Funktionalanalysis

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Thorsten Schmidt

Department for Mathematical Stochastics, University Freiburg www.stochastik.uni-freiburg.de
thorsten.schmidt@stochastik.uni-freiburg.de

SS 2020

1.2 Normierte Vektorräume

2.1 Definition. *Ein Vektorraum V über $\mathbb{R}$ heißt* ***normiert****, wenn es eine Abbildung $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}^+$ gibt, die* ***Norm****, so dass für alle $x, y \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:*

(N1) ***Positiv definit****, d.h. $\|x\|_V \geq 0$ und $\|x\|_V = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

(N2) ***Positiv homogen****, d.h. $\|\lambda x\|_V = |\lambda| \|x\|_V$.*

(N3) ***Dreiecksungleichung****, d.h. $\|x + y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V$.*

Man schreibt $(V, \|\cdot\|_V)$ um den normierten Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\|_V$ zu notieren.

Skriptum S.5

(i) Für den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind durch

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|,$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, Normen definiert.

Skriptum S.5

(ii) Die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge. Wir bezeichnen mit $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, den Vektorraum aller (Äquivalenzklassen) Lebesgue–messbarer Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty \, .$$

Mit $L^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir den Vektorraum aller (Äquivalenzklassen) Lebesgue–messbarer Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ für die eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass für fast alle $x \in \Omega$ gilt:

$$|f(x)| \leq K \, .$$

Mit den Normen

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty \, ,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| \, , \qquad p = \infty \, ,$$

Skriptum S.6

wird $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, zu einem normierten Vektorraum.

Erweiterungen

Definition [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

$\mathcal{L}^p$ mit Halbnorm [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $0 < p < \infty$. Dann ist die folgende Menge ein Vektorraum:

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ ist messbar}, \int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) < \infty \right\}.$$

Die durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p} : \quad \mathcal{L}^p &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) \right)^{1/p} \end{aligned}$$

gegebene Abbildung ist für alle $p \geq 1$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$. Die Dreiecksungleichung für diese Halbnorm wird Minkowski-Ungleichung genannt und kann mit Hilfe der Hölder-Ungleichung bewiesen werden.

Genau dann ist $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$ eine Norm auf $\mathcal{L}^p$, wenn die leere Menge die einzige Nullmenge in $\mathcal{A}$ ist. Gibt es nämlich eine Nullmenge $N \neq \emptyset$, so ist die charakteristische Funktion 1_N ungleich der Nullfunktion, aber es gilt $\|1_N\|_{\mathcal{L}^p} = 0$.

https://de.wikipedia.org/wiki/Lp-Raum

Erweiterungen

L^p mit Norm [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Um auch im Fall einer Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$ zu einem normierten Raum zu kommen, identifiziert man Funktionen miteinander, wenn sie fast überall gleich sind. Formal bedeutet das: Man betrachtet den (von $p \geq 1$ unabhängigen) Untervektorraum

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p \mid \|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0\} = \{f \in \mathcal{L}^p \mid f = 0\ \mu\text{−fast überall}\}$$

und definiert den Raum L^p als den Faktorraum $\mathcal{L}^p/\mathcal{N}$. Zwei Elemente von $[f], [g] \in L^p$ sind also genau dann gleich, wenn $f - g \in \mathcal{N}$ gilt, also wenn f und g fast überall gleich sind.

Der Vektorraum L^p ist durch $\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{\mathcal{L}^p}$ normiert. Die Normdefinition hängt nicht von dem Repräsentanten aus $[f]$ ab, das heißt, für Funktionen $f_1, f_2 \in [f]$ in der gleichen Äquivalenzklasse gilt $\|f_1\|_{\mathcal{L}^p} = \|f_2\|_{\mathcal{L}^p}$. Das begründet sich damit, dass das Lebesgue-Integral invariant gegenüber Änderungen des Integranden auf Nullmengen ist.

Der normierte Vektorraum L^p ist vollständig und damit ein Banachraum, die Norm $\|\cdot\|_{L^p}$ wird L^p-Norm genannt.

Auch wenn man von sogenannten L^p-Funktionen spricht, handelt es sich dabei um die gesamte Äquivalenzklasse einer klassischen Funktion. Allerdings liegen im Falle des Lebesgue-Maßes auf dem $\mathbb{R}^n$ zwei verschiedene stetige Funktionen nie in der gleichen Äquivalenzklasse, so dass der L^p-Begriff eine natürliche Erweiterung des Begriffs stetiger Funktionen darstellt.

https://de.wikipedia.org/wiki/Lp-Raum

Erweiterungen

Bochner-Lebesgue-Räume [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Die Bochner-Lebesgue-Räume sind eine Verallgemeinerung der bisher betrachteten Lebesgue-Räume. Sie umfassen im Gegensatz zu den Lebesgue-Räumen banachraumwertige Funktionen.

Definition [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für $0 < p < \infty$ definiert man

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; E, \|\cdot\|) := \left\{ f\colon \Omega \to E : f \text{ ist messbar}, \int_\Omega \|f(x)\|^p \,\mathrm{d}\mu(x) < \infty \right\},$$

wobei sich „messbar" auf die borelsche σ-Algebra der Normtopologie von E bezieht. Die Abbildung

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} := \left(\int_\Omega \|f(x)\|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \right)^{1/p}$$

ist ebenfalls eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$, wenn $1 \leq p$ gilt. Die Bochner-Lebesgue-Räume $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; E, \|\cdot\|)$ sind nun genauso wie die Lebesgue-Räume als Faktorraum definiert.

https://de.wikipedia.org/wiki/Lp-Raum

2.2 Definition. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.*

(i) *Eine Folge $(x_n) \subseteq V$* ***konvergiert (stark oder auch in der Norm)*** *gegen $x \in V$ genau dann, wenn $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$. Man schreibt $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.*

(ii) *Die Folge $(x_n) \subseteq V$ heißt* ***Cauchyfolge****, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, k \geq n_0$ gilt : $\|x_n - x_k\| \leq \varepsilon$.*

2.3 Definition. *Ein normierter Vektorraum V heißt* ***vollständig*** *genau dann, wenn jede Cauchyfolge einen Grenzwert (in V) besitzt. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt* ***Banachraum*** *(B-Raum).*

Skriptum S.6

(i) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, sind ein vollständige normierte Vektorräume. Man beachte, dass alle Normen im $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

(ii) $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$. In Analysis III wird gezeigt (Satz von Fischer–Riesz), dass diese Räume vollständig sind. Die L^p–Normen sind natürlich nicht äquivalent, und deswegen unterscheiden sich auch die Räume.

Skriptum S.6

(iii) Der Raum der stetigen Funktionen. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, d.h. Ω ist beschränkt, offen und zusammenhängend. Mit $C(\overline{\Omega})$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionen $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Der Raum $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ ist auch ein vollständiger normierter Vektorraum. Dazu beachte man, dass für stetige Funktionen $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|$ gilt. Somit impliziert $\|\cdot\|_\infty$ die gleichmässige Konvergenz von stetigen Funktionen. Aus Analysis II wissen wir, dass jede Folge von stetigen Funktionen, welche gleichmässig konvergiert, eine stetige Grenzfunktion hat; d.h. der Grenzwert liegt wieder in $C(\overline{\Omega})$.

(iv) Der Raum $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_p)$, wobei Ω ein beschränktes Gebiet ist, ist ein normierten Raum, der nicht vollständig ist.

Skriptum S.7

2.4 Definition. *Beliebige Abbildungen eines normierten Vektorraumes in einen anderen normierten Vektorraum werden* ***Operatoren*** *genannt. Seien* X, Y *normierte Vektorräume und* $A : X \to Y$ *ein Operator. Dann heißt der Operator* A*:*

(i) ***Linear***, *wenn für alle* $x, y \in X$ *und alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y.$$

(ii) ***Beschränkt***, *wenn* A *beschränkte Mengen in* X *in beschränkte Mengen in* Y *abbildet.*

(iii) ***Stetig in*** x_0, *wenn für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert, so dass für alle* $x \in X$ *mit* $\|x - x_0\|_X < \delta$ *folgt, dass* $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$.

(iv) ***Stetig***, *wenn* A *stetig in allen* $x_0 \in X$ *ist.*

Skriptum S.7

Linearität ist eine starke Eigenschaft. In endlichdimensionalen Räumen ist jede lineare Funktion automatisch sofort auch (global Lipschitz-) stetig und beschränkt. In unendlichdimensionalen Räumen sind lineare Abbildungen zwar nicht automatisch stetig, jedoch kann man sie vermeidlich schwächer charakterisieren; sie folgt zum Beispiel schon aus der Stetigkeit in nur einem Punkt!

Skriptum S.7

2.5 Satz. *Seien X, Y normierte Vektorräume und $A : X \to Y$ ein linearer Operator, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist stetig,*

(ii) *A ist stetig in 0,*

(iii) $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty$,

(iv) *A ist beschränkt.*

BEWEIS : Übung. ∎

Skriptum S.8

e) Lineare Abbildungen sind nicht notwendig stetig.

Sei V der Vektorraum der Polynome auf $[-2,2]$, versehen mit der **gleichmäßigen Konvergenz** als Konvergenzbegriff, d.h.

$$p^j \to p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|p^j - p\|_\infty \to 0 \text{ für } j \to \infty.$$

Hierbei ist

$$\|q\|_\infty = \max_{x\in[-2,2]} |p(x)|.$$

Wir definieren die lineare Abbildung $A : V \to V$, indem wir sie auf den Basiselementen x^n definieren:

$$Ax^n = 3^n x^n\,.$$

Mit $p^n(x) = \frac{1}{(2,5)^n} x^n$ gilt $p^n \to 0$ $(n \to \infty)$, aber

$$\|Ap^n(x)\|_\infty = \frac{3^n \cdot 2^n}{(2,5)^n} \to \infty\,.$$

Beispiel

Der Raum der beschränkten, linearen Operatoren $A : X \to Y$ ist offensichtlich wieder ein Vektorraum; er wird mit $L(X, Y)$ bezeichnet. Er ist sogar ein normierter Vektorraum, denn durch

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \|A\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y \tag{2.6}$$

ist auf $L(X, Y)$ eine Norm gegeben, die **Operatornorm**, wie wir gleich beweisen werden:

Skriptum S.8

Lemma 2.7 (mit) Beweis ...

2.7 Lemma. *Seien X, Y normierte Vektorräume.*

(i) *Der Raum $(L(X,Y), \|\!|\cdot|\!\|)$ ist ein normierter Vektorraum.*

(ii) *Ist Y ein Banachraum, so ist auch $(L(X,Y), \|\!|\cdot|\!\|)$ ein Banachraum.*

Dualraum

2.8 Definition. *Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Der Raum $L(X, \mathbb{R})$ der beschränkten, linearen Funktionale heißt* ***Dualraum*** *von X und wird als X^* bezeichnet. Für $f \in X^*, x \in X$ schreibt man*

$$\langle f, x \rangle_{X^*,X} = \langle f, x \rangle_X = \langle f, x \rangle := f(x)$$

und nennt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*,X}$ das ***Dualitätsprodukt*** *zwischen X und X^*.*

Skriptum S.8

Da $\mathbb{R}$ ein Banachraum ist, ist nach Lemma 2.7 auch X^* ein Banachraum.

2.7 Lemma. *Seien X, Y normierte Vektorräume.*

(i) *Der Raum $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ ist ein normierter Vektorraum.*

(ii) *Ist Y ein Banachraum, so ist auch $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ ein Banachraum.*

pitel 6 genauer besprochen.

Skriptum S.8

Da $\mathbb{R}$ ein Banachraum ist, ist nach Lemma 2.7 auch X^* ein Banachraum. Der "schönste" unendlichdimensionale Raum ist der **Hilbertraum**. Dieser ist dem $\mathbb{R}^n$ am ähnlichsten, denn er besitzt (wie der Hilbertraum $\mathbb{R}^n$) ein **Skalarprodukt**, welches ermöglicht Begriffe wie Winkel und damit Orthogonalität zu verallgemeinern. Auch birgt er mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm einem dem euklidischem besonders nahe stehendem Abstandsbegriff, wie die Parallelogrammidentität zeigen wird. All dieses wird im Kapitel 6 genauer besprochen.

Skriptum S.8

2.9 Definition. *Ein* ***Skalarprodukt*** *auf einem reellen Vektorraum* H *ist eine Abbildung* $(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R}$*, so dass für alle* $x, y, z \in H$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(S1) **Bilinearität**, *d.h.* $(\alpha x + \beta y, z)_H = \alpha(x,z)_H + \beta(y,z)_H$.

(S2) **Symmetrie**, *d.h.* $(x,y)_H = (y,x)_H$.

(S3) **Positive Definitheit**, *d.h.* $(x,x)_H \geq 0$ *und* $(x,x)_H = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Skriptum S.8

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt ***Prä-Hilbertraum****. Ein Prä-Hilbertraum ist immer normiert bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm* $\|x\|_H := (x,x)_H^{\frac{1}{2}}$*. Falls der Raum* $\big(H,(\cdot,\cdot)_H\big)$ *bezüglich der induzierten Norm* $\|\cdot\|_H$ *vollständig ist, so nennt man ihn* ***Hilbertraum****.*

Skriptum S.8

Beispiele:

(i) $(\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot))$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(x,y) = \sum_{1=0}^{n} x_i y_i$.

(ii) $(L^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{L^2})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ist ein Hilbertraum, da $(f,g)_{L^2} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt ist und er vollständig ist, bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten $L^2(\Omega)$-Norm.

Ein Beispiel von einem Prä-Hilbertraum, welcher kein Hilbertraum ist, ist $(C(\overline{\Omega}), (\cdot,\cdot)_{L^2})$, denn dieser Raum ist nicht vollständig.

Skriptum S.8

Zusammenfassung

- Normierter Vektorraum, (N1,N2,N3)
- Beispiele $\mathbb{R}^n$, $L^p(\Omega)$
- Norm- oder starke Konvergenz, Vollständigkeit **Banach-Raum**
- Beispiele $L^p(\Omega)$, $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$; $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_p)$
- Operator: linear, beschränkt, stetig (in x_0)
- linear Operator: stetig $\Leftrightarrow$ stetig an 0 $\Leftrightarrow$ beschränkt
- $L(X, Y)$, Banachraum mit Y, Dualraum X^*
- Skalarprodukt, (S1,S2,S3), (Prä-)Hilbertraum (Bsp: L^2; $(C([a,b]); \langle .,. \rangle_{L^2})$)