Отчёт по лабораторной работе №8

Дисциплина: Математическое моделирование

Ганина Таисия Сергеевна, НФИбд-01-22

Содержание

# 1 Цель работы

Исследовать математическую модель конкуренции двух фирм.

# 2 Задание

## 2.1 Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

где

Также введена нормировка .

## 2.2 Случай 2.

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M\_0^1=3.9, \, M\_0^2=3,\\ p\_{cr}=9.9, \,N=24, q=1, \tau\_1=12, \, \tau\_2=18,\\ \tilde{p\_1}=6, \, \tilde{p\_2}=4$$

## 2.3 Обозначения:

* – число потребителей производимого продукта.
* – длительность производственного цикла
* – рыночная цена товара
* – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
* – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
* - безразмерное время

1. Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.
2. Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.

# 3 Теоретическое введение

Математическому моделированию процессов конкуренции и сотрудничества двух фирм на различных рынках посвящено довольно много научных работ, в основном использующих аппарат теории игр и статистических решений. В качестве примера можно привести работы таких исследователей, как Курно, Стакельберг, Бертран, Нэш, Парето [1].

Следует отметить, что динамические дифференциальные модели уже давно и успешно используются для математического моделирования самых разнообразных по своей природе процессов. Достаточно упомянуть широко использующуюся в экологии модель «хищник-жертва» Вольтерра, математическую теорию развития эпидемий, модели боевых действий

Задача решалась в следующей постановке.

На рынке однородного товара присутствуют две основные фирмы, разделяющие его между собой, т.е. имеет место классическая дуополия.

Безусловно, это является весьма сильным предположением, однако оно вполне оправдано в тех случаях, когда доля продаж остальных конкурентов на рассматриваемом сегменте рынке пренебрежимо мала. Хорошим примером может служить отечественный рынок микропроцессоров, который по существу разделили между собой две фирмы: Intel и AMD.

Изменение объемов продаж конкурирующих фирм с течением времени описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

где , , , , .

* – число потребителей производимого продукта.
* – длительность производственного цикла
* – рыночная цена товара
* – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
* – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
* – безразмерное время

# 4 Выполнение лабораторной работы

## 4.1 Реализация на Julia

Для реализации на языке программирования Julia будем использовать библиотеки DifferentialEquations.jl для решения дифференциальных уравнений и Plots.jl для отрисовки графиков.

Параметры и начальные условия для обоих случаев нашей задачи одинаковы, так что зададим их:

using DifferentialEquations, Plots;  
  
# задаем параметры модели согласно условию задачи  
p\_cr = 9.9 # критическая стоимость продукта  
tau1 = 12 # длительность производственного цикла фирмы 1  
p1 = 6 # себестоимость продукта у фирмы 1  
tau2 = 18 # длительность производственного цикла фирмы 2  
p2 = 4 # себестоимость продукта у фирмы 2  
N = 24 # число потребителей  
q = 1; # максимальная потребность одного человека  
  
# вычисляем коэффициенты системы уравнений для случая 1  
a1 = p\_cr/(tau1^2\*p1^2\*N\*q) # коэффициент a₁ по формуле из условия  
a2 = p\_cr/(tau2^2\*p2^2\*N\*q) # коэффициент a₂  
# Характеризуют влияние внутренних факторов фирм на объём продаж  
  
b = p\_cr/(tau1^2\*tau2^2\*p1^2\*p2^2\*N\*q) # коэффициент b,   
# Отражает внешнее конкурентное взаимодействие между фирмами  
  
c1 = (p\_cr-p1)/(tau1\*p1) # коэффициент c₁  
c2 = (p\_cr-p2)/(tau2\*p2); # коэффициент c₂  
# Характеризуют эффективность использования ресурсов  
  
# начальные условия: M₁(0) = 3.9, M₂(0) = 3  
u0 = [3.9, 3]   
# вектор параметров для передачи в функцию  
p = [a1, a2, b, c1, c2]   
# временной интервал (нормированное время)  
tspan = (0.0, 30.0);

### 4.1.1 Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы. В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Зададим функцию, описывающую систему уравнений для этого случая.

Далее решаем систему ДУ, сначала определив проблему с помощью метода ODEProblem(), а затем решим с помощью solve() солвером Tsit5() с шагом 0.01. Нарисуем график с помощью plot().

# функция, описывающая систему уравнений для случая 1  
function f(u, p, t)  
 M1, M2 = u  
 a1, a2, b, c1, c2 = p  
 # первое уравнение системы: dM₁/dtheta  
 dM1 = M1 - (a1/c1)\*M1^2 - (b/c1)\*M1\*M2  
 # второе уравнение системы: dM₂/dtheta  
 dM2 = (c2/c1)\*M2 - (a2/c1)\*M2^2 - (b/c1)\*M1\*M2  
 return [dM1, dM2]  
end  
  
# создаем и решаем задачу Коши для случая 1  
prob = ODEProblem(f, u0, tspan, p)  
# используем алгоритм Tsit5 с сохранением решения каждые 0.01 единицы времени  
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat = 0.01)  
  
# строим график для случая 1  
plot(sol,   
 yaxis = "Оборотные средства предприятия",   
 label = ["M1" "M2"],   
 c = ["red" "blue"],  
 title = "Случай 1: только экономические факторы")

В результате получаем следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. [1](#fig:001)). По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. В математической модели этот факт отражается в коэффициенте, стоящим перед членом : в рассматриваемой задаче он одинаковый в обоих уравнениях (). Это было обозначено в условиях задачи. Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

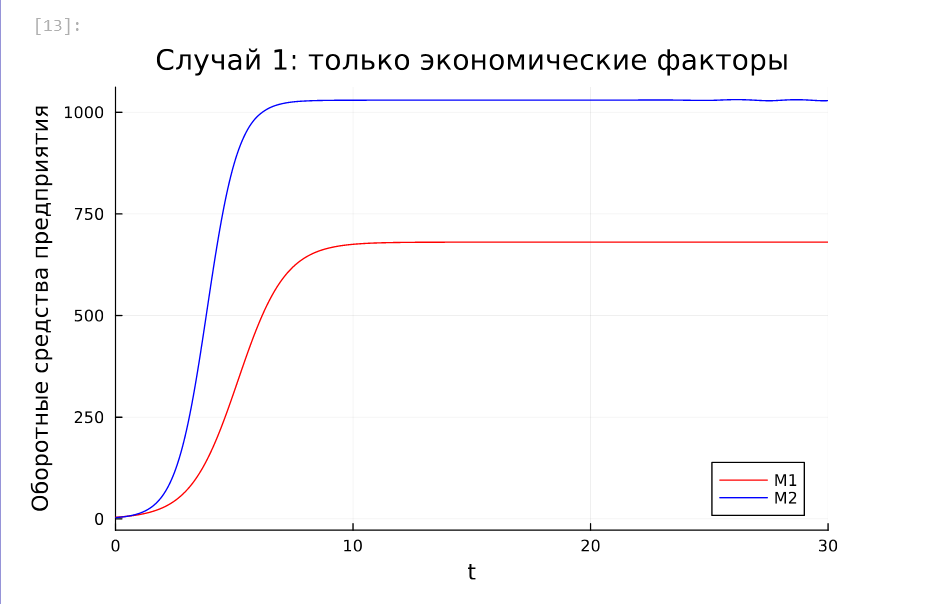


Figure 1: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

### 4.1.2 Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед будет отличаться. Зададим функцию, описывающую систему уравнений для этого случая.

Далее решаем систему ДУ, сначала определив проблему с помощью метода ODEProblem(), а затем решим с помощью solve() солвером Tsit5() с шагом 0.01. Нарисуем график с помощью plot().

# функция для случая 2 с учетом социально-психологических факторов  
function f2(u, p, t)  
 M1, M2 = u  
 a1, a2, b, c1, c2 = p  
 # измененное первое уравнение с дополнительным коэффициентом 0.00015  
 dM1 = M1 - (a1/c1)\*M1^2 - (b/c1 + 0.0012)\*M1\*M2  
 # второе уравнение остается без изменений  
 dM2 = (c2/c1)\*M2 - (a2/c1)\*M2^2 - (b/c1)\*M1\*M2  
 return [dM1, dM2]  
end  
  
# решаем задачу для случая 2  
prob2 = ODEProblem(f2, u0, tspan, p)  
sol2 = solve(prob2, Tsit5(), saveat = 0.01)  
  
# строим график для случая 2  
plot(sol2,   
 yaxis = "Оборотные средства предприятия",   
 label = ["M1" "M2"],   
 c = ["red" "blue"],  
 title = "Случай 2: с социально-психологическими факторами")

В результате получаем следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. [2](#fig:002)). По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начитает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

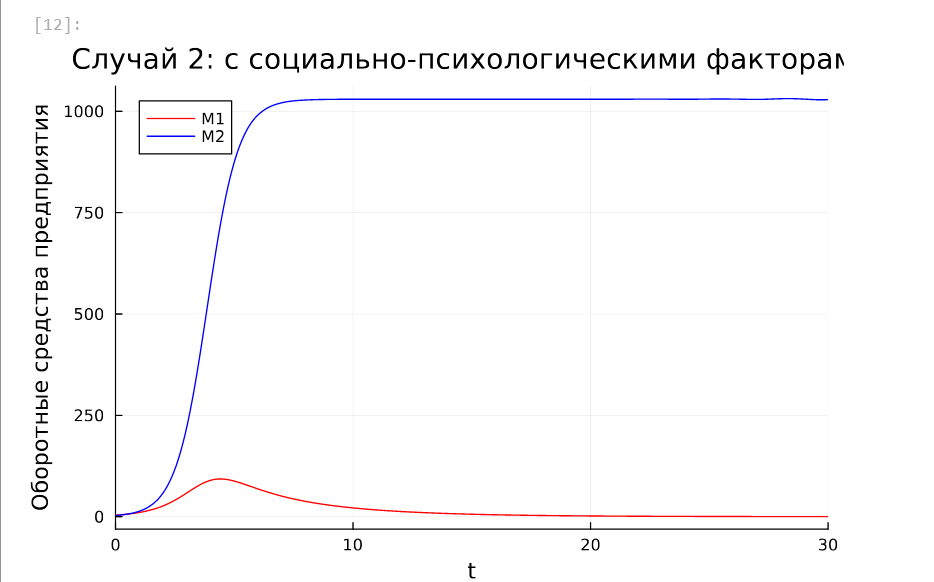


Figure 2: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

## 4.2 Реализация на OpenModelica

### 4.2.1 Случай 1

Зададим параметры, начальные условия и систему уравнений. Далее выполним симуляцию на временном интервале и с шагом дифференцирования, как при реализации на Julia.

model lab8\_mathmod\_1  
 parameter Real p\_cr = 9.9;  
 parameter Real tau1 = 12;   
 parameter Real p1 = 6;  
 parameter Real tau2 = 18;  
 parameter Real p2 = 4;   
 parameter Real N = 24;  
 parameter Real q = 1;  
 parameter Real a1 = p\_cr/(tau1^2\*p1^2\*N\*q);  
 parameter Real a2 = p\_cr/(tau2^2\*p2^2\*N\*q);  
 parameter Real b = p\_cr/(tau1^2\*tau2^2\*p1^2\*p2^2\*N\*q);   
 parameter Real c1 = (p\_cr-p1)/(tau1\*p1);  
 parameter Real c2 = (p\_cr-p2)/(tau2\*p2);  
   
 Real M1(start=3.9);  
 Real M2(start=3);  
   
equation  
 der(M1) = M1 - (a1/c1)\*M1^2 - (b/c1)\*M1\*M2;  
 der(M2) = (c2/c1)\*M2 - (a2/c1)\*M2^2 - (b/c1)\*M1\*M2;  
end lab8\_mathmod\_1;

Получим следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. [3](#fig:003)). По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

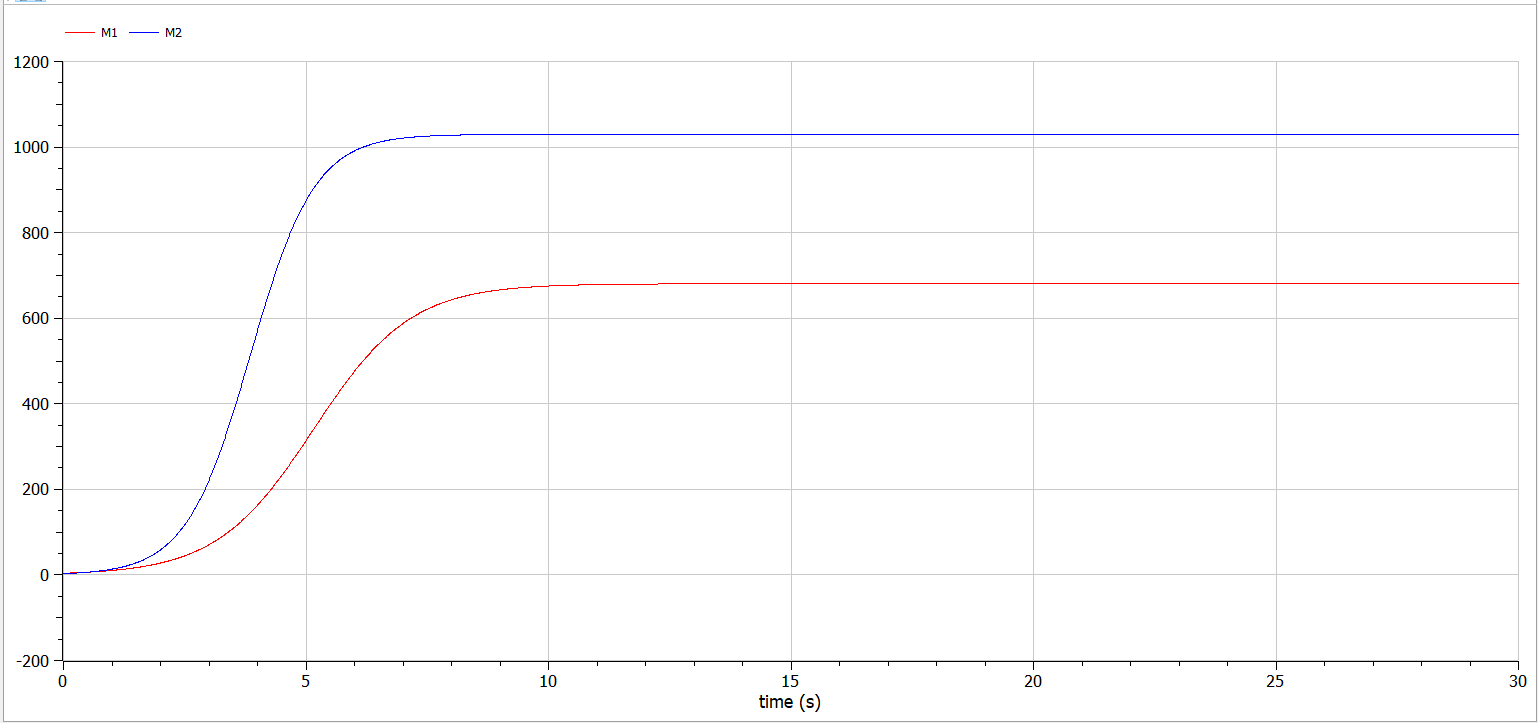


Figure 3: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

### 4.2.2 Случай 2

Зададим параметры, начальные условия и систему уравнений. Далее выполним симуляцию на временном интервале и с шагом дифференцирования, как при реализации на Julia.

model lab8\_mathmod\_2  
 parameter Real p\_cr = 9.9;  
 parameter Real tau1 = 12;   
 parameter Real p1 = 6;  
 parameter Real tau2 = 18;  
 parameter Real p2 = 4;   
 parameter Real N = 24;  
 parameter Real q = 1;  
 parameter Real a1 = p\_cr/(tau1^2\*p1^2\*N\*q);  
 parameter Real a2 = p\_cr/(tau2^2\*p2^2\*N\*q);  
 parameter Real b = p\_cr/(tau1^2\*tau2^2\*p1^2\*p2^2\*N\*q);   
 parameter Real c1 = (p\_cr-p1)/(tau1\*p1);  
 parameter Real c2 = (p\_cr-p2)/(tau2\*p2);  
   
 Real M1(start=3.9);  
 Real M2(start=3);  
   
equation  
 der(M1) = M1 - (a1/c1)\*M1^2 - (b/c1+0.0012)\*M1\*M2;  
 der(M2) = (c2/c1)\*M2 - (a2/c1)\*M2^2 - (b/c1)\*M1\*M2;  
end lab8\_mathmod\_2;

Получим следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. [4](#fig:004)). По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начитает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

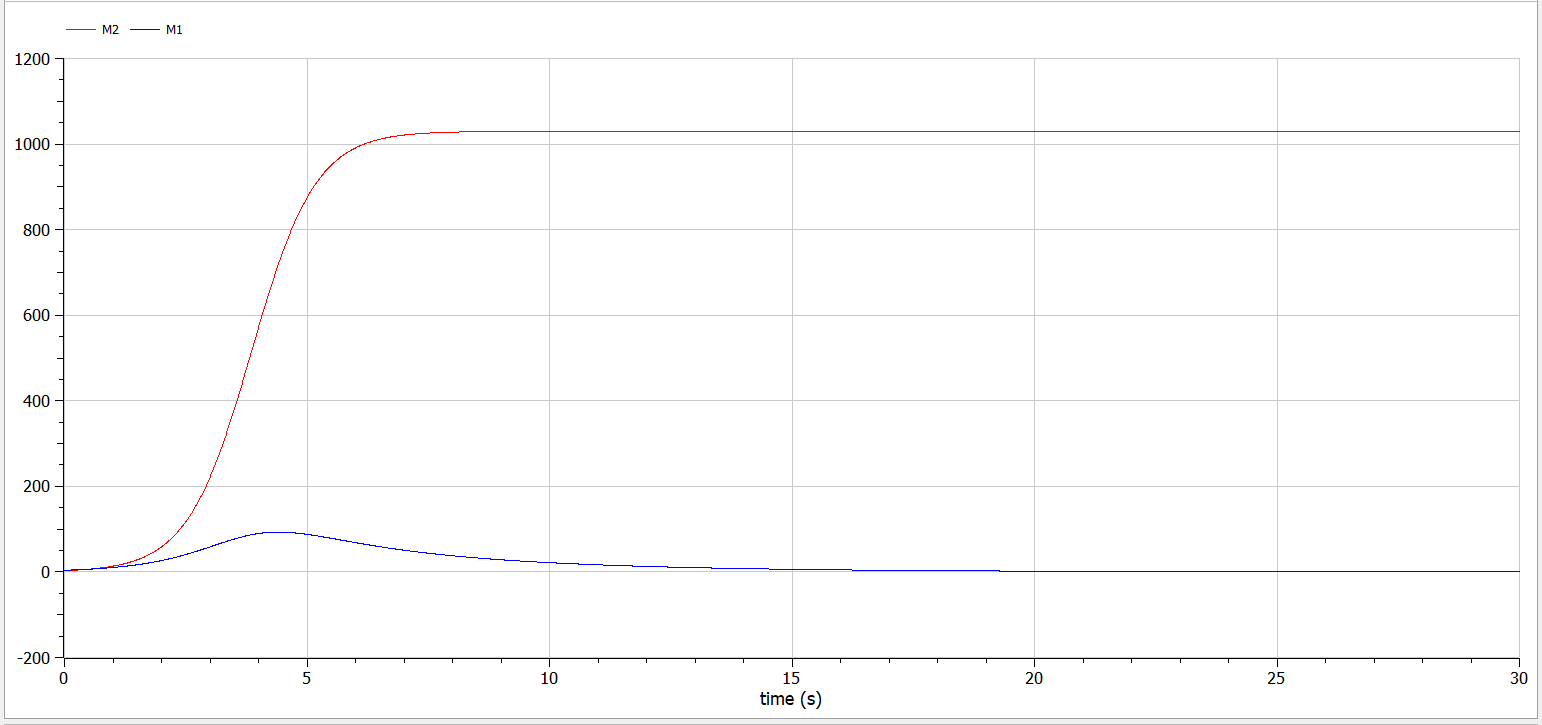


Figure 4: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

# 5 Выводы

В результате выполнения лабораторной работы была исследована модель конкуренции двух фирм.

# Список литературы

1. Бакалаврская работа, математическое моделирование конкуренции, Анопкина И. В. [Электронный ресурс]. URL: <https://dspace.tltsu.ru/bitstream/123456789/1035/1/%D0%90%D0%BD%D0%BE%D0%BF%D0%BA%D0%B8%D0%BD%D0%B0%20%D0%98.%D0%92._%D0%9F%D0%9C%D0%98%D0%B1_1201.pdf>.