

Paolo Boggiaetto

# NOTE SU TRASFORMATA DI FOURIER E FILTRI DI SEGNALI

Il testo di riferimento, indicato con (\*) nel  
seguito, è

" Gasquet-Witomski, Fourier Analysis and  
Applications, Springer "

( OTTOBRE 2019 )

**SPAZI  $L^1(I)$ ,  $L^2(I)$ ,  $L^\infty(I)$**

Sia  $I$  un intervallo aperto  $\subseteq \mathbb{R}$ , ovvero: [1]  
 $I = \mathbb{R}$ , oppure  $I = (-\infty, a)$ , oppure  $I = (a, +\infty)$ , oppure  $I = (a, b)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

Consideriamo l'insieme  $F(I)$  delle funzioni  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ .

Nell'insieme  $F(I)$  definiamo due operazioni:

(1) Somma puntuale:  $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ ,

(2) Prodotto per una costante  $\lambda \in \mathbb{C}$ :  $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$ .

PROP. Dotato di queste operazioni,  $F(I)$  è uno spazio vettoriale.

Definiamo ora, per  $f \in F(I)$ , quando abbia senso:

$$(1) \|f\|_{L^1(I)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt,$$

$$(2) \|f\|_{L^2(I)} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(3) \|f\|_{L^\infty(I)} = \inf \{ C \geq 0 : |f(t)| \leq C \text{ quasi ovunque su } I \}.$$

NOTA Gli integrali che compaiono in (1) e (2) sono intesi come integrali di Lebesgue. Il "quasi ovunque" in (3) è chiarito a p. 2.

La definizione  $\|f\|_{L^\infty(I)}$  generalizza  $\sup_{t \in I} |f(t)|$  e coincide con esso se  $f$  è continua.

Per questi dettagli si veda (\*).

OSS.  $\|f\|_{L^1(I)}$ ,  $\|f\|_{L^2(I)}$ ,  $\|f\|_{L^\infty(I)}$  non sono "norme"

(vedi definizione su (\*)) infatti per esempio se  $I = \mathbb{R}$  ed

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t=0 \\ 0 & \text{per } t \neq 0 \end{cases}$$

si ha  $\|f\|_{L^1(I)} = 0$ ,  $\|f\|_{L^2(I)} = 0$ ,  $\|f\|_{L^\infty(I)} = 0$ ,

ma  $f \neq 0$ .

2

Per ovviare a questo inconveniente si identificano funzioni coincidenti "quasi ovunque" in  $I$ , ovvero considero  $f = g$  se  $f(t) = g(t)$  "quasi ogni"  $t \in I$  (abbreviato: "q.o.  $t \in I$ "); dove "q.o.  $t \in I$ " significa "ogni  $t \in I$  eccetto al più un insieme di misura di Lebesgue nulla".

Per la definizione di misura di Lebesgue si veda (\*), qui è sufficiente ricordare che sono di misura nulla tutti gli insiemi finiti o numerabili.

Ad esempio  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$  e  $g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{per } t \neq 0 \\ 1 & \text{per } t=0 \end{cases}$

sono considerate uguali poiché differiscono solo sull'insieme finito  $\{0\}$ .

DEF. Si pone

$$\begin{aligned} L^1(I) &= \{ f: I \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^1(I)} < +\infty \}, \\ L^2(I) &= \{ f: I \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^2(I)} < +\infty \}, \\ L^\infty(I) &= \{ f: I \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^\infty(I)} < +\infty \}, \end{aligned}$$

sottointendendo l'identificazione tra funzioni q.o. coincidenti.

NOTA Ad esempio se  $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } t=0 \end{cases}$  abbiamo  $f = 0$  grazie all'identificazione sopra descritta.

PROP.  $(L^1(I), \|\cdot\|_{L^1(I)})$ ,  $(L^2(I), \|\cdot\|_{L^2(I)})$ ,  $(L^\infty(I), \|\cdot\|_{L^\infty(I)})$

Sono spazi di Banach, ovvero spazi vettoriali normati completi, ovvero ancora (in particolare) si ha che

$\|\cdot\|_{L^1(I)}$ ,  $\|\cdot\|_{L^2(I)}$ ,  $\|\cdot\|_{L^\infty(I)}$  sono norme, e rispetto ad

esse una successione è convergente se e solo se è di Cauchy.

Più in particolare per  $L^2(I)$  vale la seguente:

PROP  $(L^2(I), \|\cdot\|_{L^2(I)})$  è uno "spazio di Hilbert" ovvero la norma  $\|\cdot\|_{L^2(I)}$  proviene da un "prodotto interno", precisamente:

$$\|f\|_{L^2(I)} = \sqrt{(f, f)_{L^2(I)}} \quad \text{dove:}$$

$$(f, g)_{L^2(I)} = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt, \quad \forall f, g \in L^2(I).$$

3

NOTA Ciò permette di definire il concetto di "ortogonalità" ponendo  $f \perp g$  se  $(f, g)_{L^2(I)} = 0$ .

NOTA Fisicamente  $\|f\|_{L^2(I)}$  rappresenta l'energia del segnale  $f \in L^2(I)$ .

NOTA Una interpretazione di questo fatto per segnali rappresentati da circuiti elettrici è la seguente.

Sia  $R$  = resistenza del circuito (costante)

$I$  = corrente " " " funzione del tempo )

$V$  = differenza di potenziale ( " " " )

Allora  $RI = V$  ( 1<sup>a</sup> legge di Ohm )

ed  $IV = P$  = "potenza"

Se  $W$  è il lavoro compiuto, ovvero l'energia trasferita, la sua variazione nel tempo ci dà la potenza:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

L'energia totale sarà allora :

$$E = W(+\infty) - W(-\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW}{dt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t)^2 dt$$
$$= \frac{1}{R} \|V\|_{L^2(R)}^2.$$

PROP Per  $f, g \in L^2(I)$  vale la diseguaglianza di Schwartz:

$$\int_I |f(t)| |g(t)| dt \leq \|f\|_{L^2(I)} \|g\|_{L^2(I)}.$$

Da cui segue che  $f, g \in L^2(I) \Rightarrow fg \in L^2(I)$ .

4

DEF Siano  $\phi_n \in L^2(I)$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .

L'insieme di funzioni  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  si dice "base ortonormale" di  $L^2(I)$  se:

$$(1) \quad (\phi_n, \phi_m)_{L^2} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq m \\ 1 & \text{per } n = m \end{cases}$$

(2)  $\forall f \in L^2(I)$  si ha:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \phi_n \quad \leftarrow \text{"serie di Fourier"}$$

$$\text{dove } c_n = (f, \phi_n)_{L^2} \quad \leftarrow \text{"coefficienti di Fourier"}$$

con convergenza della serie in norma  $\| \cdot \|_{L^2(I)}$ .

NOTA Analoga definizione vale nel caso  $n \in \mathbb{N}$  invece che  $n \in \mathbb{Z}$ .

NOTA La (1) significa che le funzioni  $\phi_n$  sono ortogonali a due a due ed hanno  $\|\phi_n\|_{L^2(I)} = 1$ .

PROP Sia  $\{\phi_n\}$ , con  $n \in \mathbb{Z}$  (oppure  $n \in \mathbb{N}$ ), una base ortonormale di  $L^2(I)$ . Allora  $\forall f \in L^2(I)$  si ha:

$$\|f\|_{L^2(I)}^2 = \sum_n |c_n|^2 \quad \text{"uguaglianza di Parseval".}$$

NOTA Nel caso particolare  $I = \{1, 2, 3\}$  le funzioni  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  coincidono con i vettori dello spazio  $\mathbb{R}^3$  e l'uguaglianza di Parseval coincide con il teorema di Pitagora!

NOTA Dall'espressione di  $f$  tramite la sua serie di Fourier  $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \phi_n$  si comprende intuitivamente che ogni coefficiente di Fourier  $c_n$  indica "quanto" della funzione  $\phi_n$  è presente nel segnale  $f$ . Nei casi particolari seguenti identifieremo  $\phi_n$  con le frequenze pure.

5

Es. ( base "esponenziale" di  $L^2(0,a)$  )

Sia  $I = (0,a)$  con  $a > 0$  fissato.

Considero  $L^2(I) = L^2((0,a))$ , che si scriverà  $L^2(0,a)$  per brevità.

Pongo  $\lambda = \frac{1}{a}$ , ed  $e_1^n(t) = \sqrt{\lambda} e^{2\pi i n \lambda t}$  per  $n \in \mathbb{Z}$ .

Allora  $\forall n \in \mathbb{Z}$ :  $e_1^n \in L^2(0,a)$ .

L'insieme di funzioni  $\{e_1^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  è una "base ortonormale" di  $L^2(0,a)$ .

Verifichiamo la (1):

$$\text{Se } n=m : (e_1^n, e_1^n)_{L^2} = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{2\pi i n \lambda t} \cdot e^{-2\pi i n \lambda t} dt = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} dt = \frac{1}{\lambda} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Se } n \neq m : (e_1^n, e_1^m)_{L^2} &= \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{2\pi i n \lambda t} \cdot e^{-2\pi i m \lambda t} dt \\ &= \lambda \left[ \frac{e^{2\pi i (n-m)\lambda t}}{2\pi i (n-m)\lambda} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \lambda \left( \frac{1 - 1}{2\pi i (n-m)\lambda} \right) = 0 \end{aligned}$$

Dunque  $\forall f \in L^2(0,a)$ :

$$f(t) = \lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n \lambda t}, \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{"serie di Fourier di } f \\ \text{rispetto alla base esponenz.,} \end{array}$$

$$\text{con } a_n = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} f(t) e^{-2\pi i n \lambda t} dt, \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{"coeff. di Fourier di } f \\ \text{rispetto alla base esponenz.,} \end{array}$$

dove la serie converge in norma  $\| \cdot \|_{L^2(0,a)}$ .

(La convergenza puntuale della serie, cioè  $\forall t \in (0,a)$ , non è garantita).

NOTA i coefficienti di Fourier  $a_n$  indicano intuitivamente "quanto" delle frequenze pure  $e^{2\pi i n \lambda t}$  è presente nel segnale  $f$ .

[6]

E.S. (base "trigonometrica" di  $L^2(0,a)$ )

Posto, come prima,  $\lambda = \frac{1}{a}$ , si ha che

$$\{\sqrt{\lambda}\} \cup \{\sqrt{2\lambda} \cos(2\pi n\lambda t)\}_{n=1}^{+\infty} \cup \{\sqrt{2\lambda} \sin(2\pi n\lambda t)\}_{n=1}^{+\infty}$$

è una base ortonormale di  $L^2(0,a)$ .

Per la corrispondente serie di Fourier di  $f \in L^2(0,a)$  si ha l'espressione con convergenza in  $L^2(0,a)$ :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n\lambda t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n\lambda t)$$

con

$$\begin{cases} a_n = 2\lambda \int_0^{1/\lambda} f(t) \cos(2\pi n\lambda t) dt \\ b_n = 2\lambda \int_0^{1/\lambda} f(t) \sin(2\pi n\lambda t) dt \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

NOTA Ora le frequenze pure sono rappresentate sia da  $\cos(2\pi n\lambda t)$  che da  $\sin(2\pi n\lambda t)$ , dunque la loro presenza nel segnale  $f$  è ora "quantizzata" dalla coppia di coefficienti  $a_n$  e  $b_n$ .

## CONVOLUZIONE

DEF. date due funzioni  $f, g$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$ , chiamiamo "convoluzione" di  $f$  e  $g$  la funzione definita da

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds, \quad \begin{array}{l} \text{perché l'integrale esiste finito} \\ (\text{come integrale nel senso di Lebesgue}) \end{array}$$

PROP.  $(f * g)(t) = (g * f)(t)$  (Prop commutativa)  
(si veda Appendice (c))

PROP. Se  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , allora  $f * g$  esiste ed appartiene ad  $L^1(\mathbb{R})$ ,  
inoltre  $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$ . (vedi Appendice (d))

PROP. Se  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , allora  $f * g$  esiste ed appartiene ad  $L^2(\mathbb{R})$ ,  
inoltre  $\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$ .

PROP. Se  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , allora  $f * g$  esiste ed appartiene ad  $L^\infty(\mathbb{R})$ ,  
inoltre  $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$ . (vedi Appendice (e))

## LO SPAZIO DELLE DISTRIBUZIONI $S'(\mathbb{R})$

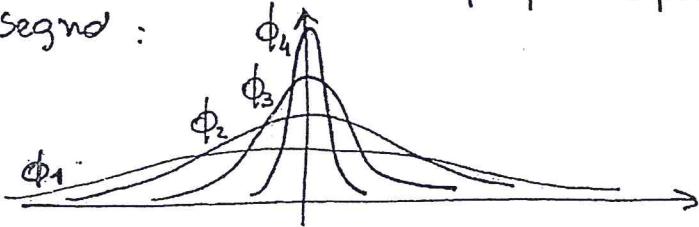
8

Per rappresentare fenomeni di tipo "impulsivo" (per es. una massa o una carica elettrica concentrate in un punto, un urto, un'esplosione, ecc.) le funzioni non sono sufficienti.

Per rendersi conto di ciò, supponiamo che  $\phi(t) \geq 0$  rappresenti la densità di carica lungo i punti  $t$  di un filo illimitato coincidente con l'asse delle ascisse  $\mathbb{R}_t$ .

Se la carica totale è 1 avremo allora  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt$ .

Immaginiamo ora che la carica si distribuisca secondo densità  $\phi_n(t)$ , con  $n=1, 2, 3, \dots$ , che si accumulano sempre più nel punto  $t=0$ , come dal disegno:



Il fatto che la carica resta invariata si esprime con:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(t) dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Al limite avremo una distribuzione di carica in cui tutta la carica è concentrata in  $t=0$ . Chiamiamo  $\delta(t)$  questa distribuzione (ideale) di carica. Per la distribuzione  $\delta(t)$  dovrà dunque valere:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \neq 0 \\ +\infty & \text{per } t=0 \end{cases} \quad \text{ma anche}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \text{e quindi } \delta(t) \text{ non rappresenta la distribuzione nulla di carica } \phi(t) \equiv 0.$$

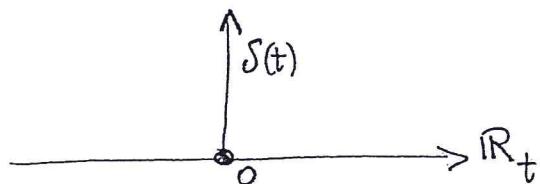
Tuttavia  $\delta(t)$  differisce dalla funzione nulla solo in  $t=0$ , insieme di misura nulla, e quindi se fosse una funzione di  $L^1(\mathbb{R})$  o  $L^2(\mathbb{R})$  dovrebbe essere identificata con  $\phi(t) \equiv 0$ .

9

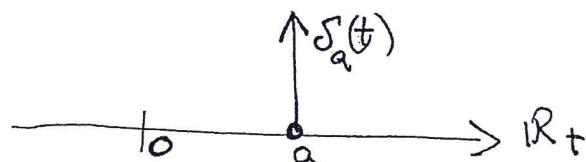
Ciò mostra, intuitivamente, che lo strumento matematico usato per rappresentare una distribuzione di carica  $\delta(t)$  concentrata in  $t=0$  non può essere una funzione.

Anche in teoria dei segnali è utile considerare segnali (ideali) del tipo  $\delta(t)$ .

Rappresentiamo graficamente la distribuzione  $\delta(t)$  con una "freccia" centrale in  $t=0$ :



Sempre in modo molto intuitivo definiamo inoltre le sue traslate  $\delta_a(t)$ , di parametro  $a \in \mathbb{R}$ , come distribuzioni concentrate nei punti  $a \in \mathbb{R}$ , e rappresentate da "freccie" centrali in  $a \in \mathbb{R}$ :



Scriveremo anche  $\delta_a(t) = (\tilde{\epsilon}_a \delta)(t)$  usando lo stesso simbolo  $\tilde{\epsilon}_a$  dell'operatore di traslazione già usato per funzioni.

Si tratta ora di trovare uno spazio che contenga sia i segnali rappresentati da funzioni di  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $L^2(\mathbb{R})$  o  $L^\infty(\mathbb{R})$ , sia quelli rappresentati da distribuzioni  $\delta_a$ .

Lo spazio che soddisfa a queste esigenze è lo spazio  $S(\mathbb{R})$  ("esse primo") delle "distribuzioni temperate".

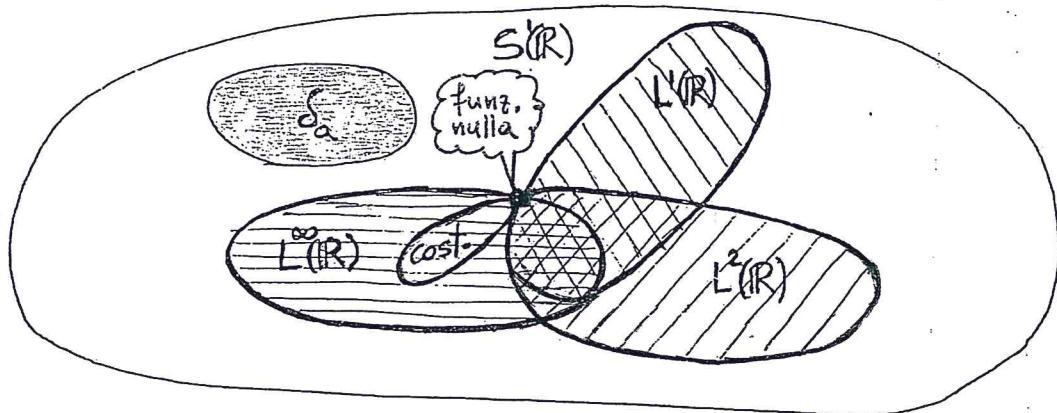
10

Come oggetti matematici gli elementi di  $S'(\mathbb{R})$ , cioè le distribuzioni temperate, sono "funzionali lineari continui", per una definizione rigorosa si veda (\*).

Qui è sufficiente ricordare i seguenti fatti:

PROP.

- $S'(\mathbb{R})$  contiene  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $L^\infty(\mathbb{R})$ , tutte le funzioni costanti, tutte le distribuzioni  $\delta_a$  con  $a \in \mathbb{R}$ .  
Può essere comodo visualizzare graficamente le inclusioni come segue:



Ad esempio:

$$\frac{1}{t} \chi_{[1,+\infty)}(t) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ ma } \notin L^1(\mathbb{R})$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \chi_{(0,1)}(t) \in L^1(\mathbb{R}) \text{ ma } \notin L^2(\mathbb{R})$$

$$e^{-t^2} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \approx L^\infty(\mathbb{R}) \quad , \quad \delta_a \notin L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R}) \cup L^\infty(\mathbb{R})$$

- Gli elementi di  $S'(\mathbb{R})$  si possono considerare come limiti in senso opportuno di successioni di funzioni. Si pensi ad es. a  $\delta(t)$  come limite per  $n \rightarrow +\infty$  (in senso opportuno) della successione  $\phi_n$  descritta in precedenza.

- Si possono estendere ad  $S'(\mathbb{R})$  essenzialmente tutte le operazioni definite su funzioni, in particolare : 11

- somma di funzioni e prodotto di funzione per costante
- convoluzione (sotto opportune ipotesi)
- moltiplicazione puntuale di funzioni (sotto opportune ipotesi)
- traslazione  $\tau_a$  con  $a \in \mathbb{R}$ .
- modulazione  $\mu_b$  (ovvero prodotto per la funzione  $e^{2\pi i b t}$ ,
- riflessione, ovvero l'operatore che su funzioni agisce come  $\tilde{f}(t) = f(-t)$

In particolare vale la formula  $\tilde{\delta}_a = \delta_{-a}$   
e quindi  $\tilde{\delta} = \delta$ .

Non entriamo qui nei dettagli relativi alla definizione di queste estensioni, si veda eventualmente (\*).

## LA TRASFORMATA DI FOURIER

DEF. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , chiamiamo "trasformata di Fourier" di  $f$  la nuova funzione:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t w} f(t) dt, \quad \text{dipendente dalla variabile } w \in \mathbb{R},$$

ogni volta che l'integrale ha senso (come integrale di Lebesgue).

L'operatore che associa  $\hat{f}$  ad  $f$  viene indicato con  $\tilde{F}$ , scrivendo quindi:

$$\tilde{F}: f \rightarrow \hat{f}, \quad \text{ovvero } \hat{f}(w) = \tilde{F}[f](w).$$

## NOTA

La trasformata di Fourier è ben definita per  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , infatti:

$$\begin{aligned} \forall w \in \mathbb{R}: |\hat{f}(w)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i w t} f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2\pi i w t}| |f(t)| dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

quindi

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \text{ess sup}_{w \in \mathbb{R}} |\hat{f}(w)| \leq \text{ess sup}_{w \in \mathbb{R}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Per  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , o  $f \in S(\mathbb{R})$ , l'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i w t} f(t) dt$  invece non ha in genere senso. Si può tuttavia estendere la trasformata di Fourier anche a questi casi, ma la sua definizione non è banale. Qui supponremo di aver fatto tale estensione senza preoccuparci dei dettagli per i quali rimandiamo a (\*).

PROP. L'operatore  $\hat{f}$  gode delle seguenti proprietà:

- $F: f \rightarrow \hat{f}$  è lineare su tutti gli spazi vettoriali su cui è definito.
- $F: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  è continuo, in particolare  $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$
- $F: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  è un isomorfismo isometrico, in particolare l'uguaglianza  $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$  (uguaglianza di Plancherel) esprime "conservazione dell'energia" di un segnale.

Più specificatamente un segnale è un fenomeno fisico che può essere rappresentato sia in funzione del tempo, da  $f(t)$ , sia in funzione delle frequenze, da  $\hat{f}(w)$ .

(NOTA: il fatto che  $\hat{f}(w)$  sia la rappresentazione in funzione delle frequenze verrà chiarito nel seguito)

E' quindi logico aspettarsi che  $f$  ed  $\hat{f}$ , che rappresentano lo stesso fenomeno, abbiano associata la stessa energia, come infatti afferma l'uguaglianza di Plancherel.

- $F: S'(\mathbb{R}) \rightarrow S'(\mathbb{R})$  è una biiezione bicontinua  
(dopo aver definito una opportuna topologia su  $S'(\mathbb{R})$ )

NOTA: abbiamo lo schema seguente (gli ultimi 2 riquadri verranno chiariti nel seguito)

$f(t) =$ rappresentazione del segnale rispetto ai tempi $t$	$\ \hat{f}\ _2^2 =$ energia totale del segnale calcolata risp. ai tempi $t$	$ \hat{f}(t) ^2 =$ distribuzione di energia del segnale rispetto ai tempi $t$
$\hat{f}(w) =$ rappresentazione del segnale rispetto alle frequenze $w$	$\ \hat{f}\ _2^2 =$ energia totale del segnale calcolata risp. alle frequenze	$ \hat{f}(w) ^2 =$ distribuzione di energia del segnale rispetto alle freq. $w$

L'interpretazione di  $\hat{f}(w)$  come rappresentazione del segnale rispetto alle frequenze si basa sulle seguenti proprietà.

14

PROP  $\hat{1} = \delta, \quad \hat{\delta} = 1$  (vedi Appendice (a))

NOTA la precedente proprietà ha senso poiché  $1, \delta \in S^1(\mathbb{R})$ .

PROP  $\forall \phi \in S^1(\mathbb{R})$ :

$$(a) \hat{F}[\tilde{c}_a \phi] = \mu_{-a} \hat{\phi}; \quad (b) \hat{F}[\mu_a \phi] = \tilde{c}_a \hat{\phi}.$$

Dim di (a) nel caso particolare  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} \hat{F}[\tilde{c}_a \phi](w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i w t} \tilde{c}_a \phi(t-a) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i w(s+a)} \phi(s) ds \\ &= e^{-2\pi i w a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i w s} \phi(s) ds = (\mu_{-a} \hat{\phi})(w). \end{aligned}$$

Il caso (b) con  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$  è del tutto analogo.

PROP.  $\hat{F}[e^{2\pi i a t}] = \delta_a$  (con  $a \in \mathbb{R}$ ).

Dim dalle due proprietà precedenti abbiamo:

$$\hat{F}[e^{2\pi i a t}] = \hat{F}[\mu_a 1] = \tilde{c}_a \hat{1} = \tilde{c}_a \delta = \delta_a.$$

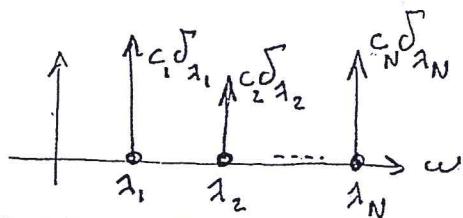
NOTA

La proprietà ora vista è cruciale in teoria dei segnali. Infatti essa mostra che la trasformata di Fourier "individua" la frequenza pura  $a \in \mathbb{R}$  del segnale  $e^{2\pi i a t}$  associando a tale segnale una delta di Dirac  $\delta_a$  centrata nel punto  $\omega = a$ .

Questo fatto giustifica l'interpretazione di  $\hat{f}(\omega)$ , o meglio  $|\hat{f}(\omega)|^2$ , con  $f(t)$  generico segnale in  $S'(\mathbb{R})$ , come distribuzione delle frequenze contenute nel segnale.

CONSEGUENZA Per la linearità di  $\hat{F}$ , la trasformata di Fourier di un segnale  $f(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{2\pi i \lambda_k t}$ , contenente le frequenze  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ , sarà

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=1}^N c_k \delta_{\lambda_k}$$



ESERCIZIO Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $x_{[a,a]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, a] \\ 0 & \text{se } t \notin [a, a] \end{cases}$  (con  $a > 0$ )

Soluzione

$$\hat{F}[x_{[a,a]}](\omega) = \int_{-a}^a e^{-2\pi i \omega t} dt = \left[ \frac{e^{-2\pi i \omega t}}{-2\pi i \omega} \right]_{-a}^a = \frac{\sin(2a\pi\omega)}{\pi\omega} \stackrel{\text{def.}}{=} \text{sinc}(a\omega)$$

(la funzione sinc si dice "seno cardinale")

Questa trasformata ci servirà nell'analisi del filtro "passa-basso" ideale.

PROP.(i) Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ed  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  allora

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t w} \hat{f}(w) dw \quad \text{q.o. } t \in \mathbb{R}$$

(Formula di inversione)

(ii) Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ed  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  allora

$$\hat{f}^2[f](t) = f(-t) \quad \text{q.o. } t \in \mathbb{R}$$

← (Più in generale per  $f \in S(\mathbb{R})$   
vale:  
 $\hat{f}^2[\hat{f}] = \hat{f}$ )

(iii) Se  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  allora

$$(a) \quad \hat{f}g = \hat{f} * \hat{g}$$

$$(b) \quad \hat{f} * \hat{g} = \hat{f} \hat{*} \hat{g}$$

Inoltre (b) vale per  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  
e per  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $g \in L^1(\mathbb{R})$ .

OSSERVAZIONI

$F: S(\mathbb{R}) \rightarrow S'(\mathbb{R})$  è un isomorfismo e dunque in particolare una biezione, esiste quindi l'inversa  $F^{-1}$  e vale

$$f = F^{-1}F[f] \quad \forall f \in S(\mathbb{R}).$$

La (i) afferma che nel caso  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ed  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  l'operatore  $\hat{F}^{-1}$  si esprime tramite l'integrale specificato sopra.

La (ii) è immediata conseguenza della (i)

Nella (iii) notiamo che nel caso (a) il primo ed il secondo membro appartengono ad  $L^\infty(\mathbb{R})$ , infatti

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow fg \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}\hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{ed}$$

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} * \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R})$$

L'uguaglianza (a) si può quindi intendere in  $L^\infty(\mathbb{R})$  (oltre che in  $S(\mathbb{R})$ ).

Nel caso (b) invece abbiamo

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow f+g \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} + \hat{g} \in S'(\mathbb{R}) \quad \text{ed}$$

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \hat{*} \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R})$$

quindi l'uguaglianza (b) afferma che, per  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , la distribuzione  $\hat{f} \hat{*} \hat{g} \in S'(\mathbb{R})$  è, in particolare, una funzione che coincide con la funzione  $\hat{f} \hat{*} \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

## FILTRI DI CONVOLUZIONE

DEF Data una funzione  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  diciamo "filtro di convoluzione" l'operatore

$$A: f \longrightarrow f * h = Af$$

PROP. Sia  $h \in L^1(\mathbb{R})$ , allora l'operatore  $A$  è lineare, invariante per traslazioni e continuo da  $L^\infty(\mathbb{R})$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$ , e da  $L^2(\mathbb{R})$  in  $L^2(\mathbb{R})$ .

Dim

Linearità: è ovvia essendo  $Af$  definito dall'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)h(s)ds$ .

Invarianza per traslazioni:

$$(Af)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)h(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f((t-a)-s)h(s)ds = (Af)(t-a)$$

Continuità:

dalle proprietà della convoluzione abbiamo:

$$\|f * h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|h\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{per } f \in L^1(\mathbb{R}), \text{ ed}$$

$$\|f * h\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|h\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{per } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

NOTA Visto  $A$  come operatore  $A: L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  lineare, continuo ed invariante per traslazioni, risulta definita una "funzione di trasferimento"  $H(\lambda)$  tale che

$$Ae_\lambda = H(\lambda)e_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{con } e_\lambda = e_\lambda(t) = e^{2\pi i \lambda t}$$

(si veda (\*), Prop. 2.3.1).

Notare che ha senso applicare  $A$  ad  $e_\lambda$  poiché  $e_\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

Le seguenti proposizioni mostrano il legame tra trasformata di Fourier e filtri di convoluzione.

PROP. Sia  $h \in L^1(\mathbb{R})$  ed  $A: f \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow f * h \in L^2(\mathbb{R})$  il corrispondente filtro di convoluzione con funzione di trasferimento  $H$ .

Allora  $H = \hat{h}$ .

Dim Poiché  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si ha  $e_\alpha(t) = e^{2\pi i \alpha t} \in L^\infty(\mathbb{R})$  e quindi  $e_\alpha$  è un input ammesso.

Dalla definizione di funzione di trasferimento si ha  $(e_\alpha * h)(t) = H(\alpha) e_\alpha(t)$ .

D'altra parte, poiché  $h \in L^1(\mathbb{R})$  si può calcolare direttamente:

$$(e_\alpha * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \alpha(t-s)} h(s) ds = e^{2\pi i \alpha t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \alpha s} h(s) ds$$

$$= e_\alpha(t) \cdot \hat{h}(\alpha)$$

Dunque  $\hat{h}(\alpha) e_\alpha(t) = H(\alpha) e_\alpha(t) \quad \forall t$ .

Posto  $t=0$ , ho  $\hat{h}(\alpha) = H(\alpha)$ .

PROP. Fissiamo come prima  $h \in L^1(\mathbb{R})$ , ma supponiamo ora sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ; abbiamo  $A: f \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow f * h \in L^2(\mathbb{R})$  e vale:

$$f * h = \tilde{f}^{-1} [\hat{f} \hat{h}]$$

Dim Per le proprietà della convoluzione  $f \in L^2, h \in L^1 \Rightarrow f * h \in L^2$ .

Inoltre  $f * h = \tilde{f}^{-1} \tilde{f} [\hat{f} * \hat{h}] = \tilde{f}^{-1} [\hat{f} \hat{h}]$  (vedi Prop. pag. 16, (ii), (b))

### NOTA

La proposizione precedente mostra che l'azione di un filtro di convoluzione si può scomporre in 3 fasi:

- (1) Analisi delle frequenze tramite trasformata di Fourier:  $f \rightarrow \hat{f}$
- (2) Filtraggio delle frequenze tramite moltiplicazione di  $\hat{f}$  per  $\hat{h}$ , ovvero  $H$ .
- (3) Ricostruzione del segnale filtrato tramite trasformata di Fourier inversa:  $\hat{f} \hat{h} \rightarrow \tilde{f}^{-1} [\hat{f} \hat{h}]$ .

Filtri di questo tipo si dicono anche "stazionari" poiché l'azione di filtraggio delle frequenze nella fase (2) avviene in modo indipendente dal tempo.

Ad esempio non è possibile filtrare frequenze in una certa banda fino ad un istante  $t_0$ , ed in una diversa banda dopo l'istante  $t_0$ .

Ciò sarà invece possibile tramite filtri di tipo diverso che utilizzano (ad esempio) la trasformata di Gabor invece che quella di Fourier.

NOTA Le proprietà e le considerazioni precedenti si estendono a parecchi casi in cui  $h \notin L^1(\mathbb{R})$ . Particolarmente significativo sarà ad esempio il caso  $h(t) = \text{sinc}_{ea}(t) = \frac{\sin(ea\pi t)}{\pi t}$ . In tutti questi casi vale infine la seguente proprietà:

PROP Il filtro di convoluzione  $f \rightarrow f * h$  è causale se e solo se  $\text{supp } h \subseteq [0, +\infty)$ .

Dim (1) sia  $\text{supp } h \subseteq [0, +\infty)$ , e sia  $f(t) = 0 \quad \forall t \leq t_0$ .

$$\text{Allora } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) h(s) ds = \int_{-\infty}^{t_0} f(t-s) h(s) ds.$$

Per  $t \leq t_0$  ha  $t-s \leq t_0 - s \leq t_0$  (perché sul dominio di integrazione  $s \geq 0$ ), segue  $f(t-s) = 0$  e quindi  $(f * h)(t) = 0$ .

(2) Sia  $f \rightarrow f * h$  causale. Per assurdo sia  $t_0 < 0$  tale che  $h(t_0) \neq 0$ ; supponiamo  $h(t_0) > 0$  (con ovvie generalizzazioni per  $h(t_0) \in \mathbb{C}$ ). Ci limitiamo al caso di  $h$  continua in  $t_0$ , allora esistono  $a, b > 0$  tali che  $-b < t_0 < -a$  ed  $h(t) > 0, \forall t \in [-b, -a]$ . Allora per  $f(t) = X_{[0, b-a]}(t)$  ha

$$(f * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{[0, b-a]}(t-s) h(s) ds = \int_{-(b-a)}^t h(s) ds = \int_{-b}^{-a} h(s) ds > 0.$$

Dunque non c'è causalità poiché si ha  $X_{[0, b-a]}(t) = 0, \forall t < 0$ , mentre  $(X_{[0, b-a]} * h)(-a) > 0$ .

ESEMPIO Il filtro di convoluzione  $f \rightarrow f * \text{sinc}_{2a}$  è un filtro "passa basso ideale", non causale (ovvero non realizzabile). Infatti le seguenti uguaglianze, valide con  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\text{sinc}_{2a} \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} f * \text{sinc}_{2a} &= \hat{f}^{-1} \hat{f} [f * \text{sinc}_{2a}] \\ &= \hat{f}^{-1} [\hat{f} \cdot \widehat{\text{sinc}_{2a}}] = \hat{f}^{-1} [\hat{f} \cdot \widehat{X}_{[-a,a]}] = \hat{f}^{-1} [\hat{f} \cdot \widetilde{X}_{[-a,a]}] = \\ &= \hat{f}^{-1} [\hat{f} \cdot \widetilde{X}_{[-a,a]}] \quad (\text{essendo } \widetilde{X}_{[-a,a]}(t) = X_{[-a,a]}(-t) = X_{[-a,a]}(t)) \end{aligned}$$

mostrano che le frequenze  $\omega$  con  $|\omega| > a$  vengono "tagliate" dalla funzione di trasferimento  $X_{[-a,a]} = \widehat{\text{sinc}_{2a}}$  (vedi Appendice(b)).

Il filtro tuttavia è non realizzabile poiché  $\text{supp } \text{sinc}_{2a} \not\subseteq [0, +\infty)$ .

ESEMPIO Il circuito RC è un filtro di convoluzione realizzabile che costituisce un'approssimazione del filtro "passa-basso ideale".

Infatti l'equazione

$$RCv'(t) + v(t) = f(t) \quad \begin{cases} f(t) = \text{input} \\ v(t) = \text{output} \end{cases}$$

porta ad un filtro

$$f(t) \xrightarrow{\boxed{RC}} v(t) = (f * h)(t)$$

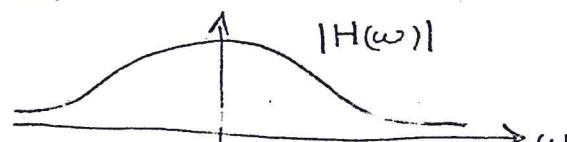
$$\text{con } h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \chi_{[0,+\infty)}(t) \quad \text{e quindi } \text{supp } h \subseteq [0, +\infty)$$

cioè il filtro è realizzabile.

Inoltre la funzione di trasferimento è

$$H(\omega) = \widehat{h}(\omega) = \frac{1}{1 + 2\pi i \omega RC}. \quad \text{Il suo modulo è}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \omega^2 R^2 C^2}}$$



il cui grafico può considerarsi come un'approssimazione di una funzione del tipo  $\chi_{[-a,a]}$  che, come si è visto sopra, è la funzione di trasferimento del filtro passa-basso ideale.

## APPENDICE

(a) Mostriamo, a livello intuitivo, che vale  $\hat{1} = \delta$ .

Abbiamo infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t \omega} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi t \omega) dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi t \omega) dt.$$

Per  $\omega \neq 0$  le oscillazioni di  $\cos(2\pi t \omega)$ , al variare di  $t \in \mathbb{R}$ , si "compensano" e ciò giustifica intuitivamente il fatto che il primo integrale sia nullo.

Stessa considerazione vale per il secondo integrale e quindi abbiamo  $\hat{1}(\omega) = 0$  per  $\omega \neq 0$ .

Per  $\omega = 0$  invece si ha  $\hat{1}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 dt = +\infty$ .

Dunque, sempre molto intuitivamente,  $\hat{1} = \delta$ .

(b) Il fatto che  $\chi_{[-a,a]}$  sia funzione di trasferimento del filtro  $f \rightarrow f * \text{sinc}_{2a}$  non è banale. Infatti  $\text{sinc}_{2a} \notin L^1(\mathbb{R})$  e quindi la convoluzione  $e_1 * \text{sinc}_{2a}$ , con  $e_1(t) = e^{2\pi i t} \in L^\infty(\mathbb{R})$ , non è ben definita negli spazi di Lebesgue.

Si può tuttavia dare un'interpretazione ad  $e_1 * \text{sinc}_{2a}$  nello spazio  $S'(\mathbb{R})$ , scrivendo

$$e_1 * \text{sinc}_{2a} = \hat{f}^{-1} \left[ \hat{e}_1 \cdot \widehat{\text{sinc}_{2a}} \right] = \hat{f}^{-1} \left[ \delta_1 \cdot \chi_{[-a,a]} \right].$$

Se  $\lambda \in (-a, a)$  si dimostra che il prodotto  $\delta_1 \cdot \chi_{[-a,a]}$  ha senso e vale  $\delta_1$ ; analogamente se  $\lambda \notin [-a, a]$  si mostra che  $\delta_1 \cdot \chi_{[-a,a]} = 0$ .

Ma  $\hat{f}^{-1}[\delta_1] = e_1$ , mentre  $\hat{f}^{-1}[0] = 0$ , dunque possiamo scrivere

$$\hat{f}^{-1}[\delta_1 \cdot \chi_{[-a,a]}] = \chi_{[-a,a]} \cdot e_1 \quad (\text{ad eccezione tuttavia di } \lambda = \pm a \text{ in cui il prodotto } \delta_1 \cdot \chi_{[-a,a]} \text{ non è ben definito, insieme di misura nulla}).$$

Abbiamo quindi:  $e_1 * \text{sinc}_{2a} = \chi_{[-a,a]} \cdot e_1$  ovvero

$\chi_{[-a,a]}$  è funzione di trasferimento del filtro.

(c) Dim della proprietà commutativa  $f * g = g * f$ :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du = (g * f)(t).$$

(d) Dim della proprietà  $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$ :

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds \right| dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-s)| |g(s)| ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-s)| |g(s)| dt ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)| \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-s)| dt \right) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)| \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| du \right) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)| \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} ds = \\ &\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

(e) Dim della proprietà  $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$ :

$$\begin{aligned} \forall t : \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds \right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-s)| |g(s)| ds \leq \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |g(s)| ds = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)| ds = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$