

Soutenance stage technicien

Méthode du second ordre pour les équations compressibles d'Euler

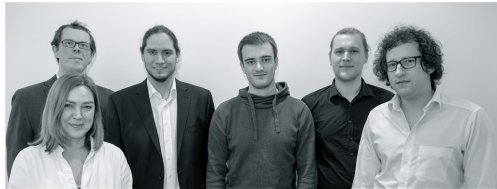
Timothée Schmoderer

INSA de Rouen Normandie

1^{er} septembre 2017

Introduction

L'université & l'équipe



Introduction

Le projet

Objectifs

- ▶ Documentation sur les méthodes numériques en mécanique des fluides.
- ▶ Implémentation d'une méthode
- ▶ Test de la méthode (ordre de convergence, exemples)
- ▶ Amélioration de la méthode pour des maillages non réguliers

Équations des gaz d'Euler

Conservation des grandeurs physiques

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ P + \rho u^2 \\ u(E + P) \end{pmatrix} = 0 \quad \forall x \in \Omega, \forall t \geq 0$$

Equation d'état

$$E = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{\rho u^2}{2} \quad \forall x \in \Omega, \forall t \geq 0$$

Équations des gaz d'Euler

- ▶ ρ est la densité du fluide en tout point.
- ▶ P est la pression interne.
- ▶ u est la vitesse du fluide (positive si on va vers la droite, négative sinon).
- ▶ E L'énergie contenue dans le fluide.

Vitesse du son

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad \forall x \in \Omega, \forall t \geq 0$$

Équations des gaz d'Euler

- ▶ ρ est la densité du fluide en tout point.
- ▶ P est la pression interne.
- ▶ u est la vitesse du fluide (positive si on va vers la droite, négative sinon).
- ▶ E L'énergie contenue dans le fluide.

Vitesse du son

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad \forall x \in \Omega, \forall t \geq 0$$

Conditions aux limites

On choisi un domaine $\Omega = [a, b]$.

► Périodique

$$\Phi(a, t) = \Phi(b, t) \quad \Phi = u, \rho \text{ and } P$$

► Murs

$$u(a, t) = u(b, t) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(a, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(b, t) = 0 \quad \Phi = \rho \text{ and } P$$

Conditions aux limites

On choisi un domaine $\Omega = [a, b]$.

► Périodique

$$\Phi(a, t) = \Phi(b, t) \quad \Phi = u, \rho \text{ and } P$$

► Murs

$$u(a, t) = u(b, t) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(a, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(b, t) = 0 \quad \Phi = \rho \text{ and } P$$

Conditions aux limites

On choisi un domaine $\Omega = [a, b]$.

► Entrée

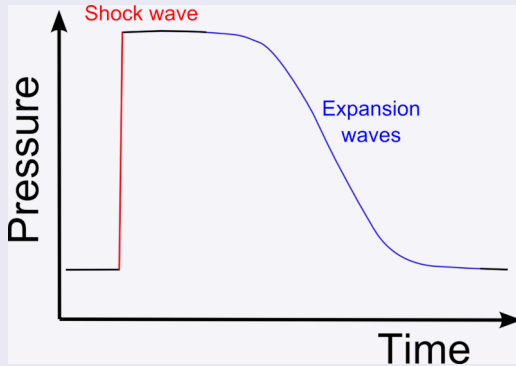
$$\Phi(x_B, t) = \Phi_{in}(t) \quad \Phi = u, \rho \text{ and } P$$

► Sortie

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_B, t) = 0 \quad \Phi = u, \rho \text{ and } P$$

Problème des ondes de chocs

Problème des ondes de chocs



Forme général pour les systèmes hyperboliques

Soient $U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}$ et $f(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ P + \rho u^2 \\ u(E + P) \end{pmatrix}$.

Alors notre système se réécrit sous la forme générique suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0$$

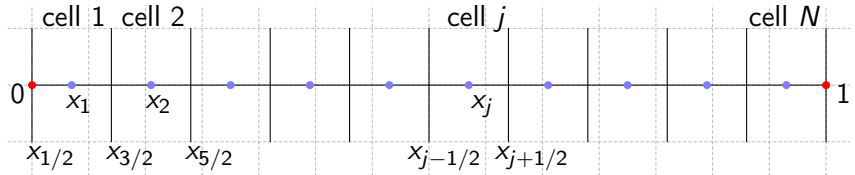
Exemple

Par exemple, si f est l'identité : $f : u \mapsto u$, on obtient l'équation d'advection.

$$u_t + u_x = 0$$

Le maillage de Ω

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on subdivise Ω en N cellules de longueur Δx constante. On note x_j le centre de la cellule j et $x_{j \pm 1/2}$ les interfaces : $x_j \pm \frac{\Delta x}{2}$.



Algorithme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dU_j}{dt} = - \frac{\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}}{\Delta x} \quad j = 1, \dots, N$$

- Nous calculons le rayon spectral, a_j , de la matrice Jacobienne de f en $x = x_j$. Un calcul analytique nous donne :

$$a_j = |u_j| + c_j$$

- Nous séparons la fonction de flux f en deux :

$$f(U_j) = f_j^+ + f_j^- \quad f_j^\pm = \frac{1}{2} (f(U_j) \pm a_j U_j)$$

Algorithme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dU_j}{dt} = - \frac{\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}}{\Delta x} \quad j = 1, \dots, N$$

- Nous calculons le rayon spectral, a_j , de la matrice Jacobienne de f en $x = x_j$. Un calcul analytique nous donne :

$$a_j = |u_j| + c_j$$

- Nous séparons la fonction de flux f en deux :

$$f(U_j) = f_j^+ + f_j^- \quad f_j^\pm = \frac{1}{2} (f(U_j) \pm a_j U_j)$$

Algorithme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dU_j}{dt} = -\frac{\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}}{\Delta x} \quad j = 1, \dots, N$$

- Nous calculons les pentes dans chaque cellules avec la fonction **minmod** :

$$(f_x)_j^\pm = \text{minmod} \left(\theta \frac{f_j^\pm - f_{j-1}^\pm}{\Delta x}, \frac{f_{j+1}^\pm - f_{j-1}^\pm}{2\Delta x}, \theta \frac{f_{j+1}^\pm - f_j^\pm}{\Delta x} \right) \quad \theta = 1.5$$

La fonction **minmod** est définie par :

$$\text{minmod}(a, b, c) = \begin{cases} \min(a, b, c) & \text{si } a > 0, b > 0 \text{ et } c > 0 \\ \max(a, b, c) & \text{si } a < 0, b < 0 \text{ et } c < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Algorithme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dU_j}{dt} = - \frac{\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}}{\Delta x} \quad j = 1, \dots, N$$

- Nous construisons f^E et f^W :

$$f_j^E = f_j^+ + \frac{\Delta x}{2} (f_x)_j^+ \quad f_j^W = f_j^- - \frac{\Delta x}{2} (f_x)_j^-$$

- Au final :

$$\hat{f}_{j+1/2} = f_j^E + f_{j+1}^W \quad \hat{f}_{j-1/2} = f_{j-1}^E + f_j^W$$

Algorithme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dU_j}{dt} = - \frac{\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}}{\Delta x} \quad j = 1, \dots, N$$

- Nous construisons f^E et f^W :

$$f_j^E = f_j^+ + \frac{\Delta x}{2} (f_x)_j^+ \quad f_j^W = f_j^- - \frac{\Delta x}{2} (f_x)_j^-$$

- Au final :

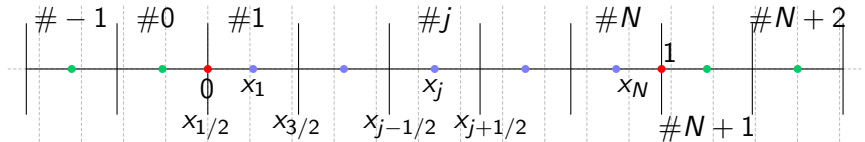
$$\hat{f}_{j+1/2} = f_j^E + f_{j+1}^W \quad \hat{f}_{j-1/2} = f_{j-1}^E + f_j^W$$

Où appliquer la méthode ?

Au milieu du domaine \implies Aucun problèmes

Calcul de $\hat{f}_{1/2} \implies f_0^E$

Calcul de $f_0^E \implies f_{-1}^\pm$



Résumé de la méthode

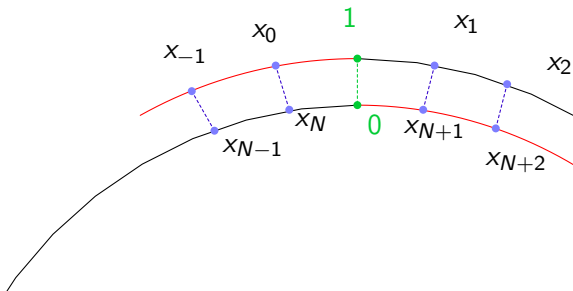
Cellule	-1	0	1	2	...	j	...	$N-1$	N	$N+1$	$N+2$
a_j	★	★	★	★
f^\pm	★	★	★	★
$f_j^\pm - f_{j-1}^\pm$		★	★	
$f_{j+1}^\pm - f_{j-1}^\pm$		★	★	
$f_{j+1}^\pm - f_j^\pm$		★	★	
$(f_x)^\pm$		★	★	
f^E		★	★	
f^W		★	★	
$\hat{f}_{j+1/2}$				
$\hat{f}_{j-1/2}$				
$\frac{dU_j}{dt}$				

Conditions aux bords de Ω

Conditions périodiques

On déduit facilement les conditions pour le vecteur d'état :

$$U_0 = U_N \quad U_{-1} = U_{N-1}$$



Conditions aux bords de Ω

Conditions murs

Ces conditions s'expriment sous la forme suivante pour le vecteur d'état :

$$U_0 = \begin{pmatrix} U_1^1 \\ -U_1^2 \\ U_1^3 \end{pmatrix} \quad U_{-1} = \begin{pmatrix} U_2^1 \\ -U_2^2 \\ U_2^3 \end{pmatrix}$$

Où l'exposant dénote la i-ème composante.

Intégration du schéma

Schéma d'Euler

$$\frac{dU_j}{dt} \approx \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t}$$

La version finale du schéma :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2} \right)$$

Conditions de Courant

$$\begin{aligned} \frac{a \Delta t}{\Delta x} &\leq 1 \\ \Rightarrow \Delta t^n &= \frac{\Delta x}{a^n} \quad \forall n > 0 \end{aligned}$$

Intégration du schéma

Schéma SSP-RK3

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t^n L(u^n)$$

$$u^{(2)} = \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t^n L(u^{(1)})$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t^n L(u^{(2)})$$

Avec la même conditions de Courant.

Structure de données

Octave

- + Portabilité
- + Facilité de manipulation
- Lenteur

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.025 & 2500 & 2500 & 0.025 & \dots & 0.025 & 250 & 250 & 0.025 \end{pmatrix}$$

Exemple d'implémentation

La fonction de flux

```
function y = f(U,gamma)
    % Density
    rho = U(1,:);
    % Velocity
    v = U(2,:)./rho;
    % Energy
    E = U(3,:);
    % Pressure
    P = (gamma-1)*(E-0.5*rho.*v.*v);
    % Flux
    y = U.*v+[zeros(size(P));P;P.*v];
end
```

Exemple d'implémentation

La fonction minmod

```
function y = minmod(a,b,c)
    y = zeros(size(a));
    % Index where the three numbers are positive
    iM = find(a > 0 & b > 0 & c > 0);
    y(iM) = min(min(a(iM),b(iM)),c(iM));
    % Index where the three numbers are negative
    im = find(a < 0 & b < 0 & c < 0);
    y(im) = max(max(a(im),b(im)),c(im));
end
```

Méthode des solutions fabriquées

Construction de la solution

Soit $q(x, t) \in \mathbb{R}^3$ une fonction lisse que l'on introduit dans les équations d'Euler :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f(q)}{\partial x} = \mathcal{S}$$

Problème modifié

On considère à présent le problème modifié :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} &= \mathcal{S} \\ U(x, 0) &= q(x, 0)\end{aligned}$$

Conditions aux bords périodiques

Méthode des solutions fabriquées

Construction de la solution

Soit $q(x, t) \in \mathbb{R}^3$ une fonction lisse que l'on introduit dans les équations d'Euler :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f(q)}{\partial x} = \mathcal{S}$$

Problème modifié

On considère à présent le problème modifié :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} &= \mathcal{S} \\ U(x, 0) &= q(x, 0) \end{aligned}$$

Conditions aux bords périodiques

Méthode des solutions fabriquées

Cas 2

$$q = \begin{cases} \rho(x, t) &= 2 + 0.1 \sin(2\pi(x - t)) \\ u(x, t) &= 1 \\ E(x, t) &= 2 + 0.1 \cos(2\pi(x - t)) \end{cases}$$

Terme source :

$$\mathcal{S}(x, t) = (1 - \gamma)\pi(2\rho(x, t) + E(x, t) - 6) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Méthode des solutions fabriquées

Ordre de convergence de la méthode avec une solution préfabriquée

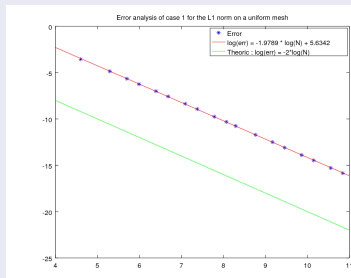


Figure – Ordre en norme L^1

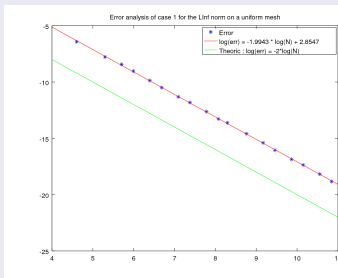


Figure – Ordre en norme L^∞

Expérience de Sod

Le Problème

$$u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

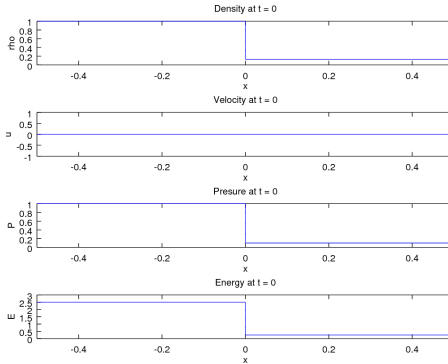
$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 1.0 & x \in [0, 0.5] \\ 0.125 & x \in [0.5, 1] \end{cases}$$

$$P(x, 0) = \begin{cases} 1.0 & x \in [0, 0.5] \\ 0.1 & x \in [0.5, 1] \end{cases}$$

Avec des conditions de type murs.

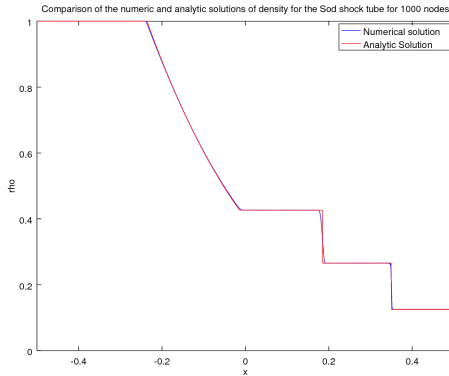
Expérience de Sod

Conditions initiales



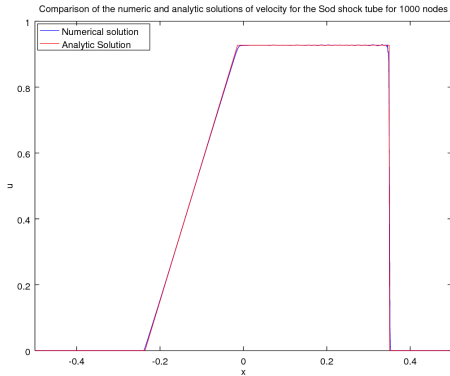
Expérience de Sod

Résultats en densité



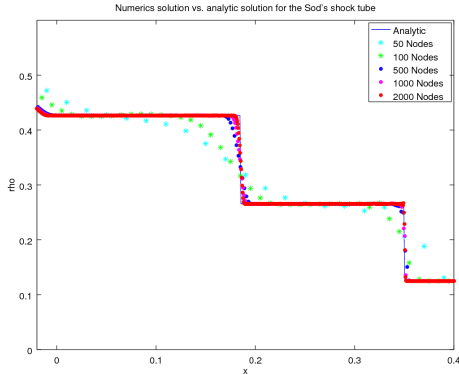
Expérience de Sod

Résultats en vitesse



Expérience de Sod

Résultats en densité avec plusieurs maillages



Double interaction

Le Problème

$$u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

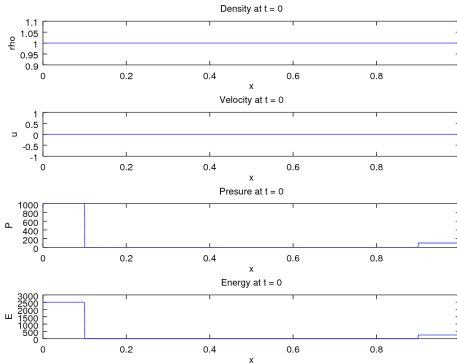
$$\rho(x, 0) = 1 \quad \forall x \in \Omega$$

$$P(x, 0) = \begin{cases} 1000 & x \in [0, 0.1] \\ 0.01 & x \in [0.1, 0.9] \\ 100 & x \in [0.9, 1] \end{cases}$$

Avec des conditions de type murs.

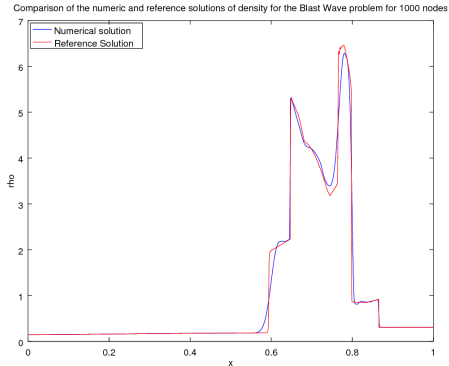
Double interaction

Conditions initiales



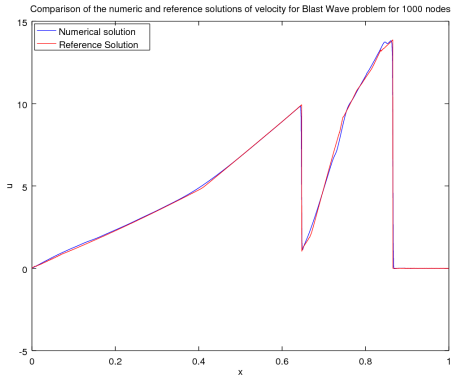
Double interaction

Résultats en densité



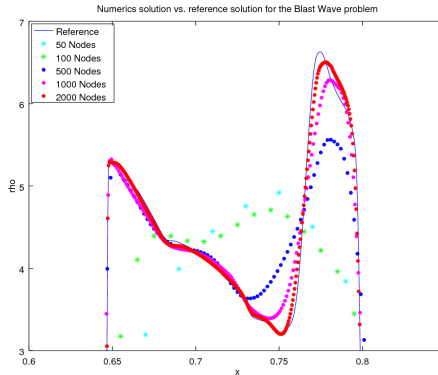
Double interaction

Résultats en vitesse



Double interaction

Résultats en densité avec plusieurs maillages



Expérience de Shu et Osher

Le Problème

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2.629369 & x \in [0, 0.125] \\ 0 & x \in [0.125, 1] \end{cases}$$

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 3.857143 & x \in [0, 0.125] \\ 1 + 0.2 \sin(20\pi x) & x \in [0.125, 1] \end{cases}$$

$$P(x, 0) = \begin{cases} 31/3 & x \in [0, 0.125] \\ 1 & x \in [0.125, 1] \end{cases}$$

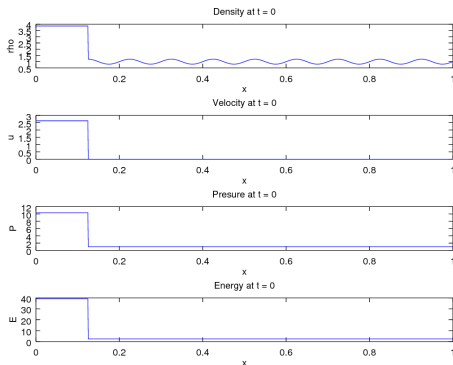
Avec des conditions d'entrée à gauche :

$$u(0, t) = 2.629369 \quad \rho(0, t) = 3.857143 \quad P(0, t) = 31/3$$

et de sortie à droite.

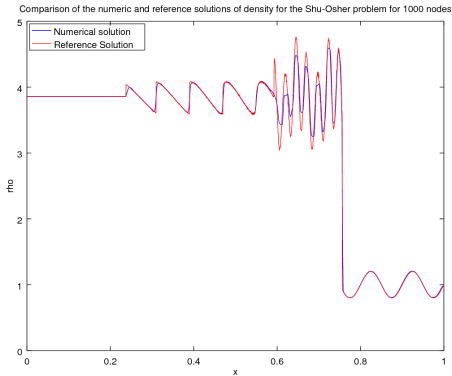
Expérience de Shu et Osher

Conditions initiales



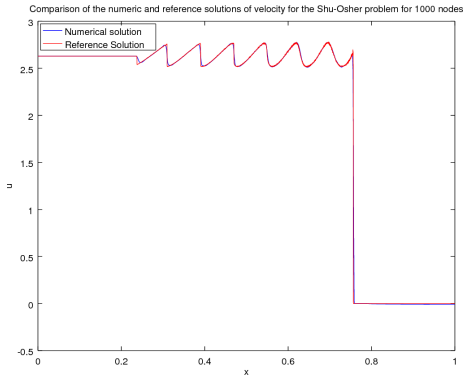
Expérience de Shu et Osher

Résultats en densité



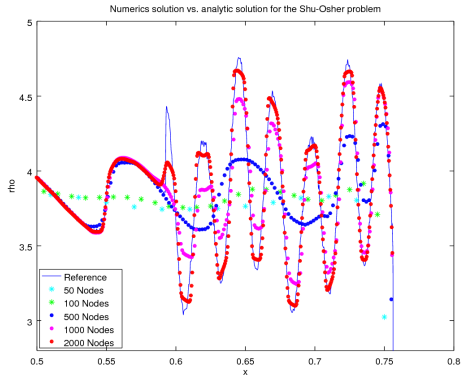
Expérience de Shu et Osher

Résultats en vitesse



Expérience de Shu et Osher

Résultats en densité avec plusieurs maillages



Polynômes de Legendre

Définition

$$P_0(x) = 1 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$P_1(x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Les noeuds

Définition

$$-1 = x_1 < x_i : P'_{n-1}(x_i) = 0 \quad i \in \llbracket 2, N-1 \rrbracket < x_N = 1$$

Qui sont facilement transposable à $[a, b]$ avec la formule :

$$x'_i = \frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}$$

Les noeuds

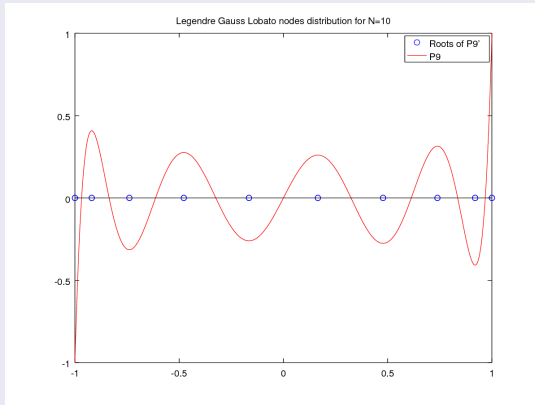
Calcul des nœuds - méthode de Haylley

$$x_0 = \left[-1, \left(1 - \frac{3(N-1)}{8N^3} \right) \cos \left(\frac{4j+1}{4N+1} \pi \right), 1 \right] \quad j \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$$

$$x_{n+1} = x_n - 2 * \frac{P'_{n-1}(x_n) P''_{n-1}(x_n)}{2[P''_{n-1}(x_n)]^2 - P'_{n-1}(x_n) P'''_{n-1}(x_n)}$$

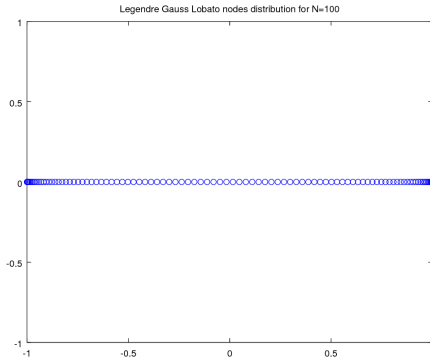
Les noeuds

Calcul des noeuds - méthode de Haylley



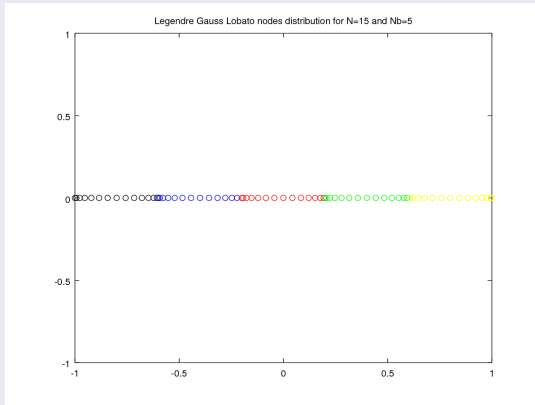
Les noeuds

Calcul des noeuds - méthode de Haylley



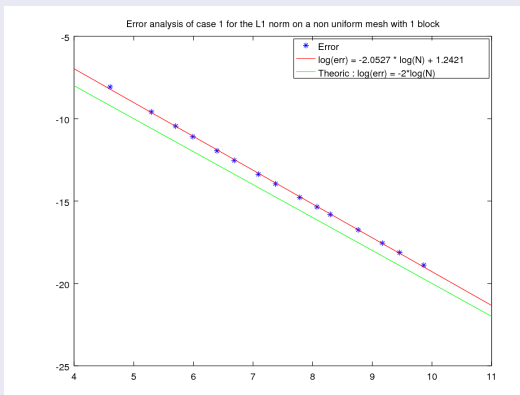
Les noeuds

Calcul des noeuds - méthode de Haylley



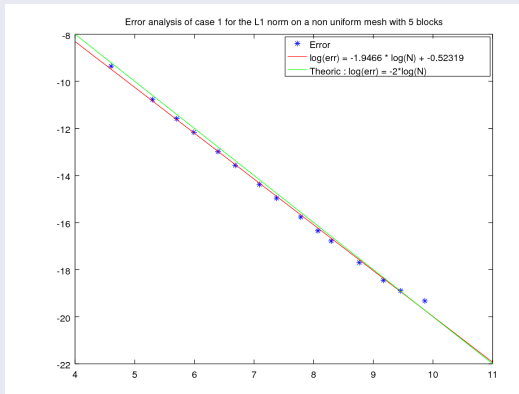
Ordre sur les maillages non réguliers

Méthode des solutions fabriquées



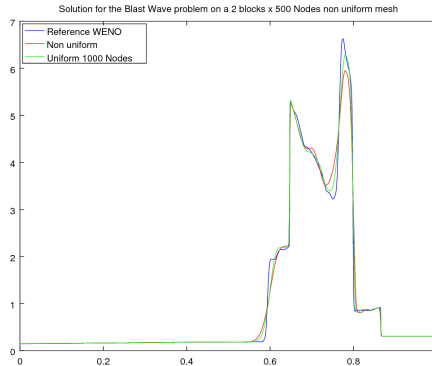
Ordre sur les maillages non réguliers

Méthode des solutions fabriquées



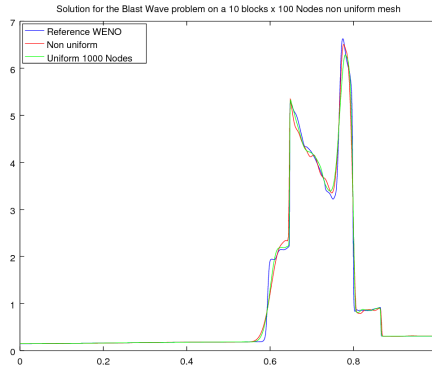
Double vague interaction

Résultats en densité avec 2 blocs de 500 nœuds



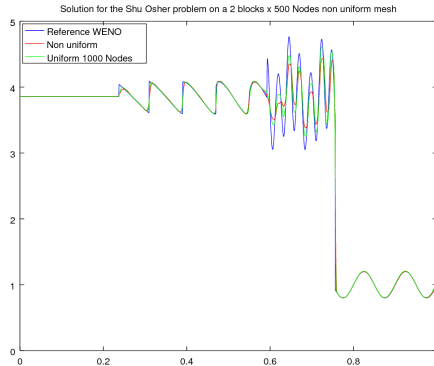
Double vague interaction

Résultats en densité avec 10 blocs de 100 nœuds



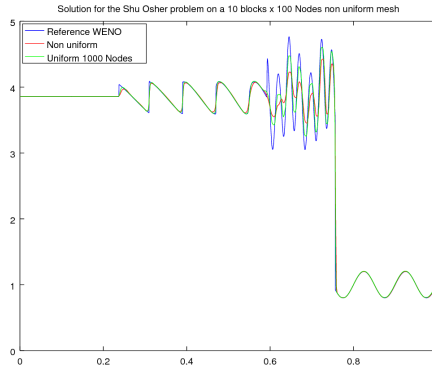
Expérience de Shu & Osher

Résultats en densité avec 2 blocs de 500 nœuds



Expérience de Shu & Osher

Résultats en densité avec 10 blocs de 100 nœuds



Conclusion

Résumé

Conclusion

Apports personnels

Conclusion

Ouvertures