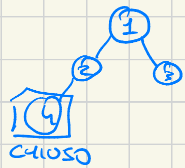
BRANCH & BOUND > CHIUSURA NODI

Un nodo viene chiuso quando:

- Fornisce una soluzione nella variabile intera della funzione obiettivo:

  ES $\max \boxed{7} - x_5 - 6x_6$

  ⋮ vincoli interi → sol



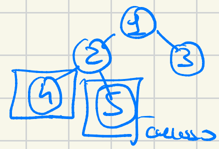
- Non ha soluzioni

  ES $\max z = 10 - 4x_5 - 3x_4$

  ⋮

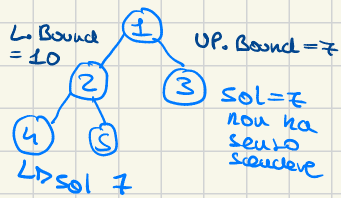
  $x_6 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_4$

  → ∄ sol con simplesso duale



- Se la soluzione trovata coincide con l'upper / lower bound:

  ES Usando la soluzione = 7 del 1° caso



CASO D'USO: BRANCH & BOUND

Risolvere il seguente sl. i:

$$\max z = 2x_1 + x_2 \qquad\qquad \max\ 2x_1 + x_2$$
$$x_1 - 2x_2 \le 3 \quad\longrightarrow\quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 8 \qquad 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 8$$
$$x_2 \le 2 \qquad x_2 + x_5 = 2$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \qquad x_1, \dots, x_5 \ge 0$$

con $\{x_1, x_2, x_5\}$

(1) Provo a risolvere il sistema $\qquad x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{R}$

$$\max z = \frac{52}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4$$

$\frac{52}{7}$ → Diventa Upper Bound *

$$x_1 = 3 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad x_1 = \frac{25}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4$$
$$3x_2 = 8 - 2x_1 - x_4 \quad\Rightarrow\quad x_2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$$
$$x_5 = 2 - x_2 \qquad\qquad x_5 = \frac{12}{7} - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4$$

$\boxed{x_2}$

$$3x_2 = 8 - 2(3 + 2x_2 - x_3) - x_4$$
$$\quad = 8 - 6 - 4x_2 + 2x_3 - x_4$$
$$3x_2 + 4x_2 = 2 + 2x_3 - x_4$$
$$7x_2 = 2 + 2x_3 - x_4$$
$$x_2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$$

$\boxed{x_5}$

$$x_5 = 2 - x_2$$
$$x_5 = 2 - \frac{2}{7} - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4$$
$$= \frac{14-2}{7} - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4$$
$$x_5 = \frac{12}{7} - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4$$

$\boxed{x_1}$

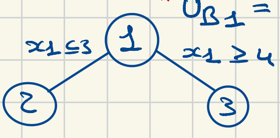
$$x_1 = 3 + 2x_2 - x_3$$
$$= 3 + \frac{4}{7} + \frac{4}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4 - x_3$$
$$= \frac{21+4}{7} + \frac{4-7}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4$$
$$x_1 = \frac{25}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4$$

F. obb $2x_1 + x_2$

$$= \frac{50}{7} - \frac{6}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4$$
$$+ \frac{2}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$$
$$= \frac{52}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4$$

(2) Definisco i nodi con i bound

$^*UB_1 = \frac{52}{7}$



- Osservo le variabili in base

$$x_1 = \frac{25}{7} \in \mathbb{R} \quad \text{Ne scelgo 1}$$
$$x_2 = \frac{2}{7} \in \mathbb{R} \quad \text{la min}$$
$$x_5 = \frac{12}{7} \in \mathbb{R}$$

Lower (x_1) → $\frac{21}{7} = 3$

Upper (x_1) → $\frac{28}{7} = 4$

L21

CASO D'USO: BRANCH & BOUND

(3) Proseguo sui nodi

$\boxed{\text{NODO } 2}$ = $x_1 \leq 3$ => Aggiungo vincolo

$x_1 + x_6 = 3$

$x_6 = 3 - x_1$

$= 3 - \frac{25}{7} + \frac{3}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4$

$= \frac{21-25}{7} + \frac{3}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4$

$= -\frac{4}{7} + \frac{3}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4$

$\max z = \frac{52}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4$

$x_1 = \frac{25}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4$

$x_2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$

$x_5 = \frac{12}{7} - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4$

$x_6 = \underbrace{-\frac{4}{7}}_{<0} + \frac{3}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4$

<0 => Simplesso Duale

B. OUT: x_6

& IN: x_3

x_3 $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ ✓

x_4 $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{5}{2} = \frac{15}{6}$

(3.1) Risolvo

$\max z = \frac{20}{3} - \frac{4}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_4$

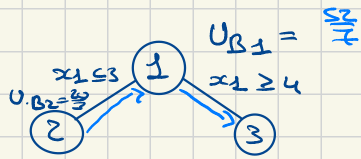
$x_1 = 3 - x_6$

$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_4$

$x_5 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_4$

$x_3 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_4 + \frac{7}{3}x_6$

$UB_2 = \frac{20}{3} \notin \mathbb{Z}$



$\boxed{x_3}$

$\frac{3}{7}x_3 = \frac{4}{7} - \frac{2}{7}x_4 + x_6$

$\frac{7}{3}$ $= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_4 + \frac{7}{3}x_6$

$\boxed{x_5}$

$x_5 = \frac{12}{7} - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4$ SKIP

$= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_4$

(4) Proseguo

[NODO = 3]

$\max z = \frac{20}{3} - \frac{4}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_4$

$x_1 \geq 4 \rightarrow x_1 - x_6 = 4$

$x_6 = -4 + x_1$

$x_1 = 3 - x_6$

$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_4$

$x_5 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_4$

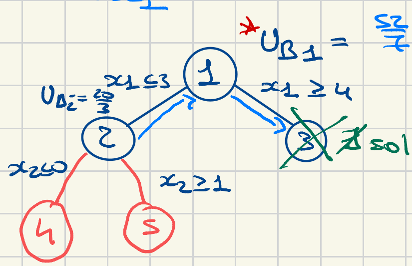
$x_3 = \frac{4}{3} + \frac{7}{3}x_6 - \frac{2}{3}x_4$

└→ simplesso duale => ∄ soluzioni

└→ Scelgo x_2 per prossimo branch

lower(x_2) = 0

upper(x_2) = 1



L21 •

CASO D'USO: BRANCH & BOUND

(5) Proseguo sui nodi:

nodo 4

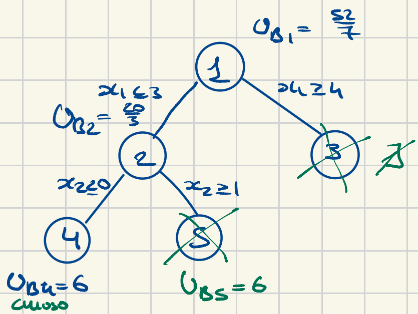
$$\max z = \frac{20}{3} - \frac{4}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_4$$

$x_2 \le 0 \to x_2 + x_7 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3 - x_6\\
x_2 &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_4\\
x_5 &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_4\\
x_3 &= \frac{4}{3} + \frac{7}{3}x_6 - \frac{2}{3}x_4\\
x_7 &= -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_4
\end{aligned}$$

B. OUT: x_7

B. IN: x_4



$$\max z = \underbrace{6}_{\in \mathbb{Z}} - 2x_6 - x_7 \qquad U_{B6}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3 - x_6\\
x_2 &= 0 - x_7\\
x_5 &= 2 + x_7\\
x_3 &= 0 + x_6 - 2x_7\\
x_4 &= 2 + 2x_6 + 3x_7
\end{aligned}$$

NOTA

Si può 'intuire' che U_{B_5} non esista perché facendo lower(U_{B_2}) parent viene $\frac{18}{3} = 6$ che è equivalente a U_{B_4}

(6) **nodo 5**

$$\max z = \frac{20}{3} - \frac{4}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_4$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3 - x_6\\
x_2 &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_4\\
x_5 &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_4\\
x_3 &= \frac{4}{3} + \frac{7}{3}x_6 - \frac{2}{3}x_4\\
x_7 &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_4
\end{aligned}$$

BASE OUT: x_7

IN: x_6

$x_2 \ge 1 \to x_2 - x_7 = 1$

$x_7 = -1 + x_2$

$$\max z = \underbrace{6}_{= U_{B_5}\ *} - 2x_7 - x_4$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_4\\
x_2 &= 1 + x_7\\
x_5 &= 1 - x_7\\
x_3 &= \frac{5}{2} + \frac{7}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_4\\
x_6 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_4
\end{aligned}$$

L21

BRANCH & BOUND > CASO D'USO ESAME

Dato $\max z = x_1 + 2x_2$

$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \ge 2$$
$$2x_2 \le 7$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Sapendo che $\left(\underset{x_1}{\frac{1}{2}}, \underset{x_2}{\frac{7}{2}}\right)$ sono punti di ottimo

I nodi figli sono aperti o chiusi?

(1) Forma normale

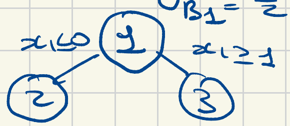
$$\max z = x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 - x_4 = 2$$
$$2x_2 + x_5 = 7$$

BASE (sostituire vincoli originali)

x_1, x_2, x_5

- (1) $4 \le 4 \Rightarrow x_3 = 0$
- (2) $4 \ge 2 \Rightarrow x_4 > 0$
- (3) $7 \le 7 \Rightarrow x_5 = 0$

$O_{B_1} = \frac{15}{2}$



(2) Riformulo

$$\max z = \frac{15}{2} - x_3 - \frac{1}{2}x_5$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - x_3 + \frac{1}{2}x_5$$
$$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_5$$
$$x_4 = 2 - x_3$$

$$x_1 = 4 - x_2 - x_3$$
$$= 4 - \frac{7}{2} + x_5 - x_3$$
$$= \frac{8-7}{2} - x_3 + x_5$$
$$= \frac{1}{2} - x_3 + x_5$$

$$x_4 = -2 + x_1 + x_2$$
$$= -2 + \frac{1}{2} - x_3 + \cancel{x_5}$$
$$+ \frac{7}{2} - \cancel{x_5}$$
$$= \frac{-4+8}{2}$$
$$= 2 - x_3$$

$$x_1 + 2x_2$$
$$= \frac{1}{2} - x_3 + x_5 + 7 - 2x_5$$
$$= \frac{15}{2} - x_3 - x_5$$

BRANCH & BOUND > CASO D'USO ESAME

NODO 2

$\max z = \frac{15}{2} - x_3 - \frac{1}{2}x_5$

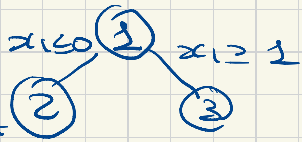
$x_1 = \frac{1}{2} - x_3 + \frac{1}{2}x_5$
$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_5$
$x_4 = 2 - x_3$

$x_1 \leq 0 \Rightarrow x_1 + x_6 = 0$
$x_6 = -x_1$
$x_6 = -\frac{1}{2} + x_3 - \frac{1}{2}x_5$

- OUT: x_6, IN: x_3

$\max z = 7 - x_5 + x_6$

$x_1 = 0 + x_6$
$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_5$
$x_4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_5 - x_6$
$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_5 + x_6$



$U_B = 7$
continua per variabili $\in \mathbb{Z}$

- x_3
  $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_5 + x_6$

- x_1
  $\frac{1}{2} - x_3 + \frac{1}{2}x_5$
  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cancel{- \frac{1}{2}x_5} + x_6 \cancel{+ \frac{1}{2}x_5}$
  $0 + x_6$

- x_4
  $2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5 - x_6$
  $\frac{4+1}{2} - \frac{1}{2}x_5 - x_6$
  $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_5 - x_6$

$\frac{15}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5 + x_6 - \frac{1}{2}x_5$
$= \frac{14}{2} - x_5 + x_6$

NODO 3

$\max z = \frac{15}{2} - x_3 - \frac{1}{2}x_5$

$x_1 = \frac{1}{2} - x_3 + \frac{1}{2}x_5$
$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_5$
$x_4 = 2 - x_3$

$x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 - x_6 = 1$
$x_6 = -1 + x_1$
$= -\frac{1}{2} - x_3 + \frac{1}{2}x_5$
OUT $= x_6$ IN x_5

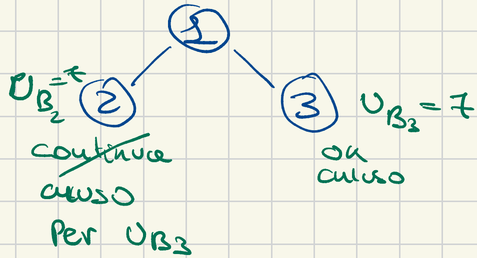
$\frac{1}{2}x_5 = +\frac{1}{2} + x_3 + x_6$
$= 1 + 2x_3 + x_6$

BRANCH & BOUND > CASO D'USO ESAME

NODO 3

$$\max z = \cancel{\tfrac{14}{2}}_{7} - 2x_3 - x_6$$

$$x_1 = 1 + x_6$$
$$x_2 = 3 - x_3 - x_6$$
$$x_4 = 2 - x_3$$
$$x_5 = 1 + 2x_3 + x_6$$



- x_2

$$\frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_5$$
$$= \frac{7}{2} - \frac{1}{2} - x_3 - x_6$$
$$= 3 - x_3 - x_6$$

- x_1

$$\frac{1}{2} - x_3 + \frac{1}{2}x_5$$
$$= \frac{1}{2} - \cancel{x_3} + \frac{1}{2} + \cancel{x_3} + x_6$$
$$= 1 + x_6$$

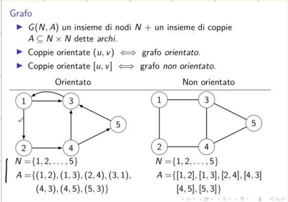
$$\frac{15}{2} - x_3 - \frac{1}{2}x_5$$
$$= \frac{15}{2} - x_3 - \frac{1}{2} - x_3 - x_6$$
$$\frac{14}{2} - 2x_3 - x_6$$

L22 • Grafi

DEFINIZIONE >

È un insieme $G(N, A)$ con N: I nodi
$A \subseteq N \times N$: Le coppie relazionate

Esso può essere
- Orientato
- Non orientato

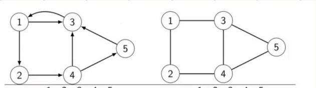


Su grafo orientato...
- *Cammino:* una sequenza di nodi collegati da archi (opportunamente orientati).
- *Cammino semplice:* senza nodi ripetuti.
- *Cammino chiuso:* sono identici nodo iniziale e finale.
- *Ciclo:* cammino semplice e chiuso.

Su grafo non orientato
- *Catena:* una sequenza di nodi collegati da archi.
- *Catena semplice:* senza nodi ripetuti.
- *Catena chiusa:* sono identici nodo iniziale e finale.
- *Ciclo:* catena semplice e chiuso.

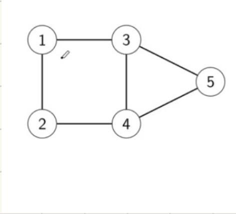
RAPP. CON MATRICE > MATRICI

Le relazioni possono essere rappresentate con matrici
- normali, se il grafo è orientato
- simmetriche, = = non orientato



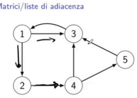
$$\begin{array}{c|c} & 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0\\ 1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&1\\ 0&0&1&1&0 \end{pmatrix}\end{array}$$

RAPP. CON MATRICI > CON LISTE DI ADIACENZA



$\mathbb{A}(1) = \{2, 3\}$
$\mathbb{A}(2) = \{1, 4\}$
$\mathbb{A}(3) = \{1, 4, 5\}$
$\mathbb{A}(4) = \{2, 3, 5\}$
$\mathbb{A}(5) = \{3, 4\}$

Rappresentazioni/strutture dati
Matrici/liste di adiacenza



FS(1) = {(1, 2), (1, 3)} ⟶ Follow star quelli che hanno la freccia uscente
FS(2) = {(2, 4)}
FS(3) = (3, 1)
FS(4) = {(4, 3)}, (4, 5)
FS(5) = {(5, 3)}
BS(1) = {(3, 1)}
BS(2) = {(1, 2)}
BS(3) = {(1, 3), (4, 3), (5, 3)}
BS(4) = {(2, 4)}
BS(5) = {4, 5}

$\mathbb{A}(1) = \{2, 3\}$ $\mathbb{A}(4) = \{3, 5\}$
$\mathbb{A}(2) = \{4\}$ $\mathbb{A}(5) = \{3\}$
$\mathbb{A}(3) = \{1\}$

non orientato — orientato

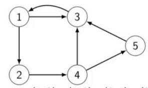
RAPP. CON MATRICI > CON MATRICE DI INCIDENZA

Si crea una matrice con
- I nodi come righe
- Le coppie come colonne

I valori sono:
- -1 => Il nodo da cui parte l'arco
- 1 => Il nodo in cui arriva l'arco
- 0 => Non mappato.

Rappresentazioni/strutture dati

Matrice di incidenza nodi/archi



	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(3,1)	(4,3)	(4,5)	(5,3)
1	−1	−1	0	1	0	0	0
2	1	0	−1	0	0	0	0
3	0	1	0	−1	1	0	1
4	0	0	1	0	−1	−1	0
5	0	0	0	0	0	1	−1

FLUSSO DI COSTO MINIMO >

Si può riformulare il problema del minor costo di attraversamento del nodo ad un programma lineare

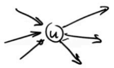
La somma → dei bilanci di 1 nodo deve essere 0

Flusso di costo minimo (Min-Cost Flow, MCF)

Definizioni

Dato un grafo orientato $G(N, A)$ con
- costi di trasporto c_{uv} e capacità ℓ_{uv}, per ogni $(u, v) \in A$, → limite di neve
- bilanci b_u per ogni $u \in N$, con $\sum_{u \in N} b_u = 0$,
- determinare un flusso $x = (x_{uv} : (u, v) \in A)$ che sia soluzione ottima del seguente programma lineare

Flusso di costo minimo



$$\min \quad z = \sum_{(u,v)\in A} c_{uv} x_{uv}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{(v,u)\in BS(u)} x_{vu} - \sum_{(u,v)\in FS(u)} x_{uv} = b_u \quad (u \in N)$$

$$x_{uv} \le \ell_{uv} \qquad (u, v) \in A$$

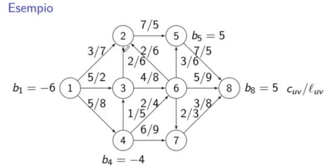
$$x_{uv} \ge 0 \qquad (u, v) \in A.$$

0 > 0

Problemi di flusso

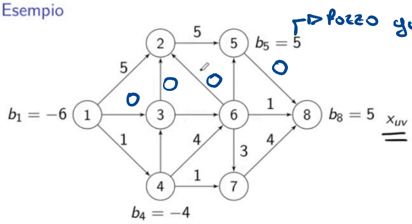
Flusso di costo minimo

Esempio



Per 2 il bilancio è ok per diff I (0 = 0

Esempio

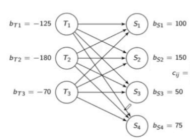


→ Pozzo guadagno Esempio di soluzione

Problemi di flusso

Casi particolari

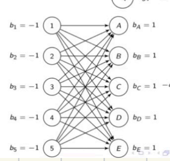
Trasporto



$c_{ij} =$

	S_1	S_2	S_3	S_4
T_1	20	25	15	5
T_2	12	14	18	30
T_3	19	11	40	12

Assegnamento



$-c_{ij} =$

	A	B	C	D	E
1	10	7	9	2	1
2	8	9	12	7	2
3	2	9	9	8	8
4	9	18	2	4	3
5	9	9	4	5	4

MODELLO FLUSSO DI COSTO MINIMO

Vengono riformulate col seguente problema con

- E : la matrice di incidenza
- b : i valori dei nodi
- l : capacità dei nodi

Problemi di flusso

Modello

$$\min\ z = c^T x$$
$$\text{soggetto a } \mathbf{E}x = b$$
$$0 \le x \le \ell.$$

$\mathbf{E}$ = matrice di incidenza nodi-archi del grafo.

Proprietà

- La matrice $\mathbf{E}$ è *totalmente unimodulare* (omissis...).
- La matrice $\mathbf{E}$ ha rango $|N| - 1$.
  (Un'equazione di $\mathbf{E}x = b$ è ridondante)
- Ogni matrice di base $\mathbf{B}$ estratta da $\mathbf{E}$ è triangolare.
  (il sistema $\mathbf{B}x_B = b$ è triangolare)
- Ogni matrice di base estratta da $\mathbf{E}$ corrisponde ad un sottoalbero di $|N| - 1$ archi estratto dal grafo $G(N, A)$.

Corollario

Visto che

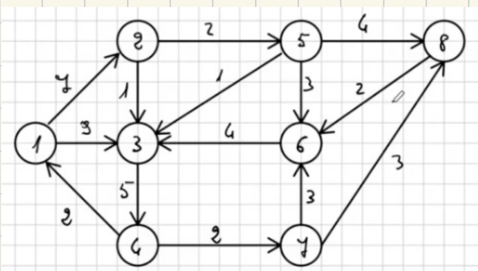
- ogni matrice di base $\mathbf{B}$ ha solo elementi $\{\pm 1, 0\}$,
- il sistema $\mathbf{B}x = b$ è triangolare,

se i bilanci b sono interi, ogni soluzione di base ha tutte le variabili intere.

CAMMINI MINIMI: CASO D'USO (DIJKSTRA)

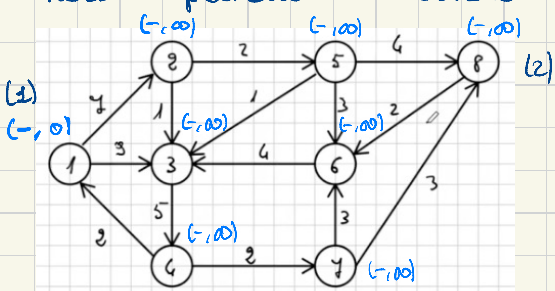
Dato il seguente grafo:

Determinare l'albero dei cammini minimi radicato in 1



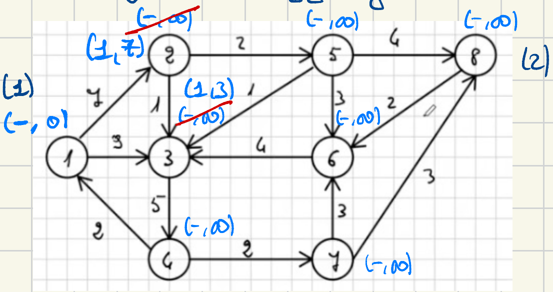
(1) Determino il nodo di partenza e assegno (-, 0) ovvero distanza 0 e parent nessuno.

(2) Inizializzo gli altri nodi con (-, ∞) ovvero nessun parent e distanza infinita.

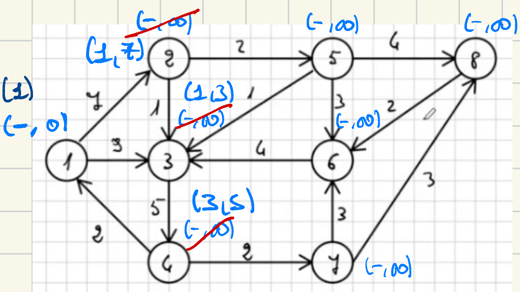


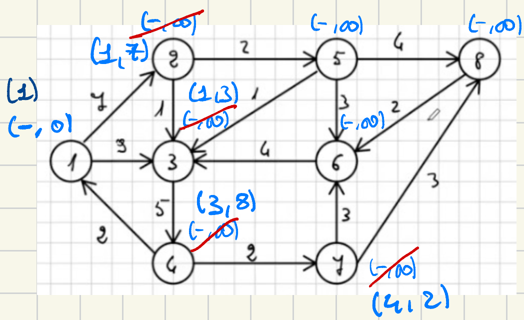
CAMMINI MINIMI: CASO D'USO (DIJKSTRA)

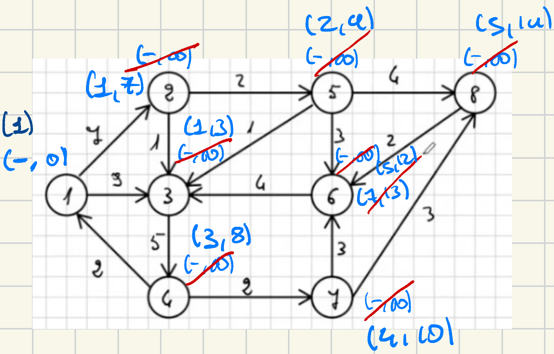
(3) Sovrascrivo i nodi ∞ con quelli raggiungibili



(4) Ri-itero col nodo con distanza minore (3)







COSTRUTTI IF-ELSE

Per creare costrutti sui vincoli del tipo:

IF $\langle y == 1 \rangle$
  esegui vincolo 1 es. $x \leq a$
ELSE $(y == 0)$
  esegui vincolo 2 es. $x \leq b$

a or b

Bisogna strutturarla come $x \leq a y + b \underbrace{(1-y)}_{\text{not } y}$

con:
- y variabile booleana
- a, b sono scalari del campo di riferimento

per fare solo gli if senza else conviene usare Big M