Funktionalanalysis

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Thorsten Schmidt

Department for Mathematical Stochastics, University Freiburg www.stochastik.uni-freiburg.de
thorsten.schmidt@stochastik.uni-freiburg.de

SS 2020

- Konvergenz ist eine **topologische Eigenschaft**, wie etwa Stetigkeit und Kompaktheit
- Wir interessieren uns deswegen für topologische Räume, oder - etwas spezieller - für metrische Räume.

3.1 Definition. *Ein **metrischer Raum** ist eine Menge M versehen mit einer Abstandsfunktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$, der Metrik, welche für alle $x, y, z \in M$ folgende Eigenschaften besitzt:*

(M1) ***Positiv definit***, *d.h. $d(x,y) \geq 0$ und es gilt $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.*

(M2) ***Symmetrisch***, *d.h. $d(x,y) = d(y,x)$.*

(M3) ***Dreiecksungleichung***, *d.h. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.*

Skriptum S.10

- Eine Metrik is ein schwächerer Begriff als etwa eine Norm.
- Mit einer Metrik kann man wie im vorigen Abschnitt (wo wir normierte Vektorräume betrachtet haben) definieren:

  Konvergenz einer Folge, **Cauchyfolgen**, und **Vollständigkeit** eines Raumes.

3.2 Definition. *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Die Menge*

$$B_r(x) := \{y \in M \,\big|\, d(x,y) < r\}$$

heißt ***offener Ball um*** x ***mit Radius*** r*. Eine Menge $O \subseteq M$ heißt* ***offen****, wenn für alle $x \in O$ ein $r_x > 0$ existiert, so dass $B_{r_x}(x) \subseteq O$.*

3.3 Lemma. *In einem metrischer Raum (M, d), hat das System der offenen Mengen folgende Eigenschaften:*

(T1) *M und $\emptyset$ sind offen.*

(T2) *Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen.*

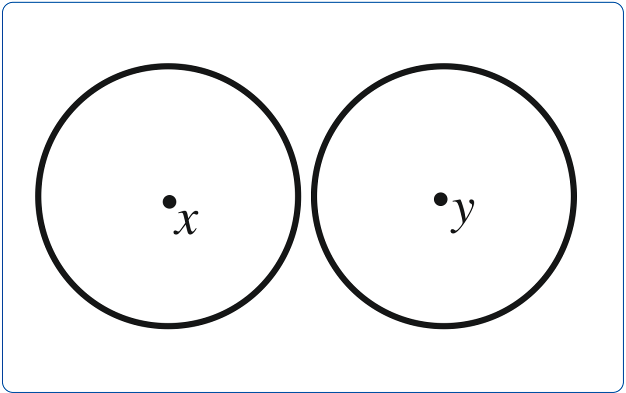
(T3) *Endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind offen.*

Skriptum S.11

3.4 Definition. *Sei X eine Menge und τ ein System von Teilmengen von X (d.h. $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$). Falls τ die Axiome $(T1)-(T3)$ erfüllt, so heißt τ* ***Topologie*** *auf X. Das Paar (X,τ) bezeichnen wir als* ***topologischen Raum****. Ein topologischer Raum (X,τ) heißt* ***Hausdorffraum****, wenn für alle $x,y \in X$, $x \neq y$, Elemente $U,V \in \tau$ existieren, so dass $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.*

Skriptum S.11

3.4 Definition. *Sei X eine Menge und τ ein System von Teilmengen von X (d.h. $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$). Falls τ die Axiome (T1) – (T3) erfüllt, so heißt τ* ***Topologie*** *auf X. Das Paar (X,τ) bezeichnen wir als* ***topologischen Raum****. Ein topologischer Raum (X,τ) heißt* ***Hausdorffraum****, wenn für alle $x, y \in X$, $x \neq y$, Elemente $U, V \in \tau$ existieren, so dass $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.*



Skriptum S.11

Die Elemente aus τ heißen **offene** Mengen. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** genau dann, wenn $X \setminus A$ offen ist, d.h. $X \setminus A \in \tau$. Das System der offenen Mengen in metrischen Räumen, nennen wir die **von der Metrik induzierte Topologie**. Eine von einer Metrik induzierte Topologie hat immer die Hausdorffeigenschafft.

Skriptum S.11

Beispiele:

(i) (M, d) metrischer Raum mit $\tau :=$ System aller offenen Mengen ist Hausdorff.

(ii) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, wobei $\tau \; :=$ System aller offenen Mengen; dies ist ein Spezialfall von (i).

(iii) $(X, \{\emptyset, X\})$, die chaotische Topologie (keine Metrik und nicht Hausdorff!!).

(iv) $(X, \mathcal{P}(X))$, die diskrete Topologie (induziert von der diskreten Metrik, also Hausdorff).

Im Folgenden zeigen wir, dass Konvergenz, Stetigkeit und Kompaktheit mit offenen Mengen alleine definiert werden können.

Wir vereinbaren außerdem, dass im Weiteren **alle** topologischen Räume Hausdorff-Räume sind!

Skriptum S.12

3.5 Definition. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum.*

(i) *$V \subseteq X$ heißt* ***Umgebung*** *von $x \in V$, wenn ein $U \in \tau$ existiert, so dass $x \in U \subseteq V$.*

(ii) *Das* ***System der Umgebungen um*** *x wird mit $\mathcal{V}(x)$ bezeichnet.*

(iii) *Eine* ***Umgebungsbasis*** *eines Punktes $x \in X$ ist ein System $(V_i)_{i \in I}$ von Umgebungen von x, so dass für beliebige Umgebungen $V \in \mathcal{V}(x)$ ein $i \in I$ existiert, so dass $V_i \subseteq V$ ist.*

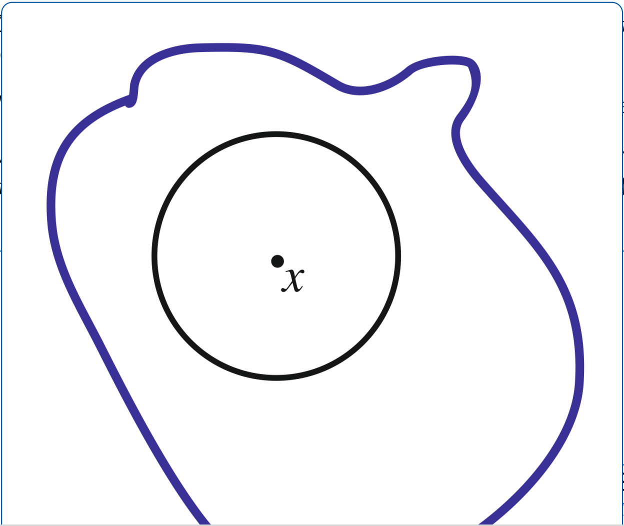
Skriptum S.12

3.5 Definition. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum.*

(i) $V \subseteq X$ ... *t, so dass* x ...

(ii) *Das* ***S*** ... *et.*

(iii) *Eine* ***U*** ... $(V_i)_{i \in I}$ *von Un* ... $\mathcal{V}(x)$ *ein* $i \in$ ...



Skriptum S.12

3.6 Definition. *Sei* (X, τ) *ein topologischer Raum. Eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ***konvergiert*** *gegen* $x \in X$, *wenn für alle Umgebungen* V *von* x *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass* $(x_n)_{n>n_0} \subseteq V$.

Skriptum S.12/1

3.6 Definition. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$* ***konvergiert*** *gegen $x \in X$, wenn für alle Umgebungen V von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(x_n)_{n > n_0} \subseteq V$.*

Wichtig: In Hausdorffräumen konvergiert jede Folge gegen höchstens einen Grenzwert; wegen der Trennungseigenschafft.

Beispiel: Im Falle des metrischen Raumes gibt es für alle $x \in M$ eine abzählbare Umgebungsbasis, nämlich die Bälle $\{B_{(1/n)}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Damit ergibt sich, dass der topologische Konvergenzbegriff (von Folgen) mit dem metrischen Konvergenzbegriff übereinstimmt.

Skriptum S.12/1

Über den Umgebungsbegriff ist es möglich Inneres, Äußeres und den Rand zu definieren:

3.7 Definition. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und $M \subseteq X$.*

(i) *Ein Punkt $x \in M$ heißt* ***innerer Punkt*** *von $M \subseteq X$, wenn ein $V \in \mathcal{V}(x)$ existiert, so dass $V \subseteq M$.*

(ii) *Ein Punkt $x \in X$ ist* ***Randpunkt*** *von $M \subseteq X$, wenn für alle $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap M \neq \emptyset$ und $V \cap (X \backslash M) \neq \emptyset$ gilt.*

(iii) *Der* ***Rand*** *∂M von M ist definiert als*

$$\partial M := \{x \in X \,\big|\, x \textit{ ist Randpunkt von } M\}.$$

(iv) *Das* ***Innere*** *ist definiert als*

$$\operatorname{int}(M) = M^\circ =: \{x \in M \,\big|\, x \textit{ ist innerer Punkt von } M\}.$$

(v) *Der* ***Abschluss*** *ist definiert als*

$$\overline{M} := M \bigcup \partial M = \operatorname{int}(M) \dot{\bigcup} \partial M.$$

Skriptum S.13

3.8 Lemma. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum.*

(i) *Eine Menge ist offen genau dann, wenn sie Umgebung all ihrer Punkte ist.*

(ii) *Der Abschluss einer Menge ist abgeschlossen.*

(iii) *Das Innere einer Menge ist offen.*

(iv) *Wenn $A \subseteq X$ abgeschlossen ist, so gilt für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ mit $x_n \to x$, dass $x \in A$.*

(v) *In Räumen wo jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt (z.B. in metrischen Räumen) gilt auch die Rückrichtung von (iv).*

Skriptum S.13

3.9 Definition. *Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Eine Menge $N \subset M$ heißt* ***dicht*** *in M, wenn $\overline{N} = M$. Der Raum (X,τ) heißt* ***separabel****, wenn es eine dichte abzählbare Menge in X gibt.*

Beispiele:

(i) $\mathbb{R}^n$ ist separabel, da $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.

(ii) $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L^2(\Omega)$, da für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ existiert, so dass $f_n \to f$ in $L^2(\Omega)$ (Analysis III, Satz 9.17). Damit folgt nach Lemma 3.8, dass $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{L^2} = L^2(\Omega)$. Nach dem Satz von Weierstraß kann jede stetige Funktion beliebig genau durch Polynome mit rationalen Koeffizienten approximiert werden. Also ist $L^2(\Omega)$ separabel.

Skriptum S.14

Durch Lemma 3.8 wird deutlich welch zentraler topologischer Begriff die Umgebung ist. Daher ist es nicht verwunderlich, dass sich eine Topologie auch über **Umgebungssysteme** definieren lässt.

3.10 Definition. *Sei $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$, $x \in X$, ein System von Mengen mit folgenden Eigenschaften*

(U1) *Für alle $V \in \mathcal{V}(x)$ gilt $x \in V$.*

(U2) *Ist $V \in \mathcal{V}(x)$ und $M \supseteq V$, so ist auch $M \in \mathcal{V}(x)$.*

(U3) *Sind $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$, so ist auch $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.*

(U4) *Für alle $V \in \mathcal{V}(x)$ gibt es ein $W \in \mathcal{V}(x)$, so dass für alle $y \in W$ auch $V \in \mathcal{V}(y)$ ist.*

Dann heißt $\mathcal{V}(x)$ ein **Umgebungssystem** *um x.*

Skriptum S.14

3.11 Lemma. *Sei M eine Menge.*

(i) *Ist τ eine Toplogie auf M, so erfüllen die Systeme von Umgebungen $\mathcal{V}(x)$ aus Definition 3.5 die Axiome (U1)–(U4).*

(ii) *Erfüllen Mengensysteme $\mathcal{V}(x)$ die Axiome (U1)–(U4) für alle $x \in X$, so ist*

$$\tau := \left\{ O \subseteq M \;\middle|\; O \in \bigcap_{x \in O} \mathcal{V}(x) \right\}$$

eine Topologie auf X.

Skriptum S.14

Zusammenfassung

- Metrischer Raum M1,M2,M3. Konvergenz, Cauchyfolgen, Vollständigkeit, Ball
- Topologie, Hausdorffraum, offene und abgeschlossene Mengen, Beispiele
- Umgebungen auf topologischen Räumen, Umgebungsbasis, Konvergenz
- innerer Punkt, Randpunkt, Rand, Inneres, Abschluss
- dicht, Separabilität
- Umgebungssystem und der Zusammenhang mit Topologien