

# 1 Wahrscheinlichkeiten

## 1.1 Axiome von Kolmogoroff

(K1)  $P(A) \geq 0$  Nichtnegativität

(K2)  $P(\Omega) = 1$  Normierung

(K3) Falls  $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  Additivität

## 1.2 Rechenregeln

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1)$$

$A_1 \dots A_n$  paarweise disjunkt (keine Schnittfläche)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (2)$$

falls nicht disjunkt Schnittfläche abziehen

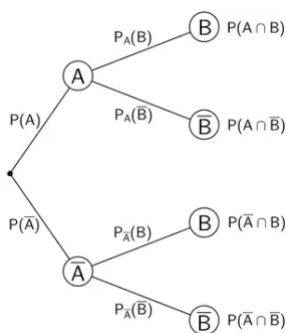
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (3)$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) \quad (4)$$

## 1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B). \quad (5)$$

### 1.3.1 Baumdiagramm



### 1.3.2 4-Felder Tafel

	$A$	$\bar{A}$	
$B$	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

### 1.3.3 Stoch. Unabhängigkeit

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (6)$$

## 1.4 Satz von Bayes

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i) \quad (7)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i) \quad (8)$$

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} \quad (9)$$

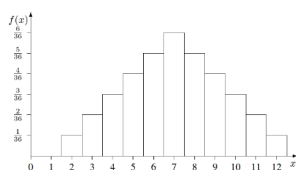
## 2 Diskrete Verteilungen

$E$  = Ereignis

$\omega$  = Ergebnis

$\Omega$  = Ergebnisraum

Bsp: Würfeln



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x)$  beschreibt die Wahrscheinlichkeit  $P(X = x_i)$ , dass die ZV  $X$  den Wert  $x_i$  annimmt

$$f_X(x) := \begin{cases} P(X = x_i) = p_i, & x = x_i \in W(X) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (10)$$

### 2.1 Erwartungswert

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad (11)$$

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \quad (12)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad (13)$$

### 2.2 Varianz

$$Var(aX) = a^2 Var(X) \quad (14)$$

$$Var(X + a) = Var(X) \quad (15)$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) \quad (16)$$

$$(17)$$

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f_x(\alpha) d\alpha = \sum_{\nu} a_{\nu} P_{\nu} \quad (18)$$

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = E[x^2] - \mu_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \mu_x)^2 f_x(\alpha) d\alpha \quad (19)$$

### 2.3 Diskrete Gleichverteilung

Alle Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit

**Wertebereich:**  $W(X) = \{x_1 \dots x_n\}$

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in W(X) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (20)$$

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (21)$$

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (22)$$

### 2.4 Bernoulli - Verteilung

Zufallsprozess mit 2 möglichen Ausgängen (z.B. Prüfungen)

**Wertebereich:**  $W(X) = \{0; 1\}$

**Notation:**  $X \sim \text{Ber}(p)$  mit  $p = P(A)$

$$f_X(x) := \begin{cases} P(X = 0) = p_A \\ P(X = 1) = 1 - p_A \end{cases} \quad (23)$$

$$E(X) = p \quad (24)$$

$$Var(X) = p(1 - p) \quad (25)$$

### 2.5 Binomial - Verteilung

Zählen der Ereigniseintritte bei  $n$  unabhängigen Bernoullivorgängen

**Wertebereich:**  $W(X) = \{0 \dots n\}$

**Notation:**  $X \sim \text{Bin}(n, p)$

**Parameter:**

- $p$  = WSK des Bernoullivorgangs
- $n$  = Anzahl Wiederholungen
- $x$  = Anzahl Ereigniseintritte

$$f_X(x) := \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}, & n \in W(X) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (26)$$

$$E(X) = n \cdot p \quad (27)$$

$$Var(X) = n \cdot p(1 - p) \quad (28)$$

Additionseigenschaft:

$$X \sim \text{Ber}(n, p) \quad (29)$$

$$Y \sim \text{Ber}(m, p) \quad (30)$$

$$X + Y \sim \text{Ber}(n + m, p) \quad (31)$$

### 2.6 Poisson - Verteilung

Anzahl an Ereigniseintritten in fixen Zeitintervallen

**Wertebereich:**  $W(X) = \mathbb{N}$

**Notation:**  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$

**Parameter:**

- $\lambda$  = Rate

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & n \in W(X) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (32)$$

$$E(X) = n \cdot p \quad (33)$$

$$Var(X) = n \cdot p(1 - p) \quad (34)$$