1 Kurvendiskussion S.261

1. Definitionsbereich bestimmen
2. Nullstellen bestimmen
3. Symmetrie untersuchen (f(-x) = f(x)) / Periodizität
4. Verhalten in die Unendlichkeit

$$\lim_{n \to \pm\infty} f(x)$$

5. Extremalwerte / Wendepunkte
Erste Ableitung = 0 setzen.
Wenn **zweite Ableitung > 0** ist ist der gefundene Punkt ein **Minimum** wenn die **zweite Ableitung < 0** ist ist der Punkt ein **Maximum**.
Wenn die **zweite Ableitung = 0** ist und die **dritte Ableitung ≠ 0**, dann liegt ein **Wendepunkt** vor.

6. Krümmungsverhalten
Wenn f"(x) < 0 dann **konkav, rechtsgekrümmt, Tangente über der Funktion**
Wenn f"(x) > 0 dann **konvex, linksgekrümmt, Tangente unter der Funktion**

7. Grenzwertverhalten
An Randstellen, bei Definitionslücken und evtl. Asymptotik

2 Taylor-Polynome s.455

Taylor-Polynome von f(x):
1. Bestimmen der ersten n Ableitungen von f(x)
2. Werte an Arbeitsstelle a berechnen
3. Als Summe notieren

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a) * (x-a)^k)}{k!}$$

$p_n(x)$ **beinhaltet die** $f^{(n)}$ **te Ableitung** sectionLagrange

$$R_n = |\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}|$$

n → Höchste Ableitung in Taylor
h → Abstand zur Arbeitsstelle
ξ → Zahl im Bereich von x_{max} und x_{min}

3 Trigonometrie

Limits:
Arctangents $\rightarrow +\infty = \frac{\pi}{2} \rightarrow -\infty = -\frac{\pi}{2}$
Arccotangents $\rightarrow +\infty = 0 \rightarrow -\infty = \pi$

4 Fehlerfortplanzung

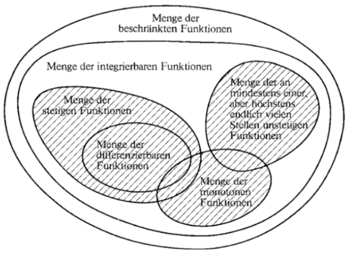
Relative Fehler:

$$\frac{dy}{y} = \frac{f'(x) * dx}{f(x)}$$

Absolute Fehler:

$$dy = f'(x) * dx$$

5 Integrierbare Funktionen



6 Winkel zwischen Funktionen

Allgemein:

$$tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 * m_2}$$

Senkrecht:

$$m1 = -\frac{1}{m_2}$$

7 Mittelwertsatz

Differenzrechnungen:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

MWS Integralrechnen:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi)$$

8 Integralfunktionen / Stammfunktionen

An Beispiel von $f(t) = cos(t)$:
Stammfunktion:

$$sin(t) + K \tag{1}$$

Integralfunktion (Schneidet immer die X - Achse):

$$I(x) = \int_c^x cos(t)dt = sin(t)|_c^x = sin(x) - sin(c)$$

9 Wichtige Seiten Bronstein

n-te Ableitung → S.452

Rechenregeln mit uneigentlichen „Grenzwerten“ $\pm\infty$

Bestimmte Divergenz, bestimmte Formen, unbestimmte Formen

Die eigentlichen (reellen) Grössen wie 0, 1 oder $g \in R$ bzw. uneigentlichen Grössen $\pm\infty$ sind als Grenzwerte bzw. als bestimmtes Divergenzverhalten von Funktionen zu interpretieren.

Bestimmte Formen

$\infty + \infty = \infty$ $\qquad -\infty - \infty = -\infty$ $\qquad 0 \cdot [a,b] = 0 \cdot \text{"}beschränkt\text{"} = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$g + \infty = \infty$ $\qquad g - \infty = -\infty \quad (g \in \mathbb{R})$

$\infty \cdot \infty = \infty$ $\qquad -\infty \cdot (\infty) = -\infty$ $\qquad g \cdot \infty = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases} \quad (g \in \mathbb{R} - \{0\})$

$\frac{1}{\infty} = 0$ $\qquad \frac{g}{\infty} = 0 \quad (g \in \mathbb{R})$

$\frac{\infty}{0+} = \infty$ $\qquad \frac{\infty}{0-} = -\infty$ $\qquad \frac{\infty}{g} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases} \quad (g \in \mathbb{R} - \{0\})$

$\frac{1}{0+} = \infty$ $\qquad \frac{g}{0+} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases} \quad (g \in \mathbb{R} - \{0\})$

$\frac{1}{0-} = -\infty$ $\qquad \frac{g}{0-} = \begin{cases} -\infty & g > 0 \\ \infty & g < 0 \end{cases} \quad (g \in \mathbb{R} - \{0\})$

Unbestimmte Formen (!)

Für die folgenden Formen gibt es keine allgemeinen Regeln; das Grenzverhalten ist abhängig von den beteiligten Funktionen und mittels speziellen Methoden zu überprüfen bzw. zu berechnen.

$\frac{0}{0} = ?$ $\qquad \frac{\infty}{\infty} = ?$ $\qquad \infty \cdot 0 = ?$ $\qquad 0 \cdot \infty = ?$

$\infty - \infty = ?$ $\qquad 0^0 = ?$ $\qquad \infty^0 = ?$ $\qquad 1^\infty = ?$

Folgende Tabelle faßt die Ergebnisse von Abschnitt 8.3 übersichtlich zusammen:

f	D_f	f'	$D_{f'}$	f	D_f	f'	$D_{f'}$
$x^n, n\in\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\arcsin x$	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\frac{1}{x^n}, n\in\mathbb{N}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\arccos x$	$[-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\frac{x}{\lvert x\rvert}=\frac{\lvert x\rvert}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	A[1]	$\frac{1}{\cos^2 x}=$ $1+\tan^2 x$	A[1]	$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2 x}=$ $1-\tanh^2 x$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	B[2]	$-\frac{1}{\sin^2 x}=$ $-(1+\cot^2 x)$	B[2]	$\coth x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}=$ $1-\coth^2 x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
a^x, $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}$	$a^x\cdot\ln a$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arcosh} x$	$[1,\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1,\infty)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\operatorname{artanh} x$	$(-1,1)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1,1)$
$\log_a x$ $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$\mathbb{R}^+$	$\operatorname{arcoth} x$	$(-\infty,-1)$ $\cup(1,\infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-\infty,-1)$ $\cup(1,\infty)$

[1] $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{R} \text{ und } x\neq\frac{2k+1}{2}\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

[2] $B=\{x \mid x\in\mathbb{R} \text{ und } x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.