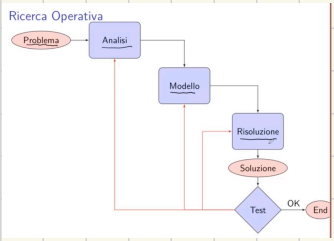
L1 • INTRODUZIONE

La ricerca operativa consente tramite l'approccio scientifico di risolvere problemi complessi.

FASI DELLA RICERCA OPERATIVA >

1. Viene presentato un Problema da risolvere.
2. Viene fatta un'analisi del problema
3. Viene creato un modello matematico per poter risolvere il problema
4. Si implementa il problema
5. Si Testa la soluzione, eventualmente ripartendo dal punto 2.



RANKING DELLE SOLUZIONI > (INTRO)

Fatta l'analisi, si otterranno un insieme S_A di Soluzioni Accettabili
L'obiettivo è di

- Classificarle
- Scegliere la migliore in funzione di vari parametri.

RANKING DELLE SOLUZIONI > CLASSIFICAZIONE

In maniera astratta, le soluzioni vengono classificate da una funzione f: detta funzione obiettivo.

$f(x) \;\; \wedge \; x \in S_A$

RANKING DELLE SOLUZIONI > SCELTA

La scelta viene invece decisa come il massimo o minimo della funzione obiettivo.

DEF. FORMALE >

$x^* \in S_A$ tale che $f(x^*) = \max\{f(x) \in S_A\}$

FUNZIONE OBIETTIVO > VARIABILI DI CONTROLLO

A seconda della complessità del problema, si avranno più parametri nella funzione obiettivo $f(x)$.

$f(x_1, x_2, \dots x_n)$ con $x_1, x_n \in$ a dom. potenzialmente diversi.

Servono a dettare dei parametri per formulare la soluzione.

FUNZIONE OBIETTIVO > VINCOLI

Sono delle funzioni aggiuntive che aggiungono dei limiti alle soluzioni accettabili.

In particolare, le funzioni avranno le variabili di controllo e dovranno soddisfare una condizione ($<, \leq, =, \geq, >$) con una determinata costante:

DEF. FORMALE >

Data $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è soggetta a

$g_1(x_1, x_2, \dots x_n) \leq \vee \geq \vee = b_1$ Vincolo 1

$g_2(x_1, x_2, \dots x_n) \leq \vee \geq \vee = b_2$ // 2

$g_n(x_1, x_1, \dots x_n) \leq \vee \geq \vee = b_n$ Vincolo n

---

PROGRAMMAZIONE LINEARE >

È un "subset" della ricerca operativa che applica le funzioni obiettivo con delle specificità:

- FUNZIONE OBIETTIVO

  Deve essere una somma di prodotti nella forma:

  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n$

- FUNZIONI DEI VINCOLI

  Devono essere delle somme di prodotti nella forma:

  $g_{1}(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}) \Rightarrow a_{11} \cdot x_{11} + a_{12} \cdot x_{12} + \dots a_{1n} \cdot x_{1n} \leq = \geq b_m$

  $g_{2}(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}) \Rightarrow a_{21} \cdot x_{21} + a_{22} \cdot x_{22} + \dots a_{2n} \cdot x_{2n} \leq = \geq b_m$

  $g_{m}(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}) \Rightarrow a_{m1} \cdot x_{m1} + a_{m2} \cdot x_{m2} + \dots a_{mn} \cdot x_{mn} \leq = \geq b_m$

- DOMINIO VAR. CONTROLLO Deve essere $\mathbb{R} \vee \mathbb{R}^+ \vee \mathbb{Z}^+ \vee \{0,1\}$

L2

ESEMPIO DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Esempio (toy problem)
Una gita in montagna

Un gruppo di amici dovendo fare una gita ha deciso di mettere cibi e bevande in un unico zaino da 10 Kg. Lo zaino può essere riempito con

- Cioccolata (conf. 500 g.)
- Succhi di frutta (bott. da 1 l.)
- Lattine di birra (da 0.33 l.)
- Panini imbottiti (da 100 g.)
- Acqua minerale (bott. da 1 l.)
- Pacchi di biscotti (conf. 500 g.)

Dopo un'indagine tra i partecipanti alla gita (si poteva dare un voto da 1 a 100 ad ogni prodotto) sono stati determinati i seguenti punteggi.

Prodotto	Punti	Prodotto	Punti
Cioccolata	10	Panini imbottiti	20
Succhi di frutta	30	Acqua minerale	20
Lattine di birra	6	Pacchi di biscotti	8

"Gli step per definire i modelli lineari non sono ben definiti. È come andare in bicicletta ecc."

(1) Definisco le variabili di controllo

x_1 = n° di cioccolata $\quad x_2$ = succhi di frutta

x_3 = " " panini $\quad x_4$ = acqua minerale

x_5 = lattine di birra $\quad x_6$ = pacchi di biscotti

(2) Funzione obiettivo

Sommatoria dei punti:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_6) = 20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + \overbrace{20}^{\text{Punti}} \cdot x_3 + 20 \cdot x_4 + 6 \cdot x_5 + 8 \cdot x_6$$

(3) Def. Vincoli

$$g_1(x_1, \dots x_6) = \frac{1}{2} x_1 + x_2 + \frac{1}{10} x_3 + x_4 + \frac{1}{3} x_5 + \frac{1}{2} x_6 < \overbrace{10}^{< 10 \text{ kg}}$$

$x_1 \dots x_6 \in \mathbb{Z}^+$

$x_1 \geq 2 \quad x_2 \geq 2$

$x_5 \geq 6 \quad x_3 \geq 10$

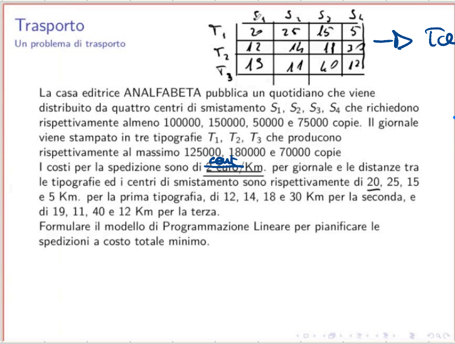
$x_6 \geq 2$

Per non scontentare nessuno si è deciso di portare almeno:
- 2 confezioni di cioccolata;
- 2 bottiglie di succo di frutta;
- 6 lattine di birra;
- 10 panini imbottiti;
- 2 conf. di biscotti.

MODELLI > GESTIONE TRAMITE MATRICI

A volte si possono montare intere matrici contenenti scalari e variabili di controllo:

ES:



	S_1	S_2	S_3	S_4
T_1	20	25	15	5
T_2	12	14	18	30
T_3	19	11	40	12

La casa editrice ANALFABETA pubblica un quotidiano che viene distribuito da quattro centri di smistamento S_1, S_2, S_3, S_4 che richiedono rispettivamente almeno 100000, 150000, 50000 e 75000 copie. Il giornale viene stampato in tre tipografie T_1, T_2, T_3 che producono rispettivamente al massimo 125000, 180000 e 70000 copie.
I costi per la spedizione sono di ~~2 euro~~ cent/Km. per giornale e le distanze tra le tipografie ed i centri di smistamento sono rispettivamente di 20, 25, 15 e 5 Km. per la prima tipografia, di 12, 14, 18 e 30 Km per la seconda, e di 19, 11, 40 e 12 Km per la terza.
Formulare il modello di Programmazione Lineare per pianificare le spedizioni a costo totale minimo.

→ Tabella distanze

- La Funzione deve restituire il costo al quale deve essere applicato il minimo.

(0) Variabili di controllo: possiamo rappresentarle come matrici

- Scalari $c_{ij} \Rightarrow$ Distanza tra T_i e S_j
- Variabili $x_{ij} \Rightarrow$ Giornali tra T_i e S_j

$$d = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 15 & 5 \\ 12 & 14 & 18 & 30 \\ 19 & 11 & 40 & 12 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \dots, & x_{14} \\ \vdots & & & \\ x_{31} & x_{32} & \dots & x_{34} \end{pmatrix}$$

Mat. delle dist   Mat. delle variabili

1) Funzione obiettivo

$$f(x_{11}, x_{12} \dots) = \left[\sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=4} d_{ij} \cdot x_{ij} \right] \cdot \frac{2}{100}$$

al quale applichiamo il min

2) Vincoli $\quad x_{ij} \in \mathbb{N} \ \forall i, j$

- S_1 richiede almeno 100'000 tra tutte le sped.

$$g_1(x_{11}, x_{21}, x_{31}) = \sum_{i=1}^{i=3} \underbrace{x_{i1}}_{\text{quelle che possono per } S_1} \geq 100'000$$

- S_2, S_3, S_4 come il punto di prima

$$g_2(x_{12}, x_{22}, x_{32}) = \sum_{i=1}^{i=3} x_{i2} \geq 150'000 \ \wedge \ \sum_{i=1}^{i=3} x_{i3} \geq 50'000 \ \wedge \ \sum_{i=1}^{i=3} x_{i4} \geq 75'000$$

- Massimi Tipografie

$$\sum_{j=1}^{j=4} x_{1j} \leq 125'000 \ \wedge \ \sum_{j=1}^{j=4} x_{2j} \leq 180'000 \ \wedge \ \sum_{j=1}^{j=4} x_{3j} \leq 70'000$$

MODELLI > ASSEGNAMENTO

Assegnamento
Un problema di assegnamento

In un reparto di un'azienda meccanica ci sono cinque operai specializzati $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ che operano su cinque macchine $\{A, B, C, D, E\}$. Le macchine producono gli stessi pezzi, ma sono di modelli diversi, e gli operai hanno abilità differenti per ognuna di esse. Ogni combinazione operaio-macchina risulta quindi in un diverso livello di produttività, espresso in pezzi all'ora nella seguente matrice.

$$p_{ij} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 7 & \boxed{9} & 2 & 1 \\ 8 & \boxed{9} & 12 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 9 & \boxed{8} & 8 \\ \boxed{9} & 18 & 2 & 4 & 3 \\ 9 & 9 & 4 & 5 & \boxed{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

Si vuole assegnare ogni operaio ad una ed una sola macchina in modo da massimizzare la produttività totale. Formulare il programma lineare corrispondente.

- La funzione deve restituire la produttività totale su cui andare a sommare

(0) Variabili => tramite matrice binaria

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{15} \\ \vdots & & & \\ x_{51} & x_{52} & \dots & x_{55} \end{pmatrix} \quad \text{con } x_{ij} \in \{0,1\}$$

(1) Funzione obiettivo

$$f(x\dots) = \sum_{i=1}^{i=5} \sum_{j=1}^{j=5} d_{ij} \cdot x_{ij} \quad \text{con max}$$

(2) Vincoli

$$\sum_{i=1}^{i=5} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \text{ da } 1 \text{ a } 5$$

$$\sum_{j=1}^{j=5} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \text{ — —}$$

Sono sotto-tipi dei problemi di Trasporto

MODELLI > MULTIPERIODO

I modelli multiperiodo richiedono di tracciare un elemento che evolve nel tempo.

ES:

Modelli multiperiodo

Produzione con magazzino

Un'azienda deve pianificare la produzione di un prodotto per i prossimi 4 mesi. Non ci sono giacenze in magazzino all'inizio del periodo e non ce ne devono essere alla fine dei 4 mesi. La domanda mensile prevista per il prodotto è di 120 ton., 160 ton., 300 ton. e 200 ton. rispettivamente. La capacità produttiva mensile è 140 ton., 150 ton., 140 ton. e 160 ton. rispettivamente ad un costo di 10 euro/ton.. In caso di necessità è possibile produrre in straordinario aumentando la capacità mensile di (al più) 50 ton., 75 ton., 70 ton. e 80 ton. rispettivamente.
La produzione straordinaria ha un costo addizionale di 6 euro/ton.. Le eventuali giacenze a fine mese costano 5 euro/ton..
Formulare il modello di programmazione lineare che permette di pianificare la produzione a costo minimo, garantendo di soddisfare la domanda prevista.

(0) Variabili: x_i con i che è la enumerazione del mese (1, ..., 4) tonnellate prodotte
$S_i \Rightarrow$ Tonnellate prodotte con straord.
$y_i \Rightarrow$ Giacenza a fine mese i.

(1) Funzione obiettivo:

$$\min f(x_1, x_2, \dots) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 10 \cdot \sum_{i=1}^{i=4} x_i + \\ +16 \cdot \sum_{i=1}^{i=4} S_i + \\ +5 \cdot \sum_{i=1}^{i=4} y_i \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \text{Tonnellate prodotte} \\ \rightarrow \text{Sotto straord.} \\ \rightarrow \text{Giacenze} \end{array}$$

(2) Vincoli

- $x_1 \geq 140$, $x_2 \geq 150$, $x_3 \geq 140$, $x_4 \geq 160 \rightarrow$ Capacità prod.
- $S_1 \leq 50$, $S_2 \leq 75$, $S_3 \leq 70$, $S_4 \leq 80 \rightarrow$ Capacità max sotto straord.

- $$\left.\begin{array}{l} x_1 + S_1 \geq 120 \\ S_2 + x_2 + y_2 \geq 160 \\ S_3 + x_3 + y_3 \geq 300 \\ S_4 + x_4 + y_4 \geq 600 \end{array}\right]$$

Domanda mensile prevista. Si contano giacenze e straord. Nella prima non ci vanno giacenze

Così non vanno bene. (forse) ci vogliono dei modi per legare input (x_i) e out (y_i)

- $$\left.\begin{array}{l} x_1 + S_1 = 120 + y_1 \\ y_1 + x_2 + y_2 = 160 + y_2 \\ y_2 + x_3 + y_3 = 300 + y_3 \end{array}\right] \rightarrow 1° \text{ mese senza giacenza}$$

$y_3 + x_4 + y_4 = 600 + y_4$
↳ giacenza finale deve essere 0.

14 • ALTRI MODELLI

MODELLI > MIN-MAX $z = \max[\min \dots] \to \max z = y$ $\dots \geq y$

Quando la funzione obiettivo restituisce il massimo del min basta assegnare un'ausiliare y che conterrà il val generico

ES:

Un call-center dispone di 10 operatori da suddividere in quattro squadre. Per ogni ogni operatore è stata misurata la rapidità nell'evadere chiamate, in termini di chiamate evase al minuto (in media).

Operat. i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Velocità v_i	3.5	6	7	2.8	1.5	1.5	3	4	6.5	4

Si vogliono assegnare gli operatori a quattro squadre formate da non meno di due e non più di quattro persone in modo tale che

- ogni squadra sia costituita in ~~modo da poter evadere almeno~~ **otto** chiamate/minuto;
- la velocità totale della squadra "più lenta" deve essere massima possibile.

Formulare il modello di programmazione lineare per suddividere in squadre gli operatori rispettando i requisiti richiesti.

(0) Variabili di controllo:

x_{ij} con - $i \to$ Id operatore
- $j \to$ squadra $\{1,2,3,4\}$

$\hookrightarrow$ bool per dire se appartiene o no alla squadra.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{14} \\ x_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ x_{10\,1} & x_{10\,2} & \dots & x_{10\,4} \end{pmatrix}$$

(1) Funzione obiettivo

$\max f = [\min\{v_1, v_2, v_3, v_4\}]$ ✗ No! Non usare max di min perché non è lineare

def. var ausiliaria 'y' contenente il min $\max f = y$ con $\sum_{i=1}^{i=10} v_i x_{ij} \geq y$

(2) Vincoli

Definisco la variabile ausiliaria

$V_j = \sum_{i=1}^{i=10} x_{ij} \to$ Somma dei componenti della squadra i

- $x_{ij} \in \mathbb{N}$
- "Non meno di due" e "Non più di 4"
  $V_j \geq 2 \wedge V_j \leq 4 \; \forall j \in \{1,2,3,4\}$
- "Almeno 8 chiamate al min"
  $\sum_{i=1}^{i=10} x_{ij} \cdot v_i \geq 8 \; \forall j \in \{1,2,3,4\}$
- (Implicito) al più 1 persona per squadra
  $\sum_{j=1}^{j=4} x_{ij} \leq 1 \; \forall j \in \{1,2,\dots,10\}$

RAPPRESENTAZIONI LOGICHE > CON BOOLEANI

Nei problemi di programmazione lineare, è possibile incappare nelle operazioni logiche $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$. Usando variabili booleane è possibile rappresentare:

- **OR "V"**
  Somma delle variabili booleane come disequazione ≥ 1
  $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq 1$

- **NOT "¬"**
  Sottrazione del valore 1 meno la variabile booleana.
  $1 - x_n$

- **AND "Λ"**
  Somma di tutti gli elementi che (una tra le 2):
  - deve essere uguale a cardinalità $\Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_n = |X|$
  - Tolto il num di elementi −1 deve essere 1 $\Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_n - K - 1 = 1$

- **IMPLICAZIONE "→"**
  Il termine che sta a sx ≤ termine che sta a dx

$x_1 \leq x_2$	$x_1 + x_2 \leq x_3$	$x_1 + x_2 + x_3 - 2 \leq x_4$
$x_1 \rightarrow x_2$	$x_1 \vee x_2 \rightarrow x_3$	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \rightarrow x_4$

RAPPRESENTAZIONI LOGICHE > BOOLEANI + QUANTITÀ

Quando si definiscono variabili di quantità legate a booleani, bisogna fare il binding per evitare casi anomali

1. Definire una costante M molto grande
2. Per ogni coppia $x_i \; y_i$ con x_i = quantità e y_i = bool
   2.1 Definire un vincolo come $x_i \leq M \cdot y_i$
   così facendo non ci saranno casi anomali

RAPPRESENTAZIONI LOGICHE > CASO D'USO

Problemi con vincoli logici
Produzione con costi fissi

Una ditta ha la possibilità di attivare, per l'anno corrente, la produzione di quattro tipi di prodotti A, B, C e D. Per ogni tipo di produzione, se attivata, la ditta si impegna a produrre un quantitativo minimo pari rispettivamente a 1000, 1500, 3000 e 2000 unità. La produzione di A, B, C e D richiede un costo fisso per l'attivazione delle rispettive linee di produzione ed una quantità di forza lavoro per ogni unità prodotta, ed ogni unità venduta fornisce un profitto, come specificato dalla seguente tabella (in euro).

Prodotto	Costo fisso	Forza lavoro unit.	Profitto unit.
A	14500	10	50
B	10000	15	60
C	8000	5	55
D	9000	14	80

La ditta dispone per l'anno in corso di 200000 unità complessive di forza lavoro. Inoltre i committenti per la quale essa lavora richiedono che nel caso venga attivata la produzione di A venga anche prodotto almeno uno tra C o D, almeno nei quantitativi minimi sopra indicati.
Formulare il programma lineare per decidere le produzioni da attivare e pianificarne i quantitativi al fine di massimizzare il saldo profitti-costi.

- Si vuole il max il "saldo profitti"

(1) Definisco variabili di controllo

$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \in \{0,1\} \to$ Servono a dire se si attiva o meno A, B, C, D

$\{q_1, q_2, q_3, q_4\} \in \mathbb{N} \to$ Servono a dire le unità prodotte

(2) Definisco la funzione obiettivo

$$f(q_1,\dots,q_4, x_1,\dots,x_4) = (50\cdot q_1 + 60 q_2 + 55 q_3 + 80\cdot q_4) + \underbrace{-(14500 x_1 + 10000 x_2 + 800 x_3 + 9000 x_4)}_{\text{i costi sono tolti alla fine per rispettare il modello lineare}}$$

max i profitti

(3) Vincoli

- $q_1 \geq 1000 \cdot x_1$ • $q_2 \geq 1500 \cdot x_2$ • $q_3 \geq 3000 \cdot x_3$ • $q_4 \geq 2000 \cdot x_4$
- $g(q_1, q_2, q_3, q_4) = 10\cdot q_1 + 15\cdot q_2 + 5\cdot q_3 + 14\cdot q_4 \leq 200000$
- Sarebbe $A \to C \cup D$

  $x_1 \leq x_3 + x_4$

- Binding valori-booleani con M costante
  - $q_1 \leq M \cdot x_1$
  - $q_2 \leq M \cdot x_2$

  $q_4 \leq M \cdot x_3$

METODO GRAFICO › (INTRO)

Dato un modello lineare generico a 2 incognite:

$c_1 x_1 + c_2 x_2$ con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ e c_1, c_2 costanti $\in \mathbb{R}$

Con una serie di vincoli nella forma: $f(x_{i1}, x_{i2}) \leq V \geq V = b_i$

Geometricamente, si possono definire l'insieme delle soluzioni S_a

$$S_a = \{ (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \wedge c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 \geq | \leq | = b_i \}$$

Ovvero l'insieme delle coppie ordinate che soddisfano le condizioni

---

METODO GRAFICO ›

In poche parole, trovare la soluzione ottimale del programma lin. con la funz. obiettivo $\max z = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2$

Significa studiare le curve di livello (in $\mathbb{R}^2$ il fascio di rette che interseca l'area delle soluzioni S_a)

ES: Studiare le curve di livello del seguente modello:

$\max \ z = 8x_1 + 3x_2$ vincoli

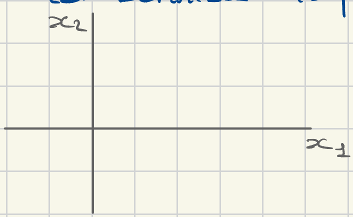
$4x_1 + 5x_2 \leq 10$

$4x_1 + 10x_2 \leq 15$

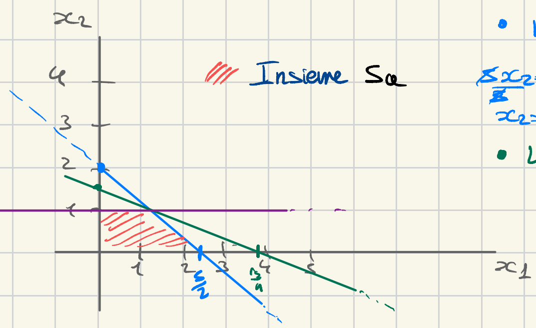
$x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

(1) Definisco il piano con $x_1 = x$, $x_2 = y$



(2) Traccio le rette dei vincoli per definire i "limiti" delle soluzioni accettabili (con $\geq$ e $\leq$ → "=")



• $4x_1 + 5x_2 \leq 10 \Rightarrow 4x_1 + 5x_2 = 10$

$\frac{\cancel{5}x_2}{\cancel{5}} = \frac{10}{5}$, $x_2 = 2$

x_1	x_2
0	2

x_1	x_2
$\frac{5}{2}$	0

$\frac{\cancel{4}x_1}{\cancel{4}} = \frac{10}{4}$ $\frac{5}{2}$

• $4x_1 + 10x_2 \leq 15$

$\frac{\cancel{10}x_2}{\cancel{5}} = \frac{15}{\cancel{5}}$ $\frac{3}{2}$

x_1	x_2
0	$\frac{3}{2}$

$\frac{\cancel{4}x_1}{\cancel{4}} = \frac{15}{4}$

x_1	x_2
$\frac{15}{4}$	0

$x_2 \leq 1$ → orizzontale

$x_1, x_2 \geq 0$ 1° quad.

METODO GRAFICO

ES (CONTINUAZIONE)

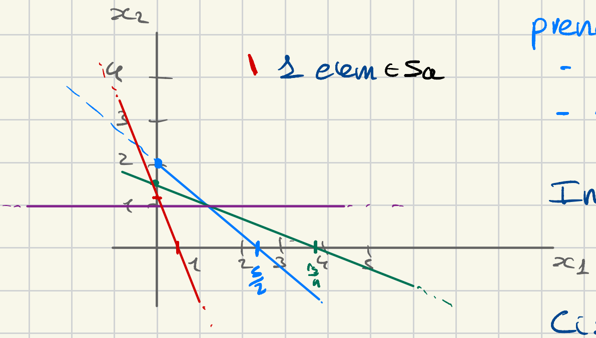
(3) Determino 1 retta generata dalla funz. obiettivo

$\max z = 8x_1 + 3x_2$ Saranno in forma $k = 8x_1 + 3x_2$

prendo un k a caso $k = 4$

- $4 = 3x_2 \to \frac{4}{3} = x_2$
- $4 = 8x_1 \to \frac{1}{2} \frac{4}{8} x_1$

x_1	x_2
0	$\frac{4}{3}$
$\frac{1}{2}$	0



In questo caso, ci serve il max per def. della funzione obiettivo.

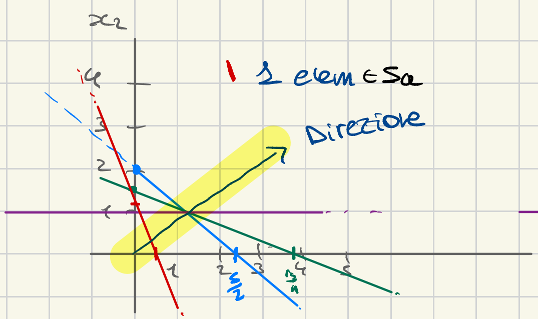
Ci serve quindi "spostare" la retta rossa

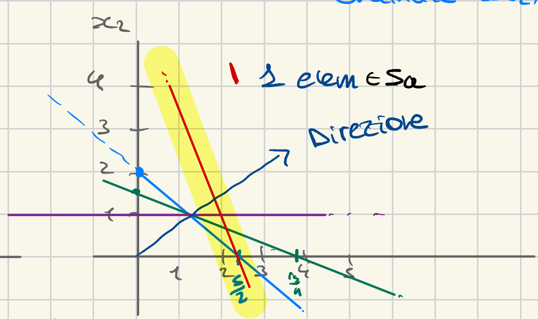
(4) Determino la "direzione" del vettore delle soluzioni e determino la miglior soluzione

4.a) Direz. del vet

$\max z = 8x_1 + 3x_2$ ovvero $\vec{v} = (8, 3)$

- $8 > 0$ quindi è positiva per le ascisse (x_1)
- $3 > 0$ 〃 〃 〃 ordinate (x_2)





Da cui riusciamo a intuire che il punto massimo in z è $(\underset{x_1}{0}, \underset{x_2}{\frac{5}{2}})$

PROGR. LINEARE > FORMA STANDARD

È un sotto tipo del programma lineare con
- calcolo del massimo. $\max z = \sum_{i=1}^{i=n} c_i x_i$
- vincoli di sola eguaglianza $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + = b_i$
- 1 vincolo in cui tutte le variabili devono essere positive $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

PL. GENERICO -> F. STANDARD >

- **SE È MIN**

$$\min z = \sum_{i=1}^{i=n} c_i x_i \iff \max \bar{z} = - \sum_{i=1}^{i=n} c_i x_i$$

nego

- **ELIMINAZ. VARIABILI NEG.** $x_i \leq 0 \iff x_i = -\bar{x}_i \quad \bar{x}_i \geq 0$
  (che sono sempre negative) nego

- **ELIMINAZIONE VARIABILI LIBERE**
  (che possono variare)

$$x_i \iff x_i = y_i - w_i \qquad y_i, w_i \geq 0$$

$$-2 = 3 - (5) \qquad 3, 5, \geq 0$$

Sostituisco con differenza di 2 variabili positive.

- **ELIMINAZIONE DISUGUAGLIANZE**

Si sostituisce la disuguaglianza aggiungendo 1 variabile e cambiando in uguaglianza

- con $\leq$

$$\sum_{i=1}^{i=n} c_i x_i \leq b \iff \sum_{i=1}^{i=n} c_i \cdot x_i + y_1 = b$$

- con $\geq$

$$\sum_{i=1}^{i=n} c_i x_i \geq b \iff \sum_{i=1}^{i=n} c_i \cdot x_i - y_1 = b$$

L7 •

PL. GENERICO → F. STANDARD

ES Trasformare il seguente in un programma lineare standard

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= 4x_1 + 5x_2 - x_3 \\
\text{soggetto a}\quad 2x_1 + x_3 &\geq 7 \\
x_1 + x_2 &\leq 16 \\
x_1 + 2x_2 &= 8 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 &\ \text{libera.}
\end{aligned}
$$

(1) Trasformo il min

$\min z \rightarrow \max z = -4x_1 - 5x_2 + x_3$

(2) Trasformo le variabili negative

$x_2 = -\overline{x}_2 \quad \overline{x}_2 \geq 0 \qquad x_3 = x_3^+ - x_3^- \quad x_3^+ x_3^- \geq 0$

$= \max z = -4x_1 - 5\overline{x}_2 + x_3^+ - x_3^-$

(3) Trasformo disug.

- $2x_1 + x_3^+ - x_3^- \geq 7$

  $2x_1 + x_3^+ - x_3^- - y_1 = 7$

- $x_1 + 2\overline{x}_2 \leq 16$

  $x_1 + \overline{x}_2 + y_2 = 16$

FORMA STANDARD > FORMULA

In formule la forma standard è descrivibile come:

$$\max\{z = \underbrace{{}^t c \cdot x}_{(1)} \mid \underbrace{Ax = b}_{(2)} \land \underbrace{x \geq 0}_{(3)}\}$$

Dove

- **[1]** ${}^t c \cdot x$ indica tutte le soluzioni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con valori reali per cui $\underbrace{(c_1, c_2, \dots, c_n)}_{\text{Costanti della funz. obiettivo}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = z \in \mathbb{R}$
- **[2]** $Ax = b$ Filtra per tutti i valori che soddisfano i vincoli

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice delle costanti dei vincoli}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Incognite (var di controllo)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\text{Vettore dei Termini noti (costanti dei vincoli)}}$$

- **[3]** $x \geq 0$ Tutti i valori delle incognite dovranno essere maggiori di 0.

DIREZIONI AMMISSIBILI DI CRESCITA >

Una soluzione $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ si dice ottima sse **NON esiste** un altro vettore $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$:

- $A \cdot y = 0$ Le costanti dei vincoli moltiplicate per y danno l'origine
- ${}^t c \cdot y > 0$ Il prodotto scalare (f. obiettivo) con y è > 0
- $\forall_i \; x_i = 0 \rightarrow y_i \geq 0$ L'i-esimo elemento di y è maggiore/uguale a 0 quando l'iesimo di x è valorizzato a 0.

Se **non esiste** l'y $\bar{x}_i$ è **punto di ottimo**

Se **esiste y**, si è in grado di **determinare** le **direzioni** ammissibili di crescita per poter **trovare** una **nuova soluz. ottimale**

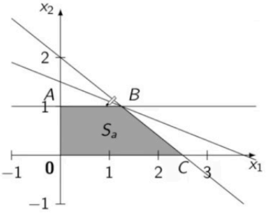
L8 •

2

DIREZIONI AMMISSIBILI DI CRESCITA >

ESEMPIO: "Dato l'esempio di prima con modello trasformato in forma standard. Determinare se
$$x = (\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 1)$$
è punto di massimo ed eventualmente trovarne un altro.

$\max\ z = 8x_1 + 3x_2$	$\max\ z = 8x_1 + 3x_2$
soggetto a $4x_1 + 5x_2 \le 10$	soggetto a $4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10$
$4x_1 + 10x_2 \le 15$	$4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15$
$x_2 \le 1$	$x_2 + x_5 = 1$
$x_1, x_2 \ge 0.$	$x_1, \ldots, x_5 \ge 0.$



$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 1)$

(0) Mi determino i valori per le dimensioni mancanti
- $x_2 + x_5 = 1 \Rightarrow 1 + x_5 = 1 \Rightarrow \underline{x_5 = 0}$
- $4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \Rightarrow 4 + 10 + x_4 = 15 \Rightarrow \underline{x_4 = 1}$
- $4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow 4 + 5 + x_3 = 10 \Rightarrow \underline{x_3 = 1}$

(1) Definisco le condizioni di esistenza di y

Devo trovare $y \in \mathbb{R}^5$ tale che

$$\left.\begin{array}{l} y_2 + y_5 = 0 \\ 4y_1 + 10y_2 + y_4 = 0 \\ 4y_1 + 5y_2 + y_3 = 0 \end{array}\right] A \cdot y = 0$$

$$8y_1 + 3y_2 > 0 \quad]\ {}^t c \cdot y = 0$$

Usando i valori di x_3, x_4, x_5 del punto 1):

$x_5 = 0$ quindi $\underline{y_5 \ge 0}$

(3) Provo a trovare una y "a caso" (gli step verranno def. dopo)

$y_1 = 1,\ y_2 = -1$
- $y_5 = 1$ • $y_3 = 1$
- $y_4 = 6$

Soddisfa $A \cdot y = 0$, $y_5 \ge 0$ ✓

$8 - 3 > 0$ ✓ Soddisfa ${}^t c \cdot y > 0$

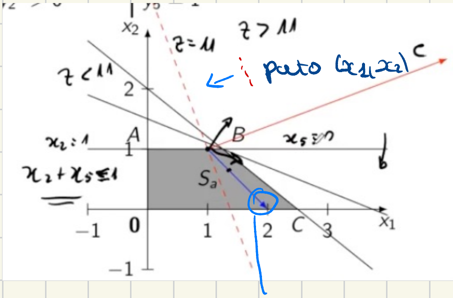
il punto dato all'inizio non è ottimo.

DIREZIONI AMMISSIBILI DI CRESCITA

ES (CONTINUAZIONE):

(H) Direzione del vettore

trovata la y come $(1,-1,1,6,1)$ Noto come abbia direzione y
$y_1 \; y_2$



Direzione di y

INSIEMI CONVESSI

Dati 2 vettori $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^n$, e un $\alpha \in [0,1]$ allora $f(\alpha) = V + \alpha \cdot (U - V) = \alpha \cdot U + (1-\alpha) V$ è una combinazione lineare convessa.

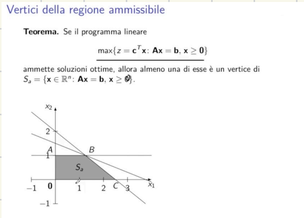
Un insieme delle soluzioni accettabili è convesso sse tutte le combinazioni lineari convesse $\in S_a$

Dato un punto $x \in S$, si dice vertice se NON esistono $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^n$ diversi $U \neq V$ con un $\alpha \in (0,1)$
$x = U \cdot \alpha + (1-\alpha) V$ $\quad \nexists \; U, V \in \mathbb{R}^n \quad U \neq V$

$x = \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} \cdot V$ → alternativa.

VERTICI REGIONE AMMISSIBILE

Se un programma lineare ammette soluzioni, almeno 1 è un vertice.



VERIFICARE SE UN PUNTO È VERTICE >

PREMESSA >

Dato un vettore soluzione $x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ del sistema lineare $A \cdot x = b$ che rappresenta il programma lineare in Forma Standard.

Il vettore x è vertice sse presi i vettori colonna $A_1, \dots A_n$ con indice pari agli indici di x quando $x_i \neq 0$ sono tra loro linearmente indipendenti [vedere MDA6-2]

ES: Dato il programma lineare $\max z = 8x_1 + 3x_2$ $x_1, x_2 \geq 0$ con vincoli $\cdot$ $4x_1 + 5x_2 \leq 10$, $4x_1 + 10x_2 \leq 15$, $x_2 \leq 1$ e $x_1, x_2 \geq 0$. Verificare che i seguenti siano punti di vertice

- $A = (1, 1, 1, 1, 0)$
- $B = (\frac{5}{4}, 1, 0, 0, 0)$
- $C = (\frac{5}{2}, 0, 0, 5, 1)$

(0) Converto in modello lineare standard.

(0.a) È già in max (0.b) le variabili sono entrambe positive.

(0.c) Converto i vincoli

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 \leq 10 &\rightarrow 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 10x_2 \leq 15 &\rightarrow 4x_1 + 10x_2 + 0 + x_4 = 15 \\ x_2 \leq 1 &\rightarrow x_2 + x_5 = 1 \end{aligned}$$

(1) Verifico i punti:

(1.0) formo la matrice

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{array}$$

1.a) A (punto) $= (\overset{x_1}{1}, \overset{x_2}{1}, \overset{x_3}{1}, \overset{x_4}{1}, 0)$

$$\lambda_1(4,4,0) + \lambda_2(5,10,1) + \lambda_3(1,0,0) + \lambda_4(0,1,0) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 + 0 = 0 \\ 4\lambda_1 + 10\lambda_2 + 0 + \lambda_4 = 0 \\ 0 + \lambda_2 + 0 + 0 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 4\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = -4\lambda_1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{t}{4} \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = t \in \mathbb{R} \\ \lambda_4 = -t \end{cases}$$

più sol = non L.I. $\boxed{\text{A Non è vert.}}$

1.b) $B = (\frac{5}{4}, 1, 0, 0, 0)$ $\lambda_1(4,4,0) + \lambda_2(5,10,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + 10\lambda_2 = 0 \\ 0 + \lambda_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \checkmark \quad \boxed{\text{B è vertice}}$$

1.c) $C = (\frac{5}{2}, 0, 0, 5, 1)$ $\lambda_1(4,4,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1)$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 0 + 0 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + \lambda_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{C è vertice.}}$$

SOLUZIONI DI BASE >

PREMESSA >

Dato il sistema lineare $A \cdot x = b$ rappresentante le soluzioni del programma lineare.

Possiamo dividere il vettore in soluzioni fuori base x_N e soluzioni in base x_B in base al fatto che i vettori colonna della matrice A siano o meno una base.

Sono soluzioni di base i vettori con $x_N = 0$ (regione fuori base) che siano ancora validi ($x_B \geq 0$)

ES: Dato il modello lineare in forma standard

$\max z = 8x_1 + 3x_2$ con vincoli

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\ x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

e scelti $x_1, x_4, x_5 \in x_B$ verificare che siano soluzione di base.

Provare anche con x_2, x_4, x_5

(1) Monto i sistemi

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{5}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3$$

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \rightarrow \frac{4x_1}{4} = \frac{\overset{\frac{5}{2}}{\cancel{10}}}{4} - \frac{5x_2}{4} - \frac{x_3}{4}$$

$$x_4 = 5 + 5x_2 + x_3$$

$$\cancel{2}\,\cancel{4} \cdot \frac{5}{\cancel{2}} - \cancel{4}\frac{5}{\cancel{4}} - x_3$$

$$x_5 = 1 - x_2 \quad \text{da } x_2 + x_5 = 1$$

$$-10 + 5 - 1$$

con $x_2, x_3 = 0$ $=$ $\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}$ sono tutti ≥ 0 per cui sono OK

(2) 2° cambo

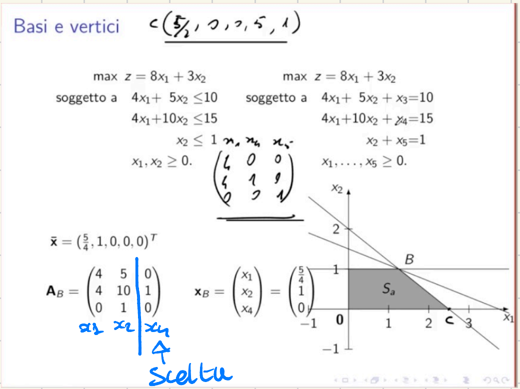
$$\begin{aligned} x_2 &= 2 - \frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_4 &= -5 + 4x_1 + 2x_3 \\ x_5 &= -1 + \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow <0 \\ \leftarrow <0 \end{array}$$

Non è soluzione ammissibile

BASI → VERTICI >

Le soluzioni di base $x(B)$ sono soluzioni che convergono a vertici.

ES



Praticamente, scegliendo 2 punti x_1, x_2 manca 1 colonna. Posso scegliere 1 colonna in più

RIFORMULAZIONE DEL PROBLEMA >

Partendo dal problema, e date delle colonne x_i come basi

1. Trovare se sono basi
2. Se lo sono, riformularle in funzione dei punti iniziali
3. Se i coefficienti dei punti sono negativi, allora è vertice.

ES: Con max $z = 2x_1 + x_2$ e vincoli
- $x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$
- $2x_1 + 3x_2 + x_4 = 8$
- $x_2 + x_5 = 2$

$x_1, \dots, x_5 \geq 0$

(1) Con x_1, x_2, x_5 trovo le basi:

$$x_1 = \frac{25}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4$$
$$x_2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$$
$$x_5 = \frac{12}{7} - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4$$

(2) Ricalcolo in funzione dei punti

$$z = 2x_1 + x_2$$
$$2\cdot\left(\frac{25}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4\right) + \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4\right) = \frac{52}{7} \overset{\ominus}{-\frac{4}{7}}x_3 \overset{\ominus}{-\frac{5}{7}}x_4$$

vertice

Prova con y per trovare le basi

$$y_1 = 0 - \frac{3}{7}y_3 - \frac{2}{7}y_4$$
$$y_2 = 0 + \frac{2}{7}y_3 - \frac{1}{7}y_4$$
$$y_5 = 0 - \frac{2}{7}y_3 + \frac{1}{7}y_4$$

Riformulo funzione obiettivo → $\underbrace{-\frac{4}{7}y_3}\underbrace{-\frac{5}{7}y_4} \geq 0$

Negativi

Ma i vincoli sono pos. $y_3, y_4 \geq 0$

$y_3 = 0 \quad y_4 = 0$