



Engenharia de Computação

LINGUAGENS FORMAIS

Máquina de duas pilhas

Guilherme Baccarin

Helena Tavares

24 de Junho de 2022

1. Definição geral e formal

1.1. Definição geral

Autômato de duas pilhas, ou Máquina de duas pilhas, se difere da Máquina de uma pilha, por ter mais uma pilha como memória auxiliar, ficando uma na entrada e outra na saída. Outra diferença é a forma de representar o programa, que no caso de Máquina de duas pilhas, utiliza diagrama de estados assim como na Máquina de Turing, e não diagrama de fluxo, como na Máquina de uma pilha.

Uma máquina com duas pilhas é composta por:

- **Uma fita** onde são armazenados os símbolos de entrada;
- **Duas pilhas** que auxiliam na leitura e gravação de símbolos do alfabeto aceitos pela máquina, operações que se dão no seu início (topo), respeitando as propriedades do conceito de pilha;
- **Unidade de controle** é onde estão os componentes responsáveis por efetuar a execução e o controle do programa na máquina de acordo com o estado atual, o símbolo lido na fita e o símbolo lido na pilha. A Unidade de controle possui uma cabeça de fita, responsável por efetuar a leitura de um único símbolo/célula da fita sendo a leitura sempre da esquerda para a direita (não alterando sua movimentação como em uma máquina de Turing), além da cabeça de fita, a unidade de controle possui para cada pilha, um mecanismo capaz de ler e gravar símbolos na pilha, esse mecanismo é chamado de cabeça de pilha, o mecanismo faz a leitura da pilha sendo essa leitura destrutiva, no momento que é efetuada o símbolo lido é retirado da pilha
- **Programa ou função de Transição** é o conjunto de instruções que definem as operações da máquina. Ao realizar/aceitar uma transição, o programa consulta o estado atual, a fita e o topo das duas pilhas e assim é determinado o próximo estado.

1.2. Definição formal

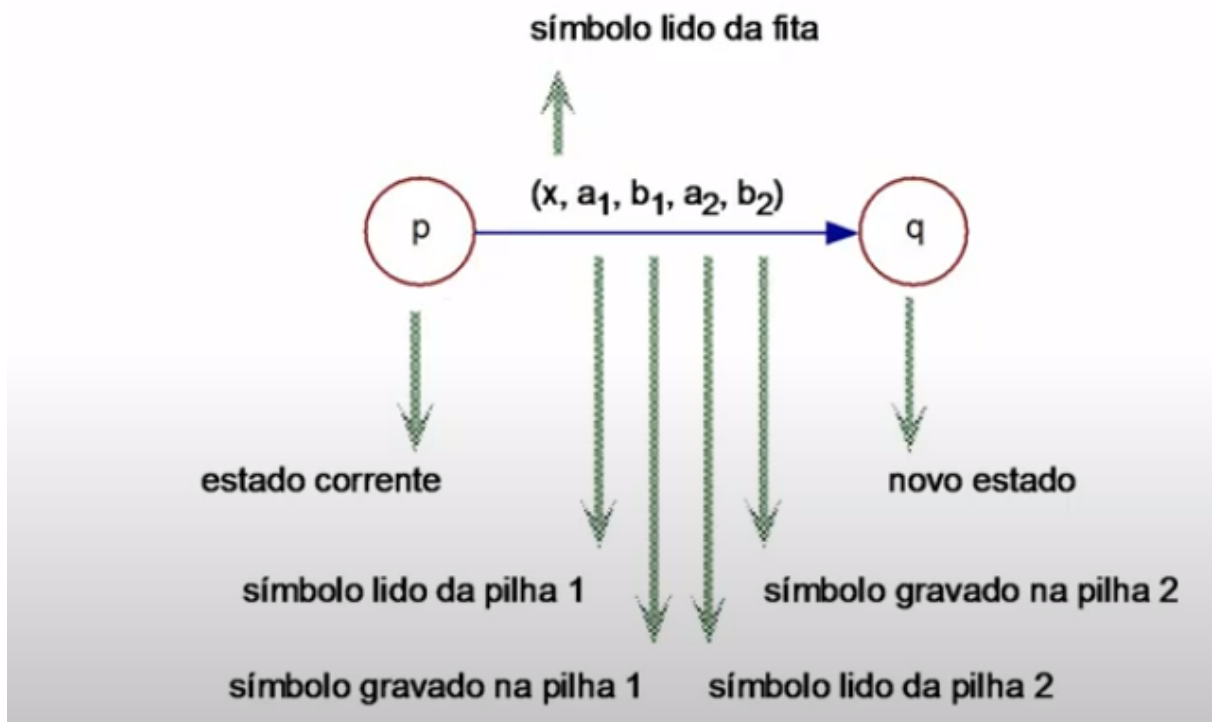
A definição formal de autômato de duas pilhas, ou máquina com duas pilhas, é dada por:

$$M = (\Sigma, Q, \Pi, q_0, F, V)$$

Onde:

- Σ é um alfabeto de símbolos de entrada;
- Q é o conjunto de estados possíveis do autômato o qual é finito;
- Π função programa ou função de transição:
 $\Pi: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon, ?\}) \times (V \cup \{\epsilon, ?\}) \times (V \cup \{\epsilon, ?\}) \rightarrow Q \times (V \cup \{\epsilon, ?\}) \times (V \cup \{\epsilon, ?\})$ a qual é uma função parcial.
- q_0 estado inicial do autômato tal que q_0 é elemento de Q ;
- F é o conjunto de estados finais tal que F está contido em Q ;
- V é um alfabeto auxiliar;

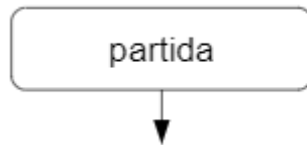
1.3. Função Programa como grafo:



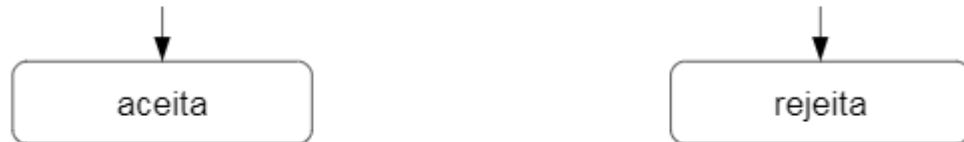
2. Operações e testes

A máquina de duas pilhas é composta por três partes:

- **Variável X** é uma variável usada somente pela entrada e não tem limites nem tamanhos fixos. Essa variável tem as seguintes características:
 - 1) os símbolos pertencem ao alfabeto de entrada
 - 2) o valor de X, inicialmente, é a palavra de entrada e o comprimento dessa palavra é o mesmo comprimento da palavra corrente armazenada
 - 3) caso a variável X não contenha símbolos, a entrada é vazia e é representada pela palavra vazia {}
- **Variáveis Yi** são variáveis tipo pilha e tem função de memorizar o trabalho e a saída. Essas variáveis não têm limites nem tamanhos fixos, mas são finitas. Os símbolos pertencem ao alfabeto de entrada e não existem símbolos auxiliares. Elas se comportam da seguinte forma:
 - 1) o valor de cada pilha Yi é uma palavra vazia e o seu comprimento é o mesmo comprimento da palavra corrente armazenada;
 - 2) diferente da máquina de Post, na máquina de duas pilhas não se pode ler e remover símbolos em uma extremidade, e armazenar em outra. Na máquina de duas pilhas, esses processos são feitos sempre na mesma extremidade.
- **Programa** é a sequência de instruções finitas que é representada por um diagrama de fluxos,. Cada vértice é uma instrução, e essas instruções podem ser dos seguintes tipos: partida, parada, desvio, empilha e desempilha.
 - 1) **Partida** existe somente uma instrução de início (partida) em um programa.

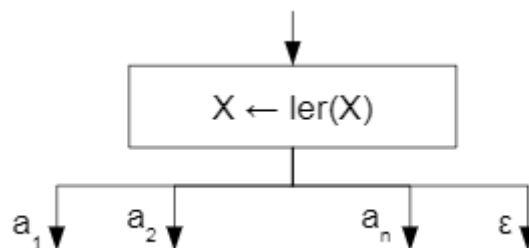


- 2) **Parada** existem duas possibilidades de instruções de parada em um programa: aceitação (aceita) ou rejeição (rejeita)



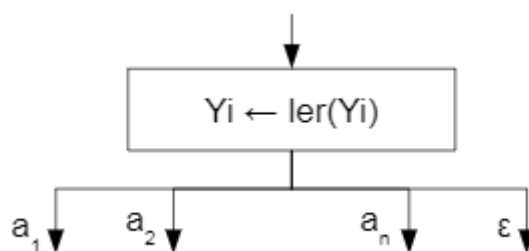
- 3) **Desvio ou Teste** determina o fluxo do programa de acordo com o símbolo mais à esquerda da palavra armazenada na variável X , ou seja, variável inicial da fila. A possibilidade da palavra X ser vazia precisa ser levada em consideração. É uma função total, definida para todos os valores do domínio e é um desvio condicional. Assim, se o cardinal de Σ é n , então existem $n+1$ arestas de desvios condicionais, pois se deve incluir a possibilidade de ϵ .

$X \leftarrow \text{ler}(X)$ denota uma leitura destrutiva, ou seja, que lê o símbolo mais à esquerda da palavra, retirando da mesma o símbolo lido

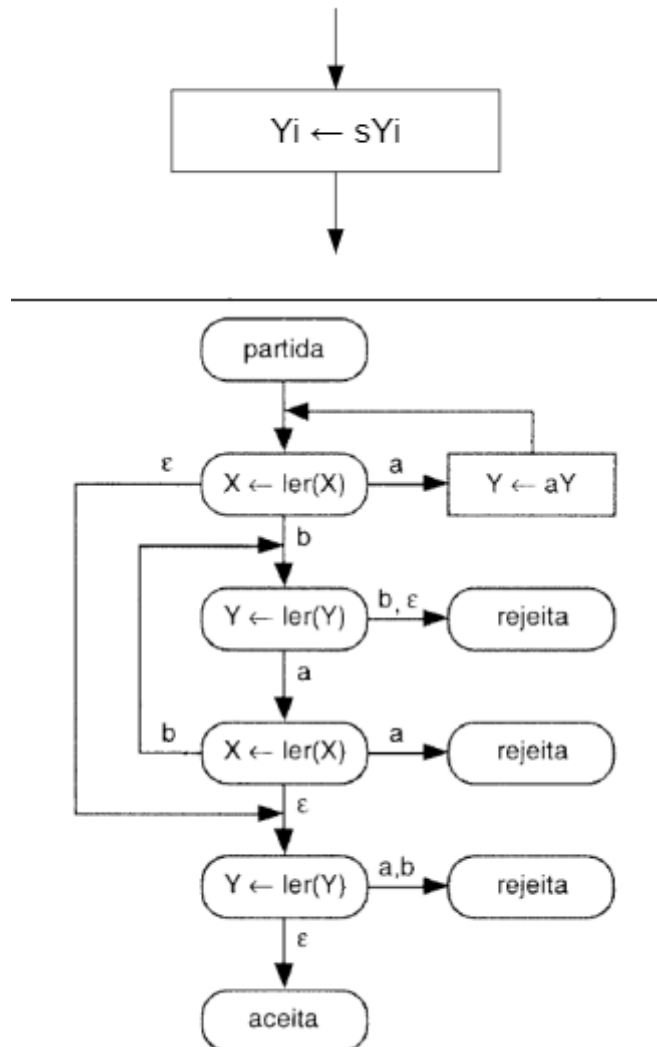


- 4) **Desempilha** determina o fluxo do programa de acordo com o símbolo no topo da pilha Y_i . Também deve ser prevista a possibilidade de Y_i conter a palavra vazia. Portanto, é um desvio condicional, e trata-se de uma função total, ou seja, definida para todos os valores do domínio. Assim, se o cardinal de Σ é n , então existem $n+1$ arestas de desvios condicionais, pois se deve incluir a possibilidade de ϵ .

$Y_i \leftarrow \text{ler}(Y_i)$ denota uma leitura destrutiva, ou seja, que lê o símbolo o topo de Y_i , retirando da estrutura o símbolo lido

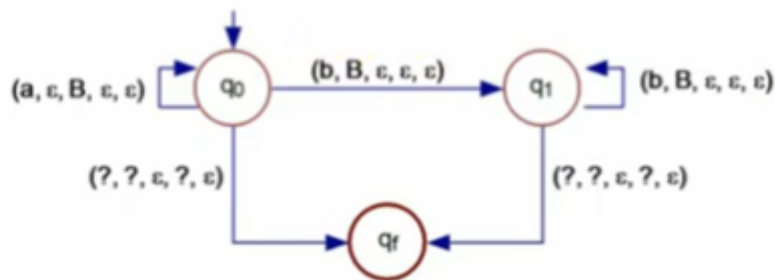


- 5) **Empilha** insere um símbolo (pertencente a Σ) no topo da pilha indicada, ou seja, concatena o símbolo na extremidade da palavra armazenada na variável Y_i .

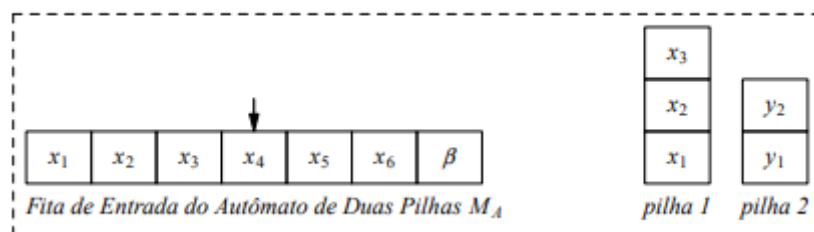


3. Representação

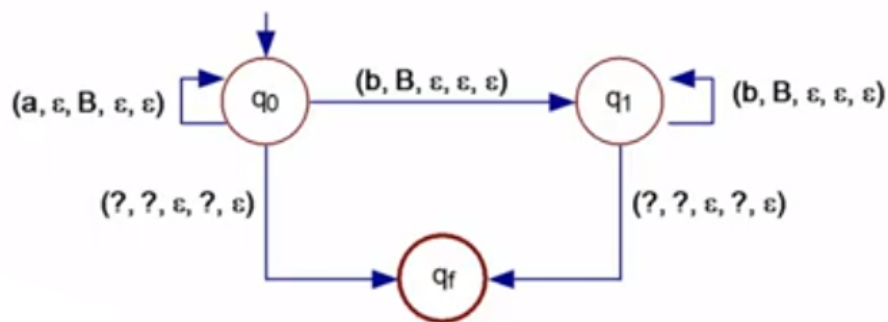
Autômato de duas pilhas, ou Máquina de duas pilhas é representado por um diagrama de estados.



Estrutura de dados do Autômato de Duas Pilhas



4. Funcionamento



Fita (entrada)

a a b b ?



Pilha 1

?

Pilha 2

?

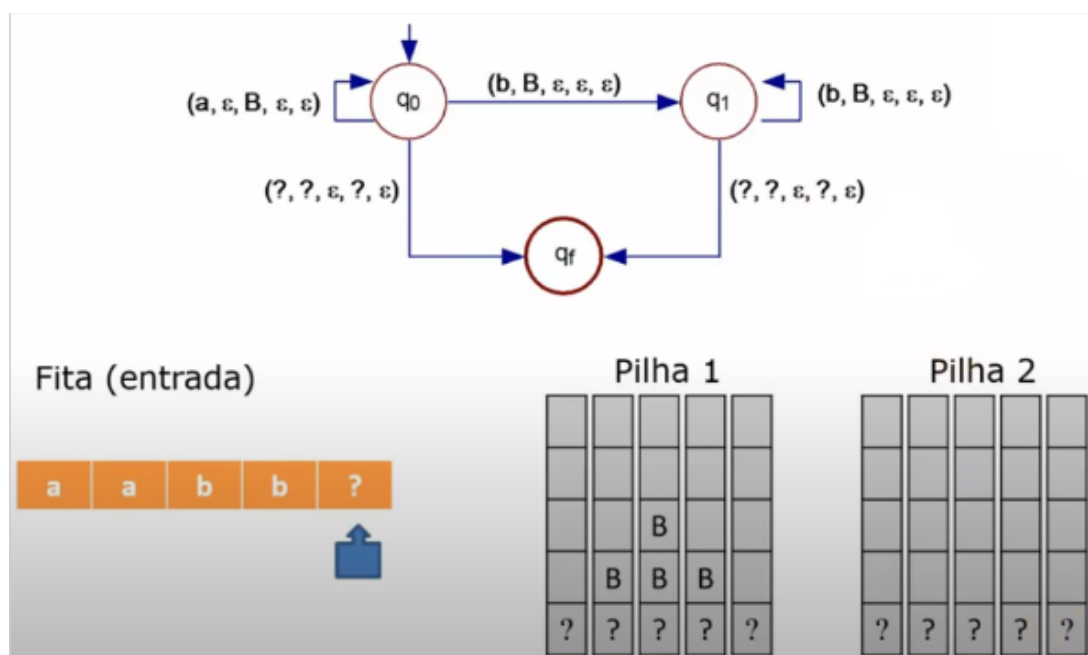
No estado q_0 , para cada símbolo 'a' lido da fita, é armazenado um 'B' na pilha 1.

No estado q_1 , é realizado um batimento, verificando se, para cada símbolo 'b' da fita, existe um correspondente 'B' na pilha 1.

O algoritmo somente aceita se, ao terminar de ler toda a palavra de entrada, as pilhas estiverem vazias.

Símbolos utilizados na imagem:

- **a** é o valor lido na fita de entrada;
- ϵ é o valor lido na pilha 1;
- **B** é o valor escrito na pilha 1;
- ϵ é o valor lido na pilha 2;
- ϵ é o valor escrito na pilha 2;
- **?** testa se a fita está vazia.



Um Autômato de Duas Pilhas definido como $MA = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ executa da seguinte maneira:

MA recebe uma palavra $w \in \Sigma^*$, armazenada em uma fita de entrada concatenada com o símbolo β , que identifica o fim da entrada. Então, se inicialmente a palavra a ser processada é $w = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n$, onde $n \geq 0$ e $\sigma_i \in \Sigma$ para todo $i = 1, \dots, n$, o estado da fita de entrada da máquina MA corresponde ao símbolo β concatenado ao final de w para marcar o fim da entrada, de modo que a configuração da fita de entrada é $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n\beta$. A fita é lida símbolo por símbolo uma única vez, não podendo ser alterada após o início da computação.

A cabeça de leitura da fita de entrada inicialmente aponta para o primeiro símbolo. Como Σ não contém o símbolo branco, a primeira ocorrência deste na fita marca o fim da entrada. As pilhas apresentam-se inicialmente vazias.

A computação da entrada inicia conforme as regras da função de transição δ que determina de acordo com o estado atual, o símbolo lido da pilha1 e o símbolo lido da pilha2, qual será o próximo estado, e os símbolos gravados na pilha1 e na pilha2. • Os símbolos

lidos ou gravados podem ser vazios, sendo que neste caso a operação de leitura ou escrita não modifica o conteúdo das pilhas ou da entrada.

O símbolo da posição seguinte é lido e tratado de acordo com a função de transição, até que alguma transição leve a um estado de parada.

Se não houver uma transição para um dado símbolo, a computação é parada por indefinição, o que significa que a palavra de entrada não é reconhecida por aquele programa. Ao final da execução de um Autômato de Duas Pilhas, isto é, quando um dos estados finais foi atingido, a computação da entrada em uma Autômato de Duas Pilhas será a sequência das configurações obtidas pelas transições.

Formalmente, uma configuração de um Autômato de Duas Pilhas definido como $MA = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ é qualquer elemento do conjunto: $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^*$.

Logo uma configuração válida de um Autômato de Duas Pilhas MA pode ser, por exemplo, (q, w, σ, ρ) , que significa que:

- q o estado atual de MA é q ;
- w representa o conteúdo ainda não lido da palavra de entrada de entrada;
- σ representa o conteúdo da pilha1;
- ρ representa o conteúdo da pilha2;

A computação gerada pelo conjunto de configurações pode ser obtida pela definição da relação entre as configurações de um Autômato de Duas Pilhas MA.

Existência de três ou mais pilhas não significa necessariamente que estas pilhas serão usadas em paralelo. Isto é bastante evidente para pilhas de parâmetros e outras pilhas que sejam usadas para dados, pois normalmente a ULA só tem acesso direto à pilha de dados, e para que qualquer operação seja feita sobre os dados de uma das pilhas citadas anteriormente, o dado tem que ser transferido de sua pilha original para a pilha de dados. Isto acaba por gerar uma considerável quantidade de sobrecarga de transferência de dados no sistema, pois o dado que é alocado fora da pilha de dados foi copiado originalmente da pilha de dados e, quando este tem de ser usado novamente, precisa ser copiado de volta para a pilha de dados novamente.

Quantidade de pilhas	Vantagens	Desvantagens
1	Hardware simplificado	Desorganização entre dados e endereços Requer uma pilha maior
2	Fluxo de dados separado do fluxo de endereços de retorno Operações lógico/aritméticas realizadas em paralelo a chamadas e retornos de função	Controle de duas pilhas distintas
3 ou mais	Pilhas exclusivas para determinado tipo de dado Melhor organização	Controle de três ou mais pilhas distintas Overhead Aumento expressivo de hardware

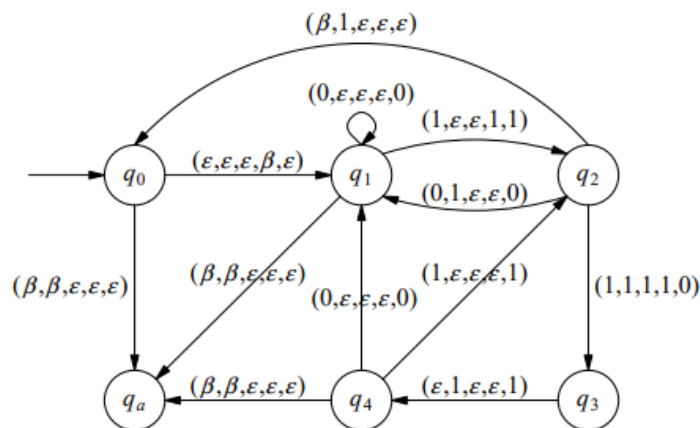
6. Dois exemplos

O Exemplo A

Descreve um Autômato de Duas Pilhas que reconhece números binários e remove símbolos 1, ou seja, 1 sucedido por outro 1 substitui-se por 0. Neste exemplo o símbolo β é utilizado para indicar o final de uma cadeia de caracteres. Por exemplo, a palavra de entrada é concatenada com β e gravada na fita de entrada, sendo que quando o símbolo β for lido da fita, significa que a entrada foi totalmente lida. Semelhantemente, β pode ser utilizado para verificar se uma das pilha está vazia, como no Exemplo 2.5, bastando gravar β no topo da pilha antes de qualquer outro símbolo.

Seja um Autômato de Duas Pilhas $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ onde:

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_a\}$ $\Sigma = \{0, 1, \beta\}$ $\Gamma = \{0, 1, \beta\}$ δ é definida pelo diagrama de estados da Figura q_0 é o estado inicial $F = \{q_a\}$ é o conjunto de estados finais, cujo único estado é o estado de aceitação.

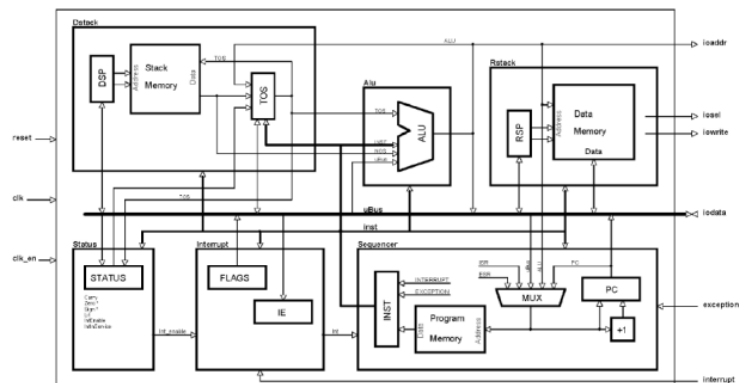


O Exemplo B

A máquina Microcore

Microcore é uma máquina de duas pilhas, com arquitetura harvard primariamente desenvolvida para executar as primitivas Forth com instruções de 8 bits. Ambas pilha de dados e pilha de retorno são alocadas na RAM e podem ser acessadas separadamente, contando ainda com uma memória de programa ROM. Como mostrado na figura abaixo, a arquitetura básica da máquina contém os módulos de pilha de dados, ULA, pilha de retorno, caminho de dados central (uBus) e Tos, sendo que mais funções podem ser adicionadas ao sistema conforme a necessidade do projeto.

A máquina Microcore:



7. Equivalência com a Máquina de Turing

Máquina de Turing > Autômato com Duas Pilhas: A estrutura de fita da Máquina de Turing é simulada usando as duas pilhas como segue: a pilha 1 simula o conteúdo da fita à esquerda da cabeça da fita, e a pilha 2, o conteúdo à direita;

Autômato com Duas Pilhas > Máquina de Turing: A fita e as duas pilhas do Autômato com Duas Pilhas são simuladas, usando a fita da Máquina de Turing, como segue:

- A palavra de entrada corresponde às primeiras posições da fita da Máquina de Turing;
- A pilha 1 corresponde a todas as células anteriores a palavra de entrada;
- Analogamente, a pilha 2 corresponde a todas as células posteriores a palavra de entrada;

Portanto, o formalismo Máquina de Turing pode ser simulado pelo formalismo Autômato com Duas Pilhas e vice-versa. Logo, são formalismos equivalentes

Referências

<https://repositorio.unisc.br/jspui/bitstream/11624/1034/1/Gerson%20Miguel%20Beckenkamp.pdf>

<https://www.studocu.com/pt-br/document/universidade-federal-do-pampa/teoria-da-computacao/automato-de-duas-pilhas/7296867>

<http://repositorio.unesc.net/bitstream/1/8133/1/LEANDRO%20JUSTIN%20VIEIRA.pdf>

https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=459EInmoh2cC&oi=fnd&pg=PR1&dq=M%C3%A1quina+de+duas+pilhas&ots=hrBhXp9xYJ&sig=Ti_5diGBsFijt_W_9YZCC3OA0n0#v=onepage&q&f=false

https://web.archive.org/web/20180423183521id_/http://revistaeletronica.unicruz.edu.br/index.php/revistaeletronica/article/viewFile/5420/1158

<http://debora.wait4.org/tc.pdf>

<https://docplayer.com.br/53818194-Teoria-da-computacao-maquinas-universais-maquina-com-pilhas.html>

<http://www.ybadoo.com.br/tutoriais/tco/09/TCO09.pdf>