1 Wahrscheinlichkeiten

1.1 Axiome von Kolmogoroff

(K1) $P(A) \geq 0$ Nichtnegativität

(K2) $P(\Omega) = 1$ Normierung

(K3) Falls $A \cap B = 0 \rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ Additivität

1.2 Rechenregeln

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1}$$

A_1 ... A_n paarweise disjunkt (keine Scnittfläche)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ...A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \tag{2}$$

falls nicht disjunkt Schnittfläche abziehen

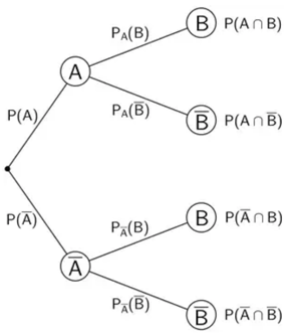
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{3}$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \tag{4}$$

1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B). \tag{5}$$

1.3.1 Baumdiagramm



1.3.2 4-Felder Tafel

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

1.3.3 Stoch. Unabhängigkeit

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{6}$$

1.4 Satz von Bayes

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i) \tag{7}$$

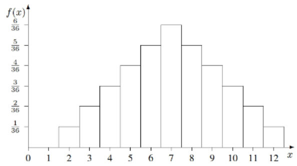
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i) \tag{8}$$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} \tag{9}$$

2 Diskrete Verteilungen

E = Ereignis
ω = Ergebnis
Ω = Ergebnisraum

Bsp: Würfeln



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$, dass die ZV X den Wert x_i annimmt

$$f_X(x) := \begin{cases} P(X = x_i) = p_i, & x = x_i \in W(X) \\ 0, & sonst \end{cases} . \quad (10)$$

2.1 Erwartungswert

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad (11)$$
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \quad (12)$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad (13)$$

2.2 Varianz

$$Var(aX) = a^2 Var(X) \quad (14)$$
$$Var(X + a) = Var(X) \quad (15)$$
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) \quad (16)$$
$$(17)$$

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f_x(\alpha) d\alpha = \sum_\nu a_\nu P_\nu \quad (18)$$
$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = E[x^2] - \mu_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \mu_x)^2 \, f_x(\alpha) d\alpha \quad (19)$$

2.3 Diskrete Gleichverteilung

Alle Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit
Wertebereich: $W(X) = \{x_1...x_n\}$

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in W(X) \\ 0, & sonst \end{cases} . \quad (20)$$

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad (21)$$
$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad (22)$$

2.4 Bernoulli - Verteilung

Zufallsprozess mit 2 möglichen Ausgängen (z.B Prüfungen)
Wertebereich: $W(X) = \{0; 1\}$
Notation: X ∼ Ber(p) mit p = P(A)

$$f_X(x) := \begin{cases} P(X = 0) = p_A \\ P(X = 1) = 1 - p_A \end{cases} . \quad (23)$$

$$E(X) = p \quad (24)$$
$$Var(X) = p(1 - p) \quad (25)$$

2.5 Binomial - Verteilung

Zählen der Ereigniseintritte bei n unabhängigen Bernoullivorgängen
Wertebereich: $W(X) = \{0...n\}$
Notation: X ∼ Bin(n,p)
Parameter:

- p = WSK des Bernoullivorgangs
- n = Anzahl Wiederholungen
- x = Anzahl Ereigniseintritte

$$f_X(x) := \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}, & n \in W(X) \\ \\ 0, & sonst \end{cases} . \quad (26)$$

$$E(X) = n \cdot p \quad (27)$$
$$Var(X) = n \cdot p(1 - p) \quad (28)$$

Additionseigenschaft:

$$X \sim Ber(n, p) \quad (29)$$
$$Y \sim Ber(m, p) \quad (30)$$
$$X + Y \sim Ber(n + m, p) \quad (31)$$

2.6 Poisson - Verteilung

Anzahl an Ereigniseintritten in fixen Zeitintervallen
Wertebereich: $W(X) = \mathbb{N}$
Notation: $X \sim Poi(\lambda)$
Parameter:

- λ = Rate

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & n \in W(X) \\ \\ 0, & sonst \end{cases} . \quad (32)$$

$$E(X) = n \cdot p \quad (33)$$
$$Var(X) = n \cdot p(1 - p) \quad (34)$$