Y_k^N| \leqslant \gamma_N) = 1$ *für alle* $N \geq 1$.

Dann folgt, dass

$$\sum_{k=1}^N Y_k^N \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(\mu, \sigma^2).$$

Aus dem zentralen Grenzwertsatz erhalten wir dass die Logarithmen des Aktienkurses gegen eine Brownsche Bewegung konvergieren, der Aktienkurs als gegen eine geometrische Brownsche Bewegung.

Satz 4.2. *Unter* (7) - (11) *gilt*

$$S_T^N \xrightarrow[N\to\infty]{\mathscr{L}} S_0 \exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\xi\Big), \tag{12}$$

wobei $\xi \sim \mathscr{N}(0,1)$.

Beweis. Wir bezeichnen $Z^N := \log(\prod_{k=1}^N (1 + \xi_k^N))$. Aus der Taylorentwicklung erhalten wir, dass

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\rho(x),$$

wobei $\rho(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Aus Annahme (9) erhalten wir, dass

$$Z^N = \sum_{k=1}^N \Big(\xi_k^N - \frac{1}{2}(\xi_k^N)^2\Big) + \Delta_N$$

mit $|\Delta_N| \leqslant \delta(\alpha_N, \beta_N)\left(\sum_{k=1}^N (\xi_k^N)^2\right)$; hierbei ist $\delta(\alpha, \beta)$ eine Funktion so dass $\delta(\alpha, \beta) \to 0$ falls $\alpha, \beta \to 0$. Nun gilt

$$E[|\Delta_N|] \leqslant \delta(\alpha_N, \beta_N)\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^N \mathrm{Var}(\xi_k^N)}_{\to\sigma^2 T} + \sum_{k=1}^N (\underbrace{E[\xi_k^N]}_{=r_N})^2\Big) \overset{N\to\infty}{\to} 0.$$

Wir verifizieren die Annahmen für den Zentralen Grenzwertsatz: $Z'_N := \sum_{k=1}^N [\xi_k^N - \frac{1}{2}(\xi_k^N)^2]$

$$E[Z^N] = \sum_{k=1}^N (r_N - \frac{1}{2}(\mathrm{Var}(\xi_k^N) + (r_N)^2)) = Nr_N - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N \mathrm{Var}(\xi_k^N) + Nr_N^2 \overset{N\to\infty}{\to} rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

$$\mathrm{Var}[Z'_N] = \sum_{k=1}^N [\mathrm{Var}(\xi_k^N) + \frac{1}{4}\mathrm{Var}[(\xi_k^N)^2]) + 2\,\mathrm{Cov}[\xi_k^N, (\xi_k^N)^2)] \to \sigma^2 T,$$

da für jedes $p > 2$ $\sum_{k=1}^N E[(\xi_k^N)^p] \leqslant \gamma_N^{p-2} \sum_{k=1}^N E[(\xi_k^N)^2]$, da $|\xi_k^N| \leqslant \gamma_N = \max(|\alpha_N|, |\beta_N|)$. Weiterhin ist:

$$|\xi_k^N - \frac{1}{2}(\xi_k^N)^2| \leqslant \gamma_N + \frac{1}{2}\gamma_N^2.$$

und die Behauptung folgt aus Theorem 3. □

Schließlich fassen wir noch einige Beobachtungen zusammen.

Bemerkung 4.1. Es gilt:

(i) $\log \frac{S_T}{S_0} \sim \mathscr{N}((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$,

(ii) das Black-Scholes Modell ist frei von Arbitrage,

(iii) es gibt ein $Q \in \mathscr{M}_e$, > 0, so dass:
- (ξ_k) sind i.i.d. unter Q und
- $\log \frac{S_T}{S_0} \sim_Q \mathscr{N}((r - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$,

Beweis ÜA.

(iv) Es gibt beim dem Black Scholes Modell viele äquivalente Martingalmaße.

5 Europäische Optionen

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit europäischen Optionen (Call- und Put-Optionen). Da wir hier von einem verallgemeinerten Begriff einer Option ausgehen, nennt man diese manchmal auch (Europäische) bedingte Ansprüche.

Definition 5.1. Eine nicht-negative $\mathscr{F}_T$-messbare Zufallsvariable C heißt *europäische Option*. Sie heißt *Derivat*, falls sie messbar ist bezüglich $\sigma(S_t^i,\ 0 \leqslant i \leqslant d,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$.

B 1.3 *Europäischer Call und Put*: Die klassischen Beispiele sind der Europäische Call, das Recht eine Aktie S^k an T für den Preis K zu kaufen. Sie hat an T den Wert

$$(S_T^k - K)^+.$$

Das Verkaufsrecht heist Europäischer Put und hat analog den Wert $(K - S_T^k)^+$.

B 1.4 *Barrier-Optionen*: Eine *Barrier-Option* ist eine Option, deren Auszahlung davon abhängt, ob der Aktienkurs eine Barriere durchbrochen hat oder nicht:

- *Down-and-out*: $(S_T^k - K)^+ 1_{\{\min_{0 \leqslant i \leqslant T} S_i^k > B\}}$,
- *Down-and-out*: $(S_T^k - K)^+ 1_{\{\min_{0 \leqslant i \leqslant T} S_i^k > B\}}$,

Wir setzen $H := \frac{C}{S_T^0}$ für die diskontierte Anzahlung von der Europäischen Option C and T.

Definition 5.2. Die Europäische Option C heißt *replizierbar* oder *erreichbar*, falls eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\theta}$ gibt, so dass

$$C = \overline{\theta}_T \cdot \overline{S}_T, \quad P - \text{f.s.}$$

$\overline{\theta}$ heißt *Replikationsstrategie.*

Das ist äquivalent zur Replizierbarkeit in deskontierten Ausdrücken (H). Wir erhalten folgende Aussage.

Satz 5.3. *Sei H erreichbar. Dann ist*

(i) $E_Q[H] < \infty$*, für alle* $Q \in \mathscr{M}_e$*,*

(ii) für jeden Wertprozess V einer Replikationsstrategie gilt:

$$V_t = E_Q[H \mid \mathscr{F}_t] \quad \forall\, Q \in \mathscr{M}_e.$$

Man beachte, dass links und rechts sehr unterschiedliche Ausdrücke stehen: die linke Seite hängt nicht von Q ab, die rechte Seite hängt nicht von der Replikationsstrategie θ ab.

Beweis. Nach Satz 1.12 ist V ein Q-Martingal, also $V_0 < \infty$, und $V_0 = E_Q[H]$, somit folgt (i). Für (ii) beobachte man, dass $E_Q[H \mid \mathscr{F}_t]$ nicht von φ abhängt, aber

$$V_t = E_Q[V_T|\mathscr{F}_t] = E_Q[H|\mathscr{F}_t]$$

ist. □

Definition 5.4. Eine Zahl π heißt *arbitragefreier Preis von H*, falls es einen adaptierten stochastischen Prozess X^{d+1} gibt mit

(i) $X_0^{d+1} = \pi$,

(ii) $X_t^{d+1} \geqslant 0$, $t = 0, \ldots, T$,

(iii) $X_T^{d+1} = H$ P-f.s..

und der Markt $(X^1, \ldots, X^{d+1})$ arbitragefrei ist.

Wir bezeichnen die *Menge der arbitragefreien Preise* mit $\pi(H)$ und setzen

$$\pi_{\text{inf}}(H) := \inf \pi(H) \quad \textit{und} \quad \pi_{\text{sup}}(H) := \sup \pi(H).$$

Man beachte, dass π und somit $\pi(H)$ in Einheiten des Numéraires formuliert wurde.

Satz 5.5. *Es gelte (NA) und H sei eine Europäische Option. Dann ist $\pi(H) \neq \emptyset$ und $\pi(H) = \{E_Q[H] : \; Q \in \mathscr{M}_e\}$. Es folgt, dass*

$$\pi_{\text{inf}}(H) = \inf_{Q \in \mathcal{M}} E_Q[H] \quad \textit{und} \quad \pi_{\text{sup}}(H) = \sup_{Q \in \mathcal{M}} E_Q[H].$$

Beweis. (Zweiter Teil der Aussage) $\pi_{\text{inf}(H)} = \inf_{Q \in \mathscr{M}_e} E_Q[H]$ ist klar.
Für π_{sup} gehen wir wie folgt vor: **Ang.**: $Q^\infty \in \mathscr{M}_e$ und $E^\infty[H] = \infty$. Wir zeigen, dass für jedes $c > 0$ ein $\pi \in \pi(H)$ existiert, so dass $\pi > c$, also $\pi_{\text{sup}(H)} = \infty = \sup_{Q \in \mathscr{M}_e} E_Q[H]$. Wir wählen ein n, so dass $\pi' = E^\infty[H \wedge n] > c$ und setzen:

$$X_t^{d+1} := E^\infty[H \wedge n \mid \mathscr{F}_t].$$

Dann ist Q^∞ EMM zu $(X^1, \ldots, X^{d+1})$. Dieser Markt erfüllt also (NA). Dann können wir Q^∞ als P verwenden und erhalten durch das FTAP ein $Q \sim Q^\infty$, $Q \in \mathscr{M}_e$, was wir so wählen können, dass $E_Q[H] < \infty$. Dann ist: $\pi = E_Q[H] \in \pi(H)$ und es gilt:

$$\pi = E_Q[H] \geqslant E_Q[H \wedge n] = E_Q[X_T^{d+1}] = x_0^{d+1} = E^\infty[H \wedge n] = \pi' > c.$$

□

Satz 5.6. *Sei H diskontierte Europäische Option.*

(i) Ist H erreichbar, so ist $\pi(H) = \{V_0\}$ und $\{V_0\}$ ist der anfängliche Wert der Replikationsstrategie.

(ii) Ist H nicht erreichbar, so ist $\pi(H) = (\pi_{\inf(H)}, \pi_{\sup(H)})$.

Am Markt werden oft andere Einschränkungen als die NA Einschränkungen verwendet, z.B. sogenannte Good-Deal Bounds oder Statistical Arbitrages. (Wir suchen z.B. nach einer Klasse von W-Maßen, die uns dabei helfen soll, profitabel zu handeln).

B 1.5 *Die Black-Scholes-Formel*: Als das bekannteste Beispiel für die Bewertung einer Europäischen Option ist die berühmte Formal von Fisher Black und Myron Scholes zur Bewertung eines Europäischen Calls zu sehen. Ein Europäischer Call ist das Recht, die zugrundeliegende Aktie an dem zukünftigen Zeitpunkt T (Maturity, Maturität) zu dem vorab vereinbarten Preis K (Strike) zu kaufen.

Da es sich um ein Recht handelt, ist der Wert immer größer oder gleich null. Wir erhalten die Auszahlung an T

$$(S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\}.$$

Durch die risikoneutrale Bewertungsformel können wir einen Preis bestimmen. Nehmen wir also an, wir befinden uns im Kontext von (12), es gilt also unter einem äquivalenten Martingalmaß Q, dass

$$S_T = S_0 \exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T\Big),$$

mit $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$. Dann ist der Preis des Europäischen Calls gegeben durch

$$\pi^{\text{Call}} = E_Q[e^{-rT}(S_T - K)^+].$$

Diesen Erwartungswert können wir ausrechnen und erhalten

$$\pi^{\text{Call}} = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2), \qquad d_{1/2} = \frac{\log \frac{S_0}{Ke^{-rT}} \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma \sqrt{T}}. \tag{13}$$

Zur Berechnung gehen wir wie folgt vor: Wir definieren

$$\alpha := \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}, \quad \mu := \ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \quad \tilde{\sigma} := \sigma\sqrt{T},$$

und erhalten

$$\begin{aligned} E_Q[e^{-rT}(S_T - K)^+] &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - K)^+ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right) dx \\ &= \underbrace{\alpha \int_{\ln K}^{\infty} e^x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right) dx}_{=:I_1} - K \underbrace{\alpha \int_{\ln K}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right) dx}_{=:I_2}. \end{aligned}$$

Wir berechnen im folgenden das Integral I_1. Durch eine quadratische Ergänzung stellt man den Integranden als Produkt einer Normalverteilungsdichte und eines variablenfreien Korrekturterms dar. Der Integrand von I_1 hat die Form $\exp(\lambda(x))$ mit

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= x - \frac{(x-\mu)^2}{2\tilde{\sigma}^2} = -\frac{-2\tilde{\sigma}^2 x + x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\tilde{\sigma}^2} \\ &= -\frac{\Big(x - (\mu + \tilde{\sigma}^2)\Big)^2 + \Big(\mu^2 - (\mu+\tilde{\sigma}^2)^2\Big)}{2\tilde{\sigma}^2} \\ &= -\frac{\Big(x - (\ln S_0 + (r + \frac{\sigma^2}{2})T)\Big)^2}{2\sigma^2 T} + (\ln S_0 + rT),\end{aligned}$$

wobei man die letzte Gleichheit durch einsetzen von $\mu + \tilde{\sigma}^2 = \ln S_0 + (r + \frac{\sigma^2}{2})T$ und $\frac{(\mu+\tilde{\sigma}^2)^2 - \mu^2}{2\tilde{\sigma}^2} = \mu + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} = \ln S_0 + rT$ erhält. Unter Beachtung von $\alpha e^{\ln S_0 + rT} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} S_0$ folgt

$$I_1 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\ln K}^{\infty} \exp\left(- \frac{\Big(x - (\ln S_0 + (r + \frac{\sigma^2}{2})T)\Big)^2}{2\sigma^2 T} \right) dx. \tag{14}$$

Betrachten wir $\tilde{Z} \sim \mathscr{N}\Big(\ln S_0 + (r + \frac{\sigma^2}{2})T,\ \sigma^2 T\Big)$, dann ist $\frac{\tilde{Z} - \ln S_0 - (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ und Gleichung (14) lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} I_1 &= S_0\, Q(\tilde{Z} > \ln K) \\ &= S_0\, Q\bigg(\frac{\tilde{Z} - \ln S_0 - (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} > \frac{\ln K - \ln S_0 - (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \bigg) \\ &= S_0\, Q\bigg(\frac{\tilde{Z} - \ln S_0 - (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} > -d_1 \bigg) \\ &= S_0\Big(1 - \Phi(-d_1)\Big) = S_0 \Phi(d_1), \end{aligned}$$

wobei man die Symmetrieeigenschaft der Standardnormalverteilung ausnutzt. Die Berechnung von Integral I_2 geht analog, hier kann sogar auf die quadratische Ergänzung verzichtet werden.
»»»> 7b3fc9328eef457011fc66014acb80bcb3217677

6 Vollständige Märkte

Definition 6.1. Ein arbitrage-freier Markt heißt *vollständig*, falls jeder bedingte Anspruch erreichbar ist.

Satz 6.2. *Ein arbitrage-freier Finanzmarkt ist vollständig genau dann, wenn $\mathscr{M}_e = \{Q\}$.*

Beweis. Betrachten wir einen vollständingen Finanzmarkt. Ziel ist es zu zeigen, dass für zwei $Q, Q' \in \mathscr{M}_e$ gilt, dass $Q = Q'$. Dazu betrachten wir die Europäische Option $H = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathscr{F}_T$ gibt es nach Satz 5.3 oder Satz 5.6(i) einen eindeutigen (!) Preis an $t = 0$, so dass

$$V_0 = E_Q[\mathbb{1}_A] = E_{Q'}[\mathbb{1}_A].$$

Da $A \in \mathscr{F}_T$ beliebig war, gilt $Q = Q'$ (auf dem Messraum $(\Omega, \mathscr{F}_T)$).

Sei umgekehrt $\mathscr{M}_e = \{Q\}$, so ist $\pi(H) = \{E_Q[H]\}$, also H erreichbar nach Satz 5.6(ii). □

Man kann Vollständigkeit auch wie folgt charakterisieren: Mit $\mathscr{M}_e'$ bezeichnen wir die Menge aller Martingalmaße (ohne $Q \sim P$). Ein extremaler Punkt einer konvexen Menge ist ein solcher Punkt, der nicht als Konvexkombination von zwei anderen Punkten dargestellt werden kann.

Satz 6.3. *Für $Q \in \mathscr{M}_e$ sind äquivalent:*

(i) $\mathscr{M}_e = \{Q\}$,

(ii) *Q ist extremaler Punkt von $\mathscr{M}_e$,*

(iii) *Q ist extremaler Punkt von $\mathscr{M}_e'$,*

(iv) *Jedes Q-Martingal ist von der Form $M = M_0 + \sum_{t=1} \theta_t (X_t - X_{t-1})$.*

Sowohl $\mathscr{M}$ als auch $\mathscr{M}'$ sind konvex. Extremele Punkte einer konvexen Punkte lassen sich nicht als nichttriviale Konvexkombination darstellen.

Beweis. Wir zeigen zunächst (i)⇒(iii): Angenommen $Q = \alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2$ mit $Q_1, Q_2 \in \mathscr{M}'$, $\alpha \in (0,1)$. Dann folgt aus $Q \sim P$, dass $Q_1 \ll P$ und $Q_2 \ll P$. Um (i) auszunutzen benötigen wir allerdings Äquivalenz. Dazu setzen wir

$$Q_i' = \frac{1}{2}(Q_i + Q), \qquad i = 1, 2,$$

so dass $Q_i' \sim P$. Dann ist aber Q_i' ein äquivalentes Martingalmaß, also nach (i) $Q_1' = Q_2' = Q$ und somit $Q_1 = Q_2 = Q$.

Die Implikation (iii)⇒(ii) ist klar.

Als nächstes zeigen wir (ii)⇒(i). Dazunehmen wir an es gebe $Q' \in \mathscr{M}_e$ mit $Q' \neq Q$. Wir zeigen gleich, dass wir $\frac{dQ'}{dQ}$ als beschränkt annehmen können, etwa durch die Konstante c. Für $0 < \varepsilon < \frac{1}{c}$ ist mit

$$\frac{dQ''}{dQ} := 1 + \varepsilon - \varepsilon \frac{dQ'}{dQ}$$

$Q'' \in \mathscr{M}_e$ und
$$Q = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} Q' + \frac{1}{\varepsilon} Q''$$
womit Q nicht extremal sein kann.

Für die Beschränktheit möchten wir das FTAP nutzen. Da $Q \neq Q'$, gibt es ein $A \in \mathscr{F}_T$, so dass $Q(A) \neq Q'(A)$. Wir fügen dem Markt das Wertpapier
$$X_t^{d+1} := Q'(A|\mathscr{F}_t), \qquad t = 0, \dots, T$$
hinzu und betrachten Q als Referenzmaß. Dann ist Q' ein äquivalentes Martingalmaß für den erweiterten Markt, also gibt es nach dem Hauptsatz ein Q'' mit beschränkter Dichte $\frac{dQ''}{dQ}$. Außerdem ist $Q'' \neq Q$, da Q kein Martingalmaß für X^{d+1} ist.

Wir fahren fort mit (i)⇒(iv). Nun haben wir einen vollständigen Markt wodurch jeder bedingte Anspruch replizierbar. Damit kann man das zugehörige Q-Martingal durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie und damit wie in (iv) darstellen. Die einzige Schwierigkeit ist, dass Europäische Optionen in unserer Defintion stets ≥ 0 sind. Wir zerlegen geeignet $M_T = M_T^+ - M_T^-$. Dann sind M_T^+ und M_T^- Europäische Optionen, also replizierbar und wir finden die zugehörigen selbstfinanzierenden Handelsstrategien, so dass
$$M_T^{\pm} = V_0^{\pm} + \sum_{t=1}^{T} H_t^{\pm} (X_t - X_{t-1})$$
mit konstanten $V_0^{\pm}$. Wir erhalten die gewünschte Darstellung durch Addition.

Schließlich zeigen wir (iv)⇒(i). Betrachten wir die Europäische Option $\mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathscr{F}_T$ mit zugehöriger Darstellung
$$M_t = E_Q[\mathbb{1}_A|\mathscr{F}_t].$$
Damit ist $\mathbb{1}_A$ erreichbar mit eindeutigem Preis $Q(A) = Q'(A)$ für $Q, Q' \in \mathscr{M}_e$ und wir erhalten (i). □

7 Amerikanische Optionen

Amerikanische Optionen erlauben es dem Käufer an jedem beliebigen Zeitpunkt bis zur Maturität der Option diese auszuüben und sind deswegen deutlich komplexer. Wir werden diesen Abschnitt nutzen um einen kurzen Einblick in die einfachste Form der stochastischen Kontrolle, des optimalen Stoppens, zu gewinnen.

7.1 Verkäufer-Sicht

Wir betrachten nun stets einen diskreten Zeithorizont, also die Zeitpunkte $n = 1, 2, \ldots$ Dazu arbeiten wir auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}_T, (\mathscr{F}_t)_{t=0,\ldots,T}, P)$.
Zunächst wiederholen wir einige Konzepte in diskreter Zeit.

Satz 7.1. *Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ und Y ein adaptierter Prozess, so dass $E[|Y_t|] < \infty$, $t = 0, \ldots, T$. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung*

$$Y = M - A \tag{Doob-Zerlegung}$$

mit einem $\mathbb{Q}$-Martingal M und einem vorhersehbaren Prozess A mit $A_0 = 0$.

Beweis. Wir setzen

$$A_t - A_{t-1} := -E_Q[Y_t - Y_{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}], \quad t = 1, \ldots, T$$

Dann ist A vorhersehbar und Y, definiert durch $Y_t + A_t =: M_t$ ist Martingal:

$$E_Q[M_t \mid \mathscr{F}_{t-1}] = Y_{t-1} + A_{t-1} + E_Q[Y_t - Y_{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}] - E[Y_t - Y_{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}]$$ □

Definition 7.2. Eine amerikanische Option ist ein nicht-negativer adaptierter Prozess $C = (C_t)_{t=0,\ldots,T}$.

Hier interpretieren wir C_t als die Auszahlung zum Zeitpunkt t, falls wir ausüben.

B 1.6 *Europäische Optionen*: Eine europäische Option auf die Aktie S mit Ausübungszeitpunkt T ist auch eine amerikanische Option (im Sinne unserer Definition):

$$C_T = (S_T - K)^+ \quad \text{und} \quad C_t = 0, \quad t = 0, \ldots, T-1$$

Ein amerikanischer Call zahlt

$$C_t = (S_t - K)^+, \quad t = 0, \ldots, T$$

und ein amerikanischer Put

$$P_t = (K - S_t)^+, \quad t = 0, \dots, T.$$

Bemerkenswert ist hierbei, dass $P \leq K$ ist, also beschränkt.

B 1.7 *Bermuda Option*: Eine **Bermuda Option** erlaubt die Ausübung nur an einer Teilmenge $\mathscr{T} \subseteq \{0, \dots, T\}$ von Zeitpunkten.

Definition 7.3. Eine Ausübungsstrategie für die amerikanische Option C ist eine $\mathscr{F}_T$-messbare Zufallsvariable τ mit Werten in $\{0, \dots, T\}$. Die Auszahlung ist

$$C_\tau(\omega) := C_{\tau(\omega)}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Hierbei nehmen wir die Sicht des Verkäufers ein: Wir wissen nicht, auf welche Informationen der Käufer zugreifen kann und somit ist die Ausübungsstrategie aus Sicht des Verkäufers eine *beliebige* zufällige Zeit (und das ist genau die Definition).

Wir betrachten einen d-dimensionalen Aktienmarkt, also sei $S = (S^0, \dots, S^d)$ ein $d+1$-dimensionaler adaptierter Prozess mit

$$\begin{aligned} &S_t^0 > 0 \\ &S_t^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, d; t = 0, \dots, T \end{aligned}$$

Wir definieren

$$H_t := \frac{C_t}{S_t^0}, \quad t = 0, \dots, T$$

als Prozess der diskontierten Auszahlungen. Wir nehmen an, dass

$$\mathscr{M}_e = \{Q\}, \tag{A1}$$

es also lediglich ein äquivalentes Maß Q gibt (Vollständigkeit).

Welche Anforderungen an eine Absicherungsstrategie U möchten wir stellen? Zunächst fordern wir $U_t \geq H_t$, denn der Käufer kann jederzeit ausüben und der Verkäufer muss stets genügend Kapital zur Deckung vorrätig haben. Außerderm fordern wir, dass $U_T = H_T$ (und nicht etwa $U_T \geq H_T$); der Preis soll keinesfalls zu hoch sein. Durch die zweite Bedingung und die Annahme (A1) bietet sich die Möglichkeit zur Replikation: An $T-1$ fordern wir

(i) $U_{T-1} \geq H_{T-1}$

(ii) $U_{T_1} \geq E_Q[U_T \mid \mathscr{F}_{T-1}] \quad \Leftarrow$ damit können wir $U_T = H_T$ sicher erreichen.

Wir erhalten folgende Rekursion:

Definition 7.4. Der Prozess U gegeben durch

$$U_T = H_T$$
$$U_t = \max\{H_t, E_Q[U_{t+1} \mid \mathscr{F}_t]\}, \quad t = 0, \ldots, T-1$$

heißt **Snellsche Einhüllende** von H.

B 1.8 *Europäische Option und ihre Snellsche Einhüllende*: Sei H eine europäische Option, so dass $H_t = 0$, für $t = 0, \ldots, T-1$. Dann ist die Snellsche Einhüllende gerade

$$U_t = E_Q[H_T \mid \mathscr{F}_t] = E_Q\Big[\frac{C_T}{S_T^0} \mid \mathscr{F}_t\Big],$$

so dass wir durch $C_t U_t$ die übliche Replikationsstrategie erhalten.

Natürlich kann man die Snellsche Einhüllende für jedes Maß P' mit

$$E_{P'}[|H_t|] < \infty, \quad t = 0, \ldots, T \tag{A2}$$

definieren.

Satz 7.5. *Sei P' ein Maß, so dass (A2) gilt. Dann ist die Snellsche Einhüllende $U = U^{P'}$ von H das kleinste Supermartingal, welches H dominiert.*

Beweis. Wir müssen also zeigen: Ist U' Supermartingal mit $U'_t \geq H_t$, $t = 0, \ldots, T$, so folgt $U' \geq U$. Zunächst gilt für U, dass

$$U_{t-1} \geq E_{P'}[U_t \mid \mathscr{F}_{t-1}],$$

so dass U ein Supermartingal ist. Für U' erhalten wir

$$U'_T \geq H_T = U_T.$$

Nun verwenden wir eine Induktion: Gilt $U'_t \geq U_t$ so erhalten wir

$$U'_{t-1} \geq E_Q[U'_t \mid \mathscr{F}_{t-1}] \geq E_Q[U_t \mid \mathscr{F}_{t-1}].$$

Außerdem gilt auch $U'_{t-1} \geq H_{t-1}$, so dass

$$U'_{t-1} \geq \max\{H_{t-1}, E_Q[U_t \mid \mathscr{F}_{t-1}]\} = U_{t-1}$$

folgt. $\square$

Mit der Doob-Meyer-Zerlegung schaffen wir es zu einer Super-Replikationsstrategie

$$U_t = M_t - A_t, \quad t = 0, \ldots, T.$$

Hierbei ist M ein Q-Martingal, also

$$M_t = U_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \Delta X_k \quad \text{mit } X_k^i = \frac{S_k^i}{S_k^0}$$

nach dem Martingaldarstellungssatz. Somit gilt

$$M_t \geq U_t \geq H_t.$$

Mit einer zusätzlichen Komponente ξ^0 können wir ξ zu einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie erweitern, so dass $V_t^\xi \geq H_t$ für alle $t \geq 0$.

Theorem 7.6. *Unter (A1) existiert ein d-dimensionaler vorhersehbarer Prozess ξ, so dass*

$$U_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k \Delta X_k \geq H_t \quad \textit{für alle } 1 \leq t \leq T. \tag{15}$$

Hierbei ist U minimal.

Beweis. Die Snellsche Einhüllende erfüllt (15) wie gerade erläutert. Es bleibt die Minimalität zu zeigen. Sei also $\widetilde{U}$, $\widetilde{\xi}$ so dass

$$\widetilde{V}_t := \sum_{k=t}^{t} \widetilde{\xi}_g \Delta X_k \geq H_t \quad \forall t.$$

Wir zeigen $\widetilde{V} \geq V$ mit (Rückwärts-)Induktion. Zunächst ist $\widetilde{V}_T \geq H_T = U_T$. Angenommen $\widetilde{V}_{t+1} \geq U_{t+1}$. Dann ist

$$E_Q[\widetilde{V}_{t+1} - \widetilde{V}_t \mid \mathscr{F}_t] = E_Q[\widetilde{\xi}_{t+1} \Delta X_{t+1} \mid \mathscr{F}_t] = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Somit folgt

$$\widetilde{V}_t = E_Q[V_{t+1} \mid \mathscr{F}_t] \geq H_t \vee E_Q[U_{t+1} \mid \mathscr{F}_t] = U_t.$$

□

7.2 Käufer-Sicht

Nun betrachten wir die amerikanische Option aus Käufer-Sicht. Der Käufer hat die Filtration $\mathbb{F}$ zur Verfügung und sucht eine optimale Strategie gegeben dieser Information.

Definition 7.7. Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to \{0, 1, \ldots, T\} \cup \{+\infty\}$ heißt **Stoppzeit**, falls $\{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$ für $t = 0, \ldots, T$.

- Die konstante Zeit $\tau \equiv t$ ist eine Stoppzeit für alle $t \in \{0, \ldots, T\} \cup \{\infty\}$.
- τ ist Stoppzeit genau dann, wenn $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ für $t = 0, \ldots, T$.
- Außerdem sind $\tau \wedge \sigma$, $\tau \vee \sigma$, $(\tau + \sigma) \wedge T$ wieder Stoppzeiten.

B 1.9 *Ersteintrittszeit*: Ein typisches Beispiel einer Stoppzeit ist

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq c\}$$

mit der Konvention $\inf \emptyset = \infty$. Wir erhalten

$$\{\tau \leq t\} = \bigcup_{s=0}^{t} \{X_s \geq c\} \in \mathscr{F}_t,$$

also ist τ in der Tat eine Stoppzeit.

Für eine Stoppzeit τ und einen stochastischen Prozess X definieren wir den an τ gestoppten Prozess X^τ durch

$$X_t^\tau := X - t \wedge \tau \quad t = 0, \ldots, T.$$

Für das folgende Resultat nehmen wir $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, T\}$ an.

Theorem 7.8 (Doobs optional sampling theorem)**.** *Sei M adaptiert, so dass $M_t \in L^1(Q)$, $f = 0, \ldots, T$. Dann sind äquivalent:*

(i) M ist Q-Martingal

(ii) Für alle Stoppzeiten τ ist M^τ Q-Martingal

(iii) $E_Q[M_{t\wedge\tau}] = M_0$ für alle Stoppzeiten τ.

Beweis.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Wir berechnen die Martingaleigenschaft von M^τ:

$$\begin{aligned} E_Q[M^\tau_{t+1} - M^\tau_t \mid \mathscr{F}_t] &= E_Q[(M_{t+1} - M_t)\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \mid \mathscr{F}_t] \\ &= M_t\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} - M_t\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} = 0. \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ klar

$(iii) \Rightarrow (i)$ Wir müssen zeigen, dass

$$\begin{aligned} & E_Q[M_t \mid \mathscr{F}_{t-1}] = M_{t-1}, \\ \iff \quad & E_Q[M_t\mathbb{1}_F] = E_Q[M_{t-1}\mathbb{1}_F] \quad \forall F \in \mathscr{F}_{t-1} \end{aligned}$$

Wir definieren $\tau = \begin{cases} t & \omega \in F \\ t-1 & \omega \notin F \end{cases}$

Dann ist

$$E_Q[M_{T\wedge t}] = E_Q[M_t\mathbb{1}_F + M_{t-1}\mathbb{1}_{\bar{F}}] = M_0$$

und

$$E_Q[M_{t-1}] = E_Q[M_{t-1}\mathbb{1}_F + M_{t-1}\mathbb{1}_{\widetilde{F}}] = M_0$$

Hieraus erhalten wir, dass

$$E_Q[M_t\mathbb{1}_F] = E_Q[M_{t-1}\mathbb{1}_F]$$ □

Wir erhalten analog: M ist ein Q-Super-/Submartingal $\Leftrightarrow$ M^τ ist Q Super-/Submartingal für alle Stoppzeiten τ.

Der Käufer sucht eine optimale Strategie. Da er nur $(\mathscr{F}_t)$ zur Verfügung hat, sind die möglichen Strategien (Stoppzeiten) gegeben durch

$$\mathscr{T} := \{\tau : \tau \text{ ist Stoppzeit und } \tau \leq T\}.$$

Das Ziel:

$$\text{Maximiere } E_P[H_\tau], \quad \tau \in \mathscr{T}. \tag{16}$$

Dies nennt man ein **optimales Stopp-Problem**.

Die Analyse dieses Problems benötigt keine Voraussetzungen (wie etwa NA), wir lassen $H \geq 0$ gelten und nehmen lediglich an, dass

$$H_t \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_t, P) \quad t = 0, \dots, T \tag{17}$$

B 1.10 *Expected Utility Maximization*: Oft wird in den Anwendungen nicht H_t sondern

$$E_P[u(H_\tau)]$$

maximiert, mit einer **Nutzenfunktion** u (etwa x^k, $\log x$).

Wir konstruieren die Snellsche Einhüllende $U = U^P$ von H:

$$\begin{aligned} U_T &= H_T \\ U_t &= \max\{H_t, E[U_{t+1} \mid \mathscr{F}_t]\} \quad t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \tau_{\min} &:= \min\{s \geq 0 : \ U_s = H_s\} \\ \tau_{\min}(t) &:= \min\{s \geq t : \ U_s = H_s\} \text{ und } \mathscr{T}_t := \{\tau \in \mathscr{T} : \tau \geq t\} \end{aligned}$$

(dann ist $\tau_{\min} \leq T$).

Wir führen noch das essentielle Supremum ein. Sei Φ eine beliebige Menge von Zufallsvariablen. Dann gibt es eine Zufallsvariable φ^*, so dass

$$\varphi^* \geq \varphi \quad P\text{-f.s. } \forall \varphi \in \Phi.$$

Dies Zufallsvariable ist eindeutig in dem folgenden Sinn: Gilt $\eta \geq \varphi \ \forall \varphi \in \Phi$, so folgt $\eta \leq \varphi^*$ P-f.s. Wir nennen φ^* das essentielle Supremum von Φ und schreiben

$$\varphi^* := \operatorname{ess\,sup} \Phi = \operatorname*{ess\,sup}_{\varphi \in \Phi} \varphi.$$

Theorem 7.9. *Für die Snellsche Einhüllende U gilt, dass für alle $0 \leq t \leq T$,*

$$U_t = E[H_{\tau_{\min}}(t) \mid \mathscr{F}_t] = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathscr{T}_t} E[H_\tau \mid \mathscr{F}_t]$$

Beweis. Zunächst ist U ein Supermartingal, so dass

$$U_t \geq E[U_\tau \mid \mathscr{F}_t] \geq E[H_\tau \mid \mathscr{F}_t],$$

für alle $\tau \in \mathscr{T}_t$. Dann folgt

$$U_t \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathscr{T}_t} E[H_\tau \mid \mathscr{F}_t].$$

Wir zeigen, dass

$$U_t = E[U_{\tau_{\min}}(t) \mid \mathscr{F}_t] = E[H_{\tau_{\min}}(t) \mid \mathscr{F}_t] :$$

Die zentrale Beobachtung ist, dass

$$\begin{aligned} \text{auf } \{\tau_{\min}(t) > s\} \quad &\text{gilt} \quad U_{\tau_{\min}(t)\wedge s} = U_s > H_S \\ \{\tau_{\min}(t) \leq s\} \quad &\text{gilt} \quad U_{\tau_{\min}(t)\wedge s+1} = U_{\tau_{\min}(t)\wedge s} = U_{T_{\min}(t)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ auf $\{\tau_{\min}(t) > s\}$ ist

$$\begin{aligned} U_{\tau_{\min}(t)\wedge s} = U_s \quad &= \quad H_s \vee E[U_{s+1} \mid \mathscr{F}_s] \\ &\overset{U_s \geq H_s}{=} E[U_{s+1} \mid \mathscr{F}_s] = E[U_{\tau_{\min}}(t) \wedge s + 1 \mid \mathscr{F}_s] \end{aligned}$$

auf $\{\tau_{\min}(t) \leq s\}$ ist

$$U_{\tau_{\min}(t)\wedge s} = U_{\tau_{\min}(t)\wedge s+1} = E[U_{\tau_{\min}(t)\wedge s+1} \mid \mathscr{F}_s],$$

also ist $(U_{tau_{\min}(t)\wedge s})_s$ ein Martingal! Somit gilt

$$U_t = U_{\tau_{\min}(t)\wedge t} = E[U_{\tau_{\min}(t)\wedge T} \mid \mathscr{F}_t] = E[U_{\tau_{\min}(t)} \mid \mathscr{F}_t] \qquad \square$$

Definition 7.10. Wir nennen eine Stoppzeit $\tau^* \in \mathscr{T}$ **optimal**, falls

$$E[H_{\tau^*}] = \sup_{\tau\in\mathscr{T}} E[H_\tau].$$

Satz 7.11. *Eine Stoppzeit $\tau \in \mathscr{T}$ ist optimal genau dann, wenn*

(i) $U_\tau = H_\tau$

(ii) U^T ist ein Martingal.

Dies heißt automatisch, dass $\tau^* \geq \tau_{\min}$!

Beweis. Nach Theorem 7.9 ist

$$\sup_{\tau\in\mathscr{T}} E[H_\tau] = U_0. \tag{18}$$

Gilt also (i) und (ii), so folgt

$$U_0 = E[U_T^\tau] = E[U_\tau] = E[H_\tau] \overset{(18)}{=} \sup_{\tau\in\mathscr{T}} E[H_\tau],$$

also ist τ optimal.

Ist umgekehrt τ optimal, so folgt

$$U_0 = E[H_\tau] \leq E[U_\tau]. \tag{19}$$

Allerdings ist U^τ ein Supermartingal. $E[U_{\tau \wedge T}] = E[U_\tau] \leq E[U_{\tau \wedge 0}] = U_0$ und wir erhalten Gleichheit in (19). Da $H_t \leq U_t$ gilt, folgt $H_\tau = U_\tau$ f.s., also (i).

Weiterhin gilt für das Supermartingal U^τ, dass

$$U_0 = E[U_T^\tau] = E[U_0^\tau],$$

also muss U^τ sogar ein Martingal sein. □

Wir definieren

$$\tau_{\max} = \inf\{t \geq 0 : E[U_{t+1} - U_t \mid \mathscr{F}_t] \neq 0\} \wedge T.$$

Satz 7.12. *Eine Stoppzeit ist optimal genau dann, wenn*

(i) $\tau \leq \tau_{\max}$

(ii) $U_\tau = H_\tau$

Beweis. Sei $U = M - A$ die Doob-Zerlegung von U. Dann ist (ÜA) $U^\tau = M^\tau - A^\tau$ die Doob-Zerlegung von U^τ. U^τ ist genau dann ein Martingal, wenn $A_\tau = 0$ ist (A wachsend).

Nun ist

$$E[U_{t+1} - U_t \mid \mathscr{F}_t] \neq 0 \Leftrightarrow A_{t+1} \neq 0,$$

also ist U^τ genau dann ein Martingal, wenn $\tau \leq \tau_{\max}$.

Wir zeigen noch, dass $\tau_{\max}$ optimal ist: ($U_{\tau_{\max}} = H_{\tau_{\max}}$). Das ist klar für $\tau_{\max} = T$. Auf $\{\tau_{\max} = t\}$, $t < T$ gilt

$$A_t = 0, \quad A_{t+1} > 0,$$

also $U_t > E[U_{t+1} \mid \mathscr{F}_t]$, woraus $U_t = H_t$ folgt. □

Wir betrachten im Folgenden wieder den vollständigen Finanzmarkt,

$$M_t = \{Q\}.$$

Satz 7.13. *Sei U die Q-Snellsche Einhüllende der amerikanischen Option H mit Doob-Zerlegung*

$$U = M - A.$$

Dann ist

$$H_\tau \leq M_\tau$$

und Gleichheit gilt genau dann, falls τ Q-optimal ist.

Nach der Martingaldarstellung in vollständigen Märkten ist

$$M_t = U_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \Delta X_k$$

mit einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie ξ.

Beweis. Für jede zufällige Zeit τ ist

$$H_\tau \leq U_\tau = M_\tau - A_\tau \leq M_\tau.$$

Nun ist $M_\tau = H_\tau$ äquivalent zu $H_\tau = U_\tau$ und $A_\tau = 0$. Das ist äquivalent zu $H_\tau = U_\tau$ und U^τ Martingal, was nach Satz 7.11 äquivalent ist zu τ Q-optimal. □

Wir möchten im Folgenden den amerikanischen Anspruch mit

$$V_t = E_P[H_T \mid \mathscr{F}_t]$$

vergleichen. Eine amerikanische Option sollte teurer sein als die Europäische:

Satz 7.14. *Es gilt $U^Q \geq V$. Ist $V \geq H$, so gilt $U^Q = V$.*

Beweis. Aus der Supermartingaleigenschaft von U^Q folgt sofort

$$U_t^Q \geq E_Q[U_T^Q \mid \mathscr{F}_t] = E_Q[H_T \mid \mathscr{F}_t] \geq V_t.$$

Gilt $V \geq H$, so folgt nach Satz 7.5 $V \geq U^Q$ (U^Q ist das kleinste Supermartingal, das H dominiert), also $V = U$. □

B 1.11 *Amerikanischer Call*: Für $C_T = (S_T - K)_t$ erhalten wir

$$H_t = \Big(X_t - \frac{K}{S_t^0}\Big)_t.$$

Sei S^0 vorhersehbar wachsend (Bank account), so folgt ($|X|_+$ konvex)

$$\begin{aligned} E_Q[H_{t+1} \mid \mathscr{F}_t] &\geq \Big(E_Q\Big[X_{t+1} - \frac{K}{S_{t+1}} \mid \mathscr{F}_t\Big]\Big)_+ \\ &\geq \Big(X_t - \frac{K}{S_t}\Big)_+ = H_t, \end{aligned}$$

so dass H ein Submartingal ist. In diesem Fall ist $H = V$, und $U_0 = V_0 \Rightarrow$ der Preis des amerikanischen Calls ist gleich dem Preis des europäischen Calls.

II Arbitrage in Insurance

Basierend auf der Arbeit von Artzner, Eisele und Schmidt (2020) soll in diesem Abschnitt Arbitrage im Rahmen von fondsgebundenen Versicherungen und verwandten Instrument besprochen werden.

Ziel ist es etwa Equity-Linked Versicherungen oder Variable Annuitäten zu bewerten. Der grundlegende Unterschied zum Finanzmarkt ist, dass wichtige Größen nicht gehandelt werden oder gar nicht der Allgemeinheit zur Verfügung stehen. Das zentrale Hilfsmittel wird demnach die Nutzung von zwei unterschiedlichen Filtrationen sein.

1 Die Bayes-Regel

Haben wir zwei äquivalente Maße Q und P auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{G})$ mit $dQ = LdP$, so gilt folgender Satz.

Satz 1.1. *Gilt $dQ = LdP$ und $E_P[L|\mathscr{F}] > 0$, so folgt für jede Zufallsvariable $X \geq 0$, dass*

$$E_Q[X|\mathscr{F}] = \frac{E_P[LX|\ \mathscr{F}]}{E_P[L|\mathscr{F}]}, \qquad P\text{-}f.s. \tag{1}$$

Beweis. Wir zeigen etwas allgemeiner, dass

$$\int_F E_Q[X|\mathscr{F}] \cdot E_P[L|\mathscr{F}] dP = \int_F E_P[LX|\ \mathscr{F}] = \int_F X dQ. \tag{2}$$

Dazu betrachten wir die linke Seite und erhalten, dass

$$\begin{aligned}(2) &= \int_F E_Q[X|\mathscr{F}] \cdot E_P[L|\mathscr{F}] dP \\ &= \int_F E_P\Big[L E_Q[X|\mathscr{F}]|\mathscr{F}\Big] dP \\ &= \int_F L E_Q[X|\mathscr{F}] dP \\ &= \int_F X dQ.\end{aligned}$$

□

2 Die Bewertung von nicht gehandelten Ansprüchen

Im ersten Abschnitt befassen wir uns ganz allgemein mit der Bewertung von bedingten Ansprüchen, die nicht gehandelt werden. Wir gehen dazu von zwei Maßen aus: Dem Maß P (das statistische Maß) und einem äquivalenten Maß Q. Allerdings werden sie nicht auf den gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sein, was wir nun einführen.

Sei $(\Omega, \mathscr{G}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ eine σ-Algebra. Die Information $\mathscr{G}$ steht lediglich der Versicherung zur Verfügung, während $\mathscr{F}$ die auf dem Finanzmarkt allgemein zugängliche Information ist.

Satz 2.1. *Sei $Q \sim P|_{\mathscr{F}}$. Dann gibt es ein eindeutiges Maß $\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathscr{G})$, so dass*

(i) $\mathbb{Q} \odot \mathbb{P} = Q$ auf $\mathscr{F}$ und

(ii) für alle $G \in \mathscr{G}$ gilt, dass $\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}(G|\mathscr{F}) = P(G|\mathscr{F})$

Zunächst sagt Eigenschaft (i), dass $\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}$ mit Q (dem risikoneutralen Maß) auf Basis der allgemeinen Informationen übereinstimmt. Die Eigenschaft (ii) sagt, dass *bedingt* auf die allgemeine Information das Maß $\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}$ sich verählt wie P. Hat man alle öffentlich zur Verfügung stehenden Informationen (am Handelshorizont, etwa an der Maturität) werden alle weiteren Informationen wie mit P bewertet (und eben nicht mehr mit Q).

Der Satz hat noch einen zweiten Teil, der diese Aussagen auf die Ebene der Erwartungswerte hebt.

Satz 2.2. *Sei wieder $Q \sim P|_{\mathscr{F}}$. Das Maß $\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}$ erfüllt für jede Zufallsvariable $X \geq 0$, dass*

(i) für jede σ-Algebra $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ gilt:

$$E_{\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}}[X|\mathscr{H}] = E_Q[E_P[X|\mathscr{F}]|\mathscr{H}],$$

(ii) für jede σ-algebra $\mathscr{H}$ mit $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{G}$,

$$E_{\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}}[X|\mathscr{H}] = E_P[X|\mathscr{H}].$$

Beweis. Den zweiten Teil des Satzes beweist man mit Approximation durch Elementarfunktionen (siehe Wahrscheinlichkeitstheorie). Wir konzentrieren uns zunächst auf den ersten Teil des Satzes.

Zunächst ist $Q \sim P|_{\mathscr{F}}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$, nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert also eine $\mathscr{F}$-messbare Dichte L, so dass $dQ = LdP$. Wir definieren $\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}$ durch

$$d(\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}) = LdP.$$

Wir erhalten, dass $\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}(G) = E_P[\mathbb{1}_G L]$. Dann gilt nach Konstruktion (i), denn

$$\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}(F) = \int_F LdP = \int_F dQ = Q(F)$$

für alle $F \in \mathscr{F}$.

Für jedes $G \in \mathscr{G}$ haben wir, dass

$$\begin{aligned} \int_F \mathbb{1}_G d(\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}) &= \int_F \mathbb{1}_G LdP = \int_F LP(G|\mathscr{F})dP \\ &= \int_F P(G|\mathscr{F}) d(\mathbb{Q} \odot \mathbb{P}), \qquad F \in \mathscr{F}, \end{aligned} \tag{3}$$

so dass $\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}(G|\mathscr{F}) = P(G|\mathscr{F})$.

Für den zweiten Teil betrachten wir zuerst $H \in \mathscr{H} \subset \mathscr{F}$, also $H \in \mathscr{F}$. Dann gilt analog zu (3), dass $\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}(G|\mathscr{H}) = P(G|\mathscr{H})$. Verwenden wir $H = \Omega$ erhalten wir

$$\int \mathbb{1}_G d(\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}) = \int LP(G|\mathscr{H})dP = \int P(G|\mathscr{H})dQ \tag{4}$$

und Teil (i) folgt durch monotone Approximation von X mit Indikatorfunktionen.

Für die Eindeutigkeit betrachten wir ein zweites Maß R', so dass (i) und (ii) von Satz **??** erfüllt sind. Dann gilt für jedes $G \in \mathscr{G}$, dass

$$R'(G) = \int R'(G|\mathscr{F})dR' \overset{(ii)}{=} \int P(G|\mathscr{F})dR' \overset{(i)}{=} \int P(G|\mathscr{F})dQ = \mathbb{Q}\odot\mathbb{P}(G) \tag{5}$$

und somit $\mathbb{Q}\odot\mathbb{P} = R$.

Schließlich, nutzen wir die Bayes-Regel um (ii) zu zeigen. Damit gilt, dass wegen $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{G}$

$$E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}[X|\mathscr{H}] = \frac{E_P[L_T X|\ \mathscr{H}]}{E_P[L_T|\ \mathscr{H}]} = E_P[X|\mathscr{H}],$$

da L_T $\mathscr{F}$-messbar und somit auch $\mathscr{H}$-messbar ist ($E_P[L_T|\ \mathscr{H}] > 0$ folgt aus der Äquivalenz von $P|_{\mathscr{F}}$ und Q).

□

In der typischen Anwendung wird man mit zwei Filtrationen $\mathbb{G} = (\mathscr{G}_t)_{t=0,\dots,T}$ und $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ zu tun haben, für welche gilt, dass

$$\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{G}_t, \qquad t = 0,\dots,T.$$

Die Bewertung einer Versicherung wird mit Hilfe der so genannten *QP-Regel* berechnet durch den Erwartungswert der diskontierten, auf den Endzeitpunkt T kumulierten Auszahlungen unter dem Maß $\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}$. Aus Satz 2.2 folgt hierzu, dass für $X \geq 0$

$$E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}[X|\mathscr{F}_t] = E_Q\Big[\, E_P[X|\mathscr{F}_T]\,|\mathscr{F}_t]. \tag{6}$$

Hieraus erklärt sich der Name QP-Regel: Zunächst wird auf den Zustand des Finanzmarktes zum Endzeitpunkt T bedingt und die Auszahlung der Versicherung unter P gemittelt (durch den Erwartungswert). Das Ergebnis, $E_P[X|\mathscr{F}_T]$ ist eine $\mathscr{F}_T$-messbare Größe und kann nun klassisch wie eine Europäische Option durch den Erwartungswert unter Q bewertet werden.

B 2.1 *Stochastische Mortalität*: Als typisches Anwendungsbeispiel betrachten wir eine fondsgebundene Lebensversicherung, die die diskontierte Auszahlung X_T an T im Erlebensfall zahlt. Hierzu sei τ eine $\mathbb{G}$-Stoppzeit (typischerweise keine $\mathbb{F}$-Stoppzeit). Ein klassisches Modell hierfür ist folgender *doppelt stochastischer* Ansatz:

Sei $E \sim \text{Exp}(1)$ eine $\mathscr{G}_T$-messbare, Standard-exponentialverteilte Zufallsvariable, unabhängig von $\mathscr{F}_T$. Außerdem sei $\Lambda = (\Lambda_t)_{t=0,\dots,T}$ ein wachsender, $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess mit $\Lambda_0 = 0$. Wir definieren

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : \Lambda_t \geq E\}, \tag{7}$$

mit der Konvention $\inf \emptyset = \infty$. Dann ist die Ersteintrittszeit τ keine $\mathbb{F}$-Stoppzeit, wohl aber $\mathscr{G}_T$-messbar. (Sie muss auch keine $\mathbb{G}$-Stoppzeit sein. Dies erreicht man aber etwa durch die Wahl von $\mathscr{G}_t = \sigma(\mathscr{F}_T, \tau \wedge t)$.)

Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} P(\tau > T |\, \mathscr{F}_T) &= E_P\big[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} |\, \mathscr{F}_T\big] \\ &= E_P\big[\mathbb{1}_{\{\Lambda_T < E\}} |\, \mathscr{F}_T\big] \\ &= e^{-\Lambda_T}, \end{aligned}$$

da Λ_T $\mathscr{F}_T$-messbar und E unabhängig von $\mathscr{F}_T$ (aufgrund der Exponentialverteilung von E gilt $P(E > x) = e^{-x}$.)

Schließlich folgt für den Preis der Versicherung

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}\Big[X_T \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathscr{F}_t\Big] &= E_Q\Big[E_P[X_T \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathscr{F}_T] |\, \mathscr{F}_t\Big] \\ &= E_Q\Big[e^{-\Lambda_T} |\, \mathscr{F}_t\Big]. \end{aligned}$$

Oft wird τ in stetiger Zeit modelliert. Hierzu verwendet man einen $\mathbb{F}$-adaptierten Prozess $\lambda \geq 0$, welcher die *Mortalität* oder *Sterbeintensität* genannt wird. Der wachsenden Prozess Λ ist die *kumulierte Intensität*, gegeben durch

$$\Lambda_t := \int_0^t \lambda_s ds, \qquad t \geq 0.$$

3 Der Fundamentalsatz der Versicherungsbewertung

In diesem Abschnitt wenden wir uns einer fundamentalen Begründung der QP-Regel zu. Die Idee ist die Bewertung der Versicherung durch den bedingten Erwartungswert (unter P) durch eine bedingte Version des starken Gesetzes der großen Zahl zu erhalten. Hierfür ist es notwendig, dass die Versicherung eine immer größere Zahl von Versicherungen (zu immer kleiner werdeneden Anteilen) abschließen kann. Die Modellierung ist inspiriert von der Theorie großer Finanzmärkte (large financial markets).

Wir betrachten den Zeitpunkt $t \in \{0, \dots, T-1\}$. An diesem Zeitpunkt kann eine Versicherung abgeschlossen werden, und der Einfachheit halber nehmen wir an, dass eine Auszahlung nur an T statt findet. Wir bezeichnen die diskontierte Auszahlung (der *Benefit* der Versicherung) mit

$$B_{t,T} \geq 0.$$

Natürlich ist $B_{t,T}$ eine $\mathscr{G}_T$-messbare Zufallsvariable. Auf der Gegenseite ist eine Versicherungsprämie zu zahlen, welche wir mit $p_t \geq 0$ bezeichnen. Die Prämie ist $\mathscr{G}_t$-messbar.

Um das Versicherungsportfolio bilden zu können, nehmen wir an, dass es Versicherungsnehmer $1, 2, \ldots$ gibt, die alle bereit sind, an t eine Versicherung zu einer beliebig kleinen Stückelung zu kaufen. Die Auszahlungen sind natürlich nicht gleich sonderen hängen von den individuellen Gegebenheiten ab. Wir bezeichnen den Benefit des i-ten Versicherungsnehmers mit

$$B^i_{t,T}.$$

Auch dies sind $\mathscr{G}_T$-messbare Größen.

B 2.2 *Stochastische Mortalität: Portfolios*: Als Beispiel können wir ein Portfolio mit stochastischer Mortalität betrachten. Hierzu seien $E_1, E_2, \ldots$ unabhängige, Standard-exponentialverteilte Zufallsvariablen, unabhängig von $\mathscr{F}_T$ und Λ ein $\mathbb{F}$-adaptierter, wachsender Prozess mit $\Lambda_0 = 0$. Wir setzen

$$\tau_i := \inf\{t \geq 0 : \Lambda_t \geq E_i\}.$$

Die Auszahlung der i-ten Versicherung ist nun

$$B^i_{t,T} = X_T \mathbb{1}_{\{\tau_i > T\}},$$

Wir definieren[1]

$$\mathscr{G}_{t,T} = \mathscr{G}_t \vee \mathscr{F}_T \tag{8}$$

und machen folgende Annahme:

Annahme 3.1. *(i) Die Zufallsvariablen $B^i_{t,T}$, $i = 1, 2, ...$ sind $\mathscr{G}_{t,T}$-bedingt unabhängig,*

(ii) $E[B^i_{t,T} | \mathscr{G}_{t,T}] = E[B^1_{t,T} | \mathscr{G}_{t,T}]$, $i = 1, 2, \ldots,$

(iii) $\mathrm{Var}[B^i_{t,T} | \mathscr{G}_{t,T}] = \mathrm{Var}[B^1_{t,T} | \mathscr{G}_{t,T}]$, $i = 1, 2, \ldots.$

Versicherungsportfolios entstehen als Allokation verschiedener Versicherungsverträge. Eine Allokation (zur Zeit t) ist eine Folge von Zufalssvariablen $\psi_t = (\psi^1_t, \psi^2_t, \ldots)$. Wir nehmen an, dass eine Allokation nur endlich viele Einträge hat. Zu einer Allokation gehören die Ausszahlungen

$$\sum_{i \geq 1} \psi^i_t B^i_{t,T}$$

und die Versicherungsprämien

$$\sum_{i \geq 1} \psi^i_t p_t = \Big(\sum_{i \geq 1} \psi^i_t\Big) p_t.$$

[1]Hierbei schreiben wir kurz $\mathscr{G}_t \vee \mathscr{F}_T$ für die von $\mathscr{G}_t$ und $\mathscr{F}_T$ erzeugte σ-Algebra.

Zu einer Allokation $\psi = (\psi_t)_{t=0,\ldots,T}$ gehört folgender Gewinn und Verlust:

$$V_T(\psi) := \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i\geq 1} \psi_t^i (p_t - B_{t,T}^i). \tag{9}$$

Eine Versicherungsportfoliostrategie ist nun eine Folge $(\psi^n)_{n\geq 1}$ von Allokationen. Diese Strategie ist zulässig, falls die folgenden Punkte erfüllt sind:

1. *Gleichmäßige Beschränktheit*: Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass
$$\parallel \psi_t^n \parallel := \sum_{i\geq 1} \psi_t^{n,i} \leq C \tag{10}$$
für alle $n \geq 1$ und $0 \leq t < T$,
2. *Konvergenz der Gesamtmasse*: Es gibt $0 < \gamma_t \in \mathscr{F}_t$, so dass
$$\parallel \psi_t^n \parallel \to \gamma_t \quad \text{f.s. für alle } t < T, \tag{11}$$
3. *Konvergenz des Gesamtwerts*: Es gibt eine Zufallsvariable $V = V^\psi$, so dass
$$\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n) = V,$$
P-fast sicher.

Neben den Versicherungsteil gehen wir von einem klassischen Finanzmarkt in diskreter Zeit aus: $d + 1$ gehandelte Wertpapiere $S = (S^0, \ldots, S^d)$ mit Numéraire $S^0 > 0$. Den diskontierten Preisprozess bezeichnen wir mit X. Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ist gegeben durch einen d-dimensionalen, $\mathbb{F}$-vorhersehbaren Prozess H. Der zugehörige (diskontierte) Gewinn und Verlust ist gegeben durch

$$G_T(H) := \sum_{t=1}^{T-1} H_t \cdot \Delta X_t = \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{i=1}^{d} H_t^i \cdot \Delta X_t^i,$$

mit $\Delta X_t = X_{t+1} - X_t$. Wir nehmen an, dass der Finanzmarkt frei von Arbitrage ist - dies ist beschrieben durch die Existenz eines zu $P|_{\mathscr{F}_T}$ äquivalenten Martingalmaßes. Hierfür schreiben wir

$$\mathcal{M}_e(\mathbb{F}) \neq \emptyset. \tag{12}$$

Der *Versicherungs-/Finanzmarkt* (B, p, S) besteht demnach aus drei Teilen: Die Benefits B, die Prämien p und den Wertpapieren S.

Definition 3.2. Auf (X, p, S) gibt es eine *Arbitrage*, falls es eine zulässige Strategie $(\psi^n)_{n\geq 1}$ und eine selbst-finanzierende Handelsstrategie H gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} V_T(\psi^n) + G_T(\xi) \in L_0^+ \backslash \{0\}. \tag{13}$$

Andernfalls ist der Versicherungs-/Finanzmarkt frei von Arbitrage.

Für das Theorem führen wir wir noch bedingte essentielle Suprema ein. Für eine Familie Ξ von Zufallsvariablen definieren wir

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathscr{F}} \Xi := \operatorname{ess\,inf}\{q \mid q \text{ is } \mathscr{F}\text{-messbar und } q \geq \xi \text{ für alle } \xi \in \Xi\}. \tag{14}$$

Setze

$$p_t^{\uparrow} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathscr{F}_t} p_t, \text{ and } p_t^{\downarrow} = \operatorname{ess\,inf}_{\mathscr{F}_t} p_t. \tag{15}$$

Theorem 3.3. *Betrachte den Versicherungs-/Finanzmarkt (B, p, S). Annahme 3.1 gelte.*

1. *Gibt es ein $Q \in \mathcal{M}_e(\mathbb{F})$, so dass für alle $t < T$*

$$p_t \leq E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}[X_{t,T}|\mathscr{F}_t], \qquad P\text{-f.s.}, \tag{16}$$

   so gibt es keine Arbitrage.

2. *Gibt es $t < T$, so dass*

$$P\Big(\bigcap_{Q\in\mathcal{M}_e(\mathbb{F})} \{p_t^{\downarrow} > E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}[X_{t,T}|\mathscr{F}_t]\}\Big) > 0 \tag{17}$$

   dann gibt es eine Arbitrage.

Wir beginnen mit einem technischen Resultat, welches zeigt, dass unter den gemachten Annahmen bestimmte Erwartungswerte der Strategien konvergieren.

Satz 3.4. *Unter Annahme 3.1 und unter* (10) *und* (11) *gilt, dass für jede zulässige Strategie* (ψ^n) *und alle $Q \in \mathcal{M}_e(\mathbb{F})$ gilt, dass*

$$E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}\Big[\lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 1} \psi_t^{n,i}\, p_t\Big] = E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}[\gamma_t\, p_t], \qquad \text{für alle } t < T \qquad\qquad \text{und} \tag{18}$$

$$E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}\Big[\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i\geq 1} \psi_t^{n,i} B_{t,T}^i\Big] = \sum_{t<T} E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}[\gamma_t B_{t,T}]. \tag{19}$$

Beweis. (i) Wir nehmen an, dass (16) gilt, und dass es eine Arbitrage gibt, also eine zulässige Strategie $(\psi^n)_{n\geq 1}$ und eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H, so dass

$$\lim_{n\to\infty} V_T(\psi^n) + G_T(H) \in L_0^+ \backslash \{0\} \tag{20}$$

Für jedes $Q \in \mathcal{M}_e(\mathbb{F})$, ist $E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}[G_T(H)] = E_Q[G_T(H)] = 0$ nach Satz 2.2 (i). Wir erhalten

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}\Big[\lim_{n\to\infty} V_T(\psi^n) + G_T(H)\Big] &= E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}\Big[\lim_{n\to\infty} V_T(\psi^n)\Big] \\ &= E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}\Big[\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i\geq 1} \psi_t^i (p_t - X_{t,T}^i)\Big]. \end{aligned} \tag{21}$$

Mit (18), (19) folgt

$$(21) = \sum_{t=0}^{T-1} E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}\Big[\ \gamma_t \left(p_t - E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}[B_{t,T}|\mathscr{F}_T]\right)\Big].$$

Wir betrachten das Q unter Annahme (16). Dann ist $p_t \leq E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}[X_{t,T}|\mathscr{F}_t]$, P-a.s., also

$$(21) \leq \sum_{t=0}^{T-1} E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}\Big[\ \gamma_t \Big(E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}[X_{t,T}|\mathscr{F}_T] - E_{\mathbb{Q}\odot\mathbb{P}}[X_{t,T}|\mathscr{F}_T]\Big)\Big] = 0,$$

ein Widerspruch zu (20). $\square$

Für den Beweis von (ii) verweisen wir hier auf die Arbeit Artzner et al. (2020).

Literaturverzeichnis

Artzner, P., Eisele, K.-T. and Schmidt, T. (2020), 'No arbitrage in insurance', *SSRN paper 3607708* .

Billingsley, P. (1995), *Probability and Measure*, 3 edn, Wiley.

Föllmer, H. and Schied, A. (2011), *Stochastic Finance*, Walter de Gruyter, Berlin.

Werner, D. (2000), *Funktionalanalysis*, Springer.