Parabolische Zylinderfunktionen

Alain Keller, Thierry Schwaller

OST RJ

02.05.2022

Github: https://github.com/tschwall/MathSemParabCyl

Agenda

- Komplexe Funktionen & E-Felder
- Parabolische Zylinderkoordinaten
- Helmholtz Gleichung im parab. Koordinatensystem
- Lösung der Differentialgleichung

Recap: Komplexe Funktionen

- Reminder zu MathSem Woche 7

$$F(z) = U(x, y) + jV(x, y)$$

Recap: Komplexe Funktionen

- Reminder zu MathSem Woche 7

$$F(z) = U(x, y) + jV(x, y)$$

- Wenn differenzierbar (Winkel bleiben erhalten), dann gilt:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \qquad \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$$

Recap: Komplexe Funktionen

- Reminder zu MathSem Woche 7

$$F(z) = U(x, y) + jV(x, y)$$

- Wenn differenzierbar (Winkel bleiben erhalten), dann gilt:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \qquad \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$$

- Daraus folgt direkt:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 0}_{\nabla^2 U(x,y)=0} \qquad \underbrace{\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2} = 0}_{\nabla^2 V(x,y)=0}$$

Bestimmung von E-Feldern

$$\nabla^2 U(x, y) = 0 \qquad \nabla^2 V(x, y) = 0$$

Bestimmung von E-Feldern

$$\nabla^2 U(x,y) = 0 \qquad \nabla^2 V(x,y) = 0$$

- Potential an einem quellenfreien Punkt kann geschrieben werden als

$$\nabla^2 \phi(x,y) = 0$$

Bestimmung von E-Feldern

$$\nabla^2 U(x,y) = 0 \qquad \nabla^2 V(x,y) = 0$$

- Potential an einem quellenfreien Punkt kann geschrieben werden als
$$\nabla^2 \phi(x,y) = 0$$
- Nun kann z.B $U(x,y)$ als Potential betrachtet werden
$$U(x,y) = \phi(x,y)$$

Bestimmung von E-Feldern

$$\nabla^2 U(x, y) = 0 \qquad \nabla^2 V(x, y) = 0$$

- Potential an einem quellenfreien Punkt kann geschrieben werden als
$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0$$
- Nun kann z.B $U(x, y)$ als Potential betrachtet werden
$$U(x, y) = \phi(x, y)$$
- $V(x, y)$ orthogonal dazu $\longrightarrow$ E-Feldlinien

Bestimmung von E-Feldern

$$\nabla^2 U(x,y) = 0 \qquad \nabla^2 V(x,y) = 0$$

- Potential an einem quellenfreien Punkt kann geschrieben werden als
$$\nabla^2 \phi(x,y) = 0$$
- Nun kann z.B $U(x,y)$ als Potential betrachtet werden
$$U(x,y) = \phi(x,y)$$
- $V(x,y)$ orthogonal dazu $\longrightarrow$ E-Feldlinien
- Randbedingungen / Äquipotentialflächen angeben
$$U(x,y) = A_1 \qquad U(x,y) = A_2$$

Beispiel $F(z) = z^2$

$$\begin{aligned} F(z) = z^2 &= (x + jy)^2 \\ &= \underbrace{x^2 - y^2}_{U(x,y)} + j \underbrace{2xy}_{V(x,y)} \end{aligned}$$

Beispiel $F(z) = z^2$

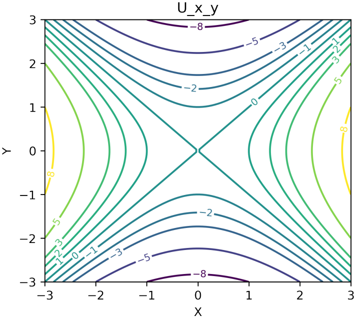
$$F(z) = z^2 = (x + jy)^2$$
$$= \underbrace{x^2 - y^2}_{U(x,y)} + j \underbrace{2xy}_{V(x,y)}$$

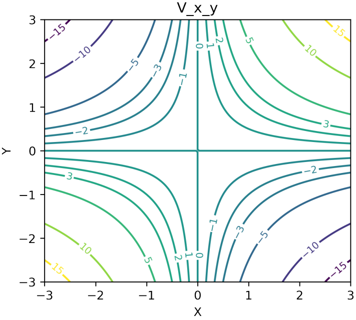
$$U(x, y) = x^2 - y^2 \qquad V(x, y) = 2xy$$

Beispiel $F(z) = z^2$

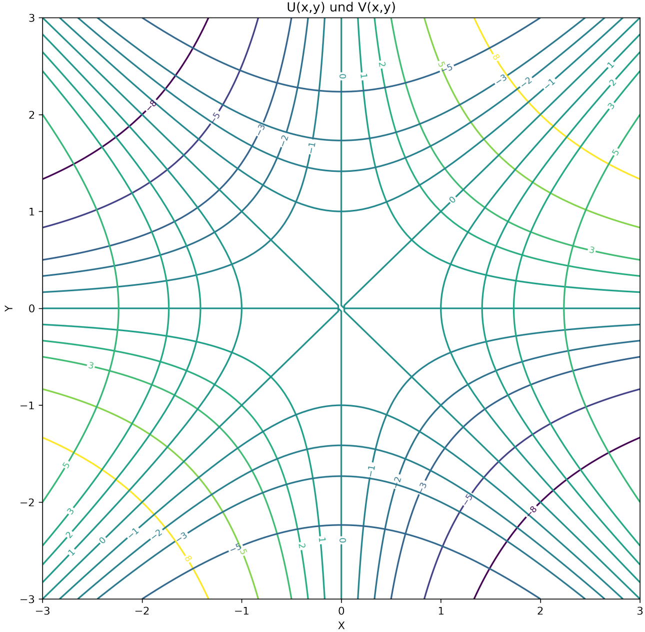
$$F(z) = z^2 = (x + jy)^2$$
$$= \underbrace{x^2 - y^2}_{U(x,y)} + j \underbrace{2xy}_{V(x,y)}$$

$$U(x,y) = x^2 - y^2 \qquad V(x,y) = 2xy$$



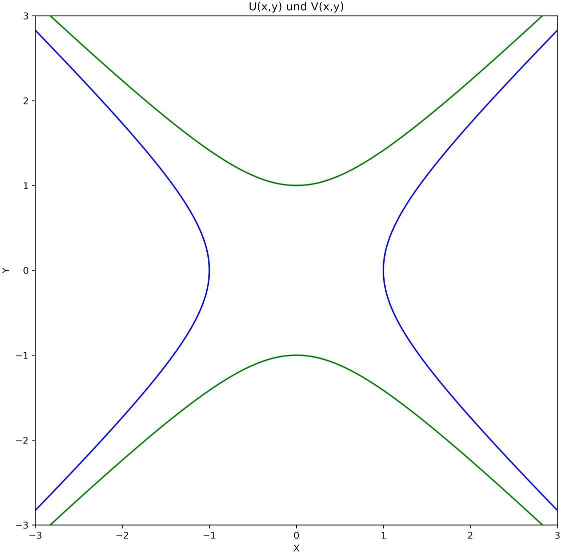


Beispiel $F(z) = z^2$

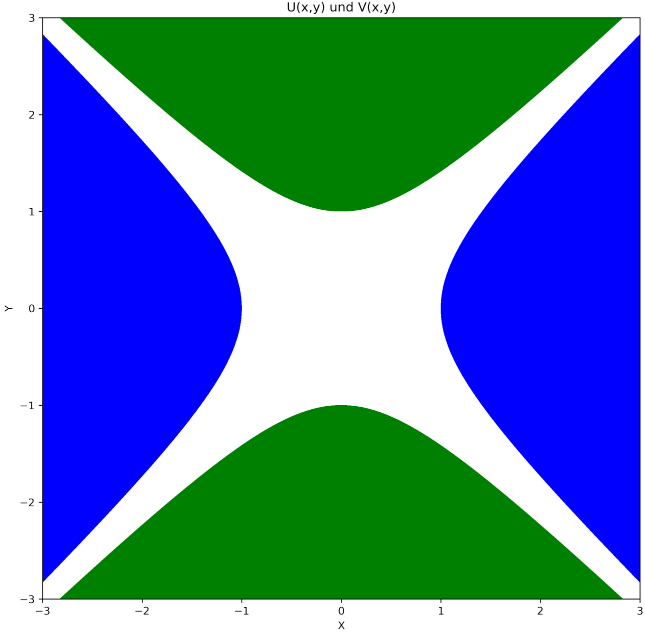


Beispiel $F(z) = z^2$

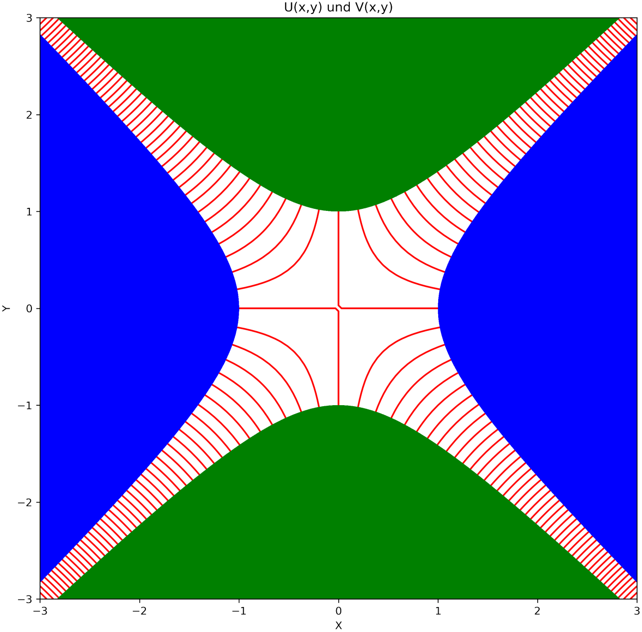
$$U(x, y) = x^2 - y^2 = 1 \qquad U(x, y) = x^2 - y^2 = -1$$



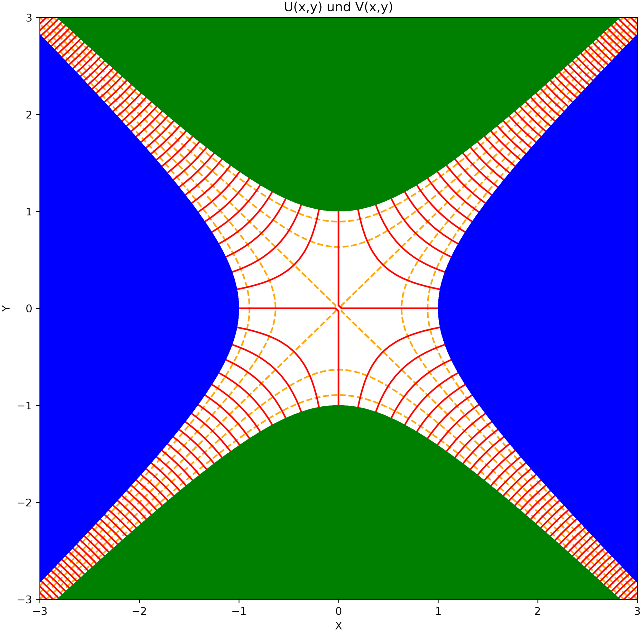
Beispiel $F(z) = z^2$



Beispiel $F(z) = z^2$



Beispiel $F(z) = z^2$



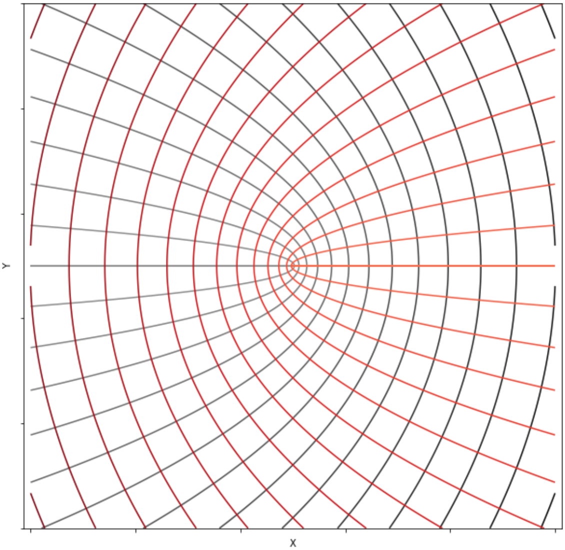
$F(z) = \sqrt{z}$

$$F(z) = \sqrt{z}$$
$$z = x + jy = re^{j\theta}$$

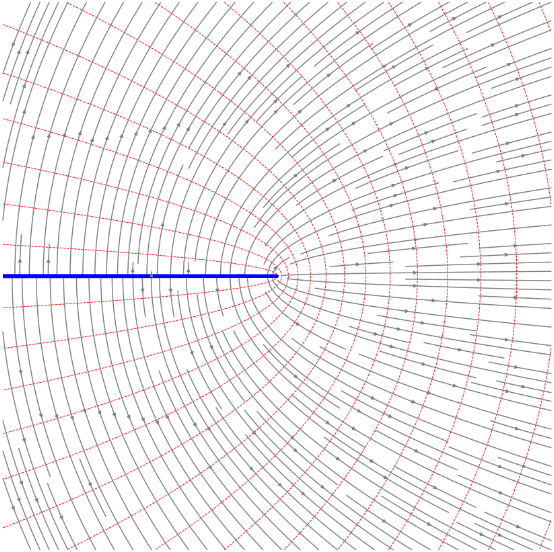
In Real und Imaginärteil ausgeschrieben

$$F(z) = \underbrace{\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}}_{U(x,y)} + j\underbrace{\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}}_{V(x,y)}$$

$F(z) = \sqrt{z}$



Elektrisches Feld einer Semiinfiniten Platte



Parabolische Zylinderkoordinaten

- Koordinaten in (σ, τ, z)
- Linien mit konstantem σ oder τ sind Parabeln mit gemeinsamen Brennpunkt
- Beziehungen zu kartesischen Koordinaten:

$$x = \sigma\tau, \quad y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2), \quad z = z$$

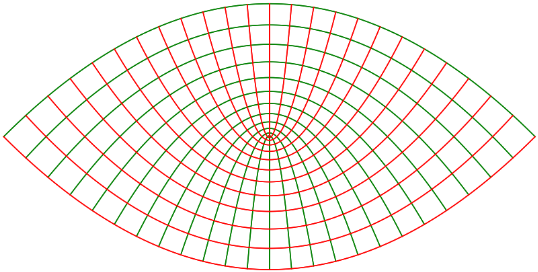


Abbildung 1: Grün: $\tau = \text{const}$, Rot: $\sigma = \text{const}$

Parabolische Zylinderkoordinaten

Parabeln mit konstantem τ oder σ

$$2y = \frac{x^2}{\sigma^2} - \sigma^2, \quad 2y = -\frac{x^2}{\tau^2} + \tau^2$$

Parabolische Zylinderkoordinaten

Parabeln mit konstantem τ oder σ

$$2y = \frac{x^2}{\sigma^2} - \sigma^2, \quad 2y = -\frac{x^2}{\tau^2} + \tau^2$$

Umformen von

$$U(x,y) = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} = C_1, \quad V(x,y) = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}} = C_2$$

ergibt:

$$2x = \frac{y^2}{2C_1^2} - 2C_1^2, \quad 2x = -\frac{y^2}{2C_2^2} + 2C_2^2$$

Helmholtz Gleichung im parabolischen Zylinderkoordinatensystem

Helmholtz Gleichung:

$$\Delta f(x, y) = \lambda f(x, y)$$

Helmholtz Gleichung im parabolischen Zylinderkoordinatensystem

Helmholtz Gleichung:

$$\Delta f(x, y) = \lambda f(x, y)$$

Laplace-Operator im parabolischen Zylinderkoordinatensystem

$$\Delta = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \quad \underbrace{+ \frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{\text{Vernachlässigt}}$$

Helmholtz Gleichung im parabolischen Zylinderkoordinatensystem

Helmholtz Gleichung:

$$\Delta f(x, y) = \lambda f(x, y)$$

Laplace-Operator im parabolischen Zylinderkoordinatensystem

$$\Delta = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \underbrace{+ \frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{\text{Vernachlässigt}}$$

Helmholtz Gleichung in 2D

$$\Delta f(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left(\frac{\partial^2 f(\sigma, \tau)}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 f(\sigma, \tau)}{\partial \tau^2} \right) = \lambda f(\sigma, \tau)$$

Lösung der Helmholtz Gleichung mit Separation

Separation $f(\sigma, \tau) = g(\tau)h(\sigma)$

Lösung der Helmholtz Gleichung mit Separation

Separation $f(\sigma, \tau) = g(\tau)h(\sigma)$

$$\frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left(\frac{\partial^2 g(\tau)h(\sigma)}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 g(\tau)h(\sigma)}{\partial \tau^2} \right) = \lambda g(\tau)h(\sigma)$$

Lösung der Helmholtz Gleichung mit Separation

Separation $f(\sigma, \tau) = g(\tau)h(\sigma)$

$$\frac{1}{\sigma^2 + \tau^2}\left(\frac{\partial^2 g(\tau)h(\sigma)}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 g(\tau)h(\sigma)}{\partial \tau^2}\right) = \lambda g(\tau)h(\sigma)$$

Vereinfachen und mit $\frac{1}{h(\sigma)g(\tau)}$ multiplizieren

$$\frac{1}{h(\sigma)}\underbrace{\frac{\partial^2 h(\sigma)}{\partial \sigma^2}}_{h''(\sigma)} + \frac{1}{g(\tau)}\underbrace{\frac{\partial^2 g(\tau)}{\partial \tau^2}}_{g''(\tau)} = \lambda(\sigma^2 + \tau^2)$$

Lösung der Helmholtz Gleichung mit Separation

Separation $f(\sigma, \tau) = g(\tau)h(\sigma)$

$$\frac{1}{\sigma^2 + \tau^2}\left(\frac{\partial^2 g(\tau)h(\sigma)}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2 g(\tau)h(\sigma)}{\partial\tau^2}\right) = \lambda g(\tau)h(\sigma)$$

Vereinfachen und mit $\frac{1}{h(\sigma)g(\tau)}$ multiplizieren

$$\frac{1}{h(\sigma)}\underbrace{\frac{\partial^2 h(\sigma)}{\partial\sigma^2}}_{h''(\sigma)} + \frac{1}{g(\tau)}\underbrace{\frac{\partial^2 g(\tau)}{\partial\tau^2}}_{g''(\tau)} = \lambda(\sigma^2 + \tau^2)$$

$$\frac{h''(\sigma)}{h(\sigma)} + \frac{g''(\tau)}{g(\tau)} = \lambda(\sigma^2 + \tau^2)$$

Lösung der Helmholtz Gleichung mit Separation

Separation $f(\sigma,\tau) = g(\tau)h(\sigma)$

$$\frac{1}{\sigma^2+\tau^2}\left(\frac{\partial^2 g(\tau)h(\sigma)}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2 g(\tau)h(\sigma)}{\partial\tau^2}\right) = \lambda g(\tau)h(\sigma)$$

Vereinfachen und mit $\frac{1}{h(\sigma)g(\tau)}$ multiplizieren

$$\frac{1}{h(\sigma)}\underbrace{\frac{\partial^2 h(\sigma)}{\partial\sigma^2}}_{h''(\sigma)} + \frac{1}{g(\tau)}\underbrace{\frac{\partial^2 g(\tau)}{\partial\tau^2}}_{g''(\tau)} = \lambda(\sigma^2+\tau^2)$$

$$\frac{h''(\sigma)}{h(\sigma)} + \frac{g''(\tau)}{g(\tau)} = \lambda(\sigma^2+\tau^2)$$

Variablen separieren

$$\frac{h''(\sigma)}{h(\sigma)} - \lambda\sigma^2 = -\frac{g''(\tau)}{g(\tau)} + \lambda\tau^2 = \text{konstant} = \mu$$

Lösung der Helmholtz Gleichung mit Separation

$$\frac{h''(\sigma)}{h(\sigma)} - \lambda\sigma^2 = -\frac{g''(\tau)}{g(\tau)} + \lambda\tau^2 = \mu$$

Gibt folgende zwei Differentialgleichungen

$$h''(\sigma) - (\lambda\sigma^2 + \mu)h(\sigma) = 0$$
$$g''(\tau) - (\lambda\tau^2 - \mu)h(\tau) = 0$$

Lösung der Differentialgleichung: Whittaker Funktion

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2} \right) W = 0$$

hat die linear unabhängigen Lösungen

$$W_{k,m}(z) = e^{-z/2} z^{m+1/2} \, {}_1F_1(\frac{1}{2} + m - k, 1 + 2m; z) \qquad \text{und}$$

$$W_{k,-m}(z).$$

$W_{k,m}(z)$ ist als Whittaker Funktion bekannt

Lösung der Differentialgleichung

Substitution von $w(z) = z^{-1/2} W_{k,\pm 1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right)$ in die Whittaker Differentialgleichung

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}{z^2} \right) W = 0$$

Lösung der Differentialgleichung

Substitution von $w(z) = z^{-1/2} W_{k,\pm 1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right)$ in die Whittaker Differentialgleichung

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}{z^2}\right) W = 0$$

ergibt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \left(\frac{1}{4} z^2 - 2k\right) w = 0$$

mit $w(z)$ als Lösung.

Lösung der Differentialgleichung

Substitution von $w(z) = z^{-1/2} W_{k,\pm 1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right)$ in die Whittaker Differentialgleichung

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}{z^2}\right) W = 0$$

ergibt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \left(\frac{1}{4}z^2 - 2k\right) w = 0$$

mit $w(z)$ als Lösung.

$$h''(\sigma) - (\lambda\sigma^2 + \mu)h(\sigma) = 0$$
$$g''(\tau) - (\lambda\tau^2 - \mu)h(\tau) = 0$$

Lösung der Differentialgleichung

$w(z)$ kann auch mit der hypergeometrische Funktion ${}_1F_1$ ausgedrückt werden.

$$w_1(z) = z^{-1/2} W_{k,-1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right) = 2^{-1/4} e^{-z^2/4}\, {}_1F_1\left(\frac{1}{4} - k, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right)$$

$$w_2(z) = z^{-1/2} W_{k,1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right) = 2^{-3/2} e^{-z^2/4} z\, {}_1F_1\left(\frac{3}{4} - k, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right)$$

$$w_k(z) = \alpha_1(k) w_1(k,z) - \alpha_2(k) w_2(k,z)$$

Lösung der Differentialgleichung

$w(z)$ kann auch mit der hypergeometrische Funktion ${}_1F_1$ ausgedrückt werden.

$$w_1(z) = z^{-1/2} W_{k,-1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right) = 2^{-1/4} e^{-z^2/4} {}_1F_1\left(\frac{1}{4} - k, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right)$$
$$w_2(z) = z^{-1/2} W_{k,1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right) = 2^{-3/2} e^{-z^2/4} z\, {}_1F_1\left(\frac{3}{4} - k, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right)$$
$$w_k(z) = \alpha_1(k) w_1(k,z) - \alpha_2(k) w_2(k,z)$$

$$\alpha_1 = \cos\left[\pi\left(1/4 - k\right)\right] \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(1/4 + k\right)}{2^{1/4-k}}$$
$$\alpha_2 = \sin\left[\pi\left(1/4 - k\right)\right] \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(3/4 + k\right)}{2^{-1/4-k}}$$

Lösung der Differentialgleichung