

Funktionalanalysis

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Michael Růžička

basierend auf einer Mitschrift von S. Eckstein

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Begriffe	1
1.1	Einführung	1
1.2	Normierte Vektorräume	5
1.3	Metrische und topologische Räume	10
2	Der Satz von Hahn-Banach	21
2.1	Analytische Form	21
2.2	Geometrische Form	27
2.3	Konjugiert-konvexe Funktionen	32
3	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	37
3.1	Der Satz von Banach-Steinhaus	37
3.2	Offene Abbildung, abgeschlossener Graph	41
3.3	Adjungierte lineare Operatoren	45
4	Schwache Topologie und reflexive Räume	61
4.1	Konstruktion von Topologien	61
4.2	Schwache Topologie	62
4.3	*-Schwache Topologie	69
4.4	Reflexive Räume	76
5	Lebesgueräume L^p	91
5.1	Wiederholung	91
5.2	Reflexivität, Kompaktheit	97
6	Hilberträume	119
6.1	Der Hilbertraum	119
6.2	Dualraum, Lax-Milgram	125
6.3	Orthogonalsysteme	131

7	Kompakte Operatoren und Spektraltheorie	137
7.1	Kompakte Operatoren	137
7.2	Fredholmsche Alternative	141
7.3	Spektraltheorie	152
7.4	Zusatz	161

Kapitel 1

Einführung und Begriffe

1.1 Einführung

Die Funktionalanalysis beschäftigt sich mit *unendlich-dimensionalen* Vektorräumen, in denen ein *Konvergenzbegriff* (Topologie) gegeben ist, sowie den Abbildungen zwischen ihnen. Besonders angestrebt sind Ergebnisse, die sich auf konkrete Funktionenräume (z.B. $C([a, b])$, $L^2(\Omega)$ etc.) und konkrete Gleichungen (z.B. Integralgleichungen oder partielle Differentialgleichungen) anwenden lassen.

Die Betrachtungsweise der Funktionalanalysis, Funktionen als Punkte in einem unendlich-dimensionalen Raum aufzufassen und so geometrische Überlegungen u.ä. anzuwenden, hat sich als sehr fruchtbar erwiesen und zu einer enormen Bereicherung der Analysis geführt. Die Sätze der Funktionalanalysis zeichnen sich durch ihre Allgemeinheit aus und führen zu einem tieferen Verständnis zahlreicher Zusammenhänge.

Die Funktionalanalysis ist ein Produkt des 20. Jahrhunderts. Der Name kommt von dem Wort „Funktional“. Ein *lineares Funktional* ist eine lineare Abbildung eines Vektorraumes in seinen Grundkörper. Ist dieser Vektorraum selbst ein Funktionenraum, so sind die Argumente des Funktionals Funktionen. Um nicht von einer Funktion von Funktionen zu sprechen, verwendet man das Wort „Funktional“. Da in den Anwendungen der Funktionalanalysis viel mit solchen Abbildungen - also Funktionen von Funktionen, letztere aufgefaßt als Punkte eines Vektorraumes - gearbeitet wird, erklärt sich auf diese Weise der Name „Funktionalanalysis“.

Ein Teilgebiet der Funktionalanalysis ist die *lineare Funktionalanalysis*, woraus die Themenbereiche der Vorlesung entnommen sind. Sie befaßt sich unter anderem mit der Lösbarkeit von *linearen Gleichungen* $Au = f$, wobei hier A einem Funktionenraum linear in einen anderen abbildet. Man betrachte z.B.

die Gleichung

$$-\Delta u = f.$$

Der Laplaceoperator $(-\Delta)$ kann z.B. als eine lineare Abbildung von $C^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ aufgefaßt werden.

Ein weiteres Gebiet der Funktionalanalysis ist die *nichtlineare Funktionalanalysis*. Diese befasst sich beispielsweise mit Fixpunktsätzen, welche es ermöglichen, die (nicht immer eindeutige) Lösbarkeit *nichtlinearer Gleichungen* $A(u) = f$ zu zeigen.

Eine zentrale Idee der Funktionalanalysis ist es, bekannter Ergebnisse aus dem endlichdimensionalen auf den unendlichdimensionalen Fall zu übertragen. Hierbei ist allerdings größte Vorsicht geboten, wie die folgenden im \mathbb{R}^n ungewohnten Effekte zeigen sollen:

Im \mathbb{R}^n ist jede surjektive lineare Abbildung auch injektiv (und umgekehrt). Im unendlichen ist beides falsch:

a) Surjektive lineare Abbildungen können einen nichttrivialen Kern haben.

Beispiel: Sei

$$V = \{ (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid c_j \in \mathbb{R} \}$$

der unendlich-dimensionale Vektorraum der reellen Folgen. Hier ist die komponentenweise Addition die additive Verknüpfung und die komponentenweise Multiplikation mit Skalaren $\alpha \in \mathbb{R}$ die Skalarmultiplikation. (Man könnte $V = \mathbb{R}^\infty$ oder besser \mathbb{R}^ω schreiben.) Die lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$ sei für $c = (c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$Ac = (c_2, c_3, c_4, \dots).$$

Offensichtlich ist $A(V) = V$, aber $A(c_1, 0, 0, \dots) = (0, 0, \dots)$.

b) Ist der Kern $N(A)$ einer linearen Abbildung trivial, so ist A nicht notwendig surjektiv.

Beispiel: V sei wieder wie oben definiert. Sei $Ac = (0, c_1, c_2, c_3, \dots)$. Aus $Ac = 0$ folgt $c = 0$, also $N(A) = 0$. Offensichtlich ist aber $A(V)$ ein echter Teilraum von V .

c) Lineare Abbildungen - selbst einfachster Art - müssen keinen Eigenwert haben.

Beispiel: Sei $C([a, b])$ der Vektorraum der \mathbb{R} -wertigen stetigen Funktionen auf $[a, b]$ (mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation). Sei $A : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ definiert durch

$$(Af)(x) = (\sin x)f(x).$$

A ist ein sehr einfacher und häufig auftretender linearer Operator, nämlich ein **Multiplikationsoperator** - die Multiplikation mit $\sin x$.

Trotzdem hat A *keinen* Eigenwert. Andernfalls gäbe es ein $f \in C([a, b])$, $f \not\equiv 0$ (d.h. f ist nicht die Null-Funktion) und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(\sin x)f(x) = \lambda f(x)$. Wenn aber $f \not\equiv 0$, so existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0)$. Dort könnten wir durch $f(x)$ teilen und erhielten

$$\sin x = \lambda = \text{const}, \text{ für alle } x \in U(x_0).$$

Dies ist nicht möglich, da die Sinusfunktion auf keiner offenen Menge konstant ist. Also hat A keinen Eigenwert.

Man bemüht sich in der Funktionalanalysis, durch Zusatzbedingungen an A , die im \mathbb{R}^n bekannten Sätze zu retten. Im Falle der „**Eigenwertproblematik**“ gibt man Klassen von linearen Operatoren (= Abbildungen) an, für die das Eigenwertproblem ähnlich wie bei $n \times n$ -Matrizen behandelt werden kann. Außerdem werden verschiedene Abschwächungen des Begriffs „Eigenwert“ eingeführt, um eine Analogie zu $n \times n$ -Matrizen zu bekommen. Zudem sind diese Abschwächungen durch die Quantenphysik motiviert. Hiermit beschäftigt sich die „Spektraltheorie“, welche wir im Abschnitt 7.3 besprechen werden.

Es hat sich herausgestellt, dass die meisten Funktionenräume, mit denen man Analysis betreiben möchte, eine **Norm** oder zumindest eine **Metrik** besitzen. Bekannte Beispiele sind:

$$C([a, b], \|\cdot\|_\infty), L^2([a, b], \|\cdot\|_{L^2([a, b])}).$$

Vektorräume mit einer Norm heißen **normierte Vektorräume**. Eine Norm impliziert immer eine Metrik und eine Metrik impliziert immer einen Konvergenzbegriff (eine Topologie). In Funktionenräumen gibt es jedoch weitere Konvergenzbegriffe, wie das nächste Beispiel zeigt:

d) In unendlichdimensionalen Räumen gibt es häufig mehrere natürliche Konvergenzbegriffe.

Im \mathbb{R}^n gibt es außer der euklidischen Norm noch beliebig viele andere Normen - diese sind aber alle äquivalent und induzieren somit denselben Konvergenzbegriff. In unendlichdimensionalen Räumen ist dies anders.

Beispiel: Wir betrachten den Vektorraum

$$V = \ell^2 := \{ (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty \}.$$

Durch $\|c\|_{\ell^2} = (\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2)^{1/2}$ ist auf V eine Norm gegeben.

Hier hat man zunächst die **Konvergenz in der Norm** auch die **starke ℓ^2 -Konvergenz** genannt:

$$c^j \rightarrow c \text{ in } \ell^2 \iff \|c^j - c\|_{\ell^2} \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

Zusätzlich hat man die **punktweise Konvergenz**:

$$c^j \rightarrow c \text{ punktweise} \iff c_i^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} c_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Diese **punktweise Konvergenz** oder auch **komponentenweise Konvergenz** hängt nur von der Norm des Grundkörpers ab; also in unserem Falle dem Betrag in \mathbb{R} . Im \mathbb{R}^n sind die letzten beiden Konvergenzen äquivalent. Im unendlichen nicht; die Folge $c^j = (0, \dots, 0, \underset{j\text{-te Stelle}}{j}, 0, \dots)$ konvergiert punktweise gegen $(0, 0, \dots)$ jedoch ist $\|c^j\|_{\ell^2} = j \rightarrow \infty$.

Die dritte wichtige natürliche Konvergenz ist die **schwache Konvergenz**, die wir später kennen lernen werden.

Wir haben also **Vektorräume**, auf welchen mehrere Konvergenzbegriffe existieren. Daraus ergibt sich die Frage, wie diese Begriffe zusammenhängen. Tatsächlich besteht die Grundlage der Funktionalanalysis in der Untersuchung der Verträglichkeit von Vektorraumstruktur mit der Konvergenzstruktur (d.h. Norm, Metrik, Topologie). Wie empfindlich dieses Verhältnis ist, zeigt das nächste wichtige Beispiel:

e) Lineare Abbildungen sind nicht notwendig stetig.

Sei V der Vektorraum der Polynome auf $[-2, 2]$, versehen mit der **gleichmäßigen Konvergenz** als Konvergenzbegriff, d.h.

$$p^j \rightarrow p \iff \|p^j - p\|_{\infty} \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

Hierbei ist

$$\|q\|_{\infty} = \max_{x \in [-2, 2]} |p(x)|.$$

Wir definieren die lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$, indem wir sie auf den Basiselementen x^n definieren:

$$Ax^n = 3^n x^n.$$

Mit $p^n(x) = \frac{1}{(2,5)^n} x^n$ gilt $p^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), aber

$$\|Ap^n(x)\|_{\infty} = \frac{3^n \cdot 2^n}{(2,5)^n} \rightarrow \infty.$$

Schließlich betonen wir noch, dass man auch das konkrete Studium einzelner Funktionenräume zur Funktionalanalysis zählen kann. Es gibt zahllose Funktionenräume in der Analysis, welche besondere Beachtung verdienen. Der Anfänger kennt vermutlich die Räume $C([a, b])$, $C^1(\Omega)$, $C^m(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $L^p(\Omega)$. Man benötigt diese vielen Funktionenräume und deren besonderen Eigenschaften unter anderem, um (allgemeine) Sätze der Funktionalanalysis einer konkreten Situation anzupassen.

1.2 Normierte Vektorräume

2.1 Definition. Ein Vektorraum V über \mathbb{R} heißt **normiert**, wenn es eine Abbildung $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ gibt, die **Norm**, so dass für alle $x, y \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(N1) **Positiv definit**, d.h. $\|x\|_V \geq 0$ und $\|x\|_V = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N2) **Positiv homogen**, d.h. $\|\lambda x\|_V = |\lambda| \|x\|_V$.

(N3) **Dreiecksungleichung**, d.h. $\|x + y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V$.

Man schreibt $(V, \|\cdot\|_V)$ um den normierten Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\|_V$ zu notieren.

Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, um welche Norm es sich handelt, schreibt man oft nur V oder $(V, \|\cdot\|)$ statt $(V, \|\cdot\|_V)$. Wenn es auf V verschieden Normen gibt und es zu Unklarheiten kommen kann, wird die zu betrachtende Norm explizit angegeben. Man kann auch Vektorräume über anderen Körpern betrachten. Wir werden dies jedoch nicht tun.

Beispiele:

(i) Für den euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^n sind durch

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &:= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|x\|_p &:= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|x\|_\infty &:= \max_{i=1, \dots, n} |x_i|, \end{aligned}$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, Normen definiert.

- (ii) Die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge. Wir bezeichnen mit $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, den Vektorraum aller (Äquivalenzklassen) Lebesgue-messbarer Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Mit $L^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir den Vektorraum aller (Äquivalenzklassen) Lebesgue-messbarer Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ für die eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass für fast alle $x \in \Omega$ gilt:

$$|f(x)| \leq K.$$

Mit den Normen

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|, \quad p = \infty,$$

wird $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, zu einem normierten Vektorraum.

Mit Hilfe der Norm kann man einen Konvergenzbegriff definieren und somit einen Vollständigkeitsbegriff:

2.2 Definition. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

- (i) Eine Folge $(x_n) \subseteq V$ **konvergiert (stark oder auch in der Norm)** gegen $x \in V$ genau dann, wenn $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Man schreibt $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$).
- (ii) Die Folge $(x_n) \subseteq V$ heißt **Cauchyfolge**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, k \geq n_0$ gilt: $\|x_n - x_k\| \leq \varepsilon$.

2.3 Definition. Ein normierter Vektorraum V heißt **vollständig** genau dann, wenn jede Cauchyfolge einen Grenzwert (in V) besitzt. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt **Banachraum** (B-Raum).

Beispiele:

- (i) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, sind ein vollständige normierte Vektorräume. Man beachte, dass alle Normen im \mathbb{R}^n äquivalent sind.
- (ii) $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$. In Analysis III wird gezeigt (Satz von Fischer–Riesz), dass diese Räume vollständig sind. Die L^p -Normen sind natürlich nicht äquivalent, und deswegen unterscheiden sich auch die Räume.

- (iii) Der Raum der stetigen Funktionen. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, d.h. Ω ist beschränkt, offen und zusammenhängend. Mit $C(\overline{\Omega})$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionen $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Der Raum $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ ist auch ein vollständiger normierter Vektorraum. Dazu beachte man, dass für stetige Funktionen $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|$ gilt. Somit impliziert $\|\cdot\|_\infty$ die gleichmäßige Konvergenz von stetigen Funktionen. Aus Analysis II wissen wir, dass jede Folge von stetigen Funktionen, welche gleichmäßig konvergiert, eine stetige Grenzfunktion hat; d.h. der Grenzwert liegt wieder in $C(\overline{\Omega})$.
- (iv) Der Raum $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_p)$, wobei Ω ein beschränktes Gebiet ist, ist ein normierter Raum, der nicht vollständig ist.

Eine wichtige Rolle in der Funktionalanalysis spielt die Zusammenführung von Vektorraumstruktur und Normstruktur, welches gerade die beiden Qualitäten eines normierten Vektorraums (bzw. Banachraumes) sind. Die kanonischen (strukturhaltenden) Abbildungen für normierte Vektorräume sind die stetigen linearen Abbildungen:

2.4 Definition. *Beliebige Abbildungen eines normierten Vektorraumes in einen anderen normierten Vektorraum werden **Operatoren** genannt. Seien X, Y normierte Vektorräume und $A: X \rightarrow Y$ ein Operator. Dann heißt der Operator A :*

- (i) **Linear**, wenn für alle $x, y \in X$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

- (ii) **Beschränkt**, wenn A beschränkte Mengen in X in beschränkte Mengen in Y abbildet.
- (iii) **Stetig in x_0** , wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$ mit $\|x - x_0\|_X < \delta$ folgt, dass $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$.
- (iv) **Stetig**, wenn A stetig in allen $x_0 \in X$ ist.

Linearität ist eine starke Eigenschaft. In endlichdimensionalen Räumen ist jede lineare Funktion automatisch sofort auch (global Lipschitz-) stetig und beschränkt. In unendlichdimensionalen Räumen sind lineare Abbildungen zwar nicht automatisch stetig, jedoch kann man sie vermeidlich schwächer charakterisieren; sie folgt zum Beispiel schon aus der Stetigkeit in nur einem Punkt!

2.5 Satz. Seien X, Y normierte Vektorräume und $A : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) A ist stetig,
- (ii) A ist stetig in 0,
- (iii) $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty$,
- (iv) A ist beschränkt.

BEWEIS : Übung. ■

Der Raum der beschränkten, linearen Operatoren $A : X \rightarrow Y$ ist offensichtlich wieder ein Vektorraum; er wird mit $L(X, Y)$ bezeichnet. Er ist sogar ein normierter Vektorraum, denn durch

$$\|A\|_{L(X, Y)} = \|A\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y \quad (2.6)$$

ist auf $L(X, Y)$ eine Norm gegeben, die **Operatornorm**, wie wir gleich beweisen werden:

2.7 Lemma. Seien X, Y normierte Vektorräume.

- (i) Der Raum $(L(X, Y), \|\cdot\|)$ ist ein normierter Vektorraum.
- (ii) Ist Y ein Banachraum, so ist auch $(L(X, Y), \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

BEWEIS : Zu (i): Für $A, B \in L(X, Y)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|(A + B)x\|_Y &\leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y, \\ \|\lambda Ax\|_Y &= |\lambda| \|Ax\|_Y, \end{aligned}$$

woraus die Normaxiome (N2) und (N3) folgen. Wenn nun $\|A\| = 0$ gilt, so ist $A \equiv 0$, denn aus $Ax \neq 0$ und der Linearität folgt $\|A \frac{x}{\|x\|_X}\|_Y > 0$. Damit haben wir die drei Normaxiome aus Definition 2.1 gezeigt. $L(X, Y)$ ist also ein normierter Vektorraum.

Zu (ii): Sei $(A_k) \subseteq L(X, Y)$ eine Cauchyfolge von Operatoren, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so dass für alle $n, k \geq n_0$ gilt, $\|A_k - A_n\| < \varepsilon$. Für $x \in X$ ist $(A_k x)$ eine Folge in Y und es gilt:

$$\|A_k x - A_n x\|_Y = \|(A_k - A_n)(x)\|_Y \leq \|A_k - A_n\| \|x\|_X < \varepsilon \|x\|_X.$$

Daraus folgt, dass $(A_k x)$ eine Cauchyfolge in Y ist. Da Y ein Banachraum

ist, existiert $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k x =: Ax$. Dieser punktweise definierte Grenzoperator ist eine lineare Abbildung von X nach Y , da alle A_k linear sind. Es bleibt zu zeigen, dass A auch beschränkt ist. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gilt

$$\|(A - A_n)(x)\|_Y = \lim_{k \rightarrow \infty} \|(A_k - A_n)(x)\|_Y \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A_n\| \|x\|_X < \varepsilon \|x\|_X < \infty,$$

falls $n \geq n_0$. Daraus folgt, dass $A - A_n \in L(X, Y)$, und damit ist auch $A = (A - A_n) + A_n$ ein Element aus $L(X, Y)$. Des Weiteren gilt $A_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$) in $L(X, Y)$, denn

$$\begin{aligned} \|A - A_n\| &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \lim_{k \rightarrow \infty} \|(A_k - A_n)(x)\|_Y \\ &\leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A_n\| \|x\|_X \leq \varepsilon \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|x\|_X \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n > n_0$. Dies impliziert $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, d.h. $A_n \rightarrow A$ in $L(X, Y)$. ■

2.8 Definition. Sei X ein normierter Vektorraum über \mathbb{R} . Der Raum $L(X, \mathbb{R})$ der beschränkten, linearen Funktionele heißt **Dualraum** von X und wird als X^* bezeichnet. Für $f \in X^*$, $x \in X$ schreibt man

$$\langle f, x \rangle_{X^*, X} = \langle f, x \rangle_X = \langle f, x \rangle := f(x)$$

und nennt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*, X}$ das **Dualitätsprodukt** zwischen X und X^* .

Da \mathbb{R} ein Banachraum ist, ist nach Lemma 2.7 auch X^* ein Banachraum. Der “schönste” unendlichdimensionale Raum ist der **Hilbertraum**. Dieser ist dem \mathbb{R}^n am ähnlichsten, denn er besitzt (wie der Hilbertraum \mathbb{R}^n) ein **Skalarprodukt**, welches ermöglicht Begriffe wie Winkel und damit Orthogonalität zu verallgemeinern. Auch birgt er mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm einem dem euklidischem besonders nahe stehendem Abstandsbegriff, wie die Parallelogrammidentität zeigen wird. All dieses wird im Kapitel 6 genauer besprochen.

2.9 Definition. Ein **Skalarprodukt** auf einem reellen Vektorraum H ist eine Abbildung $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y, z \in H$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

- (S1) **Bilinearität**, d.h. $(\alpha x + \beta y, z)_H = \alpha(x, z)_H + \beta(y, z)_H$.
- (S2) **Symmetrie**, d.h. $(x, y)_H = (y, x)_H$.
- (S3) **Positive Definitheit**, d.h. $(x, x)_H \geq 0$ und $(x, x)_H = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt **Prä-Hilbertraum**. Ein Prä-Hilbertraum ist immer normiert bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm $\|x\|_H := (x, x)_H^{\frac{1}{2}}$. Falls der Raum $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ bezüglich der induzierten Norm $\|\cdot\|_H$ vollständig ist, so nennt man ihn **Hilbertraum**.

Beispiele:

- (i) $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(x, y) = \sum_{i=0}^n x_i y_i$.
- (ii) $(L^2(\Omega), (\cdot, \cdot)_{L^2})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ist ein Hilbertraum, da $(f, g)_{L^2} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt ist und er vollständig ist, bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten $L^2(\Omega)$ -Norm.

Ein Beispiel von einem Prä-Hilbertraum, welcher kein Hilbertraum ist, ist $(C(\overline{\Omega}), (\cdot, \cdot)_{L^2})$, denn dieser Raum ist nicht vollständig.

1.3 Metrische und topologische Räume

Im Weiteren beschäftigen wir uns mit topologischen Eigenschaften. Wie man am Beispiel d) aus der Einführung sieht, gibt es verschiedene Konvergenzen. *Konvergenz* ist eine *topologische Eigenschaft*, weshalb wir uns an dieser Stelle etwas mit Topologie beschäftigen wollen. Die zwei weiteren zentralen topologischen Eigenschaften, welche wir in der Analysis benötigen, sind *Stetigkeit* und *Kompaktheit*. Zuerst wiederholen wir den Begriff des metrischen Raumes.

3.1 Definition. Ein **metrischer Raum** ist eine Menge M versehen mit einer Abstandsfunktion $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, der Metrik, welche für alle $x, y, z \in M$ folgende Eigenschaften besitzt:

- (M1) **Positiv definit**, d.h. $d(x, y) \geq 0$ und es gilt $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- (M2) **Symmetrisch**, d.h. $d(x, y) = d(y, x)$.
- (M3) **Dreiecksungleichung**, d.h. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Beispiele:

- (i) Der $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ mit der von der Norm induzierten Metrik $d(x, y) = \|x - y\|_p$.

- (ii) Jeder normierte Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ mit $d(x, y) = \|x - y\|$.
- (iii) Die diskrete Metrik, auf einer beliebigen Menge, mit $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$ und $d(x, x) = 0$.

■

Eine Metrik ist die schwächste Form eines Abstandsbegriffes. Deshalb kann man die Begriffe “konvergente Folge“, “Cauchyfolge“ und “Vollständigkeit“ analog zu normierten Vektorräumen definieren. Sei (x_n) eine Folge eines metrischen Raumes (M, d) . Sie **konvergiert** gegen x genau dann, wenn $d(x_n, x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Sie heißt **Cauchyfolge** wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n, k \geq n_0$ gilt: $d(x_n, x_k) \leq \varepsilon$. Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge einen Grenzwert besitzt.

In metrischen Räumen kann man auch definieren was offene Mengen sind.

3.2 Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Die Menge

$$B_r(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$$

heißt **offener Ball um x mit Radius r** . Eine Menge $O \subseteq M$ heißt **offen**, wenn für alle $x \in O$ ein $r_x > 0$ existiert, so dass $B_{r_x}(x) \subseteq O$.

3.3 Lemma. In einem metrischen Raum (M, d) , hat das System der offenen Mengen folgende Eigenschaften:

- (T1) M und \emptyset sind offen.
- (T2) Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen.
- (T3) Endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind offen.

BEWEIS : (T1) und (T2) sind trivial. Zu (T3): Sei $x \in \bigcap_{i=1}^n O_i$ so existiert für alle O_i ein $r_i > 0$, so dass $B_{r_i}(x) \subseteq O_i$. Damit gilt für $r = \min_i r_i$, dass $B_r(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n O_i$. ■

Diese Eigenschaften der offenen Mengen in metrischen Räumen motivieren den Begriff des allgemeinen topologischen Raumes:

3.4 Definition. Sei X eine Menge und τ ein System von Teilmengen von X (d.h. $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$). Falls τ die Axiome (T1) – (T3) erfüllt, so heißt τ **Topologie** auf X . Das Paar (X, τ) bezeichnen wir als **topologischen Raum**. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **Hausdorffraum**, wenn für alle $x, y \in X$, $x \neq y$, Elemente $U, V \in \tau$ existieren, so dass $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Die Elemente aus τ heißen **offene** Mengen. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** genau dann, wenn $X \setminus A$ offen ist, d.h. $X \setminus A \in \tau$. Das System der offenen Mengen in metrischen Räumen, nennen wir die **von der Metrik induzierte Topologie**. Eine von einer Metrik induzierte Topologie hat immer die Hausdorffeigenschaft.

Beispiele:

- (i) (M, d) metrischer Raum mit $\tau :=$ System aller offenen Mengen ist Hausdorff.
- (ii) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, wobei $\tau :=$ System aller offenen Mengen; dies ist ein Spezialfall von (i).
- (iii) $(X, \{\emptyset, X\})$, die chaotische Topologie (keine Metrik und nicht Hausdorff!!).
- (iv) $(X, \mathcal{P}(X))$, die diskrete Topologie (induziert von der diskreten Metrik, also Hausdorff).

Im Folgenden zeigen wir, dass Konvergenz, Stetigkeit und Kompaktheit mit offenen Mengen alleine definiert werden können.

Wir vereinbaren außerdem, dass im Weiteren alle topologischen Räume Hausdorff-Räume sind!

Um Konvergenz in topologischen Räumen zu verstehen, bietet es sich an den Begriff der Umgebung zu definieren:

3.5 Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- (i) $V \subseteq X$ heißt **Umgebung** von $x \in V$, wenn ein $U \in \tau$ existiert, so dass $x \in U \subseteq V$.
- (ii) Das **System der Umgebungen um** x wird mit $\mathcal{V}(x)$ bezeichnet.
- (iii) Eine **Umgebungsbasis** eines Punktes $x \in X$ ist ein System $(V_i)_{i \in I}$ von Umgebungen von x , so dass für beliebige Umgebungen $V \in \mathcal{V}(x)$ ein $i \in I$ existiert, so dass $V_i \subseteq V$ ist.

Nun kann man ganz kanonisch Konvergenz definieren:

3.6 Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ **konvergiert** gegen $x \in X$, wenn für alle Umgebungen V von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(x_n)_{n > n_0} \subseteq V$.

Wichtig: In Hausdorffräumen konvergiert jede Folge gegen höchstens einen Grenzwert; wegen der Trennungseigenschaft.

Beispiel: Im Falle des metrischen Raumes gibt es für alle $x \in M$ eine abzählbare Umgebungsbasis, nämlich die Bälle $\{B_{(1/n)}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Damit ergibt sich, dass der topologische Konvergenzbegriff (von Folgen) mit dem metrischen Konvergenzbegriff übereinstimmt.

Über den Umgebungsbegriff ist es möglich Inneres, Äußeres und den Rand zu definieren:

3.7 Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und $M \subseteq X$.

- (i) Ein Punkt $x \in M$ heißt **innerer Punkt** von $M \subseteq X$, wenn ein $V \in \mathcal{V}(x)$ existiert, so dass $V \subseteq M$.
- (ii) Ein Punkt $x \in X$ ist **Randpunkt** von $M \subseteq X$, wenn für alle $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap M \neq \emptyset$ und $V \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$ gilt.
- (iii) Der **Rand** ∂M von M ist definiert als

$$\partial M := \{x \in X \mid x \text{ ist Randpunkt von } M\}.$$

- (iv) Das **Innere** ist definiert als

$$\text{int}(M) = M^\circ =: \{x \in M \mid x \text{ ist innerer Punkt von } M\}.$$

- (v) Der **Abschluss** ist definiert als

$$\overline{M} := M \bigcup \partial M = \text{int}(M) \bigcup \partial M.$$

3.8 Lemma. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- (i) Eine Menge ist offen genau dann, wenn sie Umgebung all ihrer Punkte ist.
- (ii) Der Abschluss einer Menge ist abgeschlossen.
- (iii) Das Innere einer Menge ist offen.
- (iv) Wenn $A \subseteq X$ abgeschlossen ist, so gilt für alle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ mit $x_n \rightarrow x$, dass $x \in A$.
- (v) In Räumen wo jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt (z.B. in metrischen Räumen) gilt auch die Rückrichtung von (iv).

BEWEIS : Übung ■

Die zentrale Verbindung zwischen Abschluss und Konvergenz wird uns oft nützlich sein. Unter anderem durch dichte Teilmengen:

3.9 Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Menge $N \subset M$ heißt **dicht** in M , wenn $\overline{N} = M$. Der Raum (X, τ) heißt **separabel**, wenn es eine dichte abzählbare Menge in X gibt.

Beispiele:

- (i) \mathbb{R}^n ist separabel, da $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.
- (ii) $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L^2(\Omega)$, da für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ existiert, so dass $f_n \rightarrow f$ in $L^2(\Omega)$ (Analysis III, Satz 9.17).
Damit folgt nach Lemma 3.8, dass $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{L^2} = L^2(\Omega)$. Nach dem Satz von Weierstraß kann jede stetige Funktion beliebig genau durch Polynome mit rationalen Koeffizienten approximiert werden. Also ist $L^2(\Omega)$ separabel.

Durch Lemma 3.8 wird deutlich, welcher zentraler topologischer Begriff die Umgebung ist. Daher ist es nicht verwunderlich, dass sich eine Topologie auch über **Umgebungssysteme** definieren lässt.

3.10 Definition. Sei $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$, $x \in X$, ein System von Mengen mit folgenden Eigenschaften

- (U1) Für alle $V \in \mathcal{V}(x)$ gilt $x \in V$.
- (U2) Ist $V \in \mathcal{V}(x)$ und $M \supseteq V$, so ist auch $M \in \mathcal{V}(x)$.
- (U3) Sind $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$, so ist auch $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.
- (U4) Für alle $V \in \mathcal{V}(x)$ gibt es ein $W \in \mathcal{V}(x)$, so dass für alle $y \in W$ auch $V \in \mathcal{V}(y)$ ist.

Dann heißt $\mathcal{V}(x)$ ein **Umgebungssystem** um x .

3.11 Lemma. Sei M eine Menge.

- (i) Ist τ eine Topologie auf M , so erfüllen die Systeme von Umgebungen $\mathcal{V}(x)$ aus Definition 3.5 die Axiome (U1)–(U4).
- (ii) Erfüllen Mengensysteme $\mathcal{V}(x)$ die Axiome (U1)–(U4) für alle $x \in X$, so ist

$$\tau := \left\{ O \subseteq M \mid O \in \bigcap_{x \in O} \mathcal{V}(x) \right\}$$

eine Topologie auf X .

BEWEIS : Übung. ■

Nun zur topologisch definierten **Stetigkeit**:

3.12 Definition. Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume und sei $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ eine Abbildung. Die Abbildung f heißt **stetig in** $x \in X$, wenn es für alle Umgebungen $V \in \mathcal{V}(f(x))$ eine Umgebung $U \in \mathcal{V}(x)$ gibt, so dass $f(U) \subseteq V$. Die Abbildung f heißt **folgenstetig** in $x \in X$, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, welche (bezüglich τ) gegen x konvergieren, gilt $f(x_n) \rightarrow f(x)$ (bezüglich σ). Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist **stetig (folgenstetig)** wenn f in jedem $x \in X$ stetig (folgenstetig) ist.

Beispiele:

- (i) Die stetigen Funktionen bezüglich der natürlichen Topologien von \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m sind gerade die bekannten stetigen Funktionen. (Siehe Lemma 3.13).
- (ii) Jede Funktion ist stetig bezüglich der diskreten Topologie im Urbildbereich, oder bezüglich der chaotischen im Bildbereich.
- (iii) Die konstanten Funktionen sind immer stetig.

3.13 Lemma. Seien (X, τ) , (Y, σ) topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist stetig.
- (ii) Die Urbilder offener Mengen sind offen.
- (iii) Die Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Hat (X, τ) in jedem Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis, so kommt noch die folgende Äquivalenz hinzu:

- (iv) f ist folgenstetig. (Dieses ist im Allgemeinen eine schwächere Stetigkeit!)

BEWEIS : Übung ■

Da ein metrischer Raum eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, sind Stetigkeit und Folgenstetigkeit in metrischen Räumen äquivalent.

Nun schlussendlich zur **Kompaktheit**:

3.14 Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Die Menge $K \subseteq X$ heißt **(überdeckungs-)kompakt**, wenn man aus jeder offenen Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung auswählen kann, d.h., falls

$$K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \quad U_\lambda \in \tau,$$

so existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$, so dass $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\lambda_j}$. Eine Menge $K \subseteq X$ heißt **relativ kompakt**, wenn \overline{K} kompakt ist.

Beispiele

- (i) Im \mathbb{R}^n sind die kompakten Mengen bezüglich der natürlichen Topologie gerade die Mengen, welche abgeschlossen und beschränkt sind.
- (ii) Bezüglich der diskreten Topologie sind nur endlich viele Punkte kompakt, bezüglich der chaotischen sind alle Mengen kompakt.

3.15 Lemma. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $K \subseteq X$ kompakt. Dann gilt:

- (i) K ist abgeschlossen.
- (ii) Jede Teilmenge M von K ist relativ kompakt.

BEWEIS :

Zu (i): K ist abgeschlossen genau dann, wenn $X \setminus K$ offen ist. Sei nun $x_0 \in X \setminus K$, so existieren für alle $y \in K$ Mengen $U_y, V_y \in \tau$, so dass $x_0 \in V_y$, $y \in U_y$ und $U_y \cap V_y = \emptyset$ (wegen der Hausdorffeigenschaft). Da $K \subseteq \bigcup_{y \in K} U_y$, gibt es $y_1 \dots y_n \in K$, so dass $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{y_i} =: U$. Da nun nach

Konstruktion $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n V_{y_i} =: V$, welches als endlicher Durchschnitt offener Mengen offen ist, und $U \cap V = \emptyset$, so folgt, dass $V \subseteq X \setminus U \subseteq X \setminus K$, woraus die Behauptung folgt.

Zu (ii): Sei $M \subseteq K$. Wir wollen zeigen, dass \overline{M} kompakt ist. Aus $\overline{M} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \tau$ folgt $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \cup X \setminus \overline{M}$. Die Behauptung folgt nun aus der Kompaktheit von K . ■

Man erinnert sich, dass im \mathbb{R}^n jede Folge, welche in einer kompakten Menge enthalten ist, eine konvergente Teilfolge besitzt. Dies ist zumindest in metrischen Räumen auch der Fall.

3.16 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt

- (i) **relativ folgenkompakt**, wenn für alle $(x_n) \subseteq A$ eine in X konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ existiert, d.h. für ein $x \in X$ gilt $x_{n_k} \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$.
- (ii) **folgenkompakt**, wenn für alle $(x_n) \subseteq A$ eine in A konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ existiert, d.h. für ein $x \in A$ gilt $x_{n_k} \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$.

Sei X zusätzlich ein metrischer Raum, dann heißt $A \subset X$

- (iii) **präkompakt**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein endliches ε -Netz existiert, d.h. es gibt endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n \in A$, so dass $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

3.17 Satz. In einem metrischen Raum (M, d) sind äquivalent:

- (i) $A \subseteq M$ ist überdeckungskompakt.
- (ii) A ist folgenkompakt.
- (iii) A ist präkompakt und vollständig.

Bemerkung: In topologischen Räumen sind (i) und (ii) **nicht** äquivalent! Es folgt nicht einmal das Eine aus dem Anderen!

BEWEIS : “(i) \Rightarrow (ii)” : Durch Widerspruch. Angenommen es gibt eine Folge (x_n) so, dass alle Teilfolgen $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ nicht in A konvergieren, so folgt, dass für alle $y \in A$ ein $r_y > 0$ existiert, mit:

$$N_y := \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in B_{r_y}(y) \cap A\} \text{ ist endlich.}$$

Nun ist $A \subseteq \bigcup_{y \in A} B_{r_y}(y)$, welches eine offene Überdeckung ist, also gibt es

y_1, \dots, y_n , so dass $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{r_{y_i}}(y_i)$. Daraus folgt $\bigcup_{i=1}^n N_{y_i}$ endlich. Da aber $(x_n) \subseteq A$, ist $\bigcup_{i=1}^n N_{y_i}$ eine Überdeckung der natürlichen Zahlen mit endlich vielen Elementen, was ein Widerspruch ist.

“(ii) \Rightarrow (iii)” : A ist vollständig. Sei $(x_n) \subseteq A$ eine Cauchyfolge. Da A folgenkompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ die gegen ein $x \in A$ konvergiert. Offensichtlich konvergiert dann die gesamte Folge (x_n) gegen x , d.h. A ist vollständig.

Angenommen A sei nicht präkompakt, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ für das kein

endliches ε -Netz existiert. Also so können wir induktiv eine Folge (x_n) konstruieren:

$$x_1 \in A \text{ beliebig und } x_{k+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(x_i).$$

Jedoch besitzt (x_k) keine konvergente Teilfolge, da alle Folgenglieder einen Abstand größer als ε haben, das ist ein Widerspruch zur Annahme.

“(iii) \Rightarrow (i)”: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Sei \mathcal{A} das System aller Teilmengen von A , die keine endliche Teilüberdeckung von $\{U_i\}_{i \in I}$ besitzen, d.h.

$$\mathcal{A} := \{B \subseteq A \mid J \subseteq I : B \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i \Rightarrow J \text{ unendlich}\}.$$

Es gilt nun zu zeigen, dass $A \notin \mathcal{A}$. Für beliebige $\varepsilon > 0$ existieren $x_i \in A$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(x_i)$, da A präkompakt ist. Für $B \in \mathcal{A}$ muss es ein $i \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$ geben mit $B \cap B_\varepsilon(x_i) \in \mathcal{A}$. Wir machen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $A \in \mathcal{A}$. Wir konstruieren eine Folge (x_n) , in dem wir zu immer kleiner werdendem $\varepsilon (= 1/k)$ einen Ball finden, welcher nicht endlich von $\{U_i\}_{i \in I}$ überdeckt wird. Für $\varepsilon = 1$ gibt es, aufgrund obiger Überlegung, ein $x_1 \in A$ mit $B_1 := B_1(x_1) \cap A \in \mathcal{A}$. Analog existiert für $\varepsilon = 1/k$ ein $x_k \in A$ so, dass $B_{\frac{1}{k}}(x_k) \cap \left(\bigcap_{m=1}^{k-1} B_{\frac{1}{m}}(x_m) \cap A \right) \in \mathcal{A}$. Damit haben wir eine Folge $B_m := \bigcap_{k=1}^m B_{\frac{1}{k}}(x_k) \cap A \in \mathcal{A}$ immer kleiner werdenden Mengen, welche alle in \mathcal{A} enthalten sind. Nun wähle $y_m \in B_m$, dann sind für $l \geq m$ sowohl y_m als auch y_l Elemente aus $B_{\frac{1}{m}}(x_m)$. Somit gilt $d(y_m, y_l) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, y_l) \leq \frac{2}{m}$, d.h. (y_m) ist eine Cauchyfolge. Da A vollständig ist, gibt es ein $y \in A$, so dass $\varepsilon_m := d(y_m, y) \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$. Weil aber $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ gibt es ein i_0 , so dass $y \in U_{i_0}$. Diese Menge ist offen, also existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $U_{i_0} \supseteq B_{\frac{2}{m_0} + \varepsilon_{m_0}}(y) \supseteq B_{\frac{2}{m_0}}(y_{m_0}) \supseteq B_{\frac{1}{m_0}}(x_{m_0}) \supseteq B_{m_0}$. Also ist $B_{m_0} \notin \mathcal{A}$, was ein Widerspruch ist. ■

3.18 Definition. Seien zwei Topologien, τ_1 und τ_2 auf X gegeben, wobei

$$\{\emptyset, X\} \subseteq \tau_1 \subseteq \tau_2 \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Dann sagt man τ_2 ist **feiner** als τ_1 , bzw. τ_1 ist **gröber** als τ_2 .

Ob eine Topologie gröber oder feiner ist als eine zweite, hat direkten Einfluss auf die drei zentralen Begriffe dieses Abschnittes. Es zeigt sich, dass sowohl feine als auch grobe Topologien ihre Vorzüge besitzen:

3.19 Lemma. *Seien zwei Topologien $\tau_1 \subseteq \tau_2$ auf X gegeben. Dann gilt:*

- (i) *Konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bezüglich τ_2 gegen x , so konvergiert sie auch bezüglich τ_1 gegen x .*
- (ii) *Ist $A \subseteq X$ bezüglich τ_2 kompakt, so auch bezüglich τ_1 .*
- (iii) *Ist (Y, σ) ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow Y$ stetig bezüglich τ_1 , so ist f auch stetig bezüglich τ_2 .*

BEWEIS : Zu (i) Je mehr offene Mengen es gibt, desto mehr Umgebungen gibt es und um so seltener ist also Konvergenz.

Zu (ii) Je mehr offene Mengen es gibt, um so mehr offene Überdeckungen sind möglich und umso seltener ist Kompaktheit.

Zu (iii) Je weniger offene Mengen es gibt, um so weniger Funktion gibt es, von welchen alle Urbilder offener Mengen offen sind. ■

Kapitel 2

Der Satz von Hahn-Banach

Der Satz von Hahn-Banach befasst sich mit der Fortsetzung von linearen Funktionalen, welche auf einem linearen Teilraum definiert sind, auf den ganzen Vektorraum - dies unter Beibehaltung der Norm bzw. verwandter Größen. Im nicht-separablen Fall wird zum Beweis das Lemma von Zorn verwendet.

Der Satz von Hahn-Banach zählt zu den grundlegenden Sätzen der Funktionalanalysis. Wir geben eine analytische und später eine geometrische Formulierung dieses Satzes.

2.1 Analytische Formulierung des Satzes von Hahn-Banach

1.1 Satz (Hahn-Banach, analytische Form). *Sei V ein Vektorraum und $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ positiv homogen und subadditiv, d.h. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, und $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in V$. Ferner sei W ein linearer Teilraum von V und $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit*

$$\varphi(x) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in W.$$

Dann gibt es ein lineares Funktional $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, das eine Fortsetzung von φ ist, d.h. $f|_W = \varphi$, und

$$f(x) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in V$$

erfüllt.

- Besonders wichtig ist der Fall, dass $p(x) = \|x\|$, wenn V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$ ist.
- Mit der gleichen Beweisstrategie kann man zeigen, dass die Aussagen von Satz 1.1 analog gelten, wenn man die positiv homogene, subadditive Funktion p durch eine **konvexe** Funktion ersetzt.

Zum Beweis von Satz 1.1 zeigen wir zunächst, dass das Funktional φ in Satz 1.1 auf einen größeren Raum $W \oplus \langle x_0 \rangle$, wobei $\langle x_0 \rangle$ die lineare Hülle von x_0 ist, d.h. $\langle x_0 \rangle = \{tx_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$, unter Erhaltung der Ungleichung $\varphi(x) \leq p(x)$ fortgesetzt werden kann.

1.2 Lemma (Elementarerweiterung). *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.1 gibt es zu jedem $x_0 \in V \setminus W$ eine lineare Fortsetzung $f_1 : W \oplus \langle x_0 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ von $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$, so dass*

$$f_1(y) \leq p(y) \quad \text{für alle } y \in W \oplus \langle x_0 \rangle. \quad (1.3)$$

BEWEIS : Wir setzen

$$f_1(x + tx_0) = \varphi(x) + t\alpha,$$

wobei α noch geeignet gewählt werden muss. Jedenfalls ist f_1 linear auf $W \oplus \langle x_0 \rangle$. Um ein geeignetes α zu finden, so dass die Ungleichung (1.3) erfüllt ist, beachten wir, dass wegen der positiven Homogenität von p nur sichergestellt werden muss, dass für alle $x \in W$

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \alpha &\leq p(x + x_0), \\ \varphi(x) - \alpha &\leq p(x - x_0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

gilt. Ersetzt man in (1.4) x durch x/t , $t > 0$, und multipliziert mit t , so ergibt sich (1.3) für $y = x \pm tx_0$. Aufgrund der Eigenschaften von φ und p gilt für alle $\xi, x \in W$

$$\varphi(x) + \varphi(\xi) = \varphi(x + \xi) \leq p(x + \xi) \leq p(x + x_0) + p(\xi - x_0),$$

woraus

$$\varphi(\xi) - p(\xi - x_0) \leq p(x + x_0) - \varphi(x)$$

folgt. Dies impliziert sofort

$$\sup_{\xi \in W} \{\varphi(\xi) - p(\xi - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in W} \{p(x + x_0) - \varphi(x)\}$$

was äquivalent zu (1.4) ist. ■

Bevor wir Satz 1.1 beweisen, bemerken wir, dass der wichtige Fall von separablen, normierten Räumen sowie dem Funktional $p(x) = K\|x\|$ einfach zu beweisen ist.

BEWEIS (Satz 1.1, separabler, normierter Raum, $p(x) = K\|x\|$): Es sei $\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ eine Menge von linear unabhängigen Vektoren aus V , deren lineare Hülle in V dicht ist. Sei $\{x_j \mid j \in \Lambda \subset \mathbb{N}\}$ die Teilmenge von Vektoren

x_j , die nicht in \overline{W} liegen. Durch sukzessive Anwendung der Elementarerweiterung mit $x_0 = x_j$, $j \in \Lambda$, erhalten wir eine Fortsetzung f_1 von φ auf $W \oplus \langle x_j \mid j \in \Lambda \rangle$ unter Beibehaltung der Ungleichung

$$f_1(x) \leq K\|x\|.$$

Durch Abschluss erhalten wir eine Fortsetzung auf den ganzen Raum V , d.h. wir definieren

$$f(y) := \lim_{y_k \rightarrow y} f_1(y_k), \quad y_k \in W \oplus \langle x_j \mid j \in \Lambda \rangle.$$

Aufgrund der Linearität von f_1 sehen wir, dass $(f_1(y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und somit der Grenzwert existiert. Diese Definition zusammen mit obiger Ungleichung liefert für alle $y \in V$

$$f(y) \leq K\|y\|.$$

■

Der Beweis des allgemeinen Satzes von Hahn-Banach geschieht mit Hilfe des *Lemmas von Zorn*. Zur Formulierung dieses Lemmas benötigen wir einige Begriffe: Es sei M eine Menge mit einer **Halbordnung** \prec , d.h. für gewisse Paare $(a, b) \in M \times M$ ist

$$a \prec b \quad \text{oder} \quad b \prec a.$$

Wenn einer der beiden Fälle zutrifft, sagt man „ a und b sind vergleichbar“. Es gelten die Regeln

- (i) $a \prec a$,
- (ii) $\{a \prec b \text{ und } b \prec a\} \Rightarrow a = b$,
- (iii) $\{a \prec b \text{ und } b \prec c\} \Rightarrow a \prec c$.

Beispiel: (i) $M = \mathbb{R}^n$ mit der Halbordnung \leq , die definiert ist durch

$$a \leq b \Leftrightarrow a_i \leq b_i \quad \text{für alle Komponenten } a_i \text{ und } b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

(ii) Die Menge der linearen Teilräume eines Vektorraumes bildet eine Halbordnung bezüglich der mengentheoretischen Inklusion.

Eine **Kette** Q ist eine Teilmenge einer Menge M mit Halbordnung, welche **total geordnet** ist, d.h. für je zwei Elemente $a, b \in Q$ gilt $a \prec b$ oder $b \prec a$.

Beispiel: Jede eindimensionale Strecke im \mathbb{R}^n mit einem Richtungsvektor der nur nichtnegative Komponenten hat ist bzgl. der Halbordnung \leq eine Kette.

Eine **obere Schranke** für eine Teilmenge S einer Menge M mit Halbordnung \prec ist ein Element $a \in M$ mit

$$s \prec a \quad \text{für alle } s \in S.$$

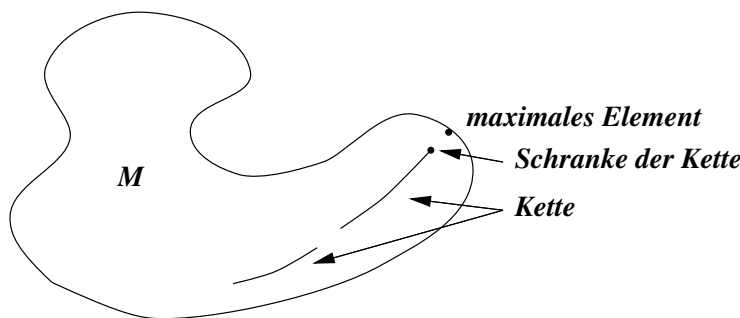
Ein Element $m \in M$ heißt **maximal** (auf M), wenn es von keinem anderen Element $x \in M$ bezüglich \prec übertroffen werden kann, d.h. aus

$$m \prec x \quad \text{folgt } x = m.$$

(Es ist aber durchaus möglich, dass m maximal ist und mit dem Element x nicht vergleichbar ist.)

1.5 Lemma (Zorn). *Sei M eine nichtleere Menge mit Halbordnung. Jede Kette aus M besitze eine obere Schranke. Dann besitzt M ein maximales Element.*

Beispiel: Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und abgeschlossen und mit der Halbordnung \leq aus Beispiel (i) versehen. Man überlegt sich - etwa mit Hilfe komponentenweiser Supremumsbildung - dass jede Kette eine obere Schranke besitzt. Es muss daher ein maximales Element in M geben. M braucht durchaus nicht konvex zu sein.



Das Lemma von Zorn wird aus dem sogenannten *Auswahlaxiom* der Mengenlehre hergeleitet: *Ist \mathcal{F} eine Familie von nichtleeren Mengen, so gibt es eine Funktion, die jeder Menge M aus \mathcal{F} ein Element $m \in M$ zuordnet.*

Dies erscheint evident, aber die Aussage ist äquivalent zum sogenannten *Wohlordnungssatz*, der zumindest einem Analytiker Unwohlsein erzeugt, wie sogleich erläutert wird.

Der Wohlordnungssatz besagt, dass jede Menge M **wohlgeordnet** werden kann, d.h. es gibt eine Ordnungsrelation \prec in M , die die Axiome der *Halbordnung* erfüllt, so dass je zwei Elemente $a, b \in M$ *vergleichbar* sind (d.h. es gilt

$a \prec b$ oder $b \prec a$) und zusätzlich die Eigenschaft besitzt, dass jede nichtleere Teilmenge von M ein kleinstes Element bezüglich der Ordnung \prec besitzt. Die letztere Eigenschaft bedeutet, dass die übliche Ordnung in \mathbb{R} , welche durch das \leq -Symbol gegeben ist, *keine* Wohlordnung ist, denn offene Intervalle in \mathbb{R} besitzen *kein* kleinstes Element. In der Tat hat bisher noch niemand eine Wohlordnung der reellen Zahlen konkret konstruiert - man weiss nur, dass sie existiert und aus dem Auswahlaxiom folgt.

Nimmt man den Wohlordnungssatz als gegeben an, ist der Beweis des Zornschen Lemmas „einfach“. Wir geben ihn an, weil in ihm das Prinzip der *transfiniten Induktion* verwendet wird, welches man aus „erkenntnistheoretischen“ Gründen einmal gesehen haben sollte.

BEWEIS (Lemmas von Zorn mit Hilfe des Wohlordnungssatzes): Es sei M die im Lemma von Zorn genannte halbgeordnete Menge und x_α , $\alpha \in I$, eine Wohlordnung der Elemente $x_\alpha \in M$, d.h. I ist eine wohlgeordnete Indexmenge bezüglich einer Ordnungsrelation, die wir mit dem Symbol $<$ bezeichnen und zu jedem $\alpha \in I$ gehört genau ein $x_\alpha \in M$. Wir bestimmen durch transfinite Induktion eine spezielle *Kette* G in M .

- (i) Sei α_0 der kleinste Index aus I . Dann gehöre x_{α_0} zu G .
- (ii) Ist für $\beta < \gamma$, $\beta, \gamma \in I$, entschieden, welche x_β zu G gehören, so gehöre x_γ genau dann zu G , wenn $x_\beta \prec x_\gamma$ für alle $x_\beta \in G$, $\beta < \gamma$.

Nach Konstruktion ist G eine Kette. Nach der Voraussetzung im Lemma von Zorn hat G eine obere Schranke z . Da z eines der x_α ist, muss z in G liegen, ist also das größte Element von G und maximal in M . (Wenn es nicht maximal wäre, gäbe es ein $x'_\alpha \succ z$, welches aber dann aufgrund der Konstruktion von G in G liegen müsste, z könnte dann nur obere Schranke sein, wenn $x'_\alpha = z$.) ■

Der Kürze halber haben wir hier die Indexmenge I nicht konkretisiert und verweisen für mehr Details auf entsprechende Bücher aus der Mengenlehre. Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den Satz von Hahn-Banach für Vektorräume in voller Allgemeinheit.

BEWEIS (Satz 1.1): Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ h : D(h) \longrightarrow \mathbb{R} \mid D(h) \text{ linearer Teilraum von } V, W \subseteq D(h), \right. \\ \left. h \text{ linear, } h|_W = \varphi, h(x) \leq p(x) \ \forall x \in D(h) \right\}.$$

In M besteht die Halbordnung \prec , welche erklärt ist durch

$$h_1 \prec h_2 \Leftrightarrow D(h_1) \subseteq D(h_2) \text{ und } h_2 \text{ ist Fortsetzung von } h_1.$$

Da $\varphi \in M$, ist $M \neq \emptyset$. Ferner erfüllt (M, \prec) die Voraussetzung des Lemmas von Zorn. Ist nämlich K eine Kette in M , $K = \{h_i \in M \mid i \in I\}$, so definiert man

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i) \text{ und } h(x) = h_i(x), \quad x \in D(h_i).$$

Das so konstruierte Element $h \in M$ ist dann eine obere Schranke von K . Nach dem Lemma von Zorn gibt es daher ein maximales Element $f \in M$ bezüglich \prec . Wir behaupten, dass $D(f) = V$, was den Beweis dann vollenden würde. Angenommen, es wäre $D(f) \neq V$. Dann gibt es ein $x_0 \in V$, $x_0 \notin D(f)$ und wir führen eine Elementarerweiterung von f nach Lemma 1.2 durch. Das Element f wäre dann nicht maximal. ■

Wir geben sofort einige Folgerungen aus dem Satz von Hahn-Banach an. Dazu erinnern wir an die Definition $\|f\|_{V^*} = \sup_{\substack{\|u\|_V \leq 1 \\ u \in V}} |\langle f, u \rangle|$

1.6 Lemma. *Sei V ein normierter Raum und $W \subset V$ ein linearer Teilraum. Jedes lineare, stetige Funktional $\varphi \in W^*$ lässt sich zu einem linearen, stetigen Funktional $f \in V^*$ fortsetzen, so dass*

$$\|f\|_{V^*} \leq \|\varphi\|_{W^*}.$$

BEWEIS : Man wendet Satz 1.1 mit $p(x) = \|\varphi\|_{W^*} \|x\|$ an. ■

1.7 Lemma. *Sei V ein normierter Vektorraum. Zu jedem $u \in V$ existiert ein $f \in V^*$ mit $\|f\|_{V^*} = 1$ und $\langle f, u \rangle = \|u\|_V$.*

BEWEIS : Man wendet Lemma 1.6 mit $W = \langle u \rangle$ und $\varphi(tu) = t \|u\|$ an. Es gilt dann

$$\|\varphi\|_{W^*} = \sup \{ |t| \|u\| \mid |t| \|u\| \leq 1 \} = 1.$$

Also liefert Lemma 1.6 eine Fortsetzung $f \in V^*$ von φ mit $\|f\| \leq 1$. Da $f|_W = \varphi$, gilt

$$\langle f, u \rangle = \|u\|$$

und somit

$$\sup_{\|v\| \leq 1} |\langle f, v \rangle| = 1,$$

denn

$$\langle f, v \rangle \leq \|f\| \|v\| \leq \|v\| \quad \text{und} \quad \left\langle f, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle = \frac{\|u\|}{\|u\|} = 1.$$

■

1.8 Lemma. Sei V normierter Vektorraum und $u \in V$. Aus $\langle f, u \rangle = 0$ für alle $f \in V^*$ folgt $u = 0$.

BEWEIS : Man wähle das in Lemma 1.7 konstruierte Funktional f und erhält $0 = \langle f, u \rangle = \|u\|$. ■

• Das Element f in Lemma 1.7 muss nicht eindeutig sein. Dies gilt nur, wenn die Norm in V^* **strikt konvex** ist, d.h. für jedes Paar $f_1 \neq f_2 \in V^*$, $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$ gilt

$$\|tf_1 + (1-t)f_2\| < 1, \quad 0 < t < 1.$$

Nach Definition von $\|f\|_{V^*}$, $f \in V^*$, gilt

$$\|f\|_{V^*} = \sup \{ |\langle f, u \rangle| \mid \|u\| \leq 1, u \in V \}, \quad (1.9)$$

nach Lemma 1.7 hingegen gilt

$$\|u\| = \max \{ |\langle f, u \rangle| \mid \|f\|_{V^*} \leq 1, f \in V^* \}, \quad (1.10)$$

denn es gibt ein $f_0 \in V^*$ mit $\|f_0\|_{V^*} = 1$, $\langle f_0, u \rangle = \|u\|$, welches das Maximum in (1.10) realisiert. Man nennt (1.10) oft **Normformel**.

Man kann beweisen, dass auch das „sup“ in (1.9) genau dann angenommen wird, wenn der Raum reflexiv ist.

2.2 Geometrische Formulierung des Satzes von Hahn-Banach

Man kann den Satz von Hahn-Banach auch als Satz über die Trennung konvexer Mengen durch Hyperebenen formulieren. Dazu benötigen wir einige Begriffe. Wie im endlich-dimensionalen Fall definiert man Hyperebenen.

2.1 Definition. Eine **Hyperebene** in einem Vektorraum V ist eine Menge der Gestalt

$$H = \{x \in V \mid \varphi(x) = \alpha\} =: \{\varphi = \alpha\}$$

mit einer linearen Abbildung $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \neq 0$, und einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.2 Lemma. Sei V ein normierter Vektorraum. Eine Hyperebene $\{\varphi = \alpha\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn φ stetig ist.

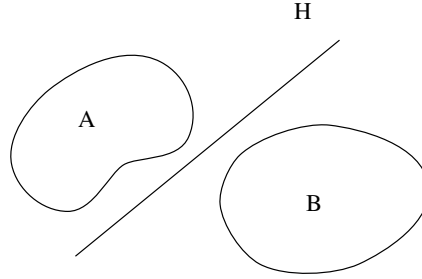
BEWEIS : Wenn φ stetig ist, ist $\{\varphi = \alpha\}$ offenbar abgeschlossen. Sei also $\{\varphi = \alpha\}$ abgeschlossen und sei φ nicht stetig. Somit existiert eine Nullfolge (x_n) mit $\varphi(x_n) \not\rightarrow 0$. Für ein geeignetes $c_0 > 0$ existiert eine Teilfolge, die

wir wieder mit (x_n) bezeichnen, mit $|\varphi(x_n)| \geq c_0$. Wir reskalieren die Folge (x_n) , d.h. wir setzen $\tilde{x}_n := \frac{x_n}{\varphi(x_n)}$ und sehen, dass (\tilde{x}_n) einen Nullfolge ist mit $\varphi(\tilde{x}_n) = 1$. Sei nun $y_0 \in V$ derart, dass $\varphi(y_0) = \beta \neq \alpha$. Die Folge $((\alpha - \beta)\tilde{x}_n + y_0)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen y_0 und erfüllt $\varphi((\alpha - \beta)\tilde{x}_n + y_0) = \alpha$. Da $\{\varphi = \alpha\}$ abgeschlossen ist, folgt $\varphi(y_0) = \alpha$, ein Widerspruch. ■

2.3 Definition. Seien A, B Teilmengen des normierten Vektorraumes V . Man sagt, „die Hyperebene $\{\varphi = \alpha\}$ trenne A und B “, wenn

$$\varphi(x) \leq \alpha \leq \varphi(y) \quad \text{für alle } x \in A \text{ und } y \in B. \quad (2.4)$$

- Auf die Reihenfolge von A und B kommt es nicht an, d.h. (2.4) bedeutet auch, dass $\{\varphi = \alpha\}$ die Mengen B und A trennt.



Man spricht von **striker Trennung**, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$\varphi(x) + \varepsilon \leq \alpha \leq \varphi(y) - \varepsilon, \quad x \in A, y \in B.$$

2.5 Satz (Hahn-Banach, geometrische Form). Sei V ein normierter Raum und A, B zwei nichtleere, disjunkte, konvexe Teilmengen von V . Die Menge A sei offen. Dann gibt es eine abgeschlossene, A und B trennende Hyperebene.

Zum Beweis benötigen wir das **Minkowski-Funktional** $p_C: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ einer konvexen Menge $C \subset V$, $0 \in C$

$$p_C(x) := \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1}x \in C\},$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$. Man beachte, dass $p_C(x) = \infty$ nur möglich ist, wenn $0 \in \partial C$.

2.6 Lemma. Sei C eine offene, konvexe Teilmenge des normierten Vektorraumes V . Es sei $0 \in C$. Dann gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass für alle $x \in V$

$$0 \leq p_C(x) \leq M \|x\|. \quad (2.7)$$

Ferner gilt

$$C = \{x \in V \mid p_C(x) < 1\} \quad (2.8)$$

und p_C ist positiv homogen und subadditiv.

BEWEIS : Sei $B_r(0) \subset C$, $r > 0$. Dann gilt $(r - \varepsilon) \frac{x}{\|x\|} \in C$, $x \in V$, und $p_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$ nach Definition von p_C . Daraus folgt (2.7) mit $M = r^{-1}$. Die positive Homogenität von p_C folgt aus

$$\begin{aligned} p_C(\lambda x) &= \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1} \lambda x \in C\} \\ &= \inf\{\beta \lambda \mid \beta^{-1} x \in C\} \\ &= \lambda \inf\{\beta \mid \beta^{-1} x \in C\} = \lambda p_C(x), \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Wir beweisen nun (2.8). Ist $x \in C$, so gilt auch $(1 + \varepsilon)x \in C$ für genügend kleines ε wegen der Offenheit von C . Daher $p_C(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$, d.h. $C \subset \{x \in V \mid p_C(x) < 1\}$. Ist umgekehrt $p_C(x) < 1$, dann folgt $\alpha^{-1}x \in C$ mit einem $\alpha \in (0, 1)$ und somit $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1 - \alpha)0 \in C$. Es verbleibt der Nachweis der Subadditivität von p_C . Seien $x, y \in V$, $\varepsilon > 0$. Da

$$p_C\left(\frac{x}{p_C(x) + \varepsilon}\right) = \frac{1}{p_C(x) + \varepsilon} p_C(x) < 1,$$

folgt

$$\frac{x}{p_C(x) + \varepsilon} \in C \quad \text{und entsprechend} \quad \frac{y}{p_C(y) + \varepsilon} \in C.$$

Aus Konvexitätsgründen ist

$$\frac{tx}{p_C(x) + \varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p_C(y) + \varepsilon} \in C, \quad 0 < t < 1.$$

Setzt man

$$t = \frac{p_C(x) + \varepsilon}{p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon},$$

folgt

$$\frac{x + y}{p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon} \in C.$$

Dies zusammen mit (2.8) und der positiven Homogenität liefert

$$p_C(x + y) < p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon.$$

Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt die Behauptung. ■

2.9 Lemma (Trennung einer konvexen Menge und eines Punktes).

Sei V ein normierter Vektorraum und $C \subset V$ offen, konvex und nichtleer. Sei $x_0 \in V$, $x_0 \notin C$. Dann gibt es ein beschränktes, lineares Funktional $f \in V^*$, $f \neq 0$ mit

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{für alle } x \in C.$$

BEWEIS : Mithilfe einer Verschiebung können wir o.B.d.A. $0 \in C$ annehmen. Auf dem eindimensionalen Raum $\langle x_0 \rangle$ definieren wir das lineare Funktional φ durch

$$\varphi(tx_0) = t.$$

Es gilt $\varphi(x) \leq p_C(x)$, für alle $x \in \langle x_0 \rangle$, da anderenfalls für ein $y = tx_0 \in \langle x_0 \rangle$ gelten würde:

$$p_C(y) < \varphi(y), \quad \text{d.h. } 0 \leq p_C(tx_0) < t.$$

Somit ist $t > 0$ und die positive Homogenität von p_C liefert $p_C(x_0) < 1$. Dies würde nach Lemma 2.6 aber $x_0 \in C$ bedeuten, was ein Widerspruch wäre. Nach dem Satz von Hahn-Banach in der analytischen Form (Satz 1.1) lässt sich φ zu einem linearen Funktional $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen mit

$$f(x) \leq p_C(x).$$

Daraus und aus (2.7) folgern wir $f \in V^*$. Weiter gilt $f(x_0) = \varphi(x_0) = 1$ und $f(x) \leq p_C(x) < 1$ für $x \in C$ wegen (2.8). Somit ist das Lemma bewiesen. ■

BEWEIS (Satz 2.5): Die Menge $C = A \ominus B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$ ist konvex. Wegen der Darstellung $C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$ ist C offen. Da $A \cap B = \emptyset$, gilt $0 \notin C$. Wegen Lemma 2.9 gibt es $f \in V^*$ (d.h. ist f stetig und linear) mit

$$\begin{aligned} f(z) &< f(0) = 0, & z \in C, \\ f(x) &< f(y), & x \in A, y \in B. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Wir wählen α so, dass

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y).$$

Die Hyperebene $\{f = \alpha\}$ ist wegen Lemma 2.2 abgeschlossen und trennt A und B . ■

In unendlichdimensionalen Räumen lassen sich beliebige konvexe Mengen nicht notwendig trennen.

Beispiel: $V = L^2(\Omega)$, Ω ein Gebiet des \mathbb{R}^n .

$$A = \{z \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega) \mid \|z\|_2 < 1\}, \quad B = \{y_0\}$$

mit fester L^2 -Funktion $y_0 \notin C(\Omega)$, $\|y_0\|_{L^2} = \frac{1}{2}$. Man beachte, dass das Innere von A bezüglich der L^2 -Norm leer ist. Ferner gilt $A \cap B = \emptyset$. Wir behaupten,

dass A und B *nicht* durch eine abgeschlossene Hyperebene getrennt werden können. Gäbe es ein $f \in (L^2(\Omega))^*$ für das

$$f(z) < f(y_0), \quad z \in C(\Omega) \cap L^2, \quad \|z\|_{L^2} < 1,$$

gilt, so folgt, da $C(\Omega) \cap B_1$ dicht in $B_1 = \{w \in L^2 \mid \|w\|_{L^2} \leq 1\}$ ist,

$$\begin{aligned} \|f\|_{(L^2(\Omega))^*} &= \sup_{\|z\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} |f(z)| = \sup_{z \in C(\Omega) \cap B_1} |f(z)| \\ &< |f(y_0)| \leq \frac{1}{2} \|f\|_{(L^2(\Omega))^*}. \end{aligned}$$

Dies wäre ein Widerspruch.

Wir notieren eine Variante der geometrischen Form des Satzes von Hahn-Banach.

2.11 Satz. *Sei V ein normierter Vektorraum und $A, C \subset V$ konvexe, disjunkte nichtleere Teilmengen von V . Ferner sei A abgeschlossen und C kompakt. Dann gibt es eine abgeschlossene Hyperebene, die A und C **strikt** trennt.*

BEWEIS : Für $\varepsilon > 0$ setzen wir $A_\varepsilon = A + B_\varepsilon(0)$, $C_\varepsilon = C + B_\varepsilon(0)$. Offensichtlich sind $A_\varepsilon, C_\varepsilon$ offen, konvex und nichtleer. Falls $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt wurde, gilt auch $A_\varepsilon \cap C_\varepsilon = \emptyset$. Falls dies nicht gelten würde, gäbe es $\varepsilon_n \searrow 0$, $x_n \in A$, $y_n \in C$, $\|x_n - y_n\| \leq 2\varepsilon_n$. Da C **kompakt** ist, gibt es eine Teilfolge $y_{n_k} \rightarrow y \in C$, $k \rightarrow \infty$. Dies ist aber ein Widerspruch.

Satz 2.5 liefert die Existenz einer A_ε und C_ε trennenden, abgeschlossenen Hyperebene, d.h. es gibt ein $f \in V^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$f\left(x + \frac{\varepsilon}{2}z_1\right) \leq \alpha \leq f\left(y + \frac{\varepsilon}{2}z_2\right), \quad \forall x \in A, y \in C, z_1, z_2 \in \overline{B_1(0)}.$$

Somit gilt, da sowohl z_i als auch $-z_i$, $i = 1, 2$, gewählt werden können,

$$f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \frac{\varepsilon}{2} \|f\|, \quad \forall x \in A, y \in C,$$

d.h. A und C sind strikt getrennt. ■

2.12 Folgerung. *Sei V ein normierter Vektorraum und W ein linearer Teilraum mit $\overline{W} \neq V$. Dann existiert ein $f \in V^*$, $f \neq 0$, so dass für alle $x \in \overline{W}$ gilt:*

$$\langle f, x \rangle = 0$$

BEWEIS : Sei $x_0 \in V \setminus \overline{W}$. Dann folgt mit Satz 2.11 für $A = \overline{W}$ und $C = \{x_0\}$, dass es ein $f \in V^*$, $f \neq 0$, und $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle \quad \forall x \in \overline{W}.$$

Für $x \in \overline{W}$ ist $\lambda x \in \overline{W}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, und somit

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \rightarrow \infty \Rightarrow \langle f, x \rangle \leq 0 \\ \lambda \rightarrow -\infty \Rightarrow \langle f, x \rangle \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \langle f, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \overline{W}.$$

■

- Die analytische Form des Satzes von Hahn-Banach lässt sich mit Hilfe der geometrischen Form beweisen - siehe Köthe, Topologische lineare Räume, Kap. 17.2. Der Satz ist dort noch erheblich allgemeiner dargestellt.

2.3 Konjugiert-konvexe Funktionen

In diesem Abschnitt ist V immer ein normierter Vektorraum. Eine Funktion

$$g : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

heißt **konvex**, wenn

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) \quad \text{für alle } x, y \in V, 0 \leq t \leq 1.$$

Hier und im Weiteren benutzen wir die Rechenregeln für die erweiterte Zahlengerade, insbesondere gilt $\alpha \pm \infty = \pm\infty$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Menge aller $x \in V$ mit $g(x) < \infty$ bezeichnen wir mit $D(g)$. Es ist klar, dass $D(g)$ konvex ist.

3.1 Definition. Die Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt **unterhalbstetig**, wenn für alle konvergenten Folgen (x_n) aus V mit $x_n \rightarrow x$ die Ungleichung

$$g(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$$

gilt.

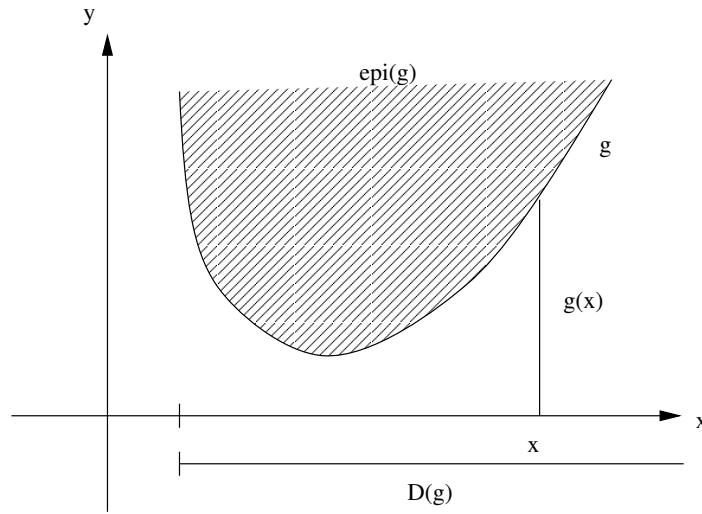
3.2 Definition. Der **Epigraph** einer Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist die Menge

$$\text{epi}(g) := \{(x, \lambda) \in V \times \mathbb{R} \mid g(x) \leq \lambda\}.$$

3.3 Lemma. g ist genau dann unterhalbstetig, wenn der Epigraph von g abgeschlossen ist.

BEWEIS : Übungsaufgabe. ■

- Wenn g konvex ist, ist auch $\text{epi}(g)$ konvex; die Umkehrung ist ebenfalls richtig. (Übungsaufgabe)



3.4 Definition. Sei $g : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $g \not\equiv \infty$, d.h. $D(g) \neq \emptyset$. Die **duale Funktion** $g^* : V^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist definiert durch

$$g^*(f) = \sup_{u \in V} \{ \langle f, u \rangle - g(u) \}, \quad f \in V^*.$$

- Aus der Linearität des Dualitätsprodukts und den Rechenregeln für das Supremum folgt, dass g^* *konvex* ist, selbst wenn g nicht konvex sein sollte.
- Man überlegt sich leicht, dass g^* unterhalbstetig ist. (Übungsaufgabe)

Beispiel: Im Falle von $V = \mathbb{R}$ und $g(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $p \in (1, \infty)$ gilt:

$$g^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \xi x - \frac{|x|^p}{p} \right\}.$$

Für festes ξ sieht man leicht, dass die Funktion $f(x) = \xi x - \frac{|x|^p}{p}$ ein Maximum in einem Punkt x^* hat. Dieser Punkt erfüllt $\xi = |x^*|^{p-1} \operatorname{sign} x^*$ und somit

$$g^*(\xi) = |x^*|^{p-1} (\operatorname{sign} x^*) x^* - \frac{|x^*|^p}{p} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) |x^*|^p.$$

Wegen $|x^*| = |\xi|^{\frac{1}{p-1}}$ folgt

$$g^*(\xi) = \frac{|\xi|^q}{q} \quad \text{mit } q = \frac{p}{p-1}.$$

Mit dieser Darstellung der dualen Funktion folgt sofort die Young-Ungleichung

$$x\xi \leq \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|\xi|^q,$$

die bereits in den Grundvorlesungen bewiesen wurde.

3.5 Lemma. Sei $g : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex, unterhalbstetig und $g \not\equiv \infty$. Dann ist $g^* \not\equiv \infty$.

BEWEIS : Sei $x_0 \in D(g)$ und $\lambda_0 < g(x_0)$. Wir wenden den Satz von Hahn-Banach in der Formulierung von Satz 2.11 an. Als Grundraum wählen wir $V \times \mathbb{R}$, als abgeschlossene, konvexe Menge $A = \text{epi}(g)$, die nicht leer ist, da $g \not\equiv \infty$, und als konvexe, kompakte Menge $C = (x_0, \lambda_0)$. Nach der Definition von $\text{epi}(g)$ ist $A \cap C = \emptyset$. Es gibt daher eine abgeschlossene Hyperebene $H = \{\Phi = \alpha\}$, $\Phi \in (V \times \mathbb{R})^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, die A und C strikt trennt. Man überlegt sich leicht, dass $f \in V^*$ und $k \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $\Phi(x, \lambda) = \langle f, x \rangle + k\lambda$, $x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Somit hat die Hyperebene die Gestalt

$$H = \{(x, \lambda) \in V \times \mathbb{R} \mid \langle f, x \rangle + k\lambda = \alpha\}.$$

Da H die Mengen A und C strikt trennt, gilt für alle $(x, \lambda) \in \text{epi}(g)$

$$\langle f, x \rangle + k\lambda > \alpha > \langle f, x_0 \rangle + k\lambda_0. \quad (3.6)$$

Da $(x_0, g(x_0)) \in \text{epi}(g)$, folgt

$$\langle f, x_0 \rangle + kg(x_0) > \alpha > \langle f, x_0 \rangle + k\lambda_0,$$

woraus wir $k > 0$ schließen. Aus (3.6) folgt mit $\lambda = g(x)$

$$\underline{\langle -\frac{1}{k}f, x \rangle - g(x) < -\frac{\alpha}{k}}, \quad x \in D(g),$$

und damit

$$\underline{g^*\left(-\frac{1}{k}f\right) \leq -\frac{\alpha}{k} < \infty}.$$

■

Für $g^* \not\equiv \infty$ ist $(g^*)^*$ wohldefiniert. Somit können wir die **biduale Funktion** $g^{**} : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zu g durch

$$g^{**}(x) := \sup_{f \in V^*} \{\langle f, x \rangle - g^*(f)\}, \quad (3.7)$$

definieren.

- Offensichtlich ist g^{**} immer konvex.

3.8 Satz. Sei $g : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex, unterhalbstetig und $g \not\equiv \infty$. Dann gilt $g^{**} = g$.

BEWEIS : Es reicht in (3.7) solche $f \in V^*$ zu betrachten, für die $g^*(f) < \infty$, d.h. $f \in D(g^*)$. Aus der Definition von g^* folgt für alle $x \in D(g)$

$$g^*(f) \geq \langle f, x \rangle - g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad g(x) \geq \langle f, x \rangle - g^*(f).$$

Da die letzte Ungleichung auch für alle $x \in V$ gilt, erhalten wir durch Supremumsbildung sofort $g \geq g^{**}$. Es bleibt also $g \leq g^{**}$ zu zeigen.

(i) Sei zunächst $g \geq 0$ und $f \in D(g^*)$ (nur solche f sind für g^{**} relevant). Angenommen, es würde $g^{**} < g$ gelten. Dann gäbe es ein x_0 mit

$$g^{**}(x_0) < g(x_0). \quad (3.9)$$

($g(x_0) = \infty$ ist zugelassen, aber dann beinhaltet die Widerspruchsannahme $g^{**}(x_0) < \infty$). Wir wenden den Satz von Hahn-Banach an und trennen die Menge $\text{epi}(g)$ und den Punkt $(x_0, g^{**}(x_0))$, denn wegen (3.9) liegt $(x_0, g^{**}(x_0))$ nicht in $\text{epi}(g)$. Ähnlich wie beim Beweis des letzten Lemmas erhält man dann ein $f \in V^*$ und $k \in \mathbb{R}$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass für alle $(x, \lambda) \in \text{epi}(g)$

$$\langle f, x \rangle + k\lambda > \alpha > \langle f, x_0 \rangle + kg^{**}(x_0). \quad (3.10)$$

Lässt man in der ersten Ungleichung in (3.10) λ gegen ∞ gehen, folgt $k \geq 0$. Weiterhin schließt man mit $\lambda = g(x) \geq 0$, für $\varepsilon > 0$

$$\langle f, x \rangle + (k + \varepsilon)g(x) > \alpha, \quad \forall x \in D(g),$$

und damit

$$\left\langle -f \frac{1}{k+\varepsilon}, x \right\rangle - g(x) < -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Durch Übergang zum Supremum in x erhalten wir

$$g^*\left(-f \frac{1}{k+\varepsilon}\right) \leq -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Weiterhin folgt daraus und der Definition von $g^{**}(x_0)$

$$\begin{aligned} g^{**}(x_0) &\geq \left\langle -f \frac{1}{k+\varepsilon}, x_0 \right\rangle - g^*\left(-f \frac{1}{k+\varepsilon}\right) \\ &\geq \left\langle -f \frac{1}{k+\varepsilon}, x_0 \right\rangle + \frac{\alpha}{k+\varepsilon}, \end{aligned}$$

und somit

$$\langle f, x_0 \rangle + (k + \varepsilon)g^{**}(x_0) \geq \alpha.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ führt zu einem Widerspruch mit der zweiten Ungleichung in (3.10). Dies beweist $g^{**} = g$ für den Fall $g \geq 0$.

(ii) Den allgemeinen Fall erhält man durch Abändern von g mithilfe eines $f_0 \in D(g^*) \neq \emptyset$

$$\bar{g}(x) := g(x) - \langle f_0, x \rangle + g^*(f_0) \geq 0.$$

Für \bar{g} weiß man, dass $\bar{g}^{**} = \bar{g}$ gilt, und somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \bar{g}^*(f) &= \sup_{x \in V} \{ \langle f, x \rangle - \bar{g}(x) \} \\
 &= \sup_{x \in V} \{ \langle f + f_0, x \rangle - g(x) - g^*(f_0) \} \\
 &= g^*(f + f_0) - g^*(f_0), \\
 \bar{g}^{**}(x) &= \sup_{f \in V^*} \{ \langle f, x \rangle - \bar{g}^*(f) \} \\
 &= \sup_{f \in V^*} \{ \langle f + f_0, x \rangle - g^*(f + f_0) \} + g^*(f_0) - \langle f_0, x \rangle \\
 &= \sup_{\tilde{f} \in V^*} \{ \langle \tilde{f}, x \rangle - g^*(\tilde{f}) \} - \langle f_0, x \rangle + g^*(f_0) \\
 &= g^{**}(x) - \langle f_0, x \rangle + g^*(f_0).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt $g(x) = g^{**}(x)$. ■

Kapitel 3

Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

3.1 Der Satz von Banach-Steinhaus

1.1 Satz (Banach-Steinhaus). *Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Vektorraum. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie beschränkter, linearer Abbildungen von X nach Y , die punktweise beschränkt sind, d.h. für alle $x \in X$ gilt:*

$$\sup_{i \in I} \|A_i x\|_Y < \infty. \quad (1.2)$$

Dann sind die Operatornormen der A_i gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$\sup_{i \in I} \|A_i\|_{L(X,Y)} < \infty. \quad (1.3)$$

- Die Linearität ist eine wichtige Voraussetzung, denn betrachte $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} |x|^2 & \text{für } |x| \leq n \\ n^2 & \text{für } |x| \geq n \end{cases}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\sup_n f_n(x) \leq K(x) < \infty$ und für $|x| < K$ ist $\sup_n |f_n(x)| \leq K^2$, also ist $\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f_n(x)|}{|x|} = n$, aber $\sup_{n \in \mathbb{N}} n = \infty$. Die Folge (f_n) ist also punktweise, aber nicht gleichmäßig beschränkt.

1.4 Satz (Baire). *Sei (X, d) ein nichtleerer, vollständiger metrischer Raum und seien $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ abgeschlossene Mengen mit*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = X.$$

Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\text{int } A_{k_0} \neq \emptyset$.

BEWEIS : Wir machen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ $\text{int } A_k = \emptyset$. Für alle offenen, nichtleeren Mengen U und für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $U \setminus A_k$ offen, denn $U \setminus A_k = \underbrace{U}_{\text{offen}} \cap \underbrace{(X \setminus A_k)}_{\text{offen}}$ und nichtleer, denn sonst wäre $U \subseteq A_k \Rightarrow U = \text{int } U \subseteq \text{int } A_k = \emptyset \Rightarrow U = \emptyset$, ein Widerspruch. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein x , so dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \subseteq U \setminus A_k$ für $\varepsilon < \frac{1}{k}$. Induktiv konstruieren wir also Mengen

$$\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subseteq B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus A_k \quad \varepsilon_k < \frac{1}{k}.$$

Für alle $l \geq k$ ist $x_l \in B_{\varepsilon_k}(x_k)$, also ist (x_k) ist Cauchyfolge, denn für $n, l \geq k$ gilt:

$$d(x_n, x_l) \leq d(x_n, x_k) + d(x_k, x_l) < \frac{2}{k}$$

Da X vollständig ist, gibt es ein $x \in X$, gegen das die Folge (x_k) konvergiert. Für alle $l \geq k$ ist $x_l \in B_{\varepsilon_k}(x_k)$ und also ist $x \in B_{\varepsilon_k}(x_k) \forall k \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion ist $\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subseteq B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus A_k$, also ist $A_k \cap \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} = \emptyset$. Da aber $x \in B_{\varepsilon_k}(x_k)$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$ $x \notin A_k$. Aber $x \in X = \bigcup A_k$, ein Widerspruch. ■

• Eine Menge M heißt **nirgends dicht** $\Leftrightarrow \text{int } \overline{M} = \emptyset$.

1.5 Folgerung. Eine Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen A_k eines vollständigen metrischen Raumes kann nicht den ganzen Raum ergeben.

BEWEIS : Negation der Behauptung von Satz 1.4. ■

BEWEIS (Satz 1.1): Wir betrachten Mengen der Form

$$F_n := \{x \in X \mid \forall i \in I \ \|A_i x\| \leq n\}.$$

Da A_i stetig ist, sind die F_n abgeschlossen und $\bigcup F_n = X$. Nach dem Satz von Baire (Satz 1.4) gibt es dann einen Index n_0 , für den das Innere von F_{n_0} nicht leer ist. Also gibt es einen Punkt $x_0 \in F_{n_0}$ und einen Radius $r > 0$, so dass

$$\overline{B_r(x_0)} \subseteq \text{int } F_{n_0}.$$

Also gilt für alle $z \in \overline{B_1(0)}$ und für alle $i \in I$

$$\|A_i(x_0 + rz)\| \leq n_0,$$

woraus $r\|A_i z\| \leq \|A_i(x_0 + rz)\| + \|A_i x_0\| \leq n_0 + \|A_i x_0\|$ folgt. Wir erhalten demzufolge für alle $z \in \overline{B_1(0)}$ und für alle $i \in I$

$$\|A_i z\| \leq \frac{n_0 + \|A_i x_0\|}{r},$$

d.h. $\|A_i\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|z\| \leq 1} \|A_i z\| \leq c(r, x_0, n_0)$. Also können wir auch das Supremum über alle $i \in I$ bilden und erhalten die Behauptung des Satzes 1.1. ■

• Ungleichung (1.3) kann auch wie folgt formuliert werden: Es existiert ein $K > 0$, so dass für alle $i \in I$ und alle $x \in X$ gilt:

$$\|A_i x\| \leq K\|x\| \quad (1.6)$$

1.7 Folgerung. Seien X, Y Banachräume und seien $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lineare, beschränkte Operatoren von X nach Y , so dass für alle $x \in X$ die Folge $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $Ax \in Y$ konvergiert. Dann gilt:

$$(i) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\|_{L(X,Y)} < \infty$$

$$(ii) \quad A \in L(X, Y)$$

$$(iii) \quad \|A\|_{L(X,Y)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|_{L(X,Y)}$$

BEWEIS : Wir definieren $A: X \rightarrow Y$ durch $Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$.

(i) Für alle $x \in X$ konvergiert nach Voraussetzung die Folge $(A_n x)_n$ gegen Ax , also ist die Folge $(A_n x)$ beschränkt, d.h. für alle $x \in X$ gilt:

$$\|A_n x\| \leq K(x).$$

Dann folgt mit Satz 1.1 (Banach-Steinhaus), dass die Folge $(\|A_n\|)$ gleichmäßig beschränkt ist, d.h. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$

(ii) Für alle $x \in X$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt aus (i), dass $\|A_n x\| \leq K\|x\|$. Dies und die Definition von A liefert $\|Ax\| \leq K\|x\|$. Also ist A beschränkt. Der Operator A ist linear da alle A_n linear sind.

(iii) Für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ gilt $\|A_n x\| \leq \|A_n\| \|x\| \leq \|A_n\|$. Dies impliziert

$$\|Ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \quad \Rightarrow \quad \|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|.$$

■

1.8 Folgerung. Sei X ein Banachraum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Falls für alle $f \in X^*$ die Menge

$$f(M) = \bigcup_{x \in M} \langle f, x \rangle \quad (1.9)$$

in \mathbb{R} beschränkt ist, dann ist auch M beschränkt.

• Eine Menge $M \subset X$, die (1.9) erfüllt, nennt man **schwach beschränkt**. Folgerung 1.8 besagt also, dass schwach beschränkte Mengen „stark“ beschränkt sind.

BEWEIS : Wir wollen Satz 1.1 an mit $X = X^*$, $Y = \mathbb{R}$, $I = M$ anwenden. Für alle $x \in M$ setzen wir $A_x(f) := \langle f, x \rangle$. Für alle $x \in X$ ist A_x eine lineare, beschränkte Abbildung von X^* nach \mathbb{R} . Nach Voraussetzung ist für alle $f \in X^*$ die Menge $\bigcup_{x \in M} \langle f, x \rangle = \bigcup_{x \in M} A_x(f)$ beschränkt, d.h. $\sup_{x \in M} |A_x(f)| < \infty$. Wir haben also gezeigt, dass die Abbildungen $(A_x)_{x \in M}$ punktweise beschränkt sind. Satz 1.1 liefert also die Existenz eines $K > 0$, so dass für alle $f \in X^*$ und für alle $x \in M$ gilt:

$$|\langle f, x \rangle| \leq K \|f\|_{X^*}$$

Daraus folgern wir mithilfe von (1.10) aus Kapitel 1, dass für alle $x \in M$ gilt:

$$\|x\| \leq K.$$

■

1.10 Folgerung. Sei X ein Banachraum und sei $M^* \subseteq X^*$ eine Teilmenge. Falls für alle $x \in X$ die Menge

$$\langle M^*, x \rangle := \bigcup_{f \in M^*} \langle f, x \rangle$$

in \mathbb{R} beschränkt ist, dann ist auch M^* in X^* beschränkt.

BEWEIS : In Analogie zum Beweis von Folgerung 1.8 wollen wir Satz 1.1 anwenden mit $X = X$, $Y = \mathbb{R}$, $I = M^*$.

Für alle $f \in M^*$ definieren wir $A_f(x) := \langle f, x \rangle$. Dies sind lineare, beschränkte Abbildungen von X nach \mathbb{R} . Dann ist nach Voraussetzung für alle $x \in X$ $\sup_{f \in M^*} |A_f(x)| \leq K(x)$. Also können wir mit Satz 1.1 folgern, dass es ein $K > 0$ gibt, so dass für alle $f \in M^*$ und für alle $x \in X$ gilt:

$$|\langle f, x \rangle| \leq K \|x\|_X.$$

Wenn wir also $x \in \overline{B_1(0)}$ wählen, folgt für alle $f \in M^*$:

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq K.$$

■

- Für $X = \mathbb{R}^n$ gilt $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$. Sei (e_k) eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$. Wir wählen $\langle f, x \rangle = e_k \cdot x = x_k$ k -te Komponente von x , d.h. komponentenweise Beschränktheit einer Menge impliziert Beschränktheit der Menge.

3.2 Die Sätze von der offenen Abbildung und vom abgeschlossenen Graphen

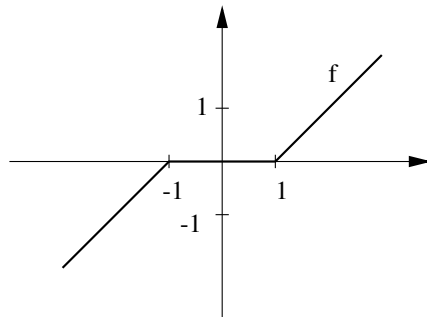
Ebenfalls eine Folge des Baireschen Kategoriensatzes ist der Satz von der offenen Abbildung.

2.1 Definition. Eine Abbildung eines topologischen Raumes in einen anderen heißt **offen**, wenn sie offene Mengen in offene Mengen überführt.

2.2 Satz (von der offenen Abbildung). Jede stetige, lineare, surjektive Abbildung $A : X \rightarrow Y$ eines Banachraumes X in einen Banachraum Y ist offen.

- Betrachten wir den Fall $X = Y = \mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie. Stetige, surjektive nichtlineare Abbildungen sind selbst hier nicht offen. Beispiel für $n = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } |x| \leq 1, \\ x - 1, & \text{für } x > 1, \\ x + 1, & \text{für } x < -1. \end{cases}$$



Offensichtlich ist $f(U_\varepsilon(1))$ nicht offen.

Der Fall $X = Y = \mathbb{R}^n$ mit einer linearen, surjektiven Abbildung A ist elementar. Wenn A surjektiv ist, gilt $\det A > 0$ und A^{-1} existiert auf \mathbb{R}^n . Da A^{-1} stetig, sind Urbilder offener Mengen offen, d.h. A ist offen.

BEWEIS (Satz 2.2): (i) Wir zeigen, dass eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$B_{2c} \subset \overline{AB_1} \quad (2.3)$$

Hierbei ist $B_r = B_r(0)$ und AB_1 das Bild von B_1 unter der Abbildung A , der Querstrich bedeutet den Abschluss der Menge.

Um (2.3) zu beweisen, setzen wir $F_n = n\overline{AB_1}$. Da A surjektiv ist, gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = Y$, und nach dem Satz von Baire (Satz 2.4) muss eines der F_n ein nichtleeres Inneres haben, d.h. $\text{int } F_{n_0} \neq \emptyset$. Daraus folgt, dass auch $\text{int } F_1 = \text{int } \overline{AB_1} \neq \emptyset$, d.h. $\exists c > 0$ und $y_0 \in F_1$ mit

$$B_{4c}(y_0) \subset \overline{AB_1}.$$

Insbesondere ist $y_0 \in \overline{AB_1}$ und aus Symmetriegründen $-y_0 \in \overline{AB_1}$. Daraus folgt

$$B_{4c}(0) = -y_0 + B_{4c}(y_0) \subset \overline{AB_1} + \overline{AB_1} = 2\overline{AB_1}.$$

Daraus ergibt sich (2.3).

(ii) Wir zeigen, dass mit obigem c

$$B_c \subset AB_1. \quad (2.4)$$

Um (2.4) zu beweisen, müssen wir zu $y \in B_c$ ein $x \in B_1$ mit $Ax = y$ finden. Wegen (2.3) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $z \in X$ mit $\|z\| < \frac{1}{2}$ und $\|y - Az\| < \varepsilon$, denn

$$y \in B_c \subset \overline{AB_{1/2}}.$$

Wählt man $\varepsilon = \frac{c}{2}$, hat man ein $z_1 \in X$ mit

$$\|z_1\| < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \|y - Az_1\| < \frac{c}{2}.$$

Wir wiederholen das Spielchen mit $y - Az_1$ anstelle von y und wählen nun $\varepsilon = \frac{c}{4}$. Da $y - Az_1 \in B_{c/2} \subset \overline{AB_{1/4}}$, finden wir ein z_2 mit

$$\|z_2\| < \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \|(y - Az_1) - Az_2\| < \frac{c}{4}.$$

Dieses Argument wird wiederholt, und wir erhalten eine Folge (z_n) mit

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{und} \quad \|y - A(z_1 + z_2 + \dots + z_n)\| < \frac{c}{2^n}.$$

Die Elemente $x_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ bilden daher eine Cauchyfolge mit Limes x . Es gilt $\|x_n\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ und somit

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1.$$

Ferner gilt $\|y - Ax_n\| \rightarrow 0$, und schließlich $y - Ax = 0$. Das gewünschte x mit $\|x\| < 1$ ist damit konstruiert.

(iii) Sei $U \subseteq X$ offen und sei $y \in AU$. Dann gibt es ein $x_0 \in U$ mit $y = Ax_0$. Da U offen ist gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ und also gilt

$$AB_\varepsilon(x_0) \subseteq AU.$$

Aber $AB_\varepsilon(x_0) = Ax_0 + \varepsilon AB_1$, was mit Hilfe von (2.4) liefert $AB_\varepsilon(x_0) \supseteq Ax_0 + \varepsilon B_c = B_{\varepsilon c}(Ax_0) = B_{\varepsilon c}(y)$, d.h. $B_{\varepsilon c}(y) \subseteq AU$, d.h. AU ist offen. ■

Aus dem Satz über die offene Abbildung folgt der Satz von der stetigen Inversen, da die Stetigkeit einer Abbildung äquivalent dazu ist, dass Urbilder offener Mengen offen sind.

2.5 Satz (von der stetigen Inversen). *Es seien X und Y Banachräume und $A : X \rightarrow Y$ linear, stetig und bijektiv. Dann ist A^{-1} stetig.*

BEWEIS : Wir bezeichnen $B := A^{-1} : Y \rightarrow X$. Sei $U \subseteq X$ offen. Das Urbild $B^{-1}U$ ist aber die Menge AU , da $B^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$ gilt. Aber nach Satz 2.2 ist die Abbildung A offen, d.h. AU ist offen. Somit ist auch $B^{-1}U$ offen, d.h. $B = A^{-1}$ ist stetig. ■

Eine weitere Folgerung ist die Äquivalenz von Normen.

2.6 Satz. *Der Vektorraum B sei bezüglich der Normen $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ vollständig. Es gelte $\|u\|_1 \leq \|u\|_0$ für alle $u \in B$. Dann gibt es eine Konstante K , so dass*

$$\|u\|_0 \leq K\|u\|_1.$$

BEWEIS : Wir wenden Satz 2.5 an mit $A = I$ als identischer Abbildung. Der Raum X bzw. Y sei der mit $\|\cdot\|_0$ bzw. $\|\cdot\|_1$ versehene Raum B . Als Abbildung von X nach Y ist die identische Abbildung I stetig, da $\|x\|_1 = \|Ix\|_1 \leq \|x\|_0$. Nach Satz 2.5 ist daher die Inverse stetig; daraus folgt, dass ein $K > 0$ existiert mit

$$\|x\|_0 = \|I^{-1}x\|_0 \leq K\|x\|_1.$$

■

Eine weitere elegante Folge ist:

2.7 Satz (vom abgeschlossenen Graphen). *Seien X und Y Banachräume und sei $A : X \rightarrow Y$ linear. Der Graph $G(A) = \{(x, Ax) \in X \times Y \mid x \in X\}$ sei abgeschlossen in $X \times Y$, d.h. aus $(x_n, Ax_n) \rightarrow (x, y)$ in $X \times Y$ folgt $y = Ax$. Dann ist A stetig.*

BEWEIS : Wir versehen X mit der Graphennorm

$$\|x\|_{G(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

Der Raum X versehen mit der Graphennorm ist ein Banachraum. In der Tat, sei $(x_n) \subseteq X$ eine Cauchyfolge, bezüglich $\|\cdot\|_{G(A)}$. Dann sind sowohl $(x_n) \subseteq X$ als auch $(Ax_n) \subseteq Y$ Cauchyfolgen und es gibt Elemente $x \in X$ und $y \in Y$ mit $x_n \rightarrow x$ und $Ax_n \rightarrow y$. Da der Graph abgeschlossen ist, folgt $y = Ax$ und somit konvergiert (x_n) bezüglich der Graphennorm gegen x . Weiter gilt

$$\|x\|_X \leq \|x\|_{G(A)}$$

und Satz 2.6 liefert die Existenz einer Konstante $K > 0$, mit

$$\|Ax\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_{G(A)} \leq K\|x\|,$$

d.h. A ist beschränkt. ■

2.8 Satz. *Seien V, W abgeschlossene lineare Unterräume des Banachraumes X so, dass $V + W$ abgeschlossen ist. Dann gibt es eine Konstante $K > 0$ so, dass für alle $z \in V + W$ eine Darstellung $z = v + w$ existiert mit $v \in V$, $w \in W$ und*

$$\|v\| \leq K\|z\|, \quad \|w\| \leq K\|z\|. \quad (2.9)$$

BEWEIS : Wir versehen den Raum $V \times W$ mit der Norm $\|(v, w)\| := \|v\| + \|w\|$ und den Raum $V + W \subseteq X$ mit der Norm von X . Dann definieren wir die Abbildung $A : V \times W \rightarrow V + W : (v, w) \mapsto v + w$. A ist offensichtlich linear und surjektiv. Außerdem ist A stetig, da A beschränkt ist mit Konstante 1:

$$\|A(v, w)\| = \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| = \|(v, w)\|_{V \times W}.$$

Dann folgt aus Satz 2.2 (Satz von der offenen Abbildung), dass A offen ist. Im Beweis von Satz 2.2 haben wir die Ungleichung (2.4) bewiesen:

$$\exists c > 0 : B_c(0) \subseteq AB_1(0),$$

d.h. für alle $z \in V + W$ mit $\|z\| < c$ gibt es ein $v \in V$ und ein $w \in W$, so dass gilt:

$$z = A(v, w) = v + w \text{ wobei } \|(v, w)\| = \|v\| + \|w\| < 1.$$

Wir können nun skalieren, so dass die Aussage für alle $z \in V + W$ gilt. In der Tat: $z \in V + W \Rightarrow \frac{c}{1+\varepsilon} \frac{z}{\|z\|} \in B_c(0)$. Also gibt es ein $v' \in V$ und ein $w' \in W$ mit $\|v'\| + \|w'\| < 1$ und $\frac{cz}{(1+\varepsilon)\|z\|} = v' + w'$, d.h. $z = \underbrace{\frac{(1+\varepsilon)\|z\|}{c}}_{=: \alpha} (v' + w') =: v + w$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \|v\| + \|w\| &= \|\alpha v'\| + \|\alpha w'\| \\ &= \alpha(\|v'\| + \|w'\|) \\ &< \frac{1+\varepsilon}{c} \|z\| \end{aligned}$$

Dd dies gilt für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\|v\| + \|w\| \leq \frac{1}{c} \|z\|$. ■

Eine weitere überraschende Folgerung aus unseren Sätzen ist der *Satz von Hellinger-Toeplitz*:

2.10 Satz. Sei H ein Hilbertraum und $A : H \rightarrow H$ linear und selbstadjungiert, d.h. für alle $x, y \in H$ gilt: $(Ax, y)_H = (x, Ay)_H$. Dann ist A beschränkt.

BEWEIS : Wir wollen Satz 2.7 anwenden und müssen also zeigen, dass der Graph $G(A)$ abgeschlossen ist. Aufgrund der Linearität reicht es zu zeigen, dass aus $x_n \rightarrow 0$, $Ax_n \rightarrow y$ folgt $y = 0$. Wir haben aber

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= (y, y) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n, y \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, Ay) = 0. \end{aligned}$$

■

3.3 Adjungierte lineare Operatoren in Banach-Räumen

Wir wollen nun die Bildbereiche von linearen Operatoren in Banachräumen charakterisieren. Dazu ist es nützlich einerseits Orthogonalitätsrelationen in Banachräumen zu betrachten als auch adjungierte Operatoren einzuführen.

• Wenn $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung ist, kann sie durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ repräsentiert werden. Wir wollen wissen, wann das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung besitzt.

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right) =: (\tilde{A}, \tilde{b})$$

$$Ax = b \text{ ist lösbar} \Leftrightarrow \tilde{b}_4 = \tilde{b}_5 = 0.$$

Dies kann man auch anders formulieren: Die transponierte Matrix \tilde{A}^T hat die Form

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen sofort: $\ker(\tilde{A}^T) = \text{span}\{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ und es gilt: $Ax = b$ ist lösbar $\Leftrightarrow \forall y \in \ker(\tilde{A}^T)$ gilt:

$$(y, b) = 0$$

3.1 Definition. Sei X ein Banachraum. Das **Orthogonalkomplement** einer Menge $M \subset X$ ist die Menge

$$M^\perp := \{f \in X^* \mid \langle f, m \rangle = 0 \text{ für alle } m \in M\} \subset X^*.$$

Analog definiert man für Mengen $N \subset X^*$ das **Präorthogonalkomplement** durch

$$N^\perp = \{x \in X \mid \langle f, x \rangle = 0 \text{ für alle } f \in N\} \subset X.$$

Man nennt die Menge $M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp$ auch das **Biorthogonalkomplement** von M .

- Es ist klar, dass M^\perp und N^\perp lineare Unterräume sind.

3.2 Satz. Sei X ein Banachraum und $W \subset X$ ein linearer Teilraum. Dann gilt

$$W^{\perp\perp} = \overline{W}.$$

Sei $Y \subset X^*$ ein linearer Teilraum. Dann gilt

$$Y^{\perp\perp} \supset \overline{Y}.$$

BEWEIS : Es ist klar, dass $W \subset W^{\perp\perp}$, denn ist $w \in W$, so gilt $\langle f, w \rangle = 0$ für alle $f \in W^\perp$. Dies impliziert $w \in W^{\perp\perp}$. Ferner ist klar, dass $W^{\perp\perp}$ abgeschlossen ist, da M^\perp für jede Menge M abgeschlossen ist. In der Tat, wenn $f_j \rightarrow f$, $f_j \in M^\perp$, folgt für alle $m \in M$, dass $0 = \langle f_j, m \rangle \rightarrow \langle f, m \rangle$, d.h. $f \in M^\perp$. Analog beweist man, dass $M^{\perp\perp}$ abgeschlossen ist. Da $W \subset W^{\perp\perp}$, gilt somit $\overline{W} \subset W^{\perp\perp}$. Angenommen, \overline{W} wäre echt in $W^{\perp\perp}$ enthalten. Dann gibt es ein $x_0 \in W^{\perp\perp}$ mit $x_0 \notin \overline{W}$. Nach dem Satz von

Hahn-Banach (Satz 2.11) gibt es eine abgeschlossene Hyperebene, die x_0 und \overline{W} trennt, d.h. es existiert $f \in X^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle, \quad x \in \overline{W}.$$

Da $W \subseteq X$ ein linearer Teilraum ist, folgt $\langle f, x \rangle = 0$ für alle $x \in W$ (man ersetze x durch λx , $\lambda \rightarrow \infty$), d.h. $f \in W^\perp \subseteq X^*$. Da andererseits $x_0 \in W^{\perp\perp} \subseteq X$, gilt dann $\langle f, x_0 \rangle = 0$. Dies ist ein Widerspruch und die 1. Behauptung ist bewiesen. Analog beweist man $Y \subset Y^{\perp\perp}$ und dass $Y^{\perp\perp}$ abgeschlossen ist. Daraus folgt die 2. Behauptung und der Satz ist bewiesen. ■

• In der zweiten Behauptung des Satzes gilt keine Gleichheit, denn wenn wir den Beweis analog durchführen wollten, erhielten wir:

Annahme: $\overline{Y} \subsetneq Y^{\perp\perp} \subseteq X^*$. Dann gibt es ein $f_0 \in Y^{\perp\perp} \setminus \overline{Y} \subseteq X^*$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es dann ein $\varphi \in X^{**}$:

$$\varphi(f) < \alpha < \varphi(f_0) \quad \forall f \in \overline{Y}.$$

Dann folgt mit den gleichen Argumenten wie im ersten Teil, dass für alle $f \in \overline{Y}$ gilt $\varphi(f) = 0$. Aber daraus können wir nicht folgern, dass $\varphi \in \overline{Y}^\perp \subseteq X$, da $\varphi \in X^{**}$, d.h. wir können die Annahme nicht zum Widerspruch führen.

• Rettung: $\forall \varphi \in V^{**} \exists x_0 \in X$:

$$\varphi(f) = \langle f, x_0 \rangle$$

Diese Aussage ist richtig für reflexive Banachräume.

• Wir haben folgende Inklusionen:

$$\begin{array}{lll} W \subseteq X & W^\perp \subseteq X^* & W^{\perp\perp} \subseteq X \\ Y \subseteq X^* & Y^\perp \subseteq X & Y^{\perp\perp} \subseteq X^* \end{array}$$

• Insbesondere haben wir bewiesen, dass für $W \subseteq X$ und $Y \subseteq X^*$ die linearen Teilräume W^\perp und Y^\perp immer abgeschlossen sind.

Als nächstes wollen wir die Orthogonalkomplemente von Summen und Durchschnitten linearer Teilräume von X bzw. X^* charakterisieren. Wir erinnern an die Definition der Summe von linearen Teilräumen V, W eines Banachraumes X

$$V + W := \{x \in X \mid x = v + w, v \in V, w \in W\}.$$

3.3 Lemma. *Sei X ein Banachraum. Aus $U_1 \subseteq U_2 \subset X$ folgt $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$.*

BEWEIS : Für $f \in U_2^\perp$ gilt $\langle f, x \rangle = 0$ für alle $x \in U_2 \supseteq U_1$, woraus $\langle f, x \rangle = 0$ für alle $x \in U_1$ folgt, d.h. $f \in U_1^\perp$. ■

3.4 Satz. *Seien V, W abgeschlossene, lineare Teilräume des Banachraumes X . Dann gilt:*

$$(i) \quad V \cap W = (V^\perp + W^\perp)^\perp.$$

$$(ii) \quad V^\perp \cap W^\perp = (V + W)^\perp.$$

BEWEIS : (i) $V \cap W \subset (V^\perp + W^\perp)^\perp$ ist einfach zu sehen. In der Tat, für $x \in V \cap W$ und $f \in V^\perp + W^\perp = \{f \in X^* \mid f = v^* + w^*, v^* \in V^\perp, w^* \in W^\perp\}$, erhält man $\langle f, x \rangle = \langle v^*, x \rangle + \langle w^*, x \rangle = 0 + 0$, d.h. $x \in (V^\perp + W^\perp)^\perp$.

Die umgekehrte Inklusion folgt mit Lemma 3.3, denn es gilt sowohl $V^\perp \subseteq V^\perp + W^\perp$, also auch $W^\perp \subseteq V^\perp + W^\perp$. Also erhalten wir sowohl $(V^\perp + W^\perp)^\perp \subseteq V^{\perp\perp}$ als auch $(V^\perp + W^\perp)^\perp \subseteq W^{\perp\perp}$, d.h. $(V^\perp + W^\perp)^\perp \subseteq W^{\perp\perp} \cap V^{\perp\perp}$. Nun folgt mit Satz 3.2 aber sowohl $V^{\perp\perp} = V$ als auch $W^{\perp\perp} = W$ und somit die umgekehrte Inklusion.

(ii) $V^\perp \cap W^\perp \subset (V + W)^\perp$ ist einfach zu sehen. In der Tat, aus $f \in V^\perp \cap W^\perp$ folgt sowohl $\langle f, x \rangle = 0$ für alle $x \in V$ als auch $\langle f, y \rangle = 0$ für alle $y \in W$, d.h. $f \in (V + W)^\perp$. Für die umgekehrte Inklusion sei $f \in (V + W)^\perp$. Also gilt für alle $x \in V + W$ mit $x = v + w$, $v \in V$, $w \in W$: $\langle f, v + w \rangle = 0$. Wenn man nun $v = 0$, bzw. $w = 0$ wählt erhält man sofort $\langle f, v \rangle = 0$, bzw. $\langle f, w \rangle = 0$. Also ist $f \in V^\perp \cap W^\perp$. ■

3.5 Folgerung. *Seien V, W abgeschlossene, lineare Teilräume des Banachraumes X . Dann gilt:*

$$(i) \quad (V \cap W)^\perp \supseteq \overline{V^\perp + W^\perp}.$$

$$(ii) \quad (V^\perp \cap W^\perp)^\perp = \overline{V + W}.$$

BEWEIS : (i) Satz 3.4 liefert $V \cap W = (V^\perp + W^\perp)^\perp$. Daraus folgt $(V \cap W)^\perp = (V^\perp + W^\perp)^{\perp\perp} \supseteq \overline{V^\perp + W^\perp}$, wobei wir im letzten Schritt Satz 3.2 benutzt haben.

(ii) Satz 3.4 liefert $V^\perp \cap W^\perp = (V + W)^\perp$. Daraus folgt $(V^\perp \cap W^\perp)^\perp = (V + W)^{\perp\perp} = \overline{V + W}$, wobei wiederum Satz 3.2 benutzt wurde. ■

3.6 Satz. *Seien V, W abgeschlossene, lineare Teilräume des Banachraumes X . Dann sind äquivalent:*

$$(i) \quad V + W \text{ ist abgeschlossen in } X.$$

- (ii) $V^\perp + W^\perp$ ist abgeschlossen in X^* .
- (iii) $V + W = (V^\perp \cap W^\perp)^\perp$.
- (iv) $V^\perp + W^\perp = (V \cap W)^\perp$.

BEWEIS : (i) \Rightarrow (iii) Dies ist Folgerung 3.5 (ii).

(iii) \Rightarrow (i) Für jeden linearen Teilraum $N \subset X^*$ ist N^\perp abgeschlossen.

(iv) \Rightarrow (ii) Für jeden linearen Teilraum $M \subset X$ ist M^\perp abgeschlossen.

(i) \Rightarrow (iv) Aus Folgerung 3.5 (i) folgt $(V \cap W)^\perp \supseteq V^\perp + W^\perp$. Für die umgekehrte Inklusion sei $f \in (V \cap W)^\perp$. Wir definieren die Abbildung $\varphi : V + W \rightarrow \mathbb{R}$, durch $\varphi(x) := \langle f, v \rangle$, wobei $x = v + w \in V + W$ mit $v \in V, w \in W$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn aus $x = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$ folgt $v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V \cap W$. Da $f \in (V \cap W)^\perp$ erhalten wir $\langle f, v_1 - v_2 \rangle = 0$ und somit $\langle f, v_1 \rangle = \langle f, v_2 \rangle$. Offenbar ist φ linear. Da $V + W$ abgeschlossen ist, folgt aus Satz 2.8, dass es ein $c > 0$ gibt, so dass es für alle $x \in V + W$ eine Darstellung $x = v + w$ mit $v \in V, w \in W$ gibt, für die

$$\|v\| + \|w\| \leq c\|x\|$$

gilt. Also gilt auch

$$|\varphi(x)| = |\langle f, v \rangle| \leq \|f\|_{X^*} \|v\|_X \leq c\|f\|_{X^*} \|x\|_X,$$

d.h. $\varphi \in (V + W)^*$. Da $V + W \subseteq X$, folgt aus dem Satz von Hahn-Banach die Existenz einer Fortsetzung $\tilde{\varphi} \in X^*$. Also ist $(f - \tilde{\varphi}) \in V^\perp$, denn $\langle f - \tilde{\varphi}, v \rangle = \langle f, v \rangle - \langle \tilde{\varphi}, v \rangle = \langle f, v \rangle - \langle f, v \rangle = 0$, da $v \in V \subseteq V + W$. Weiterhin ist $\tilde{\varphi} \in W^\perp$, denn für alle $w \in W \subseteq V + W$ gilt $\langle \tilde{\varphi}, w \rangle = \varphi(w) = \varphi(0 + w) = 0$. Also lässt sich f schreiben als $f = (f - \tilde{\varphi}) + \tilde{\varphi}$, d.h. $f \in V^\perp + W^\perp$.

(ii) \Rightarrow (i) Dies sprengt den Rahmen der Vorlesung. Der Beweis kann in Brezis S. 25 gefunden werden. ■

Es treten oft, insbesondere in Anwendungen, lineare Operatoren auf, die nicht notwendig beschränkt sind und deren natürlicher Definitionsbereich nicht der ganze Raum ist.

3.7 Beispiel. Ein typisches Beispiel eines solchen Operators ist die Ableitung. Wir versehen $C([0, 1])$ mit der üblichen Supremumsnorm und definieren $A : D(A) \subset C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, wobei $D(A) = C^1([0, 1])$, durch $Au = u'$. Dies ist offensichtlich ein linearer Operator. Man überlegt sich leicht, dass A nicht beschränkt ist.

3.8 Definition. Seien X und Y Banachräume. Ein linearer Operator $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$, wobei $D(A)$ ein linearer Unterraum von X ist, wird **unbeschränkter, linearer Operator** genannt. $D(A)$ heißt **Definitionsbereich** von A , der **Bildbereich** von A ist $R(A) := \{Ax \in Y \mid x \in D(A)\}$ und der **Kern** von A ist $N(A) := \{x \in D(A) \mid Ax = 0\}$.

Die Terminologie „unbeschränkter, linearer Operator“ ist verbreitet, aber nicht immer glücklich, da ein unbeschränkter, linearer Operator mit $D(A) = X$ stetig sein kann und somit beschränkt ist.

3.9 Definition. Sei $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ ein unbeschränkter, linearer Operator und sei $D(A)$ ein dichter linearer Unterraum von X . Wir setzen

$$D(A^*) := \{v \in Y^* \mid \exists c \geq 0, \text{ so dass } |\langle v, Au \rangle_Y| \leq c \|u\| \text{ für alle } u \in D(A)\}.$$

Ist nun $v \in D(A^*)$, so definiert $\varphi(u) = \langle v, Au \rangle_Y$ ein **beschränktes lineares Funktional** auf $D(A)$, welches durch Abschluss auf ganz X zu einem Element $f \in X^*$ fortgesetzt werden kann, d.h.

$$\langle f, u \rangle_X = \varphi(u) = \langle v, Au \rangle_Y \quad u \in D(A).$$

Man definiert den **adjungierten Operator** $A^* : D(A^*) \subseteq Y^* \rightarrow X^*$ durch

$$A^*v := f.$$

Es ist klar, dass f eindeutig ist, denn aus $\langle f, u \rangle = \langle \tilde{f}, u \rangle = \varphi(u)$ für $u \in D(A)$ folgt $f = \tilde{f}$, da $D(A)$ dicht in X ist und f, \tilde{f} stetig sind. Ebenso klar ist, dass A^* ein linearer Operator ist und $D(A^*)$ ein linearer Teilraum ist. Auf Grund der Definition von A^* haben wir

$$\langle A^*v, u \rangle_{X^*, X} = \langle v, Au \rangle_{Y^*, Y} \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*). \quad (3.10)$$

Im Allgemeinen ist $D(A^*)$ nicht dicht in Y^* , selbst wenn A abgeschlossen ist (siehe Definition 3.13). Falls Y reflexiv ist kann man zeigen, dass $D(A^*)$ dicht in Y^* ist. Im Falle linearer, beschränkter Operatoren treten solche Probleme nicht auf.

3.11 Satz. Für einen linearen, beschränkten Operator $A \in L(X, Y)$ ist auch der adjungierte Operator A^* linear und beschränkt und es gilt

$$\|A\|_{L(X, Y)} = \|A^*\|_{L(Y^*, X^*)}. \quad (3.12)$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} N(A^*) &= R(A)^\perp & \text{und} & & N(A) &= R(A^*)^\perp, \\ N(A^*)^\perp &= \overline{R(A)} & \text{und} & & N(A)^\perp &\supseteq \overline{R(A^*)}. \end{aligned}$$

BEWEIS : Aus

$$|\langle y^*, Ax \rangle_Y| \leq \|y^*\|_{Y^*} \|A\|_{L(X, Y)} \|x\|_X$$

folgt $D(A^*) = Y^*$. Daraus, der Definition der Operatornorm und (3.10) folgt

$$\|A^*y^*\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle A^*y^*, x \rangle_X| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle y^*, Ax \rangle_Y| \leq \|y^*\|_{Y^*} \|A\|_{L(X,Y)},$$

d.h. $A^* \in L(Y^*, X^*)$ und $\|A^*\|_{L(Y^*, X^*)} = \sup_{\|y^*\|_{Y^*} \leq 1} \|A^*y^*\|_{X^*} \leq \|A\|_{L(X,Y)}$. Aus der Normformel (Kapitel 2 (1.10)) folgt:

$$\|Ax\|_Y = \sup_{\|y^*\|_{Y^*} \leq 1} |\langle y^*, Ax \rangle_Y| \leq \|A^*\|_{L(Y^*, X^*)} \|x\|_X,$$

d.h. $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y \leq \|A^*\|_{L(Y^*, X^*)}$. Damit folgt $\|A\| = \|A^*\|$.

Aus (3.10) folgt die Äquivalenz folgender Aussagen:

$$\begin{aligned} x &\in N(A), \\ Ax &= 0, \\ \langle y^*, Ax \rangle_Y &= 0 \quad \forall y^* \in Y^*, \\ \langle A^*y^*, x \rangle_X &= 0 \quad \forall y^* \in Y^*, \\ x &\in R(A^*)^\perp, \end{aligned}$$

d.h. $N(A) = R(A^*)^\perp$. $R(A^*) = N(A)^\perp$ beweist man analog. Die letzten beiden Aussagen folgen sofort aus Satz 3.2. ■

Für lineare, unbeschränkte Operatoren ist die Situation komplizierter. Wir wollen analoge Aussagen beweisen, unter der Zusatzvoraussetzung, dass A abgeschlossen ist. Für die meisten Anwendungen reicht dies aus. Um dieselben Aussagen wir im endlichdimensionalen Fall zu erhalten, müssen wir noch mehr voraussetzen.

3.13 Definition. Sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ein unbeschränkter, linearer Operator. Dann heißt A **abgeschlossen**, wenn der Graph

$$G(A) := \{(v, Av) \mid v \in D(A)\}$$

abgeschlossen in $X \times Y$ ist.

Offenbar ist jeder lineare, stetige Operator $A \in L(X, Y)$ abgeschlossen. Man überlegt sich leicht, dass der Ableitungsoperator aus Beispiel 3.7 abgeschlossen ist.

3.14 Lemma. Sei $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ ein unbeschränkter, linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann ist A^* abgeschlossen, d.h. der Graph $G(A^*) := \{(v, A^*v) \mid v \in D(A^*)\}$ ist abgeschlossen in $Y^* \times X^*$.

BEWEIS : Sei $v_n \rightarrow v$, $A^*v_n \rightarrow f$, $v_n \in D(A^*)$, in Y^* bzw. X^* . Wir müssen zeigen, dass

$$v \in D(A^*) \quad \text{und} \quad A^*v = f.$$

Es gilt aber für alle $u \in D(A)$

$$\langle v_n, Au \rangle = \langle A^*v_n, u \rangle.$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert

$$\langle v, Au \rangle = \langle f, u \rangle,$$

woraus man $v \in D(A^*)$ und $A^*v = f$ abliest. ■

Die Graphen von A und A^* sind durch eine Orthogonalitätsbeziehung miteinander verbunden. Um dies zu sehen betrachten wir für den linearen Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$, wobei $D(A)$ ein dichter, linearer Teilraum ist, den Isomorphismus

$$J : Y^* \times X^* \rightarrow X^* \times Y^* : (y^*, x^*) \mapsto (-x^*, y^*). \quad (3.15)$$

Weiterhin definieren wir für $(f, g) \in (X \times Y)^* = X^* \times Y^*$, und $(x, y) \in X \times Y$ Abbildung

$$\langle (f, g), (x, y) \rangle_{(X^* \times Y^*), (X \times Y)} := \langle f, x \rangle_{X^*, X} + \langle g, y \rangle_{Y^*, Y}. \quad (3.16)$$

3.17 Lemma. *Sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ein unbeschränkter, linearer Operator und $\overline{D(A)} = X$. Dann gilt für die Graphen von A und A^**

$$J(G(A^*)) = G(A)^\perp.$$

BEWEIS : Für $(y^*, x^*) \in Y^* \times X^*$ gilt:

$$\begin{aligned} (y^*, x^*) &\in G(A^*) \subseteq Y^* \times X^* \\ &\Leftrightarrow y^* \in D(A^*) \quad \& \quad x^* = A^*y^* \\ &\Leftrightarrow y^* \in D(A^*) \quad \& \quad \langle x^*, x \rangle = \langle A^*y^*, x \rangle = \langle y^*, Ax \rangle \quad \forall x \in D(A) \\ &\Leftrightarrow y^* \in D(A^*) \quad \& \quad \forall x \in D(A) : \langle -x^*, x \rangle + \langle y^*, Ax \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow (-x^*, y^*) \in G(A)^\perp. \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von J folgt daraus sofort die Behauptung. ■

Für das weitere Vorgehen ist es nützlich folgende Bezeichnungen einzuführen:

$$E := X \times Y, \quad E^* := X^* \times Y^*.$$

Dann sind $G := G(A) \subseteq E$ und $L := X \times \{0\} \subseteq E$ jeweils lineare Teilräume. Weiterhin kann man $R(A)$, $R(A^*)$, $N(A)$ und $N(A^*)$ mithilfe von G und L ausdrücken:

$$N(A) \times \{0\} = G \cap L, \quad (3.18)$$

denn in der linken Menge sind die Elemente (x, Ax) mit $x \in D(A)$ und $Ax = 0$ und in der rechten Menge sind die Elemente $(x, 0) \in G(A)$, d.h. $x \in D(A)$ und $0 = Ax$.

$$X \times R(A) = G + L, \quad (3.19)$$

denn in der linken Mengen sind die Elemente der Form (x, Av) mit $v \in D(A)$ und in der rechten Menge sind die Elemente der Form $(x, Ax) + (w, 0)$ mit $x \in D(A)$, $w \in X$.

$$\{0\} \times N(A^*) = G^\perp \cap L^\perp, \quad (3.20)$$

denn in G^\perp sind die (x^*, y^*) mit $0 = \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, Ax \rangle = \langle x^*, x \rangle + \langle A^* y^*, x \rangle$ für alle $x \in D(A)$ und in L^\perp sind die (x^*, y^*) mit $0 = \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, 0 \rangle = \langle x^*, x \rangle$ also ist $x^* = 0$. Daraus folgt $y^* \in N(A^*)$.

$$R(A^*) \times Y^* = G^\perp + L^\perp, \quad (3.21)$$

denn in der linken Menge sind die (x^*, z^*) mit $x^* \in X^*$, $z^* \in Y^*$ für die es ein $y^* \in D(A^*)$ gibt mit $x^* = A^* y^*$, die Elemente haben also die Form $(A^* y^*, z^*)$ mit $y^* \in D(A^*)$, $z^* \in Y^*$. In der rechten Menge sind die Elemente der Form $(x^*, y^*) + (v^*, w^*)$ mit $(x^*, y^*) \in G^\perp \Leftrightarrow 0 = \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, Ax \rangle = \langle x^*, x \rangle + \langle A^* y^*, x \rangle$ für alle $x \in D(A)$, d.h. $x^* = -A^* y^*$, $y^* \in D(A^*)$; sowie $(v^*, w^*) \in L^\perp \Leftrightarrow \langle v^*, x \rangle + \langle w^*, 0 \rangle = 0$ für alle $x \in X$, d.h. $v^* = 0$. Daraus folgt, dass sich die rechte Seite schreiben lässt als $(-A^* y^*, y^*) + (0, w^*) = (-A^* y^*, y^* + w^*)$, $y^* \in D(A^*)$, $w^* \in Y^*$.

3.22 Folgerung. Sei $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ ein abgeschlossener, unbeschränkter, linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann gilt:

- (i) $N(A) = R(A^*)^\perp$.
- (ii) $N(A^*) = R(A)^\perp$.
- (iii) $N(A)^\perp \supseteq \overline{R(A^*)}$.
- (iv) $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$.

BEWEIS : (i) In (3.21) haben wir gezeigt, dass $R(A^*) \times Y^* = G^\perp + L^\perp$ und es ist

$$(G^\perp + L^\perp)^\perp \stackrel{\text{Satz 3.4(i)}}{=} G \cap L \stackrel{(3.18)}{=} N(A) \times \{0\}.$$

Andererseits ist

$$(R(A^*) \times Y^*)^\perp = R(A^*)^\perp \times \{0\},$$

woraus die Behauptung folgt.

(ii) In (3.19) haben wir gezeigt, dass $X \times R(A) = G + L$. Aus

$$(G + L)^\perp \stackrel{\text{Satz 3.4(ii)}}{=} G^\perp \cap L^\perp \stackrel{(3.20)}{=} \{0\} \times N(A^*)$$

und

$$(X \times R(A))^\perp = \{0\} \times (R(A))^\perp$$

folgt dann die Behauptung.

(iii) In (i) haben wir gezeigt, dass $N(A) = R(A^*)^\perp$, also ist $N(A)^\perp = R(A^*)^{\perp\perp} \stackrel{\text{Satz 3.2}}{\supseteq} \overline{R(A^*)}$.

(iv) In (ii) haben wir gezeigt, dass $N(A^*) = R(A)^\perp$, also ist $N(A^*)^\perp = R(A)^{\perp\perp} \stackrel{\text{Satz 3.2}}{=} \overline{R(A)}$. ■

• Im Allgemeinen ist Aussage (iii) scharf, denn es existiert sogar ein beschränkter, linearer Operator $A: X \rightarrow Y$ mit $N(A)^\perp \neq \overline{R(A^*)}$.

Die Aussage der Folgerung 3.22 lässt sich allerdings verschärfen, wenn man die Abgeschlossenheit des Bildbereiches $R(A^*)$ fordert. Dann erhalten wir analoge Aussagen zum endlichdimensionalen Fall.

3.23 Satz. *Sei $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ ein abgeschlossener, unbeschränkter, linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

- (i) $R(A)$ ist abgeschlossen.
- (ii) $R(A^*)$ ist abgeschlossen.
- (iii) $R(A) = N(A^*)^\perp$.
- (iv) $R(A^*) = N(A)^\perp$.

BEWEIS : Mit Hilfe von (3.18) bis (3.21) kann man die Aussagen (i) bis (iv) auch wie folgt formulieren:

- (i) $R(A)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $R(A) \times X$ abgeschlossen ist und dies ist nach (3.19) genau dann der Fall, wenn $G + L$ abgeschlossen ist.
- (ii) $R(A^*)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $R(A^*) \times Y^*$ abgeschlossen ist, und dies ist nach (3.21) genau dann der Fall, wenn $G^\perp + L^\perp$ abgeschlossen ist.

- (iii) $R(A) = N(A^*)^\perp$ genau dann, wenn $X \times R(A) = X \times N(A^*)^\perp$, und dies ist nach (3.19) und (3.20) genau dann der Fall, wenn $G + L = (\{0\} \times N(A^*))^\perp = (G^\perp \cap L^\perp)^\perp$.
- (iv) $R(A^*) = N(A)^\perp$ genau dann, wenn $R(A^*) \times Y^* = N(A)^\perp \times Y^*$, und dies ist nach (3.21) und (3.18) genau dann der Fall, wenn $G^\perp + L^\perp = (N(A) \times \{0\})^\perp = (G \cap L)^\perp$.

Mit dieser Umformulierung sind die Behauptungen gerade gerade die Behauptungen aus Satz 3.6 mit $X = E$, $V = G$, und $W = L$. ■

• Die Behauptung (iii) lässt sich so lesen: $Au = f$ ist genau dann lösbar, wenn $\langle v, f \rangle = 0$ für alle $v \in N(A^*)$.

3.24 Satz. Sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ein abgeschlossener, unbeschränkter, linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann sind äquivalent:

- (i) A ist surjektiv, d.h. $R(A) = Y$.
- (ii) Es gibt ein $c > 0$, so dass für alle $y^* \in D(A^*)$:

$$\|y^*\|_{Y^*} \leq c \|A^* y^*\|_{X^*}.$$

- (iii) $N(A^*) = \{0\}$ und $R(A^*)$ ist abgeschlossen.

BEWEIS : (i) \Rightarrow (iii) Nach Satz 3.23 folgt aus $R(A) = Y$, dass $R(A^*)$ abgeschlossen ist und $R(A) = N(A^*)^\perp$. Dies und $Y = R(A)$ impliziert mithilfe von Satz 3.2 $\{0\} = Y^\perp = N(A^*)^{\perp\perp} \supseteq N(A^*) \supseteq \{0\}$, d.h. $N(A^*) = \{0\}$.

(iii) \Rightarrow (i) Da $R(A^*)$ abgeschlossen ist, folgt aus Satz 3.23, dass $R(A) = N(A^*)^\perp$. Dies und $N(A^*) = \{0\}$ impliziert $R(A) = N(A^*)^\perp = \{0\}^\perp = Y$.

(iii) \Rightarrow (ii) Mithilfe von (3.20) und (3.21) folgt

$$G^\perp \cap L^\perp = \{0\} \times N(A^*) = \{(0, 0)\}$$

und

$$R(A^*) \times Y^* = G^\perp + L^\perp$$

abgeschlossen ist. Satz 2.8 angewendet auf $V = G^\perp$, $W = L^\perp$ liefert: Es gibt ein $c > 0$, so dass es für alle $z \in G^\perp + L^\perp$ eine Darstellung $z = a + b$ gibt mit $a \in G^\perp$ und $b \in L^\perp$ mit

$$\|a\| \leq c\|z\|, \quad \|b\| \leq c\|z\|. \quad (3.25)$$

Diese Darstellung ist eindeutig, da $G^\perp \cap L^\perp = \{(0, 0)\}$. Für beliebige $y^* \in D(A^*)$ kann man $z := (A^* y^*, 0) \in R(A^*) \times Y^* = G^\perp + L^\perp$ schreiben als

$$(A^* y^*, 0) = (A^* y^*, -y^*) + (0, y^*).$$

Wenn wir $b := (0, y^*) \in L^\perp$ und $a := (A^*y^*, -y^*) \in G^\perp$ zeigen, folgt aus der zweiten Ungleichung in (3.25)

$$\|b\|_{X^* \times Y^*} = \|y^*\|_{Y^*} \leq c \|z\|_{X^* \times Y^*} = c \|A^*y^*\|_{X^*}.$$

Dies ist gerade die Behauptung in (ii). Aber $L = X \times \{0\}$ impliziert $L^\perp = \{0\} \times Y^*$, und somit ist $(0, y^*) \in L^\perp$. Um $(A^*y^*, -y^*) \in G^\perp$ zu zeigen, benutzen wir die Abbildung

$$J : Y^* \times X^* \rightarrow X^* \times Y^* : (y^*, x^*) \mapsto (-x^*, y^*)$$

aus (3.15). In Lemma 3.17 haben wir gezeigt, dass

$$J(G(A^*)) = G(A)^\perp = G^\perp.$$

Also müssen wir noch zeigen, dass $(A^*y^*, -y^*)$ im Bild von $G(A^*)$ unter der Abbildung J liegt. Sei also $y^* \in D(A^*)$, dann ist auch $-y^* \in D(A^*)$ und $(-y^*, A^*(-y^*)) \in G(A^*)$. Also gilt:

$$J(-y^*, A^*(-y^*)) = (-A^*(-y^*), -y^*) = (A^*y^*, -y^*)$$

Also ist $(A^*y^*, -y^*) \in G^\perp$.

(ii) \Rightarrow (iii) Nach Voraussetzung gilt für alle $y^* \in D(A^*)$

$$\|y^*\| \leq c \|A^*y^*\|.$$

Wenn also $y^* \in N(A^*)$ ist, folgt $y^* = 0$ und deshalb $N(A^*) = \{0\}$. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $R(A^*)$ abgeschlossen ist. Dazu wählen wir uns eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq R(A^*)$ mit $z_n \rightarrow z$ in X^* . Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $y_n^* \in D(A^*)$ mit $A^*y_n^* = z_n$. Da A^* linear ist, folgt:

$$\|y_n^* - y_m^*\| \leq c \|A^*y_n^* - A^*y_m^*\|.$$

Da die rechte Seite eine Cauchyfolge ist, ist auch (y_n^*) eine Cauchyfolge in Y^* . Es gibt also ein $y^* \in Y^*$ mit $y_n^* \rightarrow y^*$ in Y^* . Aus Lemma 3.14 wissen wir, dass $G(A^*)$ abgeschlossen ist. Somit erhalten wir

$$G(A^*) \ni (y_n^*, A^*y_n^*) \rightarrow (y^*, z) \in G(A^*),$$

d.h. $z = A^*y^*$ mit $y^* \in D(A^*)$, also $z \in R(A^*)$. ■

Analog beweist man:

3.26 Satz. Sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ein abgeschlossener, unbeschränkter, linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann sind äquivalent:

(i) A^* ist surjektiv, d.h. $R(A^*) = X^*$.

(ii) $\exists c > 0 \forall x \in D(A)$:

$$\|x\| \leq c \|Ax\|.$$

(iii) $N(A) = \{0\}$ und $R(A)$ ist abgeschlossen.

In den Sätzen 3.24 und 3.26 benutzt man meist die Implikation (ii) \Rightarrow (i). Um das Problem $Au = f \in Y$ zu lösen beweist man für das duale Problem $A^*v = g \in X^*$ die Abschätzung

$$\|v\|_{Y^*} \leq c \|g\|_{X^*}.$$

Dabei muss man sich nicht um die Lösbarkeit des dualen Problems kümmern, sondern nur beweisen, dass jede Lösung des dualen Problems diese **apriori Abschätzung** erfüllt.

Beispiel: Wir wollen nun in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ das (elliptische) Problem

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^d \partial_i(a_{ij}(x) \partial_j u(x)) &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.27)$$

mit $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ und $f \in L^2(\Omega)$ betrachten.

Um einen geeigneten Operator zu definieren, auf den die Resultate angewendet werden können, benötigen wir noch die Definition der schwachen Ableitung und der daraus gebildeten Sobolevräume.

3.28 Definition. Sei $u \in L^2(\Omega)$. Die Funktion $u_i \in L^2(\Omega)$ heißt **erste schwache Ableitung von u bezüglich der i -ten Variablen**, wenn

$$(u, \partial_i \varphi)_{L^2} = -(u_i, \varphi)_{L^2} \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.29)$$

Hat die erste schwache Ableitung $u_i \in L^2(\Omega)$ selbst wieder eine erste schwache Ableitung $u_{i,j} \in L^2(\Omega)$ bezüglich der j -ten Variablen, so heißt $u_{i,j}$ **zweite schwache Ableitung bezüglich der i, j -ten Variablen**. Mit diesen Begriffen definieren wir die **Sobolevräume** wie folgt:

$$\begin{aligned} W^{1,2}(\Omega) &:= \{u \in L^2(\Omega) \mid u \text{ besitzt erste schwache Ableitungen}\}, \\ W^{2,2}(\Omega) &:= \{u \in L^2(\Omega) \mid u \text{ besitzt erste und zweite schwache Ableitungen}\}, \\ W_0^{1,2}(\Omega) &:= \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,2}}. \end{aligned}$$

3.30 Eigenschaften der Sobolevräume.

- Die schwachen Ableitungen sind durch die partielle Integrationsformel motiviert. Jede Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega})$ besitzt schwache Ableitungen und diese stimmen mit den klassischen Ableitungen überein. Die Funktionen u_i bzw. $u_{i,j}$ werden deshalb meist mit $\partial_i u$ bzw. $\partial_j \partial_i u$ bezeichnet.
- Die schwachen Ableitungen sind eindeutig.
- Durch

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_{W^{1,2}} &:= \|\cdot\|_{L^2} + \sum_i \|\partial_i \cdot\|_{L^2} \\ \|\cdot\|_{W^{2,2}} &:= \|\cdot\|_{L^2} + \sum_i \|\partial_i \cdot\|_{L^2} + \sum_{i,j} \|\partial_j \partial_i \cdot\|_{L^2}\end{aligned}$$

sind Normen auf $W^{1,2}(\Omega)$ bzw. $W^{2,2}(\Omega)$ gegeben. Beide Räume sind Banachräume.

Wir definieren nun den Operator $A : D(A) \subseteq L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ mit $D(A) := W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ durch

$$Au := - \sum_{i,j} \partial_i (a_{ij} \partial_j u) \quad (3.31)$$

$D(A)$ ist dicht in $L^2(\Omega)$, da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ und C_0^∞ ein Unterraum von $D(A)$ ist. A ist offensichtlich linear. Wir wollen nun den adjungierten Operator $A^* : D(A^*) \subseteq (L^2(\Omega))^* \rightarrow (L^2(\Omega))^*$ bestimmen. Es gilt:

$$v \in D(A^*) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0 \forall u \in D(A) : |\langle v, Au \rangle| \leq c \|u\|_{L^2}$$

Offensichtlich ist $D(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (L^2(\Omega))^*$, denn für $v \in L^2(\Omega)$ ist durch

$$\langle v, u \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} uv \, dx, \quad \forall u \in L^2(\Omega)$$

ein stetiges, lineares Funktional auf $L^2(\Omega)$ gegeben. Für $u, v \in D(A)$ erhalten

wir

$$\begin{aligned}
\langle v, Au \rangle_{L^2} &= \int_{\Omega} - \sum_{i,j} \partial_i (a_{ij} \partial_j u) v \, dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \partial_j u \partial_i v \, dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \partial_j u v n_i \, ds \\
&= \int_{\Omega} - \sum_{i,j} u \partial_j (a_{ij} \partial_i v) \, dx \\
&\leq \|u\|_{L^2} \left\| \sum_{i,j} \partial_j (a_{ij} \partial_i v) \right\|_{L^2} =: c(v, a_{ij}) \|u\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt: $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \subseteq D(A^*)$ und

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^* v, u \rangle \quad u, v \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega). \quad (3.32)$$

Interpretation für A^* :

$$\begin{aligned}
- \sum_{i,j=1}^d \partial_j (a_{ij} \partial_i v) &= g && \text{in } \Omega \\
v &= 0 && \text{auf } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass A abgeschlossen ist und dass für $u \in D(A)$ gilt

$$\|u\|_{W^{2,2}} \leq c \|Au\|_{L^2}. \quad (3.33)$$

Mithilfe von (3.33) und Satz 3.26 haben wir also gezeigt, dass A^* surjektiv ist, d.h. für alle $g \in (L^2(\Omega))^*$ existiert ein $v \in D(A^*)$ mit $A^*v = g$. Das Problem ist, dass wir $D(A^*)$ nicht charakterisiert haben.

Man kann für Gebiete Ω mit Rand aus C^2 zeigen, dass es Lösungen $u \in D(A)$ von $Au = f$ für alle $f \in L^2(\Omega)$ gibt. Dies ist allerdings ein aufwendiger Regularitätssatz. Daraus kann man dann folgern $D(A^*) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

- Für $A : X \rightarrow Y$ linear, mit $\dim X < \infty$, $\dim Y < \infty$ gilt:

$$\begin{aligned}
A \text{ surjektiv} &\Leftrightarrow A^* \text{ injektiv,} \\
A \text{ injektiv} &\Leftrightarrow A^* \text{ surjektiv.}
\end{aligned}$$

In der Tat, da $R(A)$ und $R(A^*)$ endlichdimensional sind, sind sie abgeschlossen, und die Behauptung folgt dann, indem man Satz 3.24 und Satz 3.26 anwendet.

- Im allgemeinen Fall, d.h. $\dim X = \dim Y = \infty$ gilt nur:

$$\begin{aligned} A \text{ surjektiv} &\Rightarrow A^* \text{ injektiv} \\ A^* \text{ surjektiv} &\Rightarrow A \text{ injektiv} \end{aligned}$$

Beispiel: Für $X = Y = \ell^2 := \{(x_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ betrachte den Operator $A : x = (x_n) \mapsto (\frac{1}{n}x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ℓ^2 ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Aus

$$(Ax, y) = \sum_n \frac{1}{n} x_n y_n = (x, Ay),$$

folgt $A = A^*$, d.h. A ist selbstadjungiert. A und A^* sind natürlich injektiv. Wir zeigen nun, dass sie nicht surjektiv sind: $Ax = y \Leftrightarrow \frac{1}{n}x_n = y_n$, $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_n = ny_n$ mit $(x_n), (y_n) \in \ell^2$. Wähle nun $y_n = n^{-\frac{3}{4}} \in \ell^2$, da $\sum_n (n^{-\frac{3}{4}})^2 = \sum_n n^{-\frac{3}{2}} < \infty$. Aus obiger Rechnung erhalten wir also $x_n = ny_n = nn^{-\frac{3}{4}} = n^{\frac{1}{4}}$, aber $\sum_n n^{\frac{2}{4}} = \infty$, d.h. $(x_n) \notin \ell^2$. A ist also injektiv aber nicht surjektiv.

Kapitel 4

Schwache Topologie und reflexive Räume

4.1 Konstruktion von Topologien

Sei X ein Vektorraum und seien $(Y_i, \sigma_i)_{i \in I}$ topologische Räume. Für alle $i \in I$ seien $\varphi_i : X \rightarrow Y_i$ Abbildungen. Wir suchen die *größte* Topologie τ auf X , so dass alle φ_i stetig sind, d.h. die Topologie, die am wenigsten offene Mengen enthält. Sei $\omega_i \subseteq Y_i$, $i \in I$ beliebig, eine offene Menge, d.h. $\omega_i \in \sigma_i$, dann ist notwendigerweise $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ ein Element von τ .

Wir bezeichnen die Familie aller solcher Mengen mit $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Wir suchen nun das kleinste Mengensystem τ , dass $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ enthält und abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte und beliebiger Vereinigungen ist. Dazu bilden wir *zuerst* alle möglichen endlichen Durchschnitte von Mengen aus $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, d.h. $\bigcap_{\lambda \in \Gamma} U_\lambda$, $\Gamma \subseteq \Lambda$, Γ endlich. Dieses System bezeichnen wir mit Φ . Danach bilden wir beliebige Vereinigungen von Mengen aus Φ . Dieses neue System sei \mathcal{F} . Es ist klar, daß \mathcal{F} abgeschlossen bzgl. beliebigen Vereinigungen ist. Es ist nicht völlig offensichtlich, dass \mathcal{F} auch abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte ist. Aber es gilt:

1.1 Lemma. *Das System \mathcal{F} ist abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte.*

BEWEIS : Übungsaufgabe aus der Mengentheorie, siehe Folland, Real Analysis. ■

Somit ist die gesuchte größte Topologie τ gegeben durch endliche Durchschnitte von Mengen der Form $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$, ω_i offen in Y_i , und beliebigen Vereinigungen solcher Mengen. In Termen von Umgebungen ausgedrückt heißt dies: sei $x \in X$, dann ist eine Umgebungsbasis von x bzgl. τ gegeben durch endliche Durchschnitte der Form $\varphi_i^{-1}(V_i)$, V_i Umgebung von $\varphi_i(x_i)$ in Y_i .

Die Konvergenz von Folgen in der Topologie τ ist vollständig durch die Abbildungen φ_i , $i \in I$ charakterisiert.

1.2 Lemma. Sei (x_n) eine Folge in X . Die Folge x_n konvergiert gegen $x \in X$ bzgl. τ genau dann, wenn $\varphi_i(x_n) \rightarrow \varphi_i(x)$ für alle $i \in I$.

BEWEIS : Aus $x_n \rightarrow x$ bzgl. τ folgt sofort $\varphi_i(x_n) \rightarrow \varphi_i(x)$, da alle φ_i bzgl. τ stetig sind. Umgekehrt sei U eine Umgebung von x . Aufgrund der Konstruktion von τ können wir annehmen, dass U die Form $U = \bigcap_{i \in J} \varphi_i^{-1}(V_i)$, $J \subset I$, J endlich, V_i Umgebung von $\varphi_i(x)$ in Y_i , hat. Für alle $i \in J$ existiert ein N_i mit $\varphi_i(x_n) \in V_i$ für alle $n \geq N_i$. Sei $N = \max N_i$. Dann ist $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. ■

1.3 Lemma. Sei (Z, σ) ein topologischer Raum und $\psi : (Z, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ eine Abbildung. Dann ist ψ stetig genau dann, wenn für alle $i \in I$ die Abbildung $\varphi_i \circ \psi : (Z, \sigma) \rightarrow (Y_i, \sigma_i)$ stetig ist.

BEWEIS : “ \Rightarrow ” ψ und φ_i sind stetig, also ist auch $\psi \circ \varphi$ stetig.

“ \Leftarrow ” Sei $U \subseteq X$ offen, d.h. $U \in \tau$. U lässt sich also schreiben als:

$$U = \bigcup_{\text{beliebig endlich}} \bigcap \varphi_i^{-1}(\omega_i), \quad \omega_i \in \sigma_i.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(U) &= \psi^{-1}\left(\bigcap_{\text{beliebig endlich}} \bigcup \varphi_i^{-1}(\omega_i)\right) \\ &= \bigcap_{\text{beliebig endlich}} \bigcup \psi^{-1}\varphi_i^{-1}(\omega_i) \\ &= \bigcap_{\text{beliebig endlich}} \bigcup (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(\omega_i). \end{aligned}$$

Also ist $\psi^{-1}(U)$ offen, d.h. ψ ist stetig. ■

4.2 Schwache Topologie

Sei nun X ein Banachraum und $f \in X^*$. Dann definieren wir

$$\varphi_f : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle f, x \rangle_X,$$

und erhalten die Abbildungen $(\varphi_f)_{f \in X^*}$.

2.1 Definition. Sei X ein Banachraum und X^* sein Dualraum. Die **schwache Topologie** $\tau(X, X^*)$ ist die grösste Topologie auf X , bezüglich derer alle Abbildungen $(\varphi_f)_{f \in X^*}$ stetig sind, d.h. wir wenden die Konstruktion aus Abschnitt 4.1 auf $X = X$, $Y_i = \mathbb{R}$ und $I = X^*$ an.

2.2 Definition. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge in X . Man sagt, dass (x_n) **schwach gegen x konvergiert**, wenn für alle $f \in X^*$ gilt:

$$\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad (n \rightarrow \infty)$$

Notation: $x_n \rightharpoonup x$ ($n \rightarrow \infty$)

• Aufgrund von Lemma 1.2 gilt: $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow x_n \rightarrow x$ bezüglich $\tau(X, X^*)$. Um die schwache Konvergenz einer Folge von der Konvergenz bzgl. der Norm, d.h. $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, zu unterscheiden werden wir diese als **starke Konvergenz** bezeichnen und durch $x_n \rightarrow x$ notieren.

2.3 Satz. Die schwache Topologie $\tau(X, X^*)$ ist eine Hausdorff Topologie.

BEWEIS : Sei $x_1 \neq x_2 \in X$. Zu zeigen ist: $\exists U_1, U_2 \in \tau$ mit $x_i \in U_i$ für $i = 1, 2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Wir wenden die geometrische Variante des Satzes von Hahn-Banach an. Die Menge $\{x_1\}$ ist abgeschlossen und konvex und die Menge $\{x_2\}$ ist kompakt und konvex. Dann folgt mit Kapitel 2, Satz 2.11, dass es ein $f \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\langle f, x_1 \rangle < \alpha < \langle f, x_2 \rangle.$$

Die Mengen $U_1 := f^{-1}(-\infty, \alpha) \in \tau$ und $U_2 := f^{-1}(\alpha, \infty) \in \tau$ besitzen dann die gesuchten Eigenschaften $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $x_i \in U_i$, $i = 1, 2$. ■

Satz 2.3 impliziert insbesondere, dass der schwache Grenzwert eindeutig bestimmt ist.

• In unendlich-dimensionalen Banachräumen X ist die schwache Topologie $\tau(X, X^*)$ niemals metrisierbar, d.h. es gibt keine Metrik d , so dass die durch d induzierte Topologie auf X mit der schwachen Topologie übereinstimmt. Somit sind insbesondere Stetigkeit und Folgenstetigkeit, Kompaktheit und Folgenkompaktheit, sowie Abschluss und Folgenabschluss nicht äquivalent! Deshalb ist es sehr hilfreich, die Umgebungen in der schwachen Topologie zu charakterisieren.

2.4 Lemma. Sei $x_0 \in X$. Eine Umgebungsbasis von x_0 bzgl. $\tau(X, X^*)$ ist durch die Mengen der Form

$$V = \{x \in X \mid |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, i \in J\},$$

wobei J endlich ist, $f_i \in X^*$ und $\varepsilon > 0$, gegeben.

BEWEIS : Es gilt:

$$\begin{aligned} V &= \bigcap_{i \in J} \{x \in X \mid |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{i \in J} \left(f_i^{-1}(-\infty, \langle f_i, x_0 \rangle + \varepsilon) \cap f_i^{-1}(-\varepsilon + \langle f_i, x_0 \rangle, \infty) \right), \end{aligned}$$

also ist V eine offene Umgebung von x_0 . Sei U Umgebung von x_0 bezüglich $\tau(X, X^*)$. Dann folgt wegen der Konstruktion von $\tau(X, X^*)$, dass wir oBdA U schreiben können als $U = \bigcap_{i \in J} \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i)$, wobei ω_i Umgebung von $\langle f_i, x_0 \rangle$ in \mathbb{R} ist und J endlich. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $(\langle f_i, x_0 \rangle - \varepsilon, \langle f_i, x_0 \rangle + \varepsilon) \subseteq \omega_i$, $i \in J$, und somit gilt:

$$x_0 \in \bigcap_{i \in J} \{x \in X \mid |\langle f_i, x_0 - x \rangle| < \varepsilon\} \subseteq \bigcap_{i \in J} \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i),$$

d.h. Mengen obiger Form bilden eine Umgebungsbasis. ■

2.5 Satz. Für eine Folge $(x_n) \subseteq X$ gilt:

- (i) $x_n \rightarrow x$ bzgl. $\tau(X, X^*)$ genau dann, wenn $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ für alle $f \in X^*$,
- (ii) $x_n \rightarrow x$ stark in X , dann gilt: $x_n \rightharpoonup x$ schwach in X ,
- (iii) $x_n \rightharpoonup x$ schwach in X , dann ist die Folge $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und es gilt:

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

- (iv) $x_n \rightharpoonup x$ schwach in X und $f_n \rightarrow f$ stark in X^* , dann gilt:

$$\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle.$$

BEWEIS : (i) Dies ist gerade Lemma 1.2.

(ii) Für $f \in X^*$ ist $|\langle f, x_n - x \rangle| \leq \|f\|_{X^*} \|x_n - x\|_X \rightarrow 0$, d.h. $x_n \rightarrow x$.

(iii) Da (x_n) schwach gegen x konvergiert, folgt $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ für alle $f \in X^*$, d.h. die Folge reeller Zahlen $(\langle f, x_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt. Definiere nun die Operatoren

$$A_n : X^* \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \langle f, x_n \rangle.$$

Diese sind linear und beschränkt, denn $\|A_n\| \leq \|x_n\|$. Aus der obigen Überlegung folgt, dass $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise beschränkt ist, d.h. für alle $f \in X^*$ ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} |A_n(f)| < \infty$. Dann ist nach Kapitel 3, Satz 1.1

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty,$$

d.h.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |A_n(f)| < \infty.$$

Aus der Normformel (Kapitel 2 (1.10)) und der Definition von A_n folgt

$$\|x_n\| = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |\langle f, x_n \rangle| = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |A_n(f)|.$$

Also ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$, d.h. $\|x_n\|$ beschränkt. Außerdem wissen wir $|\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\|_{X^*} \|x_n\|$ und somit gilt:

$$|\langle f, x \rangle| = \liminf_{n \rightarrow \infty} |\langle f, x_n \rangle| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f\| \|x_n\|.$$

Wiederum aus der Normformel erhalten wir also

$$\|x\| = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \|f\| \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

(iv) Aus $x_n \rightharpoonup x$ und $f_n \rightarrow f$ folgt:

$$\begin{aligned} |\langle f, x \rangle - \langle f_n, x_n \rangle| &\leq |\langle f, x \rangle - \langle f, x_n \rangle| + |\langle f, x_n \rangle - \langle f_n, x_n \rangle| \\ &= |\langle f, x - x_n \rangle| + |\langle f - f_n, x_n \rangle| \\ &\leq |\langle f, x - x_n \rangle| + \|f - f_n\|_{X^*} \|x_n\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

da $\|x_n\|$ nach (iii) beschränkt ist. ■

- Im Allgemeinen impliziert in unendlichdimensionalen Banachräumen schwache Konvergenz einer Folge nicht deren starke Konvergenz. Beispiele dafür überlegt man sich leicht, wenn man den Dualraum X^* eines Banachraumes X charakterisiert hat. Wir werden in Kapitel 6 zeigen, dass der Dualraum eines Hilbertraumes H mit dem Hilbertraum H identifiziert werden kann, d.h. für alle Funktionale $F \in H^*$ existiert ein $f \in H$ so, dass $\langle F, u \rangle_H = (f, u)_H$ für alle $u \in H$. Wenn wir den $L^2(0, 2\pi; \mathbb{C})$ betrachten, wissen wir, dass $\varphi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{N}$, ein Orthonormalsystem ist. Die Besselsche Ungleichung impliziert, dass für jede Funktion $g \in L^2(0, 2\pi; \mathbb{C})$ die Folge der Fourierkoeffizienten $c_k(g) = c_k := (g, \varphi_k)$ in ℓ^2 liegt, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, und somit $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$ folgt. Dies und die obige Identifizierung der Funktionale impliziert, dass $\varphi_k \rightharpoonup 0$ in $L^2(0, 2\pi; \mathbb{C})$. Andererseits gilt $\|\varphi_k - \varphi_n\|_2 = \sqrt{2}$, $k \neq n$, und somit kann (φ_k) nicht stark konvergieren.

Somit benötigt man im Allgemeinen Zusatzbedingungen um aus schwacher Konvergenz starke Konvergenz schliessen zu können. Es gibt aber auch seltene, pathologische unendlichdimensionale Banachräume in denen jede schwach konvergente Folge stark konvergent ist.

2.6 Satz. *Sei X ein endlichdimensionaler Banachraum. Dann stimmen die starke und die schwache Topologie überein. Insbesondere konvergiert eine Folge schwach genau dann, wenn sie stark konvergiert.*

BEWEIS : Die starke Topologie ist durch die Norm induziert. Sie ist *immer* feiner als die schwache Topologie. Wir müssen also nur zeigen:

U offen bezüglich starker Topologie $\Rightarrow U$ offen bezüglich schwacher Topologie

Sei $x_0 \in X$ und V eine Umgebung von x_0 bezüglich der starken Topologie. Dann gibt es einen Radius $r > 0$, so dass $B_r(x_0) \subseteq V$. Da X endlichdimensional ist, gibt es eine Basis e_1, \dots, e_n von X mit $\|e_i\| = 1$. Für jedes $x \in X$ gibt es dann eindeutige $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ mit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Wir definieren die Abbildungen $f_i \in X^*$ durch $f_i : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x_i$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \left\| \sum_{i=1}^n (x - x_0)_i e_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \langle f_i, x - x_0 \rangle e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\langle f_i, x - x_0 \rangle|, \end{aligned}$$

da $\|e_i\| = 1$. Setze

$$U := \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in X \mid |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \frac{r}{n} \right\}.$$

Dann ist U offene Umgebung von x_0 bezüglich $\tau(X, X^*)$ und für $x \in U$ gilt:

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^n |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \sum_{i=1}^n \frac{r}{n} = n \frac{r}{n} = r.$$

Also ist $x \in B_r(x_0)$, d.h. $U \subseteq B_r(x_0) \subseteq V$, d.h. V ist Umgebung von x_0 bezüglich $\tau(X, X^*)$. ■

- Nach Konstruktion ist die schwache Topologie *immer* gröber als die starke Topologie, d.h. U ist offen bzgl. der schwachen Topologie impliziert, dass U offen bzgl. der starken Topologie ist.
- Wenn $\dim X < \infty$ ist, dann stimmen die starke und die schwache Topologie überein. Wenn $\dim X = \infty$ ist, dann ist im Allgemeinen die starke Topologie eine *echte* Obermenge der schwachen Topologie. Analoge Aussagen gelten für abgeschlossene Mengen.

2.7 Beispiel. (i) Sei $\dim X = \infty$ und $S := \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$. Dann ist S stark abgeschlossen, aber **nicht** schwach abgeschlossen. Es gilt

$$\overline{S}^{\tau(X, X^*)} = \overline{B_1(0)}. \quad (2.8)$$

BEWEIS : Sei $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| < 1$. Wir müssen zeigen, dass $x_0 \in \overline{S}^{\tau}$. Sei also V Umgebung von x_0 bezüglich $\tau(X, X^*)$. Zu zeigen: $V \cap S \neq \emptyset$.

Nach Lemma 2.4 können wir oBdA $V = \bigcap_{i=1}^n \{x \in X \mid |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ und $f_i \in X^*$ annehmen. Es gibt ein $y_0 \in X$, $y_0 \neq 0$, so dass für alle $i = 1, \dots, n$: $\langle f_i, y_0 \rangle = 0$. Falls dem nicht so wäre, wäre die Abbildung $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (\langle f_i, x \rangle)_{i=1, \dots, n}$ injektiv. Dann ist $\varphi : X \rightarrow \varphi(X)$ ein Isomorphismus. Also folgt $\dim X \leq n$ im Widerspruch zu $\dim X = \infty$. Also gibt es so ein y_0 mit obiger Eigenschaft. Betrachte

$$g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) : t \mapsto \|x_0 + ty_0\|.$$

Dann ist g stetig, $g(0) = \|x_0\| < 1$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es also ein t_0 mit $g(t_0) = 1$. Aus $\langle f_i, y_0 \rangle = 0$, $i = 1, \dots, n$, folgt $\langle f_i, x_0 + t_0 y_0 - x_0 \rangle = 0$, $i = 1, \dots, n$. Somit ist $x_0 + t_0 y_0 \in V \cap S$ und wir haben gezeigt, dass $S \subseteq \overline{B_1(0)} \subseteq \overline{S}^{\tau}$. Daraus folgt $\overline{S}^{\tau} \subseteq \overline{B_1(0)}^{\tau} \subseteq \overline{S}^{\tau}$. Der folgenden Satz 2.10 besagt, dass für konvexe Mengen gilt $\overline{M} = \overline{M}^{\tau}$. Somit folgt die Behauptung. ■

(ii) Sei $\dim X = \infty$. Dann ist $B_1(0)$ nicht **offen** bezüglich $\tau(X, X^*)$, genauer

$$\text{int}_{\tau} B_1(0) = \emptyset. \quad (2.9)$$

BEWEIS : Sei $x_0 \in \text{int}_{\tau} B_1(0)$. Dann existiert eine Umgebung V von x_0 bezüglich τ , so dass $V \subseteq B_1(0)$ und für alle $x_0 \in B_1(0)$ gibt es nach obigem Beweis $t_0, y_0 \neq 0$ mit $\|x_0 + t_0 y_0\| = 1$ und $x_0 + t_0 y_0 \in V \subseteq B_1(0)$, ein Widerspruch. ■

2.10 Satz. Sei $C \subseteq X$ eine konvexe Teilmenge eines Banachraumes X . Dann ist C stark abgeschlossen genau dann, wenn C schwach abgeschlossen ist.

BEWEIS : Die Richtung

$$„C \text{ ist schwach abgeschlossen}“ \Rightarrow „C \text{ ist stark abgeschlossen}“$$

ist trivial, da die schwache Topologie gröber ist als die starke. Sei also C stark abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass das Komplement von C bezüglich der schwachen Topologie offen ist. Sei $x_0 \notin C$. Nach dem Satz von Hahn-Banach

existiert eine x_0 und C strikt trennende abgeschlossene Hyperebene, d.h. es existiert ein $f \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle f, x_0 \rangle < \alpha < \langle f, y \rangle, \quad y \in C.$$

Die Menge (vgl. Lemma 2.4)

$$V = \{x \in X \mid \langle f, x \rangle < \alpha\}$$

ist aber eine bezüglich der schwachen Topologie offene Menge. Offenbar ist $x_0 \in V$ und $V \cap C = \emptyset$. Also ist C abgeschlossen bezüglich der schwachen Topologie. ■

2.11 Folgerung (Satz von Mazur). *Es sei $(x_n) \subseteq X$ eine schwach konvergente Folge in einem Banachraum X . Dann gibt es eine Folge (y_j) von konvexen Linearkombinationen*

$$y_j = \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j x_{n_{k_j}}, \quad c_k^j \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j = 1$$

die stark gegen den schwachen Limes der Folge (x_n) konvergiert.

BEWEIS : Wir bilden die Menge C aller endlichen konvexen Linearkombinationen von Elementen x_n . C ist offensichtlich konvex, ebenso der Abschluss \overline{C} bezüglich der starken Topologie. Konvergiert nun $x_n \rightharpoonup x$ schwach, so muss wegen Satz 2.10 der Grenzwert x ebenfalls in \overline{C} liegen. Nach Definition von \overline{C} gibt es dann aber eine Folge $(y_j) \subseteq C$, die stark gegen x geht. Die Elemente aus C haben aber gerade die gesuchte Gestalt. ■

• Sei (X, σ) ein topologischer Raum. Die Abbildung $\varphi : (X, \sigma) \rightarrow (|\cdot|)R$ heißt **unterhalbstetig** (bzw. **oberhalbstetig**) genau dann, wenn $\varphi^{-1}((-\infty, r])$ (bzw. $\varphi^{-1}([r, \infty))$) für alle $r \in \mathbb{R}$ σ -abgeschlossen ist.

2.12 Folgerung. *Sei $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe, unterhalbstetige Funktion bezüglich der starken Topologie. Dann ist φ auch unterhalbstetig bezüglich der schwachen Topologie.*

BEWEIS : Zu zeigen ist, dass für alle $r \in \mathbb{R}$ die Menge

$$A := \{x \in X \mid \varphi(x) \leq r\}$$

abgeschlossen ist bezüglich $\tau(X, X^*)$. φ ist konvex, also ist A konvex, denn für $x, y \in A$ gilt

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y) \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r.$$

Nach Voraussetzung ist A stark abgeschlossen, also folgt mit Satz 2.10, dass A schwach abgeschlossen ist. ■

Für den Beweis von Satz 2.14 benötigen wir das folgende Lemma.

2.13 Lemma. *Sei $T : (E, \tau) \rightarrow (F, \sigma)$ eine stetige Abbildung topologischer Hausdorffräume. Dann ist $G(T)$ abgeschlossen bezüglich $\tau \times \sigma$.*

BEWEIS : Wir zeigen, dass $(E \times F) \setminus G(T)$ offen ist. Für beliebige $(x_0, y_0) \in (E \times F) \setminus G(T)$ gilt $y_0 \neq Tx_0$. Es gibt also Umgebungen $U_0, V_0 \in \sigma$ mit $y_0 \in U_0, Tx_0 \in V_0$ und $V_0 \cap U_0 = \emptyset$. T ist stetig, also ist $W_0 := T^{-1}(V_0) \in \tau, x_0 \in W_0$. Die Menge $W_0 \times U_0$ ist offen bzgl. $\tau \times \sigma$ und es gilt $(W_0 \times U_0) \cap G(T) = \emptyset$. In der Tat, für $(x, y) \in W_0 \times U_0 \cap G(T)$ gilt $y = Tx \in U_0$ mit $x \in W_0 = T^{-1}(V_0)$, also $Tx \in V_0$. Dies ist ein Widerspruch zu $U_0 \cap V_0 = \emptyset$. ■

2.14 Satz. *Seien X, Y Banachräume und $A : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Dann ist A stetig bezüglich der starken Topologien genau dann, wenn A stetig bezüglich der schwachen Topologien ist.*

BEWEIS : (i) Sei A stetig bezüglich der starken Topologien. Wir wollen zeigen, dass $A : (X, \tau(X, X^*)) \rightarrow (Y, \tau(Y, Y^*))$ stetig ist. Nach Lemma 1.3 reicht es zu zeigen, dass für alle $f \in Y^*$ die Abbildung

$$\varphi := f \circ A : (X, \tau(X, X^*)) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) : x \mapsto \langle f, Ax \rangle$$

stetig ist. Da $\varphi = f \circ A \in X^*$ erhalten wir aufgrund der Konstruktion der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$, dass $\varphi^{-1}(\omega) \in \tau(X, X^*)$ für alle offenen Mengen $\omega \subset \mathbb{R}$. Also ist $\varphi : (X, \tau(X, X^*)) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ stetig.

(ii) Sei $A : (X, \tau(X, X^*)) \rightarrow (Y, \tau(Y, Y^*))$ stetig und linear. Wir müssen zeigen, dass A stetig bezüglich der starken Topologien ist. Aber Lemma 2.13 angewendet in unserer Situation liefert, dass $G(A)$ abgeschlossen ist bezüglich $\tau(X, X^*) \times \tau(Y, Y^*)$. Da die schwache Topologie gröber ist als die starke, folgt dass $G(A)$ abgeschlossen ist bezüglich der starken Topologie. Da A linear ist, folgt dann mit Satz 2.7 aus Kapitel 3, dass A stetig ist. ■

4.3 *-Schwache Topologie

Auf dem Dualraum X^* eines normierten Raumes kann man neben der starken Topologie (gegeben durch die Norm in X^* (vergleiche Kap. 1.2 (2.6)) und der schwachen Topologie $\tau(X^*, X^{**})$ noch die *-schwache Topologie $\tau(X^*, X)$ definieren. Für $x \in X$ definieren wir $\varphi_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_x(f) := \langle f, x \rangle$$

und betrachten die Familie $(\varphi_x)_{x \in X}$.

3.1 Definition. Die ***-schwache Topologie** $\tau(X^*, X)$ auf dem Dualraum X^* eines normierten Vektorraumes X ist die gröbste Topologie bzgl. derer alle Abbildungen $(\varphi_x)_{x \in X}$ stetig sind, das heißt wir setzen $X = X^*, Y_i = \mathbb{R}, I = X$ in Abschnitt 4.1.

3.2 Satz. Die *-schwache Topologie ist eine Hausdorff Topologie.

BEWEIS : Seien $f_1, f_2 \in X^*, f_1 \neq f_2$. Dann gibt es ein $x \in X$: mit $\langle f_1, x \rangle \neq \langle f_2, x \rangle$. Sei $\langle f_1, x \rangle < \langle f_2, x \rangle$. Also gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R} : \langle f_1, x \rangle < \alpha < \langle f_2, x \rangle$. Setze

$$U_1 := \{f \in X^* \mid \langle f, x \rangle < \alpha\} = \varphi_x^{-1}(-\infty, \alpha),$$

$$U_2 := \{f \in X^* \mid \langle f, x \rangle > \alpha\} = \varphi_x^{-1}(\alpha, \infty).$$

Dann gilt: $U_1, U_2 \in \tau(X^*, X), f_1 \in U_1, f_2 \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ■

• Wir sagen, die Folge $(f_n)_n \subseteq X^*$ **konvergiert *-schwach** gegen $f \in X^*$ genau dann, wenn $f_n \rightarrow f$ bezüglich $\tau(X^*, X)$. Wir benutzen die Notation

$$f_n \xrightarrow{*} f \quad (n \rightarrow \infty)$$

Dies ist nach Lemma 1.2 äquivalent zu

$$\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad (n \rightarrow \infty) \forall x \in X,$$

d.h. punktweise Konvergenz.

• Wir wollen nun die Topologien $\tau(X^*, X), \tau(X^*, X^{**})$ und die starke Topologie (induziert durch die Operatornorm in X^*) miteinander vergleichen. Dazu benötigen wir folgende Überlegung: Sei X ein Banachraum, X^* sein Dualraum mit der Norm

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle f, x \rangle_{X^*, X}|$$

und X^{**} sein Bidualraum mit der Norm

$$\|g\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |\langle g, f \rangle_{X^{**}, X^*}|.$$

Die **kanonische Isometrie** $J : X \rightarrow X^{**}$ wird wie folgt definiert: sei $x \in X$ fest, die Abbildung $f \mapsto \langle f, x \rangle$ von X^* nach \mathbb{R} ist ein beschränktes, lineares Funktional auf X^* , d.h. ein Element von X^{**} , das mit Jx bezeichnet wird. Wir haben also

$$\langle Jx, f \rangle_{X^{**}, X^*} = \langle f, x \rangle_{X^*, X} \quad \forall x \in X, f \in X^*. \quad (3.3)$$

Es ist klar, dass J linear und eine Isometrie ist, d.h. $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ für alle $x \in X$. In der Tat gilt:

$$\|Jx\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |\langle Jx, f \rangle| \stackrel{(3.3)}{=} \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |\langle f, x \rangle| \stackrel{\text{Kapitel 2.1 (1.10)}}{=} \|x\|.$$

Allerdings ist J nicht notwendig surjektiv. Man kann aber immer mit Hilfe von J den Raum X mit einem abgeschlossenen Unterraum von X^{**} identifizieren.

Beispiel: Wir werden zeigen, dass $(L^1(\Omega))^* = L^\infty$ und $(L^\infty(\Omega))^* \supsetneq L^1(\Omega)$, d.h. $L^1(\Omega) \subsetneq (L^1(\Omega))^{**}$.

• Sei X ein Banachraum. Dann sind auf X^* die schwache $\tau(X^*, X^{**})$ und die *-schwache $\tau(X^*, X)$ und die starke Topologie σ definiert. Da $X \subseteq X^{**}$, ist $\tau(X^*, X) \subseteq \tau(X^*, X^{**}) \subseteq \sigma$. Wir werden zeigen, dass die abgeschlossene Einheitskugel

$$\overline{B_1(0)} = \{f \in X^* \mid \|f\| \leq 1\}$$

kompakt bezüglich $\tau(X^*, X)$ ist (Satz 3.10).

• Wenn $\dim X < \infty$ ist, wissen wir aus der linearen Algebra, dass dann

$$\dim X = \dim X^* = \dim X^{**}$$

und somit sind nach Satz 2.6 alle Topologien identisch.

Völlig analog zu Lemma 2.4 und Satz 2.5 beweist man:

3.4 Lemma. Sei $f_0 \in X^*$. Eine Umgebungsbasis von f_0 bzgl. $\tau(X^*, X)$ ist durch Mengen der Form

$$V = \{f \in X^* \mid |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon, i \in J\},$$

wobei J endlich ist, $x_i \in X$ und $\varepsilon > 0$, gegeben.

3.5 Lemma. Für eine Folge $(f_n) \subseteq X^*$ gilt:

(i) $f_n \rightarrow f$ bzgl. $\tau(X^*, X)$ genau dann, wenn für alle $x \in X$ gilt:

$$\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle,$$

(ii) $f_n \rightarrow f$ stark in X^* , dann gilt: $f_n \rightharpoonup f$ schwach in X^* ,
 $f_n \rightharpoonup f$ schwach in X^* , dann gilt: $f_n \xrightarrow{*} f$ *-schwach in X^* ,

(iii) $f_n \xrightarrow{*} f$ *-schwach in X^* , dann ist die Folge $(\|f_n\|)$ beschränkt und es gilt:

$$\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|,$$

(iv) $f_n \xrightarrow{*} f$ $*$ -schwach in X^* und $x_n \rightarrow x$ stark in X , dann gilt:

$$\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$$

3.6 Satz. Sei $\varphi : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig bezüglich $\tau(X^*, X)$. Dann existiert ein $x \in X$ mit

$$\varphi(f) = \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X^*. \quad (3.7)$$

Um dies zu beweisen, benötigen wir folgendes Lemma:

3.8 Lemma. Sei X ein Vektorraum und seien $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ Linearformen auf X mit der Eigenschaft

$$\varphi_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = 0. \quad (3.9)$$

Dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i.$$

BEWEIS : Betrachte

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (\varphi(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T.$$

Mit (3.9) folgt, dass $a = (1, 0, \dots, 0) \notin R(F)$. Weiterhin ist $R(F)$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum. Also gibt es nach Kapitel 2, Satz 2.11 eine Hyperebene auf \mathbb{R}^{n+1} , die a und $R(F)$ trennt, d.h. es existieren $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_0 < \alpha < \lambda_0 \varphi(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x) \quad \forall x \in X.$$

Da X ein linearer Raum ist, gilt die Aussage nicht nur für x , sondern auch für βx und wir können mit $\beta \rightarrow \pm\infty$ gehen. Dann folgt

$$0 = \lambda_0 \varphi(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x),$$

aber da $\lambda_0 < \alpha < 0$ ist $\lambda_0 \neq 0$. Wir können also durch λ_0 teilen und erhalten:

$$\varphi(x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \varphi_i(x),$$

wir haben also also die gesuchte Darstellung gefunden. ■

BEWEIS (Satz 3.6): Da $\varphi : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig bezüglich $\tau(X^*, X)$ ist, gibt es eine Umgebung V von 0 bezüglich $\tau(X^*, X)$ mit

$$|\varphi(f)| < 1 \quad \forall f \in V.$$

OBdA sei V von der Form

$$V = \{f \in X^* \mid |\langle f, x_i \rangle| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$$

mit $x_i \in X$, $\varepsilon > 0$. Insbesondere hat V folgende Eigenschaft: Falls f derart ist, dass

$$\langle f, x_i \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad (*)$$

dann ist auch $\varphi(f) = 0$. In der Tat, falls für $f \in V$ die Bedingung $(*)$ gilt, dann gilt sie auch für αf , $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. $\alpha f \in V$. Also ist $|\alpha| |\varphi(f)| < 1$ und nach Übergang $|\alpha| \rightarrow \infty$ folgt $\varphi(f) = 0$.

Um Lemma 3.8 anwenden zu können, betrachten wir $\varphi_i(f) = \langle f, x_i \rangle$, $f \in X^*$, $i = 1, \dots, n$ und $\varphi(f)$. φ_i und φ sind Linearformen auf X^* . Nach Lemma 3.8 gibt es $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so dass für alle $f \in X^*$ gilt:

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle f, x_i \rangle = \langle f, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \rangle =: \langle f, x \rangle.$$

■

3.10 Satz (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Der abgeschlossene Ball mit Radius $r > 0$*

$$B_{X^*}^r := \{f \in X^* \mid \|f\|_{X^*} \leq r\}$$

*des Dualraumes eines Banachraumes X ist kompakt bezüglich der *-schwachen Topologie $\tau(X^*, X)$.*

• Kurzausflug in die Topologie

Für topologische Räume (X_i, τ_i) betrachtet man den Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$ und Projektionen

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j.$$

Die kanonische Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ ist die schwache Topologie aus Abschnitt 4.1 mit $X = \prod_{i \in I} X_i$, $Y_i = X_i$, $\varphi_i = \pi_i$. Dies ist die grösste Topologie, bezüglich derer die π_i , $i \in I$, stetig sind. Diese Topologie ist Hausdorff, da die π_i stetig sind und die X_i Hausdorff.

3.11 Satz (Tychonoff). *Seien (X_i, τ_i) topologische Räume. Der Produkt-
raum $(\prod_{i \in I} X_i, \tau)$ ist genau dann kompakt, wenn $X_i, i \in I$, kompakt ist.*

BEWEIS : „ \Rightarrow “ Wenn $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ stetig ist und X kompakt, dann ist auch das Bild $f(X)$ kompakt. Nach Konstruktion sind die $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ stetig und da $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt ist, ist $\pi_j(\prod_{i \in I} X_i) = X_j$ kompakt.

„ \Leftarrow “ Der Beweis benutzt Hilfsmittel, die wir noch nicht kennen und wird deshalb weggelassen. Er kann z.B. im Buch von Rudin, Funktionalanalysis oder im Buch von Meise, Vogt, Funktionalanalysis gefunden werden. ■

BEWEIS (Satz 3.10):

Betrachte $\mathbb{R}^X = Z := \prod_{x \in X} \mathbb{R}_x$ mit Elementen $\omega = (\omega_x)_{x \in X}, \omega_x \in \mathbb{R}$. Wir versehen Z mit der kanonischen Topologie τ , außerdem versehen wir X^* mit der $*$ -schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$. Die Projektionen $\pi_y : Z \rightarrow \mathbb{R} : \omega = (\omega_x)_{x \in X} \mapsto \omega_y$ sind stetig für alle $y \in X$. Betrachte die Abbildung

$$\Phi : X^* \rightarrow Z : f \mapsto (\langle f, x \rangle)_{x \in X}$$

Nach Lemma 1.3 ist Φ stetig genau dann, wenn für alle $y \in X$ gilt, dass die Abbildung

$$\pi_y \circ \Phi : X^* \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist. Sei $y \in X$, dann ist $\pi_y \circ \Phi(f) = \langle f, y \rangle$ linear in f , und somit reicht es die Stetigkeit in der Null zu beweisen. Für $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{f \in X^* \mid |\langle f, y \rangle| < \varepsilon\}$ eine offene Umgebung der Null bezüglich $\tau(X^*, X)$ und somit ist $\pi_y \circ \Phi$ stetig.

Wir zeigen, dass $\Phi : X^* \rightarrow \Phi(X^*)$ ein Homöomorphismus ist, d.h. wir zeigen, dass Φ und Φ^{-1} stetig sind und dass Φ bijektiv ist. Offensichtlich ist $\Phi : X^* \rightarrow \Phi(X^*)$ surjektiv. Sei $\Phi(f) = \Phi(g)$, dann ist $\langle f, x \rangle = \langle g, x \rangle$ für alle $x \in X$, d.h. $f = g$, also ist Φ injektiv. Wir müssen noch zeigen, dass die Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1} : \Phi(X^*) \rightarrow X^*$$

stetig ist. Wir wenden wieder Lemma 1.3 an, wir müssen also nur zeigen, dass für alle $y \in X$ die Abbildung $\varphi_y \circ \Phi^{-1} : \Phi(X^*) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Ein Element $\omega \in \Phi(X^*)$ hat die Form $\omega = (\langle f, x \rangle)_{x \in X}$ mit $f \in X^*$, also ist $\Phi^{-1}(\omega) = f$. Aber es gilt: $\varphi_y(g) = \langle g, y \rangle, g \in X^*$. Für $\omega \in \Phi(X^*)$ ist $\varphi_y(\Phi^{-1}(\omega)) = \langle f, y \rangle = \omega_y = \pi_y \omega$. Aber $\varphi_y \circ \Phi^{-1}$ ist somit gerade $\pi_y|_{\Phi(X^*)}$ und also stetig.

Sei

$$K_r := \{\omega \in Z \mid |\omega_x| \leq r \|x\|, \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y, \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x \\ \forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Wir zeigen $\Phi(B_{X^*}^r) = K_r$:

„ \subseteq “ Sei $\omega \in \Phi(B_{X^*}^r)$. Dann existiert $f \in X^*$ mit $\|f\|_{X^*} \leq r$ und $\Phi(f) = (\langle f, x \rangle)_{x \in X} = (\omega_x)_{x \in X}$. Dann ist

$$|\omega_x| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x\| \leq r \|x\|.$$

Weiterhin gilt:

$$\omega_{x+y} = \langle f, x+y \rangle = \langle f, x \rangle + \langle f, y \rangle = \omega_x + \omega_y.$$

Analog zeigt man $\omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x$. Also ist $\omega \in K_r$.

„ \supseteq “ Sei $\omega \in Z$ mit $\omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y$, $\omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x$ und $|\omega_x| \leq r \|x\|$. Wir definieren f durch:

$$\langle f, x \rangle := \omega_x.$$

Dann ist f linear und es gilt:

$$|\langle f, x \rangle| = |\omega_x| \leq r \|x\|,$$

also ist f stetig mit $\|f\| \leq r$. Somit ist $\omega = \Phi(f) \in B_{X^*}^r$.

Es reicht also zu zeigen, dass K_r kompakt ist, denn da $K_r = \Phi(B_{X^*}^r)$ und Φ ein Homöomorphismus, ist dann auch $\Phi^{-1}(K_r) = B_{X^*}^r$ kompakt. Wir teilen K_r auf in zwei Mengen:

$$K_r = K_1 \cap K_2$$

mit

$$K_1 := \{\omega \in Z \mid |\omega_x| \leq r \|x\| \forall x \in X\}$$

und

$$K_2 := \{\omega \in Z \mid \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y, \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x \forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Offensichtlich kann man K_1 schreiben als

$$K_1 = \prod_{x \in X} [-r \|x\|, r \|x\|].$$

Da die Intervalle $[-r \|x\|, r \|x\|]$ in \mathbb{R} kompakt sind, ist nach Satz 3.11 auch ihr Produkt und somit K_1 kompakt. K_2 ist abgeschlossen, denn für x, y fest, aber beliebig, betrachte

$$A_{x,y} := \{\omega \in Z \mid \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y = 0\}$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$ fest, aber beliebig, betrachte

$$B_{\lambda,x} = \{\omega \in Z \mid \omega_{\lambda x} - \lambda \omega_x = 0\}.$$

Urbilder der Null unter stetigen Abbildungen sind abgeschlossen, also ist auch ihr Durchschnitt

$$K_2 = \left(\bigcap_{x,y \in X} A_{x,y} \right) \cap \left(\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}, x \in X} B_{\lambda,x} \right)$$

abgeschlossen. Also ist $K_1 \cap K_2$ eine abgeschlossene Teilmenge von K_1 und nach Kapitel 1, Lemma 3.15 ist K kompakt. ■

4.4 Reflexive Räume

4.1 Definition. Sei X ein Banachraum und sei $J : X \rightarrow X^{**}$ die durch (3.3) definierte kanonische Isometrie von X nach X^{**} . Dann heißt X **reflexiv** genau dann, wenn J surjektiv ist.

- Wenn X reflexiv ist, sind X und X^{**} identifizierbar.
- Es gibt einen Banachraum X und eine lineare, surjektive Isometrie von X auf X^{**} , so dass X nicht reflexiv ist.
- Wenn X reflexiv ist, stimmen die $*$ -schwache Topologie $\tau(X^*, X)$ und die schwache Topologie $\tau(X^*, X^{**})$ überein.
- Aufgrund der Definition von reflexiv und schwacher bzw. $*$ -schwacher Konvergenz erhält man sofort, dass für reflexive Banachräume X schwache und $*$ -schwache Konvergenz in X^* übereinstimmen.

4.2 Satz (Kakutani). X ist reflexiv genau dann, wenn

$$B_X := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$ ist.

4.3 Folgerung. X ist reflexiv genau dann, wenn für alle $r > 0$

$$B_X^r := \{x \in X \mid \|x\| \leq r\}$$

kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$ ist.

BEWEIS : „ \Rightarrow “ Sei X reflexiv. Die Abbildung $A : X \rightarrow X : x \mapsto rx$, $r > 0$, ist linear und stetig bzgl. der Normtopologie auf X . Satz 2.14 liefert also, dass A auch stetig bzgl. der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$ ist. Dies, Satz 4.2 und $A(B_X) = r B_X = B_X^r$ liefert die Behauptung.

„ \Leftarrow “ Dies folgt offensichtlich aus Satz 4.2. ■

BEWEIS (Satz 4.2) „ \Rightarrow “:

Da X reflexiv ist, ist J surjektiv, d.h. $J(X) = X^{**}$. Da J eine Isometrie ist, ist $J(B_X) = B_{X^{**}}$. Aus Satz 3.10 wissen wir, dass $B_{X^{**}}$ kompakt ist bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$. Wir zeigen nun, dass

$$J^{-1} : (X^{**}, \tau(X^{**}, X^*)) \rightarrow (X, \tau(X, X^*))$$

stetig ist. Nach Lemma 1.3 reicht es, zu zeigen, dass für alle $f \in X^*$ die Abbildung

$$\omega \mapsto \langle f, J^{-1}\omega \rangle_{X^*, X}$$

als Abbildung von $(X^{**}, \tau(X^{**}, X^*))$ nach \mathbb{R} stetig ist. Aber $\langle f, J^{-1}\omega \rangle_{X^*, X} = \langle \omega, f \rangle_{X^{**}, X^*}$, wir betrachten also die Stetigkeit der Abbildung $\omega \mapsto \langle \omega, f \rangle_{X^{**}, X^*}$. Sie ist aber schon stetig nach Konstruktion von $\tau(X^{**}, X^*)$, also ist B_X kompakt bezüglich $\tau(X, X^*)$.

Zum Beweis der Rückrichtung benötigen wir 2 Lemmata.

4.4 Lemma (Helly). *Sei X ein Banachraum und $f_1, \dots, f_n \in X^*$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Dann ist äquivalent:*

- (i) *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_\varepsilon \in X$, so dass $\|x_\varepsilon\| \leq 1$ und für alle $i = 1, \dots, n$ gilt:*

$$|\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \alpha_i| < \varepsilon,$$

- (ii) *Für alle $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\|_{X^*}.$$

BEWEIS : (i) \Rightarrow (ii) Für $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest, setzen wir $S := \sum_{i=1}^n |\beta_i|$. Aus (i) folgt

$$\left| \sum_{i=1}^n \beta_i \langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right| \leq S\varepsilon,$$

und somit

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^n \beta_i \langle f_i, x_\varepsilon \rangle \right| + S\varepsilon \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\|_{X^*} \|x_\varepsilon\|_X + S\varepsilon \end{aligned}$$

Da $\|x_\varepsilon\|_X \leq 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig folgt (ii).

(ii) \Rightarrow (i) Sei $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und

$$\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (\langle f_1, x \rangle, \dots, \langle f_n, x \rangle)^\top.$$

Aussage (i) ist äquivalent zu $\alpha \in \overline{\varphi(B_X)}$ ist. Dies zeigen wir durch einen Widerspruchsbeweis. Sei also $\alpha \notin \overline{\varphi(B_X)}$. Da $\{\alpha\}$ kompakt ist und $\overline{\varphi(B_X)}$ abgeschlossen und konvex ist, folgt mit dem Satz von Hahn-Banach, dass es ein $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \langle f_i, x \rangle < \gamma < \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \quad \forall x \in B_X.$$

Da auch $-x \in B_X$ ist, folgt

$$\left| \left\langle \sum_{i=1}^n \beta_i f_i, x \right\rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^n \beta_i \langle f_i, x \rangle \right| < \gamma < \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i.$$

Wir bilden das Supremum über $x \in B_X$ und erhalten:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\|_{X^*} \leq \gamma < \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (ii). ■

4.5 Lemma (Goldstine). *Sei X ein Banachraum. Dann ist $J(B_X)$ dicht in $B_{X^{**}}$ bezüglich der $*$ -schwachen Topologie $\tau(X^{**}, X^*)$.*

BEWEIS : Sei $\omega \in B_{X^{**}}$ und V Umgebung von ω bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$. Wir müssen zeigen, dass $V \cap J(B_X) \neq \emptyset$. OBdA sei

$$V = \{ \eta \in X^{**} \mid |\langle \eta - \omega, f_i \rangle| < \varepsilon, i = 1, \dots, n \},$$

mit $\varepsilon > 0$, $f_i \in X^*$. Wir müssen also zeigen, dass es ein $x \in B_X$ gibt mit

$$|\langle Jx, f_i \rangle_{X^{**}, X^*} - \langle \omega, f_i \rangle| = |\langle f_i, x \rangle_{X^*, X} - \langle \omega, f_i \rangle| < \varepsilon, \quad (4.6)$$

für $i = 1, \dots, n$. Sei $\alpha_i := \langle \omega, f_i \rangle$ und β_1, \dots, β_n fest, aber beliebig. Dann ist

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \beta_i \langle \omega, f_i \rangle \right| \leq \|\omega\|_{X^{**}} \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\|_{X^*} \leq \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\|_{X^*}.$$

Das ist Bedingung (ii) aus Lemma 4.4. Aus Lemma 4.4 (i) folgt also, dass ein $x_\varepsilon \in B_X$ existiert, so dass für alle $i = 1, \dots, n$ gilt

$$|\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \alpha_i| < \varepsilon,$$

und nach der Definition von α folgt (4.6) und somit die Behauptung. ■

BEWEIS (Satz 4.2, „ \Leftarrow “):

Sei B_X kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$. Wir wissen, dass $J : X \rightarrow X^{**}$ stetig bezüglich den starken Topologien ist und mit Satz 2.14 folgt

$$J : (X, \tau(X, X^*)) \rightarrow (X^{**}, \tau(X^{**}, X^{***})),$$

ist stetig. Da $\tau(X^{**}, X^*)$ gröber ist als $\tau(X^{**}, X^{***})$ folgt, dass

$$J : (X, \tau(X, X^*)) \rightarrow (X^{**}, \tau(X^{**}, X^*))$$

stetig ist. Also ist $J(B_X)$ kompakt bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$. Allgemein gilt, dass jede kompakte Menge abgeschlossen ist und da wegen Lemma 4.5 $J(B_X)$ dicht in $B_{X^{**}}$ bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$ ist, folgt

$$J(B_X) = B_{X^{**}}.$$

Nach Skalierung erhält man $J(X) = X^{**}$. ■

4.7 Lemma. *Sei X ein Banachraum und $W \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann sind die beiden schwachen Topologien $\tau(W, W^*)$ und $\tau(X, X^*)|_W$ identisch.*

BEWEIS : „ \supseteq “ Sei $x \in W$ und sei V eine Umgebung von x bzgl. $\tau(X, X^*)|_W$. OBdA können wir annehmen, dass es $f_i \in X^*$ und $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} V &= \{y \in X \mid |\langle f_i, x - y \rangle| < \varepsilon\} \cap W \\ &= \{y \in W \mid |\langle f_i|_W, x - y \rangle| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Da $f_i|_W \in W^*$ folgt $V \in \tau(W, W^*)$ aus Lemma 2.4.

„ \subseteq “ Sei $x \in W$ und sei V eine Umgebung von x bzgl. $\tau(W, W^*)$. OBdA können wir annehmen, dass es $f_i \in W^*$ und $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$V = \{y \in W \mid |\langle f_i, x - y \rangle| < \varepsilon\}.$$

Aus dem Satz von Hahn–Banach folgern, dass es Fortsetzungen $\tilde{f}_i \in X^*$ von $f_i \in W^*$ gibt. Also ergibt sich

$$V = \{y \in X \mid |\langle \tilde{f}_i, x - y \rangle| < \varepsilon\} \cap W,$$

d.h. $V \in \tau(X, X^*)|_W$. ■

4.8 Lemma. *Seien X und Y Banachräume.*

- (i) *Jeder abgeschlossene lineare Unterraum W von X ist reflexiv, falls X reflexiv ist.*
- (ii) *Sei $A : X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus, d.h. A ist linear, stetig, bijektiv und invertierbar. Dann ist X reflexiv genau dann, wenn Y reflexiv ist.*
- (iii) *X ist reflexiv genau dann, wenn X^* reflexiv ist.*

BEWEIS : (i) Da X reflexiv ist, folgt aus Satz 4.2, dass B_X kompakt bzgl. der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$ ist. Da W stark abgeschlossen und konvex ist, folgt aus Satz 2.10, dass W auch schwach abgeschlossen ist, d.h. $W \in \tau(X, X^*)$. Somit ist $B_W = B_X \cap W \subseteq W$ kompakt bzgl. $\tau(X, X^*)$. Lemma 4.7 besagt, dass $\tau(X, X^*)|_W = \tau(W, W^*)$. Somit ist B_W auch kompakt bzgl. $\tau(W, W^*)$. Aus Satz 4.2 folgt also, dass W reflexiv ist.

(ii) Es reicht zu zeigen:

$$X \text{ reflexiv} \Rightarrow Y \text{ reflexiv},$$

denn die umgekehrte Richtung folgt daraus sofort, da, nach dem Satz von der stetigen Inversen (Satz 2.5 in Kapitel 3), die Inverse auch ein Isomorphismus ist. Sei also X reflexiv und $A : X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist A stetig bzgl. der starken Topologien, woraus mit Satz 2.14 folgt, dass A auch stetig bzgl. der schwachen Topologien ist. Aufgrund von Satz 4.2 reicht es zu zeigen, dass B_Y kompakt bzgl. der schwachen Topologie $\tau(Y, Y^*)$ ist. Da A ein Isomorphismus ist, erhalten wir $B_Y \subseteq A(B_X^r)$ mit $r = \|A^{-1}\|$. In der Tat, ist dies äquivalent zu $A^{-1}(B_Y) \subset B_X^r$, was aus der Definition der Operatornorm von A^{-1} folgt. Folgerung 4.3 liefert, dass B_X^r kompakt bzgl. $\tau(X, X^*)$ ist. Da A stetig bzgl. der schwachen Topologien ist, erhalten wir also, dass $A(B_X^r)$ kompakt bzgl. $\tau(Y, Y^*)$ ist. Weiterhin ist B_Y stark abgeschlossen und konvex und somit auch schwach abgeschlossen (Satz 2.10). Also ist B_Y eine schwach abgeschlossene Teilmenge einer schwach kompakten Menge und somit selbst schwach kompakt (Lemma 3.15, Kapitel 1).

(iii) Nach Satz 3.10 ist B_{X^*} kompakt bezüglich der $*$ -schwachen Topologie $\tau(X^*, X)$. Da X reflexiv ist, ist $\tau(X^*, X) = \tau(X^*, X^{**})$, d.h. B_{X^*} ist auch kompakt bezüglich $\tau(X^*, X^{**})$ und dann folgt mit Satz 4.2, dass X^* reflexiv ist.

Sei umgekehrt X^* reflexiv. Nach dem gerade Gezeigten ist X^{**} reflexiv. Da $J_X(X)$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum von X^{**} ist, ist nach (i) $J_X(X)$ reflexiv und nach (ii) ist also X reflexiv. ■

4.9 Folgerung. *Sei X ein reflexiver Banachraum und K eine konvexe, abgeschlossene, beschränkte Teilmenge. Dann ist K kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$.*

BEWEIS : Da K konvex und abgeschlossen ist, folgt mit Satz 2.10, dass K abgeschlossen ist bzgl. $\tau(X, X^*)$ und da K beschränkt ist, gibt es ein r , so dass $K \subseteq B_X^r$. Nach Folgerung 4.3 ist B_X^r kompakt bzgl. $\tau(X, X^*)$. Somit folgt mit Lemma 3.15 aus Kapitel 1, dass K kompakt ist bzgl. $\tau(X, X^*)$. ■

• Wir wollen nun untersuchen, ob B_X auch folgenkompakt ist. Dazu benötigen wir einige Resultate für separable Räume.

4.10 Satz. *Sei (M, d) ein separabler, metrischer Raum und $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann ist auch A separabel.*

BEWEIS : Da M separabel ist, gibt es eine Folge (x_n) , die dicht in M liegt. Sei $(r_n) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $r_n \searrow 0$. Wähle $a_{n,m} \in A \cap B_{r_m}(x_n)$, falls $A \cap B_{r_m} \neq \emptyset$. $(a_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ ist abzählbar. Sei $a \in A$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $r_m < \frac{\varepsilon}{2}$ und ein x_n mit $d(a, x_n) < r_m$. Dann ist insbesondere $A \cap B_{r_m}(x_n) \neq \emptyset$ und somit gilt für $a_{n,m}$

$$d(a, a_{n,m}) \leq d(a, x_n) + d(x_n, a_{n,m}) \leq r_m + r_m < \varepsilon.$$

■

4.11 Satz. *Sei X ein Banachraum so, dass X^* separabel ist. Dann ist auch X separabel.*

BEWEIS : Da X^* separabel ist, gibt es eine Folge (f_n) , die dicht in X^* liegt. Weiterhin gilt:

$$\|f_n\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle f_n, x \rangle| = \sup_{\|x\|_X = 1} |\langle f_n, x \rangle|. \quad (4.12)$$

Die letzte Gleichheit gilt aufgrund folgender Überlegungen: $\sup_{\|x\|_X = 1} |\langle f_n, x \rangle| \leq$

$\sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle f_n, x \rangle|$, da $\{\|x\| = 1\} \subseteq \{\|x\| \leq 1\}$. Die umgekehrte Ungleichung

folgt, da für $x \neq 0$ gilt: $\langle f_n, x \frac{\|x\|}{\|x\|} \rangle = \|x\| \langle f_n, \frac{x}{\|x\|} \rangle \leq \langle f_n, \frac{x}{\|x\|} \rangle$.

Aufgrund von (4.12) gibt es also (x_n) mit $\|x_n\| = 1$, so dass $\langle f_n, x_n \rangle \geq \frac{1}{2} \|f_n\|$.

Sei L_0 der Vektorraum über \mathbb{Q} generiert durch (x_n) , d.h.

$$L_0 := \{x \in X \mid x = \sum_{n=1}^N q_n x_n, q_n \in \mathbb{Q}\}.$$

L_0 ist abzählbar, da $L_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$ und $\Lambda_n = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{x_1, \dots, x_n\}$ isomorph zu \mathbb{Q}^n ist. Sei L der Vektorraum über \mathbb{R} generiert durch (x_n) . Dann gilt:

$$L_0 \subseteq L \quad \text{und} \quad L_0 \text{ ist dicht in } L.$$

In der Tat, sei $x = \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n \in L$, dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein q_n so, dass $|q_n - \alpha_n| \leq \frac{\varepsilon}{N}$ und dann ist

$$\|x - \sum_{n=1}^N q_n x_n\| = \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^N q_n x_n \right\| \leq \varepsilon.$$

Wenn wir zeigen, dass L dicht in X ist, ist die Behauptung bewiesen, denn dann ist $L_0 \subseteq L \subseteq X$ jeweils dicht, d.h. $\overline{L_0} = \overline{L} = X$. Sei $f \in X^*$ mit $\langle f, x \rangle = 0$ für alle $x \in L$. Wir wollen zeigen, dass dann schon $f = 0$ ist, denn dann folgt mit Kapitel 2 Folgerung 2.12, dass $\overline{L} = X$ ist. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein f_n so, dass $\|f - f_n\| < \varepsilon$. Wir erhalten also

$$\frac{1}{2} \|f_n\| \leq \langle f_n, x_n \rangle = \langle f_n - f, x_n \rangle \leq \varepsilon,$$

da $\|x_n\| = 1$. Die Dreiecksungleichung liefert also

$$\|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon,$$

und da ε beliebig war, folgt die Behauptung. ■

4.13 Folgerung. *Sei X ein Banachraum. Dann ist X separabel und reflexiv genau dann, wenn X^* separabel und reflexiv ist.*

BEWEIS : „ \Leftarrow “ Wenn X^* separabel ist, folgt mit Satz 4.11, dass X separabel ist und wenn X^* reflexiv ist, ist nach Lemma 4.8 (iii) X reflexiv.

„ \Rightarrow “ Da X reflexiv ist, ist die kanonische Isometrie $J : X \rightarrow X^{**}$ aus (3.3) surjektiv und somit ein isometrischer Isomorphismus. Aus Lemma 4.8 folgt die Reflexivität von X^{**} . Da X separabel ist, existiert eine dichte Folge $(x_n) \subset X$, die aufgrund der Isometrieeigenschaft von J auf eine dichte Folge $J(x_n) \subset X^{**}$ abgebildet wird. X^{**} ist somit sowohl separabel als auch reflexiv und aus „ \Leftarrow “ folgt dann die Separabilität und Reflexivität von X^* . ■

Auch wenn die schwache Topologie auf dem ganzen Raum nicht metrisierbar ist, ist sie doch unter gewissen Bedingungen auf dem abgeschlossenen Einheitsball metrisierbar.

4.14 Satz. *Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist B_{X^*} bezüglich der $*$ -schwachen Topologie $\tau(X^*, X)$ metrisierbar, d.h. es existiert auf B_{X^*} eine Metrik d so, dass die durch sie generierte Topologie auf B_{X^*} mit $\tau(X^*, X)$ eingeschränkt auf B_{X^*} übereinstimmt.*

BEWEIS : Sei X separabel, d.h. es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die dicht in B_X liegt. Für $f, g \in B_{X^*}$ definieren wir die Metrik

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - g, x_n \rangle|$$

und betrachten die dadurch generierte Topologie.

(i) Für $f_0 \in B_{X^*}$ sei V Umgebung von f_0 bezüglich $\tau(X^*, X)$. Wir wollen zeigen, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$U := \{f \in B_{X^*} \mid d(f, f_0) < r\} \subseteq V.$$

OBdA können wir annehmen, dass V die Form

$$V = \{f \in B_{X^*} \mid |\langle f - f_0, y_i \rangle| < \varepsilon, i = 1, \dots, k\}$$

mit $\varepsilon > 0$ und $y_i \in X$ hat. Da $\frac{y_i}{\|y_i\|} \in B_X$, gibt es einen Index n_i , so dass

$$\left\| \frac{y_i}{\|y_i\|} - x_{n_i} \right\| < \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{\|y_i\|}.$$

Wähle $r > 0$ so, dass für alle $i = 1, \dots, k$ gilt

$$2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2\|y_i\|}.$$

Für $f \in U$, d.h. $d(f, f_0) < r$, folgt für alle $i \in \mathbb{N}$ dass $\frac{1}{2^{n_i}} |\langle f - f_0, x_{n_i} \rangle| < r$, und somit:

$$\begin{aligned} |\langle f - f_0, y_i \rangle| &= \|y_i\| |\langle f - f_0, \frac{y_i}{\|y_i\|} \rangle| \\ &\leq \|y_i\| \left(\left| \langle f - f_0, \frac{y_i}{\|y_i\|} - x_{n_i} \rangle \right| + |\langle f - f_0, x_{n_i} \rangle| \right) \\ &< \|y_i\| \left(\|f\| + \|f_0\| \right) \left\| \frac{y_i}{\|y_i\|} - x_{n_i} \right\| + \|y_i\| r 2^{n_i} \\ &\leq 2 \frac{\|y_i\|}{\|y_i\|} \frac{\varepsilon}{4} + \|y_i\| \frac{\varepsilon}{2\|y_i\|} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. $f \in V$.

(ii) Sei $f_0 \in B_{X^*}$ und $r > 0$ fest, aber beliebig. Wir müssen zeigen, dass es eine Umgebung V bezüglich $\tau(X^*, X)$ gibt mit $V \subseteq \{f \in B_{X^*} \mid d(f, f_0) < r\} =: U$. Sei

$$V = \{f \in B_{X^*} \mid |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon, i = 1, \dots, k\}.$$

Zu wählen ist ε, k . Für $f \in V$ ist

$$\begin{aligned} d(f, f_0) &= \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n \rangle| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n \rangle| \\ &\leq \varepsilon + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \varepsilon + \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r, \end{aligned}$$

wenn wir $\varepsilon < \frac{r}{2}$ und $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$ wählen. ■

• Die Umkehrung von Satz 4.14 gilt: Wenn B_{X^*} bezüglich $\tau(X^*, X)$ metrisierbar ist, so ist X separabel.

4.15 Satz. *Sei X ein Banachraum so, dass X^* separabel ist. Dann ist B_X metrisierbar bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$.*

BEWEIS : Wortwörtlich wie der Beweis von Satz 4.14, vertausche die Rolle von X und X^* . ■

4.16 Folgerung. *Sei X ein separabler Banachraum und sei $(f_n) \subseteq X^*$ beschränkt. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$, die bezüglich der $*$ -schwachen Topologie konvergiert.*

BEWEIS : OBdA sei $\|f_n\| \leq 1$. Nach Satz 3.10 ist B_{X^*} kompakt bezüglich $\tau(X^*, X)$ und nach Satz 4.14 ist B_{X^*} metrisierbar bezüglich $\tau(X^*, X)$, aber nach Kapitel 1 Satz 3.17 sind kompakt und folgenkompakt in metrischen Räumen äquivalent. ■

4.17 Satz (Eberlein-Smuljan). *Sei X ein reflexiver Banachraum und $(x_n) \subseteq X$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ die bezüglich der schwachen Topologie konvergiert.*

BEWEIS : OBdA sei $\|x_n\| \leq 1$. Sei M_0 der Vektorraum über \mathbb{R} , der durch (x_n) generiert wird. Setze $M = \overline{M_0}$. Durch Approximation der reellen Zahlen durch rationale Zahlen sieht man, analog zum Beweis von Satz 4.11, dass

M separabel ist. Außerdem ist M ein abgeschlossener, linearer Unterraum von X , also ist nach Lemma 4.8 (i) M reflexiv und wegen Satz 4.2 ist die Einheitskugel $B_M = \{x \in M \mid \|x\| \leq 1\}$ kompakt bezüglich $\tau(M, M^*)$.

Da M separabel und reflexiv ist, ist nach Folgerung 4.13 auch M^* separabel und mit Satz 4.14 ist $B_{M^{**}}$ metrisierbar bezüglich $\tau(M^{**}, M^*)$. Da M reflexiv ist, ist $J(B_M) = B_{M^{**}}$ und $J(M) = M^{**}$, also ist B_M metrisierbar bezüglich $\tau(M, M^*)$. Nach Kapitel 1 Satz 3.17 ist eine Menge eines metrischen Raumes kompakt genau dann, wenn sie folgenkompakt ist, also gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$, die bezüglich $\tau(M, M^*)$ konvergiert, d.h. für alle $f \in M^*$ gilt:

$$\langle f, x_{n_k} \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle.$$

Aber (x_{n_k}) konvergiert auch bezüglich $\tau(X, X^*)$, denn für alle $f \in X^*$ ist $f|_M \in M^*$ und da $(x_{n_k}) \subseteq M$ erhalten wir

$$\langle f, x_{n_k} \rangle = \langle f|_M, x_{n_k} \rangle \rightarrow \langle f|_M, x \rangle = \langle f, x \rangle.$$

■

• Es gilt die Umkehrung von Satz 4.17: Sei X ein Banachraum so, dass alle beschränkten Folgen eine schwach konvergente Teilfolge besitzen. Dann ist X reflexiv.

4.18 Lemma. *Sei X ein reflexiver Banachraum, $C \subseteq X$ abgeschlossen, konvex und $f : C \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex, sowie unterhalbstetig bzgl. der starken Topologie. Dann ist f schwach folgen-unterhalbstetig, d.h.*

$$x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

BEWEIS : Da f konvex und unterhalbstetig bzgl. der starken Topologie ist, folgt mit Folgerung 2.12 die schwache Unterhalbstetigkeit von f , d.h. für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $\{f \leq \alpha\}$ schwach abgeschlossen. Somit sind die Mengen $\{f > \alpha\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ schwach offen.

Angenommen es existiert $x_n \rightharpoonup x_0$ mit $f(x_0) > \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) =: \lambda_0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $x_0 \in \{f > \lambda_0 + \varepsilon\}$. Die Menge $\{f > \lambda_0 + \varepsilon\}$ ist schwach offen und somit eine Umgebung von x_0 . Die schwache Konvergenz $x_n \rightharpoonup x_0$ impliziert, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n \in \{f > \lambda_0 + \varepsilon\}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von λ_0 . ■

4.19 Lemma. *Sei C eine abgeschlossene, konvexe Menge eines reflexiven Banachraumes X . Das Funktional $f : C \rightarrow (-\infty, \infty]$ sei konvex, unterhalbstetig und koerziv, d.h. $f(u) \rightarrow \infty$ für $\|u\| \rightarrow \infty$, $u \in C$. Dann besitzt f auf C ein Minimum. Die Begriffe „abgeschlossen“ und „unterhalbstetig“ sind bezüglich der starken Topologie gemeint.*

BEWEIS : O.B.d.A. können wir annehmen, dass f nichttrivial ist, d.h. $f \not\equiv \infty$. Sei $(u_n) \subset C$ eine Minimalfolge von f , d.h.

$$f(u_n) \rightarrow \inf_{v \in C} f(v) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Aufgrund der Koerzivität von f muss die Folge (u_n) beschränkt sein. Also gibt es nach Satz 4.17 eine schwach konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$ ($k \rightarrow \infty$). Da C konvex ist, liefern Satz 2.10, Satz 2.5 sowie Lemma 3.8 aus Kapitel 1, dass $u_0 \in C$. Aus Lemma 4.18 folgt

$$f(u_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(u_{n_k}) = \inf_{v \in C} f(v) \leq f(u_0).$$

Also folgt $f(u_0) = \inf_{v \in C} f(v) \in \mathbb{R}$, d.h. das Minimum wird angenommen. ■

4.20 Satz. *Sei X ein reflexiver Banachraum und M eine beschränkte Teilmenge. Dann gibt es für alle Punkte x des Abschlusses von M bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$ eine Folge $(x_n) \subseteq M$, die schwach gegen x konvergiert, d.h. $x_n \rightarrow x$ bezüglich $\tau(X, X^*)$.*

BEWEIS : Sei $x \in \overline{M}^{\tau(X, X^*)}$ beliebig, aber fest.

(i) Es gibt eine abzählbare Menge $M_0 \subseteq M$ mit

$$x \in \overline{M_0}^{\tau(X, X^*)}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $B^n := \underbrace{B_{X^*} \times \dots \times B_{X^*}}_{n\text{-mal}}$. Für $m \in \mathbb{N}$ und $(f_1, \dots, f_n) \in B^n$ ist

$$V := \{y \in X \mid |\langle f_j, y - x \rangle| < \frac{1}{m}, j = 1, \dots, n\} \subseteq X$$

eine offene Umgebung von x bezüglich $\tau(X, X^*)$. Da $x \in \overline{M}^{\tau}$ ist, gibt es ein $v \in M \cap V$, d.h.

$$|\langle f_j, v - x \rangle| < \frac{1}{m} \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (4.21)$$

Somit liegen alle f_j , $j = 1, \dots, n$, in einer offenen Umgebung der Null bzgl. der *-schwachen Topologie $\tau(X^*, X)$. Für $v \in M$ fest, aber beliebig setzen wir

$$W_v := W = \{(f_1, \dots, f_n) \in B^n \mid (4.21) \text{ gilt}\} \subseteq (X^*)^n.$$

Da X reflexiv ist, folgt mit Lemma 4.8 (iii), dass auch X^* reflexiv ist, also stimmen die schwache Topologie $\tau(X^*, X^{**})$ und die *-schwache Topologie $\tau(X^*, X)$ überein, d.h. W ist bezüglich $\tau(X^*, X^{**})^n$ offen. Da X^* reflexiv ist, ist nach Satz 4.2 B_{X^*} kompakt bezüglich der schwachen Topologie

$\tau(X^*, X^{**})$, also ist auch B^n kompakt in $(X^*)^n$ bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X^*, X^{**})^n$. Nach Definition von V ist

$$B^n \subseteq \bigcup_{v \in M} W_v$$

und da B^n kompakt ist, gibt es sogar eine endlich Teilüberdeckung, d.h.

$$B^n \subseteq \bigcup_{j=1}^k W_{v_j}$$

d.h. die Menge $S_{nm} := \{v_j \mid j = 1, \dots, k\}$ ist derart, dass es für alle $(f_1, \dots, f_n) \in B^n$ ein $j_0 \in \{1, \dots, k\}$ gibt mit

$$|\langle f_i, v_{j_0} - x \rangle| < \frac{1}{m} \quad i = 1, \dots, n.$$

Setze $M_0 := \bigcup_{m, n \in \mathbb{N}} S_{nm}$. Dann ist M_0 abzählbar und $x \in \overline{M_0}^{\tau(X, X^*)}$. In der Tat gibt es für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und für alle $(f_1, \dots, f_n) \in B^n$ ein $y \in M_0$, so dass für alle $i = 1, \dots, n$

$$|\langle f_i, y - x \rangle| < \frac{1}{m}.$$

(ii) Sei X_0 der kleinste lineare, abgeschlossene Teilraum von X , der x und M_0 enthält. Nach Lemma 4.8 (i) ist X_0 reflexiv und separabel. Nach (i) ist $x \in \overline{M_0}^{\tau(X, X^*)}$, also ist auch $x \in \overline{M_0}^{\tau(X_0, X_0^*)}$, denn nach Lemma 4.7 gilt $\tau(X, X^*)|_{X_0} = \tau(X_0, X_0^*)$ und $M_0 \subseteq X_0$. Da M beschränkt ist, gibt es ein $R > 0$ so, dass

$$M_0 \subseteq M \subseteq \overline{B_R(0)} =: K.$$

Da X_0 reflexiv und separabel ist, folgt mit Folgerung 4.11, dass X_0^* auch separabel ist und nach Satz 4.15 ist $K \cap X_0$ metrisierbar bezüglich $\tau(X_0, X_0^*)$. Also gibt es eine Folge $(x_n) \subseteq M_0$, die bezüglich $\tau(X_0, X_0^*)$ schwach gegen x konvergiert. Für alle $f \in X_0^*$ gilt also $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$. Für alle $f \in X^*$ ist $f|_{X_0} \in X_0^*$ und somit $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, d.h. $x_n \rightharpoonup x$ bezüglich $\tau(X, X^*)$. ■

4.22 Definition. Ein Banachraum heißt **gleichmäßig konvex** genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass für alle $x, y \in B_X$, d.h. $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, mit $\|x - y\| > \varepsilon$ folgt $\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$.

- X ist gleichmäßig konvex $\Rightarrow B_X$ ist "rund"

Beispiele - \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik, dann kann man ε und δ

explizit berechnen.

- \mathbb{R}^2 mit der Norm $\|x\| := |x_1| + |x_2|$ ist nicht gleichmäßig konvex.
- $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ sind gleichmäßig konvex,
- L^1 , L^∞ , $C(\overline{\Omega})$ sind nicht gleichmäßig konvex.

4.23 Satz (Milman-Pettis). *Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum ist reflexiv.*

BEWEIS : Sei $\omega \in X^{**}$ mit $\|\omega\| = 1$. Zu zeigen ist, dass $\omega \in J(B_X)$ ist, dann folgt durch Skalieren die Behauptung. $J(B_X)$ ist stark abgeschlossen. In der Tat, sei $(\omega_n) \subseteq J(B_X)$ eine Folge mit $\omega_n \rightarrow \omega$ in X^{**} . Dann gibt es eine Folge $(x_n) \subseteq B_X$ mit $\omega_n = J(x_n)$, und es gilt:

$$\|x_n - x_m\| = \|J(x_n) - J(x_m)\| = \|\omega_n - \omega_m\|.$$

Da (ω_n) eine Cauchyfolge ist, ist es auch (x_n) , es gibt also ein $x \in B_X$ mit $x_n \rightarrow x$. Dann gilt auch

$$\omega_n = J(x_n) \rightarrow J(x),$$

d.h. $\omega \in J(B_X)$. Es reicht also zu zeigen, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in B_X$ gibt mit

$$\|\omega - J(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\delta > 0$ das zugehörige δ aus Definition 4.22. Wir wählen $f \in X^*$ mit $\|f\| = 1$ und

$$\langle \omega, f \rangle > 1 - \frac{\delta}{2}. \quad (4.24)$$

Dies ist möglich, da $\|\omega\| = \sup_{\|f\|_{X^*}=1} \langle \omega, f \rangle$. Setze

$$V := \{\eta \in X^{**} \mid |\langle \eta - \omega, f \rangle| < \frac{\delta}{2}\}.$$

Dies ist eine Umgebung von ω bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$. Nach Lemma 4.5 ist $J(B_X)$ dicht in $B_{X^{**}}$, also ist $J(B_X) \cap V \neq \emptyset$. Sei $x \in B_X$ mit $J(x) \in V$. Wir zeigen durch einen Widerspruch:

$$\omega \in J(x) + \varepsilon B_{X^{**}}.$$

Sei also $\omega \in X^{**} \setminus (J(x) + \varepsilon B_{X^{**}}) =: W$. W ist offen bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$, W ist also offene Umgebung von ω . Nach Lemma 4.5 ist $(V \cap W) \cap J(B_X) \neq \emptyset$, es gibt also ein $\hat{x} \in B_X$ mit $J(\hat{x}) \in V \cap W$, d.h. $J(\hat{x}) \in V$ und nach Voraussetzung war $J(x) \in V$, d.h.

$$|\langle f, x \rangle - \langle \omega, f \rangle| = |\langle J(x), f \rangle - \langle \omega, f \rangle| < \frac{\delta}{2}$$

und analog

$$|\langle f, \hat{x} \rangle - \langle \omega, f \rangle| < \frac{\delta}{2}.$$

Also gilt

$$2\langle \omega, f \rangle < \delta + |\langle f, x + \hat{x} \rangle| \stackrel{\|f\| \leq 1}{\leq} \delta + \|x + \hat{x}\|.$$

Mit (4.24) gilt dann

$$1 - \frac{\delta}{2} < \langle \omega, f \rangle < \frac{\delta}{2} + \left\| \frac{x + \hat{x}}{2} \right\|.$$

Da X gleichmäßig konvex ist, folgt $\|x - \hat{x}\| \leq \varepsilon$. Aber $J(\hat{x}) \in W$ und somit gilt $\|x - \hat{x}\| = \|J(x) - J(\hat{x})\| > \varepsilon$, ein Widerspruch. ■

4.25 Satz. *Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum und sei (x_n) eine Folge mit $x_n \rightharpoonup x$ und*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Dann konvergiert x_n stark gegen x .

BEWEIS : OBdA sei $x \neq 0$, da für $x = 0$ die Behauptung klar ist. Aus Satz 2.5 (iii) und der Bedingung im Satz folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

Sei $\lambda_n := \max(\|x_n\|, \|x\|)$, dann ist sofort klar, dass $\lambda_n \rightarrow \|x\|$. Außerdem definieren wir

$$y_n := \frac{x_n}{\lambda_n}, \quad y := \frac{x}{\|x\|}.$$

Aus $x_n \rightharpoonup x$ folgt, dass $y_n \rightharpoonup y$, denn für $f \in X^*$ gilt:

$$\begin{aligned} |\langle f, y_n \rangle - \langle f, y \rangle| &\leq \left| \langle f, \frac{x_n}{\lambda_n} - \frac{x_n}{\|x\|} \rangle \right| + \left| \langle f, \frac{x_n}{\|x\|} - \frac{x}{\|x\|} \rangle \right| \\ &\leq \|f\| \underbrace{\|x_n\|}_{\leq K} \underbrace{\left| \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\|x\|} \right|}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{\|x\|} \underbrace{|\langle f, x_n - x \rangle|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Wir wissen, dass $\|y\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\|$, aber da $\|y\| = 1$ und $\|y_n\| \leq 1$ folgt

$$1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\|y_n\| + \|y\|) = 1.$$

Dann sieht man, dass $\left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| \rightarrow 1$ und da X gleichmäßig konvex ist, folgt $y_n - y \rightarrow 0$, also auch $x_n \rightarrow x$. ■

Kapitel 5

Lebesgueräume L^p

5.1 Wiederholung

Im Weiteren ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ immer eine offene Menge. Wir betrachten den \mathbb{R}^n versehen mit dem Lebesguemaß, welches wir mit dx bezeichnen. Für messbare Mengen M bezeichnen wir mit $|M|$ das Lebesguemaß von M .

Die Relation „ $f = g$ fast überall“ ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge der messbaren Funktionen. Man kann also eine gegebene Funktion f auf einer beliebigen Nullmenge beliebig umdefinieren und bleibt in der gleichen Äquivalenzklasse. Im Weiteren werden wir nicht zwischen der Funktion f und ihrer Äquivalenzklasse $[f]$ unterscheiden. (Etwas ungenau aber sehr praktisch.)

1.1 Definition. Sei $1 \leq p < \infty$. Wir bezeichnen mit $L^p = L^p(\Omega)$ die Menge aller Lebesgue-messbaren Funktionen f mit

$$\int_{\Omega} |f|^p dx < \infty.$$

Die Größe

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.2)$$

heißt L^p -Norm der Funktion $f \in L^p$. Mit $L^\infty = L^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller messbaren Funktionen f für die eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$|f| \leq K \quad \text{fast überall.}$$

Die Größe

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| := \inf_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ |M|=0}} \sup_{x \in X \setminus M} |f(x)| \quad (1.3)$$

heißt L^∞ -Norm der Funktion $f \in L^\infty$.

Dass die so definierten Größen wirklich Normen sind basiert auf folgenden Ergebnissen.

1.4 Lemma (Young–Ungleichung). Sei $p, q \in (1, \infty)$ mit $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Für nichtnegative Zahlen a, b gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

BEWEIS : Analysis III, Lemma 9.4 ■

1.5 Lemma (Hölder–Ungleichung). Sei $f \in L^p$ und $g \in L^q$ mit $p, q \in [1, \infty]$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$.¹ Dann ist $fg \in L^1$ und es gilt:

$$\left| \int_{\Omega} fg \, dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

BEWEIS : Analysis III, Satz 9.5 ■

1.6 Lemma (Minkowski–Ungleichung). Sei $p \in [1, \infty]$ und $f, g \in L^p$. Dann ist $f + g \in L^p$ und es gilt:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

BEWEIS : Analysis III, Satz 9.6 ■

1.7 Satz. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Vektorraum.

BEWEIS : Analysis III, Satz 9.6 und Definition 9.7 ■

1.8 Satz (Fischer–Riesz). Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p, \|\cdot\|_p)$ vollständig, also ein Banachraum.

BEWEIS : Analysis III, Satz 9.10 ■

1.9 Lemma. Sei $(f_n) \subset L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ eine Folge, die stark gegen $f \in L^p$ konvergiert. Dann existiert eine Teilfolge (f_{n_k}) die fast überall gegen f konvergiert.

BEWEIS : Analysis III, Folgerung 9.11 ■

Sätze über das Vertauschen von Integral und Grenzwert haben eine zentrale Bedeutung in der Integrationstheorie und ihren Anwendungen.

¹Wir benutzen die Konvention, dass $p = 1, q = \infty$ in der Identität $q^{-1} + p^{-1} = 1$ enthalten ist.

1.10 Satz (Levi, monotone Konvergenz). Sei $\{f_n\}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $f_n \nearrow f$ fast überall und sei $\int_{\Omega} f_1 dx > -\infty$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx = \int_{\Omega} f dx.$$

BEWEIS : Analysis III, Satz 8.2 ■

1.11 Satz (dominierte Konvergenz). Sei $\{f_n\}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $f_n \rightarrow f$ fast überall. Wenn es eine Funktion $h \in L^1$ gibt mit $|f_n| \leq h$ fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $f \in L^1$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx = \int_{\Omega} f dx.$$

BEWEIS : Analysis III, Satz 8.6 ■

1.12 Satz (Verallgemeinerter Satz über die dominierte Konvergenz). Seien $\{f_n\}$ und $\{h_n\}$ Folgen aus L^1 , die fast überall gegen f bzw. h , ebenfalls aus L^1 , konvergieren. Weiterhin gelte $|f_n| \leq h_n$ und

$$\int_{\Omega} h_n dx \rightarrow \int_{\Omega} h dx \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dann folgt

$$\int_{\Omega} |f_n - f| dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

BEWEIS : Übungsaufgabe ■

1.13 Lemma (Fatou). Sei $\{f_n\}$ eine Folge messbarer Funktionen und $g \in L^1$. Aus $f_n \geq g$ fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx.$$

BEWEIS : Analysis III, Lemma 8.5 ■

Weitere wichtige Sätze sind:

1.14 Satz (Lusin). Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $|A| < \infty$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K = K(\varepsilon) \subseteq A$ so, dass

(i) $|A \setminus K| < \varepsilon$;

(ii) $f|_K$ ist stetig.

BEWEIS : Analysis III, Satz 6.10 ■

1.15 Satz (Egorov). Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar mit $|A| < \infty$ und seien $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen mit $f_n \rightarrow g$ fast überall. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $B \subseteq A$ mit

(i) $|A \setminus B| < \varepsilon$,

(ii) $f_k \rightrightarrows g$ gleichmäßig auf B .

BEWEIS : Analysis III, Satz 2.17 ■

1.16 Satz (Fubini). Sei $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Dann gilt für fast alle $x \in \Omega_1$

$$f(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2), \quad \int_{\Omega_2} f(x, y) dy \in L^1(\Omega_1),$$

und für fast alle $y \in \Omega_2$

$$f(\cdot, y) \in L^1(\Omega_1), \quad \int_{\Omega_1} f(x, y) dx \in L^1(\Omega_2).$$

Weiterhin gilt

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) dy dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) d(x \times y).$$

BEWEIS : Analysis III, Satz 10.16 ■

Wir bezeichnen mit $C(\overline{\Omega})$ die Menge aller gleichmäßig stetigen, beschränkten Funktionen $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Versieht man mit der $\|\cdot\|_\infty$ Norm bildet $C(\overline{\Omega})$ einen Banachraum. Mit $C^k(\overline{\Omega})$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in C(\overline{\Omega})$, deren partielle Ableitungen $\partial^\alpha f$, $|\alpha| \leq k$, zum Raum $C(\overline{\Omega})$ gehören. Wir setzen $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\overline{\Omega})$. Mit $C_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, bzw. $C_0^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir die Teilräume von $C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$, bzw. $C^\infty(\overline{\Omega})$ von Funktionen mit kompaktem Träger.

1.17 Satz. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es zu jedem $f \in L^p(\Omega)$ eine Folge $f_k \in C_0(\Omega)$ mit $\|f - f_k\|_p \rightarrow 0$.

BEWEIS : Analysis III, Satz 9.17 ■

Wichtige Hilfsmittel sind die Flatung und der Glättungsoperator.

1.18 Satz (Definition der Faltung). Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Faltung von f mit g ist die fast überall definierte Funktion

$$f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy.$$

Es gilt $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sowie

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

BEWEIS : Analysis III, Satz 15.2 ■

1.19 Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Sei J eine nichtnegative Funktion aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit den Eigenschaften

i) $J(x) = 0$, falls $\|x\| \geq 1$;

ii) $\int_{\mathbb{R}^n} J(x) dx = 1$.

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $J_\varepsilon(x) \equiv \varepsilon^{-n} J(x/\varepsilon)$, welche die Eigenschaften

i) $J_\varepsilon(x) = 0$, falls $\|x\| \geq \varepsilon$;

ii) $\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x) dx = 1$

hat. J_ε heißt **Glättungsoperator** und die Faltung

$$(J_\varepsilon * f)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)f(y) dy,$$

welche für Funktionen f definiert ist, für die die rechte Seite Sinn macht, heißt **Regularisierung von f** .

- Ein typisches Beispiel für J ist

$$J(x) = \begin{cases} k \exp(\frac{-1}{1-\|x\|^2}), & \text{falls } \|x\| \leq 1, \\ 0, & \text{falls } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

wobei k eine Normierungskonstante ist.

1.20 Satz. Sei Ω eine offene Menge des \mathbb{R}^n , $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ sei außerhalb Ω identisch Null und $\varepsilon > 0$.

(i) Für $f \in L^1(\Omega)$ gilt $J_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Falls ² $\text{supp}(f) \subseteq\subseteq \Omega$, dann ist $J_\varepsilon * f \in C_0^\infty(\Omega)$ für $\varepsilon < \text{dist}(\text{supp}(f), \partial\Omega)$.

(iii) Für $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, gilt: $J_\varepsilon * f \in L^p(\Omega)$ und

$$\|J_\varepsilon * f\|_p \leq \|f\|_p, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|J_\varepsilon * f - f\|_p = 0.$$

(iv) Für $f \in C(\Omega)$ und $K \subseteq\subseteq \Omega$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_\varepsilon * f(x) = f(x) \quad \text{gleichmäßig auf } K.$$

BEWEIS : Analysis III, Satz 15.5, Satz 15.4 ■

1.21 Satz. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Dann ist $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.

BEWEIS : Analysis III, Folgerung 15.6 ■

1.22 Definition. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Die messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ liegt in $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$, falls $\chi_K f \in L^p(\Omega)$ für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$.

Siehe Analysis III, Definition 15.7

1.23 Folgerung. Für die Funktion $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ gelte

$$\int_{\Omega} f \varphi \, dx \geq 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0.$$

Dann folgt $f(x) \geq 0$ für fast alle $x \in \Omega$.

BEWEIS : Analysis III, Folgerung 15.8 ■

1.24 Lemma. Sei $\tau_h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau_h(x) = x + h$ die Translation um $h \in \mathbb{R}^n$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p < \infty$ gelten folgende Aussagen:

(i) $f \circ \tau_h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|f \circ \tau_h\|_p = \|f\|_p$.

(ii) $\|f \circ \tau_h - f\|_p \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

BEWEIS : Analysis III, Lemma 15.1 ■

²Man schreibt $K \subseteq\subseteq \Omega$ falls $\overline{K} \subseteq \Omega$ und \overline{K} kompakt ist.

1.25 Satz (Arzela–Ascoli). Sei Ω ein beschränktes Gebiet und sei $(f_n) \subset C(\overline{\Omega})$ eine Folge gleichgradig stetiger Funktionen, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| \leq \delta$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|f_n(y) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, die gleichmäßig beschränkt sind, d.h. es existiert ein $K > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \Omega$ gilt: $|f_n(x)| \leq K$. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ die gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$ gegen eine Funktion $f \in C(\overline{\Omega})$ konvergiert.

BEWEIS : Siehe z.B. [Alt, Lineare Funktionalanalysis 6. Auflage, Seite 110] und im eindimensionalen Fall Analysis II, Satz 12.2.11. ■

Die Aussage des Satzes gilt analog, wenn man $\overline{\Omega}$ durch einen beliebigen kompakten metrischen Raum ersetzt.

5.2 Reflexivität, Separabilität, Dualräume und Kompaktheit

2.1 Definition. Eine konvexe Funktion $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ heißt **gleichmäßig konvex** genau dann, wenn für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ ein $\delta \in (0, 1)$ existiert, so dass für alle $s \geq 0$ und $\gamma \in [0, \varepsilon]$ gilt:

$$g\left(\frac{1+\gamma}{2}s\right) \leq (1-\delta)\frac{1}{2}(g(s) + g(\gamma s)). \quad (2.2)$$

• $g(s) = s^p$, $1 < p < \infty$ ist für $s \geq 0$ gleichmäßig konvex, denn

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\gamma}{2}s\right)^p &\leq (1-\delta)\frac{1}{2}(s^p + (\gamma s)^p) \\ \Leftrightarrow 2^{1-p}\frac{(1+\gamma)^p}{1+\gamma^p} &\leq 1-\delta. \end{aligned}$$

Sei also $f(\gamma) := 2^{1-p}\frac{(1+\gamma)^p}{1+\gamma^p}$. Wir müssen zeigen, dass $f(\gamma) \leq 1-\delta$ ist für $\gamma \in [0, \varepsilon]$. f ist wachsend auf $[0, 1]$ und stetig, nimmt also Maximum und Minimum an. Wähle also $\gamma = \varepsilon$, dann ergibt sich

$$f(\varepsilon) = 2^{1-p}\frac{(1+\varepsilon)^p}{1+\varepsilon^p} =: 1-\delta.$$

2.3 Satz. Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ gleichmäßig konvex.

• Ein Banachraum X heißt gleichmäßig konvex $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \|u\|, \|v\| \leq 1$ und $\|u - v\| > \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2}\|u + v\| < 1 - \delta$.

BEWEIS : Seien $u, v \in L^p$ mit $\|u\|_p, \|v\|_p \leq 1$ und $\|u - v\|_p > \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Sei

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} : s \mapsto |s|^p,$$

dann ist $\varphi(s) = g(|s|)$ mit $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} : s \mapsto s^p$. Für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $|a - b| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \max(|a|, |b|)$ gilt:

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq (1-\delta)\frac{1}{2}(\varphi(a) + \varphi(b)). \quad (2.4)$$

Dies folgt sofort aus (2.2). In der Tat, sei $|b| \leq |a| =: s$. Dann gibt es ein $\tau \in [-1, 1]$ mit $b = \tau a$ und obige Voraussetzung an a und b lässt sich schreiben als:

$$|a - b| = |a| |1 - \tau| = s(1 - \tau) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} s \Leftrightarrow \tau \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Fall: $\tau \in [-1, 0] \Leftrightarrow |a + b| = |a|(1 + \tau) \leq |a|$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) &= g\left(\frac{|a+b|}{2}\right) = g\left(\frac{|a|(1+\tau)}{2}\right) \\ &\leq g\left(\frac{|a|}{2}(1+0)\right) \\ &\stackrel{(2.2)}{\leq} (1-\delta)\frac{1}{2}(g(|a|) + g(0)) \\ &\leq (1-\delta)\frac{1}{2}(g(|a|) + g(|\tau||a|)) \\ &= (1-\delta)\frac{1}{2}(\varphi(a) + \varphi(b)) \end{aligned}$$

2. Fall: $\tau \in [0, 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}]$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) &= g\left(\left|\frac{a+b}{2}\right|\right) \\ &= g\left(s\frac{1+\tau}{2}\right) \\ &\stackrel{(2.2)}{\leq} (1-\delta)\frac{1}{2}(g(s) + g(s\tau)) \\ &= (1-\delta)\frac{1}{2}(\varphi(a) + \varphi(b)). \end{aligned}$$

Für $u, v \in L^p$ mit $\|u\|_p, \|v\|_p \leq 1$ und $\|u - v\|_p > \varepsilon^{\frac{1}{p}}$, setze

$$A := \{x \in \Omega \mid |u(x) - v(x)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \max(|u(x)|, |v(x)|)\},$$

dann folgt aus (2.4), dass für alle $x \in A$ gilt:

$$\varphi\left(\frac{u(x) + v(x)}{2}\right) \leq (1 - \delta)\frac{1}{2}(\varphi(u(x)) + \varphi(v(x))). \quad (2.5)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} 1 - \int_{\Omega} \left| \frac{u+v}{2} \right|^p dx &= 1 - \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) dx \\ &\stackrel{\|u\|_p, \|v\|_p \leq 1}{\geq} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi(u) + \varphi(v) dx - \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_A \varphi(u) + \varphi(v) dx + \int_{\Omega \setminus A} \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) dx - \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) dx \\ &\stackrel{(2.5)}{\geq} \frac{1}{2} \int_A \varphi(u) + \varphi(v) dx - (1 - \delta)\frac{1}{2} \int_A \varphi(u) + \varphi(v) dx \\ &= \frac{\delta}{2} \int_A \varphi(u) + \varphi(v) dx, \end{aligned}$$

wobei wir die Zerlegung $\Omega = (\Omega \setminus A) \cup A$ und die Konvexität von φ auf $\Omega \setminus A$ benutzt haben. Insgesamt erhalten wir also

$$1 - \int_{\Omega} \left| \frac{u+v}{2} \right|^p dx \geq \frac{\delta}{2} \int_A \varphi(u) + \varphi(v) dx. \quad (2.6)$$

Für $x \in \Omega \setminus A$ ist $|u(x) - v(x)| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}(|u(x)| + |v(x)|)$, also $\varphi(u - v) \leq \varphi\left(\left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}(|u| + |v|)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\varphi(|u| + |v|)$, da $\varphi(s) = |s|^p$. Wenn wir nun das Integral über $\Omega \setminus A$ bilden, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus A} \varphi(u - v) dx &\leq \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \int_{\Omega \setminus A} \varphi(|u| + |v|) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} 2^{p-1} \int_{\Omega \setminus A} \varphi(u) + \varphi(v) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

da $\varphi(u + v) = \varphi\left(\frac{1}{2}(2u + 2v)\right) \leq \frac{1}{2}(\varphi(2u) + \varphi(2v)) = 2^{p-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ und $\|u\|, \|v\| \leq 1$. Also

$$\int_{\Omega \setminus A} \varphi(u - v) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.7)$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \int_A \varphi(u-v)dx &= \int_{\Omega} \varphi(u-v)dx - \int_{\Omega \setminus A} \varphi(u-v)dx \\ &\stackrel{(2.7)}{\geq} \int_{\Omega} \varphi(u-v)dx - \frac{\varepsilon}{2} \\ &> \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

aufgrund von $\|u-v\|_p > \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} < \int_A \varphi(u-v)dx &\leq 2^{p-1} \int_A \varphi(u) + \varphi(v)dx \\ &\stackrel{(2.6)}{\leq} 2^{p-1} \frac{2}{\delta} \left(1 - \int \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)dx\right) \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{2^p}{\delta} \left(1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p\right) &\Leftrightarrow \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p \leq 1 - \frac{\varepsilon\delta}{2^{p+1}} \\ &\Leftrightarrow \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p \leq 1 - \tilde{\delta}(\delta, \varepsilon, p) \end{aligned}$$

■

2.8 Folgerung. Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ reflexiv.

BEWEIS : Satz 2.3 und Satz 4.23 aus Kapitel 4.

■

- Die entscheidende Ungleichung (2.4) kann man für $\varphi(s) = |s|^p$, $1 < p < \infty$ direkt nachrechnen. Betrachte die Funktion

$$f(\tau) := 2^{1-p} \frac{(1+\tau)^p}{1+|\tau|^p} \quad \tau \in [-1, 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}],$$

sie erreicht ihr Maximum bei $\tau = 1$.

- Der hier dargestellte Beweis funktioniert auch für Orliczräume. Diese verallgemeinern die L^p -Räume. Man ersetzt die Funktion $t \mapsto t^p$ durch eine Young-Funktion g . Diese muss die Δ_2 -Bedingung erfüllen, d.h. es gibt ein $K > 0$, so dass für alle $s \geq 0$ gilt

$$g(2s) \leq Kg(s).$$

Dann gilt: Der Orliczraum L_g ist gleichmäßig konvex, wenn g gleichmäßig konvex ist und der Δ_2 -Bedingung genügt.

• Nun betrachten wir die Dualräume der Lebesgueräume.

2.9 Satz (Riesz). *Sei $1 < p < \infty$ und sei $f \in (L^p(\Omega))^*$. Dann existiert genau eine Funktion $g \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, so dass für alle $u \in L^p(\Omega)$ gilt:*

$$\langle f, u \rangle = \int_{\Omega} gu \, dx. \quad (2.10)$$

Weiterhin gilt:

$$\|g\|_{p'} = \|f\|_{(L^p(\Omega))^*}. \quad (2.11)$$

Umgekehrt definiert jedes $g \in L^{p'}(\Omega)$ durch (2.10) ein stetiges lineares Funktional auf $L^p(\Omega)$.

BEWEIS : Wir definieren die Abbildung $T : L^{p'}(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))^*$ durch:

$$\langle Tg, u \rangle := \int_{\Omega} gu \, dx \quad u \in L^p(\Omega), g \in L^{p'}(\Omega).$$

Offensichtlich ist T linear. Außerdem folgt mit der Hölder-Ungleichung

$$|\langle Tg, u \rangle| \leq \|g\|_{p'} \|u\|_p,$$

d.h. $Tg \in (L^p(\Omega))^*$ und somit

$$\|Tg\|_{(L^p)^*} \leq \|g\|_{p'}, \quad (2.12)$$

und die Rückrichtung ist bewiesen. Nun beweisen wir (2.11). Wähle dazu

$$u_0(x) = \begin{cases} |g(x)|^{p'-2}g(x) & \text{für } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{für } g(x) = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $u_0 \in L^p(\Omega)$, denn mit $p' = \frac{p}{p-1}$ und $p' - 1 = \frac{1}{p-1}$ gilt

$$\int_{\Omega} |u_0|^p dx = \int_{\{g \neq 0\}} |g|^{(p'-1)p} dx = \int_{\{g \neq 0\}} |g|^{\frac{p}{p-1}} dx < \infty,$$

da $g \in L^{p'}(\Omega)$. D.h. $\|u_0\|_p^p = \|g\|_{p'}^{p'}$ und somit $\|u_0\|_p = \|g\|_{p'}^{\frac{1}{p-1}}$, u_0 ist also eine zulässige Testfunktion. Wenn wir diese einsetzen, ergibt sich

$$\langle Tg, u_0 \rangle = \int_{\Omega} g|g|^{p'-2}g \, dx = \int_{\Omega} |g|^{p'} \, dx = \|g\|_{p'}^{p'}$$

und somit

$$\|g\|_{p'} = \frac{\langle Tg, u_0 \rangle}{\|g\|_{p'}^{p'-1}} = \frac{\langle Tg, u_0 \rangle}{\|u_0\|_p} \leq \frac{\|Tg\|_{(L^p)^*} \|u_0\|_p}{\|u_0\|_p} = \|Tg\|_{(L^p)^*}.$$

Zusammen mit (2.12) haben wir die Isometrieeigenschaft (2.11) bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass T surjektiv ist. Sei $E := T(L^{p'}(\Omega)) = R(T)$, E ist also ein linearer Unterraum von $(L^p(\Omega))^*$. Da T eine lineare Isometrie ist, ist E abgeschlossen. In der Tat, sei (u_n) eine Folge in $L^{p'}(\Omega)$, so dass $Tu_n \rightarrow v$ in $(L^p(\Omega))^*$ konvergiert. Dann ist

$$\|T(u_n - u_m)\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|u_n - u_m\|_{p'},$$

also ist auch (u_n) eine Cauchyfolge und konvergiert somit gegen ein u in $L^{p'}(\Omega)$, d.h. $Tu_n \rightarrow Tu = v$.

Es reicht zu zeigen, dass E dicht in $(L^p(\Omega))^*$ ist. Da $L^p(\Omega)$ reflexiv ist, ist $J : L^p(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))^{**}$ surjektiv. Sei $\varphi \in (L^p(\Omega))^{**}$ so, dass

$$\langle \varphi, Tg \rangle_{(L^p)^*} = 0 \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega),$$

d.h. $\varphi \in E^\perp \subseteq (L^p(\Omega))^{**}$, wobei wir E^\perp bzgl. des Grundraums $X = (L^p(\Omega))^*$ betrachten. Sei $\varphi = Jh$, $h \in L^p(\Omega)$. Solch ein h existiert, da L^p reflexiv ist. Also gilt

$$\langle \varphi, Tg \rangle_{(L^p)^*} = \langle Jh, Tg \rangle_{(L^p)^*} = \langle Tg, h \rangle_{L^p},$$

d.h.

$$\int_{\Omega} gh \, dx = 0 \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega).$$

Nun wählen wir $g = |h|^{p-2}h$ und erhalten $\int |h|^p dx = 0$, woraus folgt $h = 0$ fast überall. Oder man folgert aus $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^{p'}(\Omega)$, dass nach dem Fundamentallema der Variationsrechnung $h = 0$ ist. Dann ist auch $\varphi = 0$ und somit $E^\perp = \{0\}$. Aus Folgerung 2.12 in Kapitel 2 folgt, dass dann E dicht in $(L^p(\Omega))^*$ ist.

Zur Eindeutigkeit: Seien $g_1, g_2 \in L^{p'}(\Omega)$ mit

$$\langle f, u \rangle = \int_{\Omega} g_1 u \, dx = \int_{\Omega} g_2 u \, dx.$$

Dann ist für alle $u \in L^p(\Omega)$: $0 = \int_{\Omega} (g_1 - g_2)u \, dx$ und mit den gleichen Argumenten wie oben folgt, dass $g_1 = g_2$ fast überall ist. ■

• Wir haben gezeigt, dass die lineare, surjektive Isometrie aus (2.10) existiert. Wir können also für $1 < p < \infty$ die beiden Räume identifizieren:

$$(L^p(\Omega))^* \cong L^{p'}(\Omega).$$

2.13 Satz. Sei $f \in (L^1(\Omega))^*$. Dann existiert genau eine Funktion $g \in L^\infty(\Omega)$ so, dass für alle $u \in L^1(\Omega)$ gilt:

$$\langle f, u \rangle = \int_{\Omega} gu \, dx. \quad (2.14)$$

Weiterhin gilt:

$$\|g\|_{\infty} = \|f\|_{(L^1)^*}.$$

Umgekehrt definiert jedes $g \in L^\infty(\Omega)$ durch (2.14) ein stetiges, lineares Funktional auf $L^1(\Omega)$.

BEWEIS : Wir definieren $w(x) = (k+1)^{-\frac{n+1}{2}}$, $k < |x| \leq k+1$. Dann ist w eine positive Funktion mit $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$, denn

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |w|^2 dx &= \sum_k \int_{k < |x| \leq k+1} \frac{1}{(k+1)^{n+1}} dx \\ &= \sum_k \frac{1}{(k+1)^{n+1}} |\{x \mid k < |x| \leq k+1\}| \\ &\leq c \sum_k \frac{k^{n-1}}{k^{n+1}} \\ &= c \sum_k \frac{1}{k^2} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq \Omega$ gilt $w|_K \geq \alpha_K > 0$, da $K \subseteq B_k(0)$ für geeignetes k . Für gegebenes $f \in (L^1(\Omega))^*$ definieren wir $\varphi \in (L^2(\Omega))^*$ durch

$$\varphi : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto \langle f, wv \rangle_{L^1}.$$

Es gilt: φ ist linear (klar) und stetig, denn

$$|\langle \varphi, v \rangle_{L^2}| = |\langle f, wv \rangle_{L^1}| \leq \|f\|_{(L^1)^*} \|wv\|_1 \leq \|f\|_{(L^1)^*} \|w\|_2 \|v\|_2.$$

Nach Satz 2.9 gibt es also ein $h \in L^2(\Omega)$, so dass für alle $v \in L^2(\Omega)$ gilt:

$$\langle f, wv \rangle_{L^1} = \langle \varphi, v \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} hv \, dx. \quad (2.15)$$

Setze nun $g(x) := \frac{h(x)}{w(x)}$. g ist wohldefiniert, da $w > 0$ auf Ω und g ist als Quotient messbarer Funktionen auch messbar. Zu zeigen ist, dass $g \in L^\infty(\Omega)$ ist. Für $c > \|f\|_{(L^1)^*}$ definiere

$$A := \{x \in \Omega \mid |g(x)| > c\}.$$

Es gilt: $|A| = 0$. Sei dem nicht so, dann gibt es ein $\tilde{A} \subseteq A$, das messbar ist, z.B. kompakt, mit $0 < |\tilde{A}| < \infty$. Betrachte

$$v_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in \tilde{A}, g(x) > 0 \\ -1 & x \in \tilde{A}, g(x) < 0 \\ 0 & x \in \Omega \setminus \tilde{A} \end{cases}$$

Dann ist $v_0 \in L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ und es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{A}} |g|w \, dx &= \left| \int_{\tilde{A}} gw \operatorname{sgn}(g) \, dx \right| \\ &\stackrel{h=gw}{=} \left| \int_{\Omega} h v_0 \, dx \right| \\ &\stackrel{(2.15)}{\leq} \|f\|_{(L^1)^*} \|w v_0\|_1 \\ &= \|f\|_{(L^1)^*} \int_{\tilde{A}} w \, dx, \end{aligned}$$

da $|v_0| = 1$ und $w > 0$. Dann folgt aus der Definition von A und weil $\tilde{A} \subseteq A$:

$$c \int_{\tilde{A}} w \, dx \leq \int_{\tilde{A}} |g|w \, dx \leq \|f\|_{(L^1)^*} \int_{\tilde{A}} w \, dx,$$

ein Widerspruch zu $c > \|f\|_{(L^1)^*}$. Also ist $|A| = 0$ und somit $|g(x)| \leq c$ fast überall, $g \in L^\infty(\Omega)$ und $\|g\|_\infty \leq \|f\|_{(L^1(\Omega))^*}$. Aus (2.15) und der Definition von g folgt, dass für alle $v \in L^2(\Omega)$ gilt:

$$\langle f, wv \rangle_{L^1} = \int_{\Omega} gwv \, dx. \quad (2.16)$$

Wähle für gegebenes $u \in C_0(\Omega)$ $v = \frac{u}{w}$ in (2.16). Da $w \geq \alpha_k > 0$ auf $K = \operatorname{supp} u$ ist, ist $v \in L^2(\Omega)$. Dann gilt für alle $u \in C_0(\Omega)$:

$$\langle f, u \rangle_{L^1} = \int_{\Omega} gu \, dx.$$

Da aber $C_0(\Omega)$ dicht in $L^1(\Omega)$ ist, gilt für alle $u \in L^1(\Omega)$:

$$\langle f, u \rangle_{L^1} = \int_{\Omega} gu \, dx.$$

In der Tat, für alle $u \in L^1(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_n) \subseteq C_0(\Omega)$ mit $u_n \rightarrow u$ in $L^1(\Omega)$. Dann folgt

$$\langle f, u_n \rangle_{L^1} \rightarrow \langle f, u \rangle_{L^1},$$

da $f \in (L^1(\Omega))^*$. Weiterhin gilt

$$\int_{\Omega} g u_n dx \rightarrow \int_{\Omega} g u dx,$$

denn

$$\left| \int_{\Omega} g u_n dx - \int_{\Omega} g u dx \right| \leq \int_{\Omega} |g| |u_n - u| dx \leq \|g\|_{\infty} \int_{\Omega} |u_n - u| dx \rightarrow 0.$$

Wir erhalten somit

$$|\langle f, u \rangle_{L^1}| = \left| \int_{\Omega} g u dx \right| \leq \|g\|_{\infty} \|u\|_1,$$

d.h. $\|f\|_{(L^1)^*} \leq \|g\|_{\infty}$. Mit dem schon Gezeigten folgt also die Gleichheit

$$\|f\|_{(L^1)^*} = \|g\|_{\infty}.$$

Nun bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei

$$\langle f, u \rangle_{L^1} = \int_{\Omega} g_1 u dx = \int_{\Omega} g_2 u dx,$$

d.h. $\int_{\Omega} (g_1 - g_2) u dx = 0$, woraus $g_1 = g_2$ fast überall folgt. Die Rückrichtung ist klar mithilfe der Hölderungleichung. ■

- Identifiziere $(L^1(\Omega))^* \cong L^{\infty}(\Omega)$ durch linearen, surjektiven Isomorphismus aus (2.14).

2.17 Folgerung. $L^1(\Omega)$ ist nicht reflexiv.

BEWEIS : OBdA sei $0 \in \Omega$. Betrachte $f_n = \alpha_n \chi_{B_{\frac{1}{n}}(0)}$, $\alpha_n = |B_{\frac{1}{n}}(0)|^{-1}$. Also gibt es ein n_0 derart, dass $B_{\frac{1}{n_0}}(0) \subseteq \Omega$, d.h. für alle $n \geq n_0$ gilt $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Wenn $L^1(\Omega)$ reflexiv wäre, dann gäbe es mit Kapitel 4 Satz 4.17 eine Teilfolge, $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$, so dass

$$f_{n_k} \rightharpoonup f \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

Da $(L^1(\Omega))^* \cong L^\infty(\Omega)$ heißt das für alle $g \in L^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f_{n_k} g \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f g \, dx. \quad (2.18)$$

Für $g \in C_0(\Omega \setminus \{0\})$ und k groß genug ist $\int_{\Omega} g f_{n_k} \, dx = 0$. Daraus und aus (2.18) folgt:

$$\int_{\Omega} f g \, dx = 0 \quad \forall g \in C_0(\Omega \setminus \{0\}).$$

Dann liefert Folgerung 1.23 $f = 0$ fast überall in $\Omega \setminus \{0\}$, also $f = 0$ fast überall in Ω . Aber wenn man in (2.18) $g = 1$ setzt, folgt

$$1 = \int_{\Omega} f_{n_k} \rightarrow \int_{\Omega} f = 0,$$

ein Widerspruch. ■

2.19 Folgerung. $L^\infty(\Omega)$ ist nicht reflexiv.

BEWEIS : Aus Satz 2.13 wissen wir, dass $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))^*$, aber in Kapitel 4 Satz 4.8 (iii) haben wir gezeigt, dass X reflexiv ist genau dann, wenn X^* reflexiv ist. ■

• Dualraum von L^∞ . Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und \mathcal{B} Menge der Lebesgue-messbaren Teilmengen von Ω .

2.20 Definition. Eine Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **additiv**, wenn für beliebige disjunkte Mengen $A, C \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\varphi(A \cup C) = \varphi(A) + \varphi(C).$$

Für $A \in \mathcal{B}$ wird mit

$$V_\varphi(A) := \sup_{C \subseteq A, C \in \mathcal{B}} |\varphi(C)| \quad (2.21)$$

die **Variation** von φ auf A bezeichnet. Man sagt, dass φ von **beschränkter Variation** ist, wenn $V_\varphi(\Omega) < \infty$. φ heißt **absolutstetig** bezüglich des Lebesguemaßes, wenn aus $|B| = 0$ folgt, dass $\varphi(B) = 0$ ist.

• Sei $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ eine additive Mengenfunktion mit beschränkter Variation, dann sind auch

$$\begin{aligned} \varphi^+(A) &:= \frac{1}{2}(|\varphi|(A) + \varphi(A)), \\ \varphi^-(A) &:= \frac{1}{2}(|\varphi|(A) - \varphi(A)), \end{aligned}$$

additive Mengenfunktionen mit beschränkter Variation, welche positiv sind, wobei

$$|\varphi|(E) := \sup_{\cup A_i = E, A_i \cap A_j = \emptyset} \sum_{i=1}^n |\varphi(A_i)|.$$

$|\varphi|$ heißt **Totalvariation** von φ .

• Es gilt:

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$$

• Im Folgenden sei φ immer additiv, absolutstetig und von beschränkter Variation.

• Sei $u \in L^\infty(\Omega)$. Sei $\ell_0 < \ell_1 < \dots < \ell_{N+1}$ eine Zerlegung des Bildbereiches von u , d.h.

$$-\|u\|_\infty > \ell_0, \|u\|_\infty < \ell_{N+1}.$$

Man nennt $\max_{i=0, \dots, N} |\ell_{i+1} - \ell_i| =: F(\ell)$ die **Feinheit** der Zerlegung. Wir definieren

$$A_{i+1} := \{x \in \Omega \mid \ell_i \leq u(x) < \ell_{i+1}\} \in \mathcal{B} \quad i = 0, \dots, N. \quad (2.22)$$

Für $\alpha_i \in [\ell_i, \ell_{i+1}]$ beliebig betrachte

$$s_\ell = \sum_{i=0}^N \alpha_i \chi_{A_{i+1}}.$$

Es gilt

$$\|u - \sum_{i=0}^N \alpha_i \chi_{A_{i+1}}\|_\infty \leq \max_i |\ell_{i+1} - \ell_i| = F(\ell), \quad (2.23)$$

d.h. u wird gut durch die Treppenfunktion approximiert.

2.24 Lemma. *In obiger Situation existiert der Grenzwert*

$$\lim_{F(\ell) \rightarrow 0} \sum \alpha_i \varphi(A_{i+1}). \quad (2.25)$$

BEWEIS : Wie oben kann man $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ zerlegen, es reicht also $\varphi \geq 0$ zu betrachten. Nach (2.23) gibt es eine Folge (s_ℓ) von Treppenfunktionen, so dass

$$s_\ell \rightarrow u \text{ in } L^\infty(\Omega) \quad \text{für } F(\ell) \rightarrow 0.$$

Sei $s_\ell = \sum_i \alpha_i^\ell \chi_{A_{i+1}^\ell}$. Analog zur Analysis III Vorlesung folgt dann

$$\begin{aligned} \left| \sum_i \alpha_i^n \varphi(A_{i+1}^\ell) - \sum_j \alpha_j^k \varphi(A_{j+1}^k) \right| &= \left| \sum_{i,j} (\alpha_i^\ell - \alpha_j^k) \varphi(A_{j+1}^k \cap A_{i+1}^\ell) \right| \\ &\leq \sum_{i,j} |\alpha_i^\ell - \alpha_j^k| |\varphi(A_{j+1}^k \cap A_{i+1}^\ell)| \\ &\leq \|s_\ell - s_k\|_\infty \sum_{i,j} \varphi(A_{j+1}^k \cap A_{i+1}^\ell) \\ &\leq \|s_\ell - s_k\|_\infty \varphi(\Omega). \end{aligned}$$

also ist $\sum \alpha_i^\ell \varphi(A_{i+1}^\ell)$ eine Cauchyfolge und somit existiert der Grenzwert. ■

- Man sieht leicht, dass der Grenzwert von der Zerlegung und der Wahl der α_i unabhängig ist.

2.26 Definition. Für $u \in L^\infty(\Omega)$ ist das **Radon-Integral** bezüglich der Mengenfunktion φ

$$\int_\Omega u d\varphi$$

definiert als der Grenzwert in (2.25).

- Man kann das Radonintegral auch für allgemeinere Funktionen definieren.

2.27 Lemma. Die Menge der additiven, absolutstetigen Mengenfunktionen mit beschränkter Variation bilden einen normierten Vektorraum bezüglich der Norm

$$\|\varphi\|_{BV} := \sup_{\|u\|_\infty \leq 1} \left| \int_\Omega u d\varphi \right|.$$

BEWEIS : Seien φ_1 und φ_2 additiv und von beschränkter Variation. Dann gilt

$$|(\varphi_1 + \varphi_2)(A)| \leq |\varphi_1(A)| + |\varphi_2(A)|,$$

$\varphi_1 + \varphi_2$ ist also von beschränkter Variation. Weiter haben wir

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(A \cup C) = \varphi_1(A \cup C) + \varphi_2(A \cup C) = (\varphi_1 + \varphi_2)(A) + (\varphi_1 + \varphi_2)(C),$$

$\varphi_1 + \varphi_2$ ist also auch additiv. Die Absolutstetigkeit ist klar, ebenso die Ei-

enschaften für $\lambda\varphi$, womit die Vektorraumeigenschaft gezeigt ist.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u d(\varphi_1 + \varphi_2) &= \lim_{F(\ell) \rightarrow 0} \sum_i \alpha_i^\ell (\varphi_1 + \varphi_2)(A_{i+1}^\ell) \\
 &= \lim_{F(\ell) \rightarrow 0} \left(\sum_i \alpha_i^\ell \varphi_1(A_{i+1}^\ell) + \sum_i \alpha_i^\ell \varphi_2(A_{i+1}^\ell) \right) \\
 &= \int_{\Omega} u d\varphi_1 + \int_{\Omega} u d\varphi_2.
 \end{aligned}$$

Wenn man nun auf beiden Seiten $\sup_{\|u\|_\infty}$ bildet, folgt die Dreiecksungleichung.

Wenn $\|\varphi\|_{BV} = 0$ ist, folgt für alle $A \in \mathcal{B}$ $\varphi(A) = \int \chi_A d\varphi = 0$ und somit $\varphi = 0$. ■

2.28 Beispiel.

Sei $g \in L^1(\Omega)$ betrachte

$$\varphi(A) := \int_A g dx = \int_{\Omega} g \chi_A dx,$$

dann ist $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ist additiv, denn wenn $A \cap C = \emptyset$ ist, ist $\chi_{A \cap C} = \chi_A + \chi_C$. φ ist absolutstetig, denn wenn $|A| = 0$, d.h. $\chi_A = 0$, dann ist auch $\varphi(A) = 0$. Außerdem ist φ von beschränkter Variation, denn $V_\varphi(\Omega) = \sup_{A \in \mathcal{B}} \left| \int_A g dx \right| \leq$

$\sup_{A \in \mathcal{B}} \int_A |g| dx \leq \|g\|_1$, d.h. $L^1(\Omega) \subseteq BV$.

Sei $u \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u d\varphi &= \lim_{F(\ell) \rightarrow 0} \sum_i \alpha_i^\ell \varphi(A_{i+1}^\ell) \\
 &= \lim_{F(\ell) \rightarrow 0} \sum_i \alpha_i^\ell \int_{A_{i+1}^\ell} g dx \\
 &= \lim_{F(\ell) \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sum_i \alpha_i^\ell \chi_{A_{i+1}^\ell} g dx \\
 &\stackrel{(2.23)}{=} \int_{\Omega} u g dx.
 \end{aligned}$$

2.29 Satz. *Sei $f \in (L^\infty(\Omega))^*$. Dann existiert genau eine additive, absolutstetige Mengenfunktion φ mit beschränkter Variation so, dass*

$$\langle f, u \rangle = \int_{\Omega} u d\varphi \quad \forall u \in L^\infty(\Omega). \quad (2.30)$$

Weiterhin gilt

$$\|f\|_{(L^\infty(\Omega))^*} = \|\varphi\|_{BV}. \quad (2.31)$$

Umgekehrt definiert jede solche Mengenfunktion durch (2.30) ein stetiges, lineares Funktional auf $L^\infty(\Omega)$.

BEWEIS : Sei $f \in (L^\infty(\Omega))^*$ und $\varphi(A) := \langle f, \chi_A \rangle$. $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ist additiv, denn falls $A \cap C = \emptyset$ ist, dann ist $\chi_{A \cup C} = \chi_A + \chi_C$. Außerdem ist φ von beschränkter Variation, denn

$$|\varphi(A)| = |\langle f, \chi_A \rangle| \leq \|f\|_{(L^\infty)^*} \|\chi_A\|_\infty \leq \|f\|_{(L^\infty)^*}.$$

Wenn $|A| = 0$ ist, ist $\chi_A = 0$ und somit $\varphi(A) = 0$, φ ist daher absolutstetig. Für $u \in L^\infty(\Omega)$ betrachte eine Zerlegung des Bildbereichs der Feinheit $\frac{1}{n}$. Wie in (2.22) erhalten wir Mengen A_i^n , $i = 0, \dots, N(n)$. Setze

$$u_n := \sum_{i=0}^N \alpha_i^n \chi_{A_{i+1}^n}.$$

Mit (2.23) ergibt sich $u_n \rightarrow u$ in $L^\infty(\Omega)$, also auch

$$\langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle.$$

Außerdem konvergiert auch

$$\langle f, \sum \alpha_i^n \chi_{A_{i+1}^n} \rangle = \sum_i \alpha_i^n \varphi(A_{i+1}^n) \xrightarrow{\text{Lemma 2.24}} \int_{\Omega} u d\varphi.$$

Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts ist dann

$$\int_{\Omega} u d\varphi = \langle f, u \rangle \quad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

(2.31) ergibt sich dann, indem man auf beiden Seiten das $\sup_{\|u\|_\infty \leq 1}$ bildet. Die Eindeutigkeit zeigt man wie üblich, die Rückrichtung ist klar. ■

- Beispiel 2.28 impliziert $L^1(\Omega) \subseteq (L^\infty(\Omega))^*$. Nicht alle $f \in (L^\infty(\Omega))^*$ sind durch L^1 -Funktionen generiert. Sei $0 \in \Omega$ und sei

$$f_0 : C_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto u(0).$$

Dann ist $f_0 \in (C_0(\Omega))^*$ und $C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$. Die Formulierung $C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$ ist etwas unpräzise, genauer meint man den Unterraum X von $L^\infty(\Omega)$, so dass für alle Äquivalenzklassen $[h] \in X$ ein Repräsentant $h \in C_0(\Omega)$ existiert. Wie üblich wird auch hier auf die genaue Unterscheidung von Funktion und Äquivalenzklasse verzichtet. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Fortsetzung $f \in (L^\infty(\Omega))^*$ mit $f|_{C_0} = f_0$ und $\|f\|_{(L^\infty)^*} \leq 1$. Sei $g \in L^1(\Omega)$ mit

$$\langle f, u \rangle = \int_{\Omega} u g \, dx \quad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

Für $u \in C_0(\Omega \setminus \{0\}) \subseteq C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} u g \, dx = \langle f, u \rangle = u(0) = 0.$$

Mit Folgerung 1.23 ist dann $g = 0$ fast überall in $\Omega \setminus \{0\}$, also auch fast überall in Ω . Sei $u_0 \in C_0(\Omega)$ so, dass $u_0(0) \neq 0$. Dann gilt: $u_0(0) = \langle f, u_0 \rangle = 0$, ein Widerspruch.

2.32 Satz. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ separabel.

BEWEIS : Sei I eine abzählbare Indexmenge und $(W_i)_{i \in I}$ die Familie der Würfel

$$W_i = \prod_{k=1}^n (a_k^i, b_k^i) \quad a_k^i, b_k^i \in \mathbb{Q}$$

mit $W_i \subseteq \Omega$. Sei E der Vektorraum über \mathbb{Q} generiert durch die charakteristischen Funktionen χ_{W_i} , d.h.

$$E := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists \alpha_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, k \text{ } f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{W_i}\}.$$

Wir werden zeigen, dass E dicht in $L^p(\Omega)$ ist. Sei $f \in L^p(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$. Wegen Satz 1.21 gibt es ein $f_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|f - f_1\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $\Omega' \subseteq \subseteq \Omega'' \subseteq \subseteq \Omega$

mit $\text{supp } f_1 \subseteq \Omega'$, dann ist $\sup_{\overline{\Omega'}} |\nabla f_1| \leq K$. Wir überdecken Ω' mit paarweise disjunkten Würfeln W_i , $i = 1, \dots, N$, mit rationalen Diameter δ , wobei

$$0 < \delta \leq \min \left(\frac{\varepsilon}{4K|\Omega''|^{\frac{1}{p}}}, \text{dist}(\partial\{\Omega'', \overline{\Omega'}\}) \right).$$

Für alle $x, y \in W_i$ mit $i \in \{1, \dots, N\}$ fest aber beliebig, gilt:

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leq |\nabla f_1(\eta)| |x - y| \leq K \frac{\varepsilon}{4K|\Omega''|^{\frac{1}{p}}} = \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{|\Omega''|^{\frac{1}{p}}}.$$

Wähle $y_0^i \in W_i$ fest, somit gibt es ein $q^i \in \mathbb{Q}$, so dass $|f_1(y_0^i) - q^i| < \frac{\varepsilon}{4|\Omega''|^{\frac{1}{p}}}$.

Setze $f_2 := \sum_{i=1}^N q^i \chi_{W_i}$, dann ist $f_2 \in E$. Für alle $x \in W_i$ gilt somit:

$$\begin{aligned} |f_1(x) - f_2(x)| &= |f_1(x) - q^i| \\ &\leq |f_1(x) - f_1(y_0^i)| + |f_1(y_0^i) - q^i| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{|\Omega''|^{\frac{1}{p}}} + \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{|\Omega''|^{\frac{1}{p}}} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|\Omega''|^{\frac{1}{p}}}, \end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned} \|f_1 - f_2\|_{L^p(\Omega)}^p &= \sum_i \int_{W_i} |f_1 - f_2|^p dx \\ &\leq \sum_i \int_{W_i} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \frac{1}{|\Omega''|} dx \\ &= \sum_i |W_i| \frac{1}{|\Omega''|} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass aufgrund der Wahl von δ stets $W_i \subseteq \Omega''$ gilt und die Würfel paarweise disjunkt sind. Also folgt

$$\|f - f_2\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - f_1\|_{L^p(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

■

2.33 Lemma. *Sei X ein Banachraum. Falls es eine Familie von Teilmengen $(U_i)_{i \in I}$ gibt mit*

- (i) *Für alle $i \in I$ ist U_i offen und nichtleer,*
- (ii) *U_i sind paarweise disjunkt, d.h. $U_i \cap U_j = \emptyset$, $i \neq j$,*

(iii) I ist nicht abzählbar,

dann ist X nicht separabel.

BEWEIS : Wir nehmen an, dass X separabel ist, sei also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dicht in X . Für alle $i \in I$ ist

$$U_i \cap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset.$$

Sei $n(i)$ der Index mit $x_{n(i)} \in U_i$. Die Abbildung $i \mapsto n(i)$ ist injektiv, denn falls $n(i) = n(j)$ ist, ist $u_{n(i)} \in U_i \cap U_j$, d.h. $i = j$. Dann ist aber I abzählbar, ein Widerspruch. ■

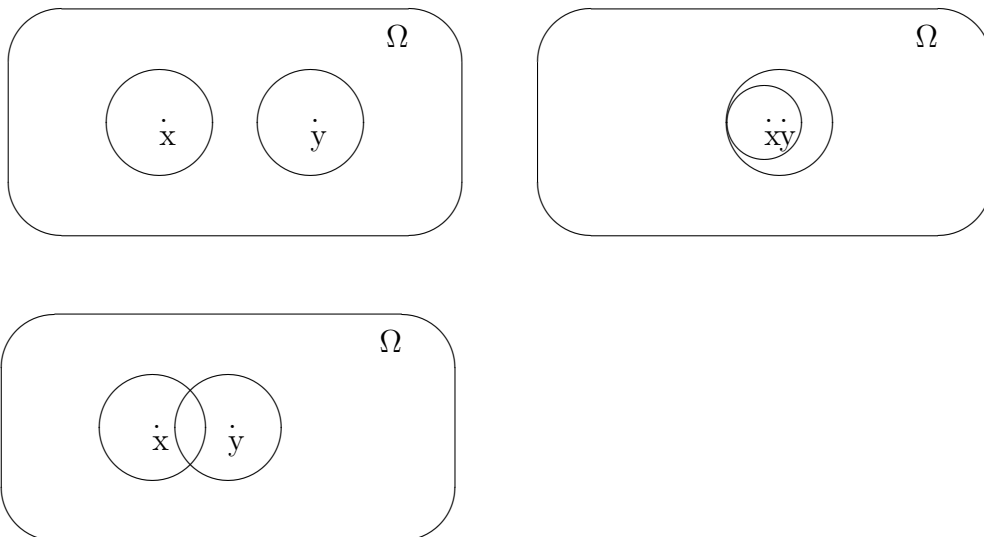
2.34 Folgerung. $L^\infty(\Omega)$ ist nicht separabel.

BEWEIS : Da Ω offen ist, gibt es zu $x \in \Omega$ ein $r(x) > 0$, so dass $B_{r(x)} \subseteq \Omega$. Setze $u_x := \chi_{B_{r(x)}}(x)$ und definiere

$$U_x := \{f \in L^\infty(\Omega) \mid \|f - u_x\|_\infty < \frac{1}{2}\}.$$

Die U_x sind offen in $L^\infty(\Omega)$ und nichtleer, $x \in \Omega$ ist eine nicht abzählbare Indexmenge. Um die Behauptung von Lemma 2.33 anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass die U_x paarweise disjunkt sind. Sei also $x \neq y$ und $f \in U_x \cap U_y$, d.h.

$$\|u_x - u_y\|_\infty \leq \|u_x - f\|_\infty + \|f - u_y\|_\infty < 1.$$



Da $x \neq y$, ist entweder $B_{r(x)}(x) \setminus B_{r(y)}(y) \neq \emptyset$, diese Menge hat Maß > 0 , oder es ist $B_{r(y)}(y) \setminus B_{r(x)}(x) \neq \emptyset$ und auch diese Menge hat Maß > 0 , also folgt

$$\|u_x - u_y\| = 1,$$

ein Widerspruch, also folgt mit Lemma 2.33, dass L^∞ nicht separabel ist. ■

• Eigenschaften von $L^p(\Omega)$:

- $1 < p < \infty$: separabel, reflexiv $(L^p)^* \cong L^{p'}$, gleichmäßig konvex
- $p = 1$: separabel $(L^1)^* = L^\infty$, nicht reflexiv
- $p = \infty$: nicht separabel, nicht reflexiv $(L^\infty)^* \supsetneq L^1$
- Bezüglich Kompaktheit ist $p = \infty$ ok, denn mit Satz 3.10 in Kapitel 4 ist

$$B_{L^\infty} = \{f \in L^\infty \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$$

kompakt bezüglich der *-schwachen Topologie $\tau(L^\infty, L^1)$, da $(L^1)^* = L^\infty$. Wegen Kapitel 4 Folgerung 4.16 und Satz 2.32 gibt es für jede beschränkte Folge (f_n) in L^∞ eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ mit

$$f_{n_k} \xrightarrow{*} f \quad \text{in } L^\infty.$$

- $1 < p < \infty$: Da L^p reflexiv ist, ist nach Kapitel 4 Satz 4.2

$$B_{L^p} = \{f \in L^p \mid \|f\|_p \leq 1\}$$

kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(L^p, L^{p'})$. Wenn (f_n) eine beschränkte Folge in L^p ist, gibt es nach Kapitel 4 Satz 4.17 eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ mit

$$f_{n_k} \rightharpoonup f \quad \text{in } L^p$$

- Es fehlt also noch die Kompaktheit bezüglich der starken Topologie.

2.35 Satz (Kolmogorov). Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Die Menge $K \subseteq L^p(\Omega)$ ist relativ kompakt genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) K ist beschränkt, d.h. es gibt ein $c > 0$, so dass für alle $f \in K$ gilt:

$$\|f\|_p \leq c.$$

- (ii) K ist **gleichgradig p -stetig**, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $f \in K$ und alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| \leq \delta$ gilt:

$$\int_{\Omega} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq \varepsilon^p. \quad (2.36)$$

- Damit das Integral in (2.36) wohldefiniert ist, setzen wir f außerhalb von Ω durch 0 fort, d.h.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

\tilde{f} ist dann in $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. Im Folgenden lassen wir die Welle weg, d.h. auch die Fortsetzung \tilde{f} wird mit f bezeichnet.

BEWEIS : “ \Rightarrow “ Sei $K \subseteq L^p(\Omega)$ relativ kompakt, dann ist \overline{K} kompakt. Nach Kapitel 1 Satz 3.17 ist dann \overline{K} auch präkompakt, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $f_i \in K$, $i = 1, \dots, N$ mit

$$\|f_i - f\|_p \leq \varepsilon \quad \forall f \in K,$$

K ist also beschränkt durch $\max_i \|f_i\|_p + 1$ und somit ist (i) erfüllt. Für $f \in L^p(\Omega)$ (bzw. $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$) gilt nach Lemma 1.24

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f\|_p = 0.$$

Angewendet auf f_i impliziert dies die Existenz von $\delta_i > 0$, so dass für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta_i$:

$$\int_{\Omega} |f_i(x+h) - f_i(x)|^p dx \leq \varepsilon^p.$$

Setze $\delta := \min_{i=1, \dots, N} \delta_i$. Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta$ und für alle $f \in K$:

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + h) - f\|_p &\leq \|f(\cdot + h) - f_i(\cdot + h)\|_p + \|f_i(\cdot + h) - f_i\|_p + \|f_i - f\|_p \\ &\leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

also (2.36).

“ \Leftarrow “ In einem metrischen Raum sind relative Kompaktheit und relative Folgenkompaktheit äquivalent, es reicht also zu zeigen, dass es für alle Folgen (f_n) aus K eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ gibt, so dass

$$f_{n_k} \rightarrow f \text{ in } L^p(\Omega).$$

Wir wollen den Satz von Arzela-Ascoli benutzen. Sei also (f_n) eine Folge in K , dann gilt für alle $0 < \gamma < \delta$:

$$J_\gamma * f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

wobei J_γ der Glättungsoperator ist. Es gilt

$$\|J_\gamma * f_n - f_n\|_p < \varepsilon. \quad (2.37)$$

In der Tat (vgl. Definition 1.19 und Satz 1.20) ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} |J_\gamma * f_n(x) - f_n(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_n(x-y) - f_n(x)| J_\gamma(y) dy \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\gamma(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{B_\gamma(0)} |f_n(x-y) - f_n(x)|^p J_\gamma(y) dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Wenn man nun beide Seiten mit p potenziert und das Integral über Ω bildet, ergibt sich, da $\int_{\mathbb{R}^n} J_\gamma(y) dy = 1$ ist:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |J_\gamma * f_n(x) - f_n(x)|^p dx &\leq \int_{\Omega} \int_{B_\gamma(0)} |f_n(x-y) - f_n(x)|^p J_\gamma(y) dy dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{B_\gamma(0)} J_\gamma(y) \int_{\Omega} |f_n(x-y) - f_n(x)|^p dx dy \\ &\leq \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Sei nun $0 < \gamma < \delta$ fest, aber beliebig. Die Folge $(J_\gamma * f_n) \subseteq C(\overline{\Omega})$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli:

$$\begin{aligned} |J_\gamma * f_n(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_n(x-y)| J_\gamma(y) dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_n(x-y)|^p \underbrace{J_\gamma(y) dy}_{\leq c(\gamma)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\gamma(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq c(\gamma) \|f_n\|_p \\ &\leq c(\gamma) c. \end{aligned}$$

Die Folge $(J_\gamma * f_n)$ ist also in $C(\overline{\Omega})$ beschränkt. Außerdem ist sie gleichgradig stetig, denn:

$$\left| J_\gamma * f_n(x) - J_\gamma * f_n(z) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x-y) J_\gamma(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f_n(z-y) J_\gamma(y) dy \right|$$

Substitution $\tilde{y} = x - y$, $\tilde{y} = z - y$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega \cap (B_\gamma(x) \cup B_\gamma(z))} f_n(\tilde{y}) (J_\gamma(\tilde{y} - x) - J_\gamma(\tilde{y} - z)) d\tilde{y} \\ &\leq \int_{\Omega} |f_n(\tilde{y})| \|\nabla J_\gamma\|_{C(\overline{\Omega})} |x - z| d\tilde{y} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\nabla J_\gamma\|_{C(\overline{\Omega})} |x - z| |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \|f_n\|_p \\ &\leq c |x - z|. \end{aligned}$$

Nun folgt mit dem Satz von Arzela-Ascoli, dass es eine Teilfolge $(J_\gamma * f_{n_k})$ gibt, die gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt, dass (f_{n_k}) eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ ist, denn:

$$\begin{aligned} \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p &\leq \|f_{n_k} - J_\gamma * f_{n_k}\|_p + \|J_\gamma * f_{n_k} - J_\gamma * f_{n_l}\|_p + \|J_\gamma * f_{n_l} - f_{n_l}\|_p \\ &\stackrel{(2.37)}{\leq} 2\varepsilon + \left(\int_{\Omega} |J_\gamma * f_{n_k} - J_\gamma * f_{n_l}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, liegt der Grenzwert f der Folge (f_{n_k}) in $L^p(\Omega)$. ■

- Wenn Ω unbeschränkt ist, ist eine Menge $K \subseteq L^p(\Omega)$ genau dann relativ kompakt, wenn zusätzlich zu (i) und (ii) aus Satz 2.35 noch gilt:
- (iii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $G \subseteq \subseteq \Omega$, so dass

$$\int_{\Omega \setminus G} |f|^p dx \leq \varepsilon^p \quad \forall f \in K.$$

Kapitel 6

Hilberträume

6.1 Der Hilbertraum

1.1 Definition. Ein **Prä-Hilbertraum** H ist ein Vektorraum über \mathbb{R} , in dem ein **Skalarprodukt** (\cdot, \cdot) gegeben ist, d.h. eine Abbildung von $H \times H$ nach \mathbb{R} mit den Eigenschaften

(i) *Bilinearität*

$$(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w),$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $u, v, w \in H$.

(ii) (\cdot, \cdot) ist symmetrisch, d.h.

$$(u, v) = (v, u) \quad \text{für alle } u, v \in H.$$

(iii) (\cdot, \cdot) ist positiv definit, d.h.

$$(u, u) \geq 0 \quad \text{für alle } u \in H,$$

und $(u, u) = 0$ genau für $u = 0$.

• Wir benutzen die Bezeichnung $\|u\| := \sqrt{(u, u)}$ und werden zeigen, dass $\|\cdot\|$ alle Eigenschaften einer Norm hat.

Wir notieren einige Standardfolgerungen aus den Eigenschaften des Skalarproduktes. Es gilt:

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2(a, b) + \|b\|^2, \quad (1.2)$$

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2. \quad (1.3)$$

1.4 Lemma (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). *Sei H ein Prä-Hilbertraum. Dann gilt für alle $u, v \in H$*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

BEWEIS : Es gilt

$$0 \leq \left(\alpha u - \frac{1}{\alpha} v, \alpha u - \frac{1}{\alpha} v\right) = |\alpha|^2 \|u\|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2} \|v\|^2 - 2 \left(\alpha u, \frac{1}{\alpha} v\right),$$

und somit

$$2(u, v) \leq |\alpha|^2 \|u\|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2} \|v\|^2.$$

Mit $\alpha = (\|v\|/\|u\|)^{\frac{1}{2}}$, $\|u\|, \|v\| \neq 0$, folgt

$$(u, v) \leq \|u\| \|v\|.$$

Übergang von u zu $-u$ ergibt die behauptete Ungleichung für $u, v \neq 0$.
Falls oBdA $u = 0$ ist, folgt die Ungleichung direkt aus $(0, v) = (0 \cdot v, v) = 0(v, v) = 0$ für alle $v \in H$. ■

1.5 Lemma. *Sei H ein Prä-Hilbertraum. Dann gilt:*

- (i) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$, (Homogenität),
- (ii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, (Dreiecksungleichung).

BEWEIS :

- (i) $\|\alpha u\|^2 = (\alpha u, \alpha u) = |\alpha|^2 \|u\|^2$
- (ii) $\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|(u, v)| + \|v\|^2$
 $\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.$

■

Lemma 1.5 und Definition 1.1 rechtfertigen folgende Definition.

1.6 Definition. $\|u\| := \sqrt{(u, u)}$ ist die durch das Skalarprodukt in H **induzierte Norm**.

1.7 Definition. Ein **Hilbertraum** ist ein Prä-Hilbertraum, der bezüglich der induzierten Norm vollständig ist.

- Jeder Hilbertraum ist ein Banachraum.

Beispiele:

- a) \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt (\cdot, \cdot) ist ein Hilbertraum.
 b) $C([a, b])$ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_a^b f g \, dx$$

ist ein Prä-Hilbertraum, aber kein Hilbertraum wie das folgende Beispiel zeigt.

Sei $[a, b] = [-1, 1]$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ nx, & x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ -1 & x \in [-1, -\frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Dann gilt punktweise $f_n \rightarrow f$, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1], \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x \in [-1, 0). \end{cases}$$

Aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt $f_n \rightarrow f$ in $L^2(-1, 1)$. Also ist f_n eine Cauchyfolge deren Limes keine stetige Funktion ist.

- c) $L^2(\Omega)$, Ω offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , ist ein Hilbertraum. Das Skalarprodukt ist erklärt durch

$$(f, g)_{L^2} := (f, g) = \int_{\Omega} f g \, dx.$$

Es induziert die übliche L^2 -Norm. Der L^2 ist vollständig (Kapitel 5, Satz 1.8).

1.8 Satz. *Ein Hilbertraum ist gleichmäßig konvex und somit reflexiv.*

BEWEIS : Seien $u, v \in H$ mit $\|u\|, \|v\| \leq 1$ und $\|u - v\| > \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 &\stackrel{(1.3)}{=} 2 \left\| \frac{u}{2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{v}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4}, \end{aligned}$$

H ist also gleichmäßig konvex und mit Kapitel 4, Satz 4.23 folgt dann sofort, dass H reflexiv ist. ■

1.9 Satz. *Es sei $M \subseteq H$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge. Dann gibt es für alle $u \in H$ ein eindeutiges Element $P_M u \in M$ mit*

$$\|u - P_M u\| = \inf_{w \in M} \|u - w\|. \quad (1.10)$$

Man nennt $P_M u$ die **Projektion** von u auf M . Sie ist charakterisiert durch die Eigenschaften:

$$\begin{aligned} P_M u &\in M, \\ (u - P_M u, w - P_M u) &\leq 0 \quad \forall w \in M. \end{aligned} \quad (1.11)$$

BEWEIS : (i) Existenz:

Die Funktion $\varphi(w) := \|u - w\|$ ist konvex, denn

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2) &= \|(\lambda + (1 - \lambda))u - \lambda w_1 - (1 - \lambda)w_2\| \\ &\leq \lambda \|u - w_1\| + (1 - \lambda)\|u - w_2\| \\ &= \lambda \varphi(w_1) + (1 - \lambda)\varphi(w_2). \end{aligned}$$

φ ist stetig, denn $w_n \rightarrow w \Leftrightarrow \|w_n - w\| \rightarrow 0$ und somit

$$\left| \|w_n - u\| - \|w - u\| \right| \leq \|w_n - w\| \rightarrow 0.$$

φ ist koerziv, d.h. $\lim_{\|w\| \rightarrow \infty} \varphi(w) = \infty$, da $\|u - w\| \geq \|w\| - \|u\| \rightarrow \infty$.

Nach Kapitel 4 Lemma 4.19 gibt es also ein Minimum von φ auf M .

(ii) (1.10) \Rightarrow (1.11)

$P_M u \in M$ ist klar. Wenn $w \in M$ ist, ist auch die Konvexkombination $(1 - \lambda)P_M u + \lambda w \in M$ und es gilt

$$\begin{aligned} \|u - P_M u\| &\leq \|u - (1 - \lambda)P_M u - \lambda w\| \\ &= \|u - P_M u + \lambda(P_M u - w)\| \end{aligned}$$

Quadrieren liefert:

$$\|u - P_M u\|^2 \leq \|u - P_M u\|^2 + 2\lambda(u - P_M u, P_M u - w) + \lambda^2\|P_M u - w\|^2,$$

und somit

$$2(u - P_M u, w - P_M u) \leq \lambda\|P_M u - w\|^2.$$

Wenn wir nun λ gegen Null gehen lassen, folgt (1.11), d.h.

$$(u - P_M u, w - P_M u) \leq 0.$$

(iii) (1.11) \Rightarrow (1.10)

(1.10) folgt sofort, denn für alle $w \in H$ gilt

$$\begin{aligned}
 & \|u - P_M u\|^2 - \|w - u\|^2 \\
 &= \|u\|^2 + 2(u, P_M u) + \|P_M u\|^2 - \|w\|^2 + 2(w, u) - \|u\|^2 \\
 &= 2(u - P_M u, w - P_M u) - \|P_M u - w\|^2 \\
 &\stackrel{(1.11)}{\leq} 0.
 \end{aligned}$$

(iv) Eindeutigkeit

Seien $v_1, v_2 \in M$, so dass sie (1.11) erfüllen, d.h.

$$(u - v_1, w - v_1) \leq 0 \quad \forall w \in M,$$

$$(u - v_2, w - v_2) \leq 0 \quad \forall w \in M.$$

Wenn man nun in der ersten Ungleichung $w = v_2$ und in der zweiten Ungleichung $w = v_1$ wählt und dann die beiden Ungleichungen addiert, folgt

$$(u - v_1, v_2 - v_1) + (u - v_2, v_1 - v_2) = (v_1 - u + u - v_2, v_1 - v_2) = \|v_1 - v_2\|^2 \leq 0,$$

d.h. $v_1 = v_2$. ■

1.12 Satz. *Unter den Voraussetzung von Satz 1.9 ist die Projektion Lipschitzstetig mit Konstante 1, d.h. für alle $u, v \in H$ gilt*

$$\|P_M u - P_M v\| \leq \|u - v\|.$$

BEWEIS : In (1.11) haben wir gezeigt, dass für alle $w \in M$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & (u - P_M u, w - P_M u) \leq 0 \quad \text{wähle } w = P_M v \\
 & (v - P_M v, w - P_M v) \leq 0 \quad \text{wähle } w = P_M u \\
 & \Rightarrow (u - P_M u, P_M v - P_M u) + (v - P_M v, P_M u - P_M v) \leq 0 \\
 & \Rightarrow (u - v - P_M u + P_M v, P_M v - P_M u) \leq 0 \\
 & \Rightarrow \|P_M v - P_M u\|^2 \leq (v - u, P_M v - P_M u) \leq \|v - u\| \|P_M v - P_M u\|.
 \end{aligned}$$
■

1.13 Satz. *Sei V ein abgeschlossener, linearer Unterraum von H . Für alle $u \in H$ ist die Projektion $P_V u$ charakterisiert durch*

$$\begin{aligned}
 & P_V u \in V \\
 & (u - P_V u, v) = 0 \quad \forall v \in V
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

BEWEIS : Nach (1.11) ist $(u - P_V u, w - P_V u) \leq 0$ für alle $w \in V$. Da V ein Unterraum ist, ist auch $\lambda w \in V$, demnach ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (u - P_V u, \lambda w - P_V u) &\leq 0 \\ \lambda(u - P_V u, w) &\leq (u - P_V u, P_V u) \end{aligned}$$

Für den Fall, dass $\lambda > 0$ ist, multiplizieren wir diese Gleichung mit $\frac{1}{\lambda}$ und lassen $\lambda \rightarrow \infty$ gehen. Dann erhält man:

$$(u - P_V u, w) \leq 0.$$

Falls $\lambda < 0$ ist, multiplizieren wir auch mit $\frac{1}{\lambda}$ und lassen $\lambda \rightarrow -\infty$ gehen, dann erhält man:

$$(u - P_V u, w) \geq 0,$$

also (1.14). Umgekehrt gelte (1.14). Da $w - P_V u \in V$ liefert (1.14) direkt

$$(u - P_V u, w - P_V u) \leq 0.$$

Also gilt (1.11). ■

1.15 Definition. Sei V ein linearer Unterraum von H . Dann ist das **Orthogonalkomplement** von V definiert durch

$$V^\perp = \{u \in H \mid (u, v) = 0 \quad \forall v \in V\}.$$

• Später werden wir zeigen, dass Definition 1.15 und Definition 3.1 aus Kapitel 3 konsistent sind.

1.16 Satz (Projektionssatz). Sei V ein abgeschlossener, linearer Unterraum von H . Dann existiert für alle $u \in H$ eine eindeutige Zerlegung

$$u = v + w \quad v \in V, w \in V^\perp.$$

Man schreibt: $H = V \oplus V^\perp$.

BEWEIS : (i) Existenz

Nach Satz 1.13 gibt es für alle $u \in H$ ein eindeutiges $P_V u \in V$ mit

$$(u - P_V u, v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Dann ist $u - P_V u \in V^\perp$, d.h. $u = (u - P_V u) + P_V u \in V^\perp + V$.

(ii) Eindeutigkeit

Sei $u = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$ mit $v_i \in V$, $w_i \in V^\perp$, d.h. $v_1 - v_2 = w_2 - w_1$ und wenn man auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit $v_1 - v_2$ bildet folgt

$$\|v_1 - v_2\|^2 = (w_2 - w_1, v_1 - v_2) = 0,$$

d.h. $v_1 = v_2$ und $w_1 = w_2$. ■

• Die Abgeschlossenheit ist eine wichtige Voraussetzung, denn betrachte $H = L^2(a, b)$, $V = C_0^\infty(a, b)$. Sei $u \in L^2(a, b) \setminus C_0^\infty(a, b)$. Sei $u = v + w$ mit $v \in V$, $w \in V^\perp$. Dann ist

$$\int_a^b w \varphi \, dx = (w, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V = C_0^\infty(a, b),$$

aber daraus folgt, dass $w = 0$ ist und somit $u = v$, ein Widerspruch.

6.2 Dualraum und Lemma von Lax-Milgram

2.1 Satz (Riesz). *Sei H ein Hilbertraum. Zu jedem $F \in H^*$ gibt es eindeutig bestimmtes Element $f \in H$ mit*

$$\langle F, u \rangle = (f, u) \quad \forall u \in H. \quad (2.2)$$

Für dieses Element gilt:

$$\|F\|_{H^*} = \|f\|_H.$$

BEWEIS : Sei $N = \{x \in H \mid \langle F, x \rangle = 0\}$ der Kern von F . N ist abgeschlossener, linearer Teilraum von H . Ist nämlich $u_m \in N$, $u_m \rightarrow u$, so folgt $0 = \langle F, u_m \rangle \rightarrow \langle F, u \rangle$, d.h. $u \in N$. O.B.d.A. dürfen wir $N \neq H$ annehmen. (Andernfalls ist $f = 0$.) Es gibt daher ein $w_0 \in H$, das nicht in N ist. Nach dem Projektionssatz ist

$$w_0 = v + w \quad \text{mit } v \in N, w \in N^\perp, w \neq 0.$$

Wir beachten, dass $\langle F, w \rangle \neq 0$, da $w \notin N$, und $\langle F, u - \frac{\langle F, u \rangle}{\langle F, w \rangle} w \rangle = 0$, also $u - \frac{\langle F, u \rangle}{\langle F, w \rangle} w \in N$. Da $w \in N^\perp$, folgt

$$(w, u - \frac{\langle F, u \rangle}{\langle F, w \rangle} w) = 0$$

und

$$(w, u) = \frac{\langle F, u \rangle}{\langle F, w \rangle} \|w\|^2,$$

somit

$$\langle F, u \rangle = \frac{\langle F, w \rangle}{\|w\|^2} (w, u) = \left(\frac{\langle F, w \rangle}{\|w\|^2} w, u \right).$$

Damit ist das darstellende Element $f := \frac{\langle F, w \rangle}{\|w\|^2} w$ konstruiert.

Eindeutigkeit: Seien $f_1, f_2 \in H$ darstellende Elemente von (2.2), d.h. es gilt $(f_1, u) = \langle F, u \rangle = (f_2, u)$ für alle $u \in H$. Wählt man $u = f_1 - f_2$ folgt

$$\|f_1 - f_2\|^2 = (f_1 - f_2, f_1 - f_2) = \langle F, f_1 - f_2 \rangle - \langle F, f_1 - f_2 \rangle = 0,$$

d.h. $f_1 = f_2$.

Aus (2.2) und der Definition der Norm im Dualraum folgt sofort

$$\|F\|_{H^*} = \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle F, u \rangle| = \sup_{\|u\| \leq 1} |(f, u)| \leq \sup_{\|u\| \leq 1} \|f\| \|u\| = \|f\|_H.$$

Wenn man in (2.2) $u = \frac{f}{\|f\|}$ wählt, erhält man

$$\|f\| = \left(\frac{f}{\|f\|}, f \right) = \langle F, \frac{f}{\|f\|} \rangle \leq \|F\|_{H^*} \left\| \frac{f}{\|f\|} \right\| = \|F\|_{H^*}.$$

■

- Man sagt daher: H lässt sich mit H^* identifizieren und schreibt $H \cong H^*$, und oft auch unpräziserweise $H = H^*$.
- Die Identifizierung $H = H^*$ zeigt weiterhin, dass die beiden Definitionen der Orthogonalkomplemente in Definition 1.15 und in Kapitel 3 Definition 3.1 konsistent sind.

2.3 Definition. Eine **beschränkte Bilinearform** ist eine Abbildung $a(.,.): H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- (i) $a(u, v)$ ist linear in u und v .
- (ii) Es existiert eine Konstante K mit

$$|a(u, v)| \leq K \|u\| \|v\| \quad \text{für alle } u, v \in H.$$

2.4 Definition. Eine Bilinearform heisst **koerziv**, wenn eine Konstante $c_0 > 0$ existiert mit

$$a(u, u) \geq c_0 \|u\|^2$$

für alle $u \in H$.

- Man beachte, dass wir keine Symmetrie für $a(u, v)$ vorausgesetzt haben.

2.5 Satz (Stampacchia). Sei $a(.,.)$ eine beschränkte, koerzive Bilinearform und sei K eine konvexe, abgeschlossene, nichtleere Teilmenge von H . Dann existiert für alle $F \in H^*$ ein eindeutiges Element $u \in K$, so dass für alle $v \in K$ gilt:

$$a(u, v - u) \geq \langle F, v - u \rangle. \quad (2.6)$$

Falls $a(.,.)$ symmetrisch ist, ist u durch die Eigenschaften

$$u \in K \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u \rangle = \min_{v \in K} \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle \quad (2.7)$$

charakterisiert.

BEWEIS : Sei $u \in H$ fest, aber beliebig. Die Abbildung

$$v \mapsto a(u, v)$$

ist linear und beschränkt, also ein Element von H^* . Nach Satz 2.1 gibt es also ein eindeutiges $Au \in H$ mit

$$a(u, v) = (Au, v) \quad \forall v \in H.$$

Die Abbildung $A : H \rightarrow H : u \mapsto Au$ ist also :

- linear, da

$$(A(u + w), v) = a(u + w, v) = a(u, v) + a(w, v) = (Au, v) + (Aw, v),$$

- beschränkt, da

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = a(u, Au) \leq C\|u\|\|Au\|,$$

durch Kürzen ergibt sich

$$\|Au\| \leq C\|u\|, \quad (2.8)$$

- koerziv, da

$$(Au, u) = a(u, u) \geq c_0\|u\|^2. \quad (2.9)$$

Wiederum nach Satz 2.1 gibt es für $F \in H^*$ ein eindeutiges $f \in H$ mit $\langle F, u \rangle = (f, u)$ für alle $u \in H$. Somit ist Problem (2.6) äquivalent zu dem Problem: Finde ein $u \in K$, so dass

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K. \quad (2.10)$$

Sei $\rho > 0$, dann ist (2.10) äquivalent zu $0 \geq (\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \forall v \in K$. Dies ist äquivalent zu (vgl. (1.11))

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u) \quad (2.11)$$

Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Die Abbildung

$$S : K \rightarrow K : w \mapsto P_K(\rho f - \rho A w + w)$$

ist eine Kontraktion, d.h.

$$\|S w_1 - S w_2\| \leq k \|w_1 - w_2\| \quad 0 \leq k < 1,$$

denn

$$\begin{aligned} \|S w_1 - S w_2\| &= \|P_K(\rho f - \rho A w_1 + w_1) - P_K(\rho f - \rho A w_2 + w_2)\| \\ &\stackrel{\text{Satz 1.12}}{\leq} \|\rho f - \rho A w_1 + w_1 - (\rho f - \rho A w_2 + w_2)\| \\ &\leq \|w_1 - w_2 - \rho A(w_1 - w_2)\| \\ \|S w_1 - S w_2\|^2 &\leq \|w_1 - w_2\|^2 - 2\rho(w_1 - w_2, A(w_1 - w_2)) + \rho^2 \|A(w_1 - w_2)\|^2 \\ &\stackrel{(2.8), (2.9)}{\leq} \|w_1 - w_2\|^2 (1 - 2\rho c_0 + \rho^2 C^2) \end{aligned}$$

Wähle $0 < \rho < \frac{2c_0}{C^2}$, dann ergibt sich

$$1 - 2\rho c_0 + \rho^2 C^2 =: k < 1.$$

S ist also eine Kontraktion, mit dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es dann einen eindeutigen Fixpunkt $u \in K$, d.h.

$$P_K(\rho f - \rho A u + u) = S u = u$$

Dies ist (2.11) \Leftrightarrow (2.10) \Leftrightarrow (2.6), es gibt also eine eindeutige Lösung von (2.6).

Sei $a(.,.)$ symmetrisch, dann ist $(H, a(.,.))$ ein Hilbertraum. Die Norm $\|u\|_a := \sqrt{a(u, u)}$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|$, denn

$$c_0 \|u\|^2 \leq a(u, u) \leq K \|u\|^2.$$

Nach Satz 2.1 gibt es dann ein eindeutiges $g \in H$, so dass

$$\langle F, v \rangle = a(g, v) =: (g, v)_a \quad \forall v \in H.$$

(2.6) ist also äquivalent zu

$$0 \geq a(g - u, v - u) = (g - u, v - u)_a \quad \forall v \in K, \quad (2.12)$$

und dies ist wiederum mit Satz 1.9 äquivalent zu: Finde ein $u \in K$, so dass

$$\|g - u\|_a = \min_{v \in K} \|g - v\|_a,$$

d.h. man minimiert auf K : $a(g - v, g - v) = a(g, g) - 2a(v, g) + a(v, v)$, d.h. man minimiert auf K :

$$a(v, v) - 2a(g, v).$$

Dies ist äquivalent dazu, dass man auf K

$$\frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle$$

minimiert, das ist gerade (2.7). ■

2.13 Folgerung (Lemma von Lax-Milgram). *Sei $a(., .)$ eine beschränkte, koerzive Bilinearform auf H . Dann existiert für alle $F \in H^*$ ein eindeutiges Element $u \in H$ mit*

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in H. \quad (2.14)$$

Falls $a(., .)$ zusätzlich symmetrisch ist, ist dieses $u \in H$ durch

$$u \in H \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u \rangle = \min_{v \in H} \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle$$

charakterisiert.

BEWEIS : Analog zum Beweis von Satz 1.13 zeigt man, dass (2.6) äquivalent ist zu

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in H$$

für jeden abgeschlossenen, linearen Unterraum von H , insbesondere für H selbst. Die Aussage 1 aus Satz 2.5 liefert die Aussage 1 hier und der 2. Teil von Satz 2.5 liefert den 2. Teil hier. ■

Beispiel: Wir betrachten das gleiche Problem wie in Kapitel 3:

$$-\sum_{i,j=1}^d \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u(x)) = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.16)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit C^1 -Rand ist und $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ derart, dass es ein $c_0 > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \Omega$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2, \quad (2.17)$$

d.h. das Problem (2.16) ist elliptisch. Die Norm auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist

$$\|u\|_{W_0^{1,2}} = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2},$$

sie ist äquivalent zur Norm $\|\nabla u\|_{L^2}$.

Um die Äquivalenz zu zeigen, benötigt man eine Ungleichung der Form

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Diese Ungleichung wird als Poincaré-Ungleichung bezeichnet und ist auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ gültig. Auf $W^{1,2}(\Omega)$ gilt eine solche Ungleichung nicht.

Wir definieren auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ die Bilinearform

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_j u(x) \partial_i v(x) dx. \quad (2.18)$$

- $a(., .)$ ist koerziv, denn

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \partial_j u \partial_i u dx \\ &\stackrel{(2.17)}{\geq} \int_{\Omega} c_0 |\nabla u|^2 dx \\ &\geq c_0 c \|u\|_{W_0^{1,2}}^2 \end{aligned}$$

- $a(., .)$ ist beschränkt, denn

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \partial_j u \partial_i v dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{\infty} \int_{\Omega} |\partial_j u| |\partial_i v| dx \\ &\leq \sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{\infty} \|\partial_j u\|_2 \|\partial_i v\|_2 \\ &\leq (\max_{i,j} \|a_{ij}\|_{\infty}) \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 \\ &\leq c \|u\|_{W_0^{1,2}} \|v\|_{W_0^{1,2}}. \end{aligned}$$

Zu $f \in L^2(\Omega)$ definiere $F \in (W_0^{1,2}(\Omega))^*$ durch

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx.$$

F ist beschränkt, denn:

$$|\langle F, v \rangle| \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq \|f\|_2 \|v\|_{W_0^{1,2}}.$$

Nach dem Lemma von Lax-Milgram gibt es für alle $f \in L^2(\Omega)$ ein eindeutiges $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_j u(x) \partial_i v(x) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (2.19)$$

Das ist die **schwache Formulierung** von (2.16). u heißt **schwache Lösung** von (2.16). Falls zusätzlich $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ ist, gilt

$$a(u, v) = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij} \partial_j u) v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) \supseteq C_0^\infty(\Omega)$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^d \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j u(x)) &= f && \text{f.ü. in } \Omega \\ u &= 0 && \text{f.ü. auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

6.3 Orthogonalsysteme

3.1 Definition. Eine Menge $\{\varphi_j \in H \mid j \in \mathbb{N}, \varphi_j \neq 0\}$ heißt **Orthogonalsystem**, falls

$$(\varphi_k, \varphi_j) = 0 \quad \forall j \neq k.$$

Ein Orthogonalsystem heißt **Orthonormalsystem**, wenn zusätzlich $\|\varphi_j\| = 1, j \in \mathbb{N}$. Ein Orthogonalsystem heißt **vollständig** in H , wenn der Vektorraum, der durch $\{\varphi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ generiert wird, dicht in H ist.

- Wir bezeichnen mit $\text{span}\{\varphi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ die Menge der endlichen Linearkombinationen von beliebigen Elementen aus dem System, d.h.

$$\text{span}\{\varphi_j \mid j \in \mathbb{N}\} := \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \mid \alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n \right\}.$$

3.2 Lemma. *Es sei $M = \{v_j \in H \mid j \in \mathbb{N}\}$. Dann gibt es ein Orthonormalsystem $\{\varphi_j \in H, j \in \mathbb{N} \mid \varphi_j \neq 0\}$ mit $\text{span } M = \text{span}\{\varphi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.*

BEWEIS : Man führt einen Orthogonalisierungsprozess durch. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass für jedes N die Elemente v_1, v_2, \dots, v_N linear unabhängig sind. Setze

$$\varphi_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Sei φ_j schon konstruiert. Man setze

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{j+1} &= v_{j+1} - \sum_{l=1}^j (v_{j+1}, \varphi_l) \varphi_l, \\ \varphi_{j+1} &= \frac{\tilde{\varphi}_{j+1}}{\|\tilde{\varphi}_{j+1}\|}.\end{aligned}$$

Offensichtlich ist φ_{j+1} orthogonal zu φ_l , $1 \leq l \leq j$. Damit sind die φ_j durch vollständige Induktion definiert. Durch die Konstruktion erreicht man

$$\text{span}\{\varphi_j \mid j \in \mathbb{N}\} = \text{span}\{M\}.$$

■

3.3 Satz. *Jeder separable Hilbertraum H besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem.*

BEWEIS : Aus der Definition 3.1 und Lemma 3.2 folgt offensichtlich die Behauptung, denn da H separabel ist, gibt es ein System $\{v_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, so dass $\overline{\text{span}\{v_j \mid j \in \mathbb{N}\}}^H = H$. ■

3.4 Lemma. *Sei $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H . Dann ist für jedes $w \in H$, $N \in \mathbb{N}$*

$$\left\| \sum_{j=1}^N (w, \varphi_j) \varphi_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^N |(w, \varphi_j)|^2 \leq \|w\|^2. \quad (3.5)$$

(3.5) heißt **Besselsche Ungleichung**.

Somit gilt auch $\sum_{j=1}^{\infty} |(w, \varphi_j)|^2 \leq \|w\|^2 < \infty$.

BEWEIS : Da $\{\varphi_j\}$ ein Orthonormalsystem ist, gilt $\left\| \sum_{j=1}^N (w, \varphi_j) \varphi_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^N |(w, \varphi_j)|^2$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left\| w - \sum_{j=1}^N (w, \varphi_j) \varphi_j \right\|^2 \\
 &= \|w\|^2 + \sum_{j=1}^N |(w, \varphi_j)|^2 - 2 \sum_{j=1}^N (w, (w, \varphi_j) \varphi_j) \\
 &= \|w\|^2 + \sum_{j=1}^N |(w, \varphi_j)|^2 - 2 \sum_{j=1}^N (w, \varphi_j) (w, \varphi_j) \\
 &= \|w\|^2 - \sum_{j=1}^N |(w, \varphi_j)|^2.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Aussage des Lemmas. ■

3.6 Satz. Sei $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H . Dann lässt sich jedes Element $u \in H$ als konvergente, **verallgemeinerte Fourierreihe**

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, \varphi_j) \varphi_j \quad (3.7)$$

darstellen und es gilt

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(u, \varphi_j)|^2. \quad (3.8)$$

BEWEIS : Nach Definition 3.1 gibt es zu $u \in H$ eine Folge $u^N = \sum_{j=1}^N \mu_j^N \varphi_j \rightarrow u \in H$. Es ist $\mu_k^N = (u^N, \varphi_k)$, wie man sich durch Multiplikation im Sinne des Skalarproduktes mit φ_k überlegt. Es gilt wegen Lemma 3.4

$$\left\| \sum_{j=1}^N (u, \varphi_j) \varphi_j - u^N \right\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^N (u - u^N, \varphi_j) \varphi_j \right\|^2 \leq \|u - u^N\|^2.$$

Da $u^N \rightarrow u$, folgt somit

$$\left\| \sum_{j=1}^N (u, \varphi_j) \varphi_j - u \right\|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty), \quad (3.9)$$

was (3.7) beweist. Aus (3.9) folgt

$$\sum_{j=1}^N |(u, \varphi_j)|^2 - 2 \sum_{j=1}^N (u, \varphi_j) (\varphi_j, u) + \|u\|^2 \rightarrow 0,$$

d.h.

$$\|u\|^2 - \sum_{j=1}^N |(u, \varphi_j)|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

Damit ist (3.8) bewiesen. ■

Man kann sich überlegen, dass die Vollständigkeit eines Orthonormalsystems äquivalent zu Relation (3.8) ist.

3.10 Lemma. *Sei $\{\varphi_j\}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H . Wenn für alle $u \in H$ gilt:*

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(u, \varphi_j)|^2,$$

dann ist $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem.

BEWEIS : Sei $u \in H$. Im Beweis von Lemma 3.4 haben wir gezeigt:

$$\left\| u - \sum_{j=1}^n (u, \varphi_j) \varphi_j \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^n |(u, \varphi_j)|^2.$$

Nach Voraussetzung konvergiert die rechte Seite gegen Null, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (u, \varphi_j) \varphi_j = u$$

und somit ist $\text{span}\{\varphi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ dicht in H . ■

• Sei $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H . Wir setzen für alle $n \in \mathbb{N}$

$$H_n := \text{span}\{\varphi_j \mid j = 1, \dots, n\}.$$

Somit ist H_n ein abgeschlossener linearer Unterraum von H . Nach Satz 1.9 existiert somit eine Projektion von H auf H_n , die wir mit P_n bezeichnen wollen. Es gilt:

3.11 Lemma. Die Projektion $P_n: H \rightarrow H_n$ ist gegeben durch

$$P_n(u) = \sum_{j=1}^n (u, \varphi_j) \varphi_j.$$

Insbesondere ist also die n -te Partialsumme der verallgemeinerten Fourierreihe Lösung des Minimierungsproblems $\inf_{v \in H_n} \|u - v\|$.

BEWEIS : Nach Folgerung 1.13 ist P_n charakterisiert durch

$$\begin{aligned} P_n u &\in H_n, \\ (P_n u - u, v) &= 0 \quad \forall v \in H_n. \end{aligned}$$

Wähle $v = \varphi_j$, dann ergibt sich $(P_n u, \varphi_j) = (u, \varphi_j)$. Da $P_n u \in H_n$, existieren $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit $P_n u := \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$. Da $\{\varphi_j\}$ ein Orthonormalsystem ist, ergibt sich daraus $(P_n u, \varphi_k) = \alpha_k$ und somit

$$P_n u = \sum_{i=1}^n (u, \varphi_i) \varphi_i.$$

■

Beispiel: $L^2(0, 2\pi)$, dann bilden die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ein vollständiges Orthonormalsystem.

3.12 Komplexe Hilberträume. Betrachtet man Hilberträume H über \mathbb{C} , so muss zuerst das Skalarprodukt in Definition 1.1 durch die **Sesquilinearform** ersetzt werden. Eine Sesquilinearform (\cdot, \cdot) ist eine Abbildung $H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

(i) Sesquilinearität

$$\begin{aligned} (\alpha u + \beta v, w) &= \alpha(u, w) + \beta(v, w), \\ (u, \alpha z + \beta w) &= \overline{\alpha}(u, z) + \overline{\beta}(u, w), \end{aligned}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und alle $u, v, w, z \in H$.

(ii) (\cdot, \cdot) ist hermitisch, d.h.

$$(u, v) = \overline{(v, u)} \quad \text{für alle } u, v \in H.$$

(iii) (\cdot, \cdot) ist positiv definit, d.h.

$$(u, u) \geq 0 \quad \text{für alle } u \in H,$$

und $(u, u) = 0$ genau dann, wenn $u = 0$.

- Da $(u, u) \in \mathbb{R}$ kann analog eine Norm durch $\|u\|_H := \sqrt{(u, u)}$ definiert werden.
- Die Aussagen des Kapitels bleiben im Wesentlichen erhalten, manchmal muss man allerdings zum Realteil übergehen.
- Betrachtet man $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ mit Sesquilinearform

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g} \, dx$$

und $e^{ix} := \cos(x) + i \sin(x)$, so bilden die Funktionen

$$\omega_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ein vollständiges Orthonormalsystem.

Kapitel 7

Kompakte Operatoren und Spektraltheorie

7.1 Kompakte Operatoren

- In diesem Abschnitt seien X und Y immer Banachräume, falls nichts anderes gesagt wird.

1.1 Definition. Ein Operator $A : X \rightarrow Y$ heißt **kompakt**, wenn er stetig ist und beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet.

- A muss nicht notwendig linear sein.
- Wenn der Operator $A : X \rightarrow Y$ linear, beschränkt und kompakt ist, schreibt man

$$A \in K(X, Y) \subseteq L(X, Y)$$

- Falls $X = Y$ ist, benutzen wir die Abkürzung $K(X) = K(X, X)$.

1.2 Satz. Die Menge $K(X, Y)$ ist ein abgeschlossener, linearer Unterraum von $L(X, Y)$.

BEWEIS : Es ist klar, dass $K(X, Y)$ ein linearer Unterraum von $L(X, Y)$ ist. Sei $(A_n) \subseteq K(X, Y)$, $A_n \rightarrow A$ in $L(X, Y)$. Zu zeigen ist, dass $A \in K(X, Y)$ ist. Da A linear ist, reicht es zu zeigen, dass $A(B_1(0))$ relativ kompakt ist und da Y vollständig ist, reicht es nach Kapitel 0 Satz 2.4 sogar zu zeigen, dass $A(B_1(0))$ präkompakt ist. Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein n_0 , so dass

$$\|A_{n_0} - A\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da A_{n_0} kompakt ist, ist $A_{n_0}(B_1(0))$ präkompakt, es gibt also Punkte y_i , $i = 1, \dots, n_\varepsilon$, so dass

$$A_{n_0}(B_1(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i).$$

Dann ist

$$A(B_1(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(y_i),$$

denn sei $x \in B_1(0)$, d.h. $\|A_{n_0}x - Ax\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Es gibt aber ein $i \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$: $\|A_{n_0}x - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle $x \in B_1(0)$ gibt es also ein i , so dass

$$\|Ax - y_i\| < \varepsilon.$$

■

Beispiel: (i) Sei Ω beschränkt mit Lipschitz Rand, dann ist die Einbettung

$$E : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) : f \mapsto f$$

ist kompakt (Satz von Rellich), denn $E(B_1(0))$ ist präkompakt.

(ii) Sei Ω beschränkt und $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Der Operator $A : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ definiert durch

$$(Au)(y) = \int_{\Omega} K(x, y)u(x)dx$$

ist kompakt.

1.3 Definition. Wir sagen, dass $A \in L(X, Y)$ **endlichen Rang** hat, wenn $\dim R(A) < \infty$.

1.4 Lemma. Wenn $A \in L(X, Y)$ endlichen Rang hat, dann ist A kompakt.

BEWEIS : Da A beschränkt ist, ist

$$A(B_1(0)) \subseteq B_R(0) \subseteq Y.$$

Außerdem ist $A(B_1(0)) \subseteq R(A)$, und $R(A)$ ist endlichdimensional. $A(B_1(0))$ liegt also in einer beschränkten Menge eines endlichdimensionalen Raumes, d.h. $A(B_1(0))$ ist relativ kompakt. ■

1.5 Lemma. Sei $(A_n) \subseteq L(X, Y)$ eine Folge von Operatoren mit endlichem Rang, die in $L(X, Y)$ gegen A konvergiert. Dann ist A kompakt.

BEWEIS : Da die A_n von endlichem Rang sind, sind sie nach Lemma 1.4 kompakt. Dann ist nach Satz 1.2 auch ihr Grenzwert kompakt. ■

• Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

1.6 Lemma. Sei H ein Hilbertraum und $A \in K(X, H)$ ein kompakter Operator. Dann existieren Operatoren $A_n \in L(X, H)$ mit endlichem Rang, so dass $A_n \rightarrow A$ in $L(X, H)$.

BEWEIS : Die Menge $K := \overline{A(B_1(0))}$ ist kompakt. Nach Kapitel 1 Satz 3.17 gibt es für alle $\varepsilon > 0$ Elemente $y_i \in H$, $i = 1, \dots, n_\varepsilon$, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(y_i).$$

Setze $H_\varepsilon := \text{span}\{y_i \mid i = 1, \dots, n_\varepsilon\}$. Sei $P_\varepsilon : H \rightarrow H_\varepsilon$ die Projektion aus Kapitel 6. Es gilt: $\|I - P_\varepsilon\| \leq 1$, denn für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ ist

$$\begin{aligned} \|x - P_\varepsilon x\|^2 &= (x - P_\varepsilon x, x - P_\varepsilon x) \\ &= (x - P_\varepsilon x, x) \\ &\leq \|x - P_\varepsilon x\| \|x\| \\ &\leq \|x - P_\varepsilon x\|. \end{aligned}$$

Definiere

$$A_\varepsilon := P_\varepsilon \circ A : X \rightarrow H_\varepsilon.$$

A_ε hat endlichen Rang. Sei $x \in \overline{B_1(0)}$, dann gibt es ein $i \in \{1, \dots, n_\varepsilon\} : \|Ax - y_i\| < \varepsilon$. Da $P_\varepsilon y_i = y_i$ für $y_i \in H_\varepsilon$, folgt

$$\begin{aligned} \|Ax - A_\varepsilon x\| &= \|Ax - P_\varepsilon \circ Ax\| \\ &= \|(I - P_\varepsilon)Ax\| \\ &= \|(I - P_\varepsilon)(Ax - y_i)\| \\ &\leq \|I - P_\varepsilon\| \|Ax - y_i\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Wenn man nun das $\sup_{x \in \overline{B_1(0)}}$ bildet, folgt

$$\|A - A_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

■

1.7 Lemma. Seien X, Y und Z Banachräume und seien $A \in L(X, Y)$, $B \in K(Y, Z)$ (bzw. $A \in K(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$). Dann ist $B \circ A \in K(X, Z)$.

BEWEIS : (i) Da $A \in L(X, Y)$ ist, ist $A(B_1(0)) \subseteq B_R(0)$ und da $B \in K(Y, Z)$ folgt, dass $B \circ A(B_1(0))$ relativ kompakt ist.

(ii) Da $A \in K(X, Y)$, ist $\overline{A(B_1(0))}$ kompakt, also auch folgenkompakt. Da B stetig ist, ist das Bild einer konvergenten Folge wieder konvergent, d.h. $B \circ A(B_1(0))$ ist also relativ folgenkompakt und somit ist der Operator $B \circ A$ kompakt. ■

1.8 Satz (Schauder). $A \in L(X, Y)$ ist genau dann kompakt, wenn der adjungierte Operator $A^* \in L(Y^*, X^*)$ kompakt ist.

BEWEIS : „ \Rightarrow “ Wir müssen zeigen, dass $A^*(B_{Y^*}) \subset X^*$ relativ kompakt ist. Für jede Folge $(y_n^*) \subseteq B_{Y^*}$ müssen wir zeigen, dass es eine Teilfolge $(y_{n_k}^*) \subseteq (y_n^*)$ gibt, so dass $(A^*y_{n_k}^*)$ in X^* konvergiert. Die Menge

$$K := \overline{A(B_X)}$$

ist kompakt in Y , K ist also ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist die Folge (y_n^*) aufgefasst als eine Folge in $C(K)$ gleichmäßig beschränkt, denn für $y \in K$ gilt

$$|\langle y_n^*, y \rangle| \leq \|y_n^*\| \|y\| \leq \|y\| \leq c,$$

da $y_n^* \in B_{Y^*}$ und K beschränkt ist. Wenn man auf beiden Seiten das $\sup_{y \in K}$ bildet, ist (y_n^*) beschränkt in $C(K)$. Außerdem ist (y_n^*) gleichgradig stetig, denn für $y_1, y_2 \in K$ folgt

$$|\langle y_n^*, y_1 - y_2 \rangle| \leq \|y_n^*\| \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - y_2\|.$$

Somit ist (y_n^*) Lipschitzstetig, also insbesondere stetig mit Konstante $\varepsilon = \delta$, die unabhängig von n ist. Die Folge (y_n^*) ist also gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli gibt es daher eine Teilfolge $(y_{n_k}^*) \subseteq (y_n^*)$, die in $C(K)$ konvergiert und deshalb eine Cauchyfolge ist. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 , so dass für alle $n_l, n_k \geq n_0$ gilt:

$$\sup_{y \in K} |\langle y_{n_k}^*, y \rangle - \langle y_{n_l}^*, y \rangle| \leq \varepsilon.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \|A^*y_{n_k}^* - A^*y_{n_l}^*\|_{X^*} &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \langle A^*y_{n_k}^* - A^*y_{n_l}^*, x \rangle_{X^*, X} \\ &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \langle y_{n_k}^* - y_{n_l}^*, Ax \rangle_{Y^*, Y} \\ &= \sup_{y \in K} \langle y_{n_k}^* - y_{n_l}^*, y \rangle_{Y^*, Y} \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. die Folge $(A^*y_{n_k}^*)$ ist eine Cauchyfolge in X^* , hat also einen Grenzwert und somit ist A^* kompakt.

„ \Leftarrow “ Sei $A^* \in L(Y^*, X^*)$ kompakt. Aus dem gerade eben Gezeigten folgt dann, dass $A^{**} \in K(X^{**}, Y^{**})$ ist. Nach Lemma 1.7 ist auch die Verknüpfung

$A^{**} \circ J_X$ kompakt, wobei $J_X : X \rightarrow X^{**}$ die kanonische Isometrie ist. Außerdem gilt:

$$A^{**} \circ J_X = J_Y \circ A, \quad (1.9)$$

denn für alle $y^* \in Y^*$ und für alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \langle A^{**} J_X x, y^* \rangle_{Y^{**}, Y^*} &\stackrel{\text{Def } A^{**}}{=} \langle J_X x, A^* y^* \rangle_{X^{**}, X^*} \\ &\stackrel{\text{Def } J_X}{=} \langle A^* y^*, x \rangle_{X^*, X} \\ &\stackrel{\text{Def } A^*}{=} \langle y^*, Ax \rangle_{Y^*, Y} \\ &\stackrel{\text{Def } J_Y}{=} \langle J_Y Ax, y^* \rangle_{Y^{**}, Y^*}. \end{aligned}$$

Aus (1.9) und der Tatsache, dass $A^{**} \circ J_X$ kompakt ist folgt, dass auch

$$J_Y \circ A$$

kompakt ist. Sei (x_n) eine beschränkte Folge aus X . Da $J_Y \circ A$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$, so dass die Folge

$$(J_Y Ax_{n_k}) \subseteq (J_Y Ax_n)$$

konvergiert. Sie ist also eine Cauchyfolge und da J_Y eine Isometrie ist, gilt

$$\|J_Y Ax_{n_k} - J_Y Ax_{n_l}\| = \|Ax_{n_k} - Ax_{n_l}\|.$$

(Ax_{n_k}) ist daher auch eine Cauchyfolge und somit ist A kompakt. ■

7.2 Fredholmsche Alternative

2.1 Lemma (Riesz). *Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subsetneq X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $u \in X$ mit $\|u\| = 1$ und*

$$\text{dist}(u, M) \geq 1 - \varepsilon.$$

BEWEIS : Sei $v \in X \setminus M$. Da M abgeschlossen ist, gilt

$$d := \text{dist}(v, M) > 0.$$

Es gibt also ein $m_0 \in M$, das den Abstand von v und M gut approximiert, d.h.

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Setze $u := \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|}$, dann hat u Norm 1 und für $m \in M$ ist

$$\begin{aligned} \|u - m\| &= \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| \\ &= \frac{1}{\|v - m_0\|} \|v - m_0 - m\|v - m_0\| \\ &\geq \frac{d}{\|v - m_0\|} \\ &\geq 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

da $m_0 - m\|v - m_0\| \in M$. ■

2.2 Lemma. *Sei X ein normierter Vektorraum, sei $M \subsetneq X$ ein endlichdimensionaler, linearer Unterraum. Dann gibt es ein $u \in X$ mit $\|u\| = 1$ und*

$$\text{dist}(u, M) \geq 1.$$

BEWEIS : Sei $v \in X \setminus M$, dann ist $d := \text{dist}(v, M) > 0$ und es gibt eine approximierende Folge $(m_n) \subseteq M$ mit

$$d \leq \|v - m_n\| \leq \frac{d}{1 - \frac{1}{n+1}}.$$

Sei

$$u_n := \frac{v - m_n}{\|v - m_n\|}.$$

Es gilt $\|u_n\| = 1$ und $u_n \in \widetilde{M} := M \oplus \langle v \rangle$. Da der Raum \widetilde{M} ebenfalls endlichdimensional ist, folgt die Existenz einer Teilfolge $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eines Elementes u mit $\|u\| = 1$, so dass

$$u_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u.$$

Für beliebiges $m \in M$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \|u - m\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k} - m\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\|v - m_{n_k}\|} \left\| v - \underbrace{m_{n_k} - m}_{\in M} \|v - m_{n_k}\| \right\| \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d}{\|v - m_{n_k}\|} \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n_k + 1} = 1. \end{aligned}$$

Da $m \in M$ beliebig war, folgt $\text{dist}(u, M) \geq 1$. ■

2.3 Satz (Riesz). *Sei X ein normierter Vektorraum, so dass*

$$B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

kompakt ist. Dann ist X endlichdimensional.

BEWEIS : Sei $\dim X = \infty$, dann gibt es eine Folge von linearen Unterräumen

$$X_{n-1} \subsetneq X_n, \dim X_n < \infty.$$

Nach Lemma 2.1 gibt es also eine Folge $(x_n) \subseteq X$ mit $\|x_n\| = 1$, $x_n \in X_n$, und

$$\text{dist}(x_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2}.$$

Für alle $n > m$ ist dann $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$, da x_n und x_m in unterschiedlichen Räumen liegen. Es gibt somit keine konvergente Teilfolge der Folge $(x_n) \subseteq B_X$, ein Widerspruch da B_X kompakt ist. ■

• Wir wissen bereits aus dem Satz von Heine-Borel, dass die Umkehrung auch gilt:

$$\dim X < \infty \Rightarrow B_X \text{ ist kompakt.}$$

2.4 Lemma. *Sei $Y \subseteq X$ ein endlichdimensionaler Unterraum. Dann existiert eine stetige, lineare Projektion P von X auf Y , d.h. $P \circ P = P$. Ferner gilt:*

$$X = Y \oplus N(P),$$

d.h. für alle $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$ und $z \in N(P)$ mit $x = y + z$. Weiterhin gibt es eine Konstante $c > 0$ so, dass für alle $x \in X$ gilt $\|y\| \leq c\|x\|$, $\|z\| \leq c\|x\|$.

BEWEIS : Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von Y , d.h. für alle $y \in Y$ existiert eine eindeutige Darstellung

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Definiere $\varphi_i : Y \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \alpha_i$. Die φ_i sind lineare, stetige Funktionale auf Y , nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es dann eine Abbildung $\tilde{\varphi}_i \in X^*$ mit $\tilde{\varphi}_i|_Y = \varphi_i$. Definiere

$$P : X \rightarrow Y : x \mapsto \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i(x) e_i.$$

P ist linear und stetig, da es eine endliche Summe von linearen und stetigen Funktionalen ist. Außerdem ist P eine Projektion, denn

$$\begin{aligned}
 P(Px) &= \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i(Px) e_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i \left(\sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_j(x) e_j \right) e_i \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \tilde{\varphi}_j(x) \tilde{\varphi}_i(e_j) e_i \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \tilde{\varphi}_j(x) \delta_{ij} e_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i(x) e_i \\
 &= Px.
 \end{aligned}$$

Jedes $x \in X$ lässt sich schreiben als

$$x = x - Px + Px,$$

wobei $x - Px \in N(P)$ ist, denn $P(x - Px) = Px - PPx = Px - Px = 0$. Da $Px \in Y$ ist, ist die Existenz der Zerlegung bewiesen.

Nun zur Eindeutigkeit:

Sei $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, $y_i \in Y$, $z_i \in N(P)$, dann folgt

$$Y \ni y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in N(P).$$

Aber $N(P) \cap Y = \{0\}$, denn sei $x \in N(P) \cap Y$, dann ist

$$0 = Px = \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i(x) e_i \stackrel{x \in Y}{=} \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) e_i.$$

Da die (e_i) eine Basis von Y sind und somit linear unabhängig sind ist dann

$$\varphi_i(x) = 0 \quad \forall i$$

und somit $x = 0$, d.h. $y_1 = y_2$ und $z_1 = z_2$, die Zerlegung ist also eindeutig. Nun müssen wir noch die Abschätzungen beweisen. Sei $x = y + z$, $y = Px$, $z = x - Px$, dann ist

$$\begin{aligned}
 \|y\| &= \|Px\| \leq \|P\| \|x\|, \\
 \|z\| &\leq \|x\| + \|Px\| \leq (1 + \|P\|) \|x\|.
 \end{aligned}$$

■

2.5 Lemma. Sei $V \subseteq X^*$ ein endlichdimensionaler linearer Unterraum. Dann existiert eine stetige, lineare Projektion $P : X \rightarrow V^\perp \subseteq X$. Ferner gilt:

$$X = V^\perp \oplus N(P),$$

wobei $\dim V = \dim N(P)$.

BEWEIS : Sei f_1, \dots, f_n Basis von $V \subseteq X^*$, dann gibt es $e_i \in X$, $i = 1, \dots, n$ mit

$$\langle f_i, e_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (2.6)$$

In der Tat, definiere

$$\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (\langle f_1, x \rangle, \dots, \langle f_n, x \rangle).$$

Φ ist surjektiv, denn sei dem nicht so, dann gibt es ein $y \in \mathbb{R}^n \setminus R(\Phi)$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es dann ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$, das die kompakte Menge $\{y\}$ und den abgeschlossenen Unterraum $R(\Phi)$ trennt, d.h.

$$(z, y)_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha \leq (z, \Phi(x))_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x \in X.$$

Aber da $R(\Phi)$ ein linearer Unterraum ist, ist auch $\lambda \Phi(x) \in R(\Phi)$, man kann also wie üblich $\lambda \rightarrow \pm\infty$ gehen lassen und es ergibt sich

$$0 = (z, \Phi(x))_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n z_i \langle f_i, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n z_i f_i, x \right\rangle \quad \forall x \in X,$$

also $\sum_{i=1}^n z_i f_i = 0$. Da die f_i eine Basis sind, ist $z_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$, ein Widerspruch zu $z \neq 0$, somit ist Φ surjektiv. Also existieren e_i , $i = 1, \dots, n$ mit (2.6). Die e_i , $i = 1, \dots, n$ sind linear unabhängig, denn falls $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, dann gilt für alle $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} 0 = f_j(0) &= f_j\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f_j(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} \\ &= \alpha_j. \end{aligned}$$

Definiere $Y := \text{span}\{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$ mit den e_i aus (2.6) und

$$Q : X \rightarrow Y : x \mapsto \sum_{i=1}^n \langle f_i, x \rangle e_i.$$

Wie im Beweis von Lemma 2.4 folgt, dass Q eine lineare, stetige Projektion ist und sich der Raum X zerlegen lässt als

$$X = Y \oplus N(Q).$$

Offensichtlich ist $N(Q) = V^\perp$, denn für $x \in N(Q)$, d.h. $Q(x) = 0$, gilt

$$\langle f_i, x \rangle = 0 \quad \forall i,$$

d.h. $x \in V^\perp$. Falls $x \in V^\perp$ folgt aus der Definition von Q sofort $x \in N(Q)$. Setze $P := I - Q$, $P : X \rightarrow V^\perp$. Wie im Beweis von Lemma 2.4 zeigt man, dass P eine stetige, lineare Projektion ist. Aber

$$Y = N(P),$$

denn

$$\begin{aligned} x \in N(P) &\Leftrightarrow Px = 0 \\ &\Leftrightarrow x - Qx = 0 \\ &\Leftrightarrow x = Qx \\ &\Leftrightarrow x \in Y, \end{aligned}$$

da $Q|_Y = I$. ■

2.7 Satz (Fredholmsche Alternative). *Sei X ein Banachraum und $A \in K(X)$. Dann gilt:*

- (i) $N(I - A)$ ist endlichdimensional.
- (ii) $R(I - A)$ ist abgeschlossen und es gilt

$$R(I - A) = N(I - A^*)^\perp.$$

- (iii) $N(I - A) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - A) = X$.
- (iv) $\dim N(I - A) = \dim N(I - A^*)$.

- Es geht um die Lösung von

$$x - Ax = f. \quad (\star)$$

Entweder existiert genau eine Lösung von (\star) **oder** die homogene Gleichung $x - Ax = 0$ besitzt d linear unabhängige Lösungen und (\star) ist lösbar genau dann, wenn $f \in N(I - A^*)^\perp$.

- Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ ist ein $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ injektiv genau dann, wenn A surjektiv ist.
- Falls $\dim X = \infty$ ist, ist dies im Allgemeinen falsch (siehe Beispiele in der Einführung).

BEWEIS : (i) Sei $X_1 := N(I - A)$.

$$x_1 \in X_1 \Leftrightarrow x_1 - Ax_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = Ax_1,$$

d.h. $x_1 \in R(A)$ und somit

$$B_{X_1} \subseteq A(B_X).$$

Da A kompakt ist, ist auch B_{X_1} kompakt und nach Satz 2.3 ist dann X_1 endlichdimensional.

(ii) $R(I - A)$ ist abgeschlossen:

Gelte $z_n := x_n - Ax_n \rightarrow z$ in X . Wir müssen zeigen, dass $z \in R(I - A)$ ist. Definiere

$$d_n := \text{dist}(x_n, N(I - A)).$$

Da $\dim N(I - A) < \infty$ ist, gibt es wie im Beweis von Lemma 2.2 Elemente $y_n \in N(I - A)$, die den Abstand annehmen, d.h.

$$d_n = \|x_n - y_n\|.$$

Da $y_n \in N(I - A)$ gilt, ist $y_n = Ay_n$ und somit

$$z_n = (x_n - y_n) - A(x_n - y_n) \rightarrow z. \quad (2.8)$$

Die Folge $(x_n - y_n)$ ist beschränkt, Wenn dem nicht so wäre, dann würde eine Teilfolge $(x_{n_k} - y_{n_k}) \subseteq (x_n - y_n)$ existieren mit

$$\|x_{n_k} - y_{n_k}\| \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

Setze $w_{n_k} := \frac{x_{n_k} - y_{n_k}}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|}$. Da $z_n \rightarrow z$, folgt daraus

$$\frac{z_{n_k}}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|} \rightarrow 0.$$

Mit (2.8) folgt dann

$$\frac{z_{n_k}}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|} \stackrel{(2.8)}{=} w_{n_k} - Aw_{n_k} \rightarrow 0.$$

Da $\|w_{n_k}\| = 1$ und A kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(w_{n_{\bar{k}}}) \subseteq (w_{n_k})$, so dass $Aw_{n_{\bar{k}}}$ konvergiert und da $w_{n_{\bar{k}}} - Aw_{n_{\bar{k}}} \rightarrow 0$, konvergiert auch $(w_{n_{\bar{k}}})$ gegen ein $w \in N(I - A)$. Aber es gilt auch wegen der Wahl von y_{n_k}

$$\begin{aligned} \text{dist}(w_{n_k}, N(I - A)) &= \inf_{u \in N(I - A)} \|w_{n_k} - u\| \\ &= \inf_{u \in N(I - A)} \left\| \frac{x_{n_k} - y_{n_k}}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|} - u \frac{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|} \inf_{u \in N(I - A)} \|x_{n_k} - y_{n_k} - u\| \|x_{n_k} - y_{n_k}\| \\ &= \frac{\text{dist}(x_{n_k}, N(I - A))}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Die Funktion $x \mapsto \text{dist}(x, M)$ für jeden linearen Unterraum M Lipschitzstetig mit Konstante 1. In der Tat, existiert für alle $y \in X$, $\varepsilon > 0$ ein $y_\varepsilon \in M$ mit $\|y - y_\varepsilon\| \leq \text{dist}(y, M) + \varepsilon$. Somit erhalten wir

$$\text{dist}(x, M) - \text{dist}(y, M) \leq \|x - y_\varepsilon\| + \|y - y_\varepsilon\| + \varepsilon \leq \|x - y\| + \varepsilon.$$

Analog zeigt man mit vertauschten Rollen

$$\text{dist}(y, M) - \text{dist}(x, M) \leq \|x - y\| + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Aussage. Somit folgt aus $w_{n_{\bar{k}}} \rightarrow w$ und $\text{dist}(w_{n_k}, N(I - A)) = 1$ auch

$$\text{dist}(w, N(I - A)) = 1,$$

ein Widerspruch zu $w \in N(I - A)$. Somit ist die Folge $(x_n - y_n)$ beschränkt. Da A kompakt ist, gibt es eine Teilfolge, so dass

$$A(x_{n_k} - y_{n_k}) \rightarrow \tilde{w}.$$

Wegen (2.8) konvergiert dann auch

$$x_{n_k} - y_{n_k} \rightarrow z - \tilde{w} =: v.$$

Aber da A stetig ist, konvergiert dann auch $A(x_{n_k} - y_{n_k}) \rightarrow Av$. Wiederum wegen (2.8) ist dann $v - Av = z$, d.h. $z \in R(I - A)$ und somit ist $R(I - A)$

abgeschlossen. Da A stetig ist, ist der Graph von $I - A$ abgeschlossen. Nach Kapitel 3 Satz 3.23 ist $R(I - A)$ abgeschlossen genau dann, wenn

$$R(I - A) = N(I - A^*)^\perp.$$

(iii) „ \Rightarrow “ Wir machen einen Widerspruchsbeweis. Sei $X_1 := R(I - A) \subsetneq X$. Nach (ii) ist $R(I - A)$ abgeschlossen, X_1 ist also ein Banachraum. Für $y \in X_1$ gibt es ein $x \in X$ mit:

$$y = x - Ax.$$

Dann ergibt sich

$$Ay = Ax - AAx = (I - A)(Ax) \in X_1,$$

d.h. $A(X_1) \subseteq X_1$, $A|_{X_1}$ ist also kompakt. Definiere $X_2 := (I - A)(X_1) \subseteq X_1$, X_2 ist abgeschlossen. Es gilt

$$X_2 \subsetneq X_1,$$

denn da $X_1 \subsetneq X$ gibt es ein $x_0 \in X \setminus X_1$. Angenommen $X_1 = X_2$, dann wäre

$$y := x_0 - Ax_0 \in X_1 = X_2,$$

es gibt also ein $x_1 \in X_1$ mit

$$y = x_1 - Ax_1,$$

da aber $I - A$ injektiv ist, folgt

$$X_1 \not\ni x_0 = x_1 \in X_1,$$

ein Widerspruch. Wir iterieren dies:

$$X_n := (I - A)^n(X)$$

mit $X_n \subsetneq X_{n-1}$ und die X_n sind abgeschlossene, lineare Teilräume. Nach Lemma 2.1 gibt es $u_n \in X_n$ mit $\|u_n\| = 1$ und

$$\text{dist}(u_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Es gilt:

$$Au_n - Au_m = -(u_n - Au_n) + (u_m - Au_m) + (u_n - u_m).$$

Für $n > m$ ist

$$X_{n+1} \subseteq X_n \subseteq X_{m+1} \subseteq X_m.$$

Für $u_n \in X_n$ ist $(I - A)u_n \in X_{n+1} \subseteq X_{m+1}$, für $u_m \in X_m$ ist $(I - A)u_m \in X_{m+1}$ und $u_n \in X_n \subseteq X_{m+1}$. Somit ist

$$\|Au_n - Au_m\| \geq \frac{1}{2},$$

ein Widerspruch, da A kompakt ist.

„ \Leftarrow “ Sei $X = R(I - A)$. Nach Kapitel 3 Satz 3.22 (ii) ist

$$N(I - A^*) = R(I - A)^\perp = X^\perp = \{0\}.$$

Da aber A^* kompakt ist, folgt mit dem gerade Gezeigten, dass

$$R(I - A^*) = X^*$$

ist und nach Kapitel 3 Satz 3.22 (i) gilt

$$N(I - A) = R(I - A^*)^\perp = (X^*)^\perp = \{0\}.$$

(iv) Sei $d := \dim N(I - A)$ und $d^* := \dim N(I - A^*)$. Wir wollen durch einen Widerspruch zeigen, dass $d^* \leq d$ ist. Sei also $d < d^*$. Wegen (i) ist $d < \infty$. Nach Lemma 2.4 gibt es eine stetige, lineare Projektion

$$P : X \rightarrow N(I - A).$$

Wegen (ii) ist $R(I - A) = N(I - A^*)^\perp$ und wegen (i) ist $\dim N(I - A^*) = d^* < \infty$. Nach Lemma 2.5 gibt es einen abgeschlossenen, linearen Unterraum F von X , der Dimension d^* hat und

$$X = F \oplus R(I - A). \quad (2.9)$$

Da nach Voraussetzung $d^* > d$ ist, gibt es eine lineare Abbildung

$$\Lambda : N(I - A) \rightarrow F,$$

die injektiv, aber nicht surjektiv ist. Der Operator

$$B := A + \Lambda \circ P$$

ist kompakt, da A und P kompakt sind und Λ linear ist. Sei $x \in N(I - B)$, d.h.

$$0 = x - Bx = x - Ax - \Lambda Px,$$

d.h.

$$F \ni \Lambda Px = x - Ax \in R(I - A).$$

Da aber $F \cap R(I - A) = \{0\}$ ist, folgt $x - Ax = 0$, d.h. $x \in N(I - A)$ und somit auch $Px = x$, da P auf $N(I - A)$ die Identität ist. Da $0 = \Lambda Px = \Lambda x$ ist und Λ injektiv ist, folgt $x = 0$, d.h.

$$N(I - B) = \{0\}$$

und somit nach (iii)

$$R(I - B) = X.$$

Da aber Λ nicht surjektiv ist, gibt es ein $x_0 \in F \setminus R(\Lambda)$ und da $R(I - B) = X$ ist, gibt es ein $x \in X : x - Bx = x_0$, d.h.

$$x_0 = \underbrace{x - Ax}_{\in R(I-A)} - \underbrace{\Lambda Px}_{\in R(\Lambda) \subseteq F},$$

somit

$$F \ni x_0 + \Lambda Px = x - Ax \in R(I - A).$$

Wegen (2.9) folgt wieder, dass dann $x - Ax = 0$ sein muss und auch

$$R(\Lambda) \not\ni x_0 = -\Lambda Px \in R(\Lambda),$$

ein Widerspruch, es folgt $d^* \leq d$. Wenn wir das Resultat auf A^* anwenden, ergibt sich

$$\dim N(I - A^{**}) \leq \dim N(I - A^*) \leq \dim N(I - A). \quad (2.10)$$

Aus (1.8) wissen wir, dass $A^{**} \circ J_X = J_X \circ A$ ist und somit

$$\begin{aligned} J_X \circ (I - A) &= J_X - J_X \circ A \\ &= J_X - A^{**} \circ J_X \\ &= (I - A^{**}) \circ J_X, \end{aligned}$$

wenn also $x \in N(I - A)$ ist, so ist $J_X x \in N(I - A^{**})$, d.h.

$$J_X(N(I - A)) \subseteq N(I - A^{**})$$

und da J_X eine lineare Isometrie ist, ergibt sich

$$\dim N(I - A) \leq \dim N(I - A^{**}),$$

in (2.10) folgt also die Gleichheit, d.h. $d^* = d$. ■

7.3 Spektraltheorie

3.1 Definition. Sei $A \in L(X)$. Die **Resolventenmenge** $\rho(A)$ ist durch

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (A - \lambda I) \text{ ist bijektiv von } X \text{ auf } X\}$$

definiert. Das **Spektrum** $\sigma(A)$ von A ist die Komplementärmenge von $\rho(A)$, d.h.

$$\sigma(A) := \mathbb{R} \setminus \rho(A).$$

Man sagt, dass λ ein **Eigenwert** ist, wenn

$$N(A - \lambda I) \neq \{0\}$$

und schreibt $\lambda \in EW(A)$. Man nennt $N(A - \lambda I)$ den **Eigenraum** von λ .

- Wenn $\lambda \in \rho(A)$ ist, ist wegen Kapitel 3 Satz 2.5 $(A - \lambda I)^{-1} \in L(X)$.
- $EW(A) \subseteq \sigma(A)$
- Wenn $\dim X = \infty$ ist, ist im Allgemeinen $EW(A) \subsetneq \sigma(A)$.
- Es ist möglich, dass $N(A - \lambda I) = \{0\}$ und $R(A - \lambda I) \neq X$ ist, denn betrachte

$$A : \ell^2 \rightarrow \ell^2 : (u_n) \mapsto (0, u_1, u_2, \dots).$$

$0 \in \sigma(A)$ und $0 \notin EW(A)$, denn sonst wäre

$$A(u_n) = 0(u_n) = 0$$

und somit $(u_n) = 0$.

3.2 Satz. Das Spektrum ist eine kompakte Menge, für die gilt

$$\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] \tag{3.3}$$

BEWEIS : Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| > \|A\|$. Wir müssen zeigen, dass dann λ in der Resolventenmenge $\rho(A)$ ist, d.h. dass $A - \lambda I$ bijektiv ist. Für alle $f \in X$ gibt es eine eindeutige Lösung $u \in X$ von $Au - \lambda u = f$ genau dann, wenn

$$u = \frac{1}{\lambda}(Au - f),$$

d.h. wenn u der eindeutige Fixpunkt der Abbildung

$$T : X \rightarrow X : u \mapsto \frac{1}{\lambda}(Au - f)$$

ist. T ist eine Kontraktion, denn

$$\begin{aligned}\|Tu_1 - Tu_2\| &= \frac{1}{|\lambda|} \|Au_1 - f - (Au_2 - f)\| \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{|\lambda|} \|A\|}_{=:k < 1} \|u_1 - u_2\|.\end{aligned}$$

Mit dem Banachschen Fixpunktsatz ergibt sich dann, dass T einen eindeutigen Fixpunkt hat und somit

$$\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|].$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\rho(A)$ offen ist. Sei $\lambda_0 \in \rho(A)$ und sei λ nahe genug an λ_0 , d.h. $|\lambda - \lambda_0| \ll 1$. Für $f \in X$ hat die Gleichung

$$Au - \lambda u = f \tag{3.4}$$

eine Lösung genau dann, wenn

$$Au - \lambda_0 u = f + \lambda u - \lambda_0 u$$

und da $\lambda_0 \in \rho(A)$ ist, muss

$$u = (A - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)u)$$

sein. Betrachte die Abbildung

$$T : X \rightarrow X : u \mapsto (A - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)u).$$

T ist eine Kontraktion, denn

$$\begin{aligned}\|Tu_1 - Tu_2\| &= \|(A - \lambda_0 I)^{-1}(\lambda - \lambda_0)(u_1 - u_2)\| \\ &\leq \underbrace{\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| |\lambda - \lambda_0|}_{=:k} \|u_1 - u_2\|\end{aligned}$$

Somit muss man $|\lambda - \lambda_0| \ll 1$ so wählen, dass $k < 1$ ist. $\rho(A)$ ist also offen und $\sigma(A)$ kompakt. ■

3.5 Satz. Sei $\dim X = \infty$ und $A \in K(X)$. Dann gilt

- (i) $0 \in \sigma(A)$.
- (ii) $\sigma(A) \setminus \{0\} = EW(A) \setminus \{0\}$.

(iii) Einer der folgenden Fälle tritt ein:

- entweder $\sigma(A) = \{0\}$,
- oder $\sigma(A) \setminus \{0\}$ ist endlich,
- oder $\sigma(A) \setminus \{0\}$ ist Nullfolge.

BEWEIS : (i) Sei $0 \notin \sigma(A)$, d.h. $0 \in \rho(A)$, also ist $A - 0I = A$ bijektiv und

$$I = A^{-1} \circ A$$

ist nach Lemma 1.7 kompakt. Dann ist B_X kompakt und nach Satz 2.3 folgt, dass X endlichdimensional ist, ein Widerspruch.

(ii) Generell gilt, dass $EW(A) \subseteq \sigma(A)$. Sei $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ und sei λ kein Eigenwert von A , d.h.

$$N(A - \lambda I) = \{0\}.$$

Mit Satz 2.7 (iii) folgt dann

$$R(A - \lambda I) = X,$$

d.h. $\lambda \in \rho(A)$, ein Widerspruch.

• Für (iii) benötigen wir folgendes Lemma

3.6 Lemma. Sei $\dim X = \infty$ und $A \in K(X)$. Sei $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge paarweise verschiedener reeller Zahlen mit

$$\lambda_n \rightarrow \lambda$$

und

$$\lambda_n \in \sigma(A) \setminus \{0\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt:

$$\lambda = 0.$$

• Das Lemma besagt, dass alle Punkte von $\sigma(A) \setminus \{0\}$ **isoliert** sind.

BEWEIS : Sei $\lambda_n \in \sigma(A) \setminus \{0\} \stackrel{(ii)}{=} EW(A) \setminus \{0\}$, d.h.

$$N(A - \lambda_n I) \neq \{0\}.$$

Es gibt also $e_n \neq 0$ mit $Ae_n - \lambda_n e_n = 0$. Sei $X_n := \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Wir zeigen

$$X_n \subsetneq X_{n+1}. \quad (3.7)$$

Es reicht zu zeigen, dass für alle n die Menge $\{e_1, \dots, e_n\}$ linear unabhängig ist. Wir führen einen Induktionsbeweis durch. Der Fall $n = 1$ ist klar. Sei

$$e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i,$$

d.h.

$$Ae_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i Ae_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i,$$

es folgt

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) e_i.$$

Da $\{e_1, \dots, e_n\}$ linear unabhängig sind, ist für alle i :

$$\alpha_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0.$$

Da aber die λ_i paarweise verschieden sind, müssen die $\alpha_i = 0$ sein und somit $e_{n+1} = 0$, ein Widerspruch. Weiter gilt:

$$(A - \lambda_n I)(X_n) \subseteq X_{n-1}, \quad (3.8)$$

denn jedes $x \in X_n$ besitzt eine Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i,$$

d.h.

$$\begin{aligned} (A - \lambda_n I)(x) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i Ae_i - \lambda_n \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) e_i \in X_{n-1}. \end{aligned}$$

Wegen (3.7) und Lemma 2.1 gibt es für alle $n \geq 2$ ein $u_n \in X_n$ mit $\|u_n\| = 1$ und

$$\text{dist}(u_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Sei $2 \leq m < n$. Es ist

$$X_{m-1} \subseteq X_m \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n$$

und somit

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Au_n}{\lambda_n} - \frac{Au_m}{\lambda_m} \right\| &= \left\| \underbrace{\frac{Au_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n}}_{\in X_{n-1}, \text{ wegen (3.8)}} - \underbrace{\frac{Au_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m}}_{\in X_{m-1} \subseteq X_{n-1}} + u_n - \underbrace{u_m}_{\in X_m \subseteq X_{n-1}} \right\| \\ &\geq \text{dist}(u_n, X_{n-1}) \\ &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Folge $\left(\frac{Au_n}{\lambda_n}\right)$ besitzt also keine konvergente Teilfolge. Sei $\lambda \neq 0$. Dann besitzt auch (Au_n) keine konvergente Teilfolge, denn falls doch würde auch die Folge $\left(\frac{Au_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)$ konvergieren. Also haben wir einen Widerspruch zu A kompakt, d.h. $\lambda = 0$. ■

BEWEIS (Satz 3.5 (iii)): Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\lambda| \geq \frac{1}{n}\} =: \sigma_n$$

entweder leer oder endlich. Angenommen sie sei unendlich, da $\sigma(A)$ beschränkt ist, gibt es einen Häufungspunkt und wegen Lemma 3.6 ist der Häufungspunkt die 0, ein Widerspruch zu $|\lambda| \geq \frac{1}{n}$. Aber es ist

$$\sigma(A) \setminus \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n,$$

$\sigma(A) \setminus \{0\}$ ist also höchstens abzählbar. Mit Lemma 3.6 folgt die Behauptung. ■

- Spezialfall $X = H$, A selbstadjungiert.

3.9 Definition. Ein Operator $A \in L(H)$ heißt **selbstadjungiert**, wenn $A = A^*$, d.h. für alle $u, v \in H$ gilt

$$(Au, v) = (u, Av). \quad (3.10)$$

3.11 Satz. Für einen selbstadjungierten Operator $A \in L(H)$ setzen wir

$$m := \inf_{u \in H, \|u\|=1} (Au, u),$$

$$M := \sup_{u \in H, \|u\|=1} (Au, u).$$

Dann gilt $\sigma(A) \subseteq [m, M]$ und $m, M \in \sigma(A)$

BEWEIS : (i) Für alle $u \in H$ ist $\left(A \frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|}\right) \leq M$ und somit

$$(Au, u) \leq M\|u\|^2. \quad (3.12)$$

Sei $\lambda > M$, dann ist für alle $u \in H$

$$(\lambda u - Au, u) \geq (\lambda - M)\|u\|^2 = \alpha\|u\|^2,$$

mit $\alpha > 0$. Also induziert $\lambda I - A$ eine koerzive, beschränkte Bilinearform. Mit dem Lemma von Lax-Milgram gibt es für alle $f \in H$ ein eindeutiges $u \in H$ mit

$$\lambda u - Au = f,$$

d.h. $\lambda I - A$ ist bijektiv, also $\lambda \in \rho(A)$.

(ii) Wir zeigen $M \in \sigma(A)$. Wir definieren eine Bilinearform durch

$$a(u, v) := (Mu - Au, v).$$

Da A selbstadjungiert ist, ist $a(., .)$ symmetrisch und wegen (3.12) ist

$$a(u, u) \geq 0.$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $a(., .)$ ergibt:

$$|a(u, v)| \leq a(u, u)^{\frac{1}{2}} a(v, v)^{\frac{1}{2}},$$

d.h. für alle $u, v \in H$ gilt

$$\begin{aligned} |(Mu - Au, v)| &\leq (Mu - Au, u)^{\frac{1}{2}} (Mv - Av, v)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\text{C.S. für } (.,.)}{\leq} (Mu - Au, u)^{\frac{1}{2}} (M + \|A\|)^{\frac{1}{2}} \|v\| \end{aligned}$$

Wähle $v = Mu - Au$, dann ist

$$\|Mu - Au\|^2 \leq c(Mu - Au, u)^{\frac{1}{2}} \|Mu - Au\|,$$

d.h.

$$\|Mu - Au\| \leq c(Mu - Au, u)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

Wegen der Definition von M gibt es $(u_n) \subseteq H$ mit $\|u_n\| = 1$ und $(Au_n, u_n) \rightarrow M$ und wegen (3.13) folgt

$$\|Mu_n - Au_n\| \rightarrow 0.$$

Also ist $M \in \sigma(A)$, denn falls nicht wäre $M \in \rho(A)$, d.h. $(MI - A)^{-1}$ existiert und ist stetig. Somit folgt

$$(MI - A)^{-1}(Mu_n - Au_n) = (MI - A)^{-1}(MI - A)(u_n) \rightarrow 0,$$

d.h. $u_n \rightarrow 0$, ein Widerspruch zu $\|u_n\| = 1$.

(iii) Die Aussagen für m folgen durch Übergang von A zu $-A$. ■

3.14 Folgerung. Sei $A \in L(H)$ ein selbstadjungierter Operator mit $\sigma(A) = \{0\}$. Dann ist $A = 0$.

BEWEIS : Wegen Satz 3.11 ist $\inf_{\|u\|=1} (Au, u) \in \sigma(A)$ und $\sup_{\|u\|=1} (Au, u) \in \sigma(A)$.

Für alle $u \in H$ ist also $(Au, u) = 0$. Für alle $u, v \in H$ ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= (A(u+v), u+v) - (Au, u) - (Av, v) \\ &= (Au, u) + (Av, v) + (Au, v) + (Av, u) - (Au, u) - (Av, v) \\ &= 2(Au, v) \end{aligned}$$

d.h. $Au = 0$ für alle u und somit $A = 0$. ■

3.15 Satz. Sei H ein separabler Hilbertraum und A ein kompakter, selbstadjungierter linearer Operator. Dann existiert ein vollständiges Orthonormalsystem bestehend aus Eigenvektoren von A .

BEWEIS : Seien $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ die verschiedenen Eigenwerte von A außer der Null und $\lambda_0 := 0$. Definiere $H_0 := N(A)$ und $H_n := N(A - \lambda_n I)$. Wegen Satz 2.7 ist $0 < \dim H_n < \infty$, $n \geq 1$ und $0 \leq \dim H_0 \leq \infty$. Wir zeigen:

$$H = \bigoplus_{n \geq 0} H_n \quad (3.16)$$

d.h.

(i) H_n sind paarweise orthogonal, d.h. für alle $u_n \in H_n$, $u_m \in H_m$, $m \neq n$ gilt:

$$(u_n, u_m) = 0. \quad (3.17)$$

(ii) Der durch $(H_n)_{n \geq 0}$ generierte Vektorraum ist dicht in H , d.h.

$$\overline{\text{span}\{H_n \mid n \geq 0\}}^H = H. \quad (3.18)$$

Aus (3.16) folgt dann die Behauptung, denn zu jedem H_n gibt es eine Basis (v_i^n) , $i = 1, \dots, \dim H_n$. Nach Lemma 3.2 aus Kapitel 6 gibt es ein Orthonormalsystem (w_i^n) , $i = 1, \dots, \dim H_n$, wobei die w_i^n Eigenvektoren sind. Wegen (3.17) ist also

$$\{(w_i^n), i = 1, \dots, \dim H_n, n \geq 0\}$$

ein Orthonormalsystem und wegen (3.18) ist es vollständig und der Satz ist bewiesen.

(i) Sei $x_n \in H_n$ und $x_m \in H_m$, $n \neq m$. Es ist

$$Ax_n = \lambda_n x_n \quad | \cdot x_m,$$

$$Ax_m = \lambda_m x_m \quad | \cdot x_n.$$

Also folgt

$$\lambda_m(x_n, x_m) = (x_n, Ax_m) \stackrel{A \text{ selbstadjungiert}}{=} (Ax_n, x_m) = \lambda_n(x_n, x_m).$$

Da $\lambda_n \neq \lambda_m$ ist folgt $(x_n, x_m) = 0$.

(ii) $X := \text{span}\{H_n \mid n \geq 0\}$. Wir müssen zeigen, dass $\overline{X} = H$ ist. Es gilt $A(X) \subseteq X$, denn jedes $x \in X$ hat eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \in H_i$, d.h.

$$Ax = \sum_{i=1}^k \alpha_i Ax_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i x_i \in X.$$

Außerdem ist $A(X^\perp) \subseteq X^\perp$, denn für $u \in X^\perp$, $v \in X$ folgt

$$(Au, v) = (u, Av) = 0.$$

Der Operator

$$A_0 := A|_{X^\perp} : X^\perp \rightarrow X^\perp$$

ist somit kompakt. Außerdem ist A_0 beschränkt, linear und selbstadjungiert, denn für $u, v \in X^\perp$ gilt

$$(A_0 u, v) = (Au, v) = (u, Av) = (u, A_0 v).$$

$\sigma(A_0) = \{0\}$, denn für $\lambda \in \sigma(A_0) \setminus \{0\}$ wissen wir, dass $\lambda \in EW(A_0)$. Also gibt es ein $u_0 \in X^\perp$, $u_0 \neq 0$, so dass

$$Au_0 = A_0 u_0 = \lambda u_0.$$

λ ist also auch ein Eigenwert von A , d.h. es gibt ein $n \geq 1$, so dass $\lambda = \lambda_n$ ist und somit

$$u_0 \in H_n \cap X^\perp,$$

d.h. aber $u_0 = 0$, ein Widerspruch zu $u_0 \neq 0$. Nach Folgerung 3.14 ist dann $A_0 = 0$, also

$$X^\perp \subseteq N(A) = H_0 \subseteq X$$

und somit $X^\perp = \{0\}$. Dann folgt mit Satz 3.2 in Kapitel 3

$$\overline{X} = (X^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H.$$

■

- Satz 3.15 angewendet auf A selbstadjungiert, kompakt und H separabel mit $\dim H = \infty$, liefert dann ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren

$$\{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

so dass alle $u \in H$ eine Darstellung

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \omega_n) \omega_n$$

haben, es folgt also

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, \omega_n) \omega_n.$$

Hier sind die λ_n allerdings nicht notwendig verschieden.

7.4 Zusatz

4.1 Satz (Rellich). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann sind die Einbettung $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) : u \mapsto u$ und der dazu adjungierte Operator $J^* : (L^2(\Omega))^* \rightarrow (W_0^{1,2}(\Omega))^*$, definiert durch $\langle J^* f, v \rangle_{W_0^{1,2}} = \langle f, Jv \rangle_{L^2}$, $f \in (L^2(\Omega))^*$, $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, kompakt.

BEWEIS : Aus

$$\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{W_0^{1,2}}$$

folgt, dass J stetig ist. Da $W_0^{1,2}(\Omega)$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der $W^{1,2}(\Omega)$ -Norm ist, können wir $W_0^{1,2}(\Omega)$ als Teilraum von $W_0^{1,2}(Q)$ mit einem Würfel $Q = [-\pi L, \pi L]^n \supseteq \Omega$ betrachten.¹ Die $W_0^{1,2}(Q)$ -Funktionen werden periodisch auf ganz \mathbb{R}^n fortgesetzt mit Q als Periodizitätswürfel. Sei nun $(u_m) \subseteq W_0^{1,2}(Q)$ beschränkt. Analog zum eindimensionalen Fall kann man zeigen, dass durch $(2\pi L)^{\frac{-n}{2}} e^{ik \cdot x/L}$, $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, ein vollständiges Orthonormalsystem auf $L^2(Q)$ gegeben ist. Somit besitzt $u_m \in L^2(Q)$ aufgrund von Satz 3.6 eine Fourierentwicklung

$$u_m = \sum_k c_k^m \frac{e^{i \frac{k \cdot x}{L}}}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}},$$

wobei die Summation über die Multiindizes $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, läuft. Die Koeffizienten c_k sind gegeben durch

$$c_k^m = \frac{1}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}} \int_Q u_m(x) e^{-i \frac{k \cdot x}{L}} dx.$$

Da auch $\partial_j u^m \in L^2(Q)$, $j = 1, \dots, n$, haben wir auch

$$\partial_j u^m = \sum_k d_k^{m,j} \frac{e^{i \frac{k \cdot x}{L}}}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}},$$

wobei

$$\begin{aligned} d_k^{m,j} &= \frac{1}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}} \int_Q \partial_j u^m(x) e^{-i \frac{k \cdot x}{L}} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}} \int_Q u^m(x) e^{-i \frac{k \cdot x}{L}} \frac{ik_j}{L} dx \\ &= \frac{ik_j}{L} c_k^m. \end{aligned}$$

¹Die Funktionen aus $H_0^{1,2}(\Omega)$ werden durch 0 auf $Q \setminus \Omega$ fortgesetzt.

Aus der Beschränktheit der Folge $\|u_m\|_{W^{1,2}}$ folgt, nach Satz 3.6, die Existenz einer Konstanten K , so dass für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_k |k|^2 |c_k^m|^2 \leq K, \quad |c_{0,0,\dots,0}^m|^2 \leq K$$

Daraus folgt mit dem Diagonalverfahren, dass es eine Teilfolge $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ gibt so, dass für alle Multi-Indizes k gilt

$$c_k^m \rightarrow c_k \quad (m \in \Lambda, m \rightarrow \infty).$$

Hieraus folgt, dass (c^m) eine Cauchyfolge in $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ ist, denn

$$\begin{aligned} \sum_k |c_k^m - c_k^j|^2 &\leq \sum_{|k| \leq N} |c_k^m - c_k^j|^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{|k| \geq N} |k|^2 |c_k^m - c_k^j|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2K}{N^2} < \varepsilon \quad \text{für } m, j \geq l(\varepsilon). \end{aligned}$$

Da $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ vollständig ist, haben wir gezeigt, dass $c^m \rightarrow c$ in $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Auf die Fourierreihe übertragen, impliziert die Konvergenz $c^m \rightarrow c$ in $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ die Konvergenz $u^m \rightarrow u$ ($m \rightarrow \infty, m \in \Lambda$) stark in $L^2(Q)$, wobei $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ der Vektor der Fourierkoeffizienten der u definierenden Reihe ist.

Dass der adjungierte Operator auch kompakt ist, folgt sofort aus Satz 1.8. ■

Im Folgenden stellen wir eine bedeutende Anwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 7.2 auf Randwertprobleme elliptischer partieller Differentialgleichungen dar. Entscheidend ist, dass man für Randwertprobleme

$$\begin{aligned} - \sum_{i,k=1}^n \partial_i (a_{ik}(x) \partial_k u) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u + c(x) u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.2}$$

die sogenannte **Gårdingsche Ungleichung** beweisen kann.

4.3 Satz. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und seien $a_{ik} \in L^\infty(\Omega)$, $b_i \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Es gelte die Elliptizitätsbedingung, d.h. es gibt eine positive Konstante $\alpha > 0$, so dass für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \geq \alpha |\xi|^2.$$

Definiere die beschränkte Bilinearform $Q : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$Q(u, v) := \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \partial_k u \partial_i v + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u v + c u v \, dx. \tag{4.4}$$

Dann gilt für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ die **Gårdingsche Ungleichung**

$$Q(u, u) \geq c_0 \|u\|_{W_0^{1,2}}^2 - \lambda_0 \|u\|_{L^2}^2$$

mit positiven Konstanten $c_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$.

BEWEIS : Wegen der Elliptizitätsbedingung schätzt man

$$\int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \partial_k u \partial_i u \, dx \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx$$

ab. Den zweiten Summand in (4.4) schätzt man nach unten ab,

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \partial_i u \, u \, dx \geq -\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{n \|b\|_{\infty}^2}{2\alpha} \int_{\Omega} |u|^2 \, dx,$$

woraus sich

$$\begin{aligned} Q(u, u) &\geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{n \|b\|_{\infty}^2}{2\alpha} \int_{\Omega} |u|^2 \, dx - \|c\|_{\infty} \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \\ &= \frac{\alpha}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \right) - \left(\frac{n \|b\|_{\infty}^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2} + \|c\|_{\infty} \right) \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \end{aligned}$$

ergibt. Die Beschränktheit der Bilinearform ergibt sich aus der Hölderungleichung in ähnlicher Weise wie in den obigen Rechnungen. ■

Im Folgenden nehmen wir immer an, dass die Voraussetzungen von Satz 4.3 erfüllt sind. Um schwache Lösungen von (4.2) zu definieren, benötigen wir den Rieszoperator $R : L^2(\Omega) \rightarrow (L^2(\Omega))^*$ definiert durch $\langle Rf, g \rangle_{L^2} := (f, g)_{L^2}$. Zu gegebenen $f \in L^2(\Omega)$ heißt $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ **schwache Lösung** von (4.2) falls für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$Q(u, v) = \langle J^* Rf, v \rangle_{W_0^{1,2}}.$$

Man beachte, dass $\langle J^* Rf, v \rangle_{W_0^{1,2}} = (f, v)_{L^2}$, wobei wir, wie immer im Weiteren, benutzt haben, dass $Jv = v$ für $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Die beschränkte Bilinearform $Q_{\lambda_0} : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$Q_{\lambda_0}(u, v) := Q(u, v) + \lambda_0(u, v)_{L^2}$$

ist beschränkt und nach Satz 4.3 auch koerziv. Somit liefert das Lemma von Lax-Milgram (Kapitel 6 Folgerung 2.13), dass für alle $F \in (W_0^{1,2}(\Omega))^*$ ein eindeutiges $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ existiert, so dass für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$Q_{\lambda_0}(u, v) = \langle F, v \rangle_{W_0^{1,2}}.$$

Also können wir einen Lösungsoperator

$$S_{\lambda_0} : (W_0^{1,2}(\Omega))^* \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega) : F \mapsto u$$

definieren, der linear und beschränkt ist. Wir wollen die Fredholmsche Alternative benutzen, um die Existenz einer schwachen Lösung von (4.2) zu beweisen. Dafür definieren wir den Operator $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ durch

$$Kf := \lambda_0 S_{\lambda_0} \circ J^* \circ Rf. \quad (4.5)$$

Satz 4.1 und Lemma 1.7 zeigen, dass K kompakt ist, wobei wir benutzt haben, dass $W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

4.6 Lemma. *Sei $f \in L^2(\Omega)$ gegeben. Dann ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (4.2) genau dann, wenn für $u \in L^2(\Omega)$ gilt*

$$(I - K)u = h, \quad (4.7)$$

wobei $h := \lambda_0^{-1} Kf$.

BEWEIS : „ \Rightarrow “ Sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (4.2). Dann ist $u \in L^2(\Omega)$ und für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} Q_{\lambda_0}(u, v) &= Q(u, v) + \lambda_0(u, v)_{L^2} \\ &= \langle J^* Rf, v \rangle_{W_0^{1,2}} + \lambda_0 \langle J^* Ru, v \rangle_{W_0^{1,2}} \\ &= \langle J^* R(f + \lambda_0 u), v \rangle_{W_0^{1,2}}, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\langle J^* Ru, v \rangle_{W_0^{1,2}} = (u, v)_{L^2}$. Aufgrund der Definition von S_{λ_0} ist dies aber äquivalent zu $u = S_{\lambda_0} J^* R(f + \lambda_0 u) = h + Ku$. „ \Leftarrow “ Erfülle nun $u \in L^2(\Omega)$ (4.7). Dann gilt $u = S_{\lambda_0} J^* R(f + \lambda_0 u)$. Da $R(S_{\lambda_0}) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ folgt $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Die Definition von S_{λ_0} liefert somit für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\begin{aligned} Q_{\lambda_0}(u, v) &= \langle J^* R(f + \lambda_0 u), v \rangle_{W_0^{1,2}} \\ &= \langle J^* Rf, v \rangle_{W_0^{1,2}} + \lambda_0(u, v)_{L^2}. \end{aligned}$$

Da $Q_{\lambda_0}(u, v) = Q(u, v) + \lambda_0(u, v)_{L^2}$ folgt sofort, dass u eine schwache Lösung von (4.2) ist. ■

Die Charakterisierung (4.7) der schwachen Lösung von (4.2) ermöglicht es die Fredholmsche Alternative zu benutzen. Dabei spielen auch die adjungierten Probleme eine Rolle. Das adjungierte Problem zu (4.2) lautet:

$$\begin{aligned} - \sum_{i,k=1}^n \partial_k (a_{ik}(x) \partial_i v) - \sum_{i=1}^n \partial_i (b_i(x) v) + c(x) v &= g \quad \text{in } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wir definieren auch zum adjungierten Problem eine beschränkte Bilinearform $Q^* : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$Q^*(v, u) := \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \partial_i v \partial_k u + \sum_{i=1}^n b_i v \partial_i u + c v u \, dx.$$

Man beachte, dass für alle $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$Q^*(v, u) = Q(u, v). \quad (4.9)$$

Zu gegebenen $g \in L^2(\Omega)$ heißt $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ **schwache Lösung** von (4.8) falls für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$Q(v, u) = \langle J^* Rg, u \rangle_{W_0^{1,2}}.$$

Aus (4.9) folgt $Q^*(v, v) = Q(v, v)$. Somit gilt auch für das adjungierte Problem die Gårdingsche Ungleichung, d.h. für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$Q^*(v, v) \geq c_0 \|v\|_{W_0^{1,2}}^2 - \lambda_0 \|v\|_{L^2}^2 \quad (4.10)$$

mit denselben positiven Konstanten $c_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$.

Wir gehen nun analog zum Problem (4.2) vor und definieren die beschränkte Bilinearform $Q_{\lambda_0}^* : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$Q_{\lambda_0}^*(v, u) := Q^*(v, u) + \lambda_0(v, u)_{L^2}.$$

Diese ist beschränkt und nach (4.10) auch koerziv. Somit liefert das Lemma von Lax-Milgram (Kapitel 6 Folgerung 2.13), dass für alle $G \in (W_0^{1,2}(\Omega))^*$ ein eindeutiges $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ existiert, so dass falls für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$Q_{\lambda_0}^*(v, u) = \langle G, u \rangle_{W_0^{1,2}}.$$

Also können wir einen Lösungsoperator

$$S_{\lambda_0}^* : (W_0^{1,2}(\Omega))^* \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega) : G \mapsto v$$

definieren, der linear und beschränkt ist. Weiter definieren wir den Operator $K^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ durch

$$K^* g := \lambda_0 S_{\lambda_0}^* \circ J^* \circ Rg. \quad (4.11)$$

Satz 4.1 und Lemma 1.7 zeigen, dass K^* kompakt ist. Genau wie Lemma 4.6 zeigt man:

4.12 Lemma. Für gegebenes $g \in L^2(\Omega)$ ist $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (4.8) genau dann, wenn für $v \in L^2(\Omega)$ gilt

$$(I - K^*)u = k,$$

wobei $k := \lambda_0^{-1} K^* g$.

Weiterhin ist der durch (4.11) definierte Operator K^* der adjungierte Operator zu K definiert in (4.5). In der Tat, für $f, g \in L^2(\Omega)$ und $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt aufgrund der Definition der Lösungsoperatoren $S_{\lambda_0}, S_{\lambda_0}^*$

$$\begin{aligned} Q_{\lambda_0}(Kf, v) &= \langle \lambda_0 J^* Rf, v \rangle_{W_0^{1,2}} = \lambda_0(f, v)_{L^2}, \\ Q_{\lambda_0}^*(K^*g, u) &= \langle \lambda_0 J^* Rg, u \rangle_{W_0^{1,2}} = \lambda_0(g, u)_{L^2}. \end{aligned}$$

Wenn wir nun $u = \lambda_0^{-1} K^* g$ und $v = \lambda_0^{-1} Kf$ wählen, erhalten wir mithilfe von (4.9)

$$\begin{aligned} (f, K^*g)_{L^2} &= \lambda_0(f, \lambda_0^{-1} K^*g)_{L^2} = Q_{\lambda_0}(Kf, \lambda_0^{-1} K^*g) \\ &= Q_{\lambda_0}^*(\lambda_0^{-1} K^*g, Kf) = Q_{\lambda_0}^*(K^*g, \lambda_0^{-1} Kf) \\ &= \lambda_0(g, \lambda_0^{-1} Kf)_{L^2} = (Kf, g)_{L^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.14 Satz. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und seien $a_{ik} \in L^\infty(\Omega)$, $b_i \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Es gelte die Elliptizitätsbedingung

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \geq \alpha |\xi|^2$$

mit einer positiven Konstanten $\alpha > 0$. Dann hat das Problem (4.2) für $f \in L^2(\Omega)$ eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ genau dann, wenn für alle schwachen Lösungen $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ von Problem (4.8) mit $g = 0$ gilt

$$(f, v)_{L^2} = 0.$$

BEWEIS : Aufgrund von Lemma 4.6 ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ Lösung von (4.2) genau dann, wenn $\lambda_0^{-1} Kf \in R(I - K)$. Aufgrund von Satz 2.7 gilt $R(I - K) = N(I - K^*)^\perp$. Somit ist $\lambda_0^{-1} Kf \in R(I - K)$ äquivalent zu $\lambda_0^{-1} (Kf, v)_{L^2} = 0$ für alle $v \in L^2(\Omega)$ mit $v = K^*v$. Also gilt, mithilfe von (4.13)

$$0 = (Kf, v)_{L^2} = (f, K^*v)_{L^2} = (f, v)_{L^2}.$$

Aufgrund von Lemma 4.12 gilt $v = K^*v$ genau dann, wenn v eine schwache Lösung von (4.8) mit $g = 0$ ist. Damit ist der Satz bewiesen. ■