L1 • Numeri reali

INSIEMI NUMERICI >

Gli insiemi numerici standard sono:

- $\mathbb{N}$: L'insieme dei naturali 0, 1, 2 . . . .
- $\mathbb{Z}$: L'insieme dei numeri interi . . . -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 . . .
- $\mathbb{Q}$: // // numeri razionali nella forma $\frac{n}{m}$ in cui
  - $n \in \mathbb{Z}$
  - $m \in \mathbb{N} \wedge m > 0$
- $\mathbb{R}$: // // numeri reali non rappresentabili come frazioni
- $\mathbb{C}$: // // numeri complessi

contiene

SUCCESSIONI DI CAUCHY >

SEGNALETICA >

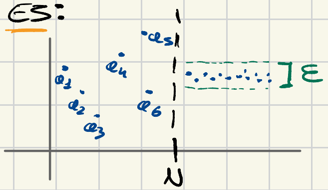
- (a_n) → Dichiara l'intera successione
- a_{num} → // un singolo elemento della successione $a_1 \vee a_2 \dots$

DEF. FORMALE >

La successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \wedge a_k \in \mathbb{Q}$ è di Cauchy sse
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n > N$

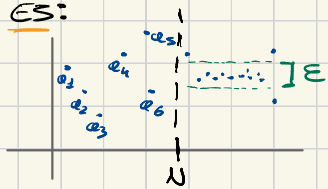
Data una successione di elementi, viene detta di Cauchy se dopo un dato N la distanza / diff. degli elementi è inferiore a un dato ε maggiore di 0.

ES:



Questa è di Cauchy

ES:



Questa Non è di Cauchy.

Dopo aver fissato N, la distanza tra i punti DEVE ESSERE inferiore a ε.

SUCCESSIONI DI CAUCHY > PROPRIETÀ

- EQUIVALENZA $(a_n) \sim (b_n)$

$(a_n) \sim (b_n)$ se la successione formata dalla loro differenza $(a_n - b_n)$ tende a 0.

ES "$(a_n) = \{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \}$ e $(b_n) = \{ \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \ldots \}$"

$$(a_n - b_n) = \{ \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}, \tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{4} - \tfrac{5}{6}, \ldots \}$$
$$= \{ \left|\tfrac{2-3}{4}\right|, \left|\tfrac{10-12}{15}\right|, \left|\tfrac{9-10}{12}\right| \ldots \}$$
$$= \{ \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{15}, \tfrac{1}{12}, \ldots \}$$
$= \{ 0{,}25, 0{,}13, 0{,}08 \ldots \}$ Tende verso 0 quindi $(a_n) \sim (b_n)$

SUCCESSIONI DI CAUCHY > COSTRUZIONE DEI REALI

Ogni numero reale si può descrivere con un gruppo di successioni di Cauchy.

Cioè, con un $n \in \mathbb{R}$ il gruppo di successioni è l'insieme di classi di equivalenza delle successioni che vanno verso il numero n.

$n = [(a_n)]$ ← non so se la sintassi è giusta

$[(a_n)] = \{ (a_n), (b_n), (c_n) \ldots \}$ tutte che tendono verso n

ES: "Prendendo come esempio $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$:
$(a_n) = \{ 1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots \}$
$(b_n) = \{ 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, \ldots \}$"

In questo caso (a_n) e (b_n) tendono a $\sqrt{2}$ perché se faccio $|a_1 - \sqrt{2}| < \varepsilon$ $|a_2 - \sqrt{2}| < \varepsilon$ e così via. Idem per (b_n)
$|b_1 - \sqrt{2}| < \varepsilon$, $|b_2 - \sqrt{2}| < \varepsilon$ ... ecc.
quindi tendono entrambi a $\sqrt{2}$ per cui fanno parte della stessa classe di equivalenza.
Questo vuol dire che sia (a_n), che (b_n) definiscono $\sqrt{2}$.

SUCCESSIONI DI CAUCHY > SOMMA E PRODOTTO DI REALI

Dati due numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ rappresentati dalle rispettive successioni (a_n), (b_n):

- **SOMMA** $a+b = (a_n+b_n)$

  La somma dei due reali è rappresentata dalla somma delle rispettive successioni

  ES: " $a = 5$, $b = 2$ $(a_n) = 25, 20, 15, 10, \dots$, $(b_n) = 12, 10, 8, 6 \dots$ "

  $a+b = 7 \iff (a_n+b_n) = \{25+12, 20+10, 15+8, 10+6\}$

  $= \{37, 30, 23, 16, \dots\} \rightarrow$ Tenderà verso 7.

- **PRODOTTO** $a \cdot b = (a_n \cdot b_n)$

  Il prodotto è dato dalla successione formata dai prodotti delle successioni precedenti.

  ES: " $a = 3$, $b = 4$ $(a_n) = 6, 5, 4, 3.5 \dots$, $(b_n) = 12, 10, 7, 4.1 \dots$

  $a \cdot b = 12 \iff (a_n \cdot b_n) = \{6 \cdot 12, 5 \cdot 10, 4 \cdot 7, 3.5 \cdot 4.1\}$

  $= \{72, 50, 28, 14.35 \dots\}$

  Tenderà verso 12

PROPRIETÀ DEI REALI >

- **COMPLETO**: Ogni successione di Cauchy converge in un num. reale, non lasciando alcun buco.
- **$(\mathbb{R}, +)$ È UN GRUPPO COMMUTATIVO**: L'operazione di somma è un gruppo commutativo in $\mathbb{R}$
  - P. ASS → $a+(b+c) = (a+b)+c$ $\forall a,b,c$ $\mathbb{R}$ ✓
  - E. NEUTRO → $\exists \varepsilon$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\varepsilon + x = x$ ✓ $\varepsilon = 0$
  - E. INVERSI → $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists y$ t.c. $x+y = 0$ ✓ $3-3=0$
  - P. COMM → $a+b = b+a$ ✓ $5+3 = 3+5$
- **$(\mathbb{R}^{\times}, \cdot)$ È UN GRUPPO COMMUTATIVO**: L'operazione di prodotto è un gruppo commutativo
  - P. ASS → $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $\forall a,b,c,x \in \mathbb{R}$ ✓ $3 \cdot (5 \cdot 4) = (3 \cdot 5) \cdot 4$
  - E. NEUTRO → $\exists \varepsilon$ t.c. $\forall x$ $x \cdot \varepsilon = x$ ✓ $\varepsilon = 1$
  - E. INVERSI → $\forall x$ $\exists y$ t.c. $x \cdot y = \varepsilon$ ✓ $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$
  - P. COMM → $a \cdot b = b \cdot a$ ✓ $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$

  $\mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- **P. DISTRIBUTIVA**: Il prodotto viene distribuito rispetto alla somma:

  TRA $\cdot$ e $+$ $\quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ ✓

PROPRIETÀ DEI REALI >

- **CAMPO**: L'insieme $\mathbb{R}$ è un campo in quanto i campi sono insiemi con
  - operazioni di somma e prodotto $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^{*},\cdot)$ come gruppi commutativi
  - La proprietà distributiva.

- **ORDINATO**: Gli elementi sono comparabili
  $\forall a,b \in \mathbb{R}$ allora $a=b \vee a<b \vee a>b$ solo 1 caso.

- **P. ARCHIMEDE**: Da due num. >0 moltiplicando uno dei due per un naturale può sorpassare l'altro
  $\forall a,b \in \mathbb{R} \wedge 0<a<b \quad \exists x \in \mathbb{N}$ t.c. $x \cdot a > b$

INSIEMI NUMERABILI >

DEF. FORMALE >

L'insieme X è numerabile $\Leftrightarrow \exists f: \mathbb{N} \to X$ biettiva

Un insieme X è numerabile se esiste una funzione biettiva con l'insieme $\mathbb{N}$. $\mathbb{R}$ non è numerabile.

ES: "I num. pari sono un'insieme numerabile?"

(0) Definisco l'insieme dei pari:
$X = \{x \mid x = 2n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$

(1) Definisco la funzione
$f: \mathbb{N} \to X \quad n \mapsto 2n$

- iniettiva? sì per def.
- suriettiva? sì copre X
- biettiva? sì

ES: "L'insieme $\mathbb{Z}$ è numerabile?"

(1) Definisco la funzione
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad n \mapsto \{\underset{n}{0}, \underset{n+1}{1}, \underset{n+2}{-1}, 2, -2, \dots\}$

ES: "L'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile?"

(1) Definisco la funzione
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$
$n \mapsto \{\overset{0}{0},$

$\}$

L2 • NUMERI COMPLESSI I

N. COMPLESSI > DEF.

DEF. FORMALE >

$z \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow z = a + b \cdot i \quad , \quad i^2 = -1$

I numeri complessi sono numeri formati da 2 componenti
- La parte reale, appartenente a $\mathbb{R}$ — $Re(z)$
- // // immaginaria con — $Im(z)$
  - Coefficiente $\in \mathbb{R}$
  - Unità immaginaria 'i'

FORME > COPPIE ORDINATE

Sono rappresentabili con coppie ordinate del Tipo $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- Prima componente rappresenta la parte Reale
- Seconda // // // // Immaginaria.

ES • $(a, 0) \rightarrow$ Questo ha Imm $= 0$ quindi $\in \mathbb{R}$ (a = Reale, 0 = Imm.) • $(0, b)$: questo ha Reale $= 0$ quindi $\notin \mathbb{R}$

OPERAZIONI > SOMMA (STD + COPPIE)

Basta sommare le rispettive parti tra di loro:
- F. STANDARD : $z = a + bi$, $z' = c + di$ $\quad z + z' = (a + c) + (b + d)i$
- F. COPPIE : $z = (a, b)$, $z' = (c, d)$ $\quad z + z' = (a + c, b + d)$

ES: "sommare $z_1 = 100 - 5i$ e $z_2 = -5 - 4i$"
(a) In F. STD: $z_1 + z_2 = (100 - 5) + (-5 - 4)i = 95 - 9i$
(b) In F. COPPIE: $z_1 + z_2 = (100 - 5, -5 - 4) = (95, -9)$

OPERAZIONI > PRODOTTO (STD + COPPIE)

La formula è calcolabile come prodotto polinomiale
- F. STANDARD : $z = a + bi$, $z' = c + di$ $\quad z \cdot z' = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)$
- F. COPPIE : $z = (a, b)$, $z' = (c, d)$ $\quad z \cdot z' = (a \cdot c - b \cdot d , a \cdot d + b \cdot c)$

ES: "Moltiplicare $z_1 = 100 - 5i$ e $z_2 = -5 - 4i$"
(a) STD: $z_1 \cdot z_2 = (-500 - 20) + (-400 + 25) = -520 - 375i$
(b) COPPIE $= z_1 \cdot z_2 = (-500 - 20, -400 + 25) = (-520, -375)$

PROPRIETÀ DEI COMPLESSI

- **CAMPO**: L'insieme $\mathbb{C}$ è un campo. Ovvero
  - Ha l'operaz. di Somma come gruppo commutativo

$(\mathbb{C}, +)$
  - p. assoc: $a+(b+c) = (a+b)+c \quad \forall a,b,c,x \in \mathbb{C}$ ✓
  - e. neutro: $\exists \varepsilon$ t.c. $\forall x \quad x+\varepsilon = x$ ✓ $\varepsilon = 0$
  - e. inversi: $\forall a \, \exists x \quad a+x = \varepsilon$ ✓ $x = -a$
  - commut.: $\forall a, \forall b \quad a+b = b+a$ ✓

  - Ha l'operaz. di Prodotto come gruppo commutativo

$(\mathbb{C}^{\times}, \cdot)$
  - p. assoc: $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c \quad \forall a,b,c,x \in \mathbb{C}$ ✓
  - e. neutro: $\exists \varepsilon$ t.c. $\forall x \quad x\cdot\varepsilon = x$ ✓ $\varepsilon = 1$
  - e. inversi: $\forall a \, \exists x \quad a\cdot x = \varepsilon$ ✓ $x = a^{-1}$
  - commut.: $\forall a, \forall b \quad a\cdot b = b\cdot a$ ✓

  - Vale la proprietà distributiva tra prodotto e somma
    $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

- **NON È ORDINATO**: Per $i^2 = -1$.

CONIUGO / CONIUGATO F. STD

È il complesso con coefficiente immaginario negato.

$z = a + bi \qquad \bar{z} = a - bi$ Ne consegue $z = \bar{z} \longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$

ES: "$z = 3+10i \quad \bar{z} = ?$"
$\bar{z} = 3 - 10i$

ES: "$z = 3 \quad \bar{z} = ?$"
$\bar{z} = 3 = z$

ES: "$z = 5 - 100i \quad \bar{z} = ?$"
$\bar{z} = 5 + 100i$

MODULO F. STD

Sarà la radice della somma dei coeff.^{2}

$z = a + bi \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ES: "$z = 3+10i \quad |z| = ?$"
$|z| = \sqrt{3^2+10^2} = \sqrt{9+100} = \sqrt{109}$

ES: "$z = 3 \quad |z| = ?$"
$|z| = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

ES: "$z = 5-100i \quad |z| = ?$"
$|z| = \sqrt{5^2+100^2} = \sqrt{25+10000} = \sqrt{10025}$

INVERSO

È il coniugo diviso il modulo^2

$z = a + bi$ $\qquad z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{a-bi}{(\sqrt{a^2+b^2})^2}$

Questo perché $z \cdot z^{-1} = \dfrac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{|z|^2}{|z|^2} = 1 \leftarrow$ L'elemento neutro.

ES: "Trova l'inverso di $z = 5+3i$"

(1) Trovo $\bar{z} \rightarrow \bar{z} = 5-3i$

(2) Trovo $|z| \rightarrow |z| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ $\qquad |z|^2 = (\sqrt{34})^2 = 34$

(3) $z^{-1} = \dfrac{5-3i}{34}$ $\quad$ Verifico $z \cdot z^{-1} = \dfrac{(5+3i)(5-3i)}{34}$

$= \dfrac{(25 \cancel{-15i} \cancel{+15i} + 9)}{34} = \dfrac{34}{34} = 1$ ok

DIVISIONE

Bisogna moltiplicare la frazione per il coniugo del denominatore:

$z_1, z_2 \in \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$ $\qquad$ Questo eliminerà la parte complessa dal denominatore

ES: Dato $z_1 = 2+i$ e $z_2 = 4+3i$, calcolare

$\dfrac{z_1^2}{z_2 - z_1}$

(1) calcolo $z_2 - z_1$ $\qquad z_2 - z_1 = +2+2i$

(2) Calcolo $z_1^2 \Rightarrow z_1^2 = z_1 \cdot z_1$

$(2+i)(2+i) = 4+2i+2i-1$

$= 3+4i$

(3) Calcolo il rapporto

$\dfrac{3+4i}{2+2i} \cdot \dfrac{2-2i}{2-2i} =$

$\hookrightarrow \dfrac{(3+4i)(2-2i)}{8} = \dfrac{14+2i}{8} = \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{4}i$

$\overline{2+2i} = 2-2i$

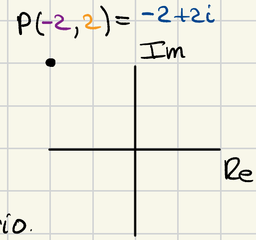
$(2+2i)(2-2i) = 4 \cancel{-4i} + \cancel{4i} + 4 = 8$ $\qquad (3+4i)(2-2i) = 6-6i+8i+8 =$

$= 14+2i$

L3 • NUMERI COMPLESSI II

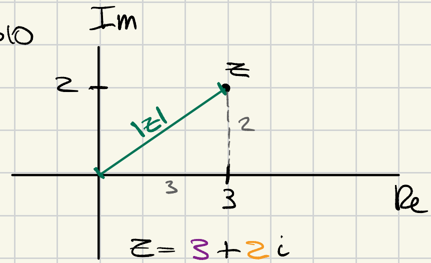
IL PIANO DEI COMPLESSI >

Sono rappresentabili come un punto nel piano.
In cui
- L'asse delle ascisse (x) è l'asse Reale
- // // ordinate (y) // // Immaginario.



IL PIANO DEI COMPLESSI > MODULO/RAGGIO

Nel piano è la distanza dall'origine del punto.
Si può vedere anche come l'ipotenusa del triangolo.



$z = 3 + 2i$

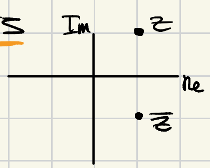
$|z| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$$|z| = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{Pitagora su ipotenusa}} \equiv \text{dist.}((0,0),(a,b))$$

IL PIANO DEI COMPLESSI > CONIUGO

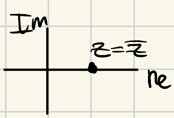
È la riflessione del punto sull'asse reale

ES



$z = 1 + 1i$

$\bar{z} = 1 - 1i$



$z = 1$

$\bar{z} = 1$

IL PIANO DEI COMPLESSI > ARGOMENTO / FASE

SEGNALETICA => Arg(z) oppure θ "Theta"

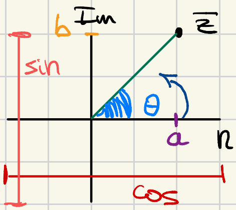
È l'angolo orientato dall'asse Reale verso sinistra. Ovvero:

- se impostato da DX a SX -> Sarà positivo (antiorario)
- // // // SX a DX -> // negativo (orario)

IL PIANO DEI COMPLESSI > ARGOMENTO / FASE : CALCOLO

Per Trigonometria, si calcola con la formula

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$



F. inversa

$$\begin{cases} a = |z| \cdot \cos(\theta) \\ b = |z| \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

ES: "calcolare la fase del complesso $z = -\sqrt{3} + i$"

(0) Calcolo il modulo: $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

(1) Monto il sistema:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

l'unico angolo che soddisfa il sistema è $\theta = \frac{5}{6}\pi$

FORME > NOTAZIONE TRIGONOMETRICA

Varia dalla notazione standard / algebrica dal fatto che si usa la fase / argomento.

$$z = a + bi \equiv z = |z| \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta) i)$$

ES: "Convertire $z = 1 + i$ in notazione trigonometrica"

(1) Calcolo modulo $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

(2) Calcolo fase

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

(3) Rappresento z: $z = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4}) i)$

FORME > NOTAZIONE ESPONENZIALE

Partendo dalla notazione trigonometrica, sostituire la somma di sin e cos con $e^{\theta i}$

$$z = |z| \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta) i) \equiv z = |z| \cdot e^{\theta i}$$

ES: "Convertire $z = 1 - i$ in notazione esponenziale"

(1) Calcolo modulo $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

(2) Calcolo fase

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \theta = \frac{7}{4}\pi \text{ oppure } -\frac{\pi}{4}$$

(meglio dx) perché gli θ vanno mostrati $\pi < \theta \leq \pi$

(3) Rappresento $z = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7}{4}\pi \cdot i}$

OPERAZIONI > PRODOTTO (EXP)

Sarà il prodotto dei moduli e la somma degli argomenti.

$$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\theta}, \quad z_2 = |z_2| \cdot e^{i\alpha}$$

allora $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\theta + \alpha)}$

e $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\theta - \alpha)}$

ES: "Calcolare il prodotto tra $z_1 = e^{i \cdot -\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$"

(1) Applico formula

$$z_1 \cdot z_2 = 1 \cdot 2 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})} = 2 \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{-3\pi - \pi}{6} = \frac{-4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

OPERAZIONI > INVERSO (EXP)

Elevare a -1 il modulo e molt. per -1 la fase.

$$z = |z| \cdot e^{\theta i} \vDash z^{-1} = |z|^{-1} \cdot e^{-\theta i}$$

ES: "Calcola l'inverso di $z = 2e^{\frac{2}{3}\pi i}$"

(1) applico formula $|z|^{-1} = \frac{1}{2}$ $\quad -\theta = -\frac{2}{3}\pi$

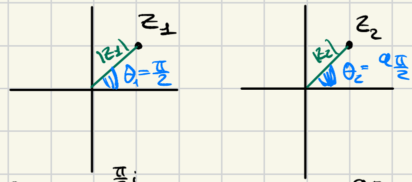
(2) rappresento: $z^{-1} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{2}{3}\pi i}$

L3 • NUMERI COMPLESSI II

OPERAZIONI > UGUAGLIANZA (EXP)

Sono uguali sse
- Hanno stesso raggio
- // angoli nella forma

$\theta_1 = \theta_2 + \underbrace{2\pi \cdot k}_{\text{1 giro completo del piano}} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$



$z_1 = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2} i}$ $\qquad$ $z_2 = 1 \cdot e^{\frac{9}{2}\pi i}$

OPERAZIONI > POTENZA N-ESIMA (EXP)

Elevare a n il modulo e moltiplicare la fase.

$z = |z| \cdot e^{\theta i} \vDash z^n = |z|^n \cdot e^{n \cdot \theta \cdot i}$

ES: "Dato $z = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{2} i}$, calcolare z^5"

(1) Applico la formula

$z^5 = 32 \cdot e^{\frac{5}{2}\pi i}$

ES: "Dato $z = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{2} i}$, calcolare z^{2025}"

(0) Smembro il calcolo per la fase

$2025 = 1012 \cdot 2 + 1 \rightarrow e^{\frac{\pi}{2} \cdot 2025} = e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 1012 \cdot 2} \cdot e^{\frac{\pi}{2} i} = \cancel{e^{i\overbrace{\pi \cdot 512 \cdot 2}^{2k\pi = 0}}} \cdot e^{\frac{\pi}{2} i}$

(1) rappresento: $z = 2^{2025} \cdot e^{\frac{\pi}{2} i}$

OPERAZIONI > RADICI N-ESIME (EXP)

Sono tante quante n. Si fa con
- Radice n-esima del modulo
- fase divisa per n

$z = |z| \cdot e^{\theta i} \vDash \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}}$

$k = \{0, 1 \ldots n-1\}$

I risultati variano per $\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ con k che va da 0 a $n-1$

ES: "Calcola le radici terze di $z = -1$"

(0) Rappresento in exp $|z| = \sqrt{(-1)^2} = 1$ $\quad \theta = \begin{cases} \cos(\theta) = -1 \\ \sin(\theta) = 0 \end{cases}$ $\quad \theta = \pi$ $\quad z = 1 \cdot e^{i\pi}$

(1) Calcolo le sol. (3)

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}}$

$k = 0 \quad \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad$ $k = 1 \quad \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\pi}$

$k = 2 \quad \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi} = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi}$

L3 • NUMERI COMPLESSI II

RADICI DI POLINOMI COMPLESSI

Applicare la formula:

$$z_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a} \quad \text{con} \quad ax+by+c$$

ES: Trovare le radici del polinomio $z^2-2iz-5$

(1) Applico la formula:

$$\frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a} = \frac{i \pm \sqrt{-1+5}}{1} = i+2, \; i-2$$

$$\Delta = \left(-\frac{2i}{2}\right)^2 = (-i)^2 = -1$$

MONOMI >

È una combinazione di numeri in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, in combinazione a variabili $(x, y, z, \dots)$

ES: " $3bc$, $1c$, $2x$, $3y$, $4x^2y^{-1}$, $3x+2y$ "

✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✗

questa è una somma fra monomi

MONOMI > GRADO

È la somma degli esponenti delle incognite.

ES: " $3x^1y^1$ " grado = 2 " $3x^2+2y^2$ " Non è un monomio " $3x^2yz^3$ " $= 2+1+3 = 6$ " $3x^{-1}y$ " $-1+1 = 0$

POLINOMI >

SEGNALETICA > $p(x) = \dots$

È una funzione ottenuta dalla somma e/o sottrazione di monomi.

ES: " $3x^2+1$ " " $3x$ " " $2x^2y^2+3zy$ "

POLINOMI > GRADO

È il massimo grado dei monomi che lo compongono.

ES: " $3x^2+1$ "
- $3x^2 \Rightarrow 2$
- $1 \Rightarrow 0$

$= 2$ grado per $2>0$

" $3x$ "
- $3x = 1$

1 grado

" $2x^2y^2+3zy$ "
- $2x^2y^2 \Rightarrow 2+2=4$
- $3zy \Rightarrow 1+1=2$

$4>2 \rightarrow$ grado 4

L4 • POLINOMI

POLINOMI > NOTAZIONE

Gli insiemi di polinomi si possono descrivere con delle notazioni particolari: $A_N[x,y,z]$ in cui

- A indica l'insieme numerico dei coefficienti del polinomio
- $x,y,z\dots$ indicano quante e quali sono le incognite
- N indica il grado massimo del polinomio ($\leq N$). se omesso indica di qualsiasi grado.

ES: "$\mathbb{R}[x]$"
Polinomi con
- coeff. $\in \mathbb{R}$
- 1 incognita (x)
- Di qualsiasi grado

"$\mathbb{C}[x]$"
Polinomi con
- coeff. in $\mathbb{C}$
- 1 incognita (x)
- Di qualsiasi grado

"$\mathbb{R}[x,y]$"
Polinomi con
- coeff. in $\mathbb{R}$
- 2 incognite (x,y)
- Di qualsiasi grado

$\mathbb{R}_K[x]$
Polinomi con
- coeff. $\in \mathbb{R}$
- 1 incognita (x)
- grado $\leq K$

POLINOMI > DIVISIONE POLINOMIO / MONOMIO

Dividere il polinomio per il monomio significa definire il polinomio con:
- Segno diviso
- esponente diviso
- parte letterale divisa come sottrazione degli esponenti

ES: "$(4x^4y^3z^5 - 8x^5y^2 + x^6y^4) : (2x^2y)$"

$+2x^2y^2z^5 - 4x^3y + \frac{1}{2}x^4y^3$

$+/+ = +$ Per il primo
$4/2 = 2$
$x^4y^3z^5 / x^2y = x^2y^2z^5$

ES: "$(\frac{2}{5}x^4y^2 - \frac{5}{6}x^7y^5 + x^9y^6z) : (-\frac{1}{2}x^3y)$"

$-\frac{2}{5}\cdot 2\, xy + \frac{5}{6}\cdot 2\, x^4y^4 - 2x^6y^5z$

$= -\frac{10}{5}xy + \frac{5}{3}x^4y^4 - 2x^6y^5z$

POLINOMI > DIVISIONE POLINOMI / POLINOMI (DEF)

La divisione di un polinomio per un altro polinomio come nelle divisioni intere è nella forma

$p(x) / d(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$ in cui:

- $q(x)$: è il quoziente
- $d(x)$: è il divisore
- $r(x)$: è il resto. DEVE avere grado $<$ $p(x)$

POLINOMI > DIVISIONE POLINOMI / POLINOMI (HOW TO)

1. Impostare la divisione in colonna
2. RIPETERE i punti seguenti fin quando il grado del risultato > grado divisore.

2.1 Dividere il primo termine tra dividendo e divisore (Devono essere in ordine $ax^n + ax^{n-1} \dots$)

2.2 Riportare il risultato nei risultati

2.3 Moltiplicare il risultato con il polinomio divisore.

2.4 Sottrarre il dividendo per il prodotto ottenuto NEGATO

2.5 Controllare il grado del risultato. Se è ≥ grado dividendo, andare avanti.

ES: "Dividere $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3$ e $d(x) = x^2 - x - 5$"

(0) Inserisco i termini "invisibili" $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 0x + 3$

$$\begin{array}{rl|l}
& 4x^3 - 2x^2 + 0x + 3 & x^2 - x - 5 \\
(2.3) & -4x^3 + 4x^2 + 20x + 0 & 4x + 2 \\
(2.4) & 0 \quad + 2x^2 + 20x + 3 & \uparrow (2.2) \\
* \; (2.3) & -2x^2 + 2x + 10 & \\
& 0 \quad + 22x + 13 &
\end{array}$$

← (1) Imposto la divisione in colonna

(2.1) $4x^3 / x^2 = \underline{4x}$

* Ci si accorge che è sbagliato se la prima zero

(2.1 (2)) $2x^2 / x^2 = 2$

$$\underbrace{4x^3 - 2x^2 + 3}_{p(x)} = \underbrace{(4x+2)}_{q(x)} \underbrace{(x^2 - x + 5)}_{d(x)} + \underbrace{(22x + 13)}_{r(x)}$$

POLINOMI > NOTAZIONI DI DIVISIBILITÀ

Dato un polinomio $p(x)$ e un altro usato come divisore $d(x)$
- Se $d(x) / p(x)$ ha resto $r(x)=0$ allora si dice "$d(x)$ divide $p(x)$" indicato come $d(x) \mid p(x)$
- Se $d(x) / p(x)$ NON ha resto $r(x)=0$ // // "$d(x)$ non divide $p(x)$" indicato come $d(x) \nmid p(x)$

POLINOMI > RADICI DEL POLINOMIO

Sono "radici" tutti i numeri che se sostituiti con la parte incognita danno risultato 0.

Inoltre, si può anche dire che a è radice sse $(x-a) \mid p(x)$

Es: "Elencare una radice di $p(x) = x^3 - 8$"

$x=2$ è una radice per $2^3-8 \Rightarrow 8-8=0$

$p(x) / (x-2)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+0x^2+0x-8 & x-2 \\
\hline
-x^3+2x^2 & x^2+2x+4 \\
// \quad 2x^2 & \\
-2x^2+4x & \\
// \quad 4x-8 & \\
-4x+8 & \\
// \quad // = 0 &
\end{array}
$$

Corretto

POLINOMI > MOLTEPLICITÀ

È il numero massimo $k \in \mathbb{N}_{>0}$ per cui la radice a come $(x-a)^k \mid p(x)$. Sapendo che a è radice
- $k \geq 1$ la molteplicità DEVE essere ≥ 1
- $k \in \mathbb{Z}_+$

POLINOMI > CARDINALITÀ DELLE RADICI

- Un polinomio $p(x)$ di grado n ha al massimo n radici
- // $p(x) \in \mathbb{C}_n[x]$ con $n \geq 1$ ha almeno 1 radice
- // // // // ha n radici complesse.

L5 • SPAZI VETTORIALI I

SPAZIO EUCLIDEO N-DIM. >

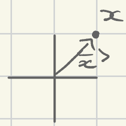
È l'insieme delle n-uple $(a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{R}^n$ ovvero il prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ n volte.

Si sa che
- Le tuple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sono punti del piano
- Le triple $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ sono " dello spazio.
- La n-upla $(0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^n$ formata da soli 0 è detta origine.

ES: "$(1,2) \in \mathbb{R}^2$, $(5,2,1) \in \mathbb{R}^3$, $(0,0)$ è origine di $\mathbb{R}^2$, $(0,0,0)$ è origine di $\mathbb{R}^3$"

PUNTI E VETTORI >

Le n-uple possono essere rappresentate:
- Come punti in orizzontale
- " vettori in verticale



ES: "$(3,2,1)$ è un punto. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un vettore"

SPAZIO VETTORIALE > (DEF)

Si intende un "contenitore" di vettori / matrici / polinomi in cui gli elementi sono numeri che appartengono a un'insieme $\mathbb{K}$. Hanno 2 operazioni:

- **Somma binaria:** $v_1, v_2 \in V \models v_1 + v_2 \in V$
  La somma di 2 elementi dello spazio vettoriale genera un nuovo elemento sempre interno allo stesso.

- **Prodotto scalare:** $v \in V, \lambda \in \mathbb{K} \models k \cdot v \in V$
  Il prodotto di un vettore per 1 numero $\in \mathbb{K}$ è interno a V

ES: "V in $\mathbb{R}^3$" "V su matrici in $\mathbb{K}^{m \times n}$" "V su $\mathbb{K} = \mathbb{R}_3[1,2,3]$"

Vettori: $v_1 = (1,2,3) \dots$

Matrici: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{pmatrix}$

$1 + 5x - 7x^2 + x^3$

LS • SPAZI VETTORIALI I

SPAZIO VETTORIALE > SOMMA BINARIA

Sarà un nuovo vettore composto dagli elementi sommati.

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in V \models v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \dots \\ a_2+b_2 \dots \\ \vdots \\ a_n+b_n \dots \end{pmatrix}$$

ES: "sommare $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$" $\begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+1 \\ 3+3 \end{pmatrix}$

SPAZIO VETTORIALE > PRODOTTO PER SCALARE

Sarà lo stesso vettore con il compon

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \models \lambda \cdot v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \lambda \\ a_2 \cdot \lambda \\ \vdots \\ a_n \cdot \lambda \end{pmatrix}$$

ES: "$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$" $\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

MATRICE >

SEGNALETICA > $A \in M(\text{righe}, \text{colonne}, \mathbb{K})$ con $\mathbb{K}$= campo

È un'entità tabellare con r righe e c colonne nella forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2c} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rc} \end{pmatrix}$$

Notazioni

- A_1 = La riga '1' $(a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1c})$
- A^1 = La colonna '1' $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{cn} \end{pmatrix}$

MATRICI > SOMMA

VALIDATORI > Solo su matrici di stessa dimensione

Sarà una matrice con gli elementi sommati.

ES: " $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ "

$= \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

" $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ "

No! hanno dim diff. 2×3 e 2×2

MATRICI > PRODOTTO PER SCALARE

Sarà una nuova matrice con gli elementi moltiplicato.

ES: " $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ " $= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

" $10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ " $= \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$

SOTTO-SPAZI VETTORIALI > (DEF) $W \subset V$

Sono "sotto-insiemi" degli spazi vettoriali. Un sotto-insieme di V per essere sotto-spazio deve:

- Avere l'origine O_V
- Avere la somma di 2 vettori interna
- // il prod. per scale // // //

ES: " Dimostrare che, dato V in $\mathbb{R}^3$, che $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ sia sottospazio"

(1) origine $x=0, y=0, z=0 \rightarrow (0,0,0)$

(2) somma per def

(3) Per def.