



Le transport optimal et ses applications

Gabriel Peyré

www.numerical-tours.com



Transport Optimal

Monge



Kantorovich



Dantzig



Brenier



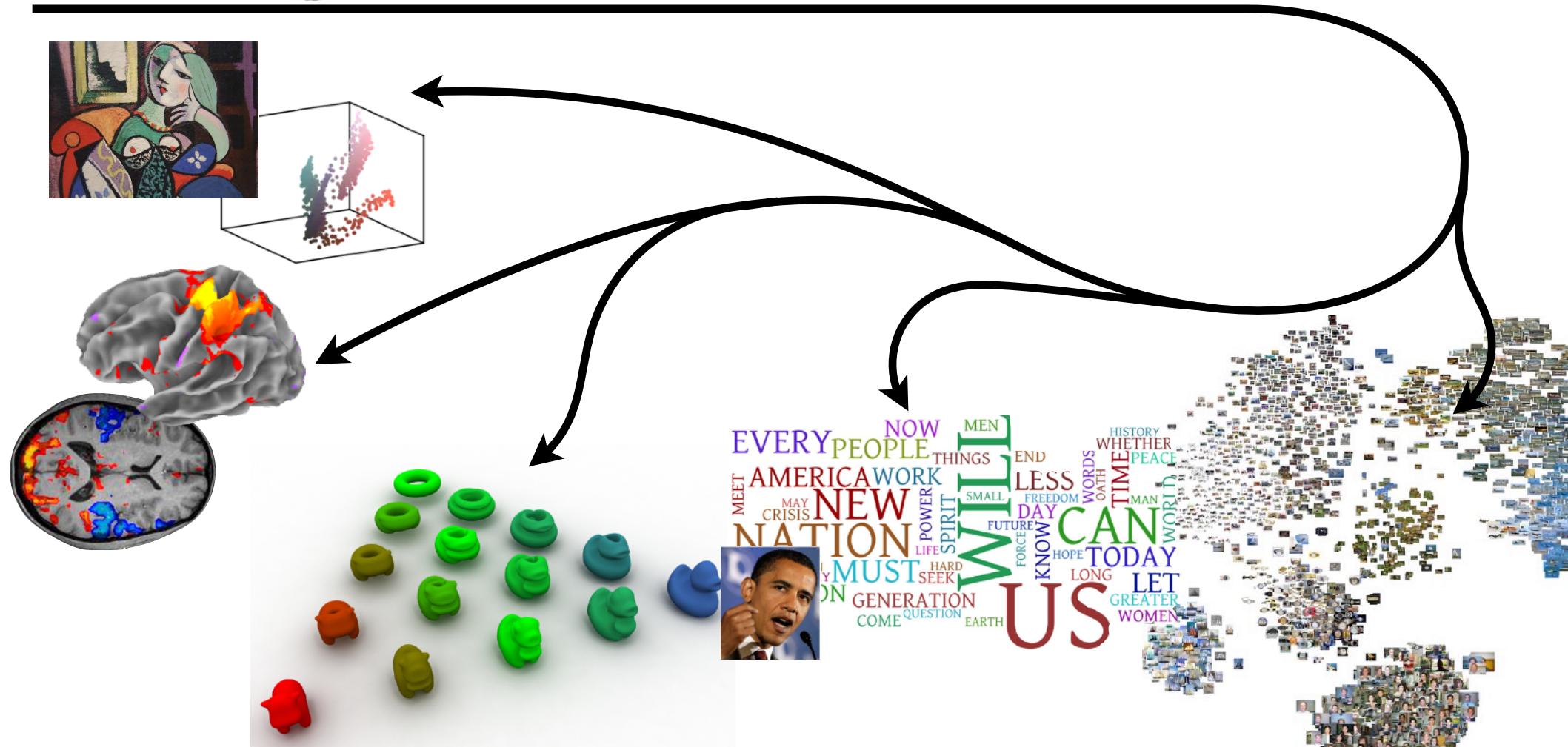
Otto



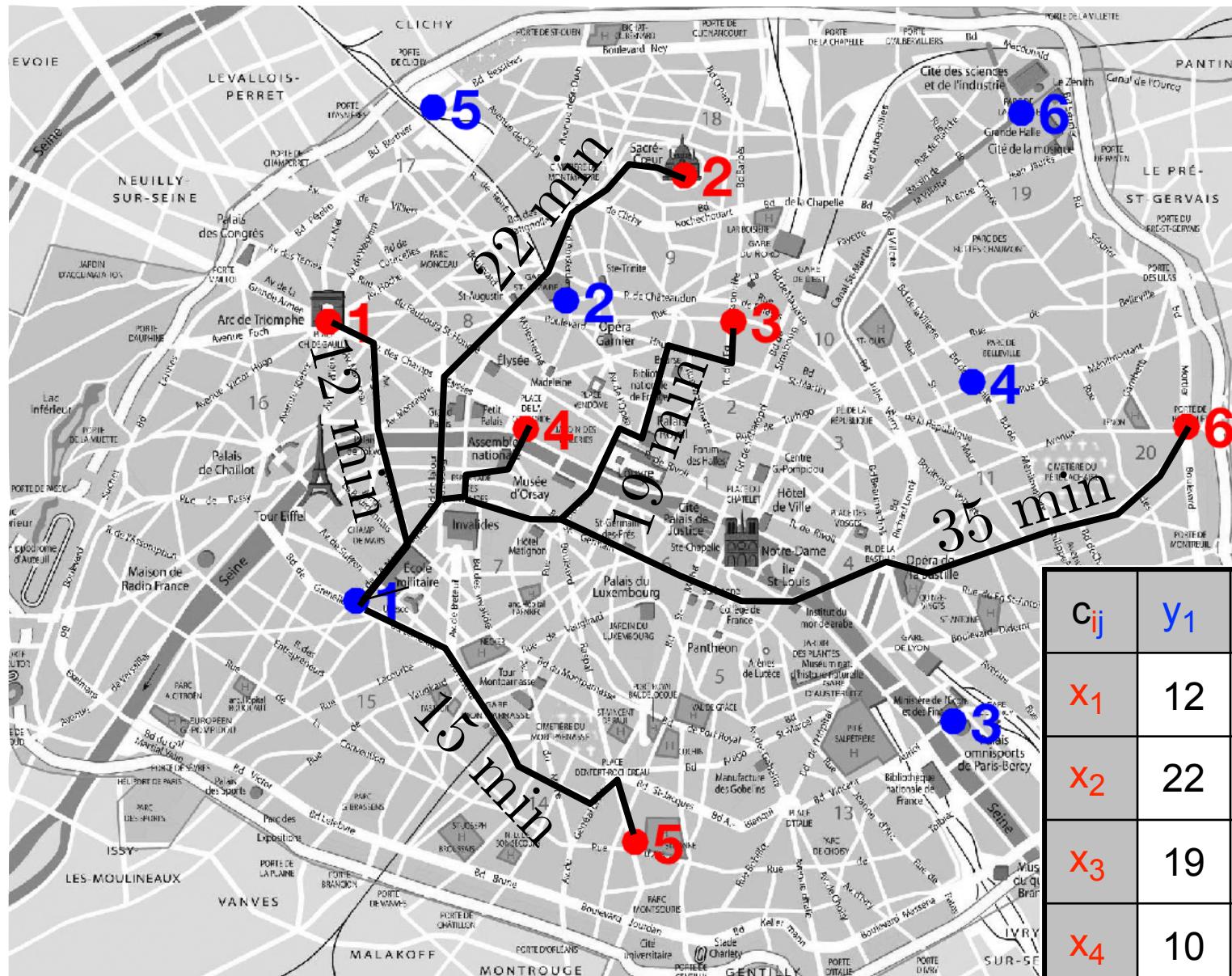
McCann



Villani



Des fournisseurs aux boulangeries



c_{ij}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	12	10	31	27	10	30
x_2	22	7	25	15	11	14
x_3	19	7	19	10	15	15
x_4	10	6	21	19	14	24
x_5	15	23	14	24	31	34
x_6	35	26	16	9	34	15

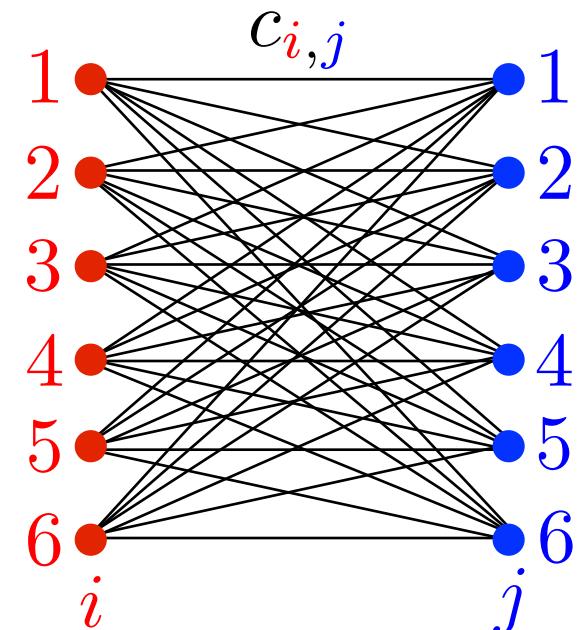
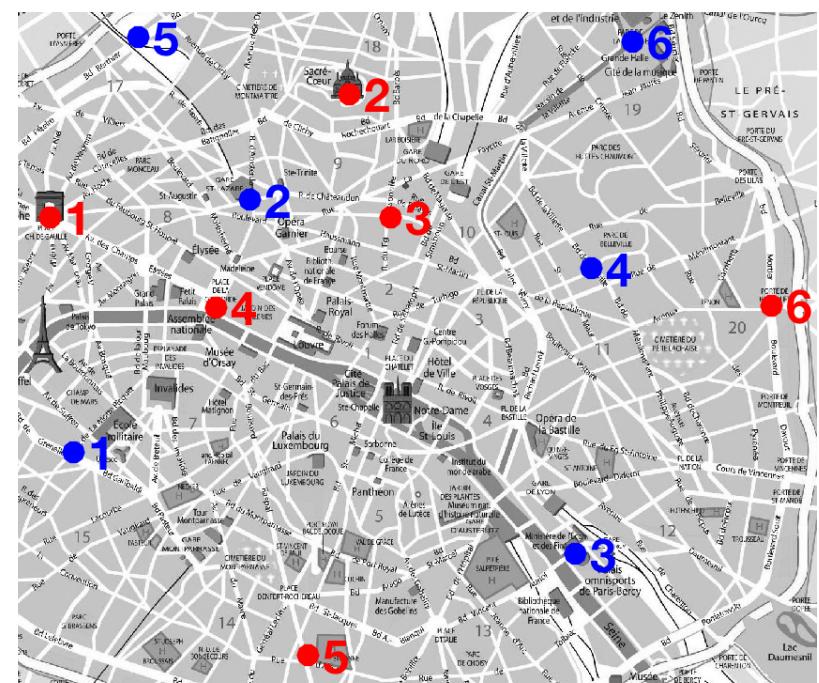
Le problème d'affectation optimale

Objets ou points $(x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^n$.

Cout de transport $c_{i,j}$ entre i et j .

Affectation: $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

pour tout j , il existe $i, \sigma(i) = j$



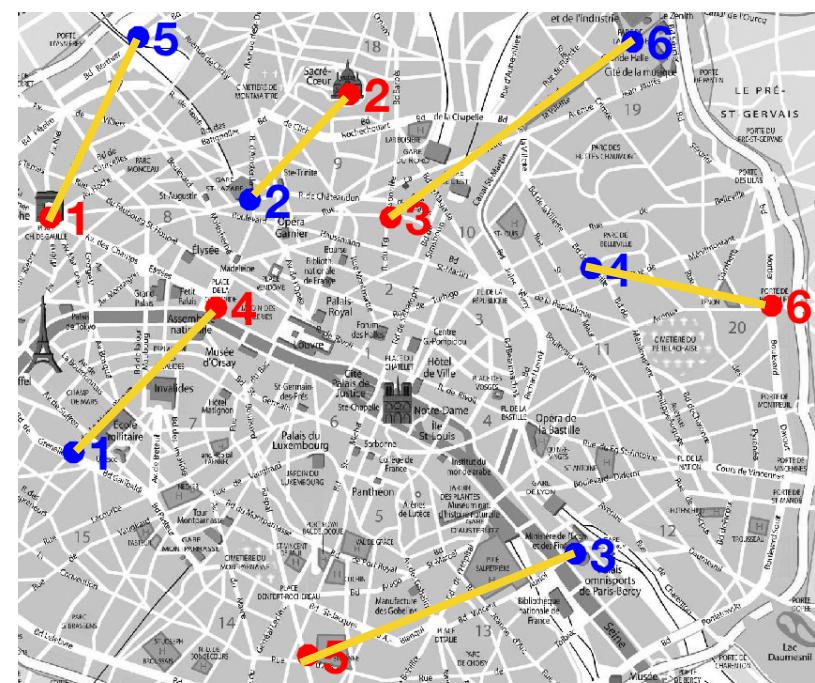
Le problème d'affectation optimale

Objets ou points $(x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^n$.

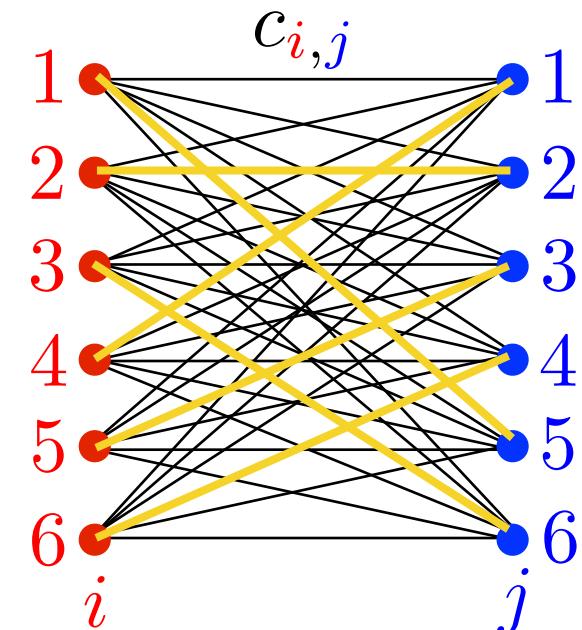
Cout de transport $c_{i,j}$ entre i et j .

Affectation: $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

pour tout j , il existe $i, \sigma(i) = j$



c_{ij}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	12	10	31	27	10	30
x_2	22	7	25	15	11	14
x_3	19	7	19	10	15	15
x_4	10	6	21	19	14	24
x_5	15	23	14	24	31	34
x_6	35	26	16	9	34	15



Cout:
 $10 + 7 + 15 + 10 + 14 + 9$
 $= 65 \text{ min}$

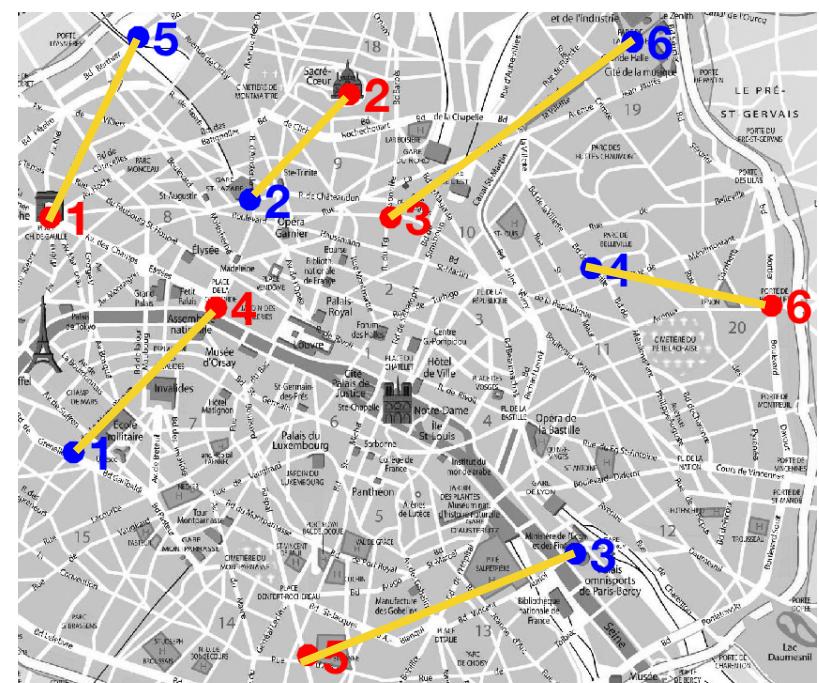
Le problème d'affectation optimale

Objets ou points $(x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^n$.

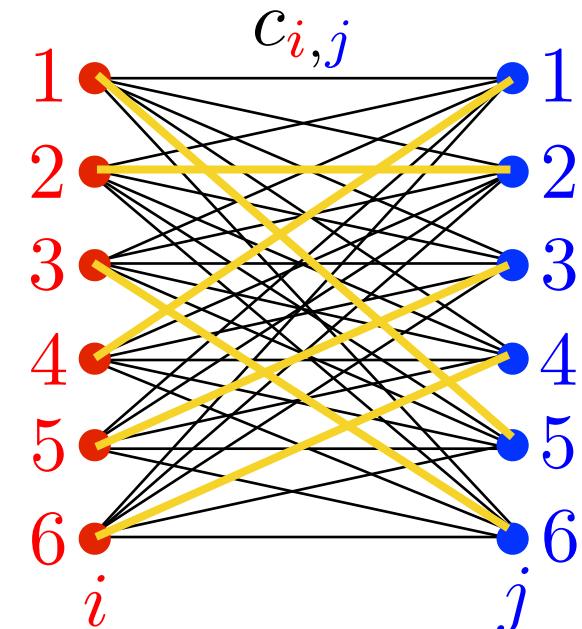
Cout de transport $c_{i,j}$ entre i et j .

Affectation: $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

pour tout j , il existe $i, \sigma(i) = j$



c_{ij}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	12	10	31	27	10	30
x_2	22	7	25	15	11	14
x_3	19	7	19	10	15	15
x_4	10	6	21	19	14	24
x_5	15	23	14	24	31	34
x_6	35	26	16	9	34	15

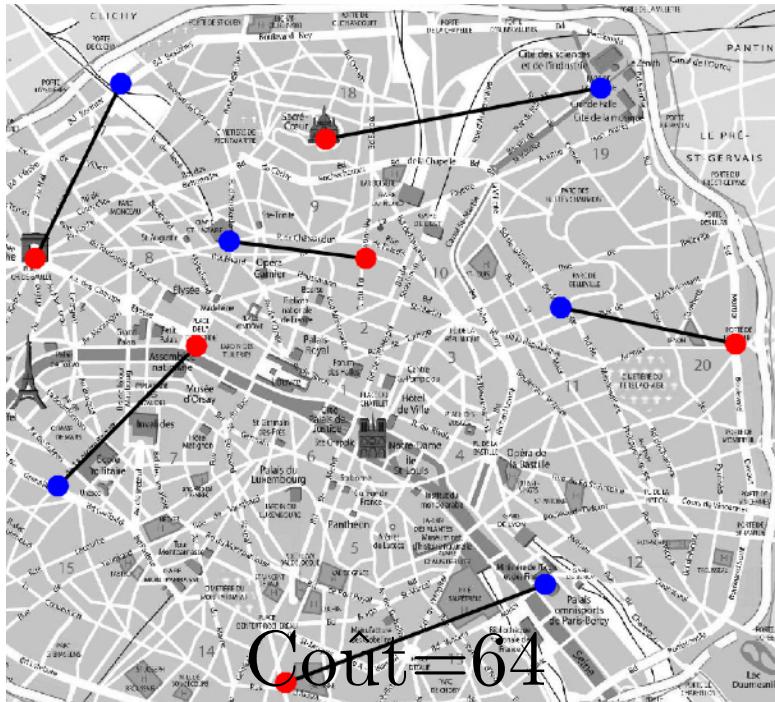


Cout:
 $10 + 7 + 15 + 10 + 14 + 9$
 $= 65 \text{ min}$

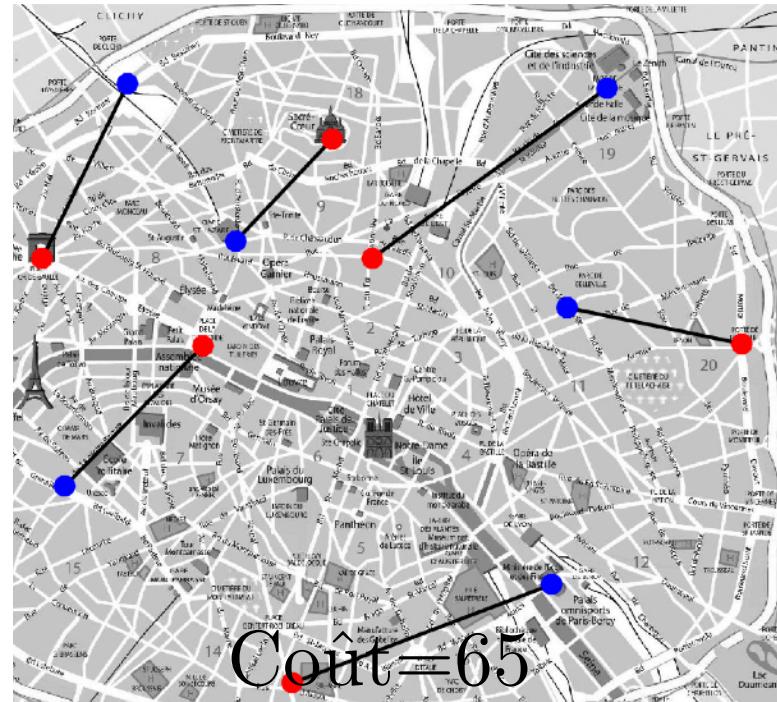
Affectation optimale :

$$\min_{\sigma} \sum_{i=1}^n c_{i,\sigma(i)}$$

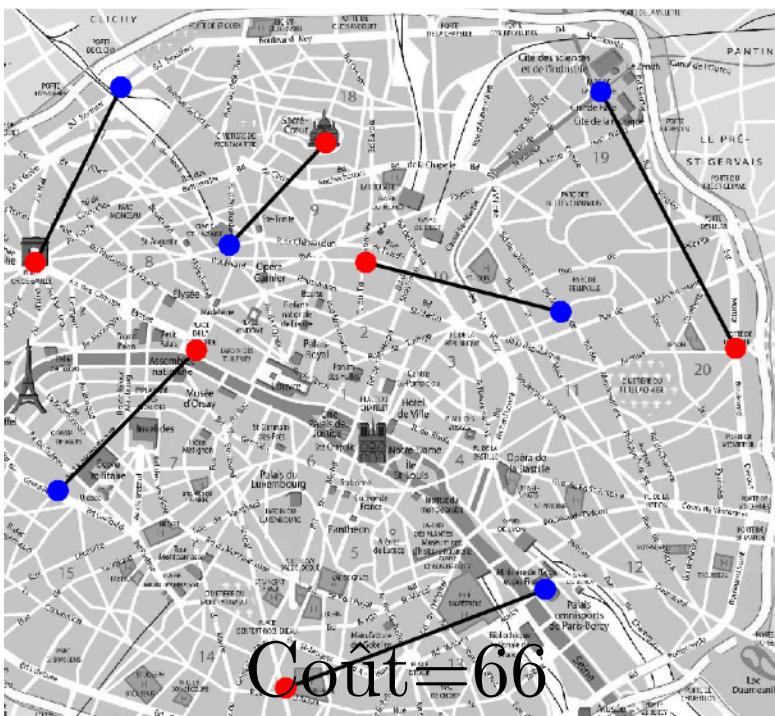
Du meilleur ... au moins bon



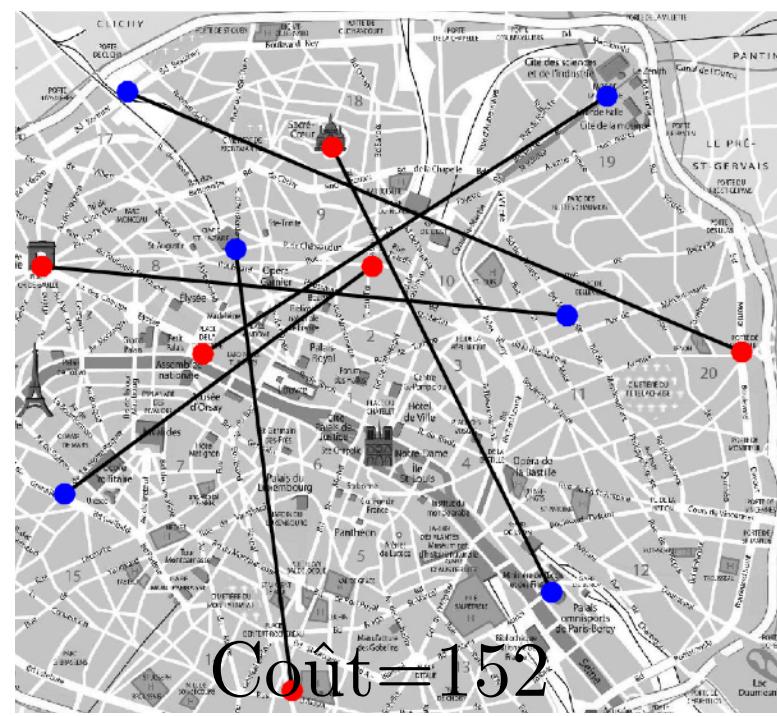
Cout=64



Cout=65



Cout=66



Cout=152

Gaspard Monge (1746-1818)

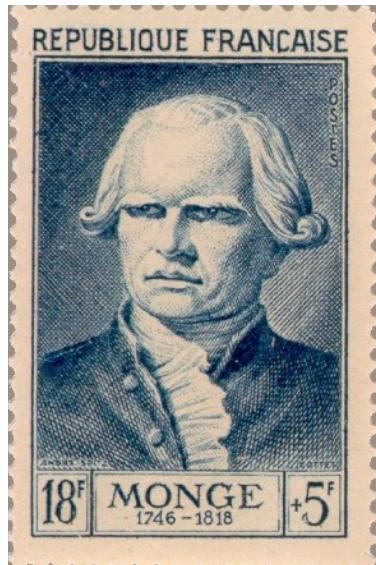
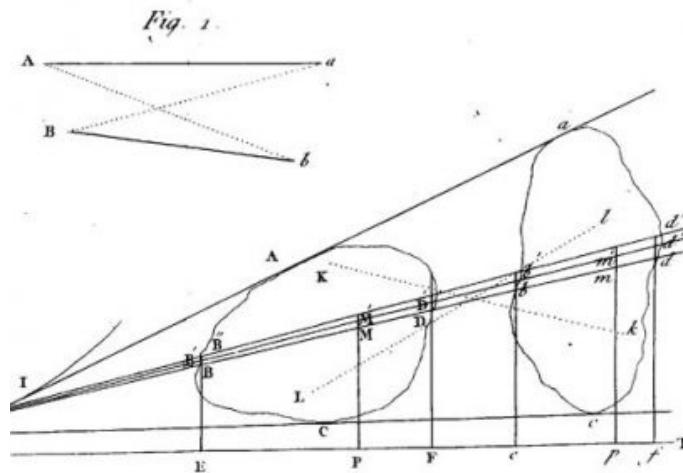
Il joue un grand rôle dans la Révolution française, tant du point de vue politique que du point de vue de l'instauration d'un nouveau système éducatif : il participe à la création de l'École normale de l'an III et de l'École polytechnique (en 1794), deux écoles où il enseigne la géométrie. Il concourt également avec Berthollet, Chaptal et Laplace à la création de l'École d'arts et métiers. Il est également membre de la commission des sciences et des arts lors de la campagne d'Italie (1796–1797), et chargé de mission dans l'expédition d'Égypte (1798–1799).

*MÉMOIRE
SUR LA
THÉORIE DES DÉBLAIS
ET DES REMBLAIS.*
Par M. MONGE.

Lorsqu'on doit transporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutume de donner le nom de *Déblai* au volume des terres que l'on doit transporter, & le nom de *Remblai* à l'espace qu'elles doivent occuper après le transport.

Le prix du transport d'une molécule étant, toutes choses d'ailleurs égales, proportionnel à son poids & à l'espace qu'on lui fait parcourir, & par conséquent le prix du transport total devant être proportionnel à la somme des produits des molécules multipliées chacune par l'espace parcouru, il s'enfuit que le déblai & le remblai étant donnés de figure & de position, il n'est pas indifférent que telle molécule du déblai soit transportée dans tel ou tel autre endroit du remblai, mais qu'il y a une certaine distribution à faire des molécules du premier dans le second, d'après laquelle la somme de ces produits sera la moindre possible, & le prix du transport total fera un *minimum*.

Mém. de l'Ac. R. des Sc. An. 1781. Page. 704. Pl. XVII



Nombre de Possibilités

De 1 vers: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

De 2 vers: 2, 3, 4, 5, 6.

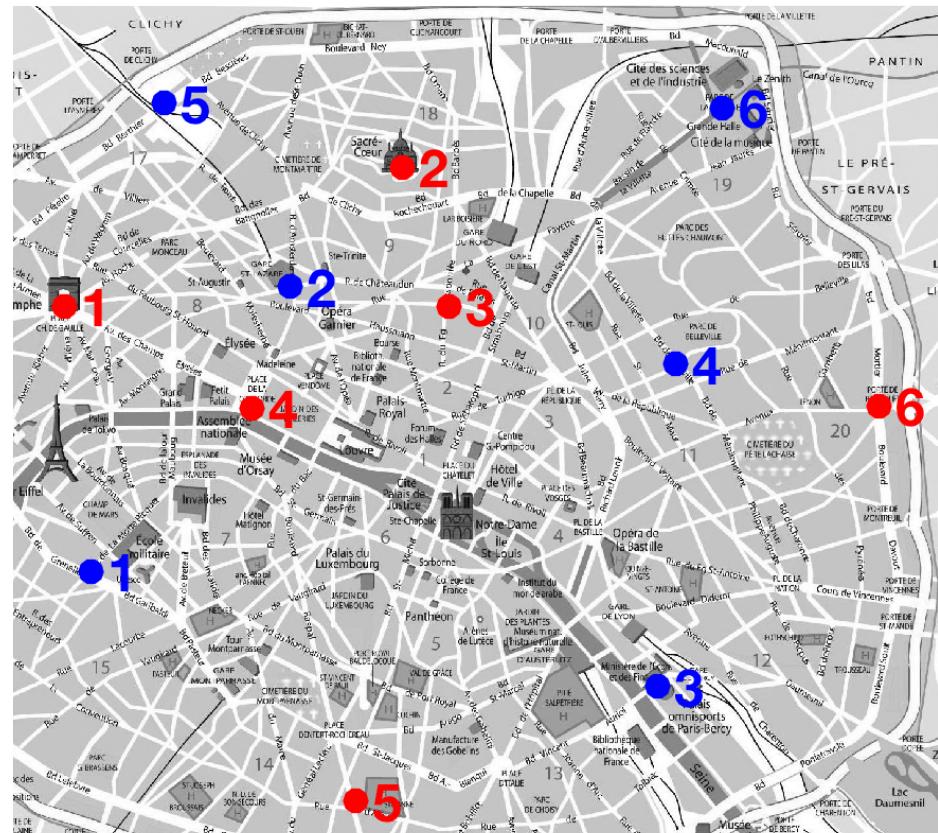
De 3 vers: 3, 4, 5, 6.

De 4 vers: 4, 5, 6.

De 5 vers: 5, 6.

De 6 vers: 6.

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$



Nombre de Possibilités

De 1 vers: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

De 2 vers: 2, 3, 4, 5, 6.

De 3 vers: 3, 4, 5, 6.

De 4 vers: 4, 5, 6.

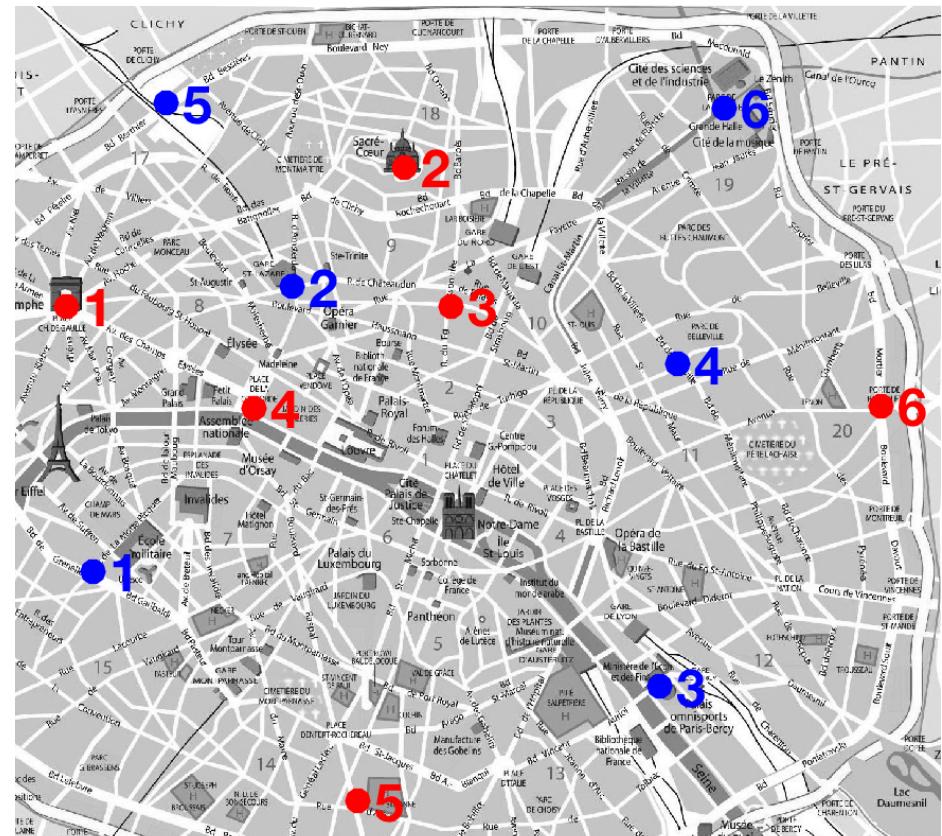
De 5 vers: 5, 6.

De 6 vers: 6.

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320

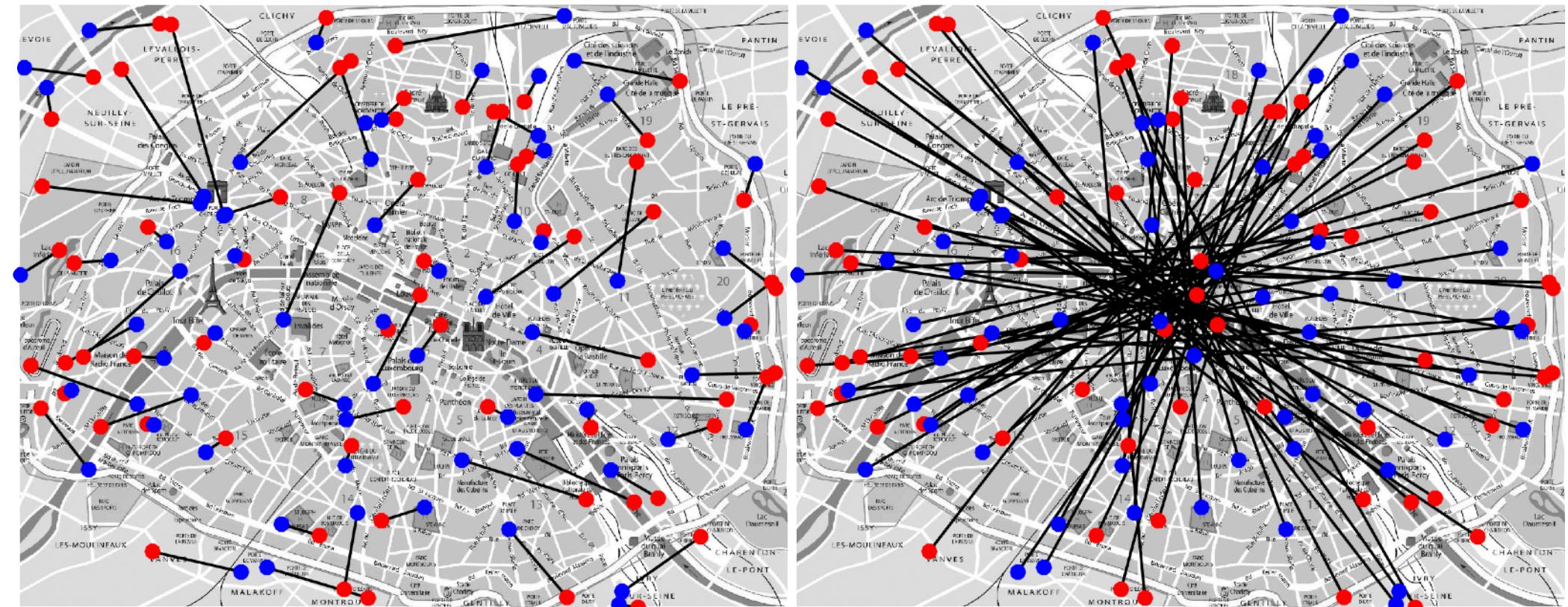
n	$n!$
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
...	...
25	1,551x1025
...	...
70	1,198x10100



Atomes dans l'univers: 10^{79}
 Neurones dans le cerveau: 10^{11} .



Exemples n=70

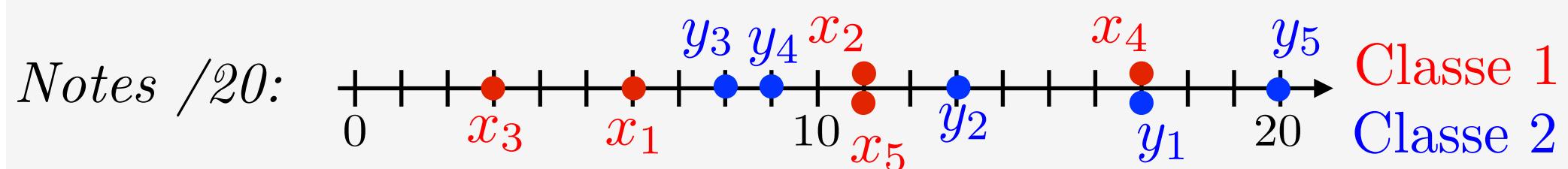


Cout=200

Cout=1493

En dimension 1

Le cas 1D: $x_i, y_j \in \mathbb{R}$ $c_{i,j} = |x_i - y_j|$



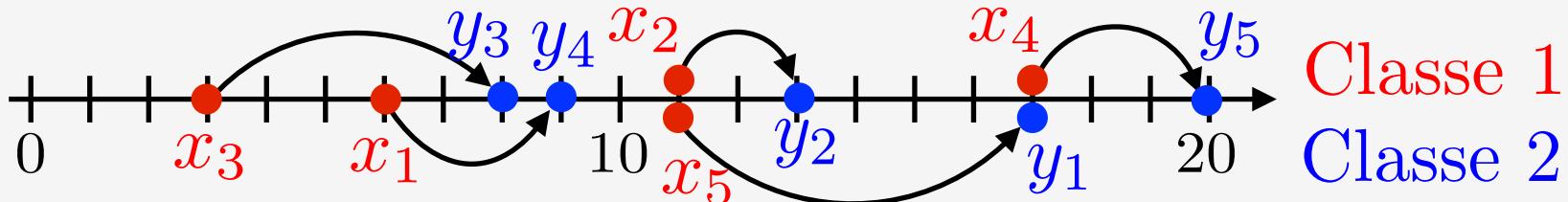
Ligne metro



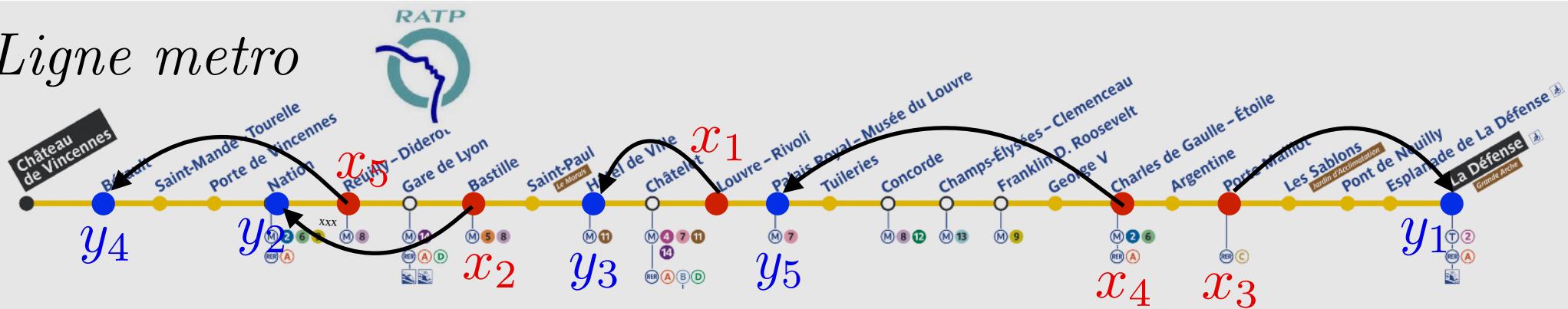
En dimension 1

Le cas 1D: $x_i, y_j \in \mathbb{R}$ $c_{i,j} = |x_i - y_j|$

Notes /20:



Ligne metro

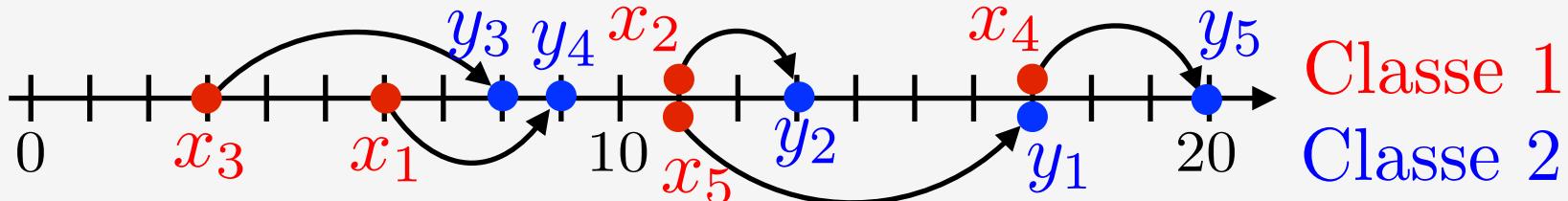


→ Solution: classer les $(x_i)_i, (y_j)_j$ par ordre croissant.

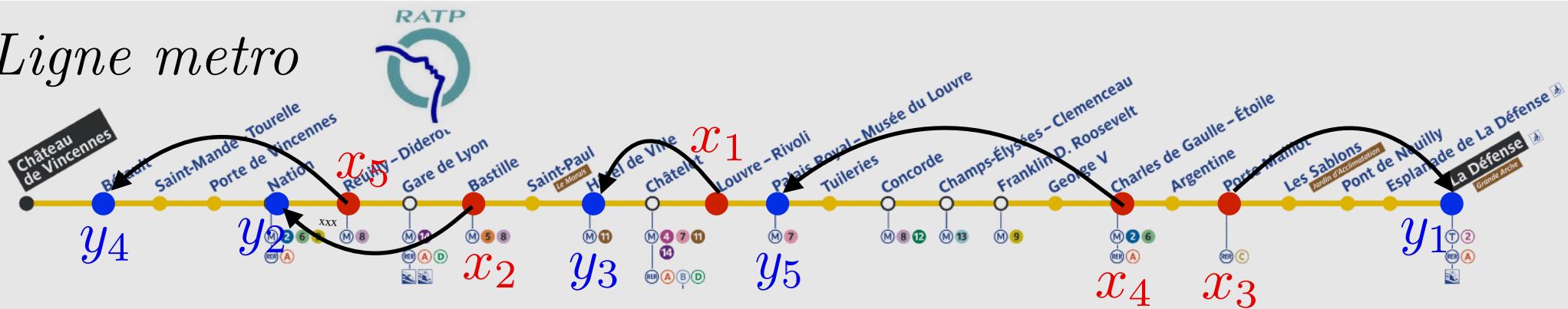
En dimension 1

Le cas 1D: $x_i, y_j \in \mathbb{R}$ $c_{i,j} = |x_i - y_j|$

Notes /20:



Ligne metro



→ Solution: classer les $(x_i)_i, (y_j)_j$ par ordre croissant.

Algorithmes de tri: par selection, pire cas $n(n - 1)/2$ opérations.

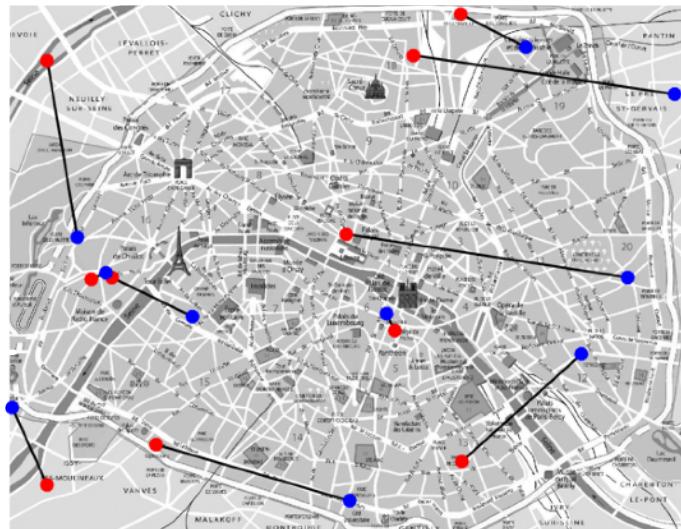
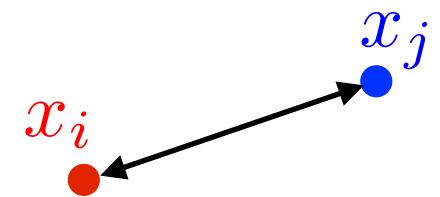
n	$n !$	$n(n-1)/2$	$n \log(n)$
10	3628800	45	23
11	39916800	55	26
12	479001600	66	30
25	$1,551 \times 10^{25}$	300	80
70	$1,198 \times 10^{100}$	21415	297

Tri rapide: $n \log(n)$.

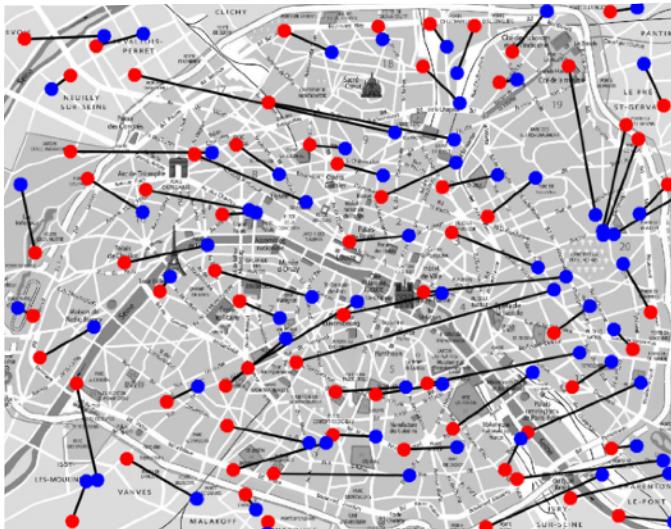
En dimension 2

Le cas 2D: $x_i, y_j \in \mathbb{R}^2$

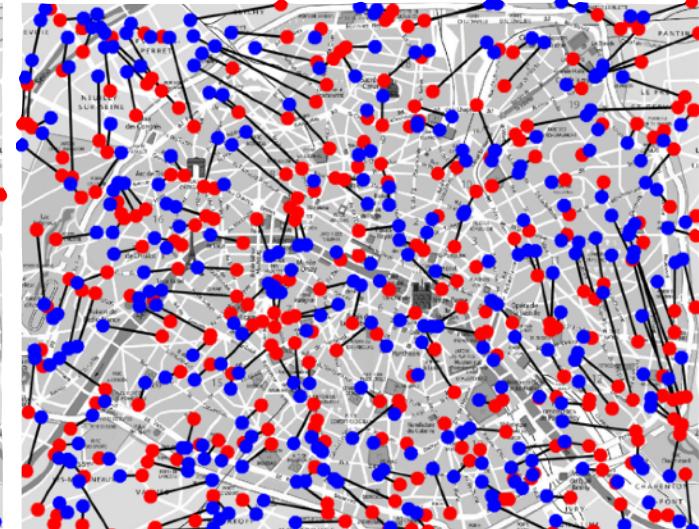
$$c_{i,j} = \|x_i - y_j\| = \sqrt{(x_i^1 - y_j^1)^2 + (x_i^2 - y_j^2)^2}$$



$n = 10$



$n = 70$

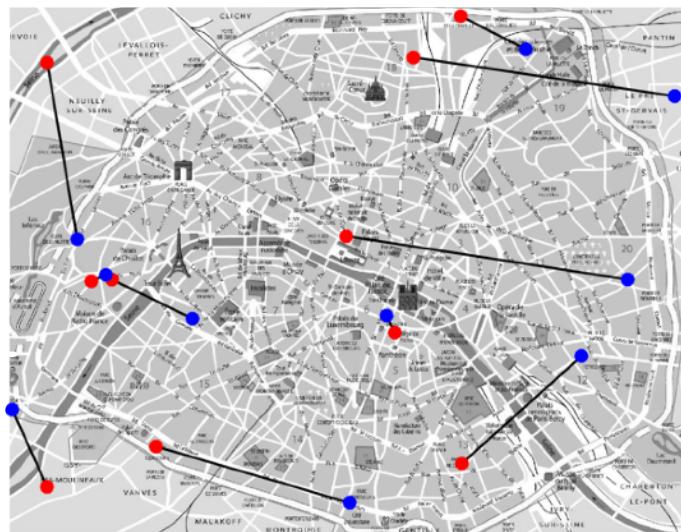
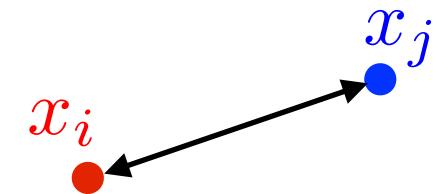


$n = 300$

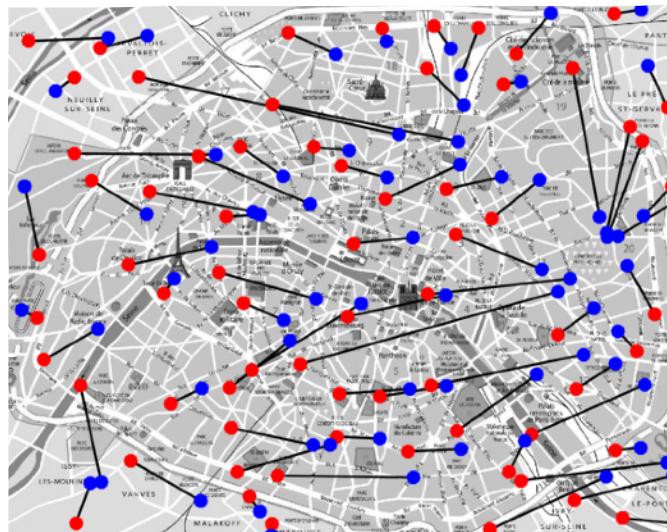
En dimension 2

Le cas 2D: $x_i, y_j \in \mathbb{R}^2$

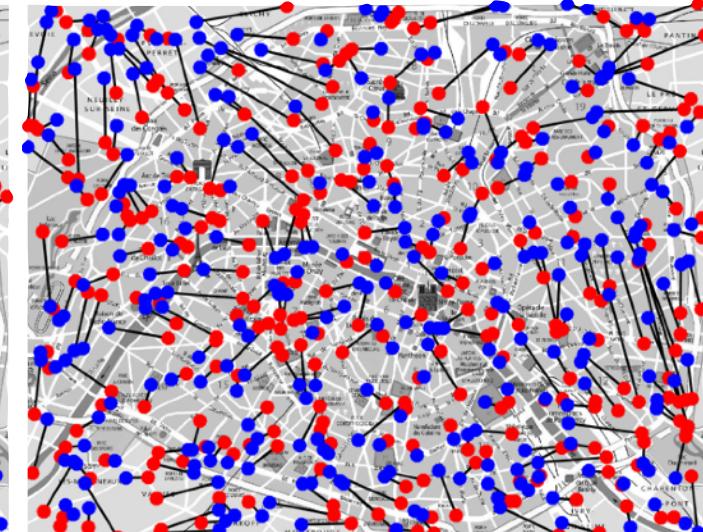
$$c_{i,j} = \|x_i - y_j\| = \sqrt{(x_i^1 - y_j^1)^2 + (x_i^2 - y_j^2)^2}$$



$n = 10$

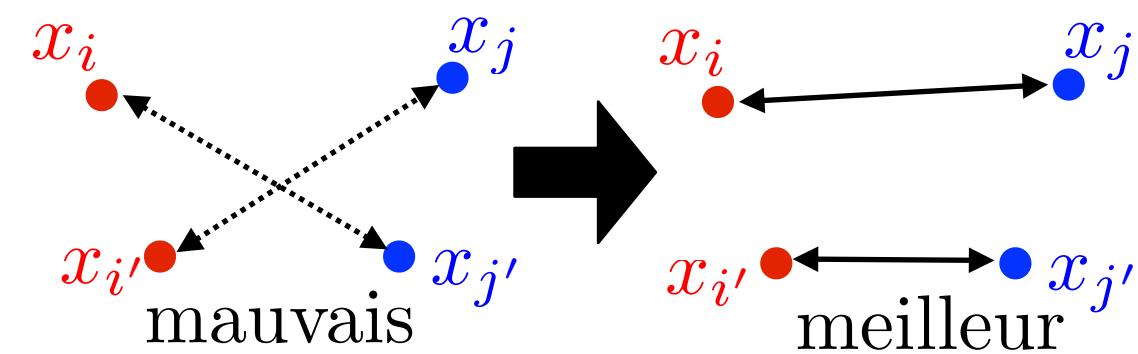


$n = 70$

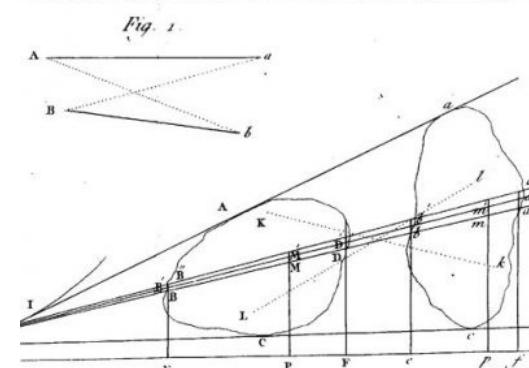


$n = 300$

Propriété: deux segments ne se croisent pas.

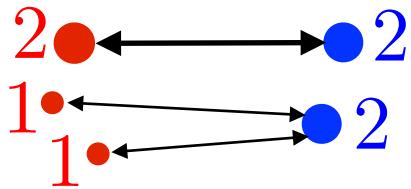
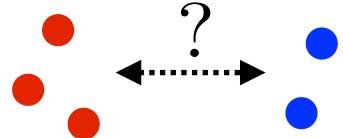


Mém. de l'Ac. R. des Sc. An. 1781, Page. 704, Pl. XVII



Poids et histogrammes

Affectation entre ensembles de tailles différentes: *impossible*.

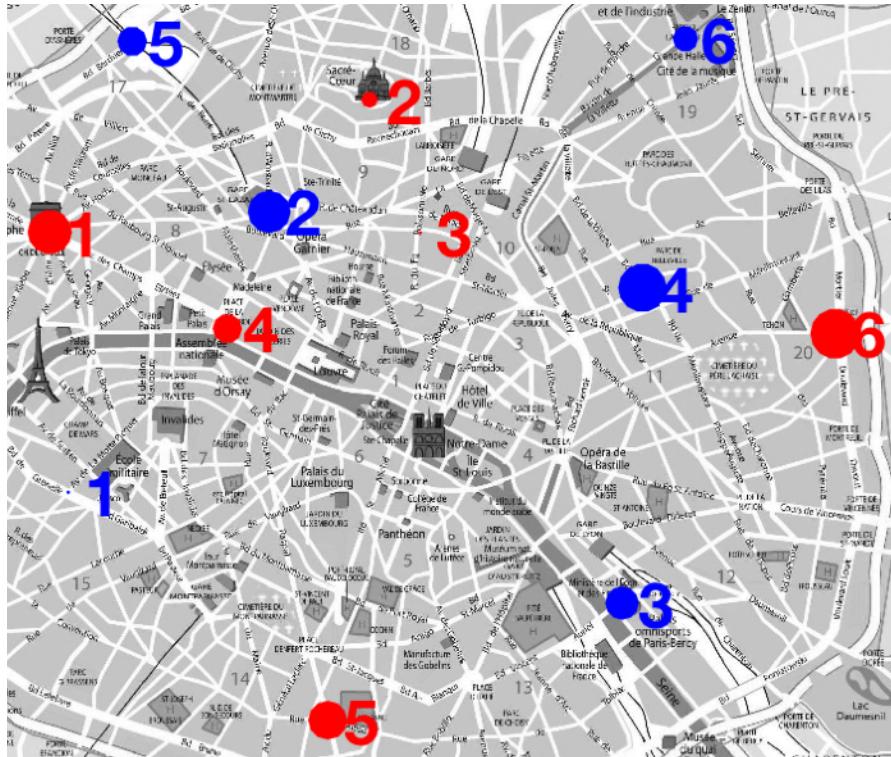


Points $(x_i)_i$, poids $(p_i)_i$.

Points $(y_j)_j$, poids $(q_j)_j$.

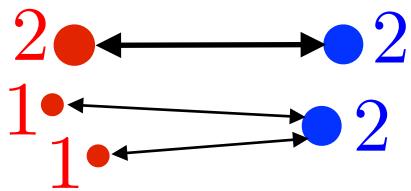
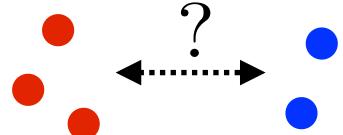
Contrainte: $\sum_i p_i = \sum_j q_j$

Poids \sim masse \sim capacité.



Poids et histogrammes

Affectation entre ensembles de tailles différentes: *impossible*.



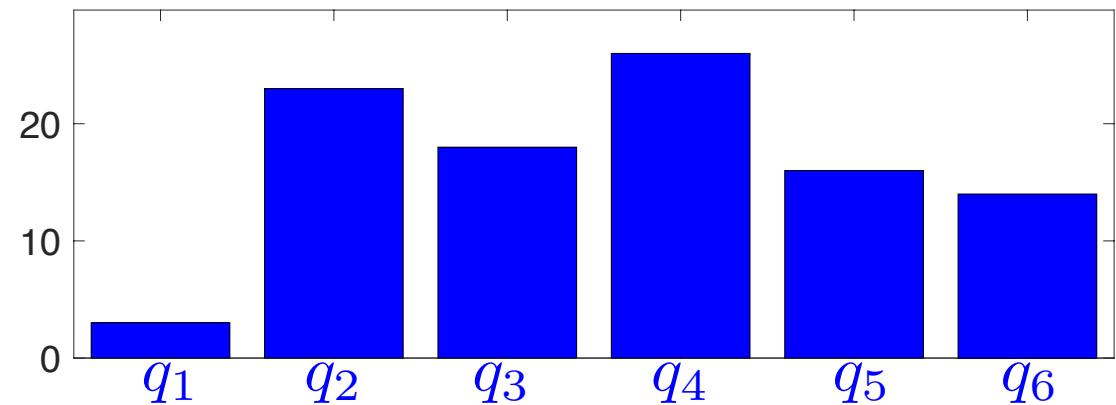
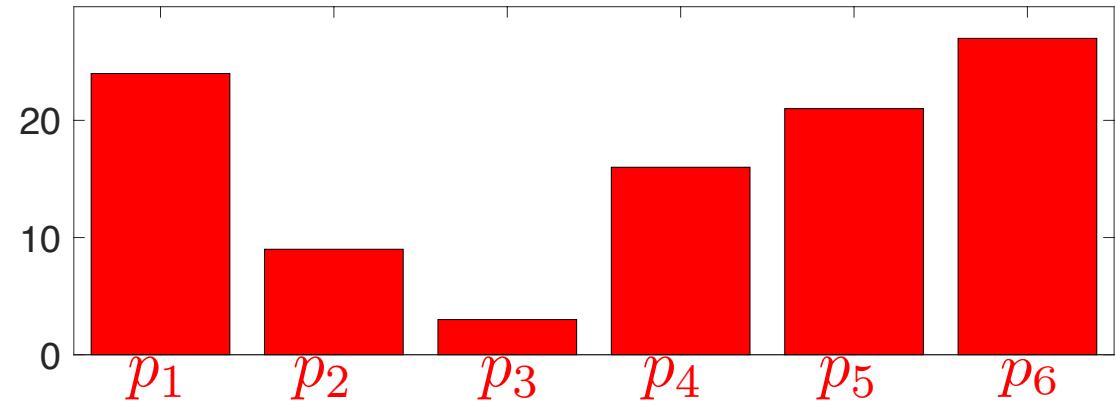
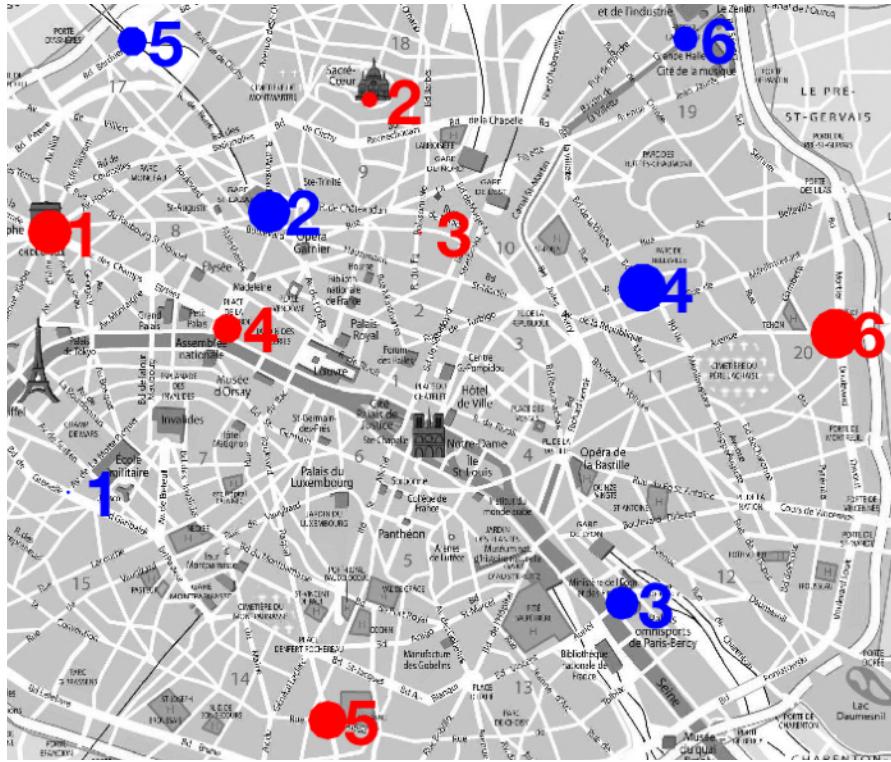
Points $(x_i)_i$, poids $(p_i)_i$.

Points $(y_j)_j$, poids $(q_j)_j$.

Contrainte: $\sum_i p_i = \sum_j q_j$

Poids \sim masse \sim capacité.

Normalisation $\sum_i p_i = 1 \Leftrightarrow$ histogramme.



Couplage Optimal

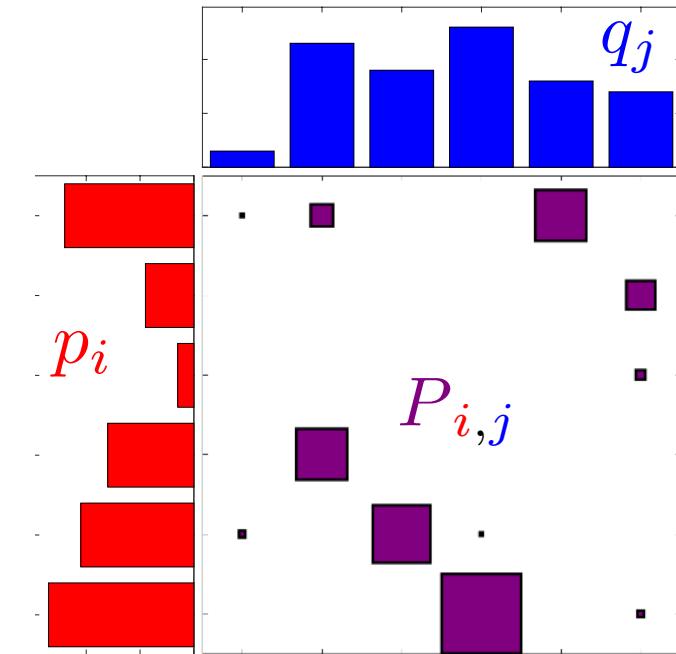
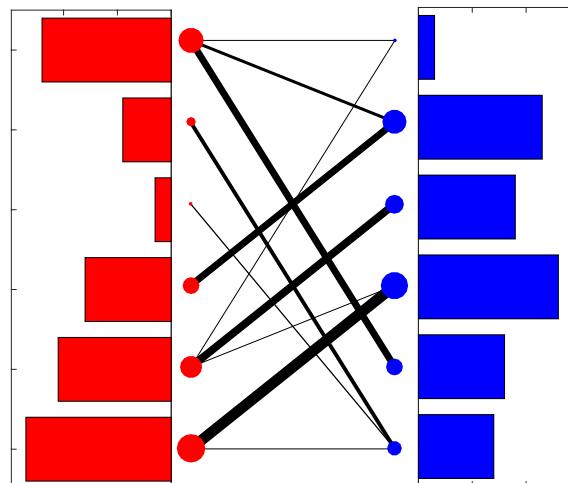
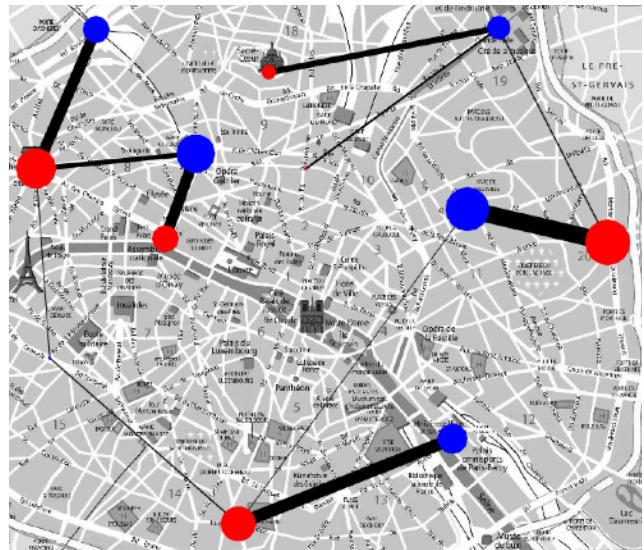
Transport de masse $i \leftrightarrow j$: $P_{i,j} \geq 0$

Conservation de la masse:

$$\mathcal{L} \quad \sum_j P_{i,j} = p_i$$

$$\mathcal{C} \quad \sum_i P_{i,j} = q_j$$

	3	23	18	26	16	14
24	1	7	0	0	16	0
9	0	0	0	0	0	9
3	0	0	0	0	0	3
16	0	16	0	0	0	0
21	2	0	18	1	0	0
27	0	0	0	25	0	2



Couplage Optimal

Transport de masse $i \leftrightarrow j$: $P_{i,j} \geq 0$

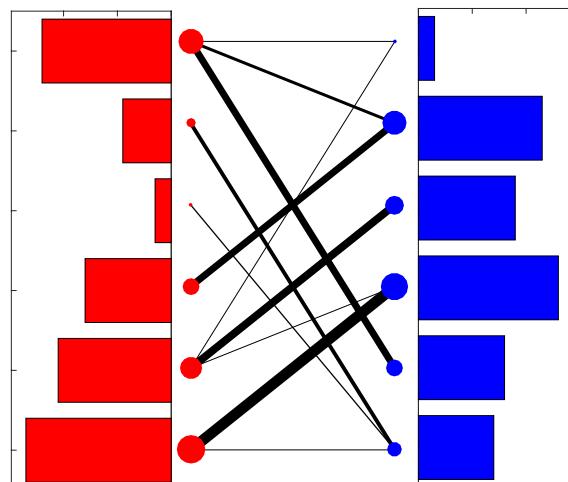
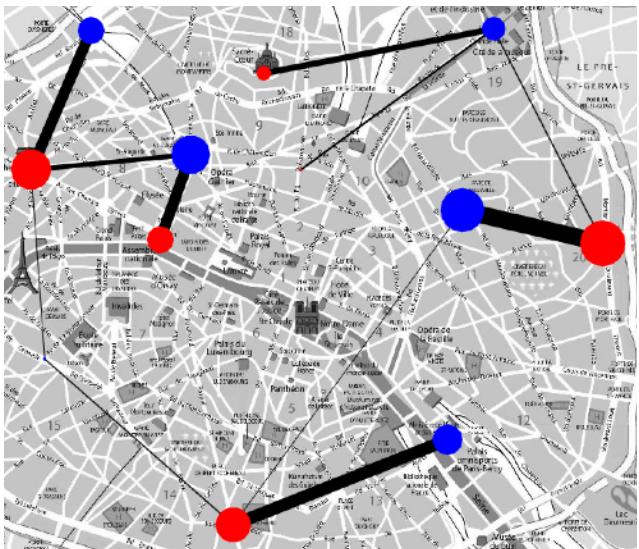
Conservation de la masse:

$$\mathcal{L} \quad \sum_j P_{i,j} = p_i$$

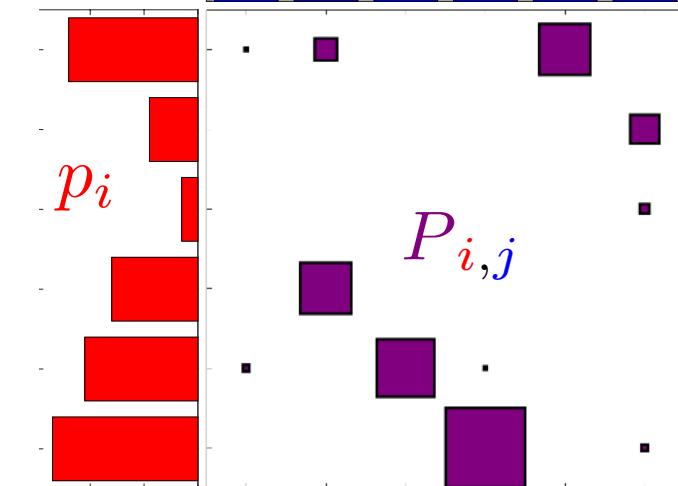
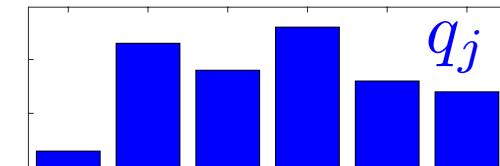
$$\mathcal{C} \quad \sum_i P_{i,j} = q_j$$

Problème de Kantorovich:

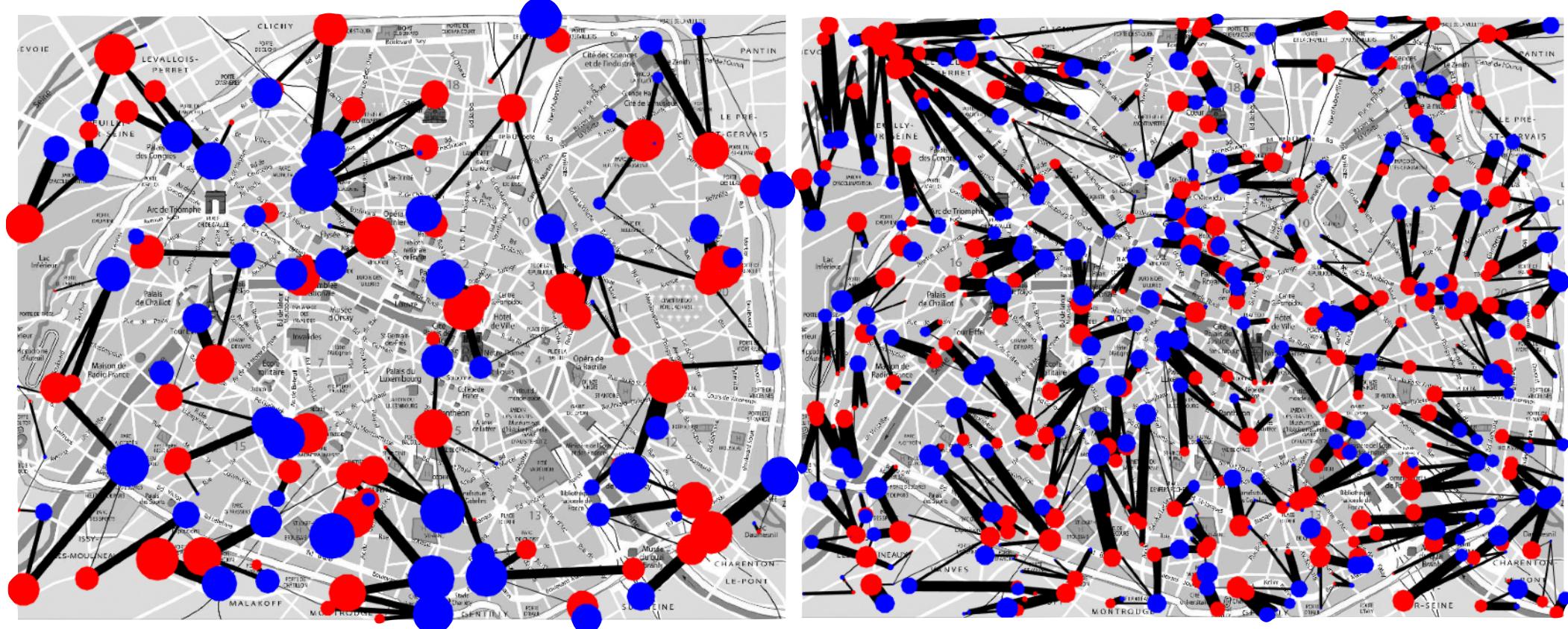
$$\min_{\substack{P_{i,j} \geq 0 \\ \mathcal{L} \& \mathcal{C}}} \sum_{i,j} P_{i,j} c_{i,j} \rightarrow \text{“Programmation linéaire”}$$



	3	23	18	26	16	14
24	1	7	0	0	16	0
9	0	0	0	0	0	9
3	0	0	0	0	0	3
16	0	16	0	0	0	0
21	2	0	18	1	0	0
27	0	0	0	25	0	2



Examples

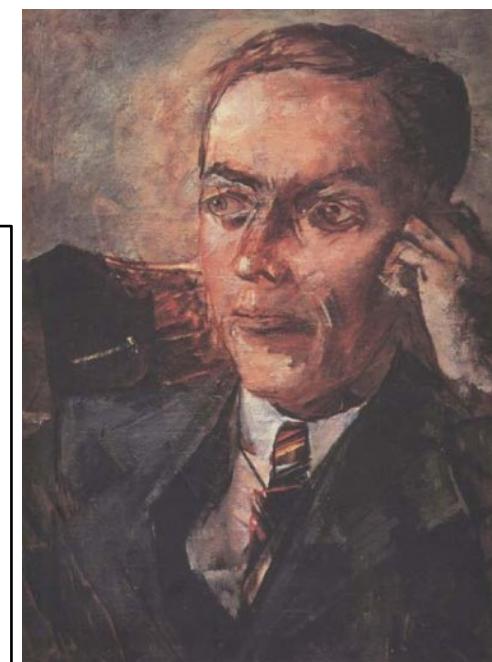


Leonid Kantorovich (1912-1986)

Леонид Витальевич Канторович

Au cours du siège de Léningrad, Kantorovitch est responsable de la sécurité de la Route de la vie. Il détermine la distance optimale à observer entre les voitures sur la surface gelée du lac Ladoga, en fonction de l'épaisseur de glace et de la température de l'air. En décembre 1941 – janvier 1942, Kantorovitch s'assure lui-même de la viabilité de la banquise en marchant entre les camions. Cependant bien des véhicules chargés d'approvisionnements sont détruits par les bombardements aériens nazis. En récompense de ses exploits et de son courage, les autorités attribuent à Kantorovitch l'ordre de la Guerre patriotique, et le décorent de la Médaille pour la Défense de Léningrad.

Peu avant la Seconde Guerre mondiale, Leonid Kantorovitch découvre la programmation linéaire, l'optimisation linéaire et ses applications à l'optimisation de la production économique planifiée. Il est le seul chercheur soviétique à avoir reçu le « prix Nobel » d'économie (1975). Les théories de Kantorovitch ne sont publiées qu'après l'ère stalinienne. Un des apports de Kantorovitch est d'avoir incité à une meilleure prise en compte de la productivité marginale de l'investissement, afin de résoudre les difficultés liées à l'allocation des ressources au sein d'une économie socialiste.



Journal of Mathematical Sciences, Vol. 139, No. 4, 2006

ON THE TRANSLOCATION OF MASSES

L. V. Kantorovich*

The original paper was published in *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **37**, No. 7-8, 227-229 (1942).

We assume that R is a compact metric space, though some of the definitions and results given below can be formulated for more general spaces.

Let $\Phi(e)$ be a mass distribution, i.e., a set function such that: (1) it is defined for Borel sets, (2) it is nonnegative: $\Phi(e) \geq 0$, (3) it is absolutely additive: if $e = e_1 + e_2 + \dots; e_i \cap e_k = \emptyset (i \neq k)$, then $\Phi(e) = \Phi(e_1) + \Phi(e_2) + \dots$. Let $\Phi'(e')$ be another mass distribution such that $\Phi(R) = \Phi'(R)$. By definition, a translocation of masses is a function $\Psi(e, e')$ defined for pairs of (B)-sets $e, e' \in R$ such that: (1) it is nonnegative and absolutely additive with respect to each of its arguments, (2) $\Psi(e, R) = \Phi(e)$, $\Psi(R, e') = \Phi'(e')$.

Let $r(x, y)$ be a known continuous nonnegative function representing the work required to move a unit mass from x to y .

We define the work required for the translocation of two given mass distributions as

$$W(\Psi, \Phi, \Phi') = \int_R \int_R r(x, x') \Psi(de, de') = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i, k} r(x_i, x'_k) \Psi(e_i, e'_k),$$

where e_i are disjoint and $\sum_i e_i = R$, e'_k are disjoint and $\sum_k e'_k = R$, $x_i \in e_i$, $x'_k \in e'_k$, and λ is the largest of the numbers $\text{diam } e_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) and $\text{diam } e'_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

Clearly, this integral does exist.

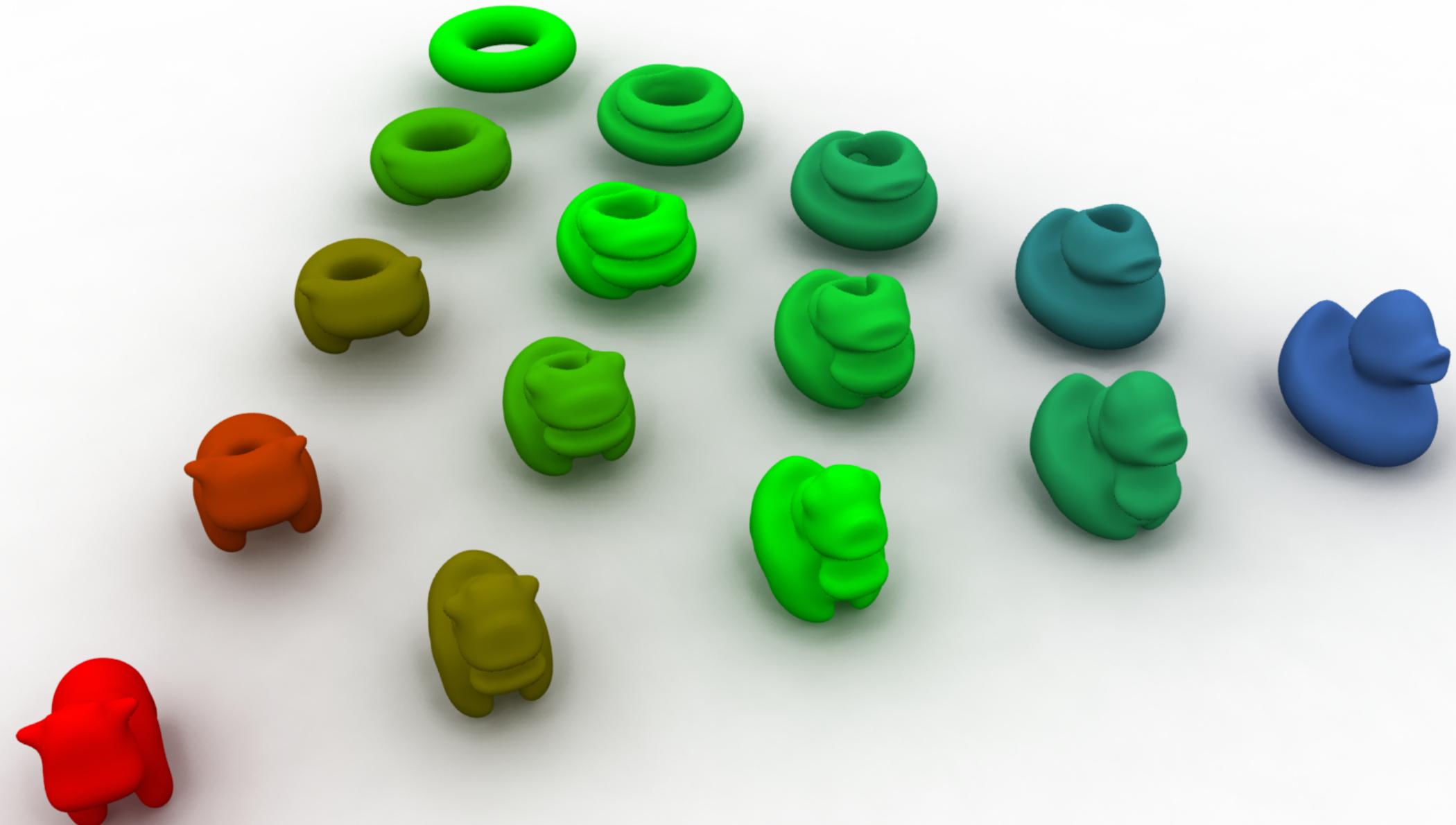
We call the quantity

$$W(\Phi, \Phi') = \inf_{\Psi} W(\Psi, \Phi, \Phi')$$

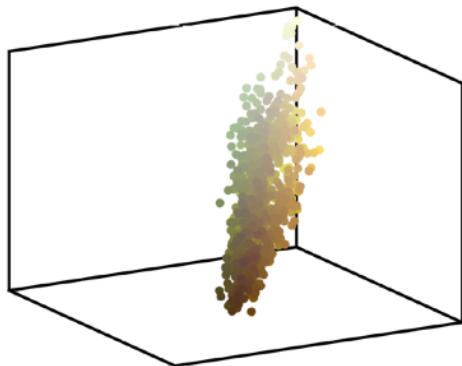
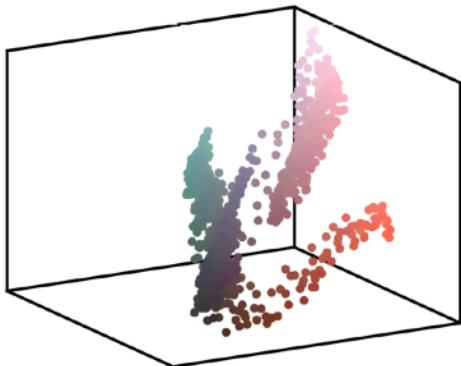
the minimal translocation work. Since the set of all functions $\{\Psi\}$ is compact, there exists a function Ψ_0 realizing this minimum, so that

$$W(\Phi, \Phi') = W(\Psi_0, \Phi, \Phi'),$$

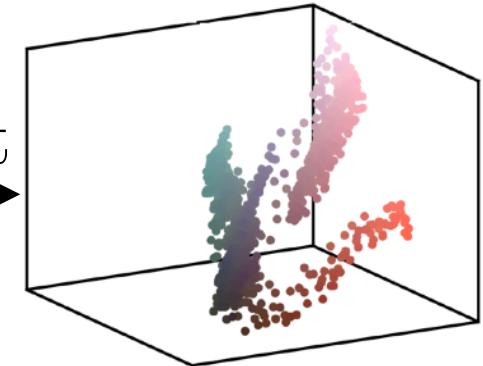
Applications aux formes



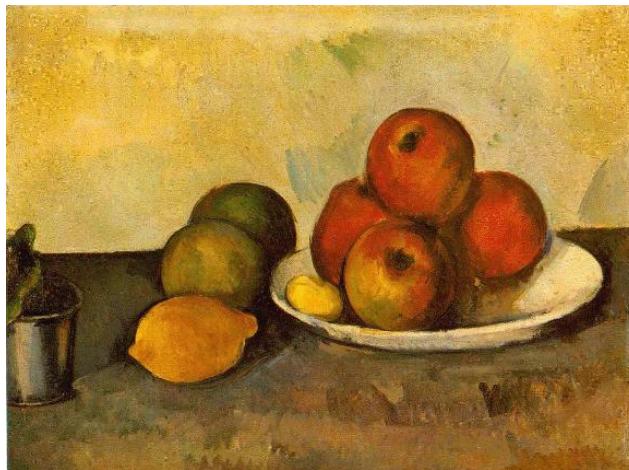
Applications aux couleurs



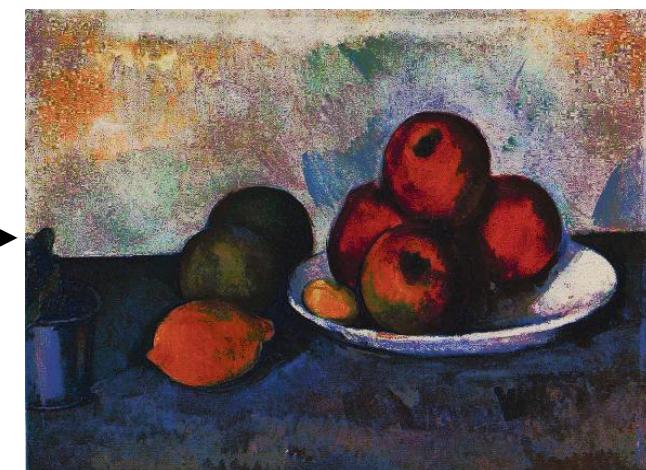
Transport
optimal



Référence



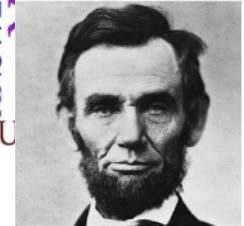
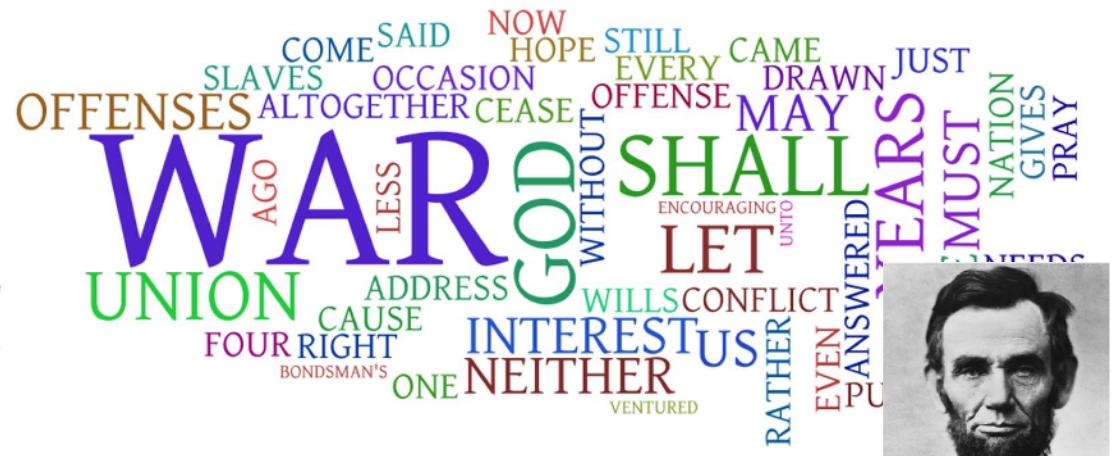
Entrée



Sortie

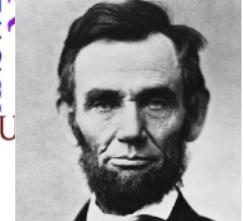
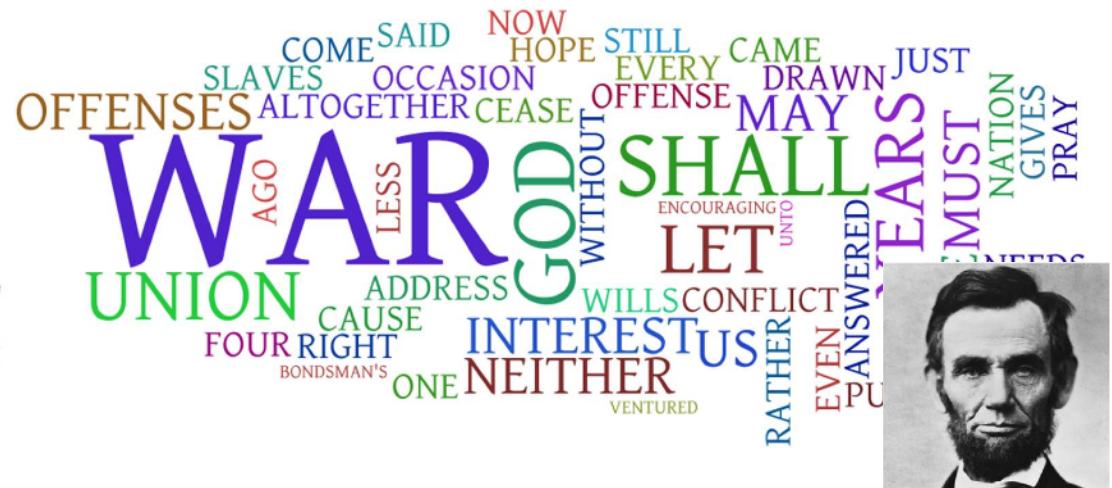
Histogrammes de textes

Histogrammes des fréquence empirique des mots:



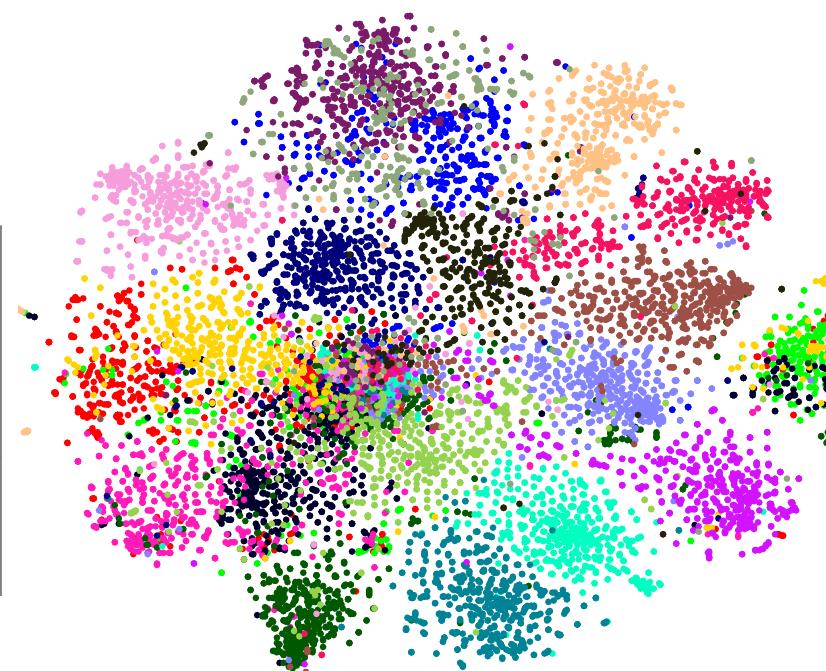
Histogrammes de textes

Histogrammes des fréquence empirique des mots:



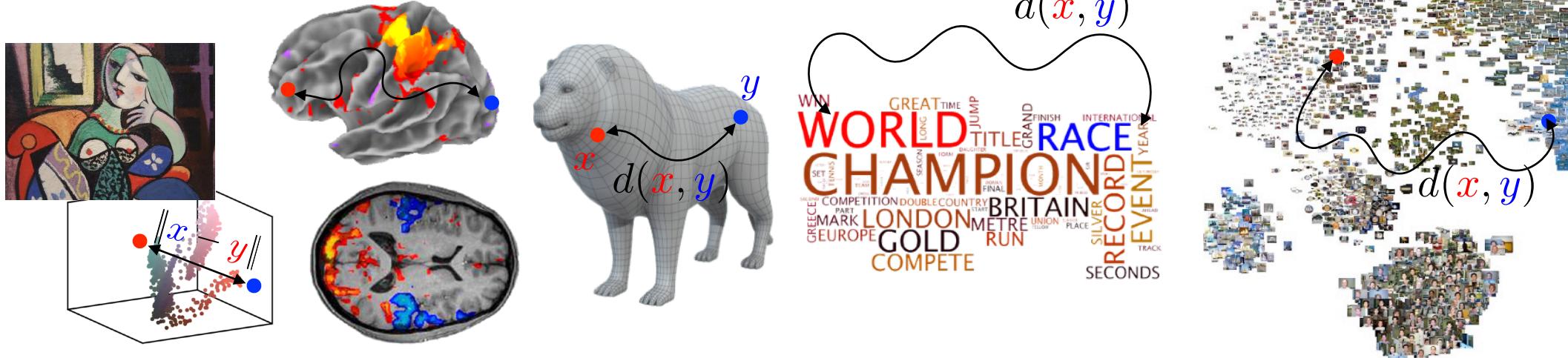
Visualisation d'une base de donnée:

comp.graphics	rec.autos	sci.crypt
comp.os.ms-windows.misc	rec.motorcycles	sci.electronics
comp.sys.ibm.pc.hardware	rec.sport.baseball	sci.med
comp.sys.mac.hardware	rec.sport.hockey	sci.space
comp.windows.x		
misc.forsale	talk.politics.misc	talk.religion.misc
	talk.politics.guns	alt.atheism
	talk.politics.mideast	soc.religion.christian



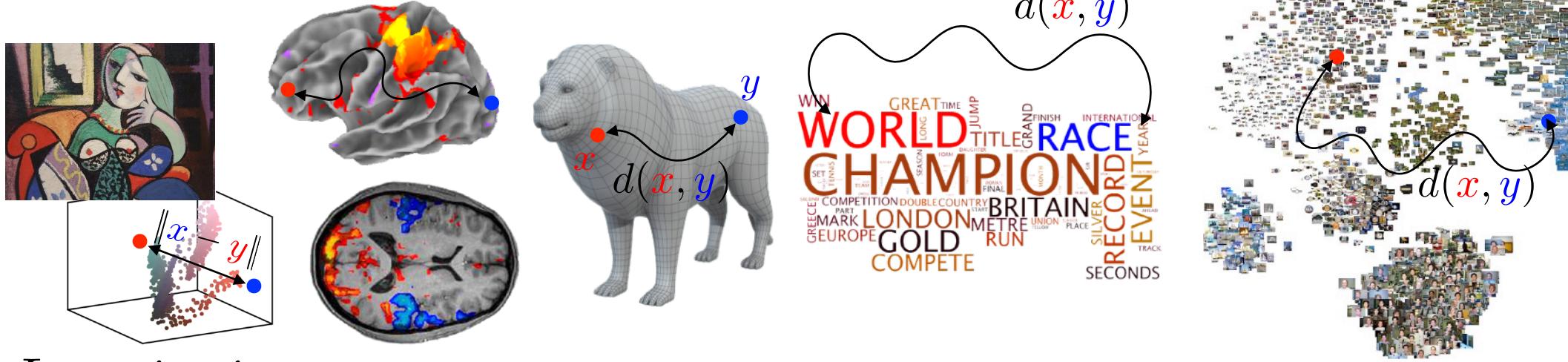
Conclusion

Les distributions de “masses” sont partout:



Conclusion

Les distributions de “masses” sont partout:

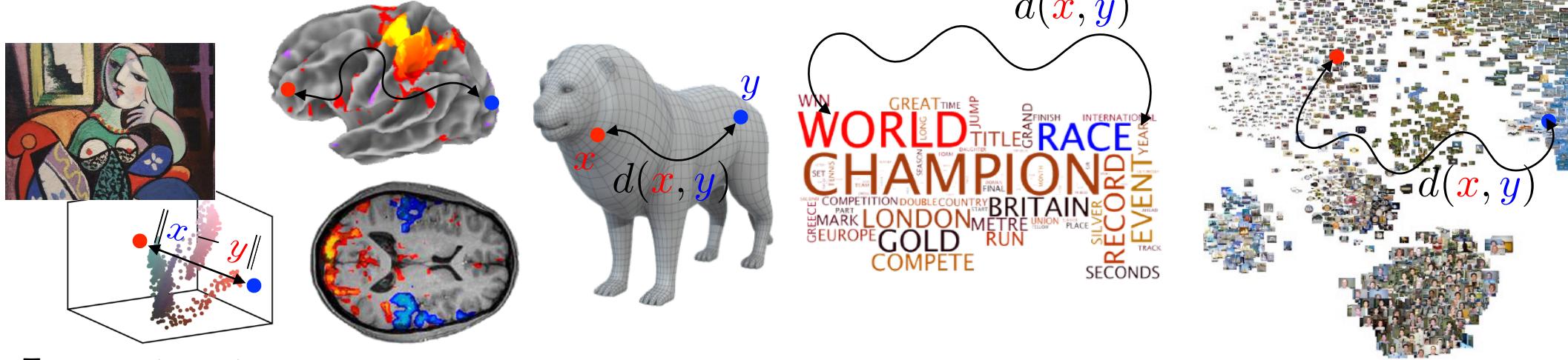


Les pioniers:



Conclusion

Les distributions de “masses” sont partout:



Les pioniers:



Un domaine de recherche actif:

“transport optimal” selon Google Scholar:

