Модели с урнами

Математическое моделирование

Ганина Таисия Сергеевна, НФИбд-01-22

Содержание

# 1 Введение

Современная наука всё чаще обращается к математическим моделям для анализа сложных систем, где случайность и неопределённость играют ключевую роль. Известно, что урновые модели — наглядный аппарат теории вероятностей, позволяющий описывать многие реальные процесс и явления. Урновые модели — абстрактные вероятностные системы, имитирующие процесс извлечения шаров из урны. Их изучение позволяет не только исследовать фундаментальные законы теории вероятностей, но и решать практические задачи в областях, далёких от чистой математики: от прогнозирования экономических кризисов до моделирования экологических процессов. [1]

## 1.1 Актуальность

Актуальность темы обусловлена универсальностью урновых подходов. Во-первых, они служат мостиком между детерминированными и стохастическими системами. С одной стороны, они могут включать правила, которые детерминированно определяют, как изменяется состав урны (например, если мы всегда добавляем шар того же цвета, который вытащили). С другой стороны, сам процесс выбора шаров из урны является случайным (стохастическим).

Во вторых, эти модели помогают изучать динамику с памятью — явления, где текущее состояние системы зависит от её истории, что характерно для биологических популяций (численность популяции сегодня зависит от её размера в прошлом, условий окружающей среды, миграции и т.д) или финансовых рынков (цена актива сегодня зависит от предыдущих колебаний цен, новостей, поведения инвесторов и других факторов).[lecture1]

## 1.2 Объект исследования

Объектом исследования выступают урновые модели как класс вероятностных систем. Их структура включает три ключевых элемента: урну (контейнер), шары (объекты с определёнными свойствами) и правила манипуляции (извлечение, добавление). Предмет исследования — свойства, условия сходимости и прикладное значение трёх конкретных моделей:

1. **Модель Бернулли** — базовый случай с независимыми испытаниями.
2. **Модель Поля** — система с самоусиливающейся вероятностью.
3. **Модель баланса** — механизм достижения равновесия через компенсацию.

## 1.3 Научная новизна

Научная новизна работы заключается в комплексном подходе к изучению урновых моделей. Проведён сравнительный анализ систем с зависимыми и независимыми испытаниями, выявляющий роль начальных условий.

## 1.4 Практическая значимость

Практическая значимость работы проявляется в следующих направлениях:

1. Прогнозирование в условиях неопределённости:
   * Модель Поля применяется в алгоритмах обработки Big Data для анализа пользовательского поведения.
   * Модель баланса используется в логистике для оптимизации соотношения спроса и предложения.
2. Биостатистика и экология:
   * Урновые схемы имитируют динамику популяций, где «шары» представляют особи разных видов, а правила их добавления/удаления соответствуют рождению и гибели.
3. Социальные науки:
   * Моделирование распространения информации в социальных сетях, где «цвет» шара ассоциируется с типом контента (например, “fake news” vs. “проверенные данные”).

Таким образом, урновые модели выступают не только как теоретический конструкт, но и как рабочий инструмент для междисциплинарных исследований.

# 2 Историческая справка

Одна из первых формулировок задачи, связанной с урновыми моделями, встречается в труде Якоба Бернулли Ars Conjectandi, опубликованном в 1713 году. В нём он анализировал проблему определения соотношения разноцветных шаров в урне на основе наблюдений за извлечёнными экземплярами. Эта задача, относящаяся к области обратных вероятностей, активно изучалась в XVIII веке и привлекала внимание таких математиков, как Абрахам де Муавр и Томас Байес.

Термин urna, использованный Бернулли, происходит из латинского языка и первоначально обозначал глиняный сосуд. В Древнем Риме это слово также применялось для описания сосудов, в которые бросали бюллетени или жребии. Современные итальянский и испанский языки сохранили это значение: слово urna до сих пор используется для обозначения избирательной урны. Возможно, идею для своей модели Бернулли почерпнул из практик, связанных с жеребьёвками, выборами и азартными играми, где исход решается путём случайного извлечения объектов из сосуда. Считается, что подобные методы активно применялись, например, при проведении выборов дожа в Венеции в Средние века и эпоху Ренессанса, когда выборщики определялись по жребию с помощью разноцветных шаров, извлекаемых из урны. [2]

# 3 Общее описание моделей с урнами

**Урновая модель** в теории вероятностей и статистике — идеализированный мысленный эксперимент, в котором некоторые объекты реального интереса (атомы, люди, автомобили и т.п.) представлены как окрашенные шары в урне или другом контейнере. вынимают (удаляют) один или более шаров из урны; цель состоит в том, чтобы определить вероятность вынимания шаров одного цвета или другого, или некоторые другие свойства. [3]

Урновые модели представляют собой абстрактные вероятностные системы, которые включают в себя несколько ключевых элементов: урну, шары и правила манипуляции (рис. [1](#fig:001)).

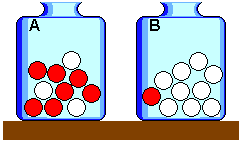


Figure 1: Изображение модели с урнами

* **Урна**: представляет собой контейнер, содержащий шары. Урна может быть конечной или бесконечной по объёму, что влияет на тип моделируемых процессов. Например, в некоторых моделях урна может содержать шары нескольких цветов, что позволяет имитировать сложные системы с множеством исходов. [4]
* **Шары**: объекты внутри урны, которые могут иметь разные цвета или свойства. Каждый шар соответствует определённому событию или состоянию системы. Например, в модели Поля шары могут представлять собой элементы популяции, а их цвета — разные типы особей [5].
* **Правила извлечения и добавления**: определяют, как шары удаляются из урны и добавляются обратно. Эти правила могут включать в себя возвращение шара в урну после извлечения (модель с возвращением), удаление без возвращения (модель без возвращения), или динамическое изменение состава урны (модель с динамическим изменением) [5].

## 3.1 Классификация моделей

Урновые модели можно разделить на три типа:

1. **Модели с возвращением**: шар возвращается в урну после извлечения. Пример — **модель Бернулли**, где каждый опыт независим и имеет фиксированную вероятность.
2. **Модели без возвращения**: шар не возвращается в урну. Пример — гипергеометрическая схема, где вероятность извлечения зависит от количества уже извлечённых шаров (рис. [2](#fig:002)).

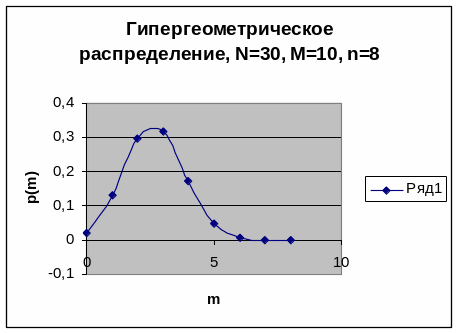


Figure 2: Гипергеометрическая схема

1. **Модели с динамическим изменением состава**: в урну добавляются новые шары после извлечения. Примеры — **модель Поля** и **модель баланса**. В модели Поля добавляется шар того же цвета, усиливая вероятность его извлечения. В модели баланса добавляется шар противоположного цвета, стремясь к равновесию.

# 4 Модель Бернулли

## 4.1 Принцип: независимые испытания с постоянной вероятностью

Модель Бернулли — это простая и широко используемая урновая модель, основанная на принципе **независимых испытаний** с **постоянной вероятностью**. Это означает, что каждый раз, когда мы извлекаем шар из урны, вероятность его цвета не зависит от предыдущих извлечений. [6]

Формула вероятности извлечения шара цвета выглядит следующим образом:

где:

* — количество шаров цвета ,
* — общее количество шаров в урне.

Однако, если мы говорим о повторных испытаниях, таких как подбрасывание монеты, формула Бернулли для испытаний имеет вид:

где:

* — количество испытаний,
* — количество успехов (например, выпадения орла),
* — вероятность успеха в одном испытании,
* — число сочетаний из по .

## 4.2 Свойства

Модель Бернулли обладает двумя ключевыми свойствами:

1. **Отсутствие памяти (независимость испытаний)**: каждый опыт является независимым от предыдущих. Это означает, что вероятность извлечения шара не меняется после каждого испытания [6].
2. **Биномиальное распределение результатов**: если мы повторяем испытания несколько раз, количество успехов (например, извлечений шаров определённого цвета) следует биномиальному распределению [6].

## 4.3 Пример: подбрасывание монеты с заданной вероятностью

Модель Бернулли часто используется для описания подбрасывания монеты. Предположим, у нас есть монета, которая падает орлом с вероятностью и решкой с вероятностью . Если мы подбрасываем эту монету раз, мы можем использовать формулу Бернулли, чтобы вычислить вероятность получить, например, 7 орлов:

Этот пример показывает, как модель Бернулли может быть применена для анализа реальных ситуаций с независимыми испытаниями [7] (рис. [3](#fig:003)).

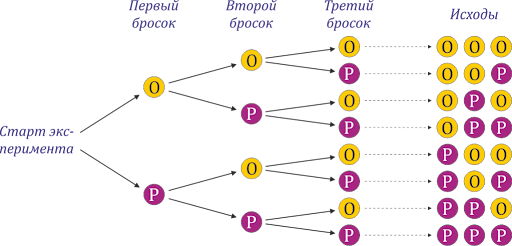


Figure 3: Подбрасывание монеты

# 5 Модель Поля (Pólya Urn)

## 5.1 Принцип работы

Модель Поля описывает стохастический процесс с *самоусилением*. Изначально урна содержит шаров двух цветов (например, красных и синих). [8]

На каждом шаге:

1. Случайно извлекается шар.
2. Он возвращается в урну *вместе с шарами того же цвета*.

Вероятность выбора цвета на шаге зависит от текущего состава урны:

,

где — число извлечённых красных шаров к шагу . Каждое извлечение увеличивает долю выбранного цвета, создавая **положительную обратную связь**. Вероятность выбора цвета зависит от текущего состава урны. Чем больше шаров определённого цвета уже в урне, тем выше вероятность выбора этого цвета на следующем шаге.

## 5.2 Свойства модели

* **Зависимость от истории**: Результат каждого испытания влияет на все последующие («эффект снежного кома»). Ранние успехи усиливают доминирование одного цвета.
* **Сходимость к распределению**: Доля шаров сходится к случайной величине с бета-распределением . **Бета-распределение** — это вероятностное распределение, которое описывает случайные величины, которые находятся в диапазоне от 0 до 1. Оно часто используется для моделирования долей или пропорций. Однако предельное состояние **не предопределено** — малые начальные отклонения могут привести к разным исходам. Представьте себе урну с красными и синими шарами. На каждом шаге вы берёте шар, а затем добавляете несколько шаров того же цвета обратно в урну. Со временем доля красных или синих шаров будет меняться, но в конце концов она будет следовать бета-распределению. Однако то, какая доля будет доминировать (красная или синяя), зависит от случайных событий на ранних шагах и не предопределено заранее. [1]

## 5.3 Пример применения

Модель иллюстрирует процессы с **кумулятивным преимуществом** (постепенно накапливаемый или накапливающийся, суммирующийся со временем):

* В эпидемиологии — распространение инфекции, где каждый заражённый увеличивает вероятность новых случаев (аналог добавления шаров).
* В социальных сетях — виральность контента: чем чаще мем репостят, тем выше его видимость и вероятность дальнейшего распространения («эффект победителя получает всё»).

# 6 Модель баланса

## 6.1 Принцип

Модель баланса представляет собой стохастический процесс, который описывает динамику системы, стремящейся к равновесию. В рамках этой модели урна изначально содержит шаров одного цвета (например, красных) и шаров другого цвета (например, синих). На каждом шаге происходит следующее:

1. Из урны случайным образом извлекается один шар.
2. Вместо возвращения шара того же цвета в урну добавляется шар **противоположного цвета**. Например, если вынут белый шар, то в урну добавляется черный шар, и наоборот. Этот принцип позволяет моделировать процесс, который стремится к балансу между двумя состояниями.

Таким образом, вероятность извлечения шара каждого цвета на следующем шаге изменяется таким образом, чтобы система постепенно приближалась к состоянию равновесия, где количество шаров обоих цветов становится примерно одинаковым. Вероятность выбора шара определенного цвета на шаге задается формулой: , где и — текущие количества красных и синих шаров соответственно.

После каждого шага количество шаров обновляется согласно правилу: ,

где , если был выбран красный шар, и , если был выбран синий шар.

## 6.2 Свойства

1. **Сходимость к равновесию**: Модель демонстрирует тенденцию к достижению состояния, в котором количество шаров обоих цветов выравнивается. Это связано с тем, что каждый раз, когда извлекается шар одного цвета, система “компенсирует” это добавлением шара противоположного цвета.
2. **Устойчивость**: Даже если начальное соотношение шаров существенно несбалансировано (например, значительно больше красных шаров, чем синих), модель постепенно приводит к равновесию благодаря механизму обратной связи.
3. **Детерминированность в долгосрочной перспективе**: Хотя процесс является стохастическим на каждом отдельном шаге, в пределе система демонстрирует детерминированное поведение: соотношение числа шаров сходится к .
4. **Независимость от начальных условий**: Конечное состояние системы не зависит от начального распределения шаров, что делает модель универсальной для описания процессов самобалансировки.

## 6.3 Пример

Рассмотрим простой пример. Пусть в урне изначально находятся 8 красных шаров и 2 синих шара (). На каждом шаге мы случайным образом выбираем шар и добавляем шар противоположного цвета.

* Если на первом шаге выбран красный шар, то его удаляют, но добавляют один синий шар. Теперь в урне станет красных шаров и синих шаров.
* Если на втором шаге снова выбран красный шар, то после этого шага в урне окажется красных шаров и синих шаров.

По мере продолжения процесса вероятность выбора красного шара уменьшается, а вероятность выбора синего шара увеличивается. В итоге система придет к состоянию, где количество красных и синих шаров будет примерно одинаковым.

## 6.4 Применение модели

Модель баланса может быть использована для описания различных явлений, где наблюдается стремление системы к равновесию:

* **Экологические системы**: динамика популяций хищников и жертв.
* **Химические реакции**: установление равновесия между реагентами и продуктами.
* **Социальные процессы**: выравнивание мнений или распределения ресурсов в обществе.
* **Финансовые рынки**: стабилизация цен на активы. [9]

# 7 Области применения урновых моделей

Урновые модели — это не просто абстрактные математические конструкции. Они активно применяются в науке и практике для решения реальных задач.

## 7.1 Теория вероятностей: как предсказать будущее случайных процессов

Здесь урновые модели помогают понять, как ведут себя системы со случайными событиями в долгосрочной перспективе.

* **Модель Поля и сходимость**
  + Представьте, что вы добавляете в урну шары того же цвета, который только что вытащили. Со временем один цвет начнёт преобладать. Это называется **сходимостью** — система стабилизируется, но итог зависит от начальных условий. Например, если в урне сначала больше красных шаров, с большой вероятностью они «захватят» урну.
* **Модель баланса и равновесие**
  + Если после каждого извлечения шара вы добавляете противоположный цвет, система стремится к балансу. Это похоже на экосистему, где хищники и жертвы регулируют численность друг друга.

## 7.2 Математическая статистика: оценка неизвестного

Урновые модели используются, когда нужно сделать выводы о целом на основе частичных данных.

* **Оценка доли дефектов в партии товара**
  + Допустим, в партии из 1000 товаров 50 бракованных (это неизвестно). Вы проверяете 100 товаров **без возвращения** (гипергеометрическая модель). Если среди них 5 бракованных, можно оценить общее число дефектов в партии.
* **Формула для расчёта вероятности**:

## 7.3 Практические задачи: от IT до экономики

### 7.3.1 A/B-тестирование

Представьте, что вы запускаете новую кнопку на сайте. Пользователей случайно делят на две группы:  
- Группа A видит старую кнопку.  
- Группа B — новую.

Здесь работает **модель Бернулли**: каждый клик — независимое событие с вероятностью успеха (например, 5% для группы A и 7% для группы B). Чтобы понять, действительно ли новая кнопка лучше, используют статистические тесты.

**Как это работает**:  
1. Собирают данные: 1000 кликов в каждой группе.  
2. Сравнивают доли успехов с помощью формулы:

где 3. Если , различие считается значимым.

### 7.3.2 Прогнозирование рынков

Почему один продукт становится популярным, а другой нет? Тут полезна **модель Поля**.

* **Пример**: Два новых мессенджера. У первого 100 пользователей, у второго — 150. Каждый новый пользователь привлекает своих друзей (аналог добавления шаров). Со временем мессенджер с большей начальной аудиторией может захватить рынок, даже если оба одинаково хороши.

# 8 Заключение

Мы рассмотрели основные урновые модели — инструменты теории вероятностей, которые позволяют анализировать и предсказывать поведение различных стохастических систем. **Модель Бернулли** демонстрирует независимость испытаний, **модель Поля** — самоорганизацию с обратной связью, а **модель баланса** — стремление к равновесию.

* Урновые модели демонстрируют широкий спектр поведения: от независимости до самоорганизации.
* Модель Поля и баланса отражают реальные процессы с обратной связью, что делает их особенно полезными для изучения сложных систем. Расширение на **многомерные случаи** (более двух цветов), что позволит моделировать более сложные системы. А **интеграция с методами машинного обучения** может открыть новые возможности для прогнозирования и анализа данных.

Таким образом, урновые модели остаются важным инструментом для понимания и моделирования случайных процессов в различных областях науки и практики.

# Список литературы

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения.

2. Urn problem, article [Электронный ресурс]. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Urn_problem>.

3. Лекция, теория вероятностей [Электронный ресурс]. URL: <https://science.fandom.com/ru/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%BE%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9>.

4. Ивченко Г. Анализ урновых моделей с изменяющимся составом шаров.

5. Теория вероятностей, Московский государственный институт электроники и математики (технический университет) [Электронный ресурс]. URL: <https://studfile.net/preview/1640634/page:8/>.

6. Формула Бернулли [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%91%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%83%D0%BB%D0%BB%D0%B8>.

7. Российская электронная школа, урок о формуле Бернулли [Электронный ресурс]. URL: <https://resh.edu.ru/subject/lesson/4929/conspect/>.

8. Mahmoud H. Pólya Urn Models.

9. Эггертссон Г. Стохастические процессы в экономике.