Complementi di Analisi

paolo.boggiatto@unito.it

Marco Edoardo Santimaria

Numeri complessi

l'insieme $\mathbb{C}$ estende l'insieme $\mathbb{R}$, in particolare da una risposta per le equazioni $x^2+1=0$.

Questa eq. ha $\emptyset$ sol in $\mathbb{R}$ ma esattamente 2 in $\mathbb{C}$. In genere si ha che x^n ha esattamente n soluzioni in $\mathbb{C}$ e al più n in $\mathbb{R}$.

Si introduce $i = \sqrt{-1}$ tale che $i^2 = -1$.

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è costituito da una coppia (x, y) di numeri reali dove:

- x è detta parte reale di z $\quad (Re(z) = x)$
- y è detta parte immaginaria di z $\quad (Imm(z) = y)$

È però più conveniente esprimere z così:

$$\boxed{z = x + iy}$$

Ci si chiede dunque se $\mathbb{C} = \mathbb{R}$? si hanno 3 risposte:

1) Si insiemisticamente
2) Si topologisticamente (distanze)
3) No algebricamente.

Vediamo ora il perché $\longrightarrow$ (pg dopo)

→ operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ (sono $\neq$ da $\mathbb{R}$)

Ⓐ Somma.

Siano $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$

$$z_1 + z_2 \overset{def}{=} (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

ES: $z_1 = 2 + 3i \qquad z_2 = -1 + \varepsilon i$

$$z_1 + z_2 = (2-1,\ 3i + \varepsilon i) = (1, (3+\varepsilon) i)$$

Ⓑ prodotto

$$z_1 \cdot z_2 \overset{def}{=} (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2$$

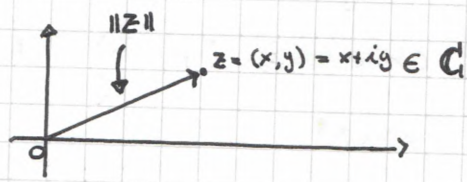
$$= \boxed{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1)}$$

ed equivalentemente,

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

→ operazioni topologiche in $\mathbb{C}$ (sono come in $\mathbb{R}$)

Ⓐ Norma di z $= \|z\| \overset{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$



Ⓑ distanza tra z_1 e z_2

$$\|z_1 - z_2\| \overset{def}{=} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

e si indica con dist (z_1, z_2)

Le sottrazioni e le divisioni vengono di conseguenza.

DEF = Con le definizioni delle operazioni Algebriche dimostro che

$z = (a,b) = a + bi$

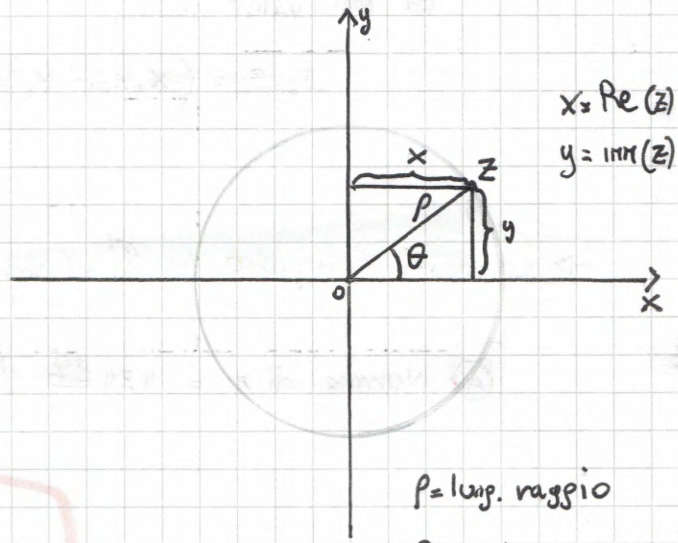
SIA $i = (0,1) \in \mathbb{C}$, $\underbrace{x = (x,0) \text{ e } y = (y,0)}_{\in \mathbb{R}}$

$$x + iy = (x,0) + (0,1)(y,0) = (x,0) + (0 \cdot y - 1 \cdot 0,\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot y) =$$

$$= (x,0) + (0,y) = (x,y) \quad \blacksquare$$

NOTA: $i^2 = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) \equiv -1$

→ RAPPRESENTAZIONE POLARE



$x = Re(z)$

$y = Im(z)$

Posso vedere z come punto su una circonferenza. posso esprimere z come $z = (\rho, \theta)$, dove poi avrò:

$$\boxed{\begin{matrix} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \end{matrix}}$$

ρ = lung. raggio

θ Angolo tra x e ρ

per cui

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$$

ρ viene detto modulo di z mentre θ é la fase di z

→ Rappresentazione esponenziale

Con la formula di eulero posso avere un ulteriore rappresentazione:

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Def = Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$, pongo $e^z \overset{def}{=} e^x + e^{iy}$

Dove $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

Def = Sia $z = \rho e^{i\theta}$, $z^n \overset{def}{=} \rho^n e^{i\theta n}$

NOTA: $z^N = 1$ sono i vertici di un poligono inscritto in circonf. regolare.

DEF = Prodotto $z_1 \cdot z_2$.

Sia $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Questo rende estremamente facile sommare o moltiplicare segnali in quanto essi $\in \mathbb{C}$

Def = complesso coniugato

Sia $z = a + ib$, il suo complesso coniugato è

$$\bar{z} = a - ib$$

Risulta inoltre che $|z|^2 = z\bar{z}$:

$$(x - iy)(x + iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = \|z\|^2 \Rightarrow \|z\| = \sqrt{x\bar{x}}$$

→ Funzioni complesse

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{ovvero}$$

$$t \rightarrow f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t)$$

dove $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Esempio:

$$f(t) = e^{i2t^2} = 1\left(\cos(2t^2) + i \sin(2t^2)\right)$$

In conclusione, per esprimere z ho 4 modalità

Cartesiana	Algebrica	Polare	Esponenziale
$z = (x, y)$	$z = x + iy$	$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\theta = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$	$z = \rho e^{i\theta}$

dove la notazione esponenziale è quella più comoda!

NB: espressione polare equivale a dire trigonometrica

SISTEMI E SEGNALI

Lo scopo dello studio della teoria dei segnali é quello di studiare i sistemi che li TX e i segnali stessi. L'osservazione di alcuni fenomeni porta delle quantitá che dipendono dal tempo. Queste qtà misurabili, sono dette segnali

DEF = Un segnale é una grandezza fisica che varia nel tempo

i segnali possono essere di 2 tipi:

A) Continui, e quindi

Segnale = funzione $f: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, con $d=1$

B) Discreti (nel caso di sampling x esempio)

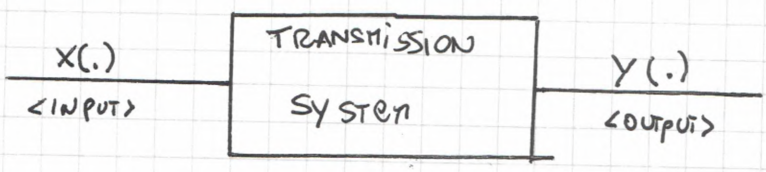
Segnale = funzione $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

In caso di segnale continuo, si parla di segnale analogico. In caso di segnale discreto il segale sará discreto e sara il risultato, in genere, di sampling fatto su segnale analogico

Un segnale digitale é il risultato della quantizzazione di un segnale discreto, ovvero una approssimazione del sample di segnale discreto.

→ Sistema transmissivo:

Un entitá o apparato dove si distingue un segnale in input e un segnale di output, é chiamato sistema trasmissivo. Esso prende in input una funzione, e in qualche modo la trasforma



Viene visto come "black box" ovvero non interessa come sia →

Realizzato ma piuttosto come viene trasformato il segnale (ovvero come viene trasformato il segnale di ingresso).

il sistema verrà indicato così:

$$y = Ax$$

dove A è la black box applicata a segnale x per ottenere segnale y

Alcuni sistemi importanti possono essere:

A) DAC = Digital to Analog Converter, converte segnale digitale in analogico

B) ADC = Analog to Digital Converter, per esempio un sampler che fa opposto di A)

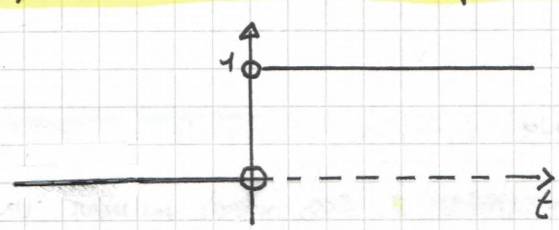
SEGNALI ELEMENTARI

→ FUNZIONE HEAVISIDE

Viene indicata con $u(t)$ ed è definita così:

$$u(t) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } t<0 \\ 1 & \text{se } t>0 \end{cases}$$

NB: IN $\emptyset$ LA FUNZIONE NON È SPECIFICATA!



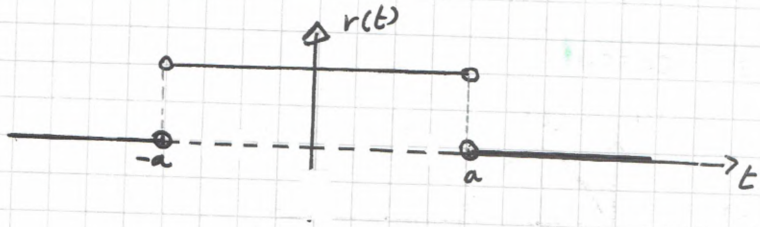
→ FINESTRA RETTANGOLARE

Viene indicato con $r(t)$ ed é definito:

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < a \\ 0 & \text{se } |t| > a \end{cases} \qquad \text{dove } |t| = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ -t & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t < a \;\vee\; -t < a \Rightarrow t < a \;\vee\; t > -a \\ 0 & \text{se } t > a \;\vee\; -t > a \Rightarrow t > a \;\vee\; t < -a \end{cases}$$

NB: IN a e $-a$, $r(t)$ NON é definita!



→ SINUSOIDE PURA, O SEGNALE MONOCROMATICO

Viene espresso nella forma:

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$$

Dove

α: AMPIEZZA segnale. $|\alpha|$ = picco del segnale

ω: Velocitá Angolare. INDICA LA FREQUENZA come periodo

$a = \frac{2\pi}{\omega}$ é il periodo piú piccolo

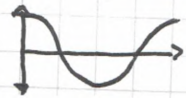
$\lambda = \frac{1}{a} = \frac{\omega}{2\pi}$ INDICA LA FREQUENZA (IN Hz)

φ = FASE INIZIALE

NB: ω e λ sono la medesima cosa in quanto differiscono per costante moltip.

NB: α in un segnale audio é il volume e ω é il pitch del Tono.

NB: φ É UNO SFASAMENTO del segnale. É UNA TRASLAZIONE A DESTRA ($\varphi < 0$) O A SINISTRA ($\varphi > 0$). IN AUDIO NON SI SENTE

es: $\cos(t)$  e $\cos(t - \frac{\pi}{4})$ 

→

Spesso però considero contemporaneamente sin e cos in un segnale. Ho quindi:

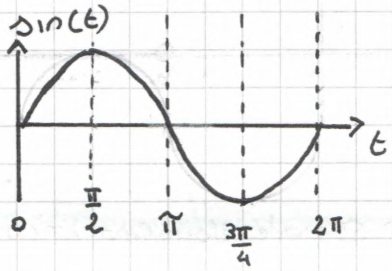
$$x(t) = \alpha(\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi))$$

che può essere espresso come:

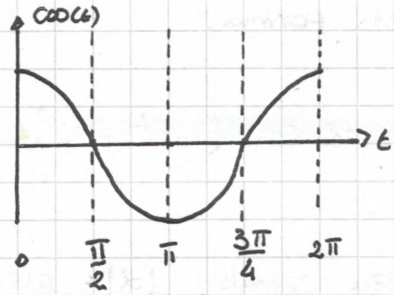
$$x(t) = \alpha(\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi)) = \alpha e^{i(\omega t + \varphi)}$$

→ INCISO SU SENO E COSENO

★ SENO : SIN(x)



★ coseno : cos(x)



★ Valori Angoli Notevoli

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
π	0	-1

NB: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

→ ESEMPI DI SISTEMI (DETTI ANCHE operatori)

(A) Filtro

SISTEMA LINEARE CONTINUO e INVARIANTE per TRASLAZIONE
può essere realizzabile (CAUSALE) o NON REALIZZABILE (NON CAUSALE / IDEALE).

ES Filtro NON REALIZZABILE è il passa basso.

(B) AMPLIFICATORE ideale

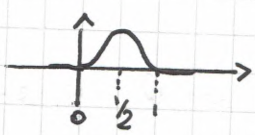
$y(t) \longrightarrow K\,x(t)$ dove k è costante FISSA

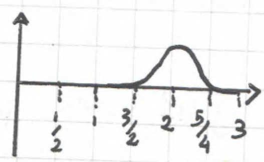
$x \to \boxed{A} \to y = kx$ dove x = INPUT e y OUTPUT signal

(C) LINEA DI RITARDO

$y(t) = x(t-a)$ con a costante reale

Esempio: $a = 2$, x INPUT, y OUTPUT

$x(t)$: 

$y(t) = x(t-2)$ 

$x(t-a)$

ovvero con $a<0$ ho shift a SX

con $a>0$ ho shift a dx

(D) DIFFERENZIATORE

$y(t) = x'(t)$ dove x' è derivata di x $\left(x' = \frac{d}{dx}\,x\right)$

INTEGRALI impropri e $f \in \mathbb{C}$

Def = $\boxed{f'(t) \overset{def}{=} f_1'(t) + i f_2'(t)}$

def = $\boxed{\int f(t)\,dt \overset{def}{=} \int_{\mathbb{R}} f_1(t)\,dt + i \cdot \int_{\mathbb{R}} f_2(t)\,dt}$

ovvero l'unità complessa i viene trattata come numero normale

ESEMPIO: $f(t) = \underbrace{e^{\sin(t)}}_{f_1} + i \underbrace{\cos(e^t)}_{f_2}$

$$f'(t) = \frac{d}{dt} e^{\sin(t)} + \frac{d}{dt} i \cos(e^t) = e^{\sin(t)} \cos(t) + i(-\sin(e^t)e^t)$$

$$= \underbrace{\cos(t)e^{\sin(t)}}_{Re(z) = f_1'} + i \underbrace{(-e^t \sin(e^t))}_{Imm(z) = f_2'}$$

→ integrale su tutto $\mathbb{R}$

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pongo l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ come

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \overset{def}{=} \lim_{a \to -\infty} \left[\int_a^0 f(t)\,dt\right] + \lim_{b \to \infty} \left[\int_0^b f(t)\,dt\right]}$$

dove il limite viene calcolato così:

$$\boxed{\lim_{a \to -\infty} \left[\int_a^0 f(t)\,dt\right] = \left[F(0) - \lim_{a \to -\infty} [F(a)]\right]}$$

e speculare per $+\infty$

NB: La scelta di ϕ come separazione é arbitraria.

NB: IN REALTÁ VERRÁ USATO L'INTEGRALE DI Lebesque che generalizza RIEMANN

Proprietà Algebriche dei sistemi

DATO UN INSIEME DI segnali DI INPUT X e un insieme di segnali di output Y

→ LINEARITÀ DATO $A: X \to Y$

A è detto lineare se:

- $A(x+u) = A(x) + A(u)$ e se
- $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

ovvero se sommo funzioni prima di A, è come sommarle dopo applicaz. di A
inoltre il prodotto di costante moltiplicativa non cambia le cose

Esempio di linearità:

$$A x(\cdot) = x'(\cdot)$$

$$\left.\begin{aligned} A(x+u) &= (x+u)' = x' + u' \\ A(\lambda x) &= \lambda(x') = \lambda x' \end{aligned}\right\} \text{vale linearità}$$

Esempio DI NON linearità

$$A x = x^2$$

$$\left.\begin{aligned} A(x+u) &= (x+u)^2 \neq x^2 + u^2 \\ A(\lambda x) &= (\lambda x)^2 \neq \lambda x^2 \end{aligned}\right\} \text{NON vale linearità}$$

NB: posso dire che funzioni NON LINEARI rendono NON LINEARE il SISTEMA. (es: $\log(x), e^x, \frac{1}{x} \ldots$)

→ CAUSALITÀ

A è detto REALIZZABILE (o CAUSALE) se l'uguaglianza di due segnali IN INPUT fino almeno a t_0, ne implica l'uguaglianza almeno fino a t_0 IN OUTPUT ovvero:

$$x_1(t) = x_2(t) \ \forall t < t_0 \Rightarrow Ax_1(t) = Ax_2(t) \ \forall t < t_0$$

Serve a evitare che un sistema "anticipi il futuro"

NOTA: Se A lineare, allora la casualità è così:

$$x(t) = 0 \ \forall t < 0 \Rightarrow Ax(t) = 0 \ \forall t$$

NB: Questa proprietà dice che la risposta al tempo t dipende solo da quello che è successo prima di t

NBB: LA CASUALITÀ È RICHIESTA per realizzare FISICAMENTE UN SISTEMA.

→ INVARIANZA

A è DETTA INVARIANTE (o STAZIONARIA) se una traslazione in tempo nell'input, corrisponde alla medesima traslazione in output:

$$x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t-a) \to y(t-a)$$

Definisco τ_a l'operatore ritardo di valore a

$$\tau_a x(t) = x(t-a)$$

Se il sistema è invariante allora

$$\forall x \in X \quad A(\tau_a x(\cdot)) = \tau_a (A(x(\cdot)))$$

e quindi $\forall a \in \mathbb{R}, \ A\tau_a = \tau_a A$ (COMMUTATIVITÀ)

→

Esempio INVARIANZA

$$A = \frac{d}{dt}$$

$$A: x(t) \longrightarrow x'(t)$$

$$A: \tau_a(t) = x(t-a) \longrightarrow \frac{d}{dt}\Big(x(t-a) \Big) =$$

$$= x'(t-a) \cdot 1 = x'(t-a) = Ax(t-a) = \tau_a Ax(t)$$

Contro esempio INVARIANZA

$$A: x(t) \longrightarrow x(t) \cdot e^t = y(t)$$

$$A: x(t-a) = \tau_a x(t) \longrightarrow \tau_a x(t) \cdot e^t = x(t-a)e^t = A\, \tau_a x(t)$$

che peró NON é uguale! IN QUANTO τ_a si applica solo al segnale IN INPUT x, ma e^t NON é lineare e quindi il prodotto NON é uguale!!!

→ CONTINUITÁ di UN SISTEMA

il SISTEMA

$$A: X \to Y$$

É DETTO CONTINUO SE LA SEQUENZA (SERIE) $A x_n(\cdot) \to A_x$
QUANDO LA SERIE $X_N \to X$

DOVE → É DA INTENDERE tende, ovvero:

$X_N \to X$ significa $\| X_N - X \| = 0$

ovvero $\lim_{n \to +\infty} \| x_n - x \| = 0$

DOVE $\|.\|$ é una NORMA. ESISTONO 3 Norme piú USATE:

Ⓐ Norma Di Convergenza uniforme. (Norma INFINITO)

é USATA per esempio se mi sono AVVICINATO a una soglia

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in I} |x(t)|$$

dove sup é estremo superiore di $x(t)$ e I é intervallo

Ⓑ Norma Di Convergenza media (Norma 1)

tiene conto di valori di aree ovvero nel caso di continuitá tiene conto di differenze di aree

$$\|x\|_1 = \int_I |x(t)| \, dt$$

Ⓒ Norma di convergenza IN ENERGIA (NORMA 2)

$$\|x\|_2 = \left(\int_I |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

si DICE energia perché in fisica questa é la formula dell' energia

FILTRI E FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

il termine Filtro si riferisce sia a un sistema fisico con certe proprietà, sia al suo modello matematico definito in termini di:

Ⓐ Due spazi vettoriali X e Y di input/output (sono segnali) dotati di una nozione di convergenza

Ⓑ Un operatore lineare $A: X \to Y$ continuo e lineare e invariante

Per il principio di linearità ho:

$$1) \quad A\left(\sum_{n=0}^{k} a_n x_n\right) = \sum_{n=0}^{k} a_n A(x_n)$$

E per continuità posso passare al limite quando le somme infinite convergono:

$$1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n A(X_n)$$

Si vedrà che un segnale periodico può essere scritto come somma infinita di segnali monocromatici in questo modo:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi\lambda n t}$$

Perciò in uscita di un filtro si avrà:

$$y = Ax = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} C_N A(e^n_\lambda)$$

Dove

- C_N modifica ampiezza segnale (ρ)
- $e_\lambda(t) = e^{2i\pi\lambda t}$
- N modifica la frequenza del segnale monocromatico puro

NB: $e_\lambda(t) = e^{2i\pi\lambda t} = 1(\cos(2\pi\lambda t) + i\sin(2\pi\lambda t))$

NB: Se elevo a N il segnale ho $e_\lambda^N = e^{2i\pi\lambda N t} = e_{N\lambda}(t)$

NB: IN UN Filtro, $\forall$ valore di t parametro e u variabile, Ho che

$$e_\lambda(t+u) = e_\lambda(t)\, e_\lambda(u) = \tau_{-t}\, e_\lambda(u)$$

L'immagine di questo segnale è $f_\lambda(t+u)$ e ho quindi:

$$f_\lambda(t+u) = A(e_\lambda(t)\, e_\lambda(u)) = e_\lambda(t)\, f_\lambda(u)$$

Proposizione si assuma che e_λ è funzione di input ammissibile per il filtro A. e_λ è detta AUTOFUNZIONE del Filtro A ovvero $\exists$ funzione scalare $H(\lambda)$ tale che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$A(e_\lambda) = H(\lambda)\, e_\lambda$$

La Funzione $H: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è chiamata Funzione di TRASFERIMENTO del Filtro A

FILTRO RC

★ Risposta del sistema SIA v output Filtro (un voltaggio)

Il Filtro è governato dall'equazione differenziale

$$RC\, v'(t) + v(t) = x(t)$$

se esprimo $v(t) = w(t)e^{-\frac{t}{RC}}$ riscrivo l'eq. del Filtro in

$$w'(t) = \frac{1}{RC}\, e^{\frac{t}{RC}}\, x(t)$$

CONTINUA →

SE SI ASSUME che il segnale IN INPUT $x(t)$ è INTEGRABILE IN $(-\infty; t)$ HO

$$w(t) = \frac{1}{RC} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{s}{RC}} x(s)\, ds + K$$ e ANCHE

$$v(t) = \frac{1}{RC} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s)\, ds + K e^{-\frac{t}{RC}}$$

CON $x(s)$ INPUT SEGNALE

K viene DETERMINATO DALLE condizioni AUSILIARI. per esempio se dico che A INPUT zero HO RISPOSTA zero, vedo che $K=0$ POSSO DEFINIRE LA RISPOSTA del SISTEMA A all'INPUT x IN QUESTO modo:

$$v(t) = A(x(t)) = \frac{1}{RC} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s)\, ds$$

DA QUESTA SI EVINCE che A è lineare, realizzabile, INVARIANTE e CONTINUO. per esempio LA NORMA UNIFORME

$$|Ax(t)| \leq \|x\|_\infty \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-s}{RC}} ds = \|x\|_\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

★ Espressione OUTPUT Filtro:

se SCRIVO $h(t) = \frac{1}{RC} e^{\frac{-t}{RC}} u(t)$ dove u è la funzione heaviside, posso scrivere output del filtro come:

$$Ax(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)\, x(s)\, ds = (h * x)t$$

e questa operazione è per definizione LA CONVOLUZIONE di due segnali h e x

Ottengo quindi che

$$A x = h * x$$

Dove H é dettata dal circuito e x é il segnale. h é chiamata risposta impulsiva del sistema e caratterizza il filtro perché conoscere h presume sapere la risposta $\forall$ input x

★ Funzione di trasferimento filtro RC

INCISO CONVOLUZIONE: (wikipedia)

é una operazione tra due funzioni che consiste nell' integrare il prodotto di f traslato per g.

Indica output filtro, dando come input una frequenza pura.

La risposta all'input $x(t) = e_\lambda(t)$ é $v(t) = H(\lambda)\, e_\lambda(t)$ che sostituita da:

$$(2 i \pi \lambda RC + 1)\, H(\lambda)\, e_\lambda(t) = e_\lambda(t)$$

e si ottiene

$$H(\lambda) = \frac{1}{1 + 2 i \pi \lambda RC}$$

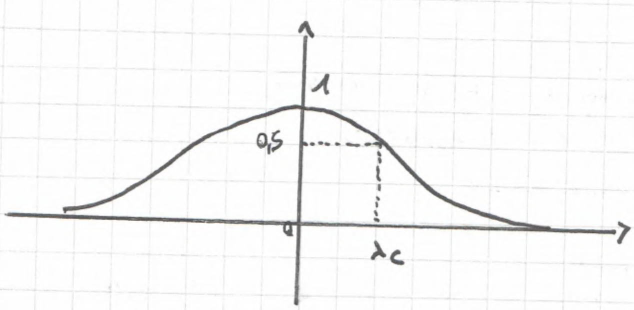
(Calcoli su tablet)

Da questo si ottiene che segnali per cui λ é piccolo vengono attenuati molto poco, mentre con $\lambda \to +\infty$ vengono attenuati sempre di piú. Questo viene appunto chiamato filtro passa basso.

Dal grafico della funzione "Energy spectrum"

$$|H(\lambda)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 \lambda^2 R^2 C^2}$$

Ottengo questo:



La frequenza $\lambda_c = 1/2\pi RC$ é detta frequenza di taglio in quanto a partire da λ_c l'input é attenuato con un fattore $> 1/\sqrt{2}$.

(Su appunti tablet, discorso altri filtri)

FOURIER

☆ Spazi $\mathcal{L}^1(I)$, $\mathcal{L}^2(I)$, $\mathcal{L}^\infty(I)$

Sono spazi di funzioni definiti su intervalli I per cui ha senso la norma 1, 2, ∞

Sia I intervallo aperto $\subseteq \mathbb{R}$ ovvero $I = \mathbb{R}$ oppure $I = (-\infty, a)$ oppure $I = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. $(a<b)$

Considero l'insieme $F(I)$ delle funzioni $f: I \to \mathbb{C}$.

Su questo insieme definisco 2 operazioni:

Ⓐ Somma puntuale: $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$

Ⓑ prodotto per una costante $\lambda \in \mathbb{C}$: $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$

<u>Prop</u>: Se doto $F(I)$ di Ⓐ e Ⓑ, esso diventa spazio vettoriale.

chiedere cosa volere dire in appunti

Definisco quando ha senso lo spazio vettoriale per $F(I)$:

Avere senso significa essere ben definita!

1) $$\|f\|_{\mathcal{L}^1(I)} = \int_I |f(t)|\, dt$$

2) $$\|f\|_{\mathcal{L}^2(t)} = \left(\int_I |f(t)|^2\, dt \right)^{1/2}$$

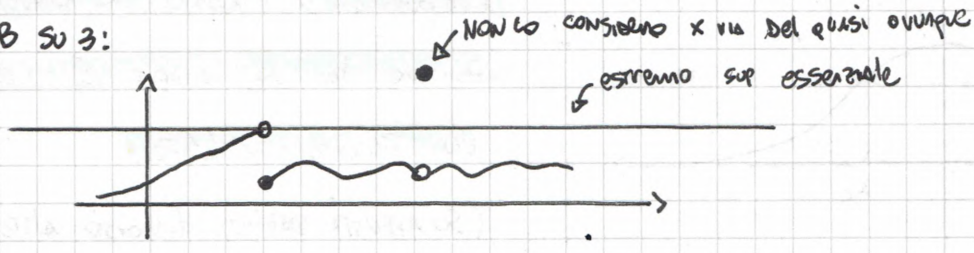
→ I due integrali sono intesi come Lebesgue, ma per noi va bene Riemann.

3) $$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(t)} = \inf \{ C \geq 0 : |f(t)| \leq C \text{ quasi ovunque su } I \}$$ (estremo sup essenziale)

NB: INF è estremo inferiore

NB: se f va a $+\infty$ con asintoto verticale, ③ non è ben definita!

NB su 3:



Osservazione:

$\|f\|_{L^1(I)}$, $\|f\|_{L^2(I)}$ e $\|f\|_{L^\infty(I)}$ NON sono norme!

se per esempio $I = \mathbb{R}$ ed $f(t) = \begin{cases} 1 & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

ho che $\|f\|_{L^1(I)} = 0$, $\|f\|_{L^2(I)} = 0$ e $\|f\|_{L^\infty(I)} = 0$ ma $f \not\equiv \emptyset$

PER OVVIARE ALL'INCONVENIENTE dell'osservazione, IDENTIFICO FUNZIONI COINCIDENTI "Quasi ovunque" IN I. ovvero considero $f=g$ se $f(t) = g(t)$ per quasi ogni $t \in I$.

NB: Quasi ovunque si intende "ogni $t \in I$ eccetto al più un insieme di misura di Lebesgue nulla". Un insieme... viene calcolata la sua misura facendo estremo sup - estremo inf se l'insieme è continuo. se è un insieme di punti la dim = 0.

Insiemi Numerabili ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ ecc) o FINITI hanno misura di lebesgue nulla

Esempio: $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}$ (è seno cardinale ) e

$g(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}$ se $t \neq 0$, 1 altrimenti sono considerate uguali

DEFINIZIONE: Pongo (Spazi NORMATI)

$$- L^1(I) = \{ f : I \to \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^1(I)} < +\infty \}$$

$$- L^2(I) = \{ f : I \to \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^2(I)} < +\infty \}$$

$$- L^\infty(I) = \{ f : I \to \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^\infty(I)} < +\infty \}$$

sottointendendo l'identificazioni tra funzioni q. o. coincidenti

SPAZIO NORMATO L^1 (è come A pagina prima)

PROPOSIZIONE $\left(L^1(I), \|\cdot\|_{L^1(I)}\right)$, $\left(L^2(I), \|\cdot\|_{L^2(I)}\right)$, $\left(L^\infty(I), \|\cdot\|_{L^\infty(I)}\right)$

(STO dicendo che LA NORMA HA senso SULL'INSIEME)

SONO SPAZI DI BANACH ovvero spazi VETTORIALI NORMATI completi e dunque sullo spazio $\|\cdot\|_{L^i(I)}$ è la sua NORMA. RISPETTO AD essa UNA SUCCESSIONE è convergente se e solo se è di CAUCHY.

Proposizione: $\left(L^2(I), \|\cdot\|_{L^2(I)}\right)$ è uno spazio di hilbert ovvero la NORMA $\|\cdot\|_{L^2(I)}$ proviene da un prodotto interno:

$$\|f\|_{L^2(I)} = \sqrt{(f,f)_{L^2(I)}} \quad \text{Dove:}$$

$$(f,g)_{L^2(I)} = \int_I f(t)\,\overline{g(t)}\,dt \quad \forall f,g \in L^2(I)$$

INFATTI

$$\int_I f(t)\,\bar{f}(t)\,dt = \int_I |f(t)|^2\,dt = \|f(t)\|_2^2$$

NB: da questo ho il concetto di ortogonalità: $f \perp g$ se $(f,g)_{L^2(I)} = 0$

NB: fisicamente $\|f\|_{L^2(I)}$ è energia segnale $f \in L^2(I)$.

Proposizione: per $f,g \in L^2(I)$ vale la disuguaglianza di SCHWARZ:

$$\int_I |f(t)|\,|g(t)|\,dt \leq \|f\|_{L^2(I)} \cdot \|g\|_{L^2(I)}$$

DEF SIANO $\phi_N \in L^2(I)$ con $N \in \mathbb{Z}$. L'insieme di funzioni $\{\phi_N\}_{N\in\mathbb{Z}}$ si dice "Base ortonormale" (ortogonale e normalizzata) di $L^2(I)$ SE:

1) $(\phi_N, \phi_M)_{L^2} = \begin{cases} 0 \text{ per } n \neq m & // \perp \text{ tra loro} \\ 1 \text{ per } n = m & (\text{NORMA}_2 = 1) \end{cases}$

2) $\forall f \in L^2(I)$ si ha:

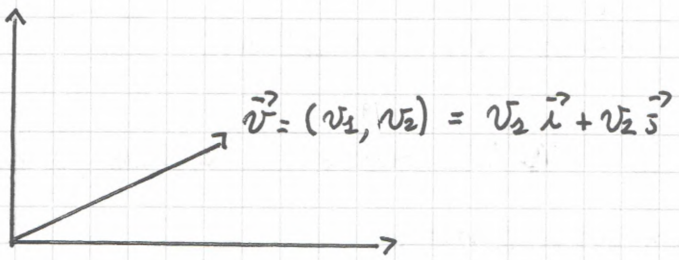
$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \phi_n \quad \leftarrow \text{SERIE DI FOURIER}$$

$$\text{CON} \quad C_N = (f, \phi_N)_{L^2} \quad \leftarrow \text{coefficienti di Fourier}$$

CON convergenza della serie IN NORMA $\|\cdot\|_{L^2(I)}$

NB: Def. analoga se $n \in \mathbb{N}$

ESEMPIO:



ho che $v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$ è UNA serie di FOURIER:

IN $L^2(I)$: $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \phi_n$ LA applico a $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2} C_i \phi_i$ con $\phi = \{\vec{i}, \vec{j}\}$

ϕ_i ↓ versori

↳ $v_N = (v, e_N)$ ovvero i coeff sono il prodotto scalare componente versore e versore ASSOCIATO

Esempio:

$$f(t) = 3\, e_2(t) + 5\, e_3(t) = 3e^{2\pi i 2t} + 5e^{2\pi i 3t}$$

e quindi: $\left.\begin{array}{l} C = \{3,5\} \\ \phi = \{2,3\} \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = (f, 2), \quad C_2 = (f, 3)$

PROPOSIZIONE SIA $\{\phi_n\}$ con $n \in \mathbb{Z}$ (o $n \in \mathbb{N}$) una base ortonormale di $L^2(I)$. Allora $\forall f \in L^2(I)$ si ha che:

$$\| f \|^2_{L^2(I)} = \sum_n |C_n|^2$$

ed é detta uguaglianza di parseval (PITAGORA IN ALTRA SALSA)

NB: se $I = \{1, 2, 3\}$ le funzioni $f: I \to \mathbb{R}$ sono i vettori in $\mathbb{R}^3$ e l'uguaglianza di parseval é pitagora.

NOTA: Dall'espressione di f tramite la sua serie di fourier $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \phi_n$ si comprende intuitivamente che C_n indica quanto della funzione ϕ_n ci sia nel mio segnale f.

Indicheremo in futuro ϕ_N i segnali puri

ESEMPIO: base esponenziale di $L^2(0, a)$: idealizzo un segnale periodico

SIA $I = (0, a)$ con $a > 0$ fissato.

Considero $L^2(I) = L^2((0, a))$ che scrivo così per comodità $L^2(0, a)$

pongo $\lambda = \frac{1}{a}$, ed $e^N_\lambda(t) = \sqrt{\lambda}\, e^{2\pi i n \lambda t}$ per $n \in \mathbb{Z}$

Allora $\forall n \in \mathbb{Z}$: $e^n_\lambda \in L^2(0, a)$

L'insieme di funzioni $\{e^N_\lambda\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é una base ortonormale di $L^2(0, a)$

Dunque $\forall f \in L^2(0, a)$:

f come sovrapp. di freq. pure

$$\to f(t) = \lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_m e^{2\pi i n \lambda t} \quad \Leftarrow \text{SERIE DI FOURIER di } f \text{ rispetto alla base esponenziale.}$$

$$\text{con } a_n = \int_0^{1/\lambda} f(t) e^{-2\pi i n \lambda t} dt \quad \Leftarrow \text{coeff. di fourier di } f \text{ rispetto alla base esponenziale}$$

NOTA: i coefficienti di fourier a_m indicano intuitivam. quanto della f pura $e^{2\pi i n \lambda t}$ é presente in segnale f.

(14)

NOTA: ora le frequenze sono rappresentate sia da $\cos(2\pi n\lambda t)$ che da $\sin(2\pi n\lambda t)$ dunque la loro presenza in segnale f è quantizzata da coeff. α_n e β_n

NOTA: tutto quello visto per $L^2(0,a)$ si adatta facilmente ad $L^2(\alpha,\beta)$ $\forall$ intervallo $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ tramite il cambio di variabile lineare $s = \frac{a}{\beta-\alpha}(t-\alpha)$

CONVOLUZIONE

DEFINIZIONE = date due funzioni $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, chiamo convoluzione di f e g la funzione:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\, g(s)\, ds$$

Proposizioni:

Ⓐ $(f*g)(t) = (g*f)(t)$ proprietà commutativa

Ⓑ se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ allora $f*g$ esiste ed appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$, inoltre $\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$

Ⓒ se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $(f*g)$ esiste e appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ inoltre,

$$\|f*g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Ⓓ se $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ allora $(f*g)$ esiste e appartiene a $L^\infty(\mathbb{R})$ inoltre

$$\|f*g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$\rightarrow$

NOTA = più in generale, per $p \in [1, +\infty)$ definisco gli spazi

$$L^p(I) = \left\{ f: I \to \mathbb{C} \mid \int_I |f(t)|^p \, dt < +\infty \right\}$$

Su $L^p(I)$ si definisce la norma $\|f\|_{L^p(I)} = \left(\int_I |f(t)|^p \right)^{1/p}$

ottenendo spazi di Banach su cui vale

la seguente proprietà:

se $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ con $p, q \in [1, \infty]$

Allora $f * g$ è ben definita ed appartiene ad $L^r(\mathbb{R})$ con

$r \in [1, \infty]$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ (con $\frac{1}{\infty} = 0$)

vale inoltre $\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}$

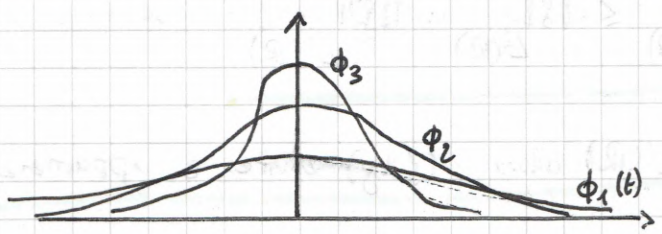
Lo spazio delle distribuzioni $S'(\mathbb{R})$

Per rappresentare fenomeni di tipo impulsivo, (es: masse in un punto, cariche elettriche, esplosione ...) le funzioni non bastano

Supponiamo che $\phi(t) \geq 0$ rappresenti la densità di carica lungo i punti t di un filo illimitato coincidente con l'asse delle ascisse $\mathbb{R}_t$.

Se la carica totale è 1, avremo $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \, dt$.

Immagino ora che la carica si distribuisca secondo densità $\phi_n(t)$ con $n = 1, 2, \dots$ che si accumula sempre di più nel punto $t = 0$ (al crescere di n) secondo questo:



il fatto che la carica resti invariata si esprime così:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(t) \, dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Al limite avremo una carica concentrata in $t = 0$.

→

chiamerò $\delta(t)$ questa distribuzione ideale di carica. per $\delta(t)$ dovrà valere quindi:

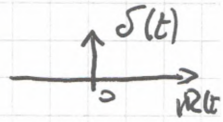
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & se\ t \neq 0 \\ 1 & se\ t = 1 \end{cases} \qquad e\ anche \qquad 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt$$

e quindi $\delta(t)$ non rappresenta la distribuzione di carica nulla $\phi(t) \equiv 0$
tuttavia, $\delta(t)$ differisce dalla funzione nulla solo in $t=0$, (insieme di misura nulla) e quindi se fosse $f \in L^1(\mathbb{R})$ o $L^2(\mathbb{R})$ dovrebbe essere identificata con $\phi(t) \equiv 0$.

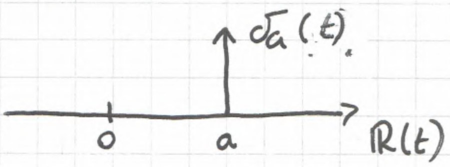
Questo mostra intuitivamente che lo strumento $\delta(t)$ non può essere una funzione.

Anche in teoria dei segnali è utile considerare segnali ideali del tipo $\delta(t)$

Rappresento graficamente $\delta(t)$ con una freccia verso l'alto



e in modo analogo le sue traslate $\delta_a(t)$, $a \in \mathbb{R}$ come distribuzioni concentrate in $a \in \mathbb{R}$.



Scriviamo anche $\delta_a(t) = (\tau_a \delta)(t)$ usando il simbolo di traslazione.

Si tratta ora di trovare uno spazio che contenga sia i segnali rappresentati da funzioni di $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, o $L^\infty(\mathbb{R})$, sia quelli rappresentati da distribuzioni δ_a.

Lo spazio che soddisfa ciò è $S'(\mathbb{R})$ delle distribuzioni temperate.

Come oggetti matematici, gli elementi di $S'(\mathbb{R})$ (ovvero le distribuzioni temperate) sono "funzionali lineari continui"

<u>Proposizione</u> = $S'(\mathbb{R})$ contiene $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ (e quindi tutte le funzioni costanti), tutte le distribuzioni $\delta_a(t)$ con $a \in \mathbb{R}$

Proposizione: Gli elementi di $S'(\mathbb{R})$ si possono considerare come limiti in senso opportuno di successioni di funzioni

ES: $\delta(t)$ come limite per $n \to +\infty$ di ϕ_n

Proposizione: posso estendere a $S'(\mathbb{R})$ tutte le operazioni definite su funzioni, in particolare:

- Somma e prodotto di funz. per costante
- Convoluzione
- moltiplicazione puntuale di funzione
- Traslazione τ_a, $a \in \mathbb{R}$
- modulazione μ_b (ovvero prodotto $e^{2\pi i b t}$)
- riflessione, ovvero l'operatore che su funzione agisce come $\tilde{f}(t) = f(-t)$.

  In particolare vale la formula $\tilde{\delta}_a = \delta_{-a}$

  e quindi $\tilde{\delta} = \delta$

LA TRASFORMATA DI FOURIER

NB: NOTAZIONE

$$\widehat{f(at)}(\omega) = F[f(at)](\omega)$$

$$\hat{f} = F[f(t)]$$

Definizione: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, chiamiamo "Trasformata di fourier" di f la funzione

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t\omega} \cdot f(t)\, dt}$$

dipendente da $\omega \in \mathbb{R}$, ogni volta che l'integrale di lebesque ha senso. L'operatore che associa $\hat{f}$ ad f viene indicato con F, scrivendo quindi $F: f \to \hat{f}$ ovvero $\hat{f}(\omega) = F(f)(\omega)$

NOTA: LA TRASFORMATA DI FOURIER è ben definita per $f \in L^1(\mathbb{R})$, INFATTI:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}: \ |\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t} f(t)\, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2\pi i \omega t} f(t)|\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Quindi:

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)| \leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

NB: Per $f \in L^2(\mathbb{R})$ ed $f \in S'(\mathbb{R})$, l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t} f(t)\, dt$ non ha in genere senso. Si può tuttavia estendere la definizione di trasformata di fourier anche in questi casi. Qua supponiamo di aver fatto l'estensione.

NB: $f(t)$ esprime segnale in funzione di tempo

$\hat{f}$ esprime segnale in funzione frequenza.

→

Proposizione = l'operatore $\mathcal{F}$ gode di queste proprietà:

Ⓐ $\tilde{\mathcal{F}}: f \to \hat{f}$ è lineare su tutti gli spazi vettoriali su cui è definito

Ⓑ $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ è continuo, in particolare

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Ⓒ $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ è un isomorfismo isometrico, in particolare l'uguaglianza $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ (uguaglianza di Plancherel) esprime "conservazione dell'energia" di un segnale.

Ⓓ $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}) \to S'(\mathbb{R})$ è una biiezione bicontinua

Ho quindi questo schema:

$f(t)$ = rappr segnale rispetto a tempo t

$\|f\|^2_{L^2}$ = Energia totale segnale in funz. tempo

$|f(t)|^2$ = distrib. energia del segnale rispetto a tempo t

$\hat{f}(\omega)$ = rappr. segnale rispetto a frequenza ω

$\|\hat{f}\|^2_{L^2}$ = energia totale segnale in funz. freq.

$|\hat{f}(\omega)|^2$ = distrib energia segnale rispetto a frequenza ω

L'interpretazione di $\hat{f}(\omega)$ come rappr. del segnale rispetto alle frequenze si basa su queste proprietà:

Ⓐ $\hat{1} = \delta$; $\hat{\delta} = 1$

Ⓑ $\forall \phi \in S'(\mathbb{R})$:

- $\mathcal{F}[\tau_a \phi] = \mu_{-a} \hat{\phi}$
- $\mathcal{F}[\mu_a \phi] = \tau_a \hat{\phi}$

DIMOSTRAZIONE: DI PRIMA: CASO PARTICOLARE $\phi \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}[\tau_a \phi](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t} \phi(t-a)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega (s+a)} \phi(s)\, ds = e^{-2\pi i \omega a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega s} \phi(s)\, ds =$$

$$= (\mu_{-a} \hat{\phi})(\omega)$$

DIMOSTRAZIONE DI SECONDA CON $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ È DEL TUTTO ANALOGA

Proposizione (proprietà) = $\boxed{\mathcal{F}[e^{2\pi i a t}] = \delta_a, \text{ con } a \in \mathbb{R}}$

dim: DA proprietà prima ho:

$$\mathcal{F}[e^{2\pi i a t}] = \mathcal{F}[\mu_a 1] = \tau_a \hat{1} = \tau_a \delta = \delta_a$$

NB: CON QUESTA FORMULA È possibile calcolare FACILMENTE $\hat{f}$ di $\sin(2\pi a t)$ e di $\cos(2\pi a t)$

NOTA: LA proposizione precedente È CRUCIALE IN TEORIA dei segnali: mostra che la trasformata di fourier INDIVIDUA LA FREQUENZA pura $a \in \mathbb{R}$ del segnale $e^{2\pi i a t}$ associando a questo segnale una delta di dirac δ_a centrata nel punto $\omega = a$. Ciò giustifica l'interpretazione di $\hat{f}(\omega)$, o meglio $|\hat{f}(\omega)|^2$ con $f(t)$ generico segnale in $S'(\mathbb{R})$ come distribuzione delle frequenze contenute nel segnale.

CONSEGUENZA = Per linearità di $\mathcal{F}$, LA trasformata di fourier di un segnale $f(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{2\pi i \lambda_k t}$ contenente le freq $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sarà: $\hat{f}(\omega) = \sum_{k=1}^{N} c_k \delta_{\lambda_k}$

ESERCIZIO calcolare $\hat{f}(\omega)$ della funzione

$$\chi_{[-a,a]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-a,a] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{con } a > 0$$

$$F[\chi_{[-a,a]}](\omega) = \int_{-a}^{a} e^{-2i\pi \omega t}\, dt = \left[\frac{e^{-2\pi i \omega t}}{-2\pi i \omega} \right]_{-a}^{a} = \frac{\operatorname{sen}(2a\pi\omega)}{\pi\omega} \overset{def}{=} \operatorname{senc}_{2a}(\omega)$$

Questa trasformata serve nello studio del filtro passa banda

Proposizioni:

1) se $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed $\hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\omega}\, \hat{f}(\omega)\, d\omega \quad \text{q.o.} \quad \text{(Formula inversione)}$$

2) se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\boxed{F^2[f](t) = f(-t) \quad \text{q.o.},\ t \in \mathbb{R}} \leftarrow \left(F^2[f] = \tilde{f} \text{ in genere } \forall f \in S'(\mathbb{R}) \right)$$

3) se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ allora

A) $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$

B) $\widehat{f*g} = \hat{f}\,\hat{g}$ ← vale anche per $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$

Osservazioni

- $F: S'(\mathbb{R}) \to S'(\mathbb{R})$ è un isomorfismo e in particolare una biiezione, esiste quindi l'inversa F^{-1} e vale che $f = F^{-1}[F[f]]$ $\forall f \in S'(\mathbb{R})$

- Nella prop 1 si afferma che nel caso $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, l'operatore F^{-1} si esprime tramite l'integrale specificato sopra.

- La 2 è diretta conseguenza della 1

- nella ③ noto che

-> nel caso a) il primo e il secondo membro $\in L^\infty(\mathbb{R})$ infatti:

$$f,g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow fg \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{fg} \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ ed}$$

$$f,g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f},\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} * \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R})$$

L'uguaglianza a) si può quindi intendere in $L^\infty(\mathbb{R})$, oltre che in $S'(\mathbb{R})$

-> nel caso b) invece abbiamo

$$f,g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow f*g \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{f*g} \in S'(\mathbb{R}) \text{ e}$$

$$f,g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f},\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$$

quindi l'uguaglianza b) afferma che per $f,g \in L^2(\mathbb{R})$, la distrib $\widehat{f*g} \in S'(\mathbb{R})$ è una funzione che coincide con la funzione $\hat{f}\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$.

FILTRI DI CONVOLUZIONE

DEF: DATA UNA FUNZIONE $h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ diciamo "filtro di convoluzione" l'operazione

$$\boxed{A: f \longrightarrow f*h = Af}$$

Propos: SIA $h \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'operatore A è lineare, invariante per traslazioni e continuo da $L^\infty(\mathbb{R})$ in $L^\infty(\mathbb{R})$, e da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$

Dimostraz: · linearità: ovvia visto che Af è definito da $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\,h(s)\,ds$

· invarianza per traslazioni

$$(A(\tau_a f))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f((t-s)-a)\,h(s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f((t-a)-s)\,h(s)\,ds = (Af)(t-a)$$

· Continuità: da prop. di convoluzione ho:

$$\|f*h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot \|h\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{per } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{, ed}$$

$$\|f*h\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \|h\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{per } f \in L^2\mathbb{R}$$

NOTA VISTO A come operatore $A: L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ lineare, continuo e invariante per traslazioni, RISULTA DEFINITA una "funzione di trasferimento" $H(\lambda)$ tale che:

$$A e_\lambda = H(\lambda)\, e_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ con } e_\lambda = e_\lambda(t) = e^{2\pi i \lambda t}$$

Notare che non ha senso applicare A ad e_λ poiché $e_\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$

Le proposizioni che seguono mostrano la relazione tra $\hat{f}$ e filtri di convoluz.

Prop = Sia $h \in L^1(\mathbb{R})$ ed $A: f \in L^\infty(\mathbb{R}) \to f * h \in L^\infty(\mathbb{R})$ il corrispondente filtro di convoluzione con funzione di trasferimento H. Allora

$H = \hat{h}$

DIMOSTRAZIONE = poiché $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda(t) = e^{2\pi i \lambda t} \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow e_\lambda$ input ammissib.

da def f. di trasferimento ho $(e_\lambda * h)(t) = H_\lambda e_\lambda(t)$

poiché $h \in L^1(\mathbb{R})$ posso calcolare direttamente:

$$(e_\lambda * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \lambda (t-s)}\, h(s)\, ds = e^{2\pi i \lambda t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \lambda s}\, h(s)\, ds$$

$$= e_\lambda(t) \cdot \hat{h}(\lambda)$$

Dunque $\hat{h}(\lambda) e_\lambda(t) = H(\lambda) e_\lambda(t)\ \forall t$. posto $t=0$, ho $\hat{h}(\lambda) = h(\lambda)$

PROPOSIZIONE = Fisso come prima $h \in L^1(\mathbb{R})$ ma suppongo $f \in L^2(\mathbb{R})$. ho $A: f \in L^2(\mathbb{R}) \to f * h \in L^2(\mathbb{R})$ e vale:

$$f * h = F^{-1}[\hat{f}\hat{h}]$$

DIM: per le proprietà della convoluzione, $f \in L^2$, $h \in L^1 \Rightarrow f \cdot h \in L^2$

INOLTRE $f \cdot h = F^{-1} F[f \cdot h] = F^{-1}[\hat{f}\hat{h}]$

(19) **NOTA:** La prop. precedente mostra che l'azione di un filtro di convoluzione si può scomporre in 3 fasi:

1) Analisi frequenze tramite T. d. Fourier: $f \to \hat{f}$
2) filtro frequenze tramite moltiplicazione di $\hat{f} \cdot \hat{h}$
3) Ricostruzione segnale filtrato tramite T. d. Fourier inversa $\hat{f}\hat{h} \to \tilde{\mathcal{F}}[\hat{f}\hat{h}]$

I filtri di questo tipo si dicono anche stazionari, poiché l'azione di filtraggio nella fase 2 avviene in modo indipendente dal tempo. Ad esempio non posso filtrare frequenze in una certa banda fino a un istante t_0 e in un altra banda dopo t_0 (con gabor si però!)

NOTA: Le proprietà precedenti si estendono a parecchi casi in cui $h \notin L^1(\mathbb{R})$. Particolarmente significativo sarà ad esempio il caso $h(t) = \mathrm{sinc}_{2a}(t) = \frac{\mathrm{sen}(2a\pi t)}{\pi t}$.
In tutti questi casi vale

Proprietà: il filtro di convoluzione $f \to f * h$ è causale sse $\mathrm{sup}\, h \subseteq [0; +\infty)$

DIMOSTRAZIONE:

(1) sia $\mathrm{sup}\, h \subseteq [0; +\infty)$, e sia $f(t) = 0 \quad \forall t \leq t_0$.

allora $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\, h(s)\, ds = \int_{0}^{+\infty} f(t-s) h(s)\, ds$

per $t \leq t_0$ ho $t - s \leq t_0 - s \leq t_0 \Rightarrow f(t-s) = 0 \Rightarrow (f*h)(t) = 0$

(2) Sia $f \to f*h$ causale, per assurdo sia $t_0 < 0$ tale che $h(t_0) \neq 0$.
Suppongo $h(t_0) > 0$. ci limitiamo al caso di h continua in t_0, allora esistono $a, b > 0$ t.c. $-b < t_0 < -a$ e $h(t) > 0 \quad \forall t \in [-b, -a]$

Allora per $f(t) = \chi_{[0, b-a]}(t)$ ho

$$(f*h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,b-a]}(t-s)\, ds = \int_{t-(b-a)}^{t} h(s)\, ds \underset{\text{per } t = -a}{=} \int_{-b}^{-a} h(s)\, ds > 0 \quad *$$

* Dunque non c'è causalità poiché si ha $\chi_{[0,b-a]}(t) = 0 \quad \forall t < 0$ mentre $(\chi_{[0,b-a]} * h)(-a) > 0$

ESEMPIO: il filtro di convoluzione $f \to f \cdot \text{sinc}_{2a}$ è un filtro passa basso ideale, non causale (irrealizzabile). Infatti le seguenti uguaglianze, valide con $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\text{sinc}_{2a} \in L^2(\mathbb{R})$:

$$f * \text{sinc}_{2a} = F^{-1} F[f \cdot \text{sinc}_{2a}] = F^{-1}[\hat{f} \cdot \widehat{\text{sinc}_{2a}}] = F^{-1}[\hat{f} \cdot \hat{\hat{x}}_{[-a,a]}] =$$

$$= F^{-1}[\hat{f} \cdot \tilde{x}_{[-a,a]}] = F^{-1}[\hat{f} \cdot x_{[-a,a]}] \Big(\text{essendo } \tilde{x}(t)_{[-a,a]} = x_{[-a,a]}(-t) =$$

$$= x_{[-a,a]}(t) \Big)$$

mostrano che le frequenze ω con $|\omega| > a$ vengono tagliate dalla funzione di trasferimento $x_{[-a,a]} = \widehat{\text{sinc}_{2a}}$. Il filtro è tuttavia non realizzabile in quanto $\text{sup}\ \text{sinc}_{2a} \subseteq [0, +\infty)$

ESEMPIO: il circuito RC è un filtro di convoluzione realizzabile che costituisce una approssimazione del filtro passa basso ideale.

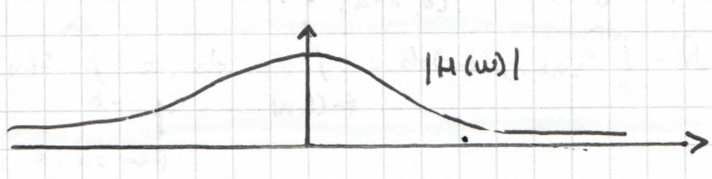
Infatti: $RCv'(t) + v(t) = f(t)$ con $f(t)$ = input, $v(t)$ = output

porta a un filtro $f(t) \to \boxed{RC} \to v(t) = (f * h)(t)$

con $h = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} x_{[0,+\infty]}(t)$, e quindi $\text{sup}\ h \subseteq [0, +\infty)$

ovvero il filtro è realizzabile.

Inoltre la f di trasferimento è $H(\omega) = \hat{h}(\omega) = \frac{1}{1 + 2\pi i \omega RC}$ e il suo modulo è $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \omega^2 R^2 C^2}}$ il cui grafico è considerabile come una approssimazione di una f. del tipo $x_{[-a,a]}$ che è una funzione di trasferim. del filtro passa basso ideale.



Principio di indeterminazione di Heisemberg

→ Forma qualitativa del principio:

sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sia $a>0$. poniamo $d_a f(t) = f(at)$

NB: se $a>1$ allora $d_a f$ è una contrazione di $f(t)$

se $0<a<1$ allora $d_a f$ è una dilatazione di $f(t)$

Avremo

$$\widehat{d_a f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t} f(at)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \frac{\omega}{a} s} f(s) \frac{1}{a}\, ds =$$

posto $s = at$ e $ds = a\,dt$

$$= \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{a} d_{\frac{1}{a}} \hat{f}(\omega)$$

e dunque, la trasformata di Fourier, trasforma d_a in $d_{\frac{1}{a}}$ ossia dilatazioni in contrazioni e contrazioni in dilatazioni.

In teoria quantistica, si ha questo principio di indeterminazione che dice che non posso sapere sia velocità che posizione di una particella. In teoria dei segnali ho una cosa molto simile: maggiore è la dispersione nel tempo di un segnale (durata) minore è la sua dispersione nelle frequenze (ovvero imprecisione in determinazione delle frequenze). Vale anche il contrario! (Anche perché al limite per un segnale istantaneo il concetto di frequenza perde di senso!).

Dato un segnale f, le funzioni $|f(\omega)|^2$ e $|\hat{f}(\omega)|^2$ possono essere interpretate in modo equivalente come due modi di esprimere la distribuzione di energia del sistema. il primo secondo il tempo e il secondo secondo le frequenze.

→

LA QUANTITÀ:

$$E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 1 \Leftarrow 1 \text{ se energia è quantizzata}$$

Rappresenta energia TOTALE del Segnale. L'uguaglianza tra i due integrali è detta uguaglianza di parseval e in questo contesto è solo una espressione della legge di conservazione dell'energia: E_{TOT} è invariata sia se guardo in tempo o nelle frequenze

<u>Proposizione</u>: sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, tale che $\|f\|_2 = 1$. allora avrò che

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{4\pi}$$

NB: se $\|f\|_2 \neq 1$ allora Applicando sopra alla funzione $f/\|f\|_2$ ho:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \omega \|\hat{f}(\omega)\|_2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{4\pi} \cdot \|f\|_2^2$$

NB: il I° membro potrebbe anche essere INFINITO.

NOTA: Siano $m = \int_{\mathbb{R}} x |f(x)|^2 dx$, $\mu = \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{f}(\omega)| d\omega$ le medie di $|f|^2$ e $|\omega|^2$

① È noto che

$$\begin{cases} \min_{a \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 |f(x)|^2 dx = VAR(f) \\ \min_{b \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\omega-b)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} (\omega-\mu)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = VAR(\omega) \end{cases}$$

② per la proposizione precedente ho $VAR(f) \cdot VAR(\hat{f}) \geq 1/4\pi$

DIMOSTRAZIONE:

(1). Per brevità poniamo $\rho(x) = |f(x)|^2$. Diamo due dimostrazioni:

(1ª dim) $$\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 \rho(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(x)\, dx - 2a \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x \rho(x)\, dx}_{m} + a^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, dx}_{1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(x)\, dx - 2am + a^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(x)\, dx + m^2 - 2am + a^2 - m^2 =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(x) dx + (m-a)^2 - m^2$$ che è minima se $a = m$

(2ª dim) considero la funzione $\varphi(a) = \int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 \rho(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(x) dx - 2am + a^2$

$$\varphi'(a) = \frac{d}{da} \int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 \rho(x) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{da} (x-a)^2 \rho(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 2(x-a) \rho(x)\, dx = 2\left(\int x \rho(x)\, dx - a \int \rho(x)\, dx \right) =$$

$2(m-a) = 0 \implies a = m$, ma $\lim_{a \to \pm\infty} \varphi(a) = +\infty$ e quindi $a = m$ è punto di minimo

(2). $\boxed{\Leftarrow}$ ovvia dalla (1)

$\boxed{\Rightarrow}$ poiché la proposizione vale $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ la applico a $\mu_b \tau_a f$:

$$\frac{1}{16\pi^2} \leq \int x^2 |\mu_b \tau_a f(x)| dx \cdot \int \omega^2 |\widehat{\mu_b \tau_a f}(\omega)|^2 d\omega =$$

$$\int x^2 |f(x-a)|^2 dx \cdot \int \omega^2 |\tau_b \mu_{-a} \hat{f}(\omega)|^2 d\omega =$$

$$\int (t+a)^2 |f(t)|\, dt \cdot \int \omega^2 |e^{-2\pi i a(\omega-b)} \hat{f}(\omega-b)|^2 d\omega =$$

$$\int (t+a)^2 |f(t)|^2 dt \cdot \int (\lambda+b)^2 |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda \quad (\forall a,b \in \mathbb{R}$$

$\square$

$\rightarrow$

Per esprimere la dispersione del segnale rispetto a tempo e frequenze, introduco queste definizioni:

- $\sigma_f^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx$ è disp. energia rispetto al tempo.

- $\sigma_{\hat{f}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$ " " alle frequenze

E il valore definito da $\Delta x = \dfrac{\sigma_f^2}{E_f}$ esprime la dispersione relativa del segnale nel tempo ed è chiamato "durata effettiva del segnale f"

Analogamente $\Delta \omega = \dfrac{\sigma_{\hat{f}}^2}{E_f}$ viene chiamato "banda di frequenze effettiva" ed esprime dispersione rispetto alle frequenze.

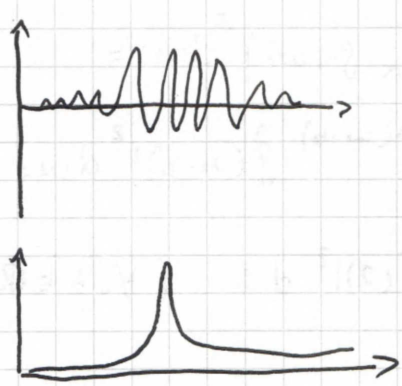
Il principio di indeterminazione di Heisenberg è una limitazione inferiore al prodotto $\Delta x \cdot \Delta \omega$ e in particolare vale

$$\Delta x \cdot \Delta \omega < \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 = 1/(16\pi^2)$$

E la conseguenza di ciò è che:

"Non si può avere dispersione nel tempo e nelle frequenze entrambe piccole a piacere"

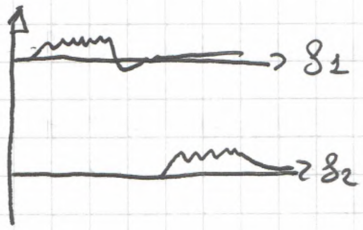
Esempio



Un segnale lunga durata corrisponde a Fourier stretto

Un segnale breve ha Fourier largo.

ESEMPIO 2



questi due segnali f_1 e f_2 con freq. uguale ma con tempi $\neq$ hanno stessa T. D. Fourier

-> LIMITI DELLA TRASFORMATA di FOURIER

Se un segnale è somma di 2 frequenze, LA T.d.F. avrà due picchi nelle 2 frequenze. MA AVRÀ 2 picchi anche se il segnale viene composto dalla prima frequenza fino a t_0 e dalla seconda frequenza da t_0 IN poi
IN pratica CON FOURIER so che vi sono frequenze, ma non ho idea del quando appaiono!

TRASFORMATA DI GABOR

Formalizziamo un metodo che consenta di individuare le frequenze del segnale evidenziando anche gli intervalli di tempo in cui essi compaiono. Dovremo quindi analizzare il segnale un "pezzo" alla volta.
Matematicamente si tratta di "Tagliare" il segnale moltiplicandolo per una funzione finestra che viene fatta spostare nel tempo. Successivamente applico fourier al segnale tagliato. Lo spostamento si effettua tramite una traslazione, ovvero considerando $g(t-x)$ che consente di analizzare tutto il segnale in funzione del tempo x

<u>Definizione</u>: Fissata una funzione finestra opportuna $g \neq 0$, la trasformata di Gabor di f rispetto a g è data da:

$$V_g f(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \omega t} \cdot f(t) \cdot \overline{g(t-x)} \, dt \quad \forall x, \omega \in \mathbb{R}$$

NB: il complesso coniugato $\overline{g}$ compare per ragioni matematiche che esulano. ->

Come Fourier, anche gabor é in genere una funzione in $\mathbb{C}$

e per rappresentarla, considereremo semplicemente il modulo $|V_g f(x, \omega)|$

A diff. di Fourier, gabor é funzione di due variabili: frequenza e tempo. e

quindi fornisce info sia su freq. che sul tempo.

NB: la scelta di g non é casuale. se scelgo f. non continue pemo avere problemi e irregolarità, perciò si preferisce spesso usare curve Gaussiane, in quanto continue e in quanto approssimano bene la finestra Rettangolare ~~(il problema é che si creano segnali che non dovrebbero esserci...)~~

(VEDI GRAFICI pg 29 gabor.pdf)

Nel grafico 2 si vede che in zero parrebbe esserci entrambi i segnali. Si potrebbe restringere la finestra ma in questo caso Heisenberg torna a dare problemi: una finestra stretta ho ottime info sui tempi ma pessime sulle frequenze, e con viceversa il contrario.
Si ottiene un informazione migliore prendendo sia finestra più piccola e più grande, combinandole opportunamente. Anche qui però vengono generati artifatti particolari...

Noto quindi in conclusione che il principio di indeterminazione di Heisenberg é una problematica intrinsecamente legata a Gabor e Fourier

(23) → La partitura musicale (Vedi su pdf parallelismo Gabor - spartito)

→ Applicazioni: Analisi, elaborazione e Ricostruzione di segnali.

Dopo aver costruito la T. d. Gabor posso ripulire i segnali da eventuali disturbi. Questo è un processo in 3 fasi

① ANALISI:

il segnale viene analizzato nello spazio frequenza tempo tramite Gabor.

dato f ho quindi $f(x) \longrightarrow V_g f(x,\omega)$

NB: esistono altre trasformate oltre a Gabor!

② Elaborazione

Qua cerco di distinguere frequenze di disturbo da segnali voluti.

Questo viene fatto moltiplicando il T.D. Gabor per una f. arbitraria che nelle zone di disturbo valga zero e in quelle di segnale 1.

Definisco questa funzione come $a(x,\omega)$. il secondo passo è quindi:

$$V_g f(x,\omega) \longrightarrow V_g f(x,\omega)\, a(x,\omega)$$

NB: a seconda di a, oltre a eliminare disturbi, posso anche amplif. il segnale voluto!

③ Ricostruzione

A questo punto il segnale è ricostruito a partire da sua rappr. tempo frequenza applicando un operazione "inversa di Gabor". Questa formula è detta "Formula di Ricostruzione":

$$V_g f(x,\omega)\, a(x,\omega) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} a(x,\omega)\, V_g f(x,\omega)\, e^{2\pi i \omega t} g(t-x)\, dx\, d\omega$$

→

L'applicazione di 1, 2 e 3 prende il nome di operatore di localizzazione:

$$\left.f(x) \to \tilde{f}(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{2d}} \underbrace{a(x,\omega)\, \underbrace{V_g f(x,\omega)}_{\text{analisi}}}_{\text{elaborazione}}\, e^{2\pi i \omega t}\, g(t-x)\, dx\, d\omega}_{\text{Ricostruzione}} \right\} \text{operatore di localizzazione}$$

Operatori di questo tipo sono utili in quanto eliminano frequenze in funzione del tempo a seconda di $a(x,\omega)$. Questi operatori sono anche detti filtri non stazionari. (un loro uso x esempio é pulire vecchie registrazioni con fruscii e altri disturbi)