Модели с урнами

Дисциплина: Математическое моделирование

Ганина Т. С.

13 апреля 2025

Группа НФИбд-01-22

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Информация

Докладчик

- Ганина Таисия Сергеевна
- Студентка 3го курса, группа НФИбд-01-22
- Фундаментальная информатика и информационные технологии
- Российский университет дружбы народов
- Ссылка на репозиторий гитхаба tsganina

Вводная часть

Актуальность

Актуальность темы обусловлена универсальностью урновых подходов. Во-первых, они служат мостиком между детерминированными и стохастическими системами.

Во вторых, эти модели помогают изучать динамику с памятью — явления, где текущее состояние системы зависит от её истории.

Объект исследования

Объектом исследования выступают урновые модели как класс вероятностных систем.

1. **Модель Бернулли** — базовый случай с независимыми испытаниями.
2. **Модель Поля** — система с самоусиливающейся вероятностью.
3. **Модель баланса** — механизм достижения равновесия через компенсацию.

Научная новизна

Научная новизна работы заключается в комплексном подходе к изучению урновых моделей. Проведён сравнительный анализ систем с зависимыми и независимыми испытаниями, выявляющий роль начальных условий.

Практическая значимость

Практическая значимость работы проявляется в следующих направлениях:

1. Прогнозирование в условиях неопределённости
2. Биостатистика и экология
3. Социальные науки

Урновая модель в теории вероятностей и статистике — идеализированный мысленный эксперимент, в котором некоторые объекты реального интереса (атомы, люди, автомобили и т.п.) представлены как окрашенные шары в урне или другом контейнере. Урновые модели представляют собой абстрактные вероятностные системы, которые включают в себя несколько ключевых элементов: урну, шары и правила манипуляции.

Общее описание моделей с урнами

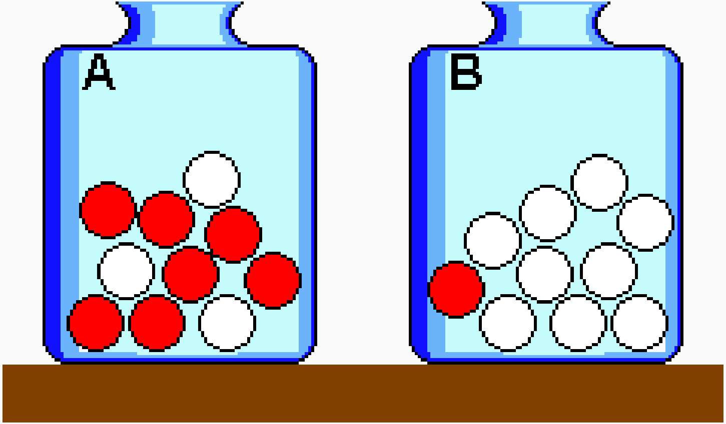

Рис. 1: Изображение модели с урнами

Классификация моделей

Урновые модели можно разделить на три типа:

1. Модели с возвращением
2. Модели без возвращения
3. Модели с динамическим изменением состава

Модель Бернулли

Принцип: независимые испытания с постоянной вероятностью

Модель Бернулли — это простая и широко используемая урновая модель, основанная на принципе **независимых испытаний** с **постоянной вероятностью**. Это означает, что каждый раз, когда мы извлекаем шар из урны, вероятность его цвета не зависит от предыдущих извлечений.

Формула

Если мы говорим о повторных испытаниях, таких как подбрасывание монеты, формула Бернулли для n испытаний имеет вид:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

где:

- n — количество испытаний,
- k — количество успехов (например, выпадения орла),
- p — вероятность успеха в одном испытании,
- $\binom{n}{k}$ — число сочетаний из n по k.

Свойства

Модель Бернулли обладает двумя ключевыми свойствами:

1. Отсутствие памяти (независимость испытаний)
2. Биномиальное распределение результатов

Пример: подбрасывание монеты с заданной вероятностью

Модель Бернулли часто используется для описания подбрасывания монеты. Предположим, у нас есть монета, которая падает орлом с вероятностью $p = 0.5$ и решкой с вероятностью $q = 0.5$. Если мы подбрасываем эту монету $n = 10$ раз, мы можем использовать формулу Бернулли, чтобы вычислить вероятность получить, например, 7 орлов:
$P(X = 7) = \binom{10}{7}(0.5)^7(0.5)^3 = \binom{10}{7}(0.5)^{10}$

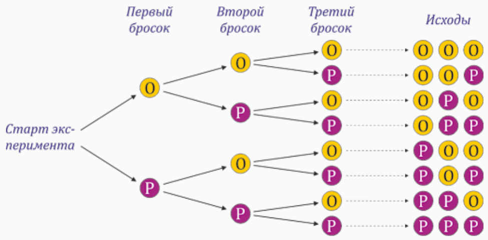

Рис. 2: Подбрасывание монеты

Модель Поля (Pólya Urn)

Принцип работы

Модель Поля описывает стохастический процесс с *самоусилением*. Изначально урна содержит N_0 шаров двух цветов (например, a красных и b синих).

На каждом шаге:

1. Случайно извлекается шар.
2. Он возвращается в урну *вместе с $c > 0$ шарами того же цвета*.

Вероятность выбора цвета на шаге n зависит от текущего состава урны:

$P(\text{красный}) = \frac{a+c\cdot k_n}{a+b+c\cdot n}$, где k_n — число извлечённых красных шаров к шагу n.

Свойства модели

- Зависимость от истории
- Сходимость к распределению

Пример применения

Модель иллюстрирует процессы с **кумулятивным преимуществом** (постепенно накапливаемый или накапливающийся, суммирующийся со временем):

- В эпидемиологии — распространение инфекции
- В социальных сетях — виральность контента

Модель баланса

Принцип

Модель баланса представляет собой стохастический процесс, который описывает динамику системы, стремящейся к равновесию. В рамках этой модели урна изначально содержит a шаров одного цвета (например, красных) и b шаров другого цвета (например, синих). На каждом шаге происходит следующее:

1. Из урны случайным образом извлекается один шар.
2. Вместо возвращения шара того же цвета в урну добавляется шар **противоположного цвета**.

Формула

Вероятность выбора шара определенного цвета на шаге n задается формулой:
$P(\text{красный}) = \frac{R_n}{R_n+B_n}, \quad P(\text{синий}) = \frac{B_n}{R_n+B_n}$, где R_n и B_n – текущие количества красных и синих шаров соответственно.

После каждого шага количество шаров обновляется согласно правилу:
$R_{n+1} = R_n - 1 + \delta_B, \quad B_{n+1} = B_n - 1 + \delta_R,$

где $\delta_B = 1$, если был выбран красный шар, и $\delta_R = 1$, если был выбран синий шар.

Свойства

1. Сходимость к равновесию
2. Устойчивость
3. Детерминированность в долгосрочной перспективе
4. Независимость от начальных условий

Применение модели

Модель баланса может быть использована для описания различных явлений, где наблюдается стремление системы к равновесию:

- Экологические системы
- Химические реакции
- Социальные процессы
- Финансовые рынки

Области применения урновых моделей

Урновые модели используются, когда нужно сделать выводы о целом на основе частичных данных.

- **Оценка доли дефектов в партии товара**
  - Допустим, в партии из 1000 товаров 50 бракованных (это неизвестно). Вы проверяете 100 товаров **без возвращения** (гипергеометрическая модель). Если среди них 5 бракованных, можно оценить общее число дефектов в партии.
- **Формула для расчёта вероятности**:

$$P(\text{брак}) = \frac{\text{число бракованных в выборке}}{\text{размер выборки}}$$

Практические задачи: от IT до экономики

Представьте, что вы запускаете новую кнопку на сайте. Пользователей случайно делят на две группы:

- Группа A видит старую кнопку.
- Группа B — новую.

1. Собирают данные: 1000 кликов в каждой группе.
2. Сравнивают доли успехов с помощью формулы:

$$Z = \frac{p_A - p_B}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B})}},$$

где $p = \frac{\text{общее число успехов}}{\text{общее число испытаний}}$

Заключение

Заключение

Мы рассмотрели основные урновые модели — инструменты теории вероятностей, которые позволяют анализировать и предсказывать поведение различных стохастических систем.

- Урновые модели демонстрируют широкий спектр поведения: от независимости до самоорганизации.
- Модель Поля и баланса отражают реальные процессы с обратной связью, что делает их особенно полезными для изучения сложных систем.

Список литературы

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения.
2. Urn problem, article [Электронный ресурс]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Urn_problem.
3. Лекция, теория вероятностей [Электронный ресурс]. URL: https://science.fandom.com/ru/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B2%D
4. Ивченко Г. Анализ урновых моделей с изменяющимся составом шаров.
5. Теория вероятностей, Московский государственный институт электроники и математики (технический университет) [Электронный ресурс]. URL: https://studfile.net/preview/1640634/page:8/.
6. Формула Бернулли [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%91%
7. Российская электронная школа, урок о формуле Бернулли [Электронный ресурс]. URL: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4929/conspect/.
8. Mahmoud H. Pólya Urn Models.
9. Эггертссон Г. Стохастические процессы в экономике.