1 Elementare System-Eigenschaften

1.1 Statisch/Dynamisch

Definition **Statisches** System: (z.B ohmscher Spannungsteiler)

Jedes Ausgangssignal $y(t)$ hängt zu jedem Zeitpunkt t nur von den Eingangssignalen $x(t)$ zum aktuellen Zeitpunkt ab

Definition **Dynamisches** System: (z.B kapazitiver Spannungsteiler)

Jedes Ausgangssignal $y(t)$ hängt zu jedem Zeitpunkt t von den Eingangssignalen $x(t)$ zum aktuellen und vergangenen Zeitpunkten ab

1.2 Zeitkontinuierlich/Zeitdiskret

Definition **Zeitkontinuierliches** System:

$$y(t) = h(t) * u(t) \quad mit\ t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Definition **Zeitdiskretes** System:

$$y(k) = h(k) * u(k) \tag{2}$$
$$k = t \cdot T_a \quad k \in \mathbb{N} \tag{3}$$

1.3 Linear/Nichtlinear

Definition **Lineares** System:

- Das Eingangssignal $u_1(t)$ verursacht das Ausgangssignal $y_1(t)$
- Das Eingangssignal $u_2(t)$ verursacht das Ausgangssignal $y_2(t)$
- Das Eingangssignal $a \cdot u_1(t) + b \cdot u_2(t)$ verursacht das Ausgangssignal $a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$
- Totzeit ist **linear**

Bsp für **Nicht-Linearitäten:**

- $u(t)$ in Funktion $f()$ versteckt (z.b $sin, sqrt, exp$)
- Addition mit Konstante k

$$u(t) \rightarrow y(t) = f\{u(t)\} \tag{4}$$
$$u(t) \rightarrow y(t) = u(t) + k \tag{5}$$

1.4 Zeitvariant/Zeitinvariant

Definition **Zeitinvariantes** System:

$$u(t-\tau) * h(t) = y(t-\tau) \tag{6}$$

Bsp für **Nicht-Zeitinvariant:**

- Multiplikation mit $f(t)$
- Zeitverschiebung von **nur** $u(t)$ bzw. $y(t)$

$$u(t) \rightarrow y(t) = f(t)u(t) \tag{7}$$
$$u(t) \rightarrow y(t) = u(t-t_0) \tag{8}$$
$$u(t) \rightarrow y(t-t_0) = u(t) \tag{9}$$

1.5 Stabil/Instabil

Definition **BIBO-Stabiles** System:

Für ein beschränktes Eingangssignal $u(t)$ mit $|u(t)| < M_1 < \infty$ ist das resultierende Ausgangssignal $y(t)$ für jedes $u(t)$ ebenfalls beschränkt mit $|y(t)| < M_2 < \infty$.

Definition **Stabiles LTI** System:

Liegen die Pole s_∞ der Übertragungsfunktion $G(s)$ in der linken s-Halbebene ($Re(s_\infty) < 0$), dann ist das System stabil

1.6 Kausal/Akausal

Definition **Kausales** System:

Ein System ist kausal, wenn die Ausgangssignale $y(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 nicht abhängen vom Verlauf der Eingangssignale für $t > t_0$

Die Auswirkung eines Eingangssignal kann erst nach dessen Wirkung eintreten.

2 Darstellung von LTI-Systemen

2.1 DGL im Zeitbereich

$$a_0 y(t) + ... + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 y(t) + ... + b_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} \tag{10}$$

Bei Nichtlinearen Systemen sind a_n und b_n zeitabhängig $\rightarrow a_n(t) bzw. b_n(t)$

2.2 Zustandsraumdarstellung

Überführung von Eingangs-und Ausgangsgrößen in Zustandsgrößen
Systemgleichung:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{11}$$

Ausgangsgleichung:

$$y(t) = c^T x(t) + du(t) \tag{12}$$

- A = Systemmatrix
- b = Eingangsvektor
- c = Ausgangsvektor
- d = Durchgriff

Bei Nichtlinearen Systemen sind A, b, c, d von Zustandsvariablen abhängig

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{13}$$
$$y(t) = g(x(t), u(t)) \tag{14}$$

2.3 s-Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + ... + b_1 s + b_0}{s^n + ... + a_1 s + a_0} \tag{15}$$

$$G(s) = c^T (sE - A)^{-1} B + d \tag{16}$$

Laplace-Transformation ist nur für lineare, zeitinvariante Systeme definiert. (Superpositionsprinzip!)

2.4 G(s) BIBO-Stabilität

Grad <= 2:

Alle Koeffizienten selbes VZ → Alle NS neg. Realteil

Grad > 2: **Routh-Schema**

$$G(s) = \mathbf{1}s^5 + \mathbf{8}s^4 + \mathbf{28}s^3 + \mathbf{58}s^2 + \mathbf{67}s + \mathbf{30} \tag{17}$$
$$\tag{18}$$

s^5	1	28	67
s^4	8	58	30
s^3	$-\frac{det}{8}\begin{pmatrix}1 & 28\\ 8 & 58\end{pmatrix} = 20,75$	$-\frac{det}{8}\begin{pmatrix}1 & 67\\ 8 & 30\end{pmatrix} = 63,25$	0
s^2	$-\frac{det}{20,75}\begin{pmatrix}8 & 58\\ 20,75 & 63,25\end{pmatrix} = 33,61$	$-\frac{det}{20,75}\begin{pmatrix}8 & 30\\ 20,75 & 0\end{pmatrix} = 30$	0
s	$-\frac{det}{33,61}\begin{pmatrix}20,75 & 63,25\\ 33,61 & 30\end{pmatrix} = 44,73$	$-\frac{det}{33,61}\begin{pmatrix}20,75 & 0\\ 33,61 & 0\end{pmatrix} = 0$	0
s	$-\frac{det}{44,73}\begin{pmatrix}33,61 & 30\\ 44,73 & 0\end{pmatrix} = 30$	0	0

Fertiges Schema:

s^5 :	1	28	67
s^4 :	8	58	30
s^3 :	20,75	63,25	0
s^2 :	33,61	30	0
s^1 :	44,73	0	0
s^0 :	30	0	0

Auswertung:

VZ-Wechsel → Instabil
0er-Wechsel → Nicht-BIBO-Stabil

3 Nichtlineare Systeme

$$\dot{x}(t) = f(\ x(t), u(t)\ ) \tag{19}$$
$$y(t) = g(\ x(t), u(t)\ ) \tag{20}$$

Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{21}$$

3.1 Ruhelagen und Betriebspunkte

Definition **Ruhelage** x_R:

$$f(x_R, 0) \tag{22}$$
$$u(t) = 0 \tag{23}$$

Definition **Betriebspunkt** x_B:

$$f(x_B, u_B) \tag{24}$$
$$u(t) = u_B \tag{25}$$

Bestimmung Ruhelage

1. Ableitung $\dot{x}(t) = 0$ setzen
2. Eingang $u(t) = 0$ setzen
3. Zustand $x(t) = x_R = const.$ setzen

$$0 = Ax_R \tag{26}$$

3.2 Stabilität nach Lyapunov

System in Ruhelage x_R → kleine Auslenkung → Zustand wieder in x_R

3.3 Transformation in Ruhelage

Delta-Koordinaten in DGL einsetzen

$$\Delta u(t) = u(t) - u_B \tag{27}$$
$$\Delta x(t) = x(t) - x_B \tag{28}$$

3.4 Linearisierung in der Ruhelage

Jacobi-Matrix A_B mit f_n n-te Gleichung und x_n n-ter Zustand:

$$A_B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} |_{B/RL} \tag{29}$$
$$B_B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_e} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_e} \end{pmatrix} |_{B/RL} \tag{30}$$
$$C_B = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} |_{B/RL} \tag{31}$$
$$D_B = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_e} \end{pmatrix} |_{B/RL} \tag{32}$$

$$\Delta \dot{x}(t) = A_B \Delta x(t) + B_B \Delta u_e(t) \tag{33}$$
$$\Delta \dot{y}(t) = C_B \Delta x(t) + D_B \Delta u_e(t) \tag{34}$$

3.5 Einzugsgebiet

Menge alle Punkte, von denen aus der Zustand wieder in die Ruhelage strebt.

3.6 Definitheit

positiv definit:

$$V(\Delta x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad und \quad V(\Delta x) = 0 \quad \forall x = 0 \tag{35}$$

positiv semi-definit:

$$V(\Delta x) \geq 0 \quad \forall x \neq 0 \quad und \quad V(\Delta x) = 0 \quad \forall x = 0 \tag{36}$$

negativ semi-definit:

$$V(\Delta x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad und \quad V(\Delta x) = 0 \quad \forall x = 0 \tag{37}$$

negativ semi-definit:

$$V(\Delta x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0 \quad und \quad V(\Delta x) = 0 \quad \forall x = 0 \tag{38}$$

3.7 Kettenregel

$$\dot{V}(\Delta x(t)) = \frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(t)}{\partial t} \tag{39}$$

Bsp für A = (2x2)

$$\dot{V}(\Delta x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \dot{x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \dot{x_2} \tag{40}$$

3.8 Direkte Methode von Lyapunov

1. Delta Transformation bestimmen

$$\Delta \dot{x} = f(\Delta x) \tag{41}$$

   mit Ruhelage $\Delta x = 0$

2. Finde $V(\Delta x)$ für die gilt:
3. $V(\Delta x)$ **positiv definit**
   - $\dot{V}(\Delta x)$ nach Quadraten sortieren und schauen
   - $\dot{V}(\Delta x)$ **negativ semi-definit** → global stabil
   - $\dot{V}(\Delta x)$ **negativ definit** → global asymp. stabil

3.8.1 V(x) auf Definitheit prüfen

$$V(x) = (x_1 x_2) \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{42}$$
$$= q_1 x_1^2 + 2q_2 x_1 x_2 + q_3 x_2^2 \tag{43}$$
$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix} \rightarrow HUD\{Q\} \tag{44}$$

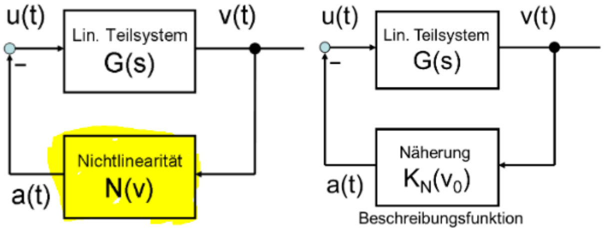
3.9 Die Harmonische Balance

Was passiert wenn RL nicht stabil

- Zustand strebt $\rightarrow$ andere RL
- Zustand strebt $\rightarrow \infty$
- Zustand strebt $\rightarrow$ Grenzzyklus (nichtlin. Dauerschw.)
- Chaotisches Systemverhalten

Grenzzyklus = Dauerschwingung:

3.9.1 Grundschwingungsnäherung



- a(t) und v(t) sind cos()-Signale
- Ersetze N(v) durch lin. Grundschwingungsnäh. mit Verstärkung $K_N(v_0)$
- Wir suchen v_0 und T_0

$K_N(v_0)$ bewirkt Verstärkung und Phasendrehung

$$u(t) = u_0 cos(w_0 t) \tag{45}$$
$$v(t) = v_0 cos(w_0 t + \phi_v) \tag{46}$$

3.9.2 Zwei Ortkurven-Methode

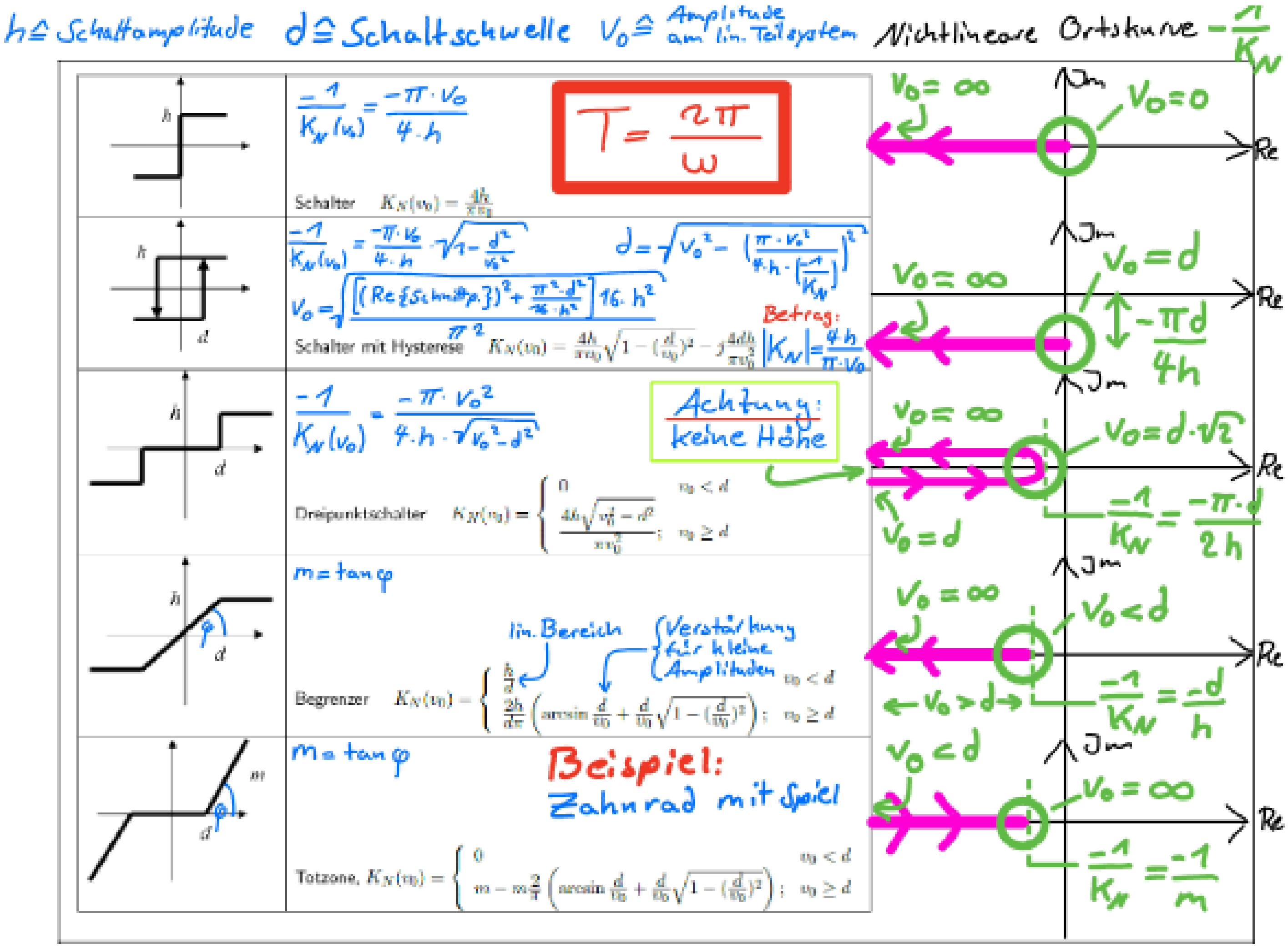
Schnittpunkt von Lineares Teilsystem $G(j\omega_0)$ und Beschreibungsfunktion $K_N(v_0)$

$$G(j\omega_0) = -\frac{1}{K_N(v_0)} \tag{47}$$

$$K_N(v_0) = \frac{a}{v_0} \tag{48}$$

Falls Nichtlinearität Schalter mit Höhe h

$$\hat{a} = \frac{h4}{\pi} \tag{49}$$


h ≙ Schaltamplitude
d ≙ Schaltschwelle
V0 ≙ Amplitude am lin. Teilsystem
Nichtlineare Ortskurve −1/KN
−1/KN(V0) = −π·V0 / 4·h
T = 2π/ω
Schalter KN(v0) = 4h/πv0
V0 = ∞
V0 = 0
Re
Jm
−1/KN(V0) = −π·V0/4·h · √(1 − d²/V0²)
d = √(V0² − (π·V0²/4·h·|−1/KN|)²)
Betrag:
|KN| = 4h/π·V0
V0 = d
−πd/4h
Schalter mit Hysterese
−1/KN(V0) = −π·V0²/4·h·√(V0² − d²)
Achtung: keine Höhe
Dreipunktschalter
V0 = d·√2
−1/KN = −π·d/2h
m = tan φ
lin. Bereich
Verstärkung für kleine Amplituden
Begrenzer
V0 < d
V0 > d
−1/KN = −d/h
Beispiel: Zahnrad mit Spiel
Totzone
−1/KN = −1/m