1 Kapitel 1: Reele Zahlen

1.1 Summen / Reihen

- sup(Menge) = ”beste” obere Schranke
- inf(Menge) = ”beste” untere Schranke
- sup und inf sind maximum und minimum wenn sie im Zahlenbereich enthalten sind

1.2 Intervall

Ein Intervall ist ein Ausschnitt aus dem Zahlenstrahl

$$\text{Abgeschlossenes Intervall: } [a;b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\} \tag{1}$$

$$\text{Offenes Intervall: } (a;b) = \{x \in R \mid a < x < b\} \tag{2}$$

1.3 Binominalzahlen / Binomischer Satz S.12

Binominalzahl:

$$c(k,n) = \binom{n}{k} = \text{Anzahl Möglichkeiten} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3}$$

Binomischer Satz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} * b^k \tag{4}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \tag{5}$$

1.4 Beweisen S.5

1.4.1 Vollständige Induktion

Verankerung
Beweisen für erstes n(meistens n = 1)

Vererbung
Annahme: Formel korrekt für n
Schritt: Beweisen das Formel korrekt für n + 1

1.5 Ungleichungen S.30

Bernouli-Ungleichung

$$(1+a)^n > 1 + n * a \tag{6}$$

Binomische-Ungleichung

$$|a * b| \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \tag{7}$$

Mittelwerte Ungleichung

$$\text{Harm. Mittel (HM)} \le \text{Geom. Mittel (GM)} \le \text{Arit. Mittel (AM)} \tag{8}$$

2 Kapitel 2: Funktionen

2.1 Begriffsdefinition S.59

- f ungerade → f(-x) = -f(x) (Punktsymmetrisch an (0,0))
- f ungerade → f hat nur ungerade Potenzen
- f gerade f(-x) = f(x) (Graph symmetrisch zur y-Achse)
- Umkehrbarkeit f^{-1} "Von Wert y → x" (Output zu Input)
  y = f(x) → $x = f^{-1}(y)$
- Restriktion Teil einer Funktion
- Monotonie ((streng) monoton steigend,(streng) monoton fallend)

2.2 Elementare Transformation

Immer zuerst Strecken und dann verschieben. Schrittweise Vorgehen

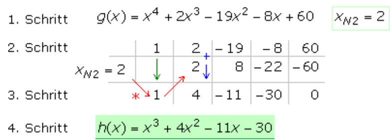
- **x: Verschiebung** (x-b) anstatt x → f(x-b) (b in x-Richtung)
- **x: Streckung** a * x statt x → f(a*x) (Streckfaktor ist $\frac{1}{a}$)
- **y: Verschiebung** y = f(x) + B (B in y-Richtung)
- **y: Streckung** y = f(x) * A

2.3 Horner-Zerlegung S.967

Wird für die Zerlegung von polynomischen Funktionen gebraucht.(P.B.Z)

$$f(x) = (x - x_1) * (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}xn - 2 + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0) \tag{9}$$

Spezialfall f(x_1) = 0 → Schema liefert Faktorzerlegung



2.4 Gebrochene Funktionen S.15

$$\frac{\text{Polynom im Zähler}}{\text{Polynom im Nenner}} \tag{10}$$

Wichtig: Nennernullstellen wegnehmen aus Definitionsbereich

2.5 Partialbruch Zerlegung P.B.Z S.15

1. Echt gebrochen? Nennergrad > Zählergrad
2. Nenner faktorisieren ! Geht immer mindestens bis Grad 2
   Zerlegungsansatz $\frac{\text{Zähler 1}}{\text{Faktor 1}} + \frac{\text{Zähler 2}}{\text{Faktor 2}} + \cdots + \frac{\text{Zähler n}}{\text{Faktor n}}$
   Berechnen der Zähler 1 bis n (Einsetzen, Koeffizientenvergleich)

2.6 Hyperbolische Funktionen Sinh / Cosh S.89 Area S.94

$$cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

3 Kapitel 3: Folgen

3.1 Allgemein

Folgen = Funktionen f(N) → R ; f(1) = f_1
Geometrische Folge → $a_1 q^{n-1}$ $(q \in R)$
Beschränkt: $W_f \in$ endliches Intervall

Monotonie:
streng monoton sinkend → $f_{n+1} < f_n (n \in N)$ $f_{n+1} - f_n < 0$; $\frac{f_{n+1}}{f_n} < 1$ $(f_n > 0)$
streng monoton steigend → $f_n < f_{n+1}$ $(n \in N)$

3.1.1 Begriffe S.470

- Konvergent → Die Werte nähern sich immer mehr einem Wert in R an
- Bestimmte Divergenz → Die Werte nähern sich entweder -∞ oder ∞ an
- Unbestimmte Divergenz → Die Werte nähern sich keinem bestimmten Wert an
- Einschwingen → a_n alterniert (wechselt zwischen + und - bei jedem Schritt) und $\lim\limits_{n\to\infty a_n} = 0$
- Partialsumme → $s_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i)$

3.2 Rekursion

Eine rekursive Fomel ist eine Formel in welche das nächste Element durch die vorhergehenden Werte ausgedrückt wird (Fibonacci-Folge).

$$f_{n+1} = \text{Formel aus } f_n; f_{n-1}; \ldots; f_1(n \in N, \text{Initialwert } f_1 \text{ mind. benötigt}) \tag{11}$$

Satz von Bolzano: Jede monoton beschränkte Folge konvergiert.
Konvergenz: $n + 1 = n$

3.3 Eulerische Zahl / Exponentialfunktionen S.478

$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \tag{12}$$

$$e^{\ln(x)} = x \tag{13}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \to \text{Konvergiert!} \tag{14}$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n \to \text{Konvergiert!} \tag{15}$$

$$e^x \geq 1 + x$$

Dies ist eine monoton steigende Funktion ohne Sprünge.

4 Grenzwerte f

Funktion → S.54 Reihen → S. 472

4.1 Grenzwerte

- Spez. Gesetze mit + und - ∞
- Konvergenz kann mit normalen Operationen berechnet werden / Grenzwerte verrechnen sich wie Zahlen

4.2 Grenzwert Berechnungen

Mit einsetzen der Grenzwerte von verschiedenen "einfacheren" Termen kann ein "komplizierterer" berechnet werden.

Option 1: Erweitern → Division höchster Potenz
Option 2: Erweitern → Gegenterm (+ und - tauschen)
Option 3: Einschliessung $a_n \leq c_n \leq b_n$
Option 4: Bernoulli - Hopital Gleichung: (nur wenn $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 * \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$)
Wenn $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$:

Bronstein Seite 57

4.3 Asymptoten / Polstellen

- **Polstellen** → Unbestimmte Punkte in einer Funktion
- **Asymptoten** → Nenner durch Zähler dividieren (ganzrat. F (=Asymtote) + echt gebrochenen F)

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
$\lim_{x \to \pm\infty} r(x) =$	0	$\frac{a_m}{b_n}$	$+\infty$ oder $-\infty$
Asymptote	x-Achse	Parallele zur x-Achse $y = g(x) = \frac{a_m}{b_n}$	Graph von $g: x \mapsto g_{m-n}(x)$ (s (4.14))

4.4 Übertragungsprinzip

4.5 Stetigkeit

Eine Stetige-Funktion ist eine Funktion welche mit einem Strich ohne absetzen gezeichnet werden kann. Es gibt drei Arten von unstetigen Funktionen:

- **Hebbare Funktionen** Definitionslücken (zum Beispiel x = 1 ist unbestimmt)

$$\frac{x^2 + 1}{x - 1} \tag{16}$$

- **Sprung / 1. Art** g^+ und g^- existieren sind aber ungleich. (Sprung zwischen zwei aufeinander folgenden Werten)
- **2. Art** Oszilattion / g^+ oder g^- existieren in x_0 nicht