國立竹北高中 103 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選數學科答案

※填充題（ 共 15 題，滿分 100 分 ）
答對題數 1~10 題者，每題 7 分；答對題數 11 題以上者，每題 6 分。

1	2	3
2025	$\frac{14}{55}$	32
4	5	6
27	$4\sqrt{7}$	**2**
7	**8**	**9**
8	**108**	**－205**
10	11	12
$\frac{20\pi}{3}$	$\mathbf{-2}$	$\frac{1}{4}$
13	14	15
$-1\pm\sqrt{2}i$，$\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$	$\sqrt{\mathbf{21}}$	$\frac{2^n}{3^{n-1}}$

【第一冊】

1. 數系($\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$)

$$\Rightarrow 實數(R)\begin{cases}有理數\ \mathbf{Q}\begin{cases}整數\ \mathbf{Z}：(正整數\ \mathbf{N},\ 零,\ 負整數)\\ 分數：(有限小數,循環小數)\end{cases}\\ 無理數\ \mathbf{Q}^c：(不循環的無限小數)\end{cases}$$

2. 算幾不等式：$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$　　　【例】若 $a,b>0$，且 $ab=6$，則 $3a+2b$ 的最小值=<u>12</u>

3. 乘法公式

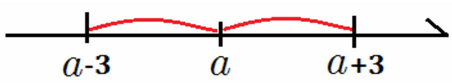
(1) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

(2) $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = \underline{(a+b)^3-3ab(a+b)}$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

【例】若 $a+b=8$，$ab=3$，求(1) a^2+b^2　(2) a^3+b^3　　*Ans*:(1)58　(2)440

4. 絕對值：(1) $|x-a|<3 \Leftrightarrow \underline{(a-3)<x<(a+3)}$。



(2) $|x-a|\geq 3 \Leftrightarrow$ ______________。

5. 指數：(1) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$　(2) $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$　(3) $(a^x)^y=a^{x\cdot y}$　(4) $(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$

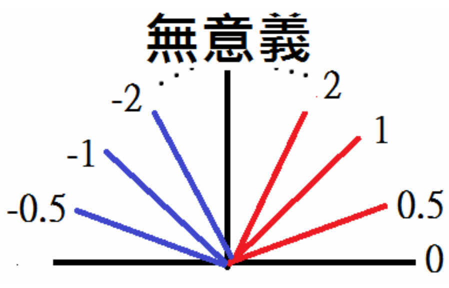
常用對數：$10^x=a \Leftrightarrow \boldsymbol{x=\log a}$　　EX：$\log 10=1$，$\log 100=2$，$\log 1000=3$

(1) $\log 1=0$　(2) $\log 10^x=x$　(3) $10^{\log a}=a$　(4) $(10^m)^{\log a}=a^m$

【例 7】求值：(1) $1000^{\log 2}$　(2) $\log 100^{\frac{5}{2}}$　　*Ans*:(1)8　(2)5

6.直線：

(1) 斜率 $\boldsymbol{m}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



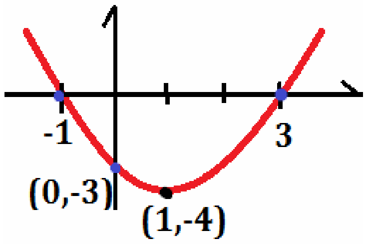
(2)**點斜式**：過 $P(x_0,y_0)$，斜率為 m 之直線 L：$\underline{y-y_0=m\cdot(x-x_0)}$

(3)**截距式**：x 軸截距 a，y 軸截距 b 之直線 L：$\underline{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$

(4)直線 $L: ax+by+c=0$，(1)若 $L_1 // L$，設 $\underline{L_1: ax+by+k=0}$

(2)若 $L_2\perp L$，設 $\underline{L_2: bx-ay+k=0}$

7. 二次函數： 例：$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$



(1)與 x 軸交點：$\underline{(-1,0)\ ,\ (3,0)}$

(2)與 y 軸交點：$\underline{(0,-3)}$

8. (1)餘式定理：$f(x)$除以$(x-c)$的餘式 $r=f(c)$

(2)因式定理：若 $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式，則 $f(c)=0$

【例】$f(x)=x^{59}+7x^{22}-4x^8+5$ 除以 $x-1$ 的餘式= $\underline{9}$

【例】求值：$12^5-7\cdot 12^4-58\cdot 12^3+16\cdot 12^2-465\cdot 12+100=\underline{280}$

9. 牛頓定理：若整係數 $x^4+ax^3+bx^2+cx+40=0$ 有四個相異正整數根，求此四根。

Ans:1,2,4,5

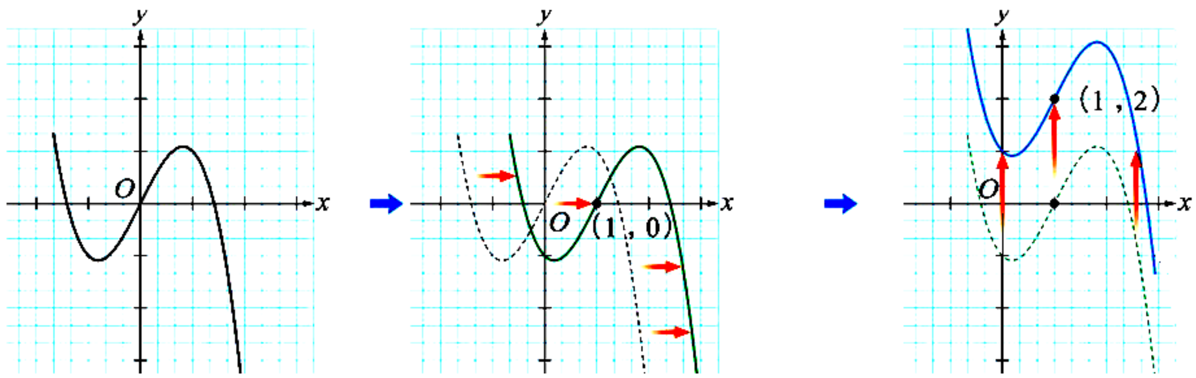
10. 不等式：(1) $x^2-4x+3\geq 0$ 答：$x\geq 3$，$x\leq 1$ (2) $x(x-1)(x-3)(x-5)>0$ 答：$\underline{x<0}$,$\underline{1<x<3}$,$\underline{x>5}$

(大分)

(小連)

11. 三次函數： $y=ax^3+bx^2+cx+d\ =a(x+\square)^3+p(x+\square)+k$ ＜背＞ $\square=\dfrac{b}{3a}$

EX：$y=-x^3+2x \xrightarrow{\text{右移1單位}} y=-(x-1)^3+2(x-1) \xrightarrow{\text{上移 2 單位}} y=-(x-1)^3+2(x-1)+2$



【例】已知 $f(x)=2x^3+6x^2+3x-3=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，則 $y=f(x)$ 的圖形

(1)其對稱中心為$\underline{(-1,-2)}$ (2) 在 $x=-1$ 附近近似於直線 $\underline{y=-3x-5}$

12. 線性規劃：最佳解(Max, min)一般出現在 $\underline{\text{端點}}$, $\underline{\text{邊界}}$

【例 1】設 $x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ 3x+2y-12\leq 0,\ \ x+y-2\geq 0$，求下列最大值與最小值：

(1) $x-y+1$ (2) $\dfrac{y+1}{x+2}$ Ans:(1)M=5 ,m= –5 (2) M=$\dfrac{7}{2}$,m=$\dfrac{1}{6}$

13. 圓心(h,k)，半徑為r $\Rightarrow$**圓的標準式**：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

※距離公式：點$P(X_0,Y_0)$，直線$L: ax+by+c=0$ $\Rightarrow$ **距離** $d(P,L)=\dfrac{|a\cdot X_0+b\cdot Y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

【例】設直線$L: x+y+k=0$，圓$C: x^2+y^2+6x+6y+10=0$，若L和圓C相切，求k值。

Ans: $k=2$ 或 10

【第二冊】

1.遞迴數列：數列$\langle a_n \rangle$中，第n項a_n可由前幾項表示。

(I)累加型：$a_n=a_{n-1}+f(n)$ 【例】n條直線最多可將平面分成a_n個區域，則$a_n=\underline{\dfrac{n^2+n+2}{2}}$

(II)累積型：$a_n=f(n)\bullet a_{n-1}$ 【例】數列$\langle a_n \rangle$，若$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}\cdot a_n$，求$a_{20}=\underline{\dfrac{1}{4}}$

2.等差數列：(1) $a_n=\underline{a_1+(n-1)\cdot d}=\underline{a_5+(n-5)\cdot d}$

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\underline{\dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}=\underline{\dfrac{[2a_1+(n-1)d]\cdot n}{2}}$

(3)若a,b,c成等差，則等差中項$b=\underline{\dfrac{a+c}{2}}$。

【例】$\langle a_n \rangle$為等差數列，其一般項$a_n=-2n+3$，首項$a_1=\underline{1}$，公差$d=\underline{-2}$

【例】試求級數$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+19^2-20^2+21^2$之總和。 *Ans*: 231

3.等比數列：

(1) $a_n=a_1\cdot r^{n-1}=a_5\cdot r^{n-5}$。

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1\cdot r^{n-1}=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

(3)若a,b,c成等比，則等比中項$\underline{b=\pm\sqrt{ac}}$。

【例】若一等比級數的首項為3，公比為4，和為4095，則此級數共有多少項？ *Ans*: 6

4. (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 【例】$\displaystyle\sum_{k=11}^{20}k^2=\underline{2485}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{10\cdot 11}=\underline{\dfrac{10}{11}}$

【例】試求： (1) 1+3+5+7+‧‧‧‧+$(2n-1)$ (2) 1×13 + 4×11 + 7×9 + 10×7 +⋯加至第 20 項

Ans: (1) n^2 (2) -7530

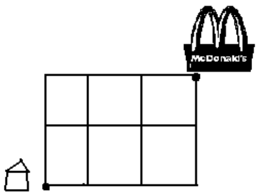
5. 計數原理：(1) **一一對應**原理　　(2)**加法、乘法**原理　　(3)**樹狀圖**

【例】有 21 支隊伍參加單淘汰籃球比賽(沒和局)。請問，共要比幾場才能產生冠軍？

Ans：20 場

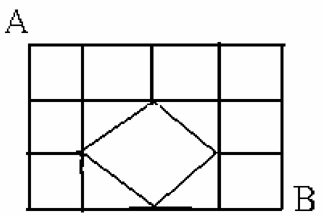
【例】小黑與 4 位同學互相傳球，若小黑傳球出去後經 4 次傳球，球又回到小黑手上，則有 <u>52</u> 種傳法。 (可畫樹狀圖求解)

6. 捷徑：


(牡丹樓)

⇒ 從⌂到 M 有____種走法。

【例】由 A 走捷徑到 B，共有 <u>9</u> 種走法。



7. (1)階乘：$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$　　　EX：有 5 個人， A，B，C，D，E

(2)排列：$P^5_3 = 5\times4\times3$

(3)選取：$C^5_3 = \dfrac{5\times4\times3}{}$

※ $0! = P^n_0 = C^n_0 = 1$

EX： A，A，A，D，E 排一列，有 $\dfrac{5!}{3!}$ 種。

【例】甲、乙、丙、丁、戊，共五人排成一列，求下列方法數：

(1)甲、乙相鄰　　(2)甲、乙、丙相鄰　　(3)甲、乙不相鄰　(4)甲在乙前方，且乙在丙前方

Ans:(1)48 (2)36 (3)72 (4)20

【例】有 5 種不同的酒，倒入 3 個酒杯，求下列方法數：

(1)杯子相同，每種酒最多倒一次：C^5_3

(2)杯子不同，每種酒最多倒一次：P^5_3

(3)杯子不同，每種酒不限倒一次：5^3

(4)杯子不同，每種酒不限倒一次，且至少一杯為啤酒：$5^3 - 4^3$(沒啤酒)

8. 二項式：　　　　　　　　　　　　　　　　　　巴斯卡三角形：

$(a+b)^2 = a^2 + \quad ab + \quad b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + \quad a^2b + \quad ab^2 + \quad b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + \quad a^3b + \quad a^2b^2 + \quad ab^3 + b^4$

※ **(1)** $(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \cdots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n$

(2) $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$

(3) $C_0^n + C_2^n + C_4^n + \cdots = C_1^n + C_3^n + C_5^n + \cdots = \dfrac{2^n}{2}$

【例】$(2x-3y)^8$ 展開式中，則 x^3y^5 的係數＝<u>−108864</u>

9.古典機率：發生事件 A 的機率 $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$　　　　　　＊$0 \le P(A) \le 1$

【例】袋中有 6 顆紅球、4 顆白球。求

(1)同時取 3 球，恰為同色的機率為 $\underline{\dfrac{1}{5}}$

(2)逐一取出全部的球，紅球先被取完的機率為 $\underline{\dfrac{2}{5}}$

【例】畢業旅行，甲,乙,丙,…等 12 人平分住三間房間，則甲,乙,丙皆不同房的機率為 $\underline{\dfrac{16}{55}}$。

10. 條件機率：在發生 A 事件下，B 發生的機率

記為 $P(B|A) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(A)} = \dfrac{n(A\cap B)}{n(A)} =$

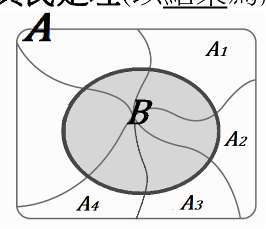
【例】擲一骰子兩次，已知兩次點數和為 8 的條件下，求

(1)其中一顆骰子為 2 點的機率為 $\underline{\dfrac{2}{5}}$　　　(2)第一次點數大於第二次點數的機率為 $\underline{\dfrac{2}{5}}$

11.獨立事件：A ,B 事件彼此不相影響　⇒　$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

【例】阿杜打靶命中率為 40%，欲使靶面被打中的機率超過 0.9，那至少要打幾發？　Ans：5 發
$(\log 2 = 0.3010,\ \log 3 = 0.4771)$

12.貝氏定理(以<u>結果</u>為前提的一種<u>條件機率</u>)



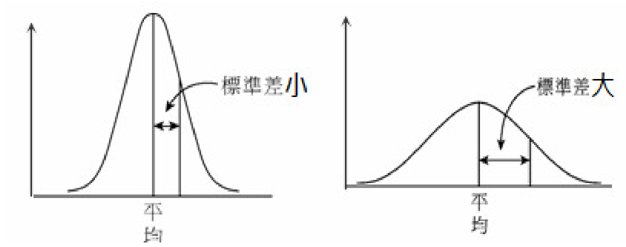
【例】甲乙丙三人射擊的命中率分別為 $\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{3}$，今三人向同靶各射擊一發子彈，求

(1)此靶會被射中的機率＝$\dfrac{9}{10}$

(2)靶面恰中一彈的機率＝$\dfrac{5}{12}$

(3)已知靶面恰中一彈，求其為甲射中的機率＝$\dfrac{4}{25}$

13. 標準差 $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}{n}}$

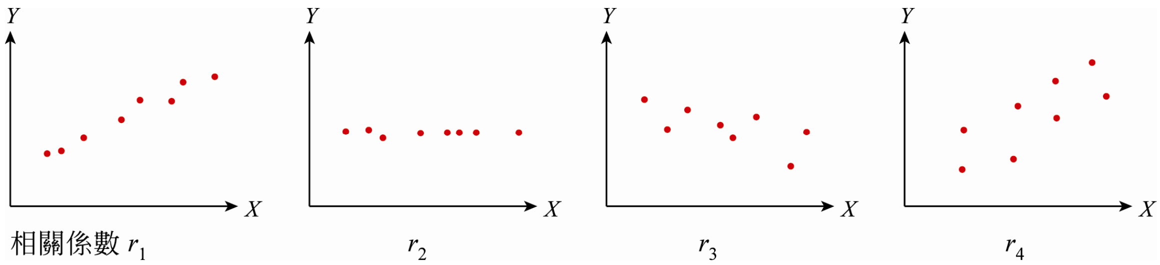


★性質：若 $y_i=ax_i+b$，則**(1)平均** $\bar{y}=a\bar{x}+b$ **(2)標準差** $\sigma_y=|a|\cdot\sigma_x$

【例】兩筆資料 X，Y 的關係為 $y_i=3x_i-2$ （$i=1$，2，$\cdots$，n)，已知標準差 $\sigma_x=6$，且 $\bar{y}=148$，則平均 $\bar{x}=\underline{50}$，標準差 $\sigma_y=\underline{18}$。

14. 相關係數 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}=\dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\cdot S_{yy}}}$ ※(1) $-1\le r\le 1$ (2) $|r|$越大，相關程度越大

【例】將下列各散布圖的相關係數 r_1， r_2， r_3， r_4 由大到小排列。 Ans：$r_1>r_4>r_2>r_3$



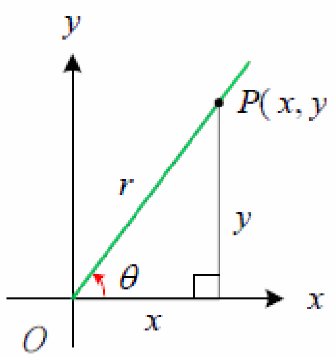
【例】二變量 X 、Y 之相關係數 $r_{X,Y}=0.7$ ，又變量 X 之算數平均數 $\overline{X}=10$，標準差 $\sigma_X=4$ ，求
(1)平均 $\overline{3X+5}$ (2)標準差 σ_{3x+5} (3)相關係數 $r_{3X+5,\,5Y-2}$ Ans: (1)35 (2)12 (3)0.7

15. 迴歸直線 L：$\underline{y-\bar{y}=\dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}\cdot(x-\bar{x})}$ ※(1)直線 L 過 $\underline{(\bar{x},\bar{y})}$ (2)斜率 $m=\dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

【例】紙張的張力強度 Y (磅/平方英吋)和所含硬木比例 X (百分比)關係的實驗，得到如下 5 組數據：
求(1)相關係數 (2) Y 對 X 的迴歸直線方程式 Ans：(1)0.725 (2) $y-30=\dfrac{290}{100}(x-8)$

X	3	4	7	11	15
Y	5	40	15	35	55

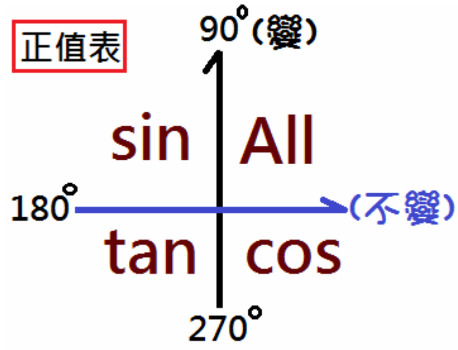
16. 三角函數：



$\sin\theta=\dfrac{對}{斜}=\dfrac{y}{r}$

$\cos\theta=\dfrac{鄰}{斜}=\dfrac{x}{r}$

$\tan\theta=\dfrac{對}{鄰}=\dfrac{y}{x}$(斜率)



【例】完成下表：

	30°	45°	60°
sin			
cos			
tan			
cot			

【例】求值

(1) $\sin 120°=$ ________ $\cos 120°=$ ________ $\tan 120°=$ ________

(2) $\sin 1050°=$ ________ $\cos 1050°=$ ________ $\tan 1050°=$ ________

Ans:(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2};-\sqrt{3}$ (2) $-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

17. (1) π(弧度)＝180° (2) 1(弧度)≒57.3° 【例】$\sin\dfrac{\pi}{3}=\sin 60°=$

18. θ的同界角＝$\theta\pm 360°\,360°\cdot n$ ＝$\theta\pm 2\pi\cdot n$

【例】若950^0的最大負同界角為a及最小正同界角為b，求$(a,b)=(-130^0,230^0)$

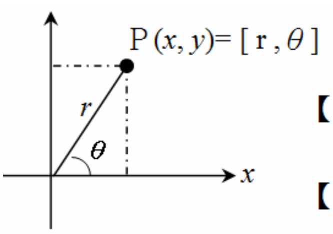
19. 平方關係： $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ $\Rightarrow(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm 2\sin\theta\cos\theta$

【例】若 $0°<\theta<90°$，$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，求 $\sin\theta\cos\theta=\underline{\dfrac{3}{8}}$

20. 直角坐標 P(x, y) ⇔ 極坐標 P[r, θ]

(1) $P(x,y)=[r,\theta]$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

(2) $P[r,\theta]=(x,y)$，其中 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$



【例】$(-1,\sqrt{3})=\underline{[2,120°]}$

【例】$[3,-90°]=\underline{(0,-3)}$

21. (1)正弦定理： $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

(2)餘弦定理： $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

(3)面積 $\Delta=\dfrac{1}{2}ah=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{abc}{4R}=rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

【例】ΔABC，三邊長為a,b,c，若 $a-2b+c=0$，且 $3a+b-2c=0$，則 $\sin A$：$\sin B$：$\sin C$＝ <u>3:5:7</u>

【例】ΔABC 三邊 $a=4$，$b=6$，$c=8$，求ΔABC的(1)面積 (2)高 h_c (3)cosA (4)內切圓半徑 r

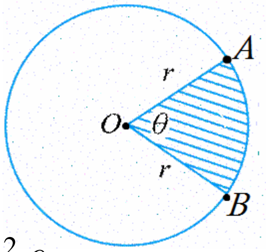
Ans:(1) $3\sqrt{15}$ (2) $\dfrac{3}{4}\sqrt{15}$ (3) $\dfrac{7}{8}$ (4) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

【第三冊】

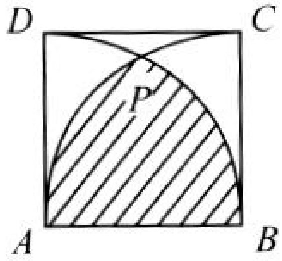
1.扇形：

(1) 弧長 $\overset{\frown}{AB}=r\theta$

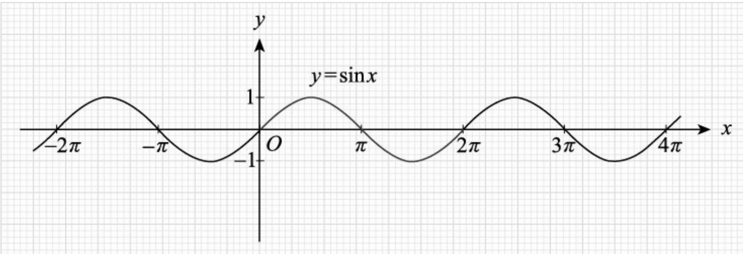
(2) 扇形 AOB 面積 $=\frac{1}{2}r^2\theta$



【例】邊長為 1 的正方形 $ABCD$，分別以 A,B 為圓心，半徑為 1 畫弧。則斜線面積＝$\underline{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}}$



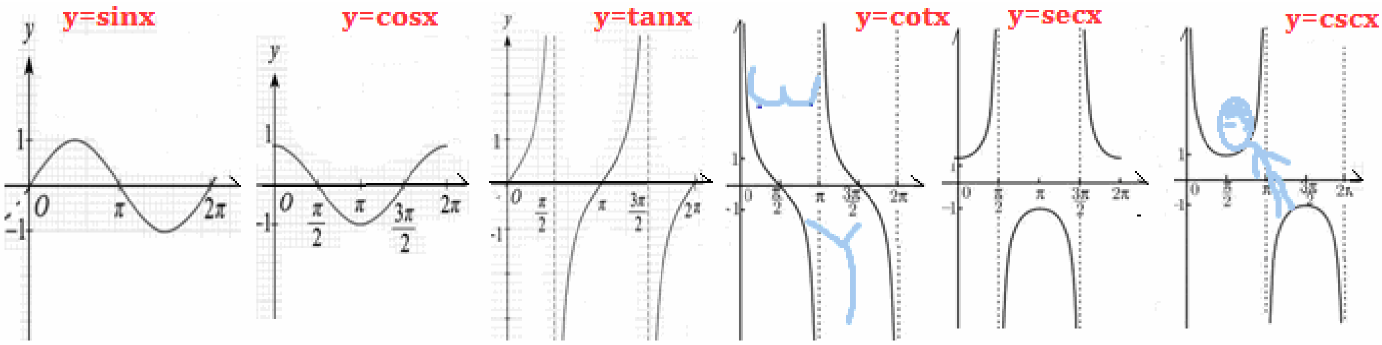
2. 正弦 sin 函數的圖形



※ $y=a\cdot\sin(k\cdot x+b)+C$

振幅　週期　左右移　上下移

※三角函數圖形：波浪經過狹谷變成河川，河川上有個女人，難過擺著哭臉，女生一哭二鬧三上吊



【例】方程式 $\sin x=\log x$ 有幾個相異實根？　*Ans*: 3 個

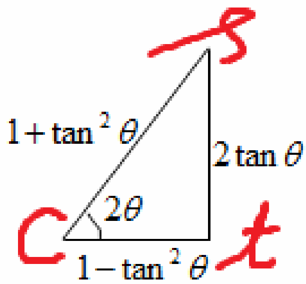
3. 和角公式：(1) $\cos(A\pm B)=\cos A\cdot\cos B\mp\sin A\cdot\sin B$　(同名異號)

(2) $\sin(A\pm B)=\sin A\cdot\cos B\pm\cos A\cdot\sin B$　(異名同號)

(3) $\tan(A\pm B)=\dfrac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\cdot\tan B}$

倍角： **(1)** $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

(2) $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\underline{2\cos^2\theta-1}=\underline{1-2\sin^2\theta}=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$



4. 正餘弦疊合： $-\sqrt{a^2+b^2}+c\ \le\ a\sin\theta+b\cos\theta+c\ \le\ \sqrt{a^2+b^2}+c$

【例】$f(\theta)=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta-7$ 的最小值＝$\underline{-9}$。

5. (1)負指數：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^{n}}$　　　　(2)分數指數：設 $a>0$，則 $a^{\frac{1}{n}}=\underline{\sqrt[n]{a}}$

【例】設 $a>0$，$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$，求 $a+a^{-1}=\underline{\ 6\ }$

【例】$0\le x\le 2$，求 $f(x)=-9^{x}+2\times 3^{x+1}+3$ 的最大值＝12，最小值＝$\underline{-24}$

6. 對數定義：$a^{x}=b \Leftrightarrow \ \boldsymbol{x=\log_a b}$　　　　PS：底數 $a>0$，$a\neq 1$；真數 $b>0$

EX：(1) $\log_2 8=3$　(2) $\log_3\dfrac{1}{9}=-2$　(3) $\log 100=2$　(4) $\log_1 2$ 無意義　(5) $\log_2(-4)$ 無意義

※對數公式：

(1) $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$

(2) $\log_a x-\log_a y=\log_a\dfrac{x}{y}$

(3) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$

(4) $\log_a b=\dfrac{\log_x b}{\log_x a}$

(5) $a^{\log_a x}=x$

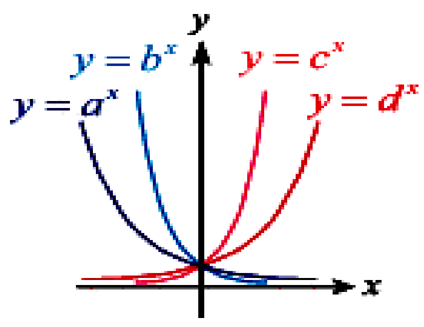
【例】求 $2\log\dfrac{5}{3}+2\log 3+\dfrac{1}{2}\log 49-\log\dfrac{7}{4}=\underline{\ 2\ }$

【例】$\log_2\sqrt{2}+\log_2 2\sqrt[3]{4}=\underline{\dfrac{13}{6}}$

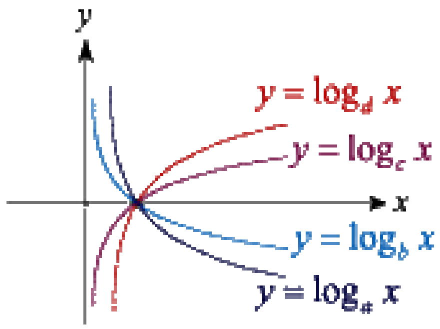
【例】解 $\log x-6\log_x 10=1$　Ans: $x=1000$ or $\dfrac{1}{100}$

【例】某甲向銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月還給銀行 1 萬元，依月利率 0.6%複利計算，則某甲需要__________年就可還清（$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}1.006=0.0026$）　答案：13

7.圖型：(1)指數 $f(x)=a^{x}$　　　　(2)對數 $\boldsymbol{f(x)=\log_a x}$



$c>d>1>a>b>0$



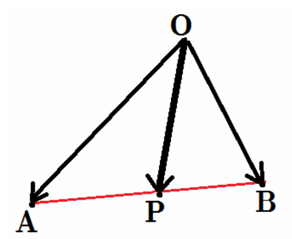
8.首數、尾數：$\log A=\log(a\times 10^{n})=n+\log a \Rightarrow$ 其首數=n，尾數=$\log a$

(1) A 為 n 位數 $\Rightarrow$ $\log A$ 首數＝$\underline{n-1}$　　(2) A 為小數點後第 n 位不為 0 $\Rightarrow$ $\log A$ 首數＝$\underline{-n}$

※ $\log A$ 與 $\log B$ 尾數相同 $\Leftrightarrow A=B\times 10^{n}$

【例】$1+2+2^{2}+\ldots\ldots+2^{99}$ 為 $\underline{\ 31\ }$ 位數

9. 向量加減法：(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (後－前)



10. 向量 $\overrightarrow{OP}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}$，若 P,A,B 共線 $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta=1$

※若 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{OB}$

【例】若 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=5:3$，則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{OB}$

11. 若 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$，則內積 $\boldsymbol{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$

※(1) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ (2) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

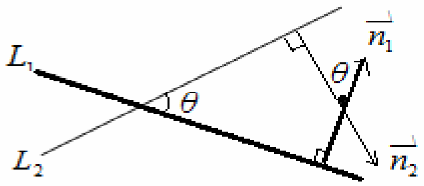
【例】設△ABC 的三頂點坐標分別為 A（1，1），B（8，2），C（4，5），求∠A＝<u>45°</u>

12. 柯西：$\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)\geq\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2$

【例】設 $2x+y=10$，求 x^2+y^2 的最小值, 及此時 (x,y) 之值。 Ans:20 ,(4,2)

13. 法向量 $\overrightarrow{n}$：直線 $3x+4y-7=0$ 之法向量 $\overrightarrow{n}=$ <u>(3,4)</u>

※直線 L_1 與 L_2 的夾角 $\theta=\overrightarrow{n_1}$ 與 $\overrightarrow{n_2}$ 的夾角 θ



【例】求 $L_1: x-2y+4=0$ 與 $L_2: x+3y+3=0$ 所夾之銳角 θ 為 <u>45</u> 度

14. 行列式: $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}=ay-bx$ 【例】若 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=6$，求(1) $\begin{vmatrix} 4a-3b & 6b \\ 4c-3d & 6d \end{vmatrix}=$<u>144</u> (2) $\begin{vmatrix} 7a & 3b \\ 14c & 6d \end{vmatrix}=$<u>252</u>

性質：(1) 行 ⇔ 列，值不變 (2) 行 ⇔ 行，值變號 ；列 ⇔ 列，值變號

(3) 可提公因數 (4)成比例，值=0

(5) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ x & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ x & y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ x & y \end{vmatrix}$

15.方程組的解與克拉瑪公式：

方程組：$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

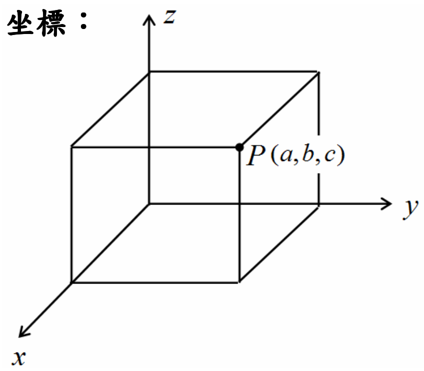
1、若 $\Delta\neq0$，則方程組恰有一組解，其解為 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

2、若 $\Delta=0$，但 Δ_x，Δ_y 至少有一個不為 0，則方程組無解

3、若 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ 時，方程組無限多組解

【第四冊】

1. 空間坐標：

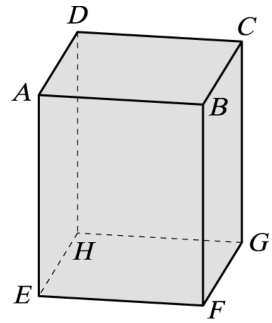


(1) $\overline{OP}$ 距離＝______________

(2) P 點對 y 軸の距離＝______________

(3) P 點對 xy 平面の距離＝______________

【例】長方體盒子 $ABCD-EFGH$，其中 $\overline{AE}=5$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=1$，試求：



(1) 一隻蜜蜂從 A 點飛到 G 點，其飛行所經最短距離＝$\underline{\sqrt{35}}$

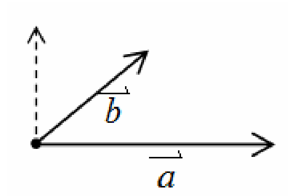
(2) 一隻螞蟻從 F 點爬到 D 點，其爬行所經最短距離＝$\underline{\sqrt{41}}$

2. 外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$： 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$

則 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)=\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$ …為一**向量**

性質：(**I**) 方向：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{a}$，且 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{b}$

(**II**) 大小：$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張▱面積



【例】空間中三點 $A(1,2,3)$, $B(5,6,5)$, $C(5,3,2)$，則△ABC 面積＝$\underline{\ 9\ }$

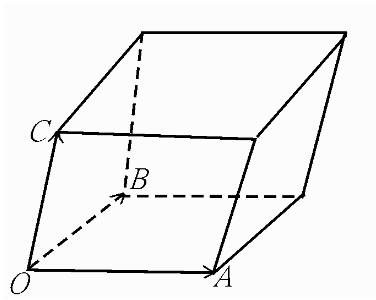
3. 三階行列式：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3c_2b_1)-(c_1b_2a_3+c_2b_3a_1+c_3a_2b_1)$

※運算化簡與二階相同

※降階：可依某一行（列）降成二階：　　PS：其＋－表：$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

EX：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$（例如依第二行展開）

4. 平行六面體：若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$，



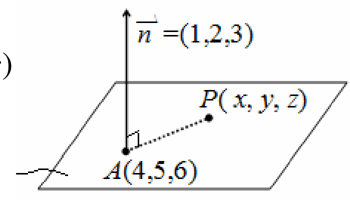
則(1) $V=|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}|$

(2) $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}V$　　　※O,A,B,C 共面 $\Leftrightarrow$ $V=0$

【例】空間中四點 $A(3,-1,1),\ B(0,1,-1),\ C(-1,0,1),\ D(1,-1,0)$，則四面體 $A\text{–}BCD$ 的體積＝$\underline{\dfrac{3}{2}}$

【例】已知 $a^2+b^2+c^2=6$，則 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的最大值＝$\underline{\ 24\ }$

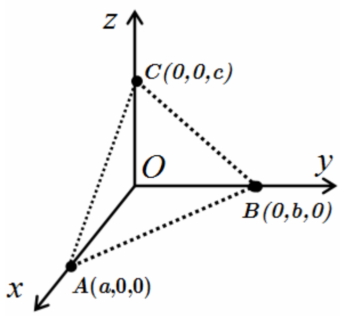
5.. 空間中：**平面** $E:ax+by+cz+d=0$ **的法向量** $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$



【例】平面 $E:1x+2y+3z-32=0$

6. 平面 E_{ABC} 的截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

※ 四面體體積 $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}|abc|$



【例】平面 E 在 x, y, z 軸之截距分別為 6,–3, 2，則平面 E 的方程式為 $\underline{\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{-3}+\dfrac{z}{2}=1}$

7. 距離公式：

※平面中：(1)點 $P(X_0,Y_0)$，直線 $L:ax+by+c=0$　$\Rightarrow$ **距離** $d(P,L)=\dfrac{|a\cdot X_0+b\cdot Y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

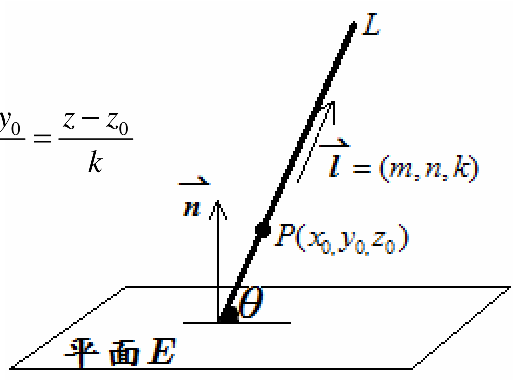
(2)兩平行線 $\begin{cases} L_1: ax+by+c_1=0 \\ L_2: ax+by+c_2=0 \end{cases}$　$\Rightarrow$ **距離** $d(L_1,L_2)=\dfrac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

※空間中：(1)點 $P(X_0,Y_0,Z_0)$，平面 E: $ax+by+cz+d=0\Rightarrow$ **距離** $d(P,E)=\dfrac{|a\cdot X_0+b\cdot Y_0+c\cdot Z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

(2)兩平行面 $\begin{cases} E_1: ax+by+cz+d_1=0 \\ E_2: ax+by+cz+d_2=0 \end{cases}$　$\Rightarrow$ **距離** $d(E_1,E_2)=\dfrac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

【例】點 A(3, 4, k)與平面 $E:2x-2y+z=-4$ 距離為 4 單位，則 k＝$\underline{10\text{或}-14}$

8. 空間中的直線：找(1)點 $P(x_0,y_0,z_0)$ **(2)方向向量** $\overrightarrow{l}=(m,n,k)$



⇒直線 L **參數式**: $\begin{cases} x = x_0 + m\cdot t \\ y = y_0 + n\cdot t \\ z = z_0 + k\cdot t \end{cases}$ 　或 L **比例式**: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{k}$

※直線 L 與平面 E 夾角 $\theta=$ **90°－(** $\overrightarrow{l}$ 與 $\overrightarrow{n}$ 夾角 **)**

【例】若直線 $L:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ 落在平面 $ax+by+3z=4$ 上，則數對 $(a,b)=$ $\underline{(-\frac{1}{3},1)}$

9. 矩陣(直行，橫列)：

例如：$A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ 的階數為 2 列 3 行

例如：零矩陣：每個元皆為 0，例：$\underline{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

例如：二階**單位方陣** $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

10.增廣矩陣： 聯立方程式 　　增廣矩陣

$$\begin{cases} x+3y-6z=23 \\ 2x+4y+z=5 \\ 3x+y-2z=13 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 13 \end{array}\right]$$

【例】下列哪些增廣矩陣所表示的一次方程組恰有一組解？ 　Ans：(A)(B)(D)

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. 矩陣乘法：$A=[a_{ij}]_{m\times}$ ，$B=[b_{ij}]_{\times p}$ ，AB 才有意義。

說明：$AB=C=[c_{ij}]$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

【例】設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$，求(1)$AB=\underline{\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}}$ 　(2)$BA=\underline{\begin{bmatrix} 1 & -10 & 10 \\ 4 & 8 & -2 \\ 6 & 20 & -10 \end{bmatrix}}$

【例】$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{bmatrix}$，求 $AB=\underline{0}$

【例】$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$，求 (1) AB　(2) AC　　Ans:(1)$\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

12. 矩陣性質：

(1) $AB=0$，則 $\underline{A=0}$ or $\underline{B=0}$ 不一定成立

(2) $AB=AC$，則 $B=C$ 不一定成立

(3) 因為 $AB\neq BA$，所以 [I] $(A-B)(A+B)\neq A^2-B^2$

[II] $(A\pm B)^2\neq A^2\pm 2AB+B^2$

[III] $(A+B)^n\neq C_0^nA^n+C_1^nA^{n-1}B+C_2^nA^{n-2}B^2+\cdots+C_n^nB^n$

13. **二階反矩陣**：若方陣 A 的 $\det(A)\neq 0$，則存在唯一**乘法反矩陣** A^{-1}，使得 $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$。

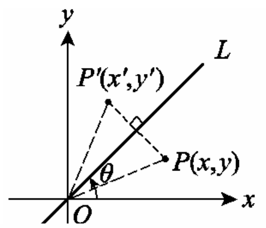
※反矩陣公式：$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，$\det(A)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ $\Rightarrow$ $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

【例】求 $A=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ 的反矩陣 $A^{-1}=\underline{\begin{bmatrix}-3 & 7\\ 1 & -2\end{bmatrix}}$

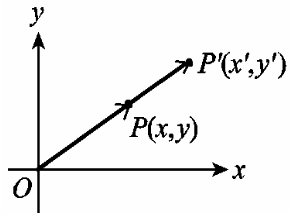
14.線性變換：點 $P(x,y)$，經 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 線性變換後得 $P'(x',y')$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ $\Rightarrow\begin{cases}x'=ax+by\\ y'=cx+dy\end{cases}$

(1)旋轉：$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 以原點為中心，**逆時針**旋轉 θ

(2)鏡射：$\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$ 對與 x 軸夾 θ 的直線 L 鏡射



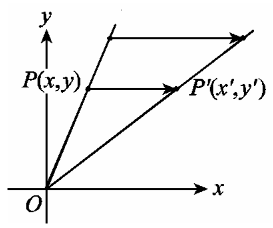
(3)伸縮：若 $\overline{OP'}=\boldsymbol{k}\cdot\overline{OP}$，則 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$



(4)推移：

(1) $P(x,y)\xrightarrow{\text{沿 } x \text{ 軸，作 } ky \text{ 倍的推移}}P(x',y')=(x+ky\ ,\ y)$

則 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+ky\\ y\end{bmatrix}$



(2) $P(x,y)\xrightarrow{\text{沿 } y \text{ 軸，作 } kx \text{ 倍的推移}}P(x',y')=(x\ ,\ y+kx)$

則 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ kx+y\end{bmatrix}$

【例】已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$，求 $A^6=\underline{\begin{bmatrix}64 & 0\\ 0 & 64\end{bmatrix}}$

15. 若 $M=\begin{bmatrix}A & X\\ B & Y\end{bmatrix}$ 為**轉移矩陣**，則(1) $0\le A,B,X,Y\le 1$ (2) $\underline{A+B=1}$ 且 $\underline{X+Y=1}$

※馬可夫－轉移矩陣：用來計算重複試驗的**機率**，是否最終呈穩定狀態。

【例】若甲生今天**有算**數學，則明天有 40% 會算數學；
若甲生今天**沒算**數學，則明天有 70% 會算數學。

其**轉移矩陣** $M=\begin{bmatrix}\frac{4}{10} & \frac{7}{10}\\ \frac{6}{10} & \frac{3}{10}\end{bmatrix}$ ；**長期而言**，甲生當天算數學的機率為 $\underline{\frac{7}{13}}$