Esercizio 5

Si consideri il seguente programma lineare intero, il cui rilassamento continuo ha base ottima $(x_1^* = \frac{9}{5}, x_2^* = \frac{8}{5}, x_5^* = \frac{1}{5})$ con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = \frac{17}{5}$.

$$\begin{array}{lrcrcl} \max\ z = & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ & & & & \end{array}$$

- (a) Scrivere la forma standard del rilassamento continuo e la sua riformulazione nella base ottima. ✓
- (b) Effettuare il branch del nodo radice, operando sulla variabile x_1.
- (c) Valutare i rilassamenti dei nodi figli utilizzando il metodo del simplesso duale.

P1 "≤" P2 "≥"

$x_1, \dots, x_5 \geq 0$

Sol a) $\max\ z = x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_5 &= 2 \end{aligned}$$

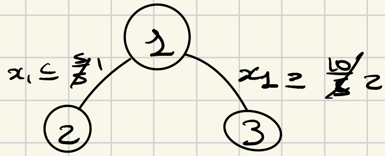
$B = \{x_1, x_2, x_5\}$

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - 2x_2 - x_4 \\ &= 5 - 2\left(\frac{8}{5} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4\right) - x_4 \\ &= 5 - \frac{16}{5} - \frac{2}{5}x_3 + \frac{6}{5}x_4 - x_4 \\ &= \frac{25-16}{5} - \frac{2}{5}x_3 + \frac{6-5}{5}x_4 \\ \to\ &= \frac{9}{5} - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \end{aligned}$$

$\max\ x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} &= \frac{9}{5} - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{8}{5} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ &= \frac{17}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 \end{aligned}$$

$O_B \quad \frac{17}{5}$



$$\begin{aligned} x_2 &= 7 - 3x_1 - x_3 \\ &= 7 - 3(5 - 2x_2 - x_4) - x_3 \\ &= 7 - 15 + 6x_2 + 3x_4 - x_3 \end{aligned}$$

$-6x_2 + x_2 =$

$$\begin{aligned} -5x_2 &= -8 - x_3 + 3x_4 \\ \to\ x_2 &= \frac{8}{5} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 2 - x_1 \\ &= 2 - \frac{9}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4 \\ &= \frac{10-9}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4 \\ \to\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \end{aligned}$$

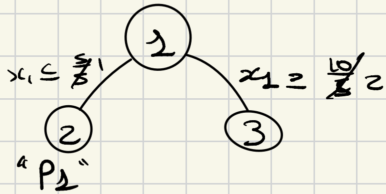
Esercizio 5

Si consideri il seguente programma lineare intero, il cui rilassamento continuo ha base ottima ($x_1^* = \frac{9}{5}, x_2^* = \frac{8}{5}, x_5^* = \frac{1}{5}$) con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = \frac{17}{5}$.

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max z & = & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{soggetto a} & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ & & & &
\end{array}$$

- a) Scrivere la forma standard del rilassamento continuo e la sua riformulazione nella base ottima.
- b) Effettuare il branch del nodo radice, operando sulla variabile x_1.
- c) Valutare i rilassamenti dei nodi figli utilizzando il metodo del simplesso duale.

P1 "≤" P2 "≥"



5.b)

[P1] $x_1 \leq 1$

$x_1 + x_6 = 1$

$$\max z = \frac{17}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4$$

$$x_1 = \frac{9}{5} - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4$$

$$x_2 = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$$

$$x_3 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4$$

$$x_5 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4$$

$$\begin{aligned}
x_6 &= 1 - x_1 \\
&= 1 - \frac{9}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\
&= \frac{5-9}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\
&= \underbrace{-\frac{4}{5}}_{<0} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4
\end{aligned}$$

BOUT : x_6

BIN : x_3

Esercizio 5

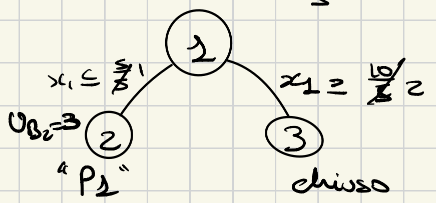
Si consideri il seguente programma lineare intero, il cui rilassamento continuo ha base ottima $(x_1^* = \frac{9}{5}, x_2^* = \frac{8}{5}, x_5^* = \frac{1}{5})$ con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = \frac{17}{5}$.

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
\max\ z & = & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{soggetto a} & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+}
\end{array}
$$

a. Scrivere la forma standard del rilassamento continuo e la sua riformulazione nella base ottima. ✓
b. Effettuare il branch del nodo radice, operando sulla variabile x_1. ✓
c. Valutare i rilassamenti dei nodi figli utilizzando il metodo del simplesso duale.

P1 "≤" P2 "≥"

$UB_1 = \frac{17}{5} \triangleq 3.4$



chiuso per bound ogni sol sarebbe ≥ 3.4

$$-\frac{5}{2}\left(-\frac{2}{5}\right) x_3 = -\frac{4}{5} - x_6 - \frac{1}{5}x_4$$

$$x_3 = -\frac{5}{2}\cdot -\frac{4}{5} - \frac{5}{2}\cdot - x_6 - \frac{5}{2}\cdot -\frac{1}{5}x_4$$

$$= +\frac{4}{2} + \frac{5}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_4$$

$$\rightarrow x_3 = 2 + \frac{5}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = \frac{9}{5} - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4$$

$$= \frac{9}{5} - \frac{2}{5}\left(2 + \frac{5}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_4\right) + \frac{1}{5}x_4$$

$$= \frac{9}{5} - \frac{4}{5} - x_6 \cancel{- \frac{1}{5}x_4} \cancel{+ \frac{1}{5}x_4}$$

$$\rightarrow = \cancel{\frac{5}{5}}\ 1 - x_6$$

$$x_2 = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$$

$$= \frac{8}{5} + \frac{1}{5}\left(2 + \frac{5}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_4\right) - \frac{3}{5}x_4$$

$$= \frac{8}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{3}{5}x_4$$

$$= \cancel{\frac{10}{5}}\ 2 + \frac{1-6}{10}x_4 + \frac{1}{2}x_6$$

$$\rightarrow = 2 + \cancel{-\frac{5}{10}} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6$$

$$x_5 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\left(2 + \frac{5}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_4\right) - \frac{1}{5}x_4$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + x_6 \cancel{+ \frac{1}{5}x_4} \cancel{- \frac{1}{5}x_4}$$

$$1 + x_6$$

$$\max\ z = \frac{17}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4$$

$$= \frac{17}{5} - \frac{1}{5}\cdot\left(2 + \frac{5}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_4\right) - \frac{2}{5}x_4 \qquad UB_2 = \frac{33}{10}$$

$$= \frac{17}{5} - \frac{2}{5} - \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{10}x_4 - \frac{2}{5}x_4$$

$$= \frac{15}{5} - \frac{1}{2}x_6 + \frac{-1-4}{10}x_4$$

$$= 3 - \frac{1}{2}x_6 \cancel{-\frac{5}{10}} - \frac{1}{2}x_4 \quad \text{ottimo}$$

Esercizio 6

Si consideri il seguente programma lineare intero, il cui rilassamento continuo ha base ottima $(x_1^* = \frac{9}{2}, x_2^* = \frac{3}{2}, x_3^* = \frac{17}{2})$ con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 12$.

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max z = & 3x_1 & - & x_2 & & \\
\text{soggetto a} & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 5 \\
& x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\
& 2x_1 & & & \leq & 9 \\
& & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ & & &
\end{array}$$

- Scrivere la forma standard del rilassamento continuo e la sua riformulazione nella base ottima.
- Effettuare il branch del nodo radice, operando sulla variabile x_1.
- Valutare i rilassamenti dei nodi figli utilizzando il metodo del simplesso duale.

P1 "≤"   P2 "≥"

6.a) $\max z = 3x_1 - x_2$ $B = \{x_1, x_2, x_3\}$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\
x_1 - x_2 + x_4 &= 3 \\
2x_1 + x_5 &= 9
\end{aligned}$$

$\frac{2}{2}x_1 = \frac{9}{2} - \frac{x_5}{2}$

$\rightarrow x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_5$

$$\begin{aligned}
-x_2 &= 3 - x_1 - x_4 \\
&= 3 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2}x_5 - x_4 \\
&= \frac{6-9}{2} - x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\
-x_2 &= -\frac{3}{2} - x_4 + \frac{1}{2}x_5
\end{aligned}$$

$\rightarrow x_2 = +\frac{3}{2} + x_4 - \frac{1}{2}x_5$

$$\begin{aligned}
-x_3 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 \\
&= 5 - 2\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_5\right) - 3x_2 \\
&= 5 - 9 + x_5 - 3x_2 \\
&= -4 - 3x_2 + x_5 \\
&= -4 - 3\left(\frac{3}{2} + x_4 - \frac{1}{2}x_5\right) + x_5 \\
&= -4 - \frac{9}{2} - 3x_4 + \frac{3}{2}x_5 + x_5 \\
&= \frac{-8-9}{2} - 3x_4 + \frac{3+2}{2}x_5 \\
-x_3 &= -\frac{17}{2} - 3x_4 + \frac{5}{2}x_5
\end{aligned}$$

$\longrightarrow x_3 = \frac{17}{2} + 3x_4 - \frac{5}{2}x_5$

$$\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 - x_2 \\
&= 3\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_5\right) - \left(\frac{3}{2} + x_4 - \frac{1}{2}x_5\right) \\
&= \frac{27}{2} - \frac{3}{2}x_5 - \frac{3}{2} - x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\
&= \frac{24}{2} - x_4 - \frac{2}{2}x_5 \\
&= 12 - x_4 - x_5
\end{aligned}$$

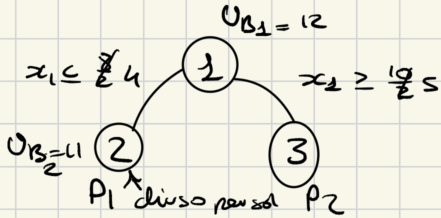
Esercizio 6

Si consideri il seguente programma lineare intero, il cui rilassamento continuo ha base ottima ($x_1^* = \frac{9}{2}, x_2^* = \frac{3}{2}, x_3^* = \frac{17}{2}$) con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 12$.

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max z = & 3x_1 & - & x_2 & & \\
\text{soggetto a} & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 5 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & & & \leq & 9 \\
 & & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ & & &
\end{array}
$$

- Scrivere la forma standard del rilassamento continuo e la sua riformulazione nella base ottima.
- Effettuare il branch del nodo radice, operando sulla variabile x_1.
- Valutare i rilassamenti dei nodi figli utilizzando il metodo del simplesso duale.

P1 "≤" P2 "≥"



$$\max z = 12 - x_4 - x_5$$

$$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_5$$
$$x_2 = +\frac{3}{2} + x_4 - \frac{1}{2}x_5$$
$$x_3 = \frac{17}{2} + 3x_4 - \frac{5}{2}x_5$$

P1) $\max z = 12 - x_4 - x_5$

$$\rightarrow x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_5$$
$$\rightarrow x_2 = +\frac{3}{2} + x_4 - \frac{1}{2}x_5$$
$$\rightarrow x_3 = \frac{17}{2} + 3x_4 - \frac{5}{2}x_5$$
$$x_6 = 4 - x_1 = 4 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2}x_5 = \frac{8-9}{2} + \frac{1}{2}x_5$$
$$\rightarrow x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_5$$

>

new: $x_1 \leq 4$
$x_1 + x_6 = 4$
$x_6 = 4 - x_1$

B out: x_6
B in : x_5

$$\cancel{2 \cdot \frac{1}{2}x_5} = \frac{1}{2} + x_6 = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + 2x_6$$
$$\rightarrow x_5 = 1 + 2x_6$$

$$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_5 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(1 + 2x_6) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - x_6 = 4\cancel{\frac{8}{2}} - x_6$$
$$\rightarrow x_1 = 4 - x_6$$

$$x_2 = \frac{3}{2} + x_4 - \frac{1}{2}x_5 = \frac{3}{2} + x_4 - \frac{1}{2}(1 + 2x_6) = \frac{3}{2} + x_4 - \frac{1}{2} - x_6$$
$$\rightarrow x_2 = \cancel{\frac{2}{2}}\ 1 + x_4 - x_6$$

$$x_3 = \frac{17}{2} + 3x_4 - \frac{5}{2}x_5 = \frac{17}{2} + 3x_4 - \frac{5}{2}(1 + 2x_6) = \frac{17}{2} + 3x_4 - \frac{5}{2} - 5x_6$$
$$\rightarrow x_3 = \cancel{\frac{12}{2}}\ 6 + 3x_4 - 5x_6$$

$$\max z = 12 - x_4 - x_5 = 12 - x_4 - 1 - 2x_6 = 11 - x_4 - 2x_6$$

Branch and Bound

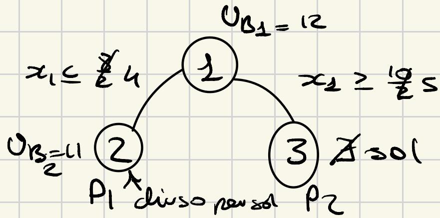
Esercizio 6

Si consideri il seguente programma lineare intero, il cui rilassamento continuo ha base ottima ($x_1^* = \frac{9}{2}, x_2^* = \frac{3}{2}, x_3^* = \frac{17}{2}$) con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 12$.

$$\begin{array}{rrcrcl} \max z & = 3x_1 & - & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 5 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & & & \leq & 9 \\ & & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ & & & \end{array}$$

a) Scrivere la forma standard del rilassamento continuo e la sua riformulazione nella base ottima.
b) Effettuare il branch del nodo radice, operando sulla variabile x_1.
c) Valutare i rilassamenti dei nodi figli utilizzando il metodo del simplesso duale.

P1 "≤" P2 "≥"



$$\max z = 12 - x_4 - x_5$$

$$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_5$$
$$x_2 = +\frac{3}{2} + x_4 - \frac{1}{2}x_5$$
$$x_3 = \frac{17}{2} + 3x_4 - \frac{5}{2}x_5$$

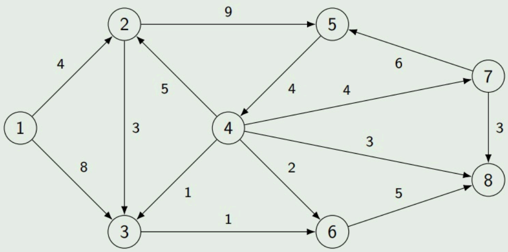
$$x_1 \geq 5 \longrightarrow x_1 - x_6 = 5$$

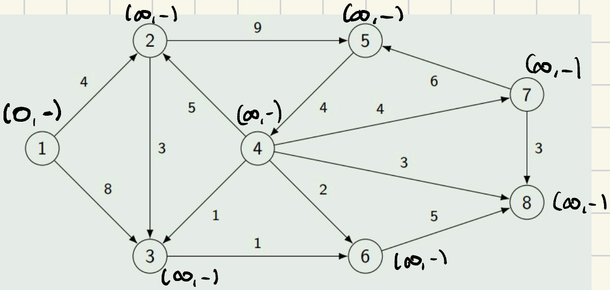
$$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_5$$
$$x_2 = +\frac{3}{2} + x_4 - \frac{1}{2}x_5$$
$$x_3 = \frac{17}{2} + 3x_4 - \frac{5}{2}x_5$$
$$x_6 = -5 + x_1$$
$$= -5 + \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_5$$
$$= \frac{-10-9}{2} - \frac{1}{2}x_5$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5$$

<0 ma <0 ∄ sol

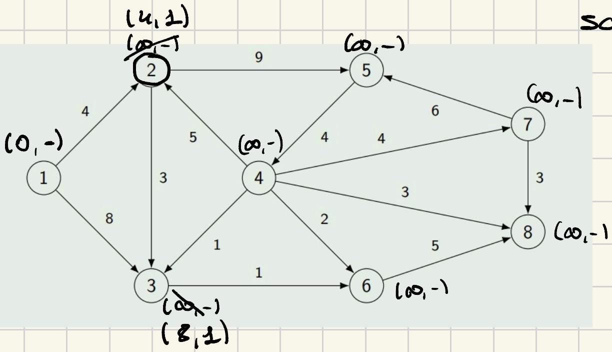
Esercizio 7

Dato il seguente grafo orientato, calcolare l'albero dei cammini minimi partendo dal nodo 1 ed applicando SPT-Dijkstra.

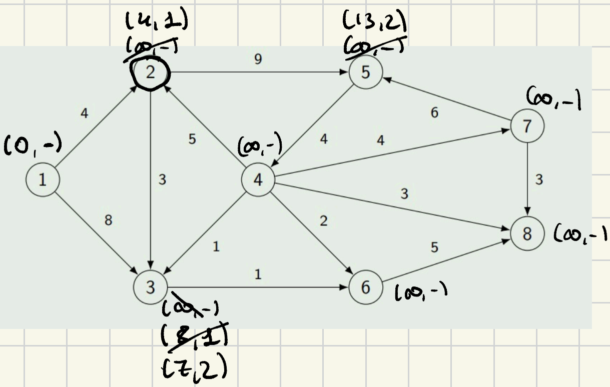


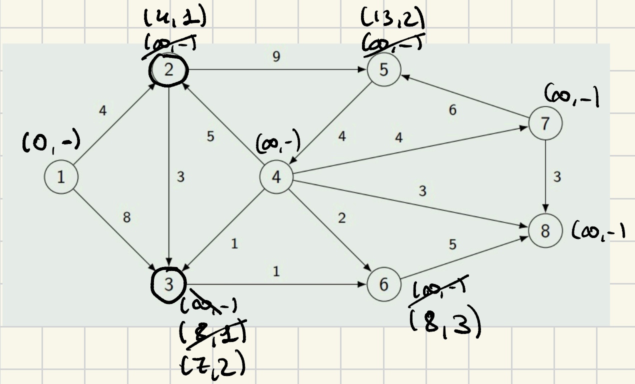


scelgo 2

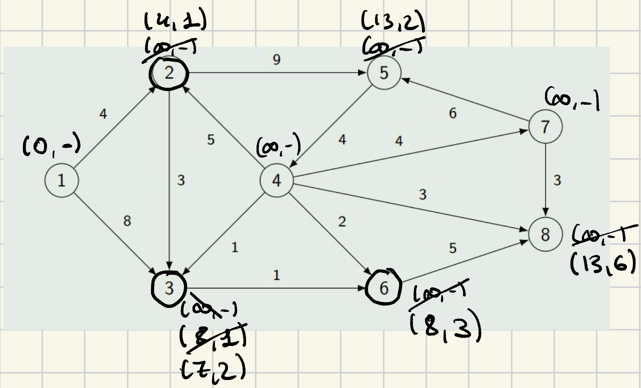


Scelgo 3

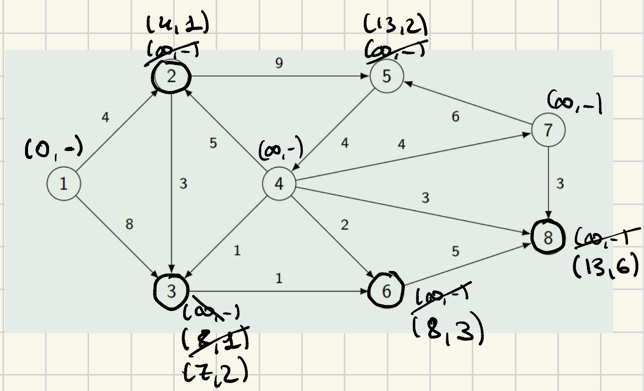




Scelgo 6



Selgo 8

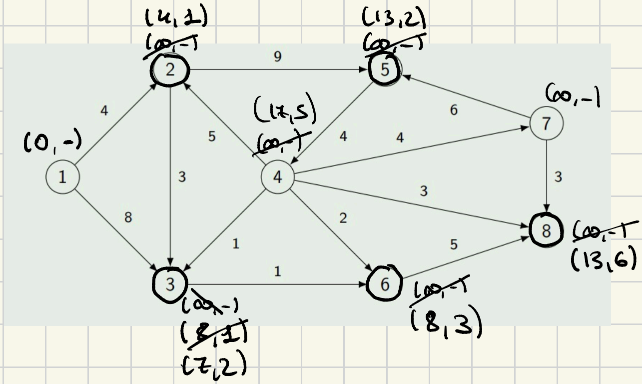


∄ nodi uscenti da 8. Scelgo

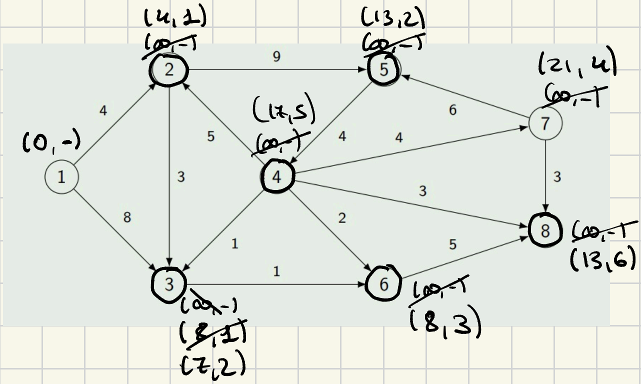
6 → ∄

3 → ∄

2 → ~~3~~, 5

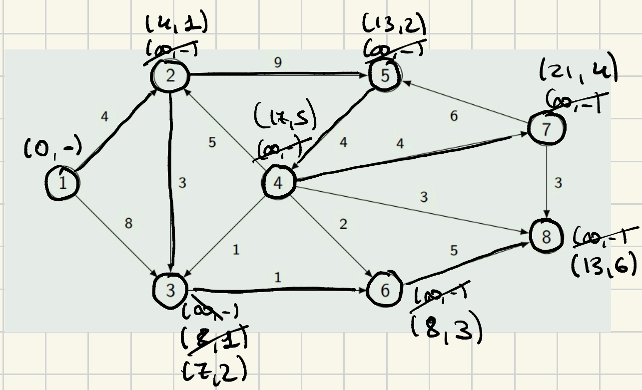


Scelgo 4



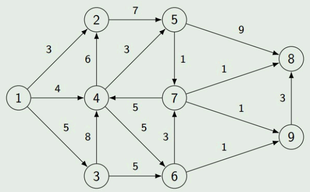
Scelgo il 7

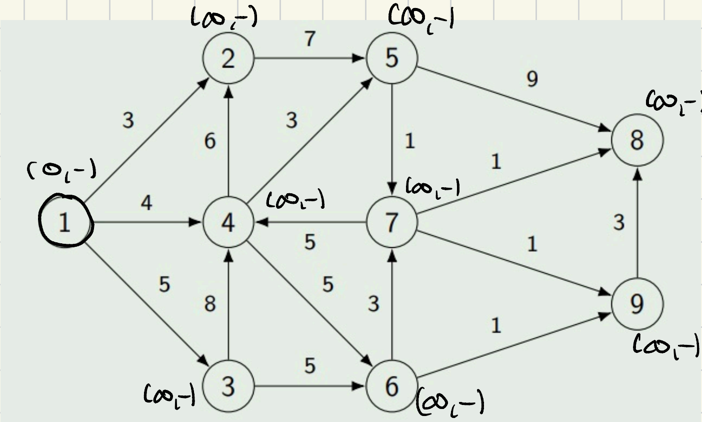
Final



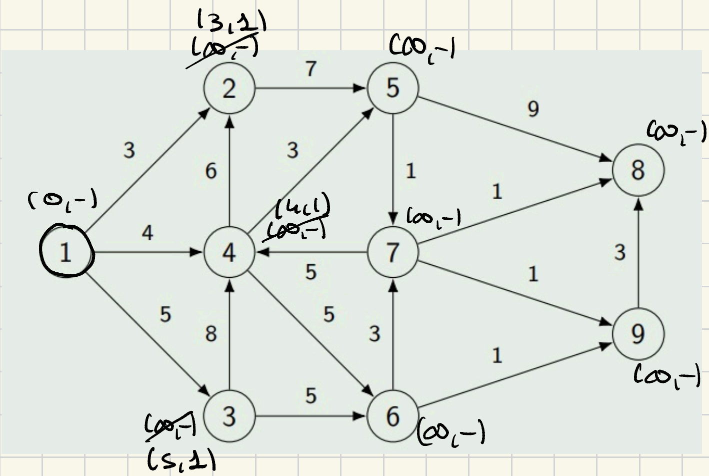
Esercizio 8

Dato il seguente grafo orientato, calcolare l'albero dei cammini minimi partendo dal nodo 1 ed applicando SPT-Dijkstra.

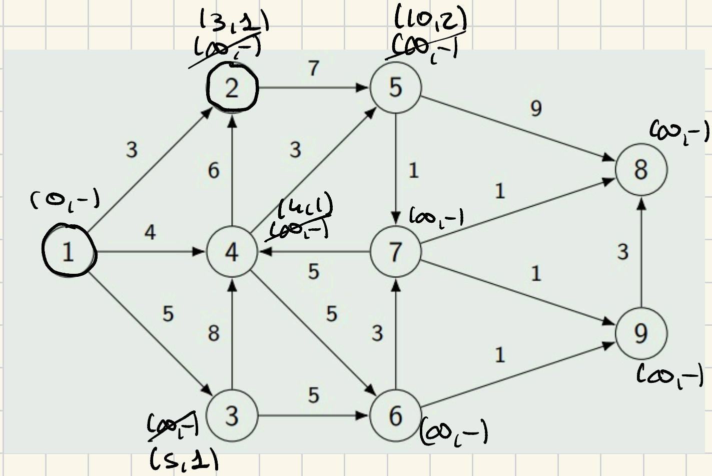




Scelgo (1)

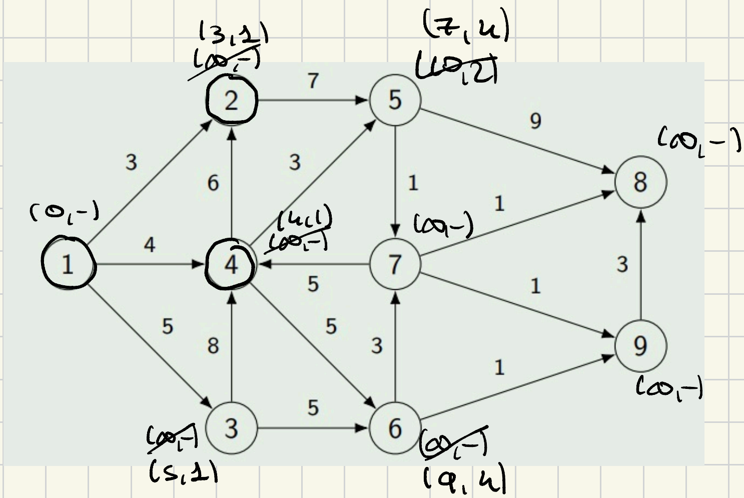


Scelgo (2)



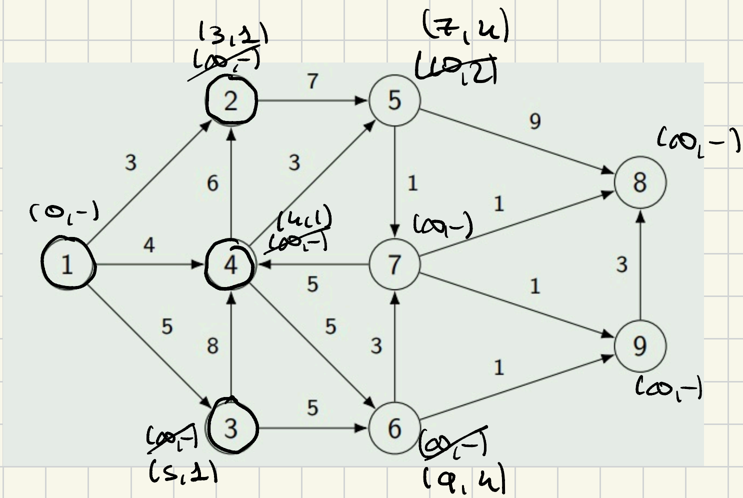
Scelgo 4 per

5 -> costo 10
4 -> costo 4 min
3 -> costo 5



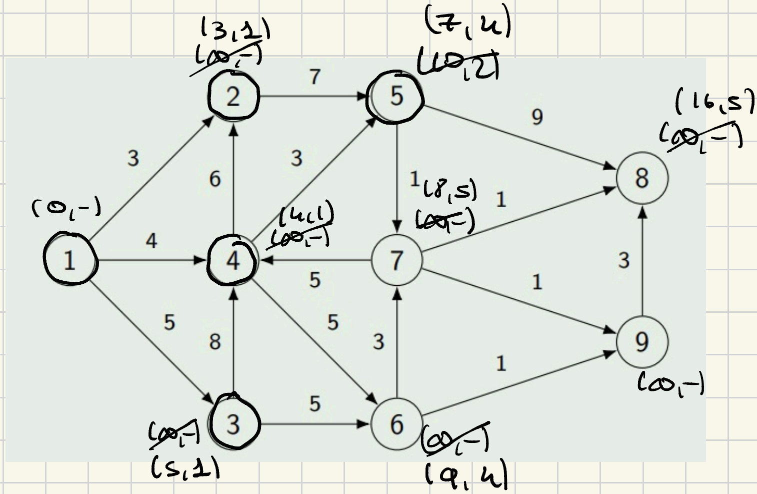
Disponibili

-> 5 : 7
-> 3 : 5 -> scelto
-> 6 : 9



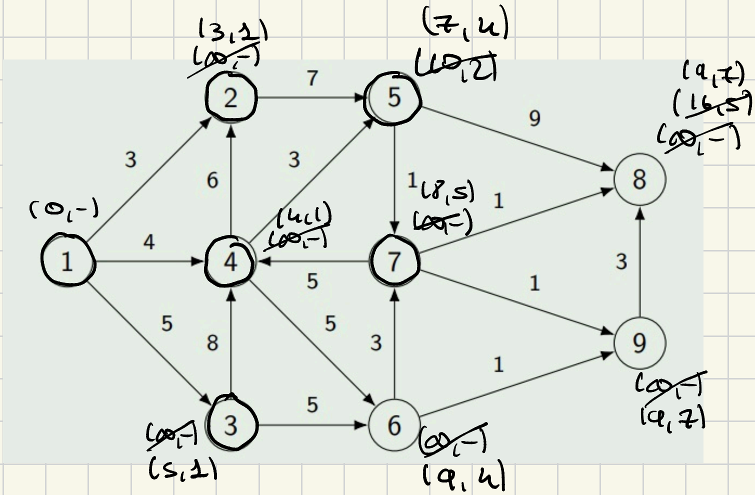
Disponibili

-> 5 : 7 -> scelto
-> 6 : 9



Disponibili

- 7 : 8 → scelto
- 8 : 16
- 6 : 9

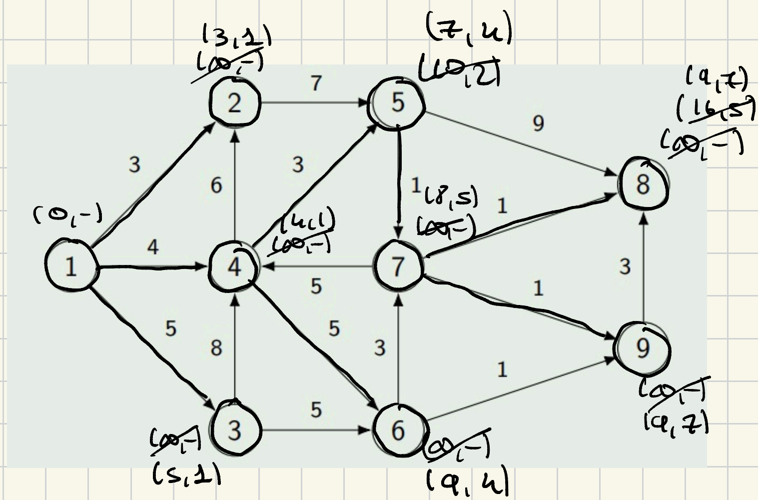


Disponibili

→ 8 : 9

→ 9 : 9

→ 6 : 9 scelto



Disponibili

→ 8 : 9 sceto

9 : 9