Отчёт по лабораторной работе №8

Дисциплина: Математическое моделирование

Ганина Таисия Сергеевна, НФИбд-01-22

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Исследовать математическую модель конкуренции двух фирм.

2 Задание

2.1 Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_1}{c_1}M_1^2, \\ \\ \dfrac{dM_2}{d\theta} = \dfrac{c_2}{c_1}M2 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_1}{c_1}M_2^2, \end{cases}$$

где $a_1 = \dfrac{p_{cr}}{\tau_1^2\tilde{p}_1^2Nq}$, $a_2 = \dfrac{p_{cr}}{\tau_2^2\tilde{p}_2^2Nq}$, $b = \dfrac{p_{cr}}{\tau_1^2\tilde{p}_1^2\tau_2^2\tilde{p}_2^2Nq}$, $c_1 = \dfrac{p_{cr} - \tilde{p_1}}{\tau_1\tilde{p}_1}$, $c_2 = \dfrac{p_{cr} - \tilde{p_1}}{\tau_2\tilde{p}_2}$

Также введена нормировка $t = c_1\theta$.

2.2 Случай 2.

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{d\theta} = M_1 - (\dfrac{b}{c_1} + 0.0012) M_1 M_2 - \dfrac{a_1}{c_1} M_1^2, \\ \\ \dfrac{dM_2}{d\theta} = \dfrac{c_2}{c_1} M2 - \dfrac{b}{c_1} M_1 M_2 - \dfrac{a_1}{c_1} M_2^2, \end{cases}$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M_0^1 = 3.9,\ M_0^2 = 3, p_{cr} = 9.9,\ N = 24, q = 1, \tau_1 = 12,\ \tau_2 = 18, \tilde{p_1} = 6,\ \tilde{p_2} = 4$$

2.3 Обозначения:

- N – число потребителей производимого продукта.
- τ – длительность производственного цикла
- p – рыночная цена товара
- $\tilde{p}$– себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
- q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

- $\theta = \dfrac{t}{c_1}$ - безразмерное время

1. Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.
2. Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.

3 Теоретическое введение

Математическому моделированию процессов конкуренции и сотрудничества двух фирм на различных рынках посвящено довольно много научных работ, в основном использующих аппарат теории игр и статистических решений. В качестве примера можно привести работы таких исследователей, как Курно, Стакельберг, Бертран, Нэш, Парето [1].

Следует отметить, что динамические дифференциальные модели уже давно и успешно используются для математического моделирования самых разнообразных по своей природе процессов. Достаточно упомянуть широко использующуюся в экологии модель «хищник-жертва» Вольтерра, математическую теорию развития эпидемий, модели боевых действий

Задача решалась в следующей постановке.

На рынке однородного товара присутствуют две основные фирмы, разделяющие его между собой, т.е. имеет место классическая дуополия.

Безусловно, это является весьма сильным предположением, однако оно вполне оправдано в тех случаях, когда доля продаж остальных конкурентов на рассматриваемом сегменте рынке пренебрежимо мала. Хорошим примером может служить отечественный рынок микропроцессоров, который по существу разделили между собой две фирмы: Intel и AMD.

Изменение объемов продаж конкурирующих фирм с течением времени описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_1}{c_1}M_1^2, \\ \frac{dM_2}{d\theta} = \dfrac{c_2}{c_1}M_1 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_2}{c_1}M_2^2, \end{cases}$$

где $a_1 = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_1^2 \tilde{p_1} Nq)}$, $a_2 = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_2^2 * \tilde{p_2} Nq)}$, $b = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_1^2 \tau_2^2 \tilde{p_1}^2 \tilde{p_2}^2 Nq)}$, $c_1 = \dfrac{(p_{cr} - p_1)}{(\tau_1 \tilde{p_1})}$, $c_2 = \dfrac{(p_{cr} - p_2)}{(\tau_2 \tilde{p_2})}$.

- N – число потребителей производимого продукта.
- τ – длительность производственного цикла
- p – рыночная цена товара
- $\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
- q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
- $\theta = \dfrac{t}{c_1}$ – безразмерное время

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Реализация на Julia

Для реализации на языке программирования Julia будем использовать библиотеки `DifferentialEquations.jl` для решения дифференциальных уравнений и `Plots.jl` для отрисовки графиков.

Параметры и начальные условия для обоих случаев нашей задачи одинаковы, так что зададим их:

```
using DifferentialEquations, Plots;

# задаем параметры модели согласно условию задачи
p_cr = 9.9          # критическая стоимость продукта
tau1 = 12           # длительность производственного цикла фирмы 1
p1 = 6              # себестоимость продукта у фирмы 1
tau2 = 18           # длительность производственного цикла фирмы 2
p2 = 4              # себестоимость продукта у фирмы 2
N = 24              # число потребителей
q = 1;              # максимальная потребность одного человека

# вычисляем коэффициенты системы уравнений для случая 1
a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q)     # коэффициент a₁ по формуле из условия
a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q)     # коэффициент a₂
# Характеризуют влияние внутренних факторов фирм на объём продаж
```

```
b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q)  # коэффициент b,
# Отражает внешнее конкурентное взаимодействие между фирмами

c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1)        # коэффициент c₁
c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);       # коэффициент c₂
# Характеризуют эффективность использования ресурсов

# начальные условия: M₁(0) = 3.9, M₂(0) = 3
u0 = [3.9, 3]
# вектор параметров для передачи в функцию
p = [a1, a2, b, c1, c2]
# временной интервал (нормированное время)
tspan = (0.0, 30.0);
```

4.1.1 Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы. В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Зададим функцию, описывающую систему уравнений для этого случая.

Далее решаем систему ДУ, сначала определив проблему с помощью метода `ODEProblem()`, а затем решим с помощью `solve()` солвером `Tsit5()` с шагом 0.01.

Нарисуем график с помощью `plot()`.

```
# функция, описывающая систему уравнений для случая 1
function f(u, p, t)
    M1, M2 = u
    a1, a2, b, c1, c2 = p
    # первое уравнение системы: dM₁/dtheta
    dM1 = M1 - (a1/c1)*M1^2 - (b/c1)*M1*M2
    # второе уравнение системы: dM₂/dtheta
    dM2 = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2^2 - (b/c1)*M1*M2
    return [dM1, dM2]
end

# создаем и решаем задачу Коши для случая 1
prob = ODEProblem(f, u0, tspan, p)
# используем алгоритм Tsit5 с сохранением решения каждые 0.01 единицы времени
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat = 0.01)

# строим график для случая 1
plot(sol,
    yaxis = "Оборотные средства предприятия",
    label = ["M1" "M2"],
    c = ["red" "blue"],
    title = "Случай 1: только экономические факторы")
```

В результате получаем следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. 4.1). По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. В математической модели этот факт отражается в коэффициенте, стоящим перед членом $M_1 M_2$: в рассматриваемой задаче он одинаковый в обоих уравнениях ($\frac{b}{c_1}$). Это было обозначено в условиях задачи. Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

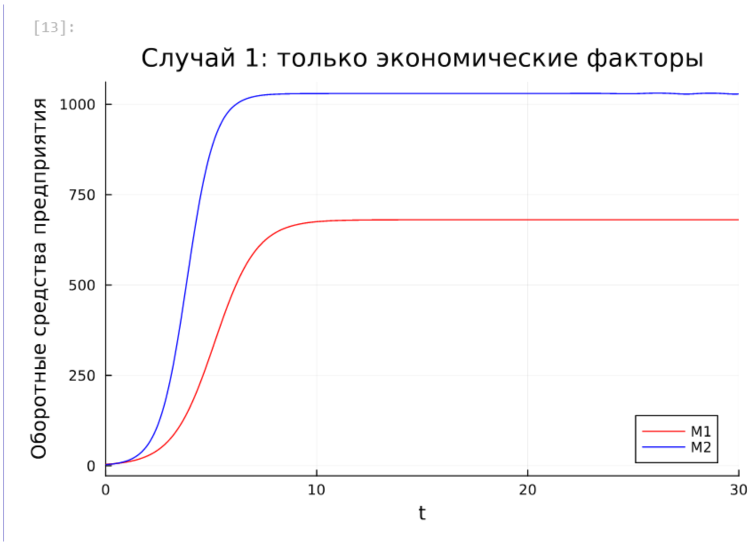

Рис. 4.1: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

4.1.2 Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Зададим функцию, описывающую систему уравнений для этого случая.

Далее решаем систему ДУ, сначала определив проблему с помощью метода `ODEProblem()`, а затем решим с помощью `solve()` солвером `Tsit5()` с шагом 0.01. Нарисуем график с помощью `plot()`.

```
# функция для случая 2 с учетом социально-психологических факторов
function f2(u, p, t)
    M1, M2 = u
    a1, a2, b, c1, c2 = p
    # измененное первое уравнение с дополнительным коэффициентом 0.00015
    dM1 = M1 - (a1/c1)*M1^2 - (b/c1 + 0.0012)*M1*M2
    # второе уравнение остается без изменений
    dM2 = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2^2 - (b/c1)*M1*M2
    return [dM1, dM2]
end

# решаем задачу для случая 2
prob2 = ODEProblem(f2, u0, tspan, p)
sol2 = solve(prob2, Tsit5(), saveat = 0.01)

# строим график для случая 2
plot(sol2,
    yaxis = "Оборотные средства предприятия",
    label = ["M1" "M2"],
    c = ["red" "blue"],
    title = "Случай 2: с социально-психологическими факторами")
```

В результате получаем следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. 4.2). По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начитает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

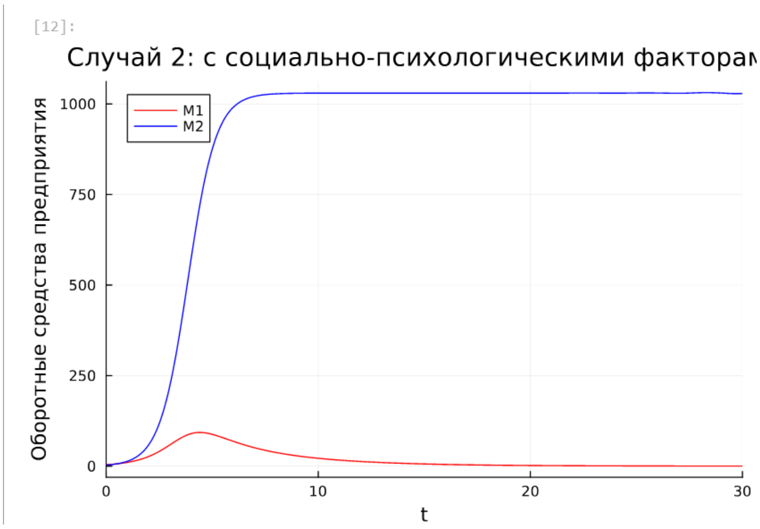

Рис. 4.2: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

4.2 Реализация на OpenModelica

4.2.1 Случай 1

Зададим параметры, начальные условия и систему уравнений. Далее выполним симуляцию на временном интервале и с шагом дифференцирования, как при реализации на Julia.

```
model lab8_mathmod_1
  parameter Real p_cr = 9.9;
  parameter Real tau1 = 12;
  parameter Real p1 = 6;
  parameter Real tau2 = 18;
  parameter Real p2 = 4;
  parameter Real N = 24;
  parameter Real q = 1;
  parameter Real a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q);
  parameter Real a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q);
```

```
  parameter Real b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q);
  parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
  parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

  Real M1(start=3.9);
  Real M2(start=3);

equation
  der(M1) = M1 - (a1/c1)*M1^2 - (b/c1)*M1*M2;
  der(M2) = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2^2 - (b/c1)*M1*M2;
end lab8_mathmod_1;
```

Получим следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. 4.3). По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

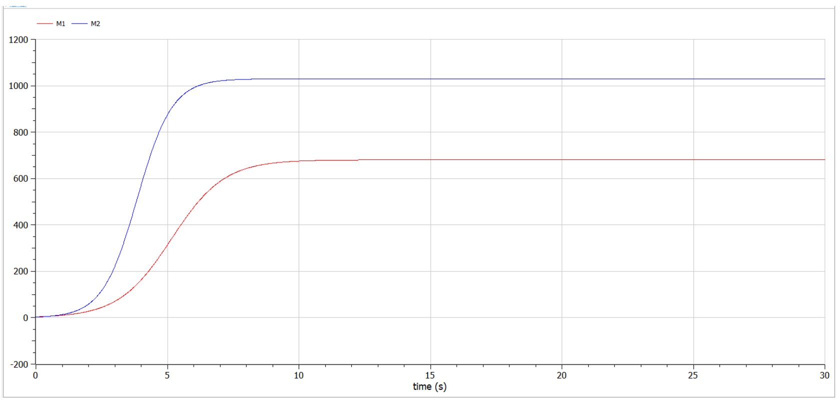

Рис. 4.3: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

4.2.2 Случай 2

Зададим параметры, начальные условия и систему уравнений. Далее выполним симуляцию на временном интервале и с шагом дифференцирования, как при реализации на Julia.

```
model lab8_mathmod_2
  parameter Real p_cr = 9.9;
  parameter Real tau1 = 12;
  parameter Real p1 = 6;
  parameter Real tau2 = 18;
  parameter Real p2 = 4;
  parameter Real N = 24;
  parameter Real q = 1;
  parameter Real a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q);
  parameter Real a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q);
  parameter Real b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q);
  parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
  parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

  Real M1(start=3.9);
  Real M2(start=3);

equation
  der(M1) = M1 - (a1/c1)*M1^2 - (b/c1+0.0012)*M1*M2;
  der(M2) = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2^2 - (b/c1)*M1*M2;
end lab8_mathmod_2;
```

Получим следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. 4.4). По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начитает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

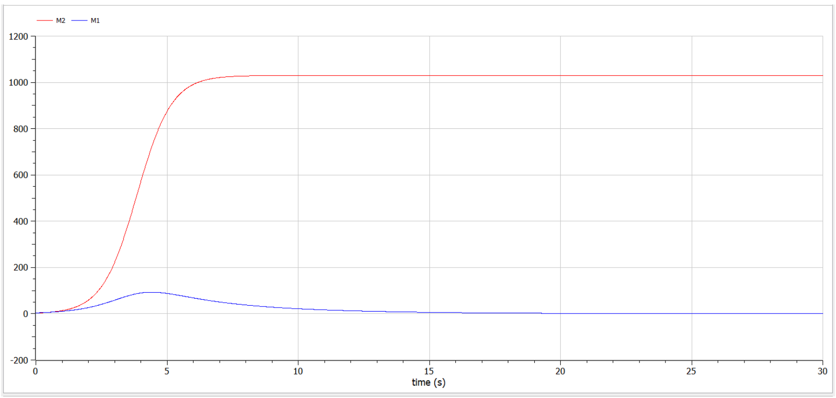

Рис. 4.4: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

5 Выводы

В результате выполнения лабораторной работы была исследована модель конкуренции двух фирм.

Список литературы

1. Бакалаврская работа, математическое моделирование конкуренции, Аноп-кина И. В. [Электронный ресурс]. URL: https://dspace.tltsu.ru/bitstream/123456789/1035/1/%D0%90%D0%BD%D0%BE%D0%BF%D0%BA%D0%B8%D0%BD%D0%B0%20%D0%98.%D0%92._%D0%9F%D0%9C%D0%98%D0%B1_1201.pdf.