1 Elementare System-Eigenschaften

1.1 Statisch/Dynamisch

Definition **Statisches** System: (z.B ohmscher Spannungsteiler)

Jedes Ausgangssignal $y(t)$ hängt zu jedem Zeitpunkt t nur von den Eingangssignalen $x(t)$ zum aktuellen Zeitpunkt ab

Definition **Dynamisches** System: (z.B kapazitiver Spannungsteiler)

Jedes Ausgangssignal $y(t)$ hängt zu jedem Zeitpunkt t von den Eingangssignalen $x(t)$ zum aktuellen und vergangenen Zeitpunkten ab

1.2 Zeitkontinuierlich/Zeitdiskret

Definition **Zeitkontinuierliches** System:

$$y(t) = h(t) * u(t) \quad mit\ t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Definition **Zeitdiskretes** System:

$$y(k) = h(k) * u(k) \tag{2}$$
$$k = t \cdot T_a \quad k \in \mathbb{N} \tag{3}$$

1.3 Linear/Nichtlinear

Definition **Lineares** System:

- Das Eingangssignal $u_1(t)$ verursacht das Ausgangssignal $y_1(t)$
- Das Eingangssignal $u_2(t)$ verursacht das Ausgangssignal $y_2(t)$
- Das Eingangssignal $a \cdot u_1(t) + b \cdot u_2(t)$ verursacht das Ausgangssignal $a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$

$$y(k) = h(k) * u(k) \tag{4}$$
$$k = t \cdot T_a \quad k \in \mathbb{N} \tag{5}$$

1.4 Zeitvariant/Zeitinvariant

Definition **Zeitinvariantes** System:

$$u(t-\tau) * h(t) = y(t-\tau) \tag{6}$$

1.5 Stabil/Instabil

Definition **BIBO-Stabiles** System:

Für ein beschränktes Eingangssignal $u(t)$ mit $|u(t)| < M_1 < \infty$ ist das resultierende Ausgangssignal $y(t)$ für jedes $u(t)$ ebenfalls beschränkt mit $|y(t)| < M_2 < \infty$.

Definition **Stabiles LTI** System:

Liegen die Pole s_∞ der Übertragungsfunktion $G(s)$ in der linken s-Halbebene ($Re(s_\infty) < 0$), dann ist das System stabil

Definition **Stabilität nach Lyaponov**:

1.6 Kausal/Akausal

Definition **Kausales** System:

Ein System ist kausal, wenn die Ausgangssignale $y(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 nicht abhängen vom Verlauf der Eingangssignale für $t > t_0$

Die Auswirkung eines Eingangssignal kann erst nach dessen Wirkung eintreten.

2 Darstellung von LTI-Systemen

2.1 DGL im Zeitbereich

$$a_0 y(t) + ... + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 y(t) + ... + b_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} \tag{7}$$

Bei Nichtlinearen Systemen sind a_n und b_n zeitabhängig $\rightarrow a_n(t) bzw. b_n(t)$

2.2 Zustandsraumdarstellung

Überführung von Eingangs-und Ausgansgrößen in Zustandsgrößen
Systemgleichung:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{8}$$

Ausgangsgleichung:

$$y(t) = c^T x(t) + du(t) \tag{9}$$

- A = Systemmatrix
- b = Eingangsvektor
- c = Ausgangsvektor
- d = Durchgriff

Bei Nichtlinearen Systemen sind A, b, c, d von Zustandsvariablen abhängig

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{10}$$
$$y(t) = g(x(t), u(t)) \tag{11}$$

2.3 s-Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + ... + b_1 s + b_0}{s^n + ... + a_1 s + a_0} \tag{12}$$

Laplace-Transformation ist nur für lineare, zeitinvariante Systeme definiert. (Superpositionsprinzip!)

3 Integraltransformation

Fourier-und Laplace-Transformation sind Integraltransformationen. Eine Transformation ist ein Operator T, der eine Funktion f aus einem Funktionsraum F auf eine Funktion aus anderen Funktionsraum G abbildet

$$T : \begin{cases} F \to G, \\ f \mapsto Tf. \end{cases} \tag{13}$$

Eine Integraltransformation ist lediglich eine Transformation, in die ein Integral verwickelt ist. Wir definieren eine neue Laufvariable η. Der $K(\eta, t)$ ist der Kern der Integraltransformation. Dieser beschreibt die Beziehung zwischen der ursprünglichen Funktion $f(t)$ und der transformierten Funktion $Tf(\eta)$. Bspw. ist der Kern der Fouriertransformation $K(f, t) = e^{-j2\pi ft}$.

Allgemeine Definition

$$Tf(\eta) = \int K(\eta, x) f(x) dx \tag{14}$$

3.1 Eigenfunktion

Eine Funktion $x(t)$ ist zu einem Operator T eine Eigenfunktion, falls die Anwedung von T auf x folgende Form hat:

$$Tx(t) = \lambda x(t) \quad mit \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{15}$$

Bsp: Exponentialfunktion ist Eigenfunktion bzgl. Ableitungsoperator D:

$$D\{e^{\lambda t}\} = \frac{d}{dt}\{e^{\lambda t}\} = \lambda e^{\lambda t}$$

Da sinusförmige Eingangssignale der Form

$$s_e(t) = e^{j2\pi ft} = cos(2\pi ft) + jsin(2\pi ft)$$

LTI-Systeme ohne Formänderung passieren sind diese Eigenfunktionen von LTI-Systemen.

Beispiel:

Ein sinusförmiges Eingangssignal $x(t)$ wird auf ein System S gegeben und ruft das Ausgangssignal $y(t)$ hervor.

$$x(t) = e^{j\omega t} = cos(\omega t) + jsin(\omega t) \quad mit \quad \omega = 2\pi f$$
$$y(t) = S\{x(t)\} = S\{e^{j\omega t}\}$$

Da es sich um ein LTI-System handelt ist dessen Operator S linear und zeitinvariant.

Es gilt Zeitinvarianz:

$$x(t-\tau) = e^{j\omega(t-\tau)}$$
$$y(t-\tau) = S\{x(t-\tau)\} = S\{e^{j\omega(t-\tau)}\} = S\{e^{-j\omega\tau}e^{j\omega t}\}$$

Weiterhin folgt aus Linearit das Superpositionsprinzip:

$$y(t-\tau) = S\{e^{-j\omega\tau}e^{j\omega t}\} = S\{\underbrace{e^{-j\omega\tau}}_{\neq f(t)}\} \cdot S\{e^{j\omega t}\}$$
$$y(t-\tau) = e^{-j\omega\tau} \cdot S\{e^{j\omega t}\} = \underbrace{e^{-j\omega\tau}}_{=\lambda} \cdot S\{x(t)\} = \lambda \cdot y(t)$$

Es gilt also

$$y(t) = S\{x(t)\} = \lambda y(t)$$

3.2 Verallgemeinerung der Eigenfunktionen

Wir haben gesehen, dass komplexe Exponentialfunktionen der Form $e^{-j2\pi ft}$ Eigenfunktionenen von LTI-Systemen sind. Leider sind reale Signale im Allgemeinen keine Eigenfunktionen von LTI-Systemen. Wir können aber beliebige Signale $x(t)$ als eine Überlagerung von Eigenfunktionen $e^{-j2\pi ft}$ mit unterschiedlichen Frequenzen $\omega = 2\pi f$ darstellen. Wir bilden eine Integraltransformation, bei der der Kern $K(j2\pi f, t)$ eine Funktion der Form $e^{-j2\pi ft}$ hat.
mit $\omega = 2\pi f$ ergiebt sich:

$$F(j\omega) = \mathbb{F}f(j\omega) = \int K(j\omega, t) f(t) dt$$
$$F(j\omega) = \int e^{-j\omega t} f(t) dt$$

Wir erhalten die also die Fouriertransformation. Der Term $e^{-j\omega t}$ bewirkt eine Drehung, die nicht gegen 0 geht. Die Fouriertransformation ist über das uneigentliche Integral definiert. Damit das Integral konvergiert und die Fouriertransformation existiert muss $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ gelten. Daher wollen wir die Fouriertransformation verallgemeinern, indem der Kern der Fouriertransformation um eine abklingede Exponentialfunktion $e^{-\sigma}$ mit $\sigma \in \mathbf{R}$ erweitert wird.

$$s = \sigma + j\omega \to e^{-st} = e^{-t(\sigma + j\omega)} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}$$

Wir erhalten die Laplace-Transformation

$$F(j\omega) = \int e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} f(t) dt = \int e^{-st} f(t) dt$$