1 Begriffe - Linearität und Zeitinvarianz

1.1 Linear/Nichtlinear

Definition **Lineares** System:

$$u = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \rightarrow y = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \quad (1)$$
$$(2)$$

Nichtlinearitäten:

- u(t) ist in nichtlin. Funktion f (z.B sin, $sqrt$, e) versteckt
- Addition mit Konstante k

$$u(t) \rightarrow y(t) = f\{u(t)\} \quad (3)$$
$$u(t) \rightarrow y(t) = u(t) + k \quad (4)$$

1.2 Zeitvariant/Zeitinvariant

Definition **Zeitinvariantes** System:

$$u(t-\tau) \rightarrow y(t-\tau) \quad (5)$$

Zeitvarianz:

- Multiplikation mit $f(t)$
- Zeitverschiebung von **nur** $u(t)$ bzw. $y(t)$

$$u(t) \rightarrow y(t) = f(t)u(t) \quad (6)$$
$$u(t) \rightarrow y(t) = u(t-t_0) \quad (7)$$
$$u(t) \rightarrow y(t-t_0) = u(t) \quad (8)$$

1.3 $DGL^n \rightarrow DGL - System$[1]

Eine DGL n-ter Ordnung kann in ein DGL-System n-ter Ordnung umgewandelt werden:

$$a_n y^{(n)}(t) + ... + a_2 y^{''} + a_1 y^{'} = b_0 u(t) \quad (9)$$

Lösungsansatz für n=4:

$$x_1(t) = y(t) \qquad x_1^{'}(t) = x_2(t) \quad (10)$$
$$x_2(t) = y^{'}(t) \qquad x_2^{'}(t) = x_3(t) \quad (11)$$
$$x_3(t) = y^{''}(t) \qquad x_3^{'}(t) = x_4(t) \quad (12)$$
$$x_4(t) = y^{(3)}(t) \quad (13)$$

$$x_4^{'}(t) = \frac{1}{a_4}[u(t) - a_3 x_3(t) - a_2 x_2(t) - a_1 x_1(t)] \quad (14)$$

Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{pmatrix} x_1^{'}(t) \\ x_2^{'}(t) \\ x_3^{'}(t) \\ x_4^{'}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_1}{a_4} & -\frac{a_2}{a_4} & -\frac{a_2}{a_4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_4} u(t) \end{pmatrix} \quad (15)$$

2 Matrizenrechnung

2.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von Matrix $A(nxn)$, falls die Multiplikation von A mit Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ in eine Skalarmultiplikation mit λ zusammenfällt. Dieser Vektor v wird dann Eigenvektor genannt.

$$Av = \lambda v \quad (16)$$

2.2 Eigenwertprobleme

EW = Nullstellen des char. Polynoms $p_A(\lambda)$.

$$det(A - \lambda E) \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

$$p_A(\lambda) = a_n \lambda^n + ... + a_1 \lambda + a_0 \quad (18)$$
$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n) \quad (19)$$

- $p_A(\lambda)$ hat n Nulltellen
- VFH der NS λ_i = **algebraische** VFH des EW $a(\lambda_i)$
- $\sum_i a(\lambda_i) = n$
- falls A **symmetrisch** → alle EW sind **reel**

Für Eigenvektoren einfach die EW auf der Hauptdiagonalen abziehen

$$(A - \lambda E)v = 0 \quad (20)$$

Bestimmung des i-ten EV v_i mit zugehörigem EW λ_i
Bsp für n = 2: (v bestimmen durch Hinschauen)

$$\lambda_i : \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i \end{pmatrix} v = 0 \quad (21)$$

- **geometrische** VFH $g(\lambda_i)$ = Anzahl lin. unabh. EV v

2.3 Geometrische Lage von EW

EW-Bestimmung teilweise aufwendig. Aussage über Stabilität von DGL-Systemen anhand der Lage der EW der Systemmatrix A (z.B alle EW links in komplexer Halbebene).
Kriterien:

- Gerschgorin-Kreise
- Routh-Hurwitz-Kriterium

2.3.1 Gerschgorin-Kreise

Aussage über geometrische Lage der EW einer Matrix. Ablesen von Systemeigenschaften ohne tatsächliche Berechnung der EW.
Vorgehen:

- Für jede Zeile ein Kreis
- Diagonalelement ist der Mittelpunkt
- Summe der Beträge der Restelemente der Radius

Bsp für n = 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{22}$$

dann

$$K1 : MP = (a_{11}/0), R = |a_{12} + a_{13}| \tag{23}$$
$$K1 : MP = (a_{22}/0), R = |a_{21} + a_{23}| \tag{24}$$
$$K1 : MP = (a_{33}/0), R = |a_{31} + a_{32}| \tag{25}$$

- Disjunkte Kreise enthalten genau einen EW
- Vereinigung von m disjunkten Kreisen enthält m EW

2.4 Routh-Hurwitz-Kriterium

Aussage EW in **linker Halbebene** (negativer Realteil) über Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda)$

$$p_A(\lambda) = a_n\lambda^n + ... + a_1\lambda + a_0 \tag{26}$$
$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n) \tag{27}$$

Aussagen: (gilt in beide Richtungen)

(1) Alle Nulltellen λ_n besitzen **negativen Realteil**

$$\Updownarrow$$

(2) Alle Koeffizienten a_n sind **positiv** und alle **HUD** der folgenden Matrix H sind **positiv**

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & ... & a_{n-(2n-1)} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & ... & a_{n-(2n-2)} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & ... & a_{n-(2n-2)} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

2.5 Diagonalisierbarkeit und Jordan-Normalform

Eine Matrix von Typ (nxn) heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine reguläre Matrix T gibt, sodass

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D \tag{29}$$

die Diagonalmatrix D liefert.

2.5.1 1. Fall: A Diagonalisierbar

(1) geometrische VF = algebraische VF für alle EW

$$g(\lambda_i) = a(\lambda_i) \quad i \in [1..n] \tag{30}$$

(2) Es existieren n linear unabhängige EW, die die Spalten der der Diagonalisierungsmatrix V liefern

$$V^{-1} \cdot A \cdot V = D \tag{31}$$
$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & ... & v_n \end{pmatrix} \; ; \; D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{32}$$

2.5.2 2. Fall: A Nicht-Diagonalisierbar

(1) geometrische VF < algebraische VF für min. 1 EW

$$g(\lambda_i) < a(\lambda_i) \quad i \in [1..n] \tag{33}$$

(2) Es können fehlende linear unabhängige EW, durch HV v_k ersetzt werden

$$V^{-1} \cdot A \cdot V = J \tag{34}$$
$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_k & ... & v_n \end{pmatrix} \; ; \; D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & ... & v_k & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{35}$$

2.5.3 Darstellungsformen der Jordan-Normalform

Jede Matrix vom Typ (nxn) kann in eine Jordan-Normalform J gebracht werden.
Es gilt:

- i-ter Jordan-Block J_i besteht aus EV/HV
- geo. VFH (= Anzahl EV) bestimmt größe des Jordan-Blocks

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & J_n \end{pmatrix} \tag{36}$$

Jordan-Normalform kann durch Diagonalmatrix D und Nilpotente Matrix N. N kann durch Potenzieren zur Nullmatrix zerfallen ($N^m = 0$)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_i \end{pmatrix}}_{J_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_i \end{pmatrix}}_{D_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}}_{N_i} \tag{37}$$

Mit J_i = i-ter Jordan-Block.

- Anzahl der Jordan-Blöcke = geometrische VFH

Bsp für n = 3:

(1) **1.Fall: geometrische VHF = 3**
$\rightarrow J = (v_1\ v_2\ v_3) = D$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & | & 0 & | & 0 \\ -- & | & -- & | & -- \\ 0 & | & \lambda_2 & | & 0 \\ -- & | & -- & | & -- \\ 0 & | & 0 & | & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Jordan-Blöcke J_i sind jeweil (1x1)

(2) **2.Fall: geometrische VHF = 2**
$\rightarrow J = (v_1\ t_1\ v_2)$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & | & 0 \\ 0 & \lambda_2 & | & 0 \\ -- & -- & | & -- \\ 0 & 0 & | & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Jordan-Block J_1 ist (2x2), J_2 ist (1x1)

(3) **3.Fall: geometrische VHF = 1**
$\rightarrow J = (v_1\ t_1\ t_2)$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Jordan-Block ist gesammte Matrix (3x3)

2.5.4 Hauptvektoren

Ein Hauptvektoren $t \in \mathbb{C}^n$ ist ein Vektor mit der Eigenschaft

$$(A - \lambda E)^j \cdot t = 0 \tag{41}$$
$$(A - \lambda E)^{j-1} \cdot t \neq 0 \tag{42}$$

$$(A - \lambda E) \cdot t^{(1)} = 0 \qquad (HV0 = EV) \tag{43}$$
$$(A - \lambda E) \cdot t^{(2)} = t^{(1)} \neq 0 \qquad (HV1) \tag{44}$$
$$(A - \lambda E) \cdot t^{(3)} = t^{(2)} \neq 0 \qquad (HV2) \tag{45}$$

2.6 Matrix-Exponentialfunktion

Lösungsansatz für lin. homog. DGL-Systeme

$$x(t) = c \cdot e^{At} \tag{46}$$

Mit Potenzreihe:

$$e^{At} = E + t\ A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3... \tag{47}$$

Rechenregeln:

1. Assoziativität

$$e^{(A+B)t} = e^{tA} \cdot e^{tB} \tag{48}$$
$$e^{A(t+s)} = e^{tA} \cdot e^{sA} \tag{49}$$

2. Inverse

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA} \tag{50}$$

3. Ableitung

$$\frac{d(e^{tA})}{dt} = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A \tag{51}$$

4. Eigenvektor v zum Eigenwert λ

$$e^{At} \cdot v = e^{\lambda t} \cdot v \tag{52}$$

5. Hauptvektor v zum Eigenwert λ

$$e^{At} \cdot v = e^{\lambda t}(v + \frac{t}{1!}(A - \lambda E) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda E)^2 + ...) \tag{53}$$

6. Blockdiagonalmatrix A

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & ... \\ 0 & ... & A_n \end{pmatrix} \rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tA_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{tA_2} & ... \\ 0 & ... & e^{tA_n} \end{pmatrix} \tag{54}$$

2.6.1 Berechnung e^{tA}

1.Fall: A Diagonalisierbar

$$e^{tA} = V \cdot e^{tD} \cdot V^{-1} \tag{55}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & ... & v_n \end{pmatrix}; e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_3} & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{56}$$

2.Fall: A Nicht-Diagonalisierbar

(1) Berechnung des i-ten Jordan-Block
Bsp für n = 3

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t N} \quad ; \; mit \;\; N = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{57}$$

(2) Jordan-Block zusammenfügen
Bsp für n = 3

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{tJ_n} \end{pmatrix} \tag{58}$$

(3) Ähnlichkeitstrafo ausführen
Bsp für n = 3

$$e^{tA} = T \cdot e^{tJ} \cdot T^{-1} \tag{59}$$
$$\tag{60}$$

3 Lösung DGL-Systeme

3.1 Lineare zeitvariable DGL-Systeme

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{61}$$

Lösungsansatz der homogenen Lösung x_H

$$x_H(t) = \Phi(t; t_0)x_0 \tag{62}$$

$\Phi(t; t_0)$ = Transitionsmatrix.
Berechnung von $\Phi(t; t_0)$ über Fundamentalmatrix $X(t)$

$$\Phi(t; t_0) = X(t) \cdot (X(t_0))^{-1} \tag{63}$$
$$X(t) = (x_1(t) \; x_2(t) \; ... \; x_n(t)) \tag{64}$$

Spezielle Lösung x_S mittels Variation der Konstanten

$$x_s(t) = \Phi(t; t_0)k(t) \tag{65}$$

3.2 Lineare zeitinvariante DGL-Systeme

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \tag{66}$$

Für LTI-DGL-Systeme gibt es 2 Lösungsvarianten.

1. Matrix-Exponentialfunktion (geht immer)
2. Lsg mittels EW/EV (nur falls A Diagonalisierbar)

3.2.1 Lsg mit Matrix-Exponentialfunktion

(1) Homogene Lsg x_H mit Anfangsbed. t_0

$$x_H(t) = e^{tA} \cdot C \tag{67}$$

mit

$$e^{tA} = V \cdot e^{tD} \cdot V^{-1} \rightarrow A \; diagonalisierbar \tag{68}$$
$$e^{tA} = T \cdot e^{tJ} \cdot T^{-1} \rightarrow A \; nicht \; diagonalisierbar \tag{69}$$

(2) Spezielle Lsg x_S mittels V.d.K

$$x_S(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} \cdot Bu(t) d\tau \tag{70}$$

Alternativ: A.v.T.d.r.S (s. Papula)

(3) Superlösung x mit Anfangsbed. x_0

$$x(t) = x_H(t) + x_S(t) \tag{71}$$

- $x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$ in $x(t)$ einsetzen und nach $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ auflösen

3.2.2 Lsg mit EW/EV (nur falls A Diagonalisierbar)

(1) Homogene Lsg x_H mit Anfangsbed. t_0

$$x_H(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} v_2 + ... \tag{72}$$
$$\tag{73}$$
$$x_H(t) = V \cdot e^{tD} c = V \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t_2} & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{\lambda_n t_n} \end{pmatrix} c \tag{74}$$

(2) Spezielle Lsg x_S mittels V.d.K

$$x_S(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} \cdot Bu(t) d\tau \tag{75}$$

Alternativ: A.v.T.d.r.S (s. Papula)

(3) Superlösung x mit Anfangsbed. x_0

$$x(t) = x_H(t) + x_S(t) \tag{76}$$

- $x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$ in $x(t)$ einsetzen und nach $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ auflösen

3.3 Ruhelagen Linearisierung und Stabilität

3.3.1 Ruhelagen

Bestimmung Ruhelagen:

1. Setzte $u(t) = u_R(const.)$
2. Setzte $\frac{dx(t)}{dt} = 0$

$$f(x_R, u_R) = 0 \tag{77}$$

3.3.2 Linearisierung um Ruhelage

Wurden Ruhelagen gefunden so kann das DGL-System in der Nähe linearisiert werden. Bsp für n = 2

1. 1. Gleichung nach x_1, x_2, u ableiten
2. 2. Gleichung nach x_1, x_2, u ableiten
3. Jacobi-Matrix J_f aufstellen
4. Ruhelagen x_R einsetzen

Jacobi-Matrix J_f mit f_n n-te Gleichung und x_n n-ter Zustand:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{78}$$

Alternativ:
Gleichungen einzeln Linearisieren

$$\delta \dot{x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_{1R}} \cdot \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{x_{2R}} + \delta u_1 \tag{79}$$

$$... \tag{80}$$

3.3.3 Stabilität

System stabil wenn

1. alle EW λ_k neg. Realteil $\rightarrow$ **asymptotisch stabil**
2. $Re(\lambda_k) = 0 \rightarrow$ stabil falls **alg VFH = geo VFH**

Analyse der Jacobi-Matrix mit Routh-Hurwitz-Kriterium