1 Wahrscheinlichkeiten

1.1 Axiome von Kolmogoroff

(K1) $P(A) \geq 0$ Nichtnegativität

(K2) $P(\Omega) = 1$ Normierung

(K3) Falls $A \cap B = 0 \to P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ Additivität

1.2 Rechenregeln

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1}$$

A_1 ... A_n paarweise disjunkt (keine Scnittfläche)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ...A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \tag{2}$$

falls nicht disjunkt Schnittfläche abziehen

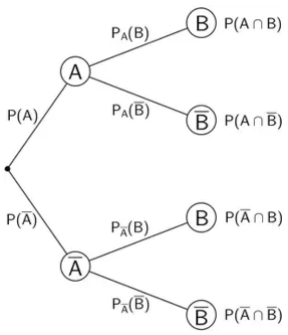
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{3}$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \tag{4}$$

1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B). \tag{5}$$

1.3.1 Baumdiagramm



1.3.2 4-Felder Tafel

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

1.3.3 Stoch. Unabhängigkeit

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{6}$$

1.4 Satz von Bayes

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i) \tag{7}$$

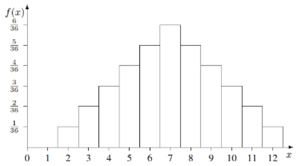
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i) \tag{8}$$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} \tag{9}$$

2 Diskrete Verteilungen

E = Ereignis
ω = Ergebnis
Ω = Ergebnisraum

Bsp: Würfeln



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$, dass die ZV X den Wert x_i annimmt

$$f_X(x) := \begin{cases} P(X = x_i) = p_i, & x = x_i \in W(X) \\ 0, & sonst \end{cases} . \tag{10}$$

2.1 Maßzahlen diskreter Verteilungen

2.1.1 Erwartungswert

$$E(aX + b) = aE(X) + b \tag{11}$$
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \tag{12}$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \tag{13}$$

2.1.2 Varianz

$$Var(aX) = a^2 Var(X) \tag{14}$$
$$Var(X + a) = Var(X) \tag{15}$$
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) \tag{16}$$
$$\tag{17}$$

$$\mu_X = E[X] = \sum_{i \geq 1} x_i f_X(x_i) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i \tag{18}$$

$$\sigma_X^2 = E[(x - \mu_x)^2] = E[x^2] - \mu_x^2 \tag{19}$$
$$\sigma_X^2 = \sum_{i \geq 1} (x_i - E(X))^2 f_X(x_i) \tag{20}$$
$$\sigma_X^2 = \sum_{i \geq 1} (x_i - E(X))^2 p_i \tag{21}$$

$$E[X^2] = \sum_{i \geq 1} x_i^2 p_i \tag{22}$$
$$\tag{23}$$

2.1.3 Modus

Lokales Maximum der Verteilung $f_X(x)$ ist Modus X_{mod}
Bsp: 2-Mal Würfeln $X_{mod} = 7$

2.2 Diskrete Gleichverteilung

Alle Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit
Wertebereich: $W(X) = \{x_1 ... x_n\}$

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in W(X) \\ 0, & sonst \end{cases} . \tag{24}$$

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{25}$$
$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{26}$$

2.3 Bernoulli - Verteilung

Zufallsprozess mit 2 möglichen Ausgängen (z.B Prüfungen)
Wertebereich: $W(X) = \{0; 1\}$
Notation: X $\sim$ Ber(p) mit p = P(A)

$$f_X(x) := \begin{cases} P(X = 0) = p_A \\ P(X = 1) = 1 - p_A \end{cases} . \tag{27}$$

$$E(X) = p \tag{28}$$
$$Var(X) = p(1 - p) \tag{29}$$

2.4 Binomial - Verteilung

Zählen der Ereigniseintritte bei n unabhängigen Bernoullivorgängen
Wertebereich: $W(X) = \{0 ... n\}$
Notation: X $\sim$ Bin(n,p)
Parameter:

- p = WSK des Bernoullivorgangs
- n = Anzahl Wiederholungen
- x = Anzahl Ereigniseintritte

$$f_X(x) := \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}, & n \in W(X) \\ 0, & sonst \end{cases} . \tag{30}$$

$$E(X) = n \cdot p \tag{31}$$
$$Var(X) = n \cdot p(1 - p) \tag{32}$$

Additionseigenschaft:

$$X \sim Ber(n, p) \tag{33}$$
$$Y \sim Ber(m, p) \tag{34}$$
$$X + Y \sim Ber(n + m, p) \tag{35}$$

2.5 Poisson - Verteilung

Anzahl an Ereigniseintritten in fixen Zeitintervallen
Wertebereich: $W(X) = \mathbb{N}$
Notation: $X \sim Poi(\lambda)$
Parameter:

- λ = Rate

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & n \in W(X) \\ 0, & sonst \end{cases} . \tag{36}$$

$$E(X) = \lambda \tag{37}$$
$$Var(X) = \lambda \tag{38}$$

Eigenschaften:

1. Additionseigenschaft

$$X \sim Poi(\lambda) \tag{39}$$
$$Y \sim Poi(\mu) \tag{40}$$
$$X + Y \sim Poi(\lambda + \mu) \tag{41}$$

2. Anzahl Ereignisse innerh. $t \sim Poi(\lambda) \rightarrow Poi(t\lambda)$

2.6 Geometrische - Verteilung

Anzahl an Wiederholungen bis zum 1. Ereigniseintritt von A
Wertebereich: $W(X) = \mathbb{N}$
Notation: $X \sim Geo(p)$
Parameter:

- $p = P(A) =$ WSK

$$f_X(x) := \begin{cases} (1-p)^{x-1} \cdot p, & n \in W(X) \\ 0, & sonst \end{cases} . \tag{42}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \tag{43}$$
$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2} \tag{44}$$

hilfreich:
Ereignis tritt spätestens mit der x-ten Wiederholung

$$P(X \leq x) = 1 - (1-p)^x \tag{45}$$

3 Stetige Zufallsvariablen

3.1 Maßzahlen stetiger Zufallsvariablen

3.1.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Wahrscheinlickkeit $P(x_u \leq x \leq x_o)$, dass $x \in [x_u, x_o]$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx \tag{46}$$
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx \tag{47}$$

3.1.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

Wahrscheinlickkeit $P(x_u \leq x \leq x_o)$, dass $x \in [x_u, x_o]$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \tag{48}$$

3.1.3 Erwartungswert μ_x, Varianz σ_x^2

Formeln gelten nur für **stationäre** Zufallsvariablen bzw stochastische Prozesse

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \tag{49}$$
$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \tag{50}$$
$$\sigma_X^2 = E[(x-\mu_X)^2] = E[X^2] - \mu_X^2 \tag{51}$$
$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2 \ f_x(\alpha)d\alpha \tag{52}$$

3.1.4 Transformation einer ZV

Eine ZV X wird mit einer Funktion g auf neue ZV Y abgebildet (transformiert)

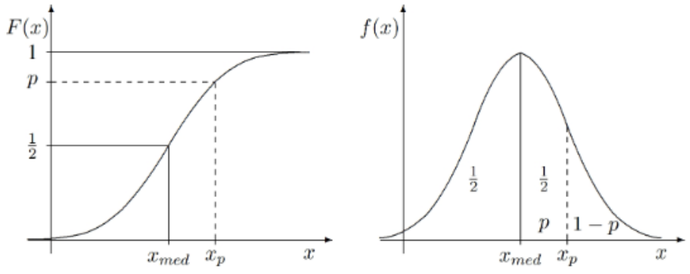
$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx \tag{53}$$
$$\tag{54}$$

Falls $g(x) = ax + b$

$$E(Y) = E(aX + b) = a \cdot E(X) + b \tag{55}$$
$$\tag{56}$$

3.1.5 Quantile und Median

Quantil: Wert x_p, der mit W p unterschritten und W $(1-p)$ überschritten wird.
Median: Für $p = 0.5$ erhält man den Median.



3.1.6 Zentrierung und Standartisierung

Eine ZV X ist zentriert, wenn $E(X) = 0$. X ist standartisiert, wenn $E(X) = 0$ und $Var(X) = 1$ Standartisierung von X führt zu Z (zentriert):

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \tag{57}$$

3.2 Kontinuierliche Gleichverteilung

Alle Werte aus einem Intervall gleich wahrscheinlich
Notation: $X \sim U(a, b)$
Parameter:

- a = untere Grenze
- b = obere Grenze

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in \{a; b\} \\ 0, & sonst \end{cases} . \tag{58}$$

$$F_X(x) := \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in \{a; b\} \\ 1, & x > b \end{cases} . \tag{59}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \tag{60}$$
$$Var(X) = \frac{b-a}{12} \tag{61}$$

3.3 Normalverteilung (Gaußverteilung)

Notation: $X \sim N(\sigma, \mu)$
Parameter:

- σ = Varianz
- μ = Erwartungswert

$$f_x(\alpha) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\alpha - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \quad (62)$$

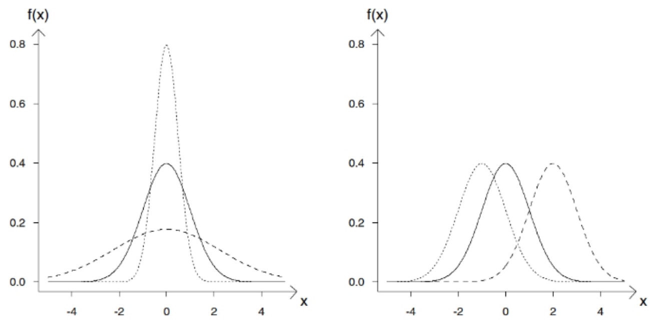


Abbildung 3.6: Wahrscheinlichkeitsdichten der Normalverteilung (Quelle: Fahrmeir et al. (2016))
links: $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 0.25$ $(\cdots)$, $\sigma^2 = 1$ (—) sowie $\sigma^2 = 5$ (- - -)
rechts: $\sigma^2 = 1$ und $\mu = -1$ $(\cdots)$, $\mu = 0$ (—) sowie $\mu = 2$ (- - -)

Normalverteilung symmetrisch um Erwartungswert μ

$$f(\mu - x) = f(\mu + x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad (63)$$

Verteilungsfuntion $F(x)$ kann nicht analytisch bestimmt werden außer $\mu = 0$ und $\sigma = 1 \rightarrow$ **Standartnormalverteilung** $\rightarrow$ Tabelle!

3.3.1 $k\sigma$-Intervalle

Prozentualer Anteil der Wahrscheinlickkeitsmasse

$$[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma] \quad (64)$$

1σ	66,27%
2σ	95,45%
3σ	99,73%

3.3.2 Berechnung von W mit Φ

Eine normalverteilte ZV $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ soll in den Grenzen a und b ausgewertet werden. ges: $P(a \leq X \leq b)$
X kann zu $U \sim N(0,1)$ zentriert werden:

$$a^* = \frac{a - \mu}{\sigma} \quad (65)$$
$$b^* = \frac{b - \mu}{\sigma} \quad (66)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a^* \leq U \leq b^*) = \Phi(a^*) - \Phi(b^*) \quad (67)$$

3.3.3 Quantile der Standartnormalverteilung

Finde p-Quantil (obere Schranke) x_p einer ZV X zu gegebener W p sodass gilt

$$P(X \leq x_p) = \Phi(x_p) = p \quad (68)$$
$$x_p = ? \quad (69)$$

$\rightarrow x_p$ Tabelle!
Es gilt

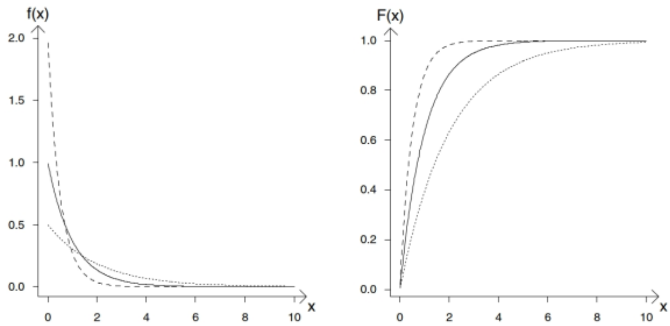
$$x_{1-p} = -x_p \quad (70)$$
$$x_p = -x_{1-p} \quad (71)$$

3.4 Exponentialverteilung

Dauer bis zum Ereigniseintritt **Notation:** $X \sim Exp(\lambda)$
Parameter:

- λ = Rate

$$f_X(x) := \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} . \quad (72)$$



- gedächtnislos (egal wie lange man schon wartet)
- Alter/Verschleiß nicht berücksichtigt
- Median $x_{med} = 0.5$

3.5 Weibull-Verteilung

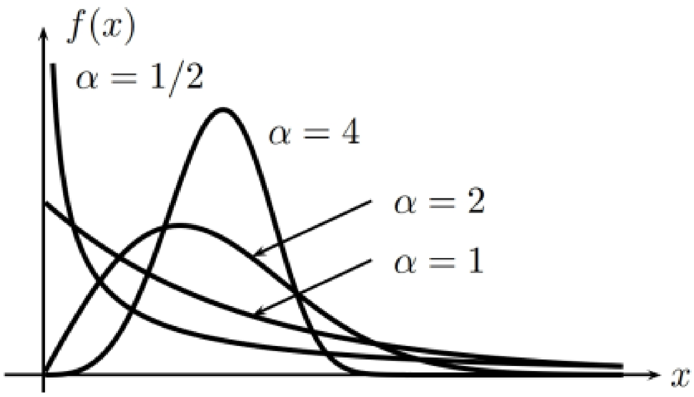
Zeitabhängige Ausfallrate (Hazzard rate) **Notation:** $X \sim Wei(\lambda, \alpha)$
Parameter:

- λ = Rate
- α = Erwartungswert

$$f_X(x) := \begin{cases} \lambda \alpha x^{\alpha - 1} e^{-\lambda x^{\alpha}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} . \quad (73)$$

$$F_X(x) := \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^\alpha}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} . \tag{74}$$

- Lebensdauer, Ausfallrate
- Gedächtinisbehafte



Ausfallrate (Hazzard rate) $a(t)$

$$a(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \lambda \alpha t^{\alpha - 1} \tag{75}$$

- $\alpha > 1$ Ausfallrate wächst (Alterung)
- $\alpha > 1$ Ausfallrate fällt (Verjüngung)