GRUPPEN

Verknüpfung: $* : A \times A \to A$, $(x,y) \mapsto x * y$ ⇝ Abgeschlossenheit

~~Gru~~ $(G,*)$ ist Gruppe wenn: $*$ muss Verknüpfung sein → prüfen!

> G1 (assoziativ): $\forall a,b,c \in G : (a*b)*c = a*(b*c)$

> G2 (neutrales Element): $\exists e \in G : \forall a \in G : e*a = a = a*e$

> G3 (inverses Element): $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : a^{-1}*a = e = a*a^{-1}$

G abelsch wenn zusätzlich:

> G4 (kommutativ): $\forall a,b \in G : a*b = b*a$

Symmetrische Gruppe

M endliche Menge

Permutationen: ~~Menge aller~~ bijektiven Selbstabbildungen auf M

⇝ S_M = Menge der Permutationen $(|S_M| = m!)$
⇝ $(S_M, \circ)$ ist Gruppe (nicht abelsch)

> Schreibe Permutation π: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(m) \end{pmatrix}$

⇝ $\pi(i)$ ist Bild von i $(i = 1, \dots, m)$

Transposition: $\pi(i) = k$ $i \neq k$
$\pi(k) = i$ $i \neq k$
$\pi(l) = l$ $\forall l \neq i,k$

kurz: $(i\,k) = \tau$

$\tau \circ \tau = id$
$\Rightarrow \tau = \tau^{-1}$

⇝ Permutationen lassen sich als Verkettung von Transp. schreiben

Fehlstandszahl: $i < k$ aber $\pi(i) > \pi(k)$ ⇝ Fälle zählen ⇝ $F(\pi)$

$F(\pi)$ gerade → Permutation gerade → gerade Anzahl Transp.
$F(\pi)$ ungerade → Perm. ungerade → ungerade Anz. Transp.

alternierende Gruppe: gerade Perm. von S_m bezüglich $\circ$
⇝ Verkettung von geraden Perm. bilden wieder gerade Perm.

Untergruppen

neutrales Element einer UG ist neutr. Element von G

$(G,*)$ Gruppe, $U \subseteq G$ ist Untergruppe wenn: ($a,b \in U \Rightarrow a*b \in U$ prüfen!)
wichtig!

> UG1: $U \neq \emptyset$ > UG2: $\forall a,b \in U : a*b^{-1} \in U$

Homomorphismen

= strukturerhaltende Abbildung

⇝ Isomorph falls bijektiv

$(G,*)$, $(H,\circ)$ Gruppen, $\phi : G \to H$ Abbildung, ϕ Gruppenhom. falls

$\forall x,y \in G : \phi(x*y) = \phi(x) \circ \phi(y)$; ϕ Selbstabb.: Endomorph. ⇝ bijekt. End. = Automorph.

RINGE / KÖRPER.

$(R, +, \cdot)$ ist Ring wenn:

- > R1: $(R,+)$ ist abelsche Gruppe
- > R2: $\cdot$ ist assoziativ
- > R3: Distributivgesetze: $\forall a,b,c \in R$ gilt: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
  und $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

zusätzlich:
- > $\cdot$ kommutativ => Ring kommutativ
- > neutrales Element in $(R,+)$ ist 0 (Nullelement)
- > hat Ring neutrales Element bezgl. $\cdot$: 1 (Einselement)
  => Ring mit Eins

Nullteiler: $a \neq 0 \in R$ ist Nullteiler wenn: $\exists b \in R$ $b \neq 0$: $ab = 0$

Ringhomomorphismus: $\phi : R_1 \to R_2$ mit $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$
$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ $\forall x,y \in R_1$

Körper: ist $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppe für Ring $(\mathbb{K},+,\cdot)$ ist $(\mathbb{K},+,\cdot)$ Körper
↝ Körper = komm. Ring mit Eins, mit mult. inversem für alle Elemente außer 0.

Körperhom.: $\phi: \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ mit $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ $\forall x,y \in \mathbb{K}_1$
und $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$

Teilring: $T \subset R$ Teilring wenn

$(T,+)$ UG von $(R,+)$ und $(T,\cdot)$ abgeschlossen

VEKTORRÄUME

$+: V\times V \to V$, $(x,y)\mapsto x+y$; $\cdot: \mathbb{K}\times V \to V$, $(\lambda, x)\mapsto \lambda x$

Menge V mit Addition und skalarer Multiplikation ist $\mathbb{K}$-Vektorraum wenn:

> V1 : $(V, \oplus)$ ist abelsche Gruppe

> V2 : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in V$ gilt:

Einselement aus $\mathbb{K}$

(a) $1 \odot x = x$ (b) $\lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda \cdot \mu) \odot x$

(c) $(\lambda + \mu) \odot x = \lambda \odot x \oplus \mu \odot x$ (d) $\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda \odot x \oplus \lambda \odot y$

Lineare (Un-)abhängigkeit:

> endlich viele Vektoren linear unabh. ~~wenn~~: wenn gilt:

$v_1, \dots, v_n$ l. un. $\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \right)$

> $v_1, \dots, v_n$ lin. abh. wenn es eine nichttriviale Linearkomb. des Nullvektors aus $v_1, \dots, v_n$ gibt

Lineare Hülle: (= Spann)

$[M]$ ist ~~Linearkomb~~ Menge aller Linearkomb. von Vektoren aus M.

> $M = \emptyset \Rightarrow [M] = \{0\}$ > $M \subset [M]$; $M_1 \subset M_2 \Rightarrow [M_1] \subset [M_2]$

Erzeugendensystem: $M \subset V$ mit $[M] = V$ ist Erzeugendensystem von V.
erzeugende Menge M minimal, wenn es keine echte Teilmenge von M gibt mit $[M'] = V$

Basis: $B \subseteq V$ heißt Basis von V, wenn B erzeugend und lin. un. ist.
$\Leftrightarrow$ B ist minimales Erzeugendensystem
$\Leftrightarrow$ B ist maximal linear unabhängig

Basisdarstellung: V n-dim., $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis

jedes $v \in V$ hat eindeutige Basisdarstellung bzgl. B: $v = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i$

$\leadsto v_i$ heißen Komponenten $\leadsto \Theta_B(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ Komponentenvektor

Basiswechsel n-dim. Vektorraum, 2 Basen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$
$\bar{B} = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$

Finde Übergangsmatrix A von B nach $\bar{B}$.

(1) Schreibe b_i als Linearkomb. der $\bar{b}_i$ mit Koeff. aus $\mathbb{K}$, also

$$b_1 = a_{11}\bar{b}_1 + a_{21}\bar{b}_2 + \dots + a_{n1}\bar{b}_n$$

$$b_2 = a_{12}\bar{b}_1 + a_{22}\bar{b}_2 + \dots + a_{n2}\bar{b}_n$$

$$\vdots$$

$$b_n = a_{1n}\bar{b}_1 + a_{2n}\bar{b}_2 + \dots + a_{nn}\bar{b}_n$$

(2) A ist dann $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$

zur Linearkomb. von b_1 aus $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ benötigte Koeff.

(3) Der Komponentenvektor $\Theta_{\bar{B}}(v)$ bzgl. $\bar{B}$ ist dann gegeben durch

$$\Theta_{\bar{B}}(v) = A \cdot \Theta_B(v)$$

Für den Wechsel in die andere Richtung gilt dann:

$$\Theta_B(v) = A^{-1} \cdot \Theta_{\bar{B}}(v)$$

Untervektorräume

$U \subseteq V$ ist UVR von V, wenn: (0 muss in U sein!)

> U1: $U \neq \emptyset$

> U2: $\forall x, y \in U$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $x + y \in U \wedge \lambda x \in U$

⇝ ~~Nullvektor, neutr.~~

⇝ neutr. Element (Nullvektor), Inverses bzgl. Addition in U wie in V

alle Vektoren $v = u_1 + u_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$

Summe von UVR: U_1, U_2 UVR von V ⇝ $U_1 + U_2 = [U_1 \cup U_2]$ ist UVR

direkte Summe: $U_1 \oplus U_2$ wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

Komplementärraum: Zu jedem UVR U_1 gibt es ein UVR U_2 mit $V = U_1 \oplus U_2$
⇝ i.A. nicht eindeutig

Dimensionssätze: $U \subseteq V$ UVR von V

> $\dim U \leq \dim V$ ⇝ $\dim U = \dim V$ wenn $U = V$

> $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$

> $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \oplus U_2)$

BASIS BESTIMMEN: gegeben: $v_1, \dots, v_k$ ~~Basis von~~ Vektoren aus $U \subseteq V$

(a) ~~Prüfe~~ ⇝ Finde lin. unabh. Vektoren aus $v_1, \dots, v_k$
⇝ Gauß LGS
⇝ an Normalform ablesen, z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ⇒ v_1, v_2, v_4 lin. unabh.
⇝ lin. unabh. Vektoren bilden Basis von U

(b) einfache Basis finden: Schreibe $v_1, \dots, v_k$ als Zeilen in Matrix
⇝ Gauß LGS bis Zeilen-Stufen-Form
⇝ Zeilen $\neq 0$ bilden Basisvektoren

Basis von $U \cap W$ bestimmen:

zB. $U = [u_1, u_2, u_3]$ Basis von U
und
$W = [w_1, w_2]$ Basis von W

$v \in U \cap W$ darstellbar (eindeutig) bzgl. beider Basen:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \quad (*) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{K}$$

$\rightsquigarrow$ Löse LGS $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 - \beta_1 w_1 - \beta_2 w_2 = 0$

$\rightsquigarrow$ Ergebnis der Form $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \ldots$ evtl. Parametrisierung

$\rightsquigarrow$ einsetzen in $(*)$ (beide Seiten müssen gleiches ergeben $\rightarrow$ Test)

$\rightsquigarrow$ Ergebnis ist dann Basis

Finde W, sodass $U \oplus W = V$:

$B = \{b_1, \ldots, b_d\}$ Basis von U

$\rightsquigarrow$ Basisergänzungssatz: $B' = \{b_1, \ldots, b_d, \underbrace{b_{d+1}, \ldots, b_n}_{n-d \text{ Elemente}}\}$

$\Rightarrow B'' = \{b_{d+1}, \ldots, b_n\}$ Basis von W

$\rightsquigarrow W = [B'']$

$\rightsquigarrow$ noch zu zeigen: $U + W = [U \cup W] = [B \cup B''] = [B'] = V$

$U \cap W = \{0\}$ $\rightsquigarrow$ verwende Dim. Satz:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = d + n - d - n = 0 \Rightarrow U \cap W = \{0\}$$

Faktorräume $U \subseteq V$ UVR

$x \sim_U y \Leftrightarrow x - y \in U$ ist Äquivalenzrelation auf V

Faktorraum V/U = Menge der Äquivalenzklassen von V bezüglich $\sim_U$

$\tilde{x} \in V/U$: $\tilde{x} = \{x + u \mid u \in U\} = x + U$; $\tilde{0} = U$

$\rightsquigarrow$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum mit: $\tilde{x} + \tilde{y} = \widetilde{x+y}$, $\lambda \cdot \tilde{x} = \widetilde{\lambda \cdot x}$ $\quad x, y \in V; \lambda \in \mathbb{K}$

V n-dim., $\{b_1, \ldots, b_d\}$ Basis von U und $\{b_1, \ldots, b_d, b_{d+1}, \ldots, b_n\}$ Basis von V
dann:

(1) $\{\tilde{b}_{d+1}, \ldots, \tilde{b}_n\}$ ist Basis von V/U

(2) $\dim V/U = \dim V - \dim U$

LINEARE ABBILDUNGEN

V, W $\mathbb{K}$-VR, $\Phi: V \to W$ linear, wenn: $x, y \in V$; $\lambda \in \mathbb{K}$

> L1: $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$

> L2: $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$

ODER

> L: $\Phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \Phi(x) + \mu \Phi(y)$

⇝ bei lin. Abb. geht $0_V \in V$ in $0_W \in W$ über, also $\Phi(0_V) = 0_W$

⇝ lin. Abb. = Vektorraum-Homomorphismus
⇝ bijektiv: isomorphismus
⇝ gibt es einen solchen isom. $\phi: V \to W$ sind V, W isomorph $\Rightarrow V \cong W$

⇝ $V = W$ Selbstabbildung/Endomorphismus
⇝ bijektiv: Automorphismus

~~Lineare Fortsetzung: $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V~~
~~$\{w_1, \dots, w_n\}$ Basis von W~~
~~es gibt~~

Lineare Fortsetzung: $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V ; $\{w_1, \dots, w_n\}$ beliebig aus W

Dann gibt es genau eine lin. Abb. $\Phi: V \to W$ mit $\Phi(v_i) = w_i$

⇝ lin. abh. Vektoren gehen in lin. abh. Vektoren über

⇝ Φ injektiv: lin. un. Vektoren gehen in lin. un. Vektoren über

Injektivität: $\Phi: V \to W$ linear

Φ injektiv $\Leftrightarrow \forall x, y \in V: \Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow x = y$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in V: \Phi(x-y) = \Phi(x) - \Phi(y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$

$\Leftrightarrow$ Kern $\Phi = \{0\}$

$\Leftrightarrow$ Rang Φ = dim V

Surjektivität: $\Phi: V \to W$ linear

Φ surjektiv $\Leftrightarrow$ Bild $\Phi = \Phi(V) = W$

$\Leftrightarrow$ Rang Φ = dim W

Kern Φ: $\Phi: V \to W$ linear

$\operatorname{Kern}\Phi = \{v \in V \mid \Phi(v) = 0\}$ ist UVR von V

Bild Φ:

$\operatorname{Bild}\Phi = \Phi(V)$ Bildraum von Φ ist UVR von W

Menge aller Urbilder:

$\Phi^{-1}(w) = \{x \in V \mid \Phi(x) = w\}$ für $w = 0$ ist $\Phi^{-1}(0) = \operatorname{kern}\Phi$ UVR von V
$w \neq 0$ kein UVR, da $0 \notin \Phi^{-1}(w)$

kanonische Projektion: $\Phi: V \to W$ linear

$\pi: V \to V/\operatorname{Kern}\Phi$, $x \mapsto \tilde{x}$ ordnet jedem $v \in V$ seine Äquivalenzklasse in $V/\operatorname{kern}\Phi$ zu.
^surjektiv

Homomorphiesatz:

$\tilde{\Phi}: V/\operatorname{kern}\Phi \to W$, $\tilde{x} \mapsto \Phi(x)$ => es gilt: $\Phi = \tilde{\Phi} \circ \pi$
^injektiv

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/\operatorname{kern}\Phi \arrow[ur, "\tilde{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

Isomorphiesatz: $\Phi: V \to W$ surjektiv

=> $\tilde{\Phi}$ surjektiv und Isomorphismus von $V/\operatorname{kern}\Phi$ nach W
=> $V/\operatorname{kern}\Phi$ und $\operatorname{Bild}\Phi$ isomorph

Rang Φ: $\Phi: V \to W$

$\operatorname{Rang}\Phi = \dim(\Phi(V)) = \dim(\operatorname{Bild}(\Phi)) \leq \dim W$
und $\operatorname{Rang}\Phi \leq \dim V$

$\leadsto$ $\operatorname{Rang}\Phi = \dim V - \dim(\operatorname{kern}\Phi)$

$\leadsto$ V, W isomorph $\Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$

Hom(V,W): Menge aller lin. Abb. $\Phi: V \to W$, Vektorraum über $\mathbb{K}$

$\Phi, \Psi \in \operatorname{Hom}(V,W)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$\Phi + \Psi: V \to W$, $v \mapsto (\Phi + \Psi)(v) = \Phi(v) + \Psi(v)$

$\lambda\Phi: V \to W$, $v \mapsto (\lambda\Phi)(v) = \lambda\Phi(v)$

$\leadsto$ $\Phi + \Psi$, $\lambda\Phi$ wieder lineare Abb. von $V \to W$

$\leadsto$ V, W endlichdim.: $\dim(\operatorname{Hom}(V,W)) = \dim V \cdot \dim W$

Dualraum: $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ = alle Lin. Abb. von V nach $\mathbb{K}$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ ist Dualraum V^* von V

die Lin. Abb. $\phi: V \to \mathbb{K} \in V^*$ heißen Linearformen auf V

V n-dim $\rightsquigarrow$ V^* n-dim $\rightsquigarrow$ $V \cong V^*$

Basis $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ von V^*: $\longrightarrow$ Dualbasis von V^*
mit $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V, Basisvektor von $\mathbb{K}$: $w = 1$

$$v_j^*(v_k) = \delta_{jk}$$

also: v_j^* bildet v_j auf 1 ab, alle anderen v_k $(k \neq j)$ auf 0

Basiswechsel:

B^* nach C^*: schreibe C-Vektoren in Spalten einer Matrix
→ invertieren
→ Zeilen sind c^* bzgl. b^*
also zB. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $c_1^* = b_1^* + b_2^*$
$c_2^* = b_2^*$

ABBILDUNGSMATRIZEN

V n-dim., W m-dim., $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V
$C = \{c_1, \dots, c_m\}$ Basis von W

$\phi: V \to W$ mit $\phi(b_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} c_i \quad k = 1, \dots, n \ , \ a_{ik} \in \mathbb{K}$

⤳ Basisdarstellung von $\phi(b_k)$ bzgl. C

⤳ zu B, C ist eindeutige $m \times n$ Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ gegeben.
Abbildungsmatrix von ϕ

⤳ in der k-ten Spalte von A stehen Komponenten von $\phi(b_k)$ bzgl. C

Schema Abb.matrix bestimmen:

(1) B-Vektoren in Abb. einsetzen
(2) Ergebnisse bzgl. Basis C darstellen
(3) Komponentenvekt. als Spalten in Matrix schreiben

Mit $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j$ ergibt sich $\phi(x) = y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j c_j$

mit $\eta_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \lambda_k$

⤳ Komponentenvektoren $\Theta_B(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ und ~~Θ_B~~ $\Theta_C(y) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$

also $\Theta_C(y) = A \cdot \Theta_B(x)$

Damit ergibt sich $\hat{\phi}: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \ x \mapsto Ax$ Darstellung von ϕ

B geordnete Basis von V (n-dim.)
C geordnete Basis von W (m-dim.)

$M_C^B: \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathbb{K}^{m \times n}, \ \phi \mapsto A = M_C^B(\phi)$ ordnet jedem

Homomorphismus $\phi: V \to W$ die Abb.matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ bzgl. B, C ~~zuordnet~~ zu

⤳ M_C^B bijektiv, Isomorphismus zw. $\mathrm{Hom}(V, W)$ und $\mathbb{K}^{m \times n}$

⤳ $\dim \mathbb{K}^{m \times n} = \cancel{\dim(V, W}\ \dim(\mathrm{Hom}(V, W)) = m \cdot n$

> Basis von $\mathrm{Hom}(V, W) = \{\phi_{ij}\}$, $\phi_{ij}(b_j) = c_i$, $\phi_{ij}(b_k) = 0 \quad j \neq k$

Basis von $\mathbb{K}^{n \times m} = \{E_{ij}\}$

$\Rightarrow M_C^B(\phi_{ij}) = E_{ij}$

Verkettungen: Produkt der einzelnen Abb.matrizen: $\phi: V_1 \to V_2 \ , \ \psi: V_2 \to V_3$

$$M_{B_3}^{B_1}(\psi \circ \phi) = M_{B_3}^{B_2}(\psi) \cdot M_{B_2}^{B_1}(\phi)$$

Inverse Abbildung: $\phi: V \to W$ Isomorphismus $\Leftrightarrow$ Abb.matrix $A = M_C^B(\phi)$ invertierbar

Dann gilt für $\phi^{-1}: W \to V \quad M_B^C(\phi^{-1}) = A^{-1}$

Rang ϕ: Rang ϕ = Rang A = Rang $\hat{\phi}$

⇝ $\hat{\phi}$ ist lineare Hülle der Bilder der Standardbasis von $\mathbb{K}^n$
und $\hat{\phi}(e_k)$ ist k-te Spalte von A

Basiswechsel für Homomorphismen: "neue" Basen $\tilde{B}, \tilde{C}$
"alte" Basen B, C

$M_{\tilde{C}}^{\tilde{B}}(\phi) = M_{\tilde{C}}^{C}(id_W) \cdot M_C^B(\phi) \cdot M_B^{\tilde{B}}(id_V)$

Äquivalenz von Matrizen: $A, \tilde{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ äquivalent wenn:

$S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $T \in \mathbb{K}^{m \times m}$ mit $\tilde{A} = T \cdot A \cdot S$ (S, T invertierbar)

⇝ $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ äquivalent wenn $Rg(A) = Rg(B)$

Basiswechsel für Endomorphismen: $\phi: W \to W$, $C, \tilde{C}$ Basen von W

$A = M_C^C(\phi)$, $\tilde{A} = M_{\tilde{C}}^{\tilde{C}}(\phi)$ $T = M_{\tilde{C}}^{C}(id_W)$

Dann ist $\tilde{A} = T \cdot A \cdot T^{-1}$

Ähnliche Matrizen: $A, \tilde{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ähnlich, wenn $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar
und $\tilde{A} = TAT^{-1}$

Duale Abbildung: $\phi: V \to W$

$\phi^*: W^* \to V^*$, $\varphi \mapsto \phi^*(\varphi)$: $v \in V$: $\phi^*(\varphi)(v) = \varphi(\phi(v))$

$M_{B^*}^{C^*}(\phi^*) = \tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$

$\phi^*(c_j^*) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} b_i^*$

$\Rightarrow$ $\phi^*(c_j^*)(b_i) = \tilde{a}_{ij} = a_{ji}$

also $\tilde{A} = A^T$ ~~od~~ $M_{B^*}^{C^*} = M_C^B(\phi)^T$

MATRIZEN

Matrixmultiplikation $A \in \mathbb{K}^{p \times q}$, $B \in \mathbb{K}^{q \times r}$

$C = A \cdot B \in \mathbb{K}^{p \times r}$ $\quad C = (c_{jk})$ mit

$c_{jk} = \sum_{s=1}^{q} a_{js} b_{sk} \quad ; j = 1, \dots, p \quad k = 1, \dots, r$

Inverse Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $\to$ invertierbar (regulär) wenn $Rg(A) = n$ ~~oder det ≠~~
$\Leftrightarrow \det A \neq 0$

A invertierbar, wenn $AA^{-1} = A^{-1}A = E$; $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ Inverse

$\leadsto$ $GL(n, \mathbb{K})$ = Menge aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$
$\leadsto$ bzgl. Matrixmult. Gruppe

Schema zur Berechnung: $\quad 2 \times 2: \; A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$(A \mid E) \leadsto \text{Gauß} \leadsto (E \mid A^{-1})$$

also: links Matrix A, rechts Einheitsmatrix $\leadsto$ umformen bis links Einheitsmatrix

Transponierte Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n} \leadsto A^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$

Vertausche Zeilen und Spalten. Rechenregeln:

(1) $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m \times n} : (A+B)^T = A^T + B^T$ $\qquad \det(A) = \det(A^T)$

(2) $\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times q} : (AB)^T = B^T A^T$

(3) $\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n} : (A^T)^T = A$

(4) $\forall$ invertierbaren $A \in \mathbb{K}^{n \times n} : (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Rang $\quad Rang(A) = Rg(A) = \dim[\underbrace{\underbrace{s_1, \dots, s_n}_{\text{Spaltenvektoren}}}_{\text{Spaltenraum}}] = \dim[\underbrace{\underbrace{z_1, \dots, z_m}_{\text{Zeilenvektoren}}}_{\text{Zeilenraum}}]$
$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

Äquivalenz: $A, \tilde{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ äquivalent, wenn: $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $T \in \mathbb{K}^{m \times m}$ (S, T invertierbar)
mit $\tilde{A} = T \cdot A \cdot S$
$\leadsto$ äquivalent wenn $Rang(A) = Rang(\tilde{A})$

Ähnlichkeit: $A, \tilde{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ähnlich, wenn: $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ (invertierbar)
mit $\tilde{A} = TAT^{-1}$

Spur: Spur A = Summe der Diagonalelemente von A

$\leadsto$ ϕ diagonalisierbar: $\quad Spur\, \phi = \sum_{\lambda \in Spec(\phi)} \lambda \cdot \dim(E_\lambda(\phi))$

Determinante: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $\quad \det(A) = |A|$ $\quad$! beim multiplizieren einer Zeile/Spalte mit einem Faktor a $\frac{1}{a}$ vor det schreiben!

> $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$ (Spaltenvekt.) lin. abhängig $\Rightarrow \det(A) = 0$

> Dreiecksmatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Zeilenentwicklung: Entwicklung nach der l-ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{lk} \det(A_{lk})$$

mit A_{lk} : Matrix, die durch streichen der l-ten Zeile und k-ten Spalte von A entsteht

Spaltenentwicklung: Entwicklung nach der l-ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} a_{jl} \det(A_{jl})$$

mit A_{jl} = Matrix, die durch streichen der j-ten Zeile und l-ten Spalte von A entsteht

> $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Invertierbare (=reguläre) Matrix: A regulär wenn $\det A \neq 0$ $\quad (A \in \mathbb{K}^{n \times n})$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Ähnliche Matrizen: ~~det (n~~ $\det(T^{-1} \cdot A T) = \det A$

Endomorphismen: $\phi: V \to V$, $A = M_B^B(\phi)$

$\det \phi = \det A$ unabh. von B

Inverse eine Matrix: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (d_{jk}) \quad \text{mit } d_{jk} = (-1)^{k+j} \det(A_{kj})$$

streiche k-te Zeile, j-te Spalte

EIGENWERTE

$\phi: V \to V$ Endomorphismus
$A = M_B^B(\phi)$ bzgl. B, $x_B = \Theta_B(x)$

$\rightsquigarrow \boxed{\phi(x) = \lambda x \iff A x_B = \lambda x_B}$

evtl. abh. vom zugrunde gelegten Körper

λ ist Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $\iff \det(A - \lambda E_n) = 0$

$\iff$ es ex. $x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0$ mit $(A - \lambda E_n) \cdot x = 0$

$\rightsquigarrow$ x heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ $\quad \phi(x) = \lambda x \,/\, Ax = \lambda x$

$\rightsquigarrow$ alle Eigenvektoren zu einem λ bilden mit Nullvektor Eigenraum E_λ

$$E_\lambda = \mathrm{kern}(\phi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$$

$\rightsquigarrow$ Menge aller Eigenwerte: Spektrum

$\rightsquigarrow$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow x_1$ und x_2 lin. unabh. $\Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$

$\rightsquigarrow$ V n-dim. / $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: höchstens n Eigenwerte

Charakteristisches Polynom: $p_A = \det(A - X \cdot E_n)$

$\rightsquigarrow$ λ Nullstelle von $p_A \iff \lambda$ Eigenwert

$\rightsquigarrow$ E_λ ist Lösungsraum des LGS $(A - \lambda E_n)x = 0$

Fundamentalsatz der Algebra: jedes komplexe Polynom mit grad ≥ 1 hat mind. eine Nullstelle

Diagonalisierbare Endomorphismen:

$\phi: V \to V$ Endomorphismus, V n-dim.

> ϕ diagonalisierbar: es gibt eine Abb.matrix die Diagonalgestalt hat

> A diagonalisierbar wenn zu einer Diagonalmatrix $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$ ähnlich

> ϕ diagonalisierbar $\iff$ es gibt in V eine Basis aus Eigenvektoren von ϕ
$\iff$ V ist direkte Summe der Eigenräume von ϕ
$\iff$ Summe der Dimensionen der Eigenräume von ϕ ist n

$\rightsquigarrow$ diagonalisierbar wenn n verschiedene Eigenwerte (ϕ V n-dim. / $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$)

> ϕ diagonalisierbar wenn: $p_\phi = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k}$ darstellbar
und $\dim \mathrm{Bild}(\phi - \lambda_i \mathrm{id}_V) = n - r_i \iff \dim E_{\lambda_i} = r_i$

$\rightsquigarrow$ also wenn: algebraische Vielfachheit $\hat{=} r_i \overset{!}{=}$ geometrische Vielfachheit $\hat{=} \dim E_{\lambda_i}$

$\rightsquigarrow$ $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ Basis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvekt. von A
dann ist mit $S = (v_1 | v_2 | \cdots | v_n)$: $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte von A

LGS

! beim Teilen ggf. Fallunterscheidung ($=0$ / $\neq 0$)

- 1 - Ergänzungstrick

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$ } Nullzeile einfügen ⇝ zu unterer Dreiecksmatrix ergänzen

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \cancel{0}\,-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cancel{0}\,-1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot a + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} a, b \in \mathbb{R}$$

> $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar: LGS $A\cdot x = b$ eindeutig lösbar mit $x = A^{-1}\cdot b$

Lösbarkeit

LGS $Ax = b$ $\hat{=}$ lin. Abb. $\phi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$

> $Ax = b$ lösbar $\iff$ $b \in \phi(\mathbb{K}^n)$ (und $\phi(\mathbb{K}^n) = [s_1, \dots, s_n]$: Spaltenvekt.)

$\iff$ $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|b)$

homogenes LGS: hat stets triviale Lösung $x_0 = 0 \in \mathbb{K}^n$

⇝ hat nichttriviale Lösungen $\iff$ $\ker\phi \neq \{0\}$ $\iff$ $\dim(\ker\phi) > 0$
$\iff$ $\mathrm{Rang}\,\phi < \dim(\mathbb{K}^n) = n$
$\iff$ $\mathrm{Rang}\,A < n$

Ist $d = n - \mathrm{Rang}\,A > 0$:
dann gibt es d lin. unabh. Lösungen $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{K}^n$
⇝ $\mathcal{L}_h$ ist Linearkomb. der $v_1, \dots, v_d$

Inhomogenes LGS: besitzt eine Lösung $\iff$ homogenes LGS besitzt nur triviale Lsg.

$\mathcal{L}$ = Lösungsmenge eines lösbaren LGS, $\mathcal{L}_h$ Lösungsmenge des zug. homog. LGS,
$x_0 \in \mathcal{L}$ beliebige Lösung von $Ax = b$

Dann gilt: $\mathcal{L} = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid \exists v \in \mathcal{L}_h : x = x_0 + v \} = x_0 + \mathcal{L}_h = x_0 + \ker\phi$

> homogenes LGS hat triviale Lösung $\iff$ $\det A \neq 0$

> LGS mit $\det A \neq 0$ $\Rightarrow$ es gibt genau eine Lsg. $x = A^{-1}b$

⇝ Cramersche Regel: LGS mit $\det A \neq 0$ hat genau eine Lsg $x = (x_1, \dots, x_n)$

mit $x_k = \dfrac{\det_k(A)}{\det A}$ $(k = 1, \dots, n)$

mit $\det_k(A)$ = ersetzte k-te Spalte von A durch Vektor b

Matrixmult.: $A \in \mathbb{K}^{p\times q}$, $B \in \mathbb{K}^{q\times r}$
$C = AB \in \mathbb{K}^{p\times r}$
$C = (c_{jk})$ mit $c_{jk} = \sum_{s=1}^{q} a_{js} b_{sk}$, $j = 1 \dots p$, $k = 1 \dots r$

ABBILDUNGEN / RELATIONEN

Abbildungen $f: A \to B$

Surjektivität: f surjektiv $\iff f(A) = B$, d.h. $\forall b \in B \; \exists a \in A: f(a) = b$

Injektivität: f injektiv $\iff \forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\iff \forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Bijektivität: f bijektiv $\iff$ f surjektiv und f injektiv

→ für endliche Mengen: sei $|B| < |A|$:
- ⇝ Surj. möglich, da A mehr Element als B enthält kann es für jedes $b \in B$ ein Urbild $a \in A$ geben
- ⇝ Inj. nicht möglich, da aus $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow |B| \geq |A|$

$f: A \to A$, A endlich: f injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv $\Rightarrow$ f ist bijektiv

Relationen sei $\sim$ eine Relation

reflexiv: $a \sim a$ transitiv: $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

symmetrisch: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ antisymmetrisch: $a \sim b \wedge b \sim a \Rightarrow b = a$

Restklassen modulo n Es sei $n \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{Z}$:

$a \sim b \iff n$ teilt $b - a \iff \exists k \in \mathbb{Z}: b - a = n \cdot k \iff b = n \cdot k + a$

$\iff a \equiv b \pmod{n}$

$\tilde{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a\} = \cancel{\{x \in \mathbb{Z}} \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$ Restklasse von a