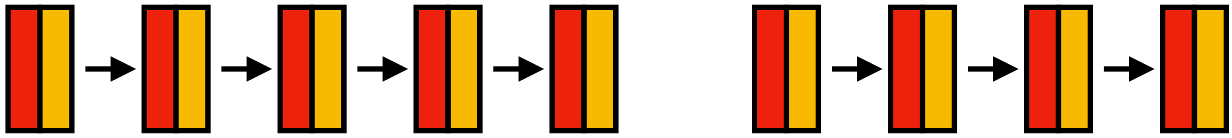
ML Homework #4 學號：B0902120 系級： 資工四 姓名：曾鈺婷

1. 請使用不同的 Autoencoder model，以及不同的降維方式（降到不同維度），討論其 reconstruction loss & public / private accuracy。（因此模型需要兩種，降維方法也需要兩種，但clustrering不用兩種。）

紅色：Conv2d (kernel_size = 3, stride = 2, padding = 2, bias = True)

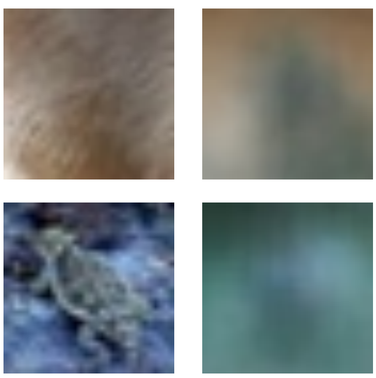
黃色：ReLU ( )



	Reconstruction Loss	Public Score	Private Score
PCA +AE1	0.0766	0.77603	0.77518
ICA+AE1	0.0739	0.80285	0.81148
PCA +AE2	0.0343	0.73904	0.73925
ICA+AE2	0.0429	0.78095	0.78555

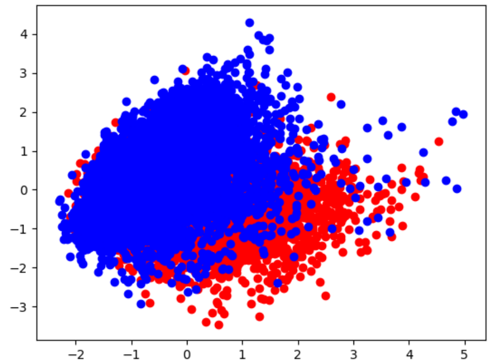
我們可以發現 loss 跟 autoencoder 比較相關（廢話），然而 loss 的高低不代表最終結果的好壞。另外，在選擇二次降維的模型的時候，發現 ICA 的表現普遍比較好，而且也相對比較穩定一些。

2. 從 dataset 選出 2 張圖，並貼上原圖以及經過 autoencoder 後 reconstruct 的圖片。



3. 在之後我們會給你dataset的label。請在二維平面上視覺化label的分佈。

加 whiten 的 PCA。



4. 數學題

1. Principle Component Analysis - (a)

$$\mu = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i = [5.4 \quad 8 \quad 3.8]^T$$

$$\Sigma = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} (X_i - \mu)(X_i - \mu)^T = \begin{bmatrix} 12.04 & 0.5 & 3.28 \\ 0.5 & 12.2 & 2.9 \\ 3.28 & 2.9 & 8.16 \end{bmatrix}$$

將其正交對角化為 $\Sigma = Q \wedge Q^T$，可得 eigenvector 為 $[0.616596 \quad 0.58815 \quad 0.522596]^T$、$[0.678179 \quad -0.73439 \quad 0.0272856]^T$、$[-0.399856 \quad -0.337589 \quad 0.852144]^T$，即 principal axis。

1. Principle Component Analysis - (b)

從上一題的 eigenvector 得 principal component 依序為

$[3.360684 \quad -0.7087442 \quad 1.481398]^T$
$[13.610952 \quad -6.5325726 \quad 2.41866]^T$
$[12.362272 \quad -6.8359938 \quad -5.021238]^T$
$[14.957928 \quad 0.4740614 \quad 1.36988]^T$
$[12.858882 \quad 3.9517326 \quad -0.973497]^T$
$[9.784564 \quad -3.025976 \quad -0.039416]^T$
$[7.934776 \quad -5.060513 \quad 1.160152]^T$
$[7.191368 \quad 1.9369786 \quad -3.297204]^T$
$[7.077584 \quad -3.8132974 \quad -3.048136]^T$
$[16.293782 \quad -1.1055008 \quad -1.747031]^T$

1. Principle Component Analysis - (c)

$$w = \begin{bmatrix} 0.616596 & 0.58815 & 0.522596 \\ 0.678179 & -0.73439 & 0.0272856 \end{bmatrix}$$

$$\mu = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} |X_i - w^T(wX_i)| = 6.068166$$

2. Constrained Mahalanobis Distance Minimization Problem - (a)

證明 symmetric

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A = AA^T$$
$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

證明 positive semi-definite

$$X^T(AA^T)X = (X^TA)(A^TX) = (A^TX)^T(A^TX) = \|A^TX\|^2 \geq 0$$
$$Y^T(A^TA)Y = (Y^TA^T)(AY) = (AY)^T(AY) = \|AY\|^2 \geq 0$$

證明 non-zero eigenvalue 相同

$$(AA^T)X = \lambda X;\ (A^TA)(A^TX) = A^T(AA^T)X = A^T\lambda X = \lambda(A^TX)$$
$$(A^TA)Y = \lambda' Y;\ (AA^T)(AY) = A(A^TA)Y = A\lambda' Y = \lambda'(AY)$$

2. <u>Constrained Mahalanobis Distance Minimization Problem - (b)</u>

由題目可推知 $\Sigma = Q \wedge Q^T = Q\sqrt{\wedge}\sqrt{\wedge}^T Q = (Q\sqrt{\wedge})(Q\sqrt{\wedge})^T = AA^T$

令 $z_1 = [\mu \ 0 \ \dots \ 0]^T, z_2 = [0 \ \mu \ \dots \ 0]^T \dots z_n = [0 \ 0 \ \dots \ \mu]^T$

$z_{n+1} = [-\mu \ 0 \ \dots \ 0]^T, z_{n+2} = [0 \ -\mu \ \dots \ 0]^T \dots z_{2n} = [0 \ 0 \ \dots \ -\mu]^T$

其 mean 為 $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} z_i = 0$；

covariance matrix 為 $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} (z_i - 0)(z_i - 0)^T = I_n$

令 $x_i = Az_i + \mu$

其 mean 為 $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} (Az_i + \mu) = \mu$；

covariance matrix 為 $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} (x_i - \mu)(x_i - \mu)^T = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} (Az_i)(Az_i)^T = AA^T I_n = AA^T = \Sigma$