1 Begriffe - Linearität und Zeitinvarianz

1.1 Linear/Nichtlinear

Definition **Lineares** System:

$$u = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \rightarrow y = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \tag{1}$$
$$\tag{2}$$

Nichtlinearitäten:

- u(t) ist in nichtlin. Funktion f (z.B sin(), $\sqrt{}$, e) versteckt
- Addition mit Konstante k

$$u(t) \rightarrow y(t) = f\{u(t)\} \tag{3}$$
$$u(t) \rightarrow y(t) = u(t) + k \tag{4}$$

1.2 Zeitvariant/Zeitinvariant

Definition **Zeitinvariantes** System:

$$u(t-\tau) \rightarrow y(t-\tau) \tag{5}$$

Zeitvarianz:

- Multiplikation mit $f(t)$
- Zeitverschiebung von **nur** $u(t)$ bzw. $y(t)$

$$u(t) \rightarrow y(t) = f(t)u(t) \tag{6}$$
$$u(t) \rightarrow y(t) = u(t-t_0) \tag{7}$$
$$u(t) \rightarrow y(t-t_0) = u(t) \tag{8}$$

1.3 DGL^n $\rightarrow$ DGL-System[1]

Eine DGL n-ter Ordnung kann in ein DGL-System n-ter Ordnung umgewandelt werden:

$$a_n y^{(n)}(t) + ... + a_2 y^{''} + a_1 y^{'} = b_0 u(t) \tag{9}$$

Lösungsansatz für n=4:

$$x_1(t) = y(t) \qquad x_1^{'}(t) = x_2(t) \tag{10}$$
$$x_2(t) = y^{'}(t) \qquad x_2^{'}(t) = x_3(t) \tag{11}$$
$$x_3(t) = y^{''}(t) \qquad x_3^{'}(t) = x_4(t) \tag{12}$$
$$x_4(t) = y^{(3)}(t) \tag{13}$$

$$x_4^{'}(t) = \frac{1}{a_4}[u(t) - a_3 x_3(t) - a_2 x_2(t) - a_1 x_1(t)] \tag{14}$$

Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{pmatrix} x_1^{'}(t) \\ x_2^{'}(t) \\ x_3^{'}(t) \\ x_4^{'}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_1}{a_4} & -\frac{a_2}{a_4} & -\frac{a_2}{a_4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_4} u(t) \end{pmatrix} \tag{15}$$

2 Matrizenrechnung

2.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von Matrix $A(nxn)$, falls die Multiplikation von A mit Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ in eine Skalarmultiplikation mit λ zusammenfällt. Dieser Vektor v wird dann Eigenvektor genannt.

$$Av = \lambda v \tag{16}$$

Vorteil: Es müssen nur noch n-Teilmultiplikationen durchgeführt werden. $O(n^2) \rightarrow O(n)$

2.2 Eigenwertprobleme

EW = Nullstellen des char. Polynoms $p_A(\lambda)$.

$$det(A - \lambda E) \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

$$p_A(\lambda) = a_n \lambda^n + ... + a_1 \lambda + a_0 \tag{18}$$
$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n) \tag{19}$$

- $p_A(\lambda)$ hat n Nulltellen
- VFH der NS λ_i = **algebraische** VFH des EW $a(\lambda_i)$
- $\sum_i a(\lambda_i) = n$
- falls A **symmetrisch** $\rightarrow$ alle EW sind **reel**

Für Eigenvektoren einfach die EW auf der Hauptdiagonalen abziehen

$$(A - \lambda E)v = 0 \tag{20}$$

Bestimmung des i-ten EV v_i mit zugehörigem EW λ_i
Bsp für n = 2: (v bestimmen durch Hinschauen)

$$\lambda_i : \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i \end{pmatrix} v = 0 \tag{21}$$

- **geometrische** VFH $g(\lambda_i)$ = Anzahl lin. unabh. EV v

2.3 Geometrische Lage von EW

EW-Bestimmung teilweise aufwendig. Aussage über Stabilität von DGL-Systemen anhand der Lage der EW der Systemmatrix A (z.B alle EW links in komplexer Halbebene).
Kriterien:

- Gerschgorin-Kreise
- Routh-Hurwitz-Kriterium

2.3.1 Gerschgorin-Kreise

Aussage über geometrische Lage der EW einer Matrix. Ablesen von Systemeigenschaften ohne tatsächliche Berechnung der EW.
Vorgehen:

- Für jede Zeile ein Kreis
- Diagonalelement ist der Mittelpunkt
- Summe der Beträge der Restelemente der Radius

Bsp für n = 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{22}$$

dann

$$K1: MP = (a_{11}/0), R = |a_{12} + a_{13}| \tag{23}$$
$$K1: MP = (a_{22}/0), R = |a_{21} + a_{23}| \tag{24}$$
$$K1: MP = (a_{33}/0), R = |a_{31} + a_{32}| \tag{25}$$

- Disjunkte Kreise enthalten genau einen EW
- Vereinigung von m disjunkten Kreisen enthält m EW

2.4 s-Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + ... + b_1 s + b_0}{s^n + ... + a_1 s + a_0} \tag{26}$$

Laplace-Transformation ist nur für lineare, zeitinvariante Systeme definiert. (Superpositionsprinzip!)

3 Integraltransformation

Fourier-und Laplace-Transformation sind Integraltransformationen. Eine Transformation ist ein Operator T, der eine Funktion f aus einem Funktionsraum F auf eine Funktion aus anderen Funktionsraum G abbildet

$$T: \begin{cases} F \to G, \\ f \mapsto Tf. \end{cases} \tag{27}$$

Eine Integraltransformation ist lediglich eine Transformation, in die ein Integral verwickelt ist. Wir definieren eine neue Laufvariable η. Der $K(\eta, t)$ ist der Kern der Integraltransformation. Dieser beschreibt die Beziehung zwischen der ursprünglichen Funktion $f(t)$ und der transformierten Funktion $Tf(\eta)$. Bspw. ist der Kern der Fouriertransformation $K(f, t) = e^{-j2\pi ft}$.
Allgemeine Definition

$$Tf(\eta) = \int K(\eta, x) f(x) dx \tag{28}$$

3.1 Eigenfunktion

Eine Funktion $x(t)$ ist zu einem Operator T eine Eigenfunktion, falls die Anwedung von T auf x folgende Form hat:

$$Tx(t) = \lambda x(t) \quad mit \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{29}$$

Bsp: Exponentialfunktion ist Eigenfunktion bzgl. Ableitungsoperator D:

$$D\{e^{\lambda t}\} = \frac{d}{dt}\{e^{\lambda t}\} = \lambda e^{\lambda t}$$

Da sinusförmige Eingangssignale der Form

$$s_e(t) = e^{j2\pi ft} = cos(2\pi ft) + jsin(2\pi ft)$$

LTI-Systeme ohne Formänderung passieren sind diese Eigenfunktionen von LTI-Systemen.
Beispiel:
Ein sinusförmiges Eingangssignal $x(t)$ wird auf ein System S gegeben und ruft das Ausgangssignal $y(t)$ hervor.

$$x(t) = e^{j\omega t} = cos(\omega t) + jsin(\omega t) \quad mit \quad \omega = 2\pi f$$
$$y(t) = S\{x(t)\} = S\{e^{j\omega t}\}$$

Da es sich um ein LTI-System handelt ist dessen Operator S linear und zeitinvariant.
Es gilt Zeitinvarianz:

$$x(t-\tau) = e^{j\omega(t-\tau)}$$
$$y(t-\tau) = S\{x(t-\tau)\} = S\{e^{j\omega(t-\tau)}\} = S\{e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t}\}$$

Weiterhin folgt aus Linearit das Superpositionsprinzip:

$$y(t-\tau) = S\{e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t}\} = S\{\underbrace{e^{-j\omega\tau}}_{\neq f(t)}\} \cdot S\{e^{j\omega t}\}$$
$$y(t-\tau) = e^{-j\omega\tau} \cdot S\{e^{j\omega t}\} = \underbrace{e^{-j\omega\tau}}_{=\lambda} \cdot S\{x(t)\} = \lambda \cdot y(t)$$

Es gilt also

$$y(t) = S\{x(t)\} = \lambda y(t)$$

3.2 Verallgemeinerung der Eigenfunktionen

Wir haben gesehen, dass komplexe Exponentialfunktionen der Form $e^{-j2\pi ft}$ Eigenfunktionenen von LTI-Systemen sind. Leider sind reale Signale im Allgemeinen keine Eigenfunktionen von LTI-Systemen. Wir können aber beliebige Signale $x(t)$ als eine Überlagerung von Eigenfunktionen $e^{-j2\pi ft}$ mit unterschiedlichen Frequenzen $\omega = 2\pi f$ darstellen. Wir bilden eine Integraltransformation, bei der der Kern $K(j2\pi f, t)$ eine Funktion der Form $e^{-j2\pi ft}$ hat.
mit $\omega = 2\pi f$ ergiebt sich:

$$F(j\omega) = \mathbb{F}f(j\omega) = \int K(j\omega, t)f(t)dt$$
$$F(j\omega) = \int e^{-j\omega t}f(t)dt$$

Wir erhalten die also die Fouriertransformation. Der Term $e^{-j\omega t}$ bewirkt eine Drehung, die nicht gegen 0 geht. Die Fouriertransformation ist über das uneigentliche Integral definiert. Damit das Integral konvergiert und die Fouriertransformation existiert muss $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ gelten. Daher wollen wir die Fouriertransformation verallgemeinern, indem der Kern der Fouriertransformation um eine abklingede Exponentialfunktion $e^{-\sigma}$ mit $\sigma \in \mathbf{R}$ erweitert wird.

$$s = \sigma + j\omega \to e^{-st} = e^{-t(\sigma+j\omega)} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}$$

Wir erhalten die Laplace-Transformation

$$F(j\omega) = \int e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}f(t)dt = \int e^{-st}f(t)dt$$