Algoritmi greedy:

Proprietà: KNAPSACK-GREEDY è potenzialmente pessimo (soglia di ∞)

Dimostrazione:

$$\max z = 2x_1 + b \cdot x_2$$

soggetto a $x_1 + b x_2 \leq b$ $\quad \forall b \geq 2$

$x_1, x_2 \in \{0,1\}$

KNAPSACK-GREEDY: $x = (1,0)$, $z = 2$

Sol. ottima: $x^* = (1,0)$, $z^* = b$ $\qquad \lim_{b \to \infty} \frac{z^*}{z} = \frac{b}{2} = \infty$ ■

Proprietà: KNAPSACK-GREEDY-1 (patch KNAPSACK-GREEDY) è di 1-approssimazione

Dimostrazione:

TESI: $OPT/A \leq 2$

$$\frac{OPT(I)}{A(I)} = \frac{p(S^*)}{p(S)} \leq$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^{k-1} p_i + p_k}{p(S)} \leq \qquad \left(p(S^*) \leq \sum_{i=1}^{k-1} p_i + \underbrace{\frac{b - \sum_{i=1}^{k-1} w_i}{w_k}}_{\leq 1} p_k \right)$$

k elemento di split

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^{k-1} p_i}{p(S)} + \frac{p_k}{p(S)} \leq$$

$$\leq 2 \qquad \left(\frac{p_k}{p(S)} \leq 1 \text{ e } \frac{\sum_{i=1}^{k-1} p_i}{p(S)} \leq 1 \right)$$

■

Proprietà: KNAPSACK-APPROX (PTAS per K.P.) è di $\frac{1}{k}$-approssimazione

Dimostrazione:

TESI: $OPT/A \leq 1 + 1/k$

IPOTESI:
- S^* insieme di oggetti $x_i = 1$ della sol. ottima
- S insieme di oggetti con $x_i = 1$ nella sol. dell'algoritmo
- $S = A \cup B$ e $S^* = A \cup B^*$ con
  - $|A| = k$, elementi di più alto profitto in S^*
- Numerazione $[1], [2], \dots, [N]$ elementi non in A per cui

$$\frac{p[1]}{w[1]} \geq \frac{p[2]}{w[2]} \geq \dots \geq \frac{p[N]}{w[N]}$$

- $[m]$ primo elemento in $[1],[2],\dots,[N]$ scartato da KNAPSACK-GREEDY, quindi $[m] \notin B$ ma $[m] \in B^*$
  - esiste sempre altrimenti $B = B^*$

$$\frac{OPT(I)}{A(I)} = \frac{p(S^*)}{p(S)} = \frac{p(A)+p(B^*)}{p(A)+p(B)} \leq$$

$$\leq \frac{p(A)+\sum_{i=1}^{m-1} p[i] + p[m]}{p(A)+p(B)} \leq \qquad \Big(p(B^*) \leq \overbrace{\sum_{i=1}^{m-1} p[i] + \alpha p[m]}^{\text{upper bound continuo}}\Big)$$

$$\leq \frac{p(A)+\sum_{i=1}^{m-1} p[i]}{p(A)+p(B)} + \frac{p[m]}{p(A)+p(B)} \leq$$

tutti presenti in B

$$\leq 1 + \frac{p[m]}{p(A)+p(B)} \leq \qquad \left(\frac{p(A)+\sum_{i=1}^{m-1} p[i]}{p(A)+p(B)} \leq 1\right)$$

$$\leq 1 + \frac{1}{k} \qquad \left(\forall i \in A.\ \frac{p_i}{w_i} \geq \frac{p[m]}{w[m]} \text{ e } |A| = k \text{ quindi } \frac{p[m]}{p(A)} \leq \frac{1}{k} \text{ e quindi } \frac{p[m]}{p(A)+p(B)} \leq \frac{1}{k}\right)$$

■

Proprietà: KNAPSACK-FPTAS è di ε-approssimazione

Dimostrazione:

TESI: $p(S^*)(1-\varepsilon) \leq p(S) \longrightarrow p(S^*) \leq p(S) + \varepsilon\, p(S^*)$

IPOTESI:

- $k = \varepsilon \cdot \frac{p_{max}}{m} \longrightarrow km = \varepsilon\, p_{max}$
- $\forall i.\ p_i' = \left\lfloor \frac{p_i}{k} \right\rfloor \longrightarrow \forall i.\ k p_i' \leq \underline{p_i \leq (k+1) p_i'}$

$$p(S^*) \leq \sum_{i \in S^*} (k p_i' + k) = k \sum_{i \in S^*} p_i' + k \sum_{i \in S} 1 =$$

$$= k \cdot p'(S^*) + k \cdot |S^*| \leq$$

$$\leq k p'(S^*) + km \leq \qquad (|S^*| \leq m)$$

$$\leq p(S) + km = \qquad (\forall i.\ k p_i' \leq p_i)$$

$$= p(S) + \varepsilon \cdot p_{max} \leq \qquad (km = \varepsilon \cdot p_{max})$$

$$\leq p(S) + \varepsilon\, p(S^*) \qquad (p_{max} \leq p(S^*))$$

■

Proprietà: $\forall \varepsilon > 0$. $\nexists$ algoritmo di ε-approssimazione polinomiale per TSP, assumendo $P \neq NP$

Dimostrazione:

Per assurdo esiste un algoritmo A per cui $\forall I \in TSP \quad \frac{A(I)}{opt(I)} \leq 1+\varepsilon = k$

Riduzione $HC \propto TSP$ (ciclo Hamiltoniano):

- $G=(V,E)$, V: insieme città
- $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se } (i,j) \in E \\ (k+1)\cdot|V| & \text{, altrimenti} \end{cases}$
- trovando un ottimo $A(I)$ si hanno 2 casi

1) $A(I) \leq k|V|$ se esiste un ciclo Hamiltoniano
2) $A(I) \geq (k+1)|V|$ altrimenti

Quindi A risolve HC in tempo polinomiale, il che contraddice il fatto che HC sia NP-completo.
Quindi non esiste A algoritmo polinomiale di ε-app. ■

Proprietà: TSP metrico è NP-completo

Dimostrazione:

TESI: TSP è NP-completo

Si può dimostrare se sono vere le seguenti:
- HC è NP-completo. Dimostrato.
- esiste una riduzione da HC a TSP. Da dimostrare.

$G=(N,E)$ istanza di HC

- $c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i,j) \in E \\ 2, & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\rightarrow$ istanza di TSP metrico: $\forall i,j,k.\ c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$
$\rightarrow$ è una riduzione polinomiale:
se $z^* = |V|$ allora si ha un ciclo Hamiltoniano

Dunque TSP metrico è NP-completo ■

Proprietà: DOUBLE-MST è di 1-approssimazione polinomiale per TSP metrico

Dimostrazione:

TESI: $A(I)/OPT(I) \leq 2 \rightarrow c(C) \leq 2c(C^*)$

IPOTESI:

- T = MST del grafo G
- C = ciclo euleriano

$c(C) \leq 2c(T) \leq$ (il ciclo ha al massimo costo $c(T)$)

$\leq 2c(C^*)$ (come minimo C ho un arco in più di T) ∎

Proprietà: IMPROVED-MST-APPROX (CHRISTOFIDES) è di $\frac{1}{2}$-approssimazione polinomiale per TSP metrico

Dimostrazione:

TESI: $c(C)/c(C^*) \leq \frac{3}{2}$

IPOTESI:

- $c(C) \leq c(T) + c(M)$, con M matching perfetto di costo minimo
  - perché C può contenere scorciatoie (shortcutting)
- $c(T) \leq c(C^*)$

$c(C) \leq c(T) + c(M) \leq$ (per ipotesi)

$\leq c(C^*) + c(M) \leq$ (per ipotesi)

$\leq c(C^*) + \frac{1}{2}c(C^*) =$ (per lemma da dimostrare)

$= \frac{3}{2}c(C^*)$

Lemma: $c(M) \leq \frac{1}{2}c(C^*)$

Dimostrazione:

IPOTESI: $\hat{C}$ ciclo formato da nodi di G di grado dispari

$c(C^*) \geq c(\hat{C}) \geq$ (perché è un'istanza di TSP metrico)

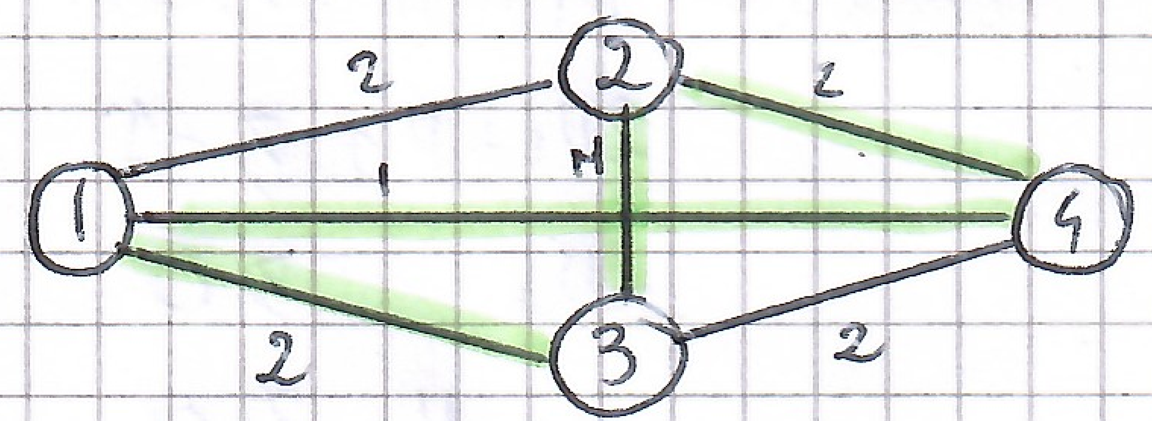
$\geq c(M_1) + c(M_2) \geq$ (decomposiz. in 2 matching perfetti; si può fare perché $|\hat{C}|$ è pari)

$\geq 2c(M)$ (M è di costo minimo)

$\rightarrow c(M) \leq \frac{1}{2}c(C^*)$

Proprietà: NEAREST-NEIGHBOR (greedy per TSP) è potenzialmente pessimo (soglia di ∞)

Dimostrazione:



$\forall M \geq 2$

$z = M + 5$

$z^* = 8$

$$\lim_{M \to \infty} \frac{M+5}{8} = \infty \quad \blacksquare$$

Ricavare il duale di un PL:

$\max z = x_1 - x_2$

soggetto a $x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$

$3x_1 + x_2 + x_4 = 6$

$x_1, \dots, x_4 \geq 0$

Rilassamento lagrangiano:

$$L(\bar{u}) = \max_{\bar{x}} \{ x_1 - x_2 + u_1(5 - (x_1 + 2x_2 - x_3)) + u_2(6 - (3x_1 + x_2 + x_4)) \mid \bar{x} \geq 0 \}$$

$$L(\bar{u}) = \max_{\bar{x}} \{ x_1 - x_2 + 5u_1 - u_1 x_1 - 2u_1 x_2 + u_1 x_3 + 6u_2 - 3u_2 x_1 - u_2 x_2 - u_2 x_4 \mid \bar{x} \geq 0 \}$$

$$L(\bar{u}) = 5u_1 + 6u_2 + \max_{\bar{x}} \{ x_1(1 - u_1 - 3u_2) + x_2(-1 - 2u_1 - u_2) + x_3(0 + u_1) + x_4(0 - u_2) \mid \bar{x} \geq 0 \}$$

Si hanno due casi:

- $1 - u_1 - 3u_2 \leq 0$ e
  $-1 - 2u_1 - u_2 \leq 0$ e
  $0 + u_1 \leq 0$ e
  $0 - u_2 \leq 0$: $L(\bar{u})$ ha un ottimo per $\bar{x} = 0$, quindi $L(\bar{u}) = 5u_1 + 6u_2$
- altrimenti: $L(\bar{u})$ è illimitato

$L(\bar{u}) = 5u_1 + 6u_2$ è un upper bound per z, quindi si cerca il minimo

Si può allora formulare il programma:

$$\begin{array}{ll} \min & w = 5u_1 + 6u_2 \\ \text{soggetto a} & 1 - u_1 - 3u_2 \leq 0 \\ & -1 - 2u_1 - u_2 \leq 0 \\ & u_1 \leq 0 \\ & -u_2 \leq 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ll} \min & w = 5u_1 + 6u_2 \\ \text{soggetto a} & u_1 + 3u_2 \geq 1 \\ & 2u_1 + u_2 \geq -1 \\ & -u_1 \geq 0 \\ & u_2 \geq 0 \end{array}$$

Duale ■

Proprietà: il duale del duale è il primale

Dimostrazione:

IPOTESI:

- $P \equiv \max\{c^T x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$
- $D \equiv \min\{u^T b \mid u^T A \geq c^T\}$ duale di (P)
- D std $\equiv \max\{-u^T b \mid u^T A - v^T = c^T,\ v \geq 0\}$
- Riscrittura (D std) con $u = u' - u''$:

$$(D \text{ std}) \quad \begin{array}{ll} \max & w = -u'^T b + u''^T b \\ \text{soggetto a} & u'^T A - u''^T A - v^T = c^T \\ & v \geq 0 \end{array}$$

Trasposizione:

$$\begin{array}{ll} \max & w = -b^T u' + b^T u'' \\ \text{soggetto a} & A^T u' - A^T u'' - v = c \\ & v \geq 0 \end{array}$$

Duale:

$$\begin{array}{ll} \min & z = y^T c \\ \text{soggetto a} & y^T A^T = -b^T \\ & -y^T A^T = b^T \\ & -y \geq 0 \end{array}$$

Semplificazione: unendo + trasposizione

$$\begin{array}{ll} \min & z = c^T y \\ \text{soggetto a} & -Ay = b \\ & -y \geq 0 \end{array} \xrightarrow[\min \to \max]{\bar{y} = -y} \begin{array}{ll} \max & z = c^T \bar{y} \\ \text{soggetto a} & A\bar{y} = b \\ & \bar{y} \geq 0 \end{array}$$

(Primale) ■

Proprietà: $\forall x \in S_a$ e la sol. duale ammissibile corrispondente $\mu \in D_a$, vale:

$$\mu^T b \geq c^T x \quad \text{(dualità debole)}$$

Dimostrazione: segue dal fatto che il duale è un rilassamento (lagrangiano) del primale, quindi l'ottimo duale è sempre un upper bound dell'ottimo primale. ■

Proprietà: Se primale (P) ammette un ottimo z^* sse il duale (D) ammette un ottimo w^* e $z^* = w^*$ (dualità forte)

Dimostrazione:

$\Rightarrow$) Riformulazione ottima di (P)

$$\max z = c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N = z(B) + r_N^T x_N$$

soggetto a $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$

$x_B > 0, \; x_N \geq 0$

Duale (D):

$$\min w = \mu^T b$$

soggetto a $\mu^T A - v^T = c^T \rightarrow \mu^T [A_B | A_N] - [v_B^T | v_N^T] = [c_B^T | c_N^T]$

$v \geq 0$

Sistema:

$$\begin{cases} \mu^T A_B - v_B^T = c_B^T \\ \mu^T A_N - v_N^T = c_N^T \end{cases}$$

$v_B^T x_B = 0$ (compl. primale-duale) e $x_B > 0$, quindi $v_B = 0$

$$\mu^T A_B = c_B^T \rightarrow \mu^T = c_B^T A_B^{-1}$$

$$\mu^T A_N - v_N^T = c_N^T \rightarrow v_N^T = -c_N^T + \mu^T A_N$$

$$v_N^T = -c_N^T + c_B^T A_B^{-1} A_N = -r_N^T \geq 0$$

($r_N^T \leq 0$ perché B è una base ottima primale)

$r_N \geq 0 \rightarrow v_N \geq 0$ e $v_B = 0$

perciò $v \geq 0$ quindi B è una base ammissibile duale

$\mu^T b = c_B^T A_B^{-1} b = z(B)$ perciò gli ottimi corrispondono

$\Leftarrow$) Segue ripetendo simmetricamente la dim. su (D) ■

Proprietà: Siano $x^* \in S_a$ e il corrispondente duale $(\mu^*, v^*) \in D_a$ sono soluzioni ottime rispettivamente per (P) e (D) sse

$$(\mu^T A - c^T)x = 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad v^T x = 0$$

(Condizioni di complementarietà primale-duale)

Dimostrazione:

$$\mu^T b = c^T x \qquad \text{(per la dualità forte)}$$

$$\mu^T A x = c^T x \qquad (Ax = b)$$

$$\mu^T A x - c^T x = 0 \rightarrow (\mu^T A - c^T)x = 0$$

$$v^T = \mu^T A - c^T \longrightarrow v^T x = 0$$

■

Proprietà: PLI è NP-completo

Dimostrazione:

TESI: PLI è NP-completo sse
- SAT è NP-completo → dimostrato
- SAT si riduce a PLI: da dimostrare

SAT $\propto$ PLI: dimostrazione (non generale) su un'istanza.

$$(x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_4) \wedge x_5$$

è un'istanza di SAT.

PLI:
- $x_i = 1$ sse $x_i = true$ e $x_i = 0$ sse $x_i = false$
- $y_i = 1$ sse la clausola i è vera, 0 altrimenti

$$\max z = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_3 + (1 - x_4) \geq y_1 \\
& (1 - x_2) + (1 - x_3) \geq y_2 \\
& x_1 + x_2 + (1 - x_3) + x_4 \geq y_3 \\
& (1 - x_2) + x_4 \geq y_4 \\
& x_5 \geq y_5 \\
& x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5 \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

→ se $z^* = 5$ si è trovato un'istanza di SAT, se $z^* < 5$ non è un'istanza di SAT

Dal momento che SAT $\propto$ PLI e SAT $\in$ NP-complete, PLI $\in$ NP-complete ■

Proprietà: esiste una sol. ottima x^* di (CKP) per cui esiste un'unica $x_s^* \in (0,1)$, e x^* è della forma $(1,1,\dots,1,x_s^*,0,\dots,0)$

Dimostrazione:

$$(CKP) \quad \max \sum_{i=1}^{m} p_i x_i \qquad \text{con } \frac{p_1}{w_1} \geq \frac{p_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{p_m}{w_m}$$
$$\text{soggetto a } \sum_{i=1}^{m} w_i x_i \leq b$$
$$x \in [0,1]$$

Supponiamo $\exists i,j .\ x_i^* < 1$ e $x_j^* > 0$ e $i<j$ per l'ottimo x^*

Costruzione della soluzione x':

$$x' = \begin{cases} x_i' = x_i^* + \delta_i & \delta_i > 0 \\ x_j' = x_j^* - \delta_j & \delta_j > 0 \\ x_k' = x_k^* & k \neq i, k \neq j \end{cases}$$

x' è una soluzione non peggiore (quindi ottima):

$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_i' - \sum_{i=1}^{m} p_i x_i^* = p_i \delta_i - p_j \delta_j \geq 0 \text{ (da dimostrare)}$$

x^* e x' ottime per CKP $\longleftrightarrow$ saturano lo zaino:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} w_i x_i^* = b \\ \sum_{i=1}^{m} w_i x_i' = b \end{cases} \rightarrow \sum_{i=1}^{m} w_i x_i^* - \sum_{i=1}^{m} w_i x_i' = w_j \delta_j - w_i \delta_i = b - b = 0$$
$$\rightarrow \delta_j = \frac{w_i}{w_j} \delta_i$$

$$p_i \delta_i - p_j \delta_j = p_i \delta_i - p_j \frac{w_i}{w_j} \delta_i =$$
$$= \delta_i \left(p_i - p_j \frac{w_i}{w_j}\right) =$$
$$= \delta_i w_i \left(\frac{p_i}{w_i} - \frac{p_j}{w_j}\right) \geq 0 \quad \left(\delta_i w_i > 0 \text{ e } i<j \text{, quindi } \frac{p_i}{w_i} \geq \frac{p_j}{w_j} \text{ per ipotesi}\right)$$

$$\begin{cases} x_j^* - \delta_j \geq 0 \\ x_i^* + \delta_i \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \delta_j \leq x_j^* \\ \delta_i \leq 1 - x_i^* \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \delta_i \leq \frac{w_j}{w_i} x_i^* \\ \delta_i \leq 1 - x_i^* \end{cases} \quad \left(\delta_j = \delta_i \frac{w_i}{w_j}\right)$$

Quindi $\delta_i = \min\left\{1 - x_i^*, \frac{w_j}{w_i} x_i^*\right\} > 0$.

Quindi dato un certo $\delta_i > 0$. $x_i' = 1$ e $x_j' = 0$ e quindi esiste sempre un ottimo x' non peggiore che rispetta le condizioni ■