1 Elementare DSV

1.1 Energie

Die Leistung und Energie eines Signals $x(k)$ $k \in [k_1, k_2]$

$$E_{k_1,k_2} = \sum_{k=k_1}^{k_2} |x(k)|^2 = (k_2 - k_1 + 1)P_{k_1,k_2} \tag{1}$$

Parsevallsche Gleichung ZDFT:

$$E_{-\infty,\infty} = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega \tag{2}$$

Parsevallsche Gleichung DFT:

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2 \tag{3}$$

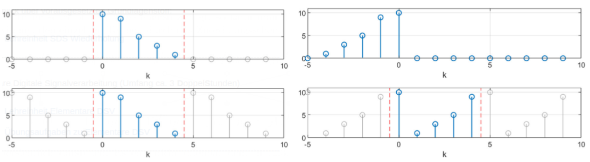
1.2 DFT/IDFT

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \tag{4}$$

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Die DFT bewirkt eine implizite Periodisierung.
Math. Modulo: $\tilde{x}(k) = x([k]_{modN})$ $[n]_{modN} = n - N\lfloor \frac{n}{N} \rfloor$



	Zeitbereich	Spektralbereich
Linearität	$a \cdot x_1(k) + b \cdot x_2(k)$	$a \cdot X_1(n) + b \cdot X_2(n)$
Zeit-Verschiebung	$x([k-k_0]_{modN})$	$e^{-j\frac{2\pi nk_0}{N}} X(n)$
Frequenz-Verschiebung	$e^{-j\frac{2\pi nk_0}{N}} x(k)$	$X([n+k_0]_{modN})$
Spiegelung	$x([-k]_{modN})$	$X([-n]_{modN})$
Konj.Kompl	$x^*(k)$	$X^*([-n]_{modN})$
Konj.Kompl.gespiegelt	$x^*([-k]_{modN})$	$X^*(n)$
Faltung	$x_1(k) \circledast x_2(k)$	$X_1(n)X_2(n)$
Multiplikation	$x_1(k)x_2(k)$	$\frac{1}{N}X_1(n) \circledast X_2(n)$
gerade Symmetrie	$x_g(k) = \frac{x(k)+\tilde{x}(-k)}{2}$	$X_g(n) = \frac{X(n)+X(-n)}{2}$
ungerade Symmetrie	$x_u(k) = \frac{x(k)-\tilde{x}(-k)}{2}$	$X_u(n) = \frac{X(n)-X(-n)}{2j}$

$$\begin{aligned}
x[n] &\iff X(e^{j\theta}) \\
\delta[n-n_0] &\iff e^{-j\theta n_0} \\
e^{j\theta_0 n} &\iff 2\pi\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) \\
\cos(\theta_0 n) &\iff \pi\left(\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) + \delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)\right) \\
\sin(\theta_0 n) &\iff \frac{\pi}{j}\left(\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) - \delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)\right) \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] &\iff \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \frac{2\pi}{N}k) \\
u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} &\iff \frac{1}{1-e^{-j\theta}} + \pi\delta_{2\pi}(\theta) \\
\alpha^n u[n], \quad |\alpha| < 1 &\iff \frac{1}{1-\alpha e^{-j\theta}} \\
\frac{\sin(\alpha n)}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < \pi &\iff X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\theta| \leq \alpha \\ 0, & \alpha < |\theta| < \pi \end{cases} \\
x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} &\iff \frac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} &\iff \frac{\sin\left(\frac{N\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{-j\frac{N-1}{2}\theta}
\end{aligned}$$

Es gilt: $0 \leq n < N$, $0 \leq k < N$ und $0 \leq m < N$

$$\begin{aligned}
e^{j\frac{2\pi}{N}mn} &\iff N\delta[k-m] \\
\cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) &\iff \frac{N}{2}\left(\delta[k-m] + \delta[k+m-N]\right) \\
\sin\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) &\iff \frac{N}{2j}\left(\delta[k-m] - \delta[k+m-N]\right) \\
\delta[n] &\iff 1 \\
x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N_1 \\ 1, & N - N_1 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} &\iff \frac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\pi k}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}
\end{aligned}$$

1.3 z-Transformation

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad z = e^{sT_a} \tag{7}$$

Eigenschaft	Zeitbereich	Bildbereich
Linearität	$y(k) = a \cdot u_1(k) + b \cdot u_2(k)$	$Y(z) = a \cdot U_1(z) + b \cdot U_2(z)$
Zeitverschiebung	$y(k) = u(k-1)$	$Y(z) = z^{-1} \cdot U(z) + u(-1)$
	$y(k) = u(k-2)$	$Y(z) = z^{-2} \cdot U(z) + z^{-1} \cdot u(-1) + u(-2)$
Differenz	$y(k) = u(k) - u(k-1)$	$Y(z) = (1 - z^{-1}) \cdot U(z) - u(-1)$
Summation	$y(t) = \sum_{\nu=0}^{k} u(\nu)$	$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot U(z) = \frac{z}{z-1} \cdot U(z)$
Faltung	$y(k) = \sum_{\nu=-0}^{k} u(\nu) \cdot g(k-\nu)$	$Y(z) = U(z) \cdot G(z)$
Multiplikation mit k	$y(k) = k \cdot u(k)$	$Y(z) = -z \cdot \frac{dU(z)}{dz}$
Modulation	$y(k) = a^k \cdot u(k)$	$Y(z) = U\left(\frac{z}{a}\right)$

1.4 Faltung

1.4.1 Lineare Faltung

$$g(k) * u(k) = \sum_{\nu=0}^{k} g(\nu)u(k-\nu) = \sum_{\nu=0}^{k} g(k-\nu)u(\nu) \tag{8}$$

1.4.2 Zyklische Faltung

$x_1(k)$ und $x_2(k)$ durch **Zero-Padding** auf $N = N_1 + N_2 - 1$

$$x_1(k) \circledast x_2(k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_1(\nu)x_2([k-\nu]_{modN}) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_1([k-\nu]_{modN})x_2(\nu) \tag{9}$$

1.5 Korrelation

$x_1(k) \in [0, N_1 - 1]$ und $x_2(k) \in [0, N_2 - 1]$ nicht kommutativ sondern an der y-Achse gespiegelt ($r_{x1x2}(\lambda) = r_{x2x1}(-\lambda)$).

$$r_{x_1x_2}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1^*(k)x_2(k+\lambda) \tag{10}$$

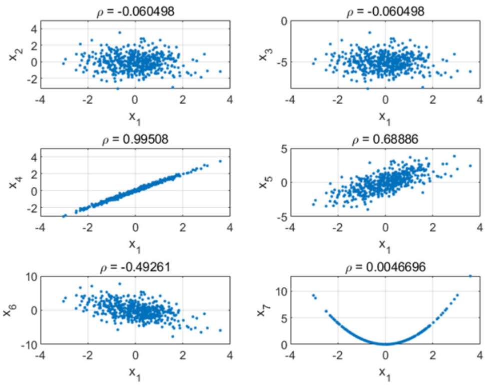
Korrelation durch schnelle Faltung:
1. Beide Signale Zero-Padding auf $N = N_1 + N_2 - 1$
2. x_1 Spiegeln
3. Faltung ausführen

$$r_{x_1x_2}(\lambda) = x_1^*(-\lambda) * x_2(\lambda) \tag{11}$$

- Nicht-Erwartungstreue Schätzung $\hat{\varphi}_{x1x2}$
- Erwartungstreue Schätzung $\hat{\varphi}'_{x1x2}$
- Normierung auf $N = max(N_1, N_2)$

$$\hat{\varphi}_{x_1x_2} = \frac{1}{N} r_{x_1x_2}(\lambda) \tag{12}$$
$$\hat{\varphi}'_{x_1x_2} = \frac{1}{N-|\lambda|} r_{x_1x_2}(\lambda) \tag{13}$$

Korrelationskoeffizient:



1.6 Blocksignalverarbeitung

Der i-te Block $x^{(i)}(k)$ der Länge L mit Versch.abstand D wird als Multiplikation mit Fensterfunktion $w(k)$ beschrieben

$$Allg.: x^{(i)}(k) = x(k + (i-1)D) \cdot w(k) \quad k \in [0, L-1] \tag{14}$$

Überlapp $D_{\%}$

$$D_{\%} = \frac{L-D}{L} 100\% \tag{15}$$

1.6.1 Overlapp-Add Verfahren

Schnelle Faltung $g(k) * u(k)$ $N_u >> N_g$ Aufteilung $u(k)$ nicht-überlappend (**nahtlos**) $\rightarrow D = L$
Zero-Padding $u^{(i)}(k)$ auf $N = L + N_g$

1.6.2 Overlapp-Save Verfahren

Schnelle Faltung $g(k) * u(k)$ $N_u >> N_g$
z.B Überlapp $= N_g - 1 \rightarrow D = L - N_g + 1$

$$u^{(i)}(k) = u(k + (i-1)D) \quad k \in [0, L-1] \tag{16}$$

1.7 Simultane Transformation

$$x_1(k) = Re[y(k)] = \frac{1}{2}(y(k) + y^*(k)) \tag{17}$$
$$x_2(k) = Im[y(k)] = \frac{1}{2j}(y(k) - y^*(k)) \tag{18}$$
$$x_1(k) = x(2k) \tag{19}$$
$$x_2(k) = x(2k+1) \tag{20}$$
$$y(k) = x_1(k) + jx_2(k) \tag{21}$$

$$X_1(n) = \frac{1}{2}(Y(n) + Y^*([-n]_{modN})) \tag{22}$$
$$X_2(n) = \frac{1}{2j}(Y(n) - Y^*([-n]_{modN})) \tag{23}$$

2 Stochastische Prozesse

2.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Wahrscheinlickkeit $P(x_u \leq x \leq x_o)$, dass $x \in [x_u, x_o]$

$$P(x_u \leq x \leq x_o) = \int_{x_u}^{x_o} f_x(\alpha) d\alpha \tag{24}$$
$$bzw. \;\; F_x(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_x(u) du \tag{25}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(u) du = 1 \tag{26}$$

Gaußverteilung (Normalverteilung)

$$f_x(\alpha) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \tag{27}$$

2.2 Erwartungswert μ_x, Varianz σ_x^2

Formeln gelten nur für **stationäre** Zufallsvariablen bzw stochastische Prozesse

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f_x(\alpha) d\alpha = \sum_{\nu} a_\nu P_\nu \tag{28}$$

$$\sigma_x^2 = E[(x-\mu_x)^2] = E[x^2] - \mu_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \mu_x)^2 \; f_x(\alpha) d\alpha \tag{29}$$

Für 2 Stoch. unabh. Variablen $f_x(\alpha)$ und $f_y(\beta)$ gilt

$$f_{xy}(\alpha, \beta) = f_x(\alpha) \cdot f_y(\beta) \tag{30}$$
$$\mu_{xy} = \mu_x + \mu_y \tag{31}$$
$$\sigma_{xy}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \tag{32}$$

2.3 Stationärer Stochastischer Prozess

P. stationär, wenn seine statistischen Eigenschaften zeitinvariant sind
Einzelner stationärer Stochastischer Prozess:

$$f_{x(k)}(\alpha) = f_{x(k+k_0)}(\alpha) = f_x(\alpha) \tag{33}$$

Ein Prozess wird zu zwei verschiedene Zeitpunkte k_1 und k_2

$$f_{x(k_1)x(k_2)}(\alpha) = f_{x(k_1+k_0)x(k_2+k_0)}(\alpha) \tag{34}$$

Zwei Prozesse x und y wird zu zwei verschiedene Zeitpunkte k_1 und k_2

$$f_{x(k_1)y(k_2)}(\alpha) = f_{x(k_1+k_0)y(k_2+k_0)}(\alpha) \tag{35}$$

Autokorrelations $\varphi_{xx}(\lambda)$ und Kreuzkorrelation $\varphi_{xy}(\lambda)$

$$\varphi_{xx}(\lambda) = E[x^*(k)x(k+\lambda)] \tag{36}$$
$$\varphi_{xy}(\lambda) = E[x^*(k)y(k+\lambda)] \tag{37}$$

Definition **schwache Stationarität**

- $\mu_x = E[x(k)] = const.$
- $\varphi_{xx}(\lambda) = \varphi_{xx}(-\lambda)$ (= gerade Symmetrie)
- $\varphi_{xx}(0) \geq |\varphi_{xx}(\lambda)|$ (max(Autokorr.) im Ursprung)
- $\varphi_{xx}(0) = E[|x(k)|^2]$ (= mittlere Leistung)
- $\varphi_{xx}(0) = \sigma_x^2 + |\mu_x|^2$
- aus Stationarität folgt **Unkorreliertheit**

2.4 Ergodizität

Scharmittelwert und Zeitmittelwert sind aquivalent

	Zeitmittelwert(Schätzung)	Scharmittelwert
lin. Mittelw μ_x	$\mu_x = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)$	E[x(k)]
Varianz σ_x^2	$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \|x(k) - \mu_x\|^2$	$E[\|x(k) - \mu_x\|^2]$
AKorr. $\varphi_{xx}(\lambda)$	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x^*(k)x(k+\lambda)$	$E[x^*(k)x(k+\lambda)]$
KKorr. $\varphi_{xy}(\lambda)$	$\varphi_{xy}(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x^*(k)y(k+\lambda)$	$E[x^*(k)y(k+\lambda)]$

2.5 Leistungsdichtespektrum LDS

LDS = DFT der Stochastischen Prozesse
Autoleistungsdichtespektrum $\phi_{xx}(e^{j\Omega})$ und Kreuzeistungsdichtespektrum $\phi_{xy}(e^{j\Omega})$

$$\phi_{xx}(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{\varphi_{xx}(\lambda)\} \tag{38}$$
$$\phi_{xx}(e^{j\Omega}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\lambda)e^{-j\Omega\lambda} \tag{39}$$
$$\varphi_{xx}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{xx}(e^{j\Omega})e^{j\Omega\lambda}d\Omega \tag{40}$$
$$\phi_{xy}(e^{j\Omega}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(\lambda)e^{-j\Omega\lambda} \tag{41}$$
$$\varphi_{xy}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{xy}(e^{j\Omega})e^{j\Omega\lambda}d\Omega \tag{42}$$

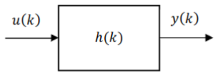
Mittlere Leistung $\varphi_{xx}(0)$

$$\varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{xx}(e^{j\Omega})d\Omega = \frac{\phi_{xx}(e^{j\Omega})}{2\pi} \tag{43}$$

Weißes Rauschen (Mittelwertfrei)

$$\phi_{xx}(e^{j\Omega}) = \phi_0 \tag{44}$$
$$\varphi_{xx}(0) = \phi_0\gamma_0(\lambda) \tag{45}$$

2.6 LTI-Systeme



Mit konst. Mittelwerten $E[u(k-\nu)] = \mu_x$ und $E[y(k)] = \mu_y$

$$\mu_y = \mu_u \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} h(\nu) = \mu_u H(e^{j0}) \tag{46}$$

Zusätzliche Beziehungen

$$\varphi_{uy}(\lambda) = h(\lambda) * \varphi_{uu}(\lambda) \tag{47}$$
$$\varphi_{yu}(\lambda) = h(-\lambda)^* * \varphi_{uu}(\lambda) \tag{48}$$
$$\varphi_{yy}(\lambda) = h(\lambda) * \varphi_{yu}(\lambda) = h^*(-\lambda) * \varphi_{uy}(\lambda) \tag{49}$$
$$\varphi_{yy}(\lambda) = h^*(-\lambda) * h(\lambda) * \varphi_{uu}(\lambda) \tag{50}$$

- $\phi_{uy}(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})\phi_{uu}(e^{j\Omega})$
- $\phi_{yu}(e^{j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega})\phi_{uu}(e^{j\Omega})$
- $\phi_{yy}(e^{j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})\phi_{uu}(e^{j\Omega}) = \left|H(e^{j\Omega})\right|^2\phi_{uu}(e^{j\Omega})$

3 Spektralschätzung

3.1 Spektralschätzung mit FFT

Umrechnung $n \leftrightarrow f$

$$f_n = n\frac{f_A}{N} \tag{51}$$

Umrechnung $\Omega \leftrightarrow n$

$$\Omega_n = 2\pi\frac{n}{N} = \omega T_a \tag{52}$$

Umrechnung $\omega \leftrightarrow n$

$$\omega_n = 2\pi f_A\frac{n}{N} \tag{53}$$

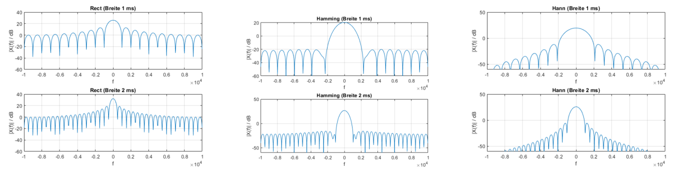
Spektrum	Zeitbereich
$n = 0$	Konstante $x(0) = \frac{1}{N}X(0)$
$n = \tilde{n}$	$x_{\tilde{n}}(k) = \frac{1}{N}(X(\tilde{n})e^{-j\frac{2\pi k\tilde{n}}{N}} + X(N-\tilde{n})e^{-j\frac{2\pi k(N-\tilde{n})}{N}})$
$n = \frac{N}{2}$	$e^{jk\pi} = (-1)^k$

3.2 Leck-Effekt

Kein Ganzzahliges Vielfaches fällt in das Beobachtungsfenster $w(k)$.
Bsp: Sinus $x(t) = sin(w_0t) \cdot w(t)$ mit $w(t) = rect(\frac{t-T/2}{T})$

$$x_w(k) = x(k)w(k) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_w(n) = X(n) * W(n)$$
$$sin(w_0t) \circ\!\!-\; j\pi(\delta_0(w+w_0) - \delta_0(w-w_0))$$
$$rect(\tfrac{t-T/2}{T}) \circ\!\!-\; T si(w\tfrac{T}{2})e^{-jw\frac{T}{2}}$$
$$X(jw) = \tfrac{2}{2\pi}[j\pi(\delta_0(w+w_0) - \delta_0(w+w_0))] * si(w\tfrac{T}{2})e^{-jw\frac{T}{2}}]$$
$$X(jw) = j\tfrac{T}{2}[si((w+w_0)\tfrac{T}{2})e^{-j(w+w_0)\frac{T}{2}} - si((w-w_0)\tfrac{T}{2})e^{-j(w-w_0)\frac{T}{2}}$$

3.3 Zeitfenster



Rechteck um bei k=0 beginnend (um $\frac{N}{2}$ verschoben)

$$rect(k - \frac{N}{2}) \circ\!\!- \frac{sin(N\frac{\Omega}{2})}{sin(\frac{\Omega}{2})} e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}} \tag{54}$$

- Breite der Hauptkeule $\Omega_B = \frac{4\pi}{N}$
- Höhe der Hauptkeule $A_B = N$
- Nullstellen $\Omega_{0\nu} = \frac{2\pi}{N}\nu \quad \nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

3.4 Zero-Padding

Zero-Padding = Annäherung an die DTFT → feinere Spektrumauflösung Energiegehalt $E = E_{ZP}$

3.5 Spektralschätzung Stoch. Prozesse

Periodogramm

$$\hat{\phi}_{Per} = \frac{1}{N}|X(n)|^2 \tag{55}$$

Mittlere Leistung P mittels Periodogramm

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\hat{\phi}_{Per} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}|X(n)|^2 \tag{56}$$

Falls nur Spektrum von $n \in [0, N/2]$ gegeben (N ist gerade)

$$P = \frac{1}{N}(\hat{\phi}_{Per}(0) + 2\sum_{n=0}^{N/2-1}\hat{\phi}_{Per} + \hat{\phi}_{Per}(\frac{N}{2})) \tag{57}$$

$$P = \frac{1}{N^2}(|X(0)|^2 + 2\sum_{n=0}^{N/2-1}|X(n)|^2 + |X(N/2)|^2) \tag{58}$$

Falls nur best. Frequenzintervall $P \in [f_u, f_0] \to [n_1, n_2]$
$n_1 > 0$ und $n_2 < N/2$ (N ist gerade)

$$P = \frac{2}{N}\sum_{n=n_1}^{n_2}\hat{\phi}_{Per} = \frac{2}{N^2}\sum_{n=n_1}^{n_2}|X(n)|^2 \tag{59}$$

Auch hier tritt Leck-Effekt auf → Minderung mit Fensterfunktion w(t) ABER: Verlust von Energie => Modifikation d. Schätzung mit Korrekturfaktor U (hängt von w(t) ab) Spezialfall: w(t) = rect(t) => U = 1

$$\hat{\phi}_{Per,m} = \frac{1}{NU}|X_m(n)|^2 \tag{60}$$

$$U = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|w(t)|^2 \tag{61}$$

3.5.1 Weißes Rauschen

LDS ist Konstante $\phi_{xx,WR}(n) = \phi_{xx,WR} = const.$

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\phi_{xx,WR}(n) = \phi_{xx,WR} \tag{62}$$

3.6 Welch-Methode

Zerlegung von x(k) der Länge N in K Sequenzen $x^{(i)}(k)$ der Länge L. Die Startzeitpunkte liegen im Abstand D
Es gilt $N = L + D(K-1)$

$$x^{(i)}(k) = x(k + iD) \quad k \in [0, L-1] \tag{63}$$

z.B Fensterung + Zero-Padding $\tilde{L} = L + L_{ZP}$

$$\hat{\phi}^{(i)}_{Per}(n) = \frac{1}{LU}\left|X^{(i)}(n)\right|^2 \tag{64}$$

$$U = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{N-1}|w(t)|^2 \tag{65}$$

Das LDS ergiebt sich aus Mittelung aller K Periodogramme

$$\hat{\phi}_W(n) = \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1}\hat{\phi}^{(i)}(n) \tag{66}$$

$$P = \frac{1}{\tilde{L}}\sum_{n=0}^{\tilde{L}-1}\hat{\phi}_W(n) \tag{67}$$

$K\uparrow$ => Varianz d. Schätzung↓ => Qualität ↑
$L\downarrow$ => Frequenzauflösung↓
$D\downarrow$ => Überlapp↑ => K↑ => Rechenaufwand↑

4 Digitale-Filter

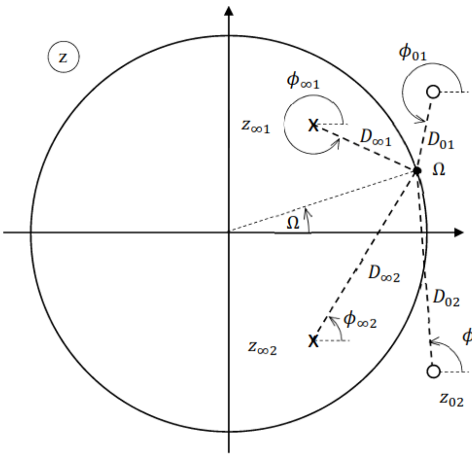
$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^{-\mu}}{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{-\nu}} \tag{68}$$

Darstellung Linearfaktoren für n=2

$$H(z) = \frac{b_0(z - z_{01})(z - z_{02})}{a_0(z - z_{\infty 1})(z - z_{\infty 2})} \tag{69}$$

Jeder Linearfaktor kann als von der Frequenz Ω abhängiger Drehzeiger

- Pole verstärkt Amplitudengang
- Nullstelle dämpft Amplitudengang
- Pole und Nullstellen treten immer **konj. komplex** auf
- $(e^{j\Omega} - z_{01}) = D_{01}e^{j\phi_{01}}$ und $(e^{j\Omega} - z_{02}) = D_{02}e^{j\phi_{02}}$
- $(e^{j\Omega} - z_{\infty 1}) = D_{\infty 1}e^{j\phi_{01}}$ und $(e^{j\Omega} - z_{01}) = D_{\infty 2}e^{j\phi_{\infty 2}}$



- Amplitudengang: $\left|H(e^{j\Omega})\right| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right|\left|\frac{D_{01}D_{02}}{D_{\infty 1}D_{\infty 2}}\right|$
- Phasengang: $arg(H(e^{j\Omega})) = arg(\frac{b_0}{a_0}) + \phi_{01} + \phi_{02} - \phi_{\infty 1} - \phi_{\infty 2}$

4.1 Rekursiver Glätter

Vergangenheitswert y(k-1) wird mit Faktor $a \in [0, 1]$

$$y(k) = ay(k-1) + (1-a)u(k) \tag{70}$$
$$h(k) = (1-a) \cdot a^k \cdot \sigma(k) \tag{71}$$
$$H(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}} = \frac{(1-a)z}{z-a} \tag{72}$$

Vom Verhalten entspricht er einem Tiefpass 1.Ordnung mit Grenzfrequenz Ω_g (a lässt sich aus Ω_g berechnen)

$$\Omega_g = 2\pi\frac{f_g}{f_A} = arccos(\frac{a^2 - 4 \cdot a + 1}{-2 \cdot a}) \tag{73}$$
$$|H(\Omega)| = \frac{1-a}{\sqrt{1 - 2 \cdot a \cdot cos(\Omega) + a^2}} H(e^{j\Omega}) = \frac{1-a}{1-ae^{-j\Omega}} \tag{74}$$
$$a = 2 - cos(\Omega_g) - \sqrt{(2 - cos(\Omega_g))^2 - 1} \tag{75}$$

4.2 Arithmetischer Mittelwert Glätter

$$y(k) = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} u(k-\nu) \tag{76}$$
$$H(z) = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} z^{-\nu} = \frac{1}{N}\frac{z^{-N}-1}{z^{-1}-1} \tag{77}$$

4.3 Notch-Filter

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\Omega_0})(z - e^{-j\Omega_0})}{(z - r_\infty e^{j\Omega_0})(z - r_\infty e^{-j\Omega_0})} \tag{78}$$

Vorgabe Kerbe bei Frequenz f_N und -3dB Breite Δf und gegebener Abtastfrequenz f_A

$$\Omega_0 = \frac{2\pi f_N}{f_A} \tag{79}$$
$$\Delta\Omega = \frac{2\pi\Delta f}{f_A} \tag{80}$$

Einsetzen in Übertragungsfunktion H(z), Kerbentiefe $+A_B[dB]$

$$H(z) = b\frac{1 - 2cos(\Omega_0)z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2bcos(\Omega_0)z^{-1} + (2b-1)z^{-2}} \tag{81}$$
$$b = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{1-G_B^2}}{G_B}tan(\frac{\Delta\Omega}{2})} \; mit \; G_B = 10^{\frac{-A_B}{20}} \tag{82}$$

4.4 Kammfilter

Zu jeder Nullstelle z_{0n} einen Pol $z_{\infty n}$ im Radius $r_\infty < 1$ plazieren.
p = Ordnung, (K) = Kerbenbildend, (R) = Resonanzbildend, n = 0..(p-1)

$$z_{0n}^{(K)} = e^{j\frac{2\pi n}{p}} \tag{83}$$
$$z_{\infty n}^{(K)} = r_\infty e^{j\frac{2\pi n}{p}} \tag{84}$$
$$z_{0n}^{(R)} = e^{j\frac{(\pi + 2\pi n)}{p}} \tag{85}$$
$$z_{\infty n}^{(R)} = r_\infty e^{j\frac{(2\pi n)}{p}} \tag{86}$$

4.4.1 Kerbenbildend Kammfilter $H_{(K)}(z)$

Dimensionierung b, sodass zwischen Kerben $0dB(=1)$

$$H_{(K)}(z) = \frac{1 + r_\infty^p}{2} \cdot \frac{1 - z^{-p}}{1 - r_\infty^p z^{-p}} \tag{87}$$

4.4.2 Resonanzbildender Kammfilter $H_{(R)}(z)$

Dimensionierung b, sodass zwischen Kerben $0dB(=1)$

$$H_{(R)}(z) = \frac{1 - r_\infty^p}{2} \cdot \frac{1 + z^{-p}}{1 - r_\infty^p z^{-p}} \tag{88}$$

4.5 Goertzel-Algorithmus

Bestimmung eines einzelnen DFT-Spektralwert X(n). Gleicher Rechenaufwand wie FFT aber Blocklänge N muss keine 2er Potenz sein. $\tilde{x}(k) = [x(0..N-1)\ 0]$ (N-ter Wert 0 setzen)

$$n_0 = \frac{f_0}{f_A}N \tag{89}$$
$$X(n_0) = y(k) = x(k) * h(k)|_{k=N} \tag{90}$$
$$X(n_0) = y_n(k) = \sum_{\nu=0}^{k} \tilde{x}(\nu)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-\nu)n} \tag{91}$$
$$h(k) = (e^{\frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n}{N}})^k \cdot \sigma(k) \tag{92}$$
$$n = -j \cdot \frac{N}{2 \cdot \pi} \cdot ln(h(1)) \rightarrow f_{Goertzel} = \frac{f_{Abtast}}{N} \cdot n \tag{93}$$

4.6 IIR-Filter

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^{-\mu}}{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{-\nu}} \tag{94}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot y(k-v) = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu \cdot u(k-\mu) \tag{95}$$

Gruppenlaufzeit τ = Verzögerungszeit des Systems aufgelöst nach Frequenzen

$$\tau = -\frac{d}{df}\varphi \tag{96}$$

4.6.1 IIR-Entwurfsmethoden

Entwurfsmethode	Besonderheiten des Amplitudengangs (vorgegebenes Toleranzschema)
Butterworth	- maximal flacher Verlauf im Durchlassbereich - monoton fallender Verlauf
Tschebyscheff Typ I	- oszilliert im Durchlassbereich mit p Extrema (mit p = Filterordnung, „equiripple“-Verhalten) - monoton fallend im Übergangs- und Sperrbereich
Tschebyscheff Typ II	- oszilliert im Sperrbereich („equiripple“-Verhalten) - monoton fallend im Durchlass- und Übergangsbereich - Nullstellen im Sperrbereich
Cauer	- oszilliert im Durchlass- und Sperrbereich („equiripple“-Verhalten) - monoton fallend im Übergangsbereich - hohe Sperrdämpfung

4.7 FIR-Filter

grundsätzlich Stabil, Ordnung m → m Pole im Ursprung

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^{-\mu} \tag{97}$$

$$H(z) = \frac{b_0 \Pi_{\mu=1}^{m}(z - z_{0\mu})}{z^m} \tag{98}$$

$$h(k) = b_k \quad k \in [0, m] \tag{99}$$

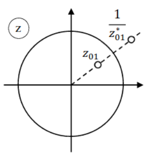
Gewollte Eigenschaft: lineare Phase

$$\tau_g = -\frac{d}{d\Omega} arg(H(e^{j\Omega})) = const. \tag{100}$$

lineare Phase wenn Nullstellen von H(z)

- auf Einheitskreis
- in am Einheitskreis gespiegelten Paaren z_{01} und $\frac{1}{z_{01}^*}$

auftreten

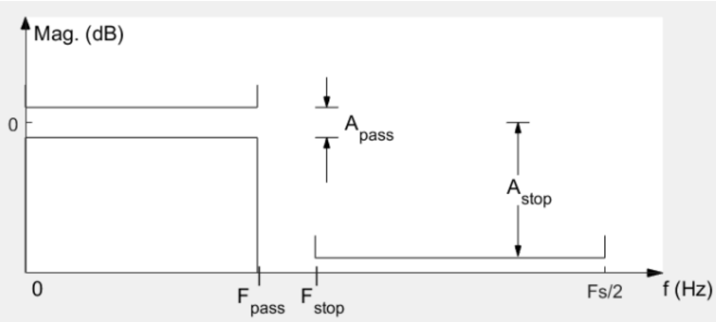


Für linearphasige FIR-Filter der Ordnung p gilt für Impulsantwort h(k) eine der beiden Symmetrien

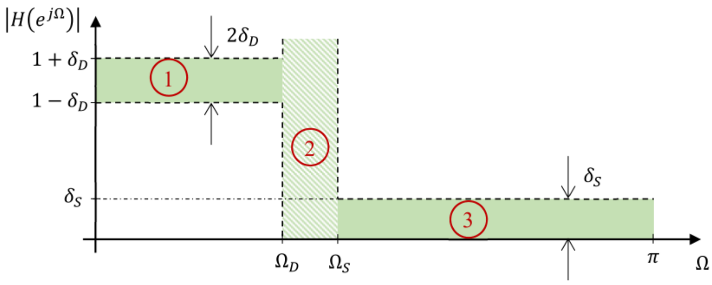
- $h(k) = h(p-k)$ (gerade Symmetrie)
- $h(k) = -h(p-k)$ (ungerade Symmetrie)

4.8 Toleranzschema

Toleranzschema in der log. Notation des “filterDesigner“:



Toleranzschema in der lin. Notation:



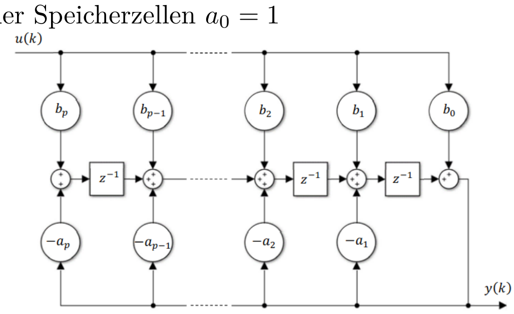
- $A_{pass} = 20\ log\left(\frac{1+\delta_D}{1-\delta_D}\right) = |20 \cdot log_{10}(1-\delta_D)|$
- $\delta_D = 1 - 10^{\frac{-A_{pass}}{20}}$
- $A_{Stop} = |20\,log(\delta_S)|$
- $F_{pass} = \frac{\Omega_D}{2\pi} f_A$
- $F_{stop} = \frac{\Omega_S}{2\pi} f_A$

4.9 Kanonische Struktur:

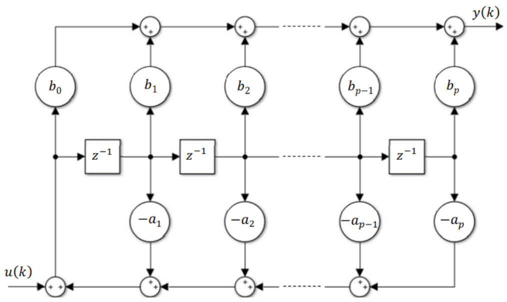
- Realisierung von Filtern mit minimaler Speicherzellenanzahl
- für Filter mit Ordnung p sind p Zellen nötig

4.9.1 1. Kanonische-Form (IIR)

Hälfte der Speicherzellen $a_0 = 1$

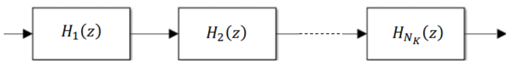


4.10 2. Kanonische-Form (IIR)



4.10.1 3. Kanonische-Form (IIR)

Kaskadierung erzeugt dritte karnonische Struktur
ACHTUNG:
Aufteilung in Teilsysteme **erster** oder **zweiter** Ordnung (“Second Order Section“ oder “Biquad“)



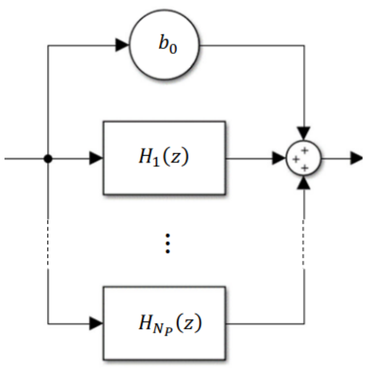
$$H(z) = \Pi_{\nu=0}^{N_K} H_\nu(z) \tag{101}$$

$$H_\nu(z)^{(1)} = \frac{b_{0\nu} + b_{1\nu} z^{-1}}{1 + a_{1\nu} z^{-1}} \tag{102}$$

$$H_\nu(z)^{(2)} = \frac{b_{0\nu} + b_{1\nu} z^{-1} + b_{2\nu} z^{-2}}{1 + a_{1\nu} z^{-1} + a_{2\nu} z^{-2}} \tag{103}$$

4.10.2 4. Kanonische-Form (IIR)

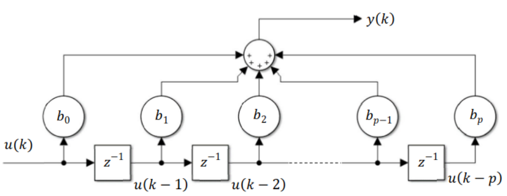
Parallelisierung durch Partialbruchzerlegung erzeugt vierte karnonische Struktur



$$H(z) = b_0 + \sum_{\nu=1}^{N_P} H\nu(z) \tag{104}$$

4.10.3 Trasversalfilter (FIR)

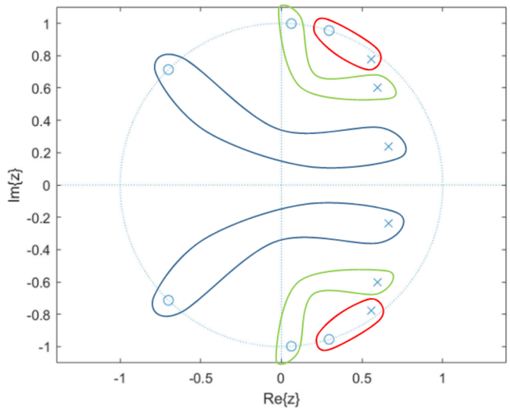
Kann effizient durch MAC-Befehl realisiert werden. Für linearphasige reelwertige FIR-Filter kann die Symmetrie der b_k genutzt werden.



4.10.4 SOS-Faustregel (IIR)

Aufteilung der Pole-Nullstellen in Biquads, sodass sich Einflüsse auf Frequenzgang ausgleichen. Vorgehen:

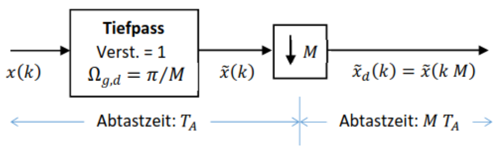
- Beginnen mit Pol der am dichtesten am EHK liegt



5 Abtastung

5.1 Dezimator Ganzzahliges M

Dezimator = Kompressor



Das Spektrum $X(e^{j\tilde{\Omega}})$ des ursprünglichen Signals x(k) wird um M dezimiert, was zum Spektrum $X_d(e^{j\Omega})$ führt.

$$x_d(k) = x_c(kMT_A) \tag{105}$$

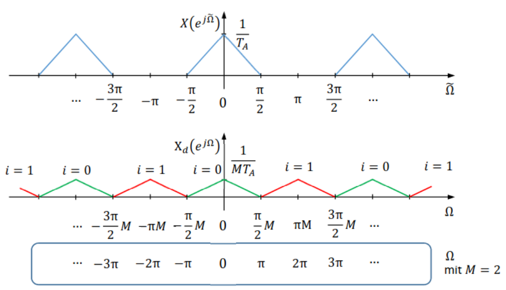
$$X(e^{j\tilde{\Omega}}) = \frac{1}{T_A} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} X_c(j\frac{\tilde{\Omega}}{T_A} - \nu\frac{2\pi}{T_A}) \tag{106}$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{MT_A} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} X_c(e^{j\frac{\Omega}{MT_A} - \mu\frac{2\pi}{MT_A}}) \tag{107}$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\Omega}{M} - i\frac{2\pi}{M}}) \tag{108}$$

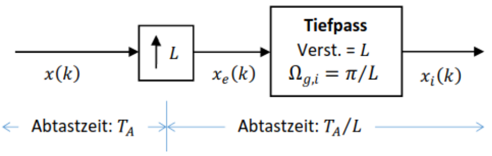
(109)

- Skalierung der Frequenzachse um $\frac{\Omega}{M}$
- Verringerung der Periodisierung
- Skalierung des Spektrums mit $\frac{1}{M}$
- Falls Nyquist-Kriterium $\frac{f_A}{M} > 2\tilde{f}_{max}$ nicht erfüllt → Hohe Frequenzanteile Tiefpass-Filtern



5.2 Interpolator Ganzzahliges M

Interpolator = Expander



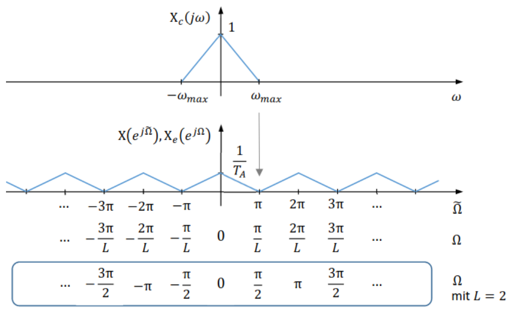
Expander hängt hinter jedem Abtastwert von x(k) L-1 0er an. $x_e(k) = [x(k/L)\ zeros(1, L-1)]$

$$x_i(k) = x_c(k\frac{T_A}{L}) \tag{110}$$

$$X_e(e^{j\tilde{\Omega}}) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x(\nu)e^{-j\Omega\nu L} \tag{111}$$

$$X_e(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega L}) \tag{112}$$

- Spektrum $X_e(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega L})$ läuft von $-\pi/L...\pi/L$
- Keine Skalierung des Spektrums



5.3 Änderung nicht Ganzzahlig

Zusammenfassung der Tiefpässe zu einem mit V=L und Grenzfrequenz $\Omega_{g,i\&d} = min(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M})$

$$\Omega_{nachher} = \Omega_{vorher}\frac{M}{L} \tag{113}$$

5.4 Transformationen / Korrespondenzen

Discrete-Time Fourier Transform (DTFT)

$$\begin{array}{rcl}
x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta & \Longleftrightarrow & X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta n} \\
x[n-n_0] & \Longleftrightarrow & e^{-j\theta n_0}X(e^{j\theta}) \\
e^{j\theta_0 n}x[n] & \Longleftrightarrow & X(e^{j(\theta-\theta_0)}) \\
x^*[n] & \Longleftrightarrow & X^*(e^{-j\theta}) \\
x[-n] & \Longleftrightarrow & X(e^{-j\theta}) \\
(x * y)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] & \Longleftrightarrow & X(e^{j\theta})Y(e^{j\theta}) \\
x[n]y[n] & \Longleftrightarrow & \frac{1}{2\pi}(X * Y)(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\lambda})Y(e^{j(\theta-\lambda)})d\lambda \\
x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) & \Longleftrightarrow & \Re e\{X(e^{j\theta})\} \\
x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) & \Longleftrightarrow & j\Im m\{X(e^{j\theta})\} \\
\Re e\{x[n]\} & \Longleftrightarrow & X_e(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\theta}) + X^*(e^{-j\theta})) \\
j\Im m\{x[n]\} & \Longleftrightarrow & X_o(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\theta}) - X^*(e^{-j\theta})) \\
nx[n] & \Longleftrightarrow & j\frac{dX(e^{j\theta})}{d\theta} \\
\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] & \Longleftrightarrow & \frac{1}{1-e^{-j\theta}}X(e^{j\theta}) + \pi X(e^{j0})\delta_{2\pi}(\theta)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x[n] & \Longleftrightarrow & X(e^{j\theta}) \\
\delta[n-n_0] & \Longleftrightarrow & e^{-j\theta n_0} \\
e^{j\theta_0 n} & \Longleftrightarrow & 2\pi\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) \\
\cos(\theta_0 n) & \Longleftrightarrow & \pi\left(\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) + \delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)\right) \\
\sin(\theta_0 n) & \Longleftrightarrow & \frac{\pi}{j}\left(\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) - \delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)\right) \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] & \Longleftrightarrow & \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \frac{2\pi}{N}k) \\
u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} & \Longleftrightarrow & \frac{1}{1-e^{-j\theta}} + \pi\delta_{2\pi}(\theta) \\
\alpha^n u[n], \quad |\alpha| < 1 & \Longleftrightarrow & \frac{1}{1-\alpha e^{-j\theta}} \\
\frac{\sin(\alpha n)}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < \pi & \Longleftrightarrow & X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\theta| \leq \alpha \\ 0, & \alpha < |\theta| < \pi \end{cases} \\
x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} & \Longleftrightarrow & \frac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} & \Longleftrightarrow & \frac{\sin\left(\frac{N\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{-j\frac{N-1}{2}\theta}
\end{array}$$

Discrete Fourier Transform (DFT)

$$\begin{array}{rcl}
x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} & \Longleftrightarrow & X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\
x[(n-n_0) \bmod N] & \Longleftrightarrow & e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0 k}X[k] \\
e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}x[n] & \Longleftrightarrow & X[(k-k_0) \bmod N] \\
x^*[n] & \Longleftrightarrow & X^*[(-k) \bmod N] \\
x^*[(-n) \bmod N] & \Longleftrightarrow & X^*[k] \\
(x \overset{N}{*} y)[n] & \Longleftrightarrow & X[k]Y[k] \\
x[n]y[n] & \Longleftrightarrow & \frac{1}{N}(X \overset{N}{*} Y)[k] \\
\frac{1}{2}(x[n] + x^*[(-n) \bmod N]) & \Longleftrightarrow & \Re e\{X[k]\} \\
\frac{1}{2}(x[n] - x^*[(-n) \bmod N]) & \Longleftrightarrow & j\Im m\{X[k]\} \\
\Re e\{x[n]\} & \Longleftrightarrow & \frac{1}{2}(X[k] + X^*[(-k) \bmod N]) \\
j\Im m\{x[n]\} & \Longleftrightarrow & \frac{1}{2}(X[k] - X^*[(-k) \bmod N])
\end{array}$$

Es gilt: $0 \leq n < N$, $0 \leq k < N$ und $0 \leq m < N$

$$\begin{array}{rcl}
e^{j\frac{2\pi}{N}mn} & \Longleftrightarrow & N\delta[k-m] \\
\cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) & \Longleftrightarrow & \frac{N}{2}(\delta[k-m] + \delta[k+m-N]) \\
\sin\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) & \Longleftrightarrow & \frac{N}{2j}(\delta[k-m] - \delta[k+m-N]) \\
\delta[n] & \Longleftrightarrow & 1 \\
x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N_1 \\ 1, & N - N_1 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} & \Longleftrightarrow & \frac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\pi k}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}
\end{array}$$

z-Transformation (DFT)

$$
\begin{array}{rcll}
\delta[n] & \Longleftrightarrow & 1 & \forall z \\
u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} & \Longleftrightarrow & \frac{z}{z-1} & |z| > 1 \\
-u[-n-1] & \Longleftrightarrow & \frac{z}{z-1} & |z| < 1 \\
\alpha^n u[n] & \Longleftrightarrow & \frac{z}{z-\alpha} & |z| > |\alpha| \\
-\alpha^n u[-n-1] & \Longleftrightarrow & \frac{z}{z-\alpha} & |z| < |\alpha| \\
nu[n] & \Longleftrightarrow & \frac{z}{(z-1)^2} & |z| > 1 \\
-nu[-n-1] & \Longleftrightarrow & \frac{z}{(z-1)^2} & |z| < 1 \\
\sin(\alpha n)u[n] & \Longleftrightarrow & \frac{z \sin\alpha}{z^2-2z\cos\alpha+1} & |z| > 1 \\
\cos(\alpha n)u[n] & \Longleftrightarrow & \frac{z(z-\cos\alpha)}{z^2-2z\cos\alpha+1} & |z| > 1 \\
\rho^n \sin(\alpha n)u[n] & \Longleftrightarrow & \frac{\rho z \sin\alpha}{z^2-2\rho z\cos\alpha+\rho^2} & |z| > \rho \\
\rho^n \cos(\alpha n)u[n] & \Longleftrightarrow & \frac{z(z-\rho\cos\alpha)}{z^2-2\rho z\cos\alpha+\rho^2} & |z| > \rho \\
\sin(\alpha n+\varphi)u[n] & \Longleftrightarrow & \frac{z^2\sin\varphi+z\sin(\alpha-\varphi)}{z^2-2z\cos\alpha+1} & |z| > 1 \\
\frac{1}{n}, \quad n > 0 & \Longleftrightarrow & \log_e\left(\frac{z}{z-1}\right) & |z| > 1 \\
\frac{1-e^{-\alpha n}}{n}u[n] & \Longleftrightarrow & \alpha + \log_e\left(\frac{z-e^{-\alpha}}{z-1}\right) & |z| > 1,\ \alpha > 0 \\
\frac{\sin(\alpha n)}{n}u[n] & \Longleftrightarrow & \alpha + \arctan\left(\frac{\sin\alpha}{z-\cos\alpha}\right) & |z| > \cos\alpha,\ \alpha > 0
\end{array}
$$

5.5 Mathematische Anmerkungen

$$\textbf{Eueler Formel: } e^{i\Omega} = cos(\Omega) + i \cdot sin(\Omega) \tag{114}$$

$$cos(\Omega) = \frac{e^{-i\Omega} + e^{+i\Omega}}{2} \tag{115}$$

$$sin(\Omega) = \frac{e^{-i\Omega} - e^{-i\Omega}}{2j} \tag{116}$$

$$cos(\pi \cdot k) = (-1)^k \tag{117}$$

$$cos^2(k) + sin^2(k) = 1 \tag{118}$$

$$\textbf{Rechteck-Funktion: } rect(\frac{t - t_0}{T}) \tag{119}$$

$$\tag{120}$$

5.6 Dezibel-Umrechnung

- **lin-dB-Rechnung:** $[db] = a \cdot 10 \cdot \log_{10}[lin]$
- **dB-lin-Rechnung:** $[lin] = 10^{\frac{[dB]}{a}}$
- **Vorfaktor:** Feldgröße: $a = 20$ Energiegröße: $a = 10$

5.7 Komplexe Zahlen

$$\textbf{Komplexer Betrag: } |x| = \sqrt{Re^2 + Im^2} \tag{121}$$

$$\textbf{Phase: } \varphi = arctan(\frac{\text{„}Imag.\text{“}}{\text{„}Real.\text{“}}) = arctan(\frac{sin(\varphi)}{cos(\varphi)}) \tag{122}$$

$$arg(\frac{a(j\Omega) \cdot b(j\Omega)}{c(j\Omega)}) = arg(a) + arg(b) - arg(c) \tag{123}$$

Phasenkorrektur bei $\varphi = arg(x + j \cdot y)$:

- $arctan(\frac{y}{x})$ für $x > 0$
- $arctan(\frac{y}{x}) + \pi$ für $x < 0$ $y \geq 0$
- $arctan(\frac{y}{x}) - \pi$ für $x < 0$ $y < 0$
- $\frac{\pi}{2}$ für $x = 0$ $y > 0$
- $\frac{-\pi}{2}$ für $x = 0$ $y < 0$
- unbestimmt für $x = 0$ $y = 0$

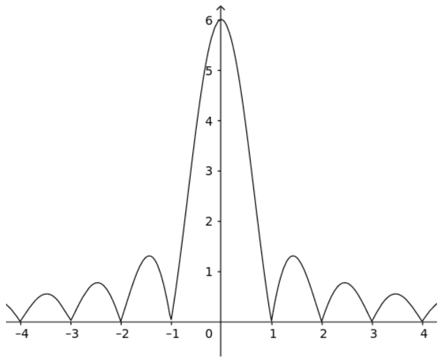
$$sin(\frac{2 \cdot \pi \cdot f_{sin} \cdot k}{f_A}) = \frac{1}{2j} \cdot (e^{\frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_{sin} \cdot k}{f_A}} - e^{\frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_{sin} \cdot k}{f_A}}) \tag{124}$$

5.8 Rechteck als Fensterfunktion

- Betragsgang variiert periodisch nach si-Funktion
- Breite der Hauptkeule: $\frac{2}{T}$ bzw. $\frac{4\pi}{T}$ (auf 2π bezogen)
- Breite der Nebenkeulen: $\frac{1}{T}$ bzw. $\frac{2\pi}{T}$ (auf 2π bezogen)
- **T:** Breite des Rechtecks

$$\left|F\{rect(\frac{t - T/2}{T})\}\right| = \left|T \cdot \frac{sin(\Omega \cdot T/2)}{\Omega \cdot T/2}\right| \tag{125}$$

$$= \left|T \cdot si(\Omega \cdot \frac{T}{2}) \cdot e^{-j\Omega \cdot T/2}\right| \tag{126}$$



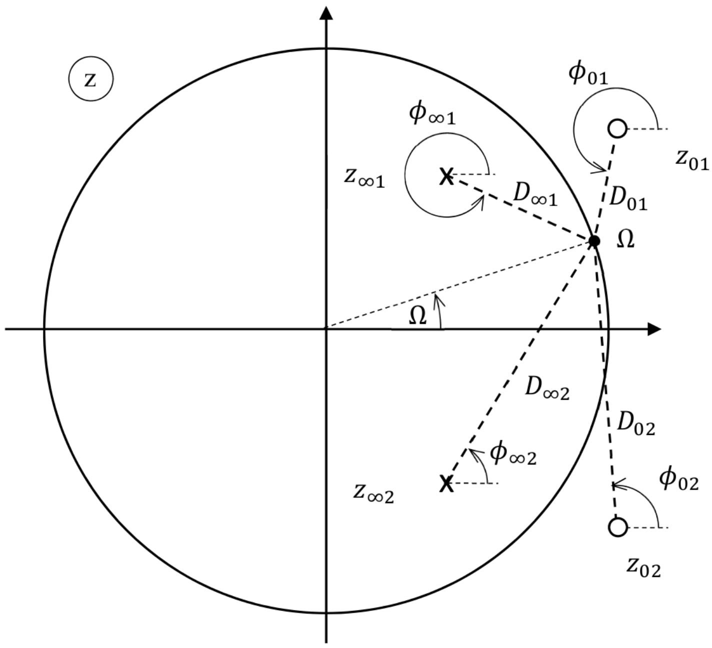
In der Abbildung ist eine um den Faktor 6 skalierte si-Funktion zu sehen. Die hierbei gewählte Fenster-Breite T wurde auf 1 festgelegt. Somit beträgt die Breite der Hauptkeule 2 und die der Nebenkeule 1.

5.9 Pol-Nullstellen-Bewertung

Die Auswirkung der Pol- / Nullstellen-Position wird hier anhand eines Systems zweiter Ordnung gezeigt.

$$H(z) = \frac{b_0(z - z_{01})(z - z_{02})}{a_0(z - z_{\infty 1})(z - z_{\infty 2})}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{b_0(e^{j\Omega} - z_{01})(e^{j\Omega} - z_{02})}{a_0(e^{j\Omega} - z_{\infty 1})(e^{j\Omega} - z_{\infty 2})}$$



Amplitudengang: $\left|H(e^{j\Omega})\right| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{|e^{j\Omega}-z_{01}||e^{j\Omega}-z_{02}|}{|e^{j\Omega}-z_{\infty1}||e^{j\Omega}-z_{\infty2}|} = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{D_{01}D_{02}}{D_{\infty1}D_{\infty2}}$

Phasengang: $arg\{H(e^{j\Omega})\} = arg\left\{\frac{b_0}{a_0}\right\} + \phi_{01} + \phi_{02} - \phi_{\infty1} - \phi_{\infty2}$

Besonderheiten:

- **Linearphasigkeit:**
  - **Bedeutung:** linearer Zusammenhang zw. Frequenz und Phasenverschiebung
    => Gruppenlaufzeit / zeitliche Verzögerung durch Filter IMMER gleich
  - **Voraussetzung:** NST paarweise am Einheitskreis "gespiegelt" ($z_{01} -> \frac{1}{z_{01}{}^*}$)
    ODER NST alle auf Einheitskreis
    (ACHTUNG: Phasensprünge)
- **Umrechnung Frequenz in Winkel:** $\varphi = \frac{2\cdot\pi\cdot f_n}{f_{Abtast}}$
- Auf Einheitskreis wird gegen den **Urzeigersinn** von 0 Hz (0°) bis f_{Abtast} (360° bzw. 2π) gelaufen
- **Skalierung der Pol- / Nullstellen:**
  Substitution von $N(z)$ durch $N(\frac{z}{c})$
  $N(z) = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^{-\mu}$ -> $N(\frac{z}{c}) = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu (\frac{z}{c})^{-\mu}$
- **Hinweis Gruppenlaufzeit:** Sprünge der Phase beeinträchtigen die Gruppenlaufzeit nicht
  $\rightarrow$ Phasensprünge für Ableitung ignorieren!

5.10 Hinweise zur Interpretation von Diagrammen

Spektrogram

- Spektrogram zeigt Frequenzanteile gemäß FFT/DFT
- Höchste Frequenz entspricht Abtastfrequenz

Periodogram

- Periodogram zeigt Schätzung des Autoleistungsdichte-Spektrums
- Gewichtetes Betragsquadrat des Amplitudenspektrums
- $\hat{\phi}_{Per} = \frac{1}{N}|X(n)|^2$

5.11 Bedeutung der Diagramm-Werte im Bezug auf ein Beispiel-Signal

$x[k] = a \cdot cos(\Omega_0 \cdot k)$

- Spektrog.: $max(|X[\Omega]|) = a \cdot \frac{N}{2}$
- Periodog.: $max(\hat{\phi}_{Per}) = a^2 \cdot \frac{N}{4}$

5.12 Anmerkung LTI-Systeme

$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\text{"Ausgangssignal"}}{\text{"Eingangssignal"}}$

- **Allgemein:**
  - z^{-1} entspricht Verzögerung um einen Abtastwert
  - z-Trans. = Laplace-Trans. für abgetastete Signale
  - $z = e^{j\cdot\Omega} = e^{(\delta+j\cdot\omega)\cdot T_a}$
- **Besonderheiten:**
  - Bandbreite ist bei TP $\Delta\Omega = 2 \cdot \Omega_{3dB}$
  - **Minimalphasigkeit:** NST **ausschließlich** mit negativem Realwert
- **Übertragungsfunktion:** $H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^{-\mu}}{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{-\nu}}$
- **Ordnung des Systems:** Maximum des Polynomgrades von m & n
- **Stabilität:**
  - **Asympthotisch: alle** Beträge $|b_v| < 1$
  - **Grenzstabil:** einfacher Pol mit $|b_v| = 1$
  - **Instabil:** mindestens ein Betrag $|b_v| > 1$
    ODER doppelter Pol mit $|b_v| = 1$
- **Realisierbarkeit:**
  - Realisierbar wenn **kausal UND stabil**
  - **Kausal: Polynomgrad** $n \geq m$
    (**NICHT** von **zukünftigen** Werten abhängig)
  - **Stabilität:** siehe oben
-

5.13 Taschenrechner-Tricks (Casio fx-991DEX)

- **Polstellen-Bestimmung:**
  1. "MENU SETUP"
  2. $(\begin{smallmatrix} X & Y \\ = & 0 \end{smallmatrix})$ "A:Gleichung/Funkt"
  3. "="
  4. "2:Polynom-Gleichung"

  ACHTUNG: Grad muss ≤ 4 UND ≥ 1 sein!
- **Leckeffekt-Erkennung & Behebung:**
  1. $\frac{f_{Abtast}}{f_{Signal}} (= N_{Signal})$ in Taschenrechner eingeben
     N_{Signal}: Anzahl der Abtastwerte in einzelner Periode des Signales
  2. Ergebnis **ganzzahlig** -> kein Leckeffekt
  3. Ergebnis in **Bruch-Form** -> Leckeffekt
  4. WENN Bruch: $\frac{N_{Abtast}}{n_{Ganzzahl}} = N_{Signal}$
     N_{Abtast}**:** kleinste Anzahl an Abtastwerten ohne Leckeffekt
     $n_{Ganzzahl}$**:** Ganzzahliges Vielfaches

5.14 FIR-Filter

- **Besonderheiten:**
  - **nichtrekursiver** Filter mit **Grad m**
  - $H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^{-\mu}$
  - m-facher Pol im Ursprung
  - Einsatz in adaptiven Systemen
  - Impulsantwort: gerade $(h(k) = h(p-k))$ oder ungerade $(h(k) = -h(p-k))$ Symmetrie
  - Gruppenlaufzeit: $\tau_{Gruppe} = -\frac{d}{d\Omega} arg(H(\Omega)) = \frac{p}{2}$ (p: Ordnung)
  - Impulsantowrt entspricht den b-Koeffizienten in $H(z)$
- **Vorteile:**
  - linearphasig / konstante Gruppenlaufzeit **WENN** nur gespiegelte NST-Paare: z_{01} und $\frac{1}{z_{01}^*}$ **ODER** NST auf Einheitskreis
  - **IMMER** stabil
  - endlich Ein- & Ausschwingzeiten
- **Nachteile:**
  - große Filterordnung wenn hohe Sperrdämpfung / steile Filterflanken gefordert sind
  - kann mit analogen Bauteilen NICHT realisiert werden

Grundtypen von FIR-Filtern
(mit entsprechenden Eigenschaften):
Hinweis: Symmetrie immer um $\frac{p}{2}$ **(!!!)**

	Ordnung p	Symmetrie	$h(p/2)$
Typ 1	gerade	$h(k) = h(p-k)$	$\in \mathbb{R}$
Typ 2	gerade	$h(k) = -h(p-k)$	$= 0$
Typ 3	ungerade	$h(k) = h(p-k)$	existiert nicht
Typ 4	ungerade	$h(k) = -h(p-k)$	existiert nicht

Typ	Nullstellen
1	nicht festgelegt
2	$\Omega = 0$ und $\Omega = \pi$
3	$\Omega = \pi$
4	$\Omega = 0$

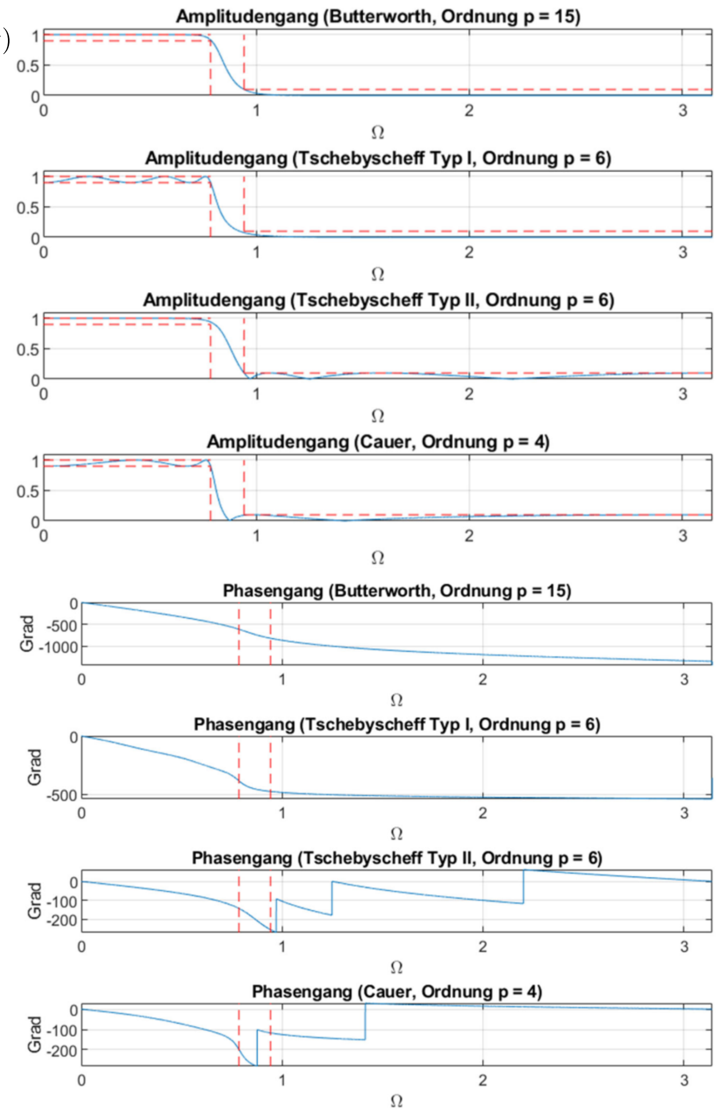
Eigenschaften der Typen:

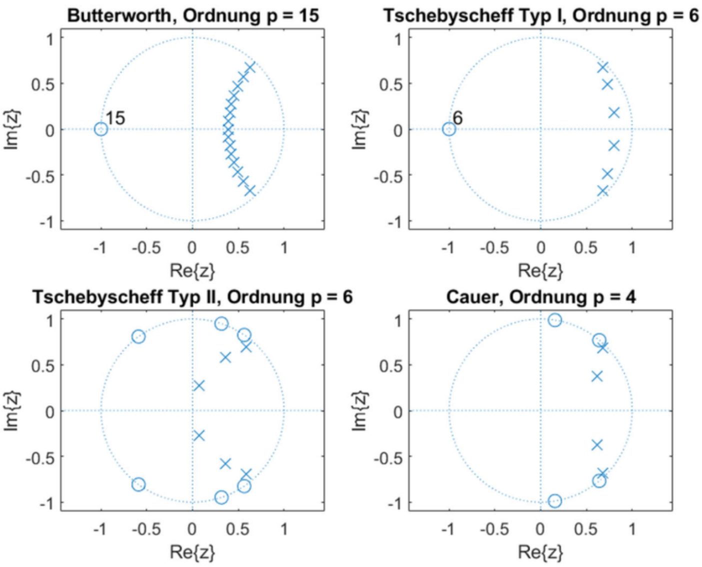
- Typ 1: HP, TP, BP, BSP
- Typ 2: kein Hoch- ,Tiefpass & BSP
- Typ 3: kein Hochpass & BSP
- Typ 4: kein Tiefpass & BSP

5.15 IIR-Filter

- **Besonderheiten:**
  -
- **Vorteile:**
  - geringere Filterordnung bei vergleichbarem FIR-Filter
  - Entwurfswerkzeuge aus analoger Welt können genutzt werden
- **Nachteile:**
  - NICHT linearphasig
  - Anfälligkeit gegen Wortlängeneffekte
  - Instabilität möglich

Grundtypen von IIR-Filtern:
(**Achtung:** Amplitudengang ist hier linear angegeben!)





Eigenschaften der Typen:

- **Butterworth:**
  - monoton fallender Verlauf
  - maximal flacher Verlauf im Sperrbereich
- **Tschebyscheff Typ I:**
  - oszilliert im Durchlassb. mit p Extrema (p = Filterordnung) **ACHTUNG:** jeweils Minimas & Maximas beachten
  - monoton fallend im Übergangs- & Sperrbereich
- **Tschebyscheff Typ II:**
  - oszilliert im Sperrb. („equiripple“-Verhalten)
  - monoton fallend im Durchlassbereich
  - NST im Sperrbereich
- **Cauer:**
  - oszilliert im Durchl. & Sperrb. („equiripple“-Verhalten)
  - monoton fallend im Übergangsbereich
  - hohe Sperrdämpfung