

# **Отчёт по лабораторной работе №5**

**Дисциплина: Математическое моделирование**

Ганина Таисия Сергеевна, НФИбд-01-22

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Задание</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Теоретическое введение</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>8</b>
4.1	Выполнение лабораторной работы. Julia . . . . .	8
4.2	Выполнение лабораторной работы. OpenModelica . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>15</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>16</b>

## Список иллюстраций

4.1	Графики изменения численности хищников и численности жертв	9
4.2	График зависимости численности хищников от численности жертв (фазовый портрет) . . . . .	10
4.3	График стационарного состояния . . . . .	11
4.4	График стационарного состояния (фазовый портрет) . . . . .	12
4.5	Код . . . . .	12
4.6	Графики изменения численности хищников и численности жертв. OpenModelica . . . . .	13
4.7	График зависимости численности хищников от численности жертв (фазовый портрет). OpenModelica . . . . .	13
4.8	Код (стационарное состояние) . . . . .	14
4.9	График стационарного состояния. OpenModelica . . . . .	14
4.10	График стационарного состояния (фазовый портрет). OpenModelica	14

## **Список таблиц**

# 1 Цель работы

Исследовать математическую модель Лотки-Вольтерры.

## 2 Задание

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.61x(t) + 0.051x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.41y(t) - 0.031x(t)y(t) \end{cases}$$

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:  $x_0 = 6$ ,  $y_0 = 14$ . Найти стационарное состояние системы.

### 3 Теоретическое введение

Модель Лотки — Вольтерры (модель Лотки — Вольтерра) — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь своих авторов (Лотка, 1925; Вольтерра 1926), которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга.

Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами.

В математической форме предложенная система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{cases}$$

где  $x$  — количество жертв,

$y$  — количество хищников,

$t$  — время,

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами [1].

## 4 Выполнение лабораторной работы

### 4.1 Выполнение лабораторной работы. Julia

В начале напишем код на Julia, а после продемонстрируем полученный график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв(рис. 4.1, 4.2).

```
# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# задания системы ДУ, описывающей модель Лотки-Вольтерры
function Lotki_Volterra(u, p, t)
    x, y = u
    a, b, c, d = p
    dx = -a*x + b*x*y
    dy = c*y - d*x*y
    return [dx, dy]
end

# Начальные условия
u0 = [6,14]
p = [0.61, 0.051, 0.41, 0.031]
tspan = (0.0, 50.0)
prob = ODEProblem(Lotki_Volterra, u0, tspan, p)
```



```
sol = solve(prob, Tsit5())
```

```
# Постановка проблемы и ее решение
```

```
plot(sol, title = "Модель Лотки-Вольтерры", xaxis = "Время",  
      yaxis = "Численность популяции",  
      label = ["жертвы" "хищники"],  
      c = ["red" "blue"], box =:on)  
plot(sol, idxs = (1,2),  
      title = "Фазовый портрет",  
      xaxis = "x",  
      yaxis = "y",  
      label = "зависимость x от y")
```

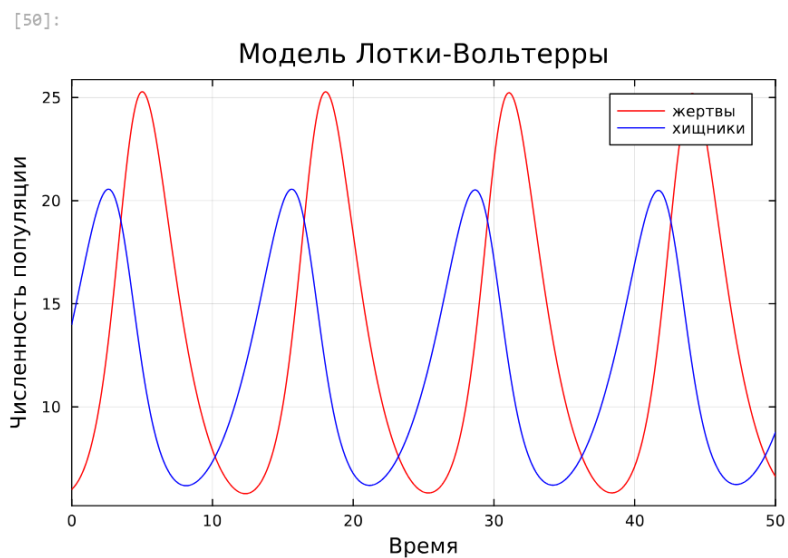


Рис. 4.1: Графики изменения численности хищников и численности жертв

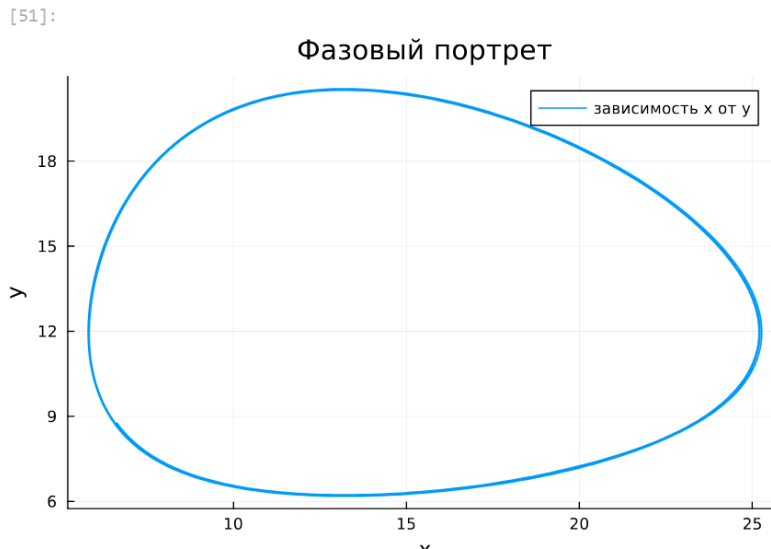


Рис. 4.2: График зависимости численности хищников от численности жертв (фазовый портрет)

Далее найдём стационарное состояние системы по формулам:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{c}{d} \\ y_0 = \frac{a}{b} \end{cases}$$

Ответ:  $x_0 = 13.225806451612902$ ,  $y_0 = 11.96078431372549$

Код на Julia и графики (рис. 4.3, 4.4):

```
function find_stat(p)
```

```
    a,b,c,d = p
```

```
    x0 = c/d
```

```
    y0 = a/b
```

```
    return x0,y0
```

```
end
```

```
x0, y0 = find_stat(p)
```

```

u2 = [x0, y0]
print("x0 = ", x0, "y0 = ", y0)
prob2 = ODEProblem(Lotka_Volterra, u2, tspan, p)
sol2 = solve(prob2, Tsit5())

plot(sol2, xaxis = "Жертвы", yaxis = "Хищники",
      label = ["Жертвы" "Хищники"],
      c = ["red" "blue"], box =:on,
      legend = :right)

scatter(sol2, idxs = (1,2),
        title = "Фазовый портрет",
        xaxis = "x",
        yaxis = "y",
        color = "red", markersize = 5, box=:on)

```

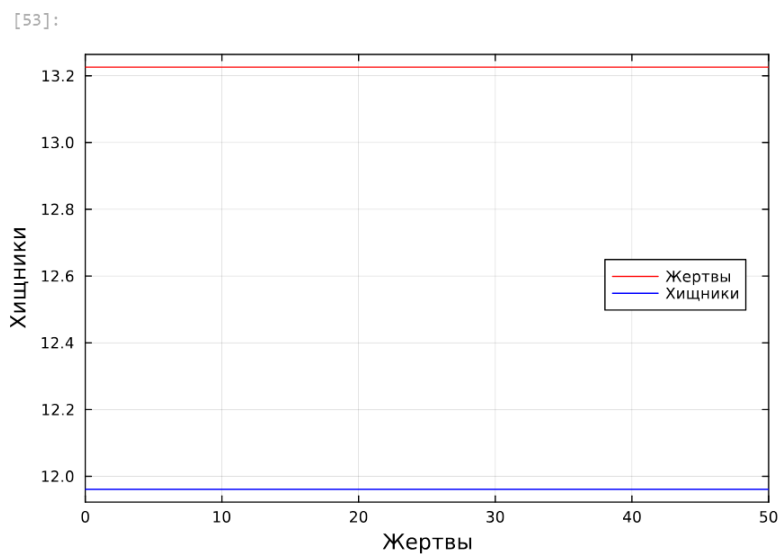


Рис. 4.3: График стационарного состояния

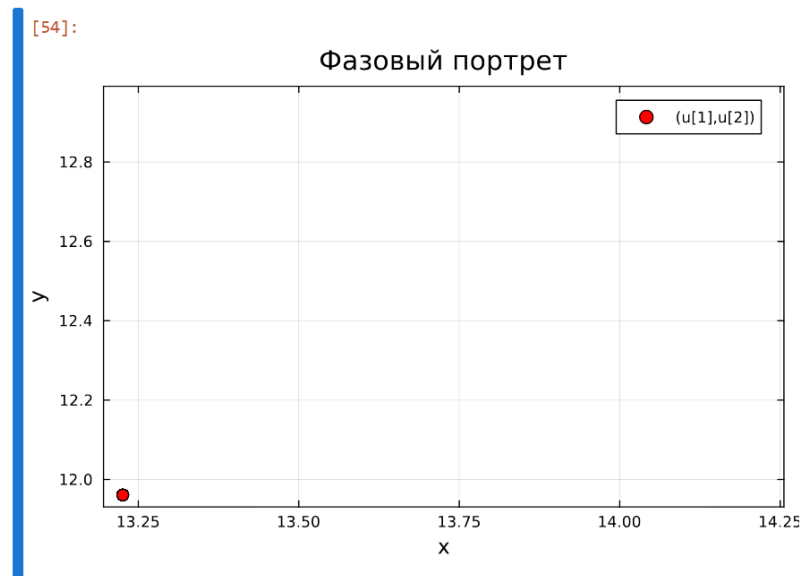


Рис. 4.4: График стационарного состояния (фазовый портрет)

## 4.2 Выполнение лабораторной работы. OpenModelica

А теперь выполним построение графиков при помощи OpenModelica (рис. 4.5, 4.6, 4.7):

```

1  model lab5_mathmod
2      parameter Real a = 0.61;
3      parameter Real b = 0.051;
4      parameter Real c = 0.41;
5      parameter Real d = 0.031;
6      parameter Real x0 = 6;
7      parameter Real y0 = 14;
8      Real x(start=x0);
9      Real y(start=y0);
10
11  equation
12      der(x) = -a*x + b*x*y;
13      der(y) = c*y - d*x*y;
14  end lab5_mathmod;

```

Рис. 4.5: Код

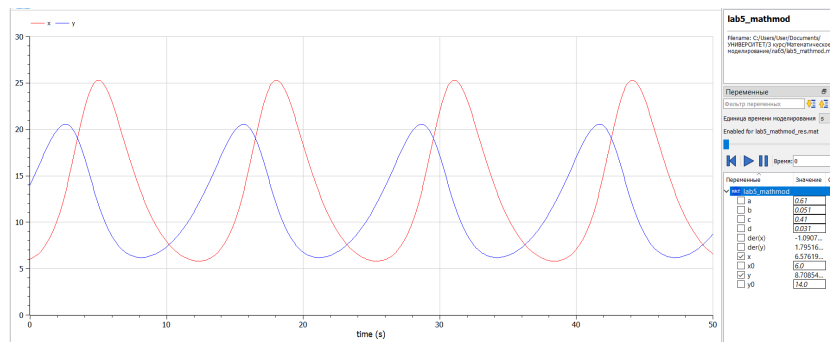


Рис. 4.6: Графики изменения численности хищников и численности жертв.  
OpenModelica

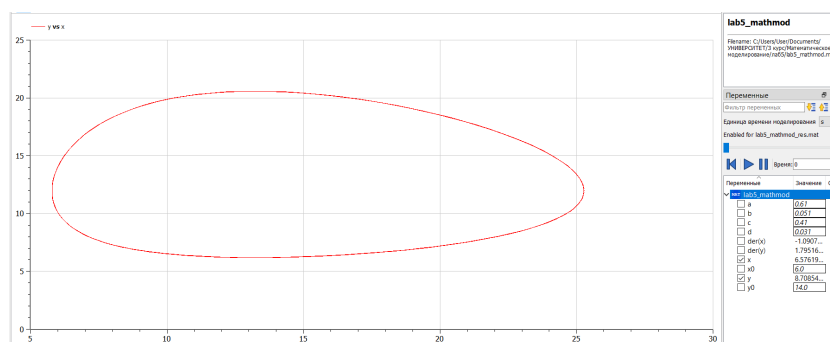


Рис. 4.7: График зависимости численности хищников от численности жертв (фазовый портрет). OpenModelica

Далее найдём стационарное состояние системы (рис. 4.8, 4.9, 4.10)

```

1  model lab5_2_mathmod
2    parameter Real a = 0.61;
3    parameter Real b = 0.051;
4    parameter Real c = 0.41;
5    parameter Real d = 0.031;
6    parameter Real x0 = 0.41/0.031;
7    parameter Real y0 = 0.61/0.051;
8    Real x(start=x0);
9    Real y(start=y0);
10
11  equation
12    der(x) = -a*x + b*x*y;
13    der(y) = c*y - d*x*y;
14  end lab5_2_mathmod;

```

Рис. 4.8: Код (стационарное состояние)

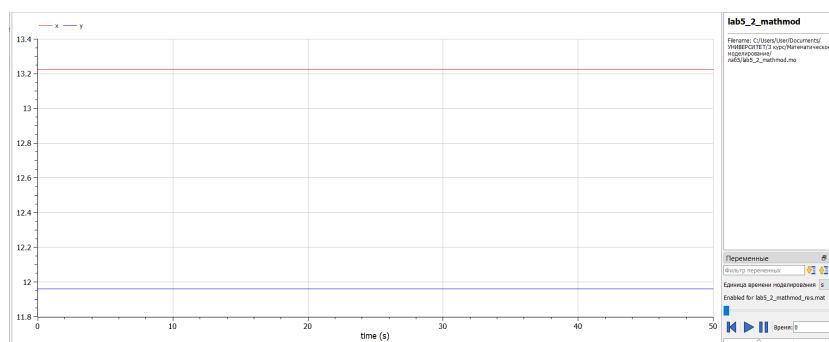


Рис. 4.9: График стационарного состояния. OpenModelica

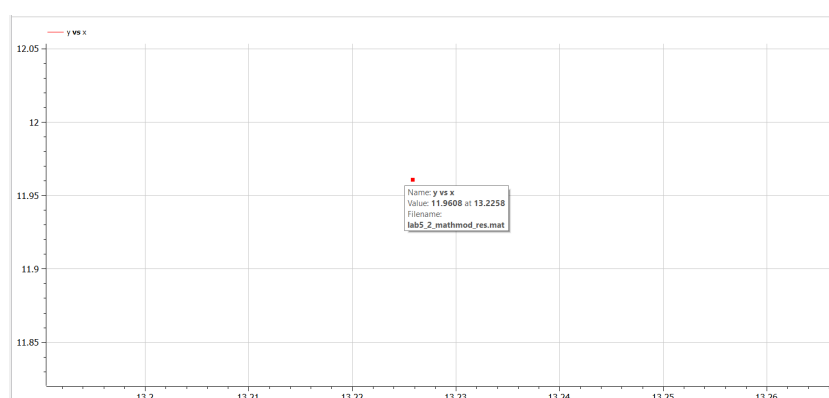


Рис. 4.10: График стационарного состояния (фазовый портрет). OpenModelica

## 5 Выводы

В результате выполнения лабораторной работы я построила математическую модель Лотки-Вольтерры на Julia и в OpenModelica.

## Список литературы

1. Модель Лотки — Вольтерры [Электронный ресурс]. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C\\_%D0%9B%D0%BE%D1%82%D0%BA%D0%B8\\_%E2%80%94%D0%92%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B5%D1%80%D1%80%D1%8B](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C_%D0%9B%D0%BE%D1%82%D0%BA%D0%B8_%E2%80%94%D0%92%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B5%D1%80%D1%80%D1%8B).