

1 Elementare DSV

1.1 Energie

Die Leistung und Energie eines Signals $x(k)$ $k \in [k_1, k_2]$

$$E_{k_1, k_2} = \sum_{k=k_1}^{k_2} |x(k)|^2 = (k_2 - k_1 + 1) P_{k_1, k_2} \quad (1)$$

Parsevallsche Gleichung ZDFT:

$$E_{-\infty, \infty} = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \quad (2)$$

Parsevallsche Gleichung DFT:

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2 \quad (3)$$

1.2 DFT/IDFT

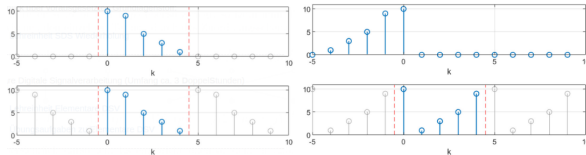
$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi k n}{N}} \quad (4)$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{j \frac{2\pi k n}{N}} \quad (5)$$

$$(6)$$

Die DFT bewirkt eine implizite Periodisierung.

Math. Modulo: $\hat{x}(k) = x([k]_{\text{mod} N})$ $[n]_{\text{mod} N} = n - N \lfloor \frac{n}{N} \rfloor$



	Zeitbereich	Spektralbereich
Linearität	$a \cdot x_1(k) + b \cdot x_2(k)$	$a \cdot X_1(n) + b \cdot X_2(n)$
Zeit-Verschiebung	$x([k - k_0]_{\text{mod} N})$	$e^{-j \frac{2\pi n k_0}{N}} X(n)$
Frequenz-Verschiebung	$e^{-j \frac{2\pi n k_0}{N}} x(k)$	$X([n + k_0]_{\text{mod} N})$
Spiegelung	$x([-k]_{\text{mod} N})$	$X([-n]_{\text{mod} N})$
Konj. Kompl	$x^*(k)$	$X^*([-n]_{\text{mod} N})$
Konj. Kompl. gespiegelt	$x^*([-k]_{\text{mod} N})$	$X^*(n)$
Faltung	$x_1(k) \otimes x_2(k)$	$X_1(n) X_2(n)$
Multiplikation	$x_1(k) x_2(k)$	$\frac{1}{N} X_1(n) \otimes X_2(n)$
gerade Symmetrie	$x_g(k) = \frac{x(k) + x(-k)}{2}$	$X_g(n) = \frac{X(n) + X(-n)}{2}$
ungerade Symmetrie	$x_u(k) = \frac{x(k) - x(-k)}{2}$	$X_u(n) = \frac{X(n) - X(-n)}{2j}$

$$\begin{aligned}
 x[n] &\iff X(e^{j\theta}) \\
 \delta[n - n_0] &\iff e^{-j\theta n_0} \\
 e^{j\theta n} &\iff 2\pi \delta_{2\pi}(\theta - \theta_0) \\
 \cos(\theta_0 n) &\iff \pi(\delta_{2\pi}(\theta - \theta_0) + \delta_{2\pi}(\theta + \theta_0)) \\
 \sin(\theta_0 n) &\iff \frac{\pi}{j}(\delta_{2\pi}(\theta - \theta_0) - \delta_{2\pi}(\theta + \theta_0)) \\
 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] &\iff \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \frac{2\pi}{N} k) \\
 u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} &\iff \frac{1}{1 - e^{-j\theta}} + \pi \delta_{2\pi}(\theta) \\
 \alpha^n u[n], \quad |\alpha| < 1 &\iff \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\theta}} \\
 \frac{\sin(\alpha n)}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < \pi &\iff X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\theta| \leq \alpha \\ 0, & \alpha < |\theta| < \pi \end{cases} \\
 x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} &\iff \frac{\sin((2N_1 + 1)\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \\
 x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} &\iff \frac{\sin(\frac{N\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} e^{-j\frac{N-1}{2}\theta}
 \end{aligned}$$

Es gilt: $0 \leq n < N$, $0 \leq k < N$ und $0 \leq m < N$

$$\begin{aligned}
 e^{j \frac{2\pi}{N} mn} &\iff N \delta[k - m] \\
 \cos\left(\frac{2\pi}{N} mn\right) &\iff \frac{N}{2} (\delta[k - m] + \delta[k + m - N]) \\
 \sin\left(\frac{2\pi}{N} mn\right) &\iff \frac{N}{2j} (\delta[k - m] - \delta[k + m - N]) \\
 \delta[n] &\iff 1 \\
 x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N_1 \\ 1, & N - N_1 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} &\iff \frac{\sin((2N_1 + 1)\frac{\pi k}{N})}{\sin(\frac{\pi k}{N})}
 \end{aligned}$$

1.3 z-Transformation

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad z = e^{sT_a} \quad (7)$$

Eigenschaft	Zeitbereich	Bildbereich
Linearität	$y(k) = a \cdot u_1(k) + b \cdot u_2(k)$	$Y(z) = a \cdot U_1(z) + b \cdot U_2(z)$
Zeitverschiebung	$y(k) = u(k - 1)$	$Y(z) = z^{-1} \cdot U(z) + u(-1)$
	$y(k) = u(k - 2)$	$Y(z) = z^{-2} \cdot U(z) + z^{-1} \cdot u(-1) + u(-2)$
Differenz	$y(k) = u(k) - u(k - 1)$	$Y(z) = (1 - z^{-1}) \cdot U(z) - u(-1)$
Summation	$y(k) = \sum_{v=0}^k u(v)$	$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot U(z) = \frac{z}{z - 1} \cdot U(z)$
Faltung	$y(k) = \sum_{v=0}^k u(v) \cdot g(k - v)$	$Y(z) = U(z) \cdot G(z)$
Multiplikation mit k	$y(k) = k \cdot u(k)$	$Y(z) = -z \cdot \frac{dU(z)}{dz}$
Modulation	$y(k) = a^k \cdot u(k)$	$Y(z) = U\left(\frac{z}{a}\right)$

1.4 Faltung

1.4.1 Lineare Faltung

$$g(k) * u(k) = \sum_{\nu=0}^k g(\nu) u(k - \nu) = \sum_{\nu=0}^k g(k - \nu) u(\nu) \quad (8)$$

1.4.2 Zyklische Faltung

$x_1(k)$ und $x_2(k)$ durch **Zero-Padding** auf $N = N_1 + N_2 - 1$

$$x_1(k) \otimes x_2(k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_1(\nu) x_2([k - \nu]_{\text{mod} N}) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_1([k - \nu]_{\text{mod} N}) x_2(\nu) \quad (9)$$

1.5 Korrelation

$x_1(k) \in [0, N_1 - 1]$ und $x_2(k) \in [0, N_2 - 1]$ nicht kommutativ sondern an der y-Achse gespiegelt ($r_{x_1 x_2}(\lambda) = r_{x_2 x_1}(-\lambda)$).

$$r_{x_1 x_2}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1^*(k) x_2(k + \lambda) \quad (10)$$

- Nicht-Erwartungstreue Schätzung $\hat{\varphi}_{x_1 x_2}$
- Erwartungstreue Schätzung $\hat{\varphi}'_{x_1 x_2}$
- Normierung auf $N = \max(N_1, N_2)$

$$\hat{\varphi}_{x_1 x_2} = \frac{1}{N} r_{x_1 x_2}(\lambda) \quad (11)$$

$$\hat{\varphi}'_{x_1 x_2} = \frac{1}{N - |\lambda|} r_{x_1 x_2}(\lambda) \quad (12)$$

1.6 Blocksignalverarbeitung

Der i -te Block $x^{(i)}(k)$ der Länge L mit Versch.abstand D wird als Multiplikation mit Fensterfunktion $w(k)$ beschrieben

$$\text{Allg. : } x^{(i)}(k) = x(k + (i-1)D) \cdot w(k) \quad k \in [0, L-1] \quad (13)$$

Überlapp $D\%$

$$D\% = \frac{L-D}{L} 100\% \quad (14)$$

1.6.1 Overlapp-Add Verfahren

Schnelle Faltung $g(k) * u(k)$ $N_u \gg N_g$ Aufteilung $u(k)$ nicht-überlappend (**nahtlos**) $\rightarrow D = L$
Zero-Padding $u^{(i)}(k)$ auf $N = L + N_g$

1.6.2 Overlapp-Save Verfahren

Schnelle Faltung $g(k) * u(k)$ $N_u \gg N_g$
z.B. Überlapp = $N_g - 1 \rightarrow D = L - N_g + 1$

$$u^{(i)}(k) = u(k + (i-1)D) \quad k \in [0, L-1] \quad (15)$$

1.7 Simultane Transformation

$$x_1(k) = \text{Re}[y(k)] = \frac{1}{2}(y(k) + y^*(k)) \quad (16)$$

$$x_2(k) = \text{Im}[y(k)] = \frac{1}{2j}(y(k) - y^*(k)) \quad (17)$$

$$x_1(k) = x(2k) \quad (18)$$

$$x_2(k) = x(2k+1) \quad (19)$$

$$y(k) = x_1(k) + jx_2(k) \quad (20)$$

$$X_1(n) = \frac{1}{2}(Y(n) + Y^*([-n]_{\text{mod}N})) \quad (21)$$

$$X_2(n) = \frac{1}{2j}(Y(n) - Y^*([-n]_{\text{mod}N})) \quad (22)$$

2 Stochastische Prozesse

2.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Wahrscheinlichkeit $P(x_u \leq x \leq x_o)$, dass $x \in [x_u, x_o]$

$$P(x_u \leq x \leq x_o) = \int_{x_u}^{x_o} f_x(\alpha) d\alpha \quad (23)$$

$$\text{bzw. } F_x(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_x(u) du \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(u) du = 1 \quad (25)$$

Gaußverteilung (Normalverteilung)

$$f_x(\alpha) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\alpha - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \quad (26)$$

2.2 Erwartungswert μ_x , Varianz σ_x^2

Formeln gelten nur für **stationäre** Zufallsvariablen bzw stochastische Prozesse

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f_x(\alpha) d\alpha = \sum_{\nu} a_{\nu} P_{\nu} \quad (27)$$

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = E[x^2] - \mu_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \mu_x)^2 f_x(\alpha) d\alpha \quad (28)$$

Für 2 Stoch. unabh. Variablen $f_x(\alpha)$ und $f_y(\beta)$ gilt

$$f_{xy}(\alpha, \beta) = f_x(\alpha) \cdot f_y(\beta) \quad (29)$$

$$\mu_{xy} = \mu_x + \mu_y \quad (30)$$

$$\sigma_{xy}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (31)$$

Für ein deterministisches Signal $x(k)$ gilt $\sigma_x^2 = \text{Var}(x) = 0$
Falls $y(k) = x_1(k)x_2(k)$, dann gilt

$$\sigma_y^2 = (\sigma_{x_1}^2 + \mu_{x_1}^2)(\sigma_{x_2}^2 + \mu_{x_2}^2) \quad (32)$$

2.3 Stationärer Stochastischer Prozess

P. stationär, wenn seine **statistischen** Eigenschaften **zeitinvariant** sind

Einzelner stationärer Stochastischer Prozess:

$$f_{x(k)}(\alpha) = f_{x(k+k_0)}(\alpha) = f_x(\alpha) \quad (33)$$

Ein Prozess wird zu zwei verschiedene Zeitpunkte k_1 und k_2

$$f_{x(k_1)x(k_2)}(\alpha) = f_{x(k_1+k_0)x(k_2+k_0)}(\alpha) \quad (34)$$

Zwei Prozesse x und y wird zu zwei verschiedene Zeitpunkte k_1 und k_2

$$f_{x(k_1)y(k_2)}(\alpha) = f_{x(k_1+k_0)y(k_2+k_0)}(\alpha) \quad (35)$$

Autokorrelations $\varphi_{xx}(\lambda)$ und Kreuzkorrelation $\varphi_{xy}(\lambda)$

$$\varphi_{xx}(\lambda) = E[x^*(k)x(k+\lambda)] \quad (36)$$

$$\varphi_{xy}(\lambda) = E[x^*(k)y(k+\lambda)] \quad (37)$$

Definition **schwache Stationarität**

- $\mu_x = E[x(k)] = \text{const.}$
- $\varphi_{xx}(\lambda) = \varphi_{xx}(-\lambda)$ (= gerade Symmetrie)
- $\varphi_{xx}(0) \geq |\varphi_{xx}(\lambda)|$ (max(Autokorr.) im Ursprung)
- $\varphi_{xx}(0) = E[|x(k)|^2]$ (= mittlere Leistung)
- $\varphi_{xx}(0) = \sigma_x^2 + |\mu_x|^2$
- aus Stationarität folgt **Unkorreliertheit**

2.4 Ergodizität

Schmitttelwert und Zeitmittelwert sind äquivalent

	Zeitmittelwert(Schätzung)	Schmitttelwert
lin. Mittelw μ_x	$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)$	$E[x(k)]$
Varianz σ_x^2	$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) - \mu_x ^2$	$E[x(k) - \mu_x ^2]$
AKorr. $\varphi_{xx}(\lambda)$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k)x(k+\lambda)$	$E[x^*(k)x(k+\lambda)]$
KKorr. $\varphi_{xy}(\lambda)$	$\varphi_{xy}(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k)y(k+\lambda)$	$E[x^*(k)y(k+\lambda)]$

2.5 Leistungsdichtespektrum LDS

LDS = DFT der Stochastischen Prozesse

Autoleistungsdichtespektrum $\phi_{xx}(e^{j\Omega})$ und Kreuzleistungsdichtespektrum $\phi_{xy}(e^{j\Omega})$

$$\phi_{xx}(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{\varphi_{xx}(\lambda)\} \quad (38)$$

$$\phi_{xx}(e^{j\Omega}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\lambda) e^{-j\Omega\lambda} \quad (39)$$

$$\varphi_{xx}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{xx}(e^{j\Omega}) e^{j\Omega\lambda} d\Omega \quad (40)$$

$$\phi_{xy}(e^{j\Omega}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(\lambda) e^{-j\Omega\lambda} \quad (41)$$

$$\varphi_{xy}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{xy}(e^{j\Omega}) e^{j\Omega\lambda} d\Omega \quad (42)$$

Mittlere Leistung $\varphi_{xx}(0)$

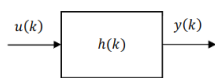
$$\varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{xx}(e^{j\Omega}) d\Omega = \frac{\phi_{xx}(e^{j0})}{2\pi} \quad (43)$$

Weißes Rauschen (Mittelwertfrei)

$$\phi_{xx}(e^{j\Omega}) = \phi_0 \quad (44)$$

$$\varphi_{xx}(0) = \phi_0 \gamma_0(\lambda) \quad (45)$$

2.6 LTI-Systeme



Mit konst. Mittelwerten $E[u(k-\nu)] = \mu_u$ und $E[y(k)] = \mu_y$

$$\mu_y = \mu_u \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} h(\nu) = \mu_u H(e^{j0}) \quad (46)$$

Zusätzliche Beziehungen

$$\varphi_{uy}(\lambda) = h(\lambda) * \varphi_{uu}(\lambda) \quad (47)$$

$$\varphi_{yu}(\lambda) = h(-\lambda)^* * \varphi_{uu}(\lambda) \quad (48)$$

$$\varphi_{yy}(\lambda) = h(\lambda) * \varphi_{yu}(\lambda) = h^*(-\lambda) * \varphi_{uy}(\lambda) \quad (49)$$

$$\varphi_{yy}(\lambda) = h^*(-\lambda) * h(\lambda) * \varphi_{uu}(\lambda) \quad (50)$$

- $\phi_{uy}(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})\phi_{uu}(e^{j\Omega})$
- $\phi_{yu}(e^{j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega})\phi_{uu}(e^{j\Omega})$
- $\phi_{yy}(e^{j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})\phi_{uu}(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|^2\phi_{uu}(e^{j\Omega})$

3 Spektralschätzung

3.1 Spektralschätzung mit FFT

Umrechnung $n \leftrightarrow f$

$$f_n = n \frac{f_A}{N} \quad (51)$$

Umrechnung $\Omega \leftrightarrow n$

$$\Omega_n = 2\pi \frac{n}{N} = \omega T_a \quad (52)$$

Umrechnung $\omega \leftrightarrow n$

$$\omega_n = 2\pi f_A \frac{n}{N} \quad (53)$$

Spektrum

$$n = 0$$

$$n = \tilde{n}$$

$$n = \frac{N}{2}$$

Zeitbereich

$$\text{Konstante } x(0) = \frac{1}{N} X(0)$$

$$x_{\tilde{n}}(k) = \frac{1}{N} (X(\tilde{n}) e^{-j \frac{2\pi k \tilde{n}}{N}} + X(N - \tilde{n}) e^{-j \frac{2\pi k (N - \tilde{n})}{N}})$$

$$e^{jk\pi} = (-1)^k$$

3.2 Leck-Effekt

Kein Ganzzahliges Vielfaches fällt in das Beobachtungsfenster $w(k)$.

Bsp: Sinus $x(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot w(t)$ mit $w(t) = \text{rect}(\frac{t-T/2}{T})$

$$x_w(k) = x(k)w(k) \rightarrow X_w(n) = X(n) * W(n)$$

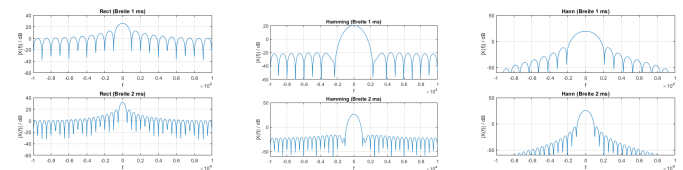
$$\sin(\omega_0 t) \rightarrow j\pi(\delta_0(w + w_0) - \delta_0(w - w_0))$$

$$\text{rect}(\frac{t-T/2}{T}) \rightarrow T \text{si}(w \frac{T}{2}) e^{-jw \frac{T}{2}}$$

$$X(jw) = \frac{j\pi}{2\pi} [j\pi(\delta_0(w + w_0) - \delta_0(w - w_0))] * \text{si}(w \frac{T}{2}) e^{-jw \frac{T}{2}}$$

$$X(jw) = j \frac{T}{2} [\text{si}((w + w_0) \frac{T}{2}) e^{-j(w + w_0) \frac{T}{2}} - \text{si}((w - w_0) \frac{T}{2}) e^{-j(w - w_0) \frac{T}{2}}]$$

3.3 Zeitfenster



Rechteck um bei $k=0$ beginnend (um $\frac{N}{2}$ verschoben)

$$\text{rect}(k - \frac{N}{2}) \rightarrow \frac{\sin(N \frac{\Omega}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})} e^{-j\Omega \frac{N-1}{2}} \quad (54)$$

3.4 Zero-Padding

Zero-Padding = Annäherung an die DTFT \rightarrow feinere Spektrumauflösung Energiegehalt $E = E_{ZP}$

3.5 Spektralschätzung Stoch. Prozesse

Periodogramm

$$\hat{\phi}_{Per} = \frac{1}{N} |X(n)|^2 \quad (55)$$

Mittlere Leistung P mittels Periodogramm

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\phi}_{Per} = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2 \quad (56)$$

Falls nur Spektrum von $n \in [0, N/2]$ gegeben (N ist gerade)

$$P = \frac{1}{N} (\hat{\phi}_{Per}(0) + 2 \sum_{n=0}^{N/2-1} \hat{\phi}_{Per} + \hat{\phi}_{Per}(\frac{N}{2})) \quad (57)$$

$$P = \frac{1}{N^2} (|X(0)|^2 + 2 \sum_{n=0}^{N/2-1} |X(n)|^2 + |X(N/2)|^2) \quad (58)$$

Falls nur best. Frequenzintervall $P \in [f_u, f_0] \rightarrow [n_1, n_2]$
 $n_1 > 0$ und $n_2 < N/2$ (N ist gerade)

$$P = \frac{2}{N} \sum_{n=n_1}^{n_2} \hat{\phi}_{Per} = \frac{2}{N^2} \sum_{n=n_1}^{n_2} |X(n)|^2 \quad (59)$$

Auch hier tritt Leck-Effekt auf \rightarrow Minderung mit Fensterfunktion $w(t)$ ABER: Verlust von Energie \Rightarrow Modifikation d. Schätzung mit Korrekturfaktor U (hängt von $w(t)$ ab) Spezialfall: $w(t) = \text{rect}(t) \Rightarrow U = 1$

$$\hat{\phi}_{Per,m} = \frac{1}{NU} |X_m(n)|^2 \quad (60)$$

$$U = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |w(t)|^2 \quad (61)$$

3.5.1 Weißes Rauschen

LDS ist Konstante $\phi_{xx,WR}(n) = \phi_{xx,WR} = \text{const.}$

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \phi_{xx,WR}(n) = \phi_{xx,WR} \quad (62)$$

3.6 Welch-Methode

Zerlegung von $x(k)$ der Länge N in K Sequenzen $x^{(i)}(k)$ der Länge L. Die Startzeitpunkte liegen im Abstand D
 Es gilt $N = L + D(K-1)$

$$x^{(i)}(k) = x(k + iD) \quad k \in [0, L-1] \quad (63)$$

z.B Fensterung + Zero-Padding $\tilde{L} = L + L_{ZP}$

$$\hat{\phi}_{Per}^{(i)}(n) = \frac{1}{LU} |X^{(i)}(n)|^2 \quad (64)$$

$$U = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{N-1} |w(t)|^2 \quad (65)$$

Das LDS ergibt sich aus **Mittelung** aller K Periodogramme

$$\hat{\phi}_W(n) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \hat{\phi}^{(i)}(n) \quad (66)$$

$$P = \frac{1}{\tilde{L}} \sum_{n=0}^{\tilde{L}-1} \hat{\phi}_W(n) \quad (67)$$

$K \uparrow \Rightarrow$ Varianz d. Schätzung $\downarrow \Rightarrow$ Qualität \uparrow

$L \downarrow \Rightarrow$ Frequenzauflösung \downarrow

$D \downarrow \Rightarrow$ Überlapp $\uparrow \Rightarrow K \uparrow \Rightarrow$ Rechenaufwand \uparrow

4 Digitale-Filter

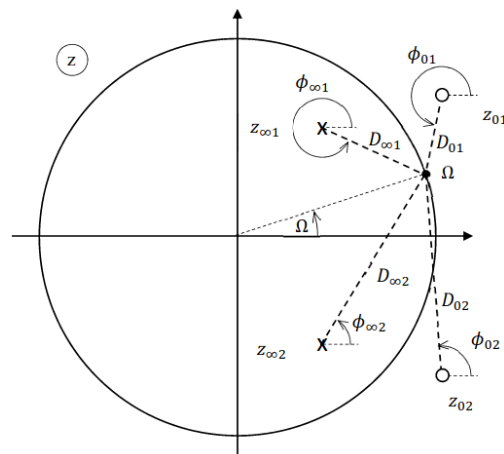
$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} z^{-\mu}}{\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{-\nu}} \quad (68)$$

Darstellung Linearfaktoren für $n=2$

$$H(z) = \frac{b_0(z - z_{01})(z - z_{02})}{a_0(z - z_{\infty 1})(z - z_{\infty 2})} \quad (69)$$

Jeder Linearfaktor kann als von der Frequenz Ω abhängiger Drehzeiger

- Pol verstärkt Amplitudengang
- Nullstelle dämpft Amplitudengang
- $(e^{j\Omega} - z_{01}) = D_{01} e^{j\phi_{01}}$ und $(e^{j\Omega} - z_{02}) = D_{02} e^{j\phi_{02}}$
- $(e^{j\Omega} - z_{\infty 1}) = D_{\infty 1} e^{j\phi_{\infty 1}}$ und $(e^{j\Omega} - z_{\infty 2}) = D_{\infty 2} e^{j\phi_{\infty 2}}$



- Amplitudengang: $|H(e^{j\Omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \left| \frac{D_{01} D_{02}}{D_{\infty 1} D_{\infty 2}} \right|$
- Phasengang: $\arg(H(e^{j\Omega})) = \arg\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \phi_{01} + \phi_{02} - \phi_{\infty 1} - \phi_{\infty 2}$

4.1 Rekursiver Glätter

Vergangenheitswert $y(k-1)$ wird mit Faktor $a \in [0, 1]$

$$y(k) = ay(k-1) + (1-a)u(k) \quad (70)$$

$$H(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}} = \frac{(1-a)z}{z-a} \quad (71)$$

Vom Verhalten entspricht er einem Tiefpass 1.Ordnung mit Grenzfrequenz Ω_g (a lässt sich aus Ω_g berechnen)

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1-a}{1-ae^{j\pi\Omega}} \quad (72)$$

$$\Omega_g = 2\pi \frac{f_g}{f_A} \quad (73)$$

$$a = 2 - \cos(\Omega_g) - \sqrt{(2 - \cos(\Omega_g))^2 - 1} \quad (74)$$

4.2 Arithmetischer Mittelwert Glätter

$$y(k) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} u(k-\nu) \quad (75)$$

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} z^{-\nu} = \frac{1}{N} \frac{z^{-N} - 1}{z^{-1} - 1} \quad (76)$$

4.3 Notch-Filter

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\Omega_0})(z - e^{-j\Omega_0})}{(z - r_{\infty}e^{j\Omega_0})(z - r_{\infty}e^{-j\Omega_0})} \quad (77)$$

Vorgabe Kerbe bei Frequenz f_N und -3dB Breite Δf und gegebener Abtastfrequenz f_A

$$\Omega_0 = \frac{2\pi f_N}{f_A} \quad (78)$$

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi\Delta f}{f_A} \quad (79)$$

Einsetzen in Übertragungsfunktion $H(z)$

$$H(z) = b \frac{1 - 2\cos(\Omega_0)z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2b\cos(\Omega_0)z^{-1} + (2b-1)z^{-2}} \quad (80)$$

$$b = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{1-G_B^2}}{G_B} \tan(\frac{\Delta\Omega}{2})} \quad (81)$$

4.4 Kammfilter

Zu jeder Nullstelle z_{0n} einen Pol $z_{\infty n}$ im Radius $r_{\infty} < 1$ plazieren. p = Ordnung

$$z_{\infty n} = r_{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{p}} = r_{\infty} z_{0n} \quad n \in [0, p-1] \quad (82)$$

Dimensionierung b , sodass zwischen Kerben $0\text{dB}(=1)$

$$H(z) = b \frac{1 - z^{-p}}{1 - r_{\infty} z^{-p}} \quad (83)$$

$$\left| b \frac{2}{1 + r_{\infty}^p} \right| \stackrel{!}{=} 1 \leftrightarrow b = \frac{1 + r_{\infty}^p}{2} \quad (84)$$

4.5 Goertzel-Algorithmus

Bestimmung eines einzelnen DFT-Spektralwert $X(n)$. Gleicher Rechenaufwand wie FFT aber Blocklänge N muss keine 2er Potenz sein. $\tilde{x}(k) = [x(0..N-1) \ 0]$ (N -ter Wert 0 setzen)

$$n_0 = \frac{f_0}{f_A} N \quad (85)$$

$$X(n_0) = y(k) = x(k) * h(k)|_{k=N} \quad (86)$$

$$X(n_0) = y_n(k) = \sum_{\nu=0}^k \tilde{x}(\nu) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-\nu)n} \quad (87)$$

4.6 IIR-Filter

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} z^{-\mu}}{\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{-\nu}} \quad (88)$$

Gruppenlaufzeit τ = Verzögerungszeit des Systems aufgelöst nach Frequenzen

$$\tau = \frac{d}{df} \varphi \quad (89)$$

4.7 FIR-Filter

grundsätzlich Stabil, Ordnung $m \rightarrow m$ Pole im Ursprung

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} z^{-\mu} \quad (90)$$

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{\mu=1}^m (z - z_{0\mu})}{z^m} \quad (91)$$

$$h(k) = b_k \quad k \in [0, m-1] \quad (92)$$

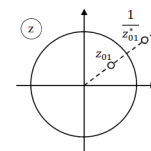
Gewollte Eigenschaft: **lineare Phase**

$$\tau_g = \frac{d}{d\Omega} \arg(H(e^{j\Omega})) = \text{const.} \quad (93)$$

lineare Phase wenn Nullstellen von $H(z)$

- auf Einheitskreis
- in am Einheitskreis gespiegelten Paaren z_{01} und $\frac{1}{z_{01}^*}$

auftreten

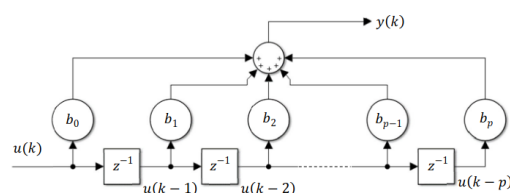


Für linearphasige FIR-Filter der Ordnung p gilt für Impulsantwort $h(k)$ eine der beiden Symmetrien

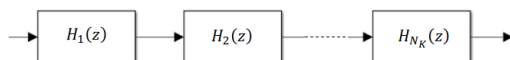
- $h(k) = h(p-k)$ (gerade Symmetrie)
- $h(k) = -h(p-k)$ (ungerade Symmetrie)

4.8 1. Kanonische-Form (IIR)

Hälfte der Speicherzellen $a_0 = 1$



Aufteilung der Pole-Nullstellen in Biquads, sodass sich Einflüsse auf Frequenzgang ausgleichen. Vorgehen:



$$H_\nu(z)^{(2)} = \frac{b_{0\nu} + b_{1\nu}z^{-1} + b_{2\nu}z^{-2}}{1 + a_{1\nu}z^{-1} + a_{2\nu}z^{-2}} \quad (96)$$

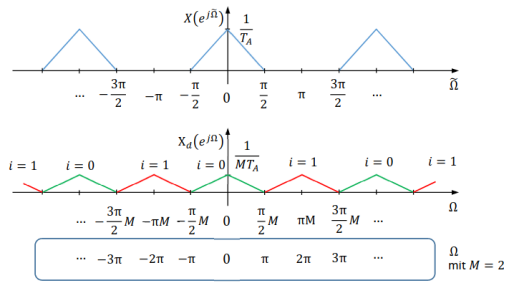
5.1 Dezimator Ganzzahliges M



(102)

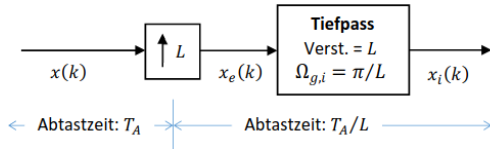
- Skalierung der Frequenzachse um $\frac{\Omega}{M}$
- Verringerung der Periodisierung
- Skalierung des Spektrums mit $\frac{1}{M}$
- Falls Nyquist-Kriterium $\frac{f_A}{M} > 2\tilde{f}_{max}$ nicht erfüllt \rightarrow Hohe Frequenzanteile Tiefpass-Filtern

6



5.2 Interpolator Ganzzahliges M

Interpolator = Expander



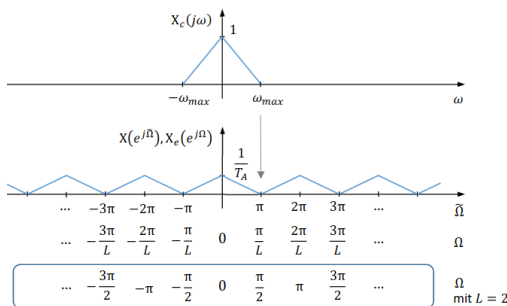
Expander hängt hinter jedem Abtastwert von $x(k)$ $L-1$ 0er an. $x_e(k) = [x(k/L) \text{ zeros}(1, L-1)]$

$$x_i(k) = x_e(k \frac{T_A}{L}) \quad (103)$$

$$X_e(e^{j\Omega}) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x(\nu) e^{-j\Omega \nu L} \quad (104)$$

$$X_e(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega L}) \quad (105)$$

- Spektrum $X_e(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega L})$ läuft von $-\pi/L \dots \pi/L$
- Keine Skalierung des Spektrums



5.3 Änderung nicht Ganzzahlig

Zusammenfassung der Tiefpässe zu einem mit $V=L$ und Grenzfrequenz $\Omega_{g,i\&d} = \min(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M})$

$$\Omega_{nachher} = \Omega_{vorher} \frac{M}{L} \quad (106)$$

5.4 Transformationen / Korrespondenzen

Discrete-Time Fourier Transform (DTFT)

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \iff X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\theta n} \\ x[n - n_0] &\iff e^{-j\theta n_0} X(e^{j\theta}) \\ e^{j\theta_0 n} x[n] &\iff X(e^{j(\theta - \theta_0)}) \\ x^*[n] &\iff X^*(e^{-j\theta}) \\ x[-n] &\iff X(e^{-j\theta}) \\ (x * y)[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n - k] \iff X(e^{j\theta}) Y(e^{j\theta}) \\ x[n] y[n] &\iff \frac{1}{2\pi} (X * Y)(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\lambda}) Y(e^{j(\theta - \lambda)}) d\lambda \\ x_e[n] &= \frac{1}{2} (x[n] + x^*[-n]) \iff \Re\{X(e^{j\theta})\} \\ x_o[n] &= \frac{1}{2} (x[n] - x^*[-n]) \iff j\Im\{X(e^{j\theta})\} \\ \Re\{x[n]\} &\iff X_e(e^{j\theta}) = \frac{1}{2} (X(e^{j\theta}) + X^*(e^{-j\theta})) \\ j\Im\{x[n]\} &\iff X_o(e^{j\theta}) = \frac{1}{2} (X(e^{j\theta}) - X^*(e^{-j\theta})) \\ nx[n] &\iff j \frac{dX(e^{j\theta})}{d\theta} \\ \sum_{k=-\infty}^n x[k] &\iff \frac{1}{1 - e^{-j\theta}} X(e^{j\theta}) + \pi X(e^{j\theta}) \delta_{2\pi}(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[n] &\iff X(e^{j\theta}) \\ \delta[n - n_0] &\iff e^{-j\theta n_0} \\ e^{j\theta_0 n} &\iff 2\pi \delta_{2\pi}(\theta - \theta_0) \\ \cos(\theta_0 n) &\iff \pi (\delta_{2\pi}(\theta - \theta_0) + \delta_{2\pi}(\theta + \theta_0)) \\ \sin(\theta_0 n) &\iff \frac{\pi}{j} (\delta_{2\pi}(\theta - \theta_0) - \delta_{2\pi}(\theta + \theta_0)) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] &\iff \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \frac{2\pi}{N} k) \\ u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} &\iff \frac{1}{1 - e^{-j\theta}} + \pi \delta_{2\pi}(\theta) \\ \alpha^n u[n], \quad |\alpha| < 1 &\iff \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\theta}} \\ \frac{\sin(\alpha n)}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < \pi &\iff X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\theta| \leq \alpha \\ 0, & \alpha < |\theta| < \pi \end{cases} \\ x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} &\iff \frac{\sin((2N_1 + 1)\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \\ x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} &\iff \frac{\sin(\frac{N\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} e^{-j\frac{N-1}{2}\theta} \end{aligned}$$

Discrete Fourier Transform (DFT)

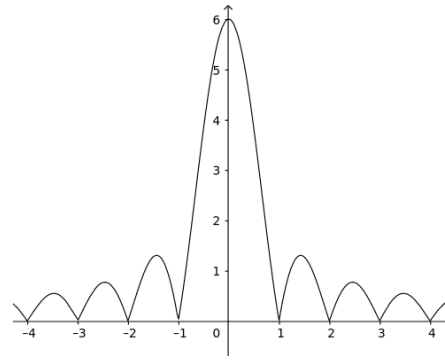
$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N} kn} \iff X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} \\ x[(n - n_0) \bmod N] &\iff e^{-j\frac{2\pi}{N} n_0 k} X[k] \\ e^{j\frac{2\pi}{N} k_0 n} x[n] &\iff X[(k - k_0) \bmod N] \\ x^*[n] &\iff X^*[(-k) \bmod N] \\ x^*[(n - n_0) \bmod N] &\iff X^*[k] \\ (x * y)[n] &\iff X[k] Y[k] \\ x[n] y[n] &\iff \frac{1}{N} (X * Y)[k] \\ \frac{1}{2} (x[n] + x^*[(n - n_0) \bmod N]) &\iff \Re\{X[k]\} \\ \frac{1}{2} (x[n] - x^*[(n - n_0) \bmod N]) &\iff j\Im\{X[k]\} \\ \Re\{x[n]\} &\iff \frac{1}{2} (X[k] + X^*[(k - k_0) \bmod N]) \\ j\Im\{x[n]\} &\iff \frac{1}{2} (X[k] - X^*[(k - k_0) \bmod N]) \end{aligned}$$

Es gilt: $0 \leq n < N$, $0 \leq k < N$ und $0 \leq m < N$

$$\begin{aligned} e^{j\frac{2\pi}{N} mn} &\iff N \delta[k - m] \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N} mn\right) &\iff \frac{N}{2} (\delta[k - m] + \delta[k + m - N]) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{N} mn\right) &\iff \frac{N}{2j} (\delta[k - m] - \delta[k + m - N]) \\ \delta[n] &\iff 1 \\ x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N_1 \\ 1, & N - N_1 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} &\iff \frac{\sin((2N_1 + 1)\frac{\pi k}{N})}{\sin(\frac{\pi k}{N})} \end{aligned}$$

z-Transformation (DFT)

$$\begin{aligned}
\delta[n] &\iff 1 & \forall z \\
u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} &\iff \frac{z}{z-1} & |z| > 1 \\
-u[-n-1] &\iff \frac{z}{z-1} & |z| < 1 \\
\alpha^n u[n] &\iff \frac{z}{z-\alpha} & |z| > |\alpha| \\
-\alpha^n u[-n-1] &\iff \frac{z}{z-\alpha} & |z| < |\alpha| \\
nu[n] &\iff \frac{z}{(z-1)^2} & |z| > 1 \\
-nu[-n-1] &\iff \frac{z}{(z-1)^2} & |z| < 1 \\
\sin(\alpha n)u[n] &\iff \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1} & |z| > 1 \\
\cos(\alpha n)u[n] &\iff \frac{z(z - \cos \alpha)}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1} & |z| > 1 \\
\rho^n \sin(\alpha n)u[n] &\iff \frac{\rho z \sin \alpha}{z^2 - 2\rho z \cos \alpha + \rho^2} & |z| > \rho \\
\rho^n \cos(\alpha n)u[n] &\iff \frac{z(z - \rho \cos \alpha)}{z^2 - 2\rho z \cos \alpha + \rho^2} & |z| > \rho \\
\sin(\alpha n + \varphi)u[n] &\iff \frac{z^2 \sin \varphi + z \sin(\alpha - \varphi)}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1} & |z| > 1 \\
\frac{1}{n}, \quad n > 0 &\iff \log_e \left(\frac{z}{z-1} \right) & |z| > 1 \\
\frac{1-e^{-\alpha n}}{n} u[n] &\iff \alpha + \log_e \left(\frac{z-e^{-\alpha}}{z-1} \right) & |z| > 1, \alpha > 0 \\
\frac{\sin(\alpha n)}{n} u[n] &\iff \alpha + \arctan \left(\frac{\sin \alpha}{z - \cos \alpha} \right) & |z| > \cos \alpha, \alpha > 0
\end{aligned}$$



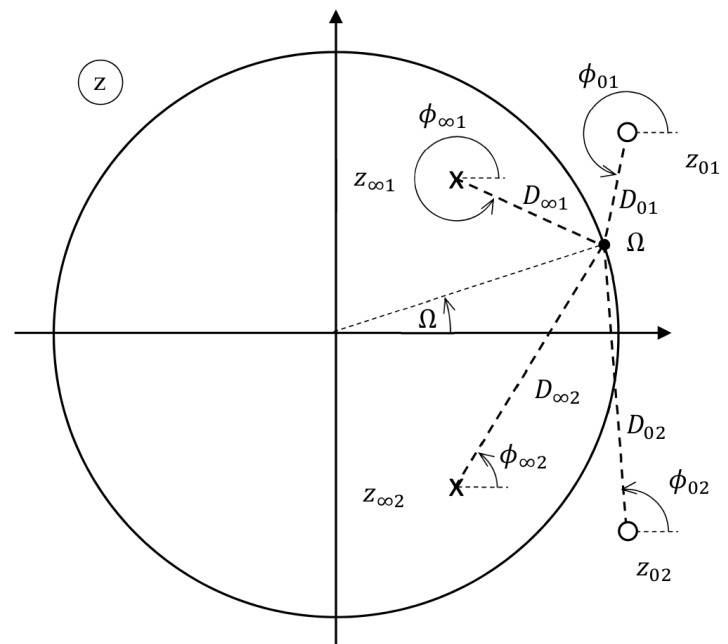
In der Abbildung ist eine um den Faktor 6 skalierte si-Funktion zu sehen. Die hierbei gewählte Fenster-Breite T wurde auf 1 festgelegt. Somit beträgt die Breite der Hauptkeule 2 und die der Nebenkeule 1.

5.7 Pol-Nullstellen-Bewertung

Die Auswirkung der Pol- / Nullstellen-Position wird hier anhand eines Systems zweiter Ordnung gezeigt.

$$H(z) = \frac{b_0(z - z_{01})(z - z_{02})}{a_0(z - z_{\infty 1})(z - z_{\infty 2})}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{b_0(e^{j\Omega} - z_{01})(e^{j\Omega} - z_{02})}{a_0(e^{j\Omega} - z_{\infty 1})(e^{j\Omega} - z_{\infty 2})}$$



Amplitudengang: $|H(e^{j\Omega})| = \frac{|b_0|}{|a_0|} \frac{|e^{j\Omega} - z_{01}| |e^{j\Omega} - z_{02}|}{|e^{j\Omega} - z_{\infty 1}| |e^{j\Omega} - z_{\infty 2}|} = \frac{|b_0|}{|a_0|} \frac{D_{01} D_{02}}{D_{\infty 1} D_{\infty 2}}$

Phasengang: $\arg\{H(e^{j\Omega})\} = \arg\left\{\frac{b_0}{a_0}\right\} + \phi_{01} + \phi_{02} - \phi_{\infty 1} - \phi_{\infty 2}$

5.5 Mathematische Anmerkungen

Euler Formel: $e^{i\Omega} = \cos(\Omega) + i \cdot \sin(\Omega)$ (107)

$$\cos(\Omega) = \frac{e^{-i\Omega} + e^{i\Omega}}{2} \quad (108)$$

$$\sin(\Omega) = \frac{e^{-i\Omega} - e^{i\Omega}}{2j} \quad (109)$$

$$\cos(\pi \cdot k) = (-1)^k \quad (110)$$

Rechteck-Funktion: $\text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$ (111)

Komplexer Betrag: $|x| = x(k) \cdot x^*(k)$ (112)

lin-dB-Rechnung: $[db] = 10 \cdot \log_{10}[lin]$ (113)

dB-lin-Rechnung: $[lin] = 10^{\frac{[dB]}{10}}$ (114)

$$\sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f_{\sin} \cdot k}{f_A}\right) = \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{\frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_{\sin} \cdot k}{f_A}} - e^{\frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_{\sin} \cdot k}{f_A}} \right) \quad (115)$$

5.6 Rechteck als Fensterfunktion

- Betragsgang variiert periodisch nach si-Funktion
- Breite der Hauptkeule: $\frac{2}{T}$ bzw. $\frac{4\pi}{T}$ (auf 2π bezogen)
- Breite der Nebenkeulen: $\frac{1}{T}$ bzw. $\frac{2\pi}{T}$ (auf 2π bezogen)
- **T:** Breite des Rechtecks

$$\left| F\left\{\text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)\right\} \right| = \left| T \cdot \frac{\sin(\Omega \cdot T/2)}{\Omega \cdot T/2} \right| \quad (116)$$

$$= \left| T \cdot \text{si}\left(\Omega \cdot \frac{T}{2}\right) \cdot e^{-j\Omega \cdot T/2} \right| \quad (117)$$

5.8 Hinweise zur Interpretation von Diagrammen

Spektrogramm

- Spektrogramm zeigt Frequenzanteile gemäß FFT/DFT
- Höchste Frequenz entspricht Abtastfrequenz

Periodogramm

- Periodogramm zeigt Schätzung des Autoleistungsdichte-Spektrums
- Gewichtetes Betragsquadrat des Amplitudenspektrums
- $\hat{\phi}_{Per} = \frac{1}{N} |X(n)|^2$

5.9 Bedeutung der Diagramm-Werte im Bezug auf ein Beispiel-Signal

$$x[k] = a \cdot \cos(\Omega_0 \cdot k)$$

- Spektrog.: $\max(|X[\Omega]|) = a \cdot \frac{N}{2}$
- Periodog.: $\max(\hat{\phi}_{Per}) = a^2 \cdot \frac{N}{4}$

5.10 Anmerkung LTI-Systeme

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\text{“Ausgangssignal“}}{\text{“Eingangssignal“}}$$

- **Allgemein:**
 - z^{-1} entspricht Verzögerung um einen Abtastwert
 - z-Trans. = Laplace-Trans. für abgetastete Signale
 - $z = e^{j \cdot \Omega} = e^{(\delta + j \cdot \omega) \cdot T_a}$
- **Übertragungsfunktion:** $H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} z^{-\mu}}{\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{-\nu}}$
- **Ordnung des Systems:** Maximum des Polynomgrades von m & n
- **Stabilität:**
 - **Asymptotisch:** alle Beträge $|b_v| < 1$
 - **Grenzstabil:** einfacher Pol mit $|b_v| = 1$
 - **Instabil:** mindestens ein Betrag $|b_v| > 1$
ODER doppelter Pol mit $|b_v| = 1$
- **Realisierbarkeit:**
 - Realisierbar wenn **kausal UND stabil**
 - **Kausal:** Polynomgrad $n \geq m$
(**NICHT** von **zukünftigen** Werten abhängig)
 - **Stabilität:** siehe oben
-

5.11 Taschenrechner-Tricks (Casio fx-991DEX)

- Polstellen-Bestimmung:
 1. “MENU SETUP“
 2. $\left(\begin{smallmatrix} X & Y \\ = & 0 \end{smallmatrix} \right)$ “A:Gleichung/Funkt“
 3. “=“
 4. “2:Polynom-Gleichung“

ACHTUNG: Grad muss ≤ 4 UND ≥ 1 sein!