L6 • SPAZI VETTORIALI II

SOTTO-SPAZI VETTORIALI > SPAZI NOTI

Sotto-spazi noti sono
- S. banale $W = \{0_V\}$
- S. completo $W = V$

MATRICI > TIPOLOGIE

- **QUADRATA** $m = n$ $A \in M(n, \mathbb{K})$

  Se il numero di righe è uguale al numero di colonne.

  ES $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

  ✓ ✓ ✗ $m \neq n$

- **DIAGONALE** 0 se $i \neq j$ $D(n)$

  Se solo gli elementi sulla diagonale principale sono valorizzati

  ES: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

  ✓ $12 \neq 0$ $21 \neq 0$ ✓

- **TRIANGOLARE**

  Se è una tra
  - **T. SUPERIORE** $r > c$? 0 $T^S(n)$

    Se ogni volta che la riga > colonna allora ci va lo 0.

    ES $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

    ✓ ✓ ✗ $a_{12} \neq 0 \wedge a_{13} \neq 0$ $a_{23} \neq 0$

  - **T. INFERIORE** $r < c$? 0 $T^I(n)$

    Se ogni volta che riga < colonna allora ci va lo 0.

    ES $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

    ✓ ✓ ✗

L6 • SPAZI VETTORIALI II

MATRICI > TIPOLOGIE

- **SIMMETRICA** $a_{ij} = a_{ji}$ $S(n)$

  Se invertendo gli indici c'è lo stesso valore

  ES $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ✗ $a_{12} \neq a_{21}$

  A^n è sempre simmetrica

- **ANTI-SIMMETRICA** $a_{ij} = -a_{ji}$ $A(n)$

  Se invertendo gli indici c'è il valore opposto e 0 sulla diag. principale

  ES $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ✗ $a_{12} \neq a_{21}$ △ elem. su diag $\neq 0$

COMBINAZIONI LINEARI >

È una somma di prodotti per scalari su dei vettori, che generano un nuovo vettore.

In alternativa si può dire che un dato vettore $v \in V$ è in combinazione lineare con altri vettori $v_1, v_2, \dots v_n \in V$ se esistono scalari per i quali:

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$ con $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$

detti anche "coefficienti"

ES: "che vettore generano $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (0,2)$ con coeff. 2 e 3?"

$v = 2 \cdot (1,1) + 3 \cdot (0,2) \rightarrow v = (2,2) + (0,6) \rightarrow (2,8)$

ES: "Trovare i coeff. per i quali $v = (2,3)$ è in comb. con $(1,0), (0,-1)$"

$\lambda_1 \cdot (1,0) + \lambda_2 (0,-1) = (2,3)$ (1) sistema $\begin{cases} \lambda_1 \cdot 1 + \cancel{\lambda_2 \cdot 0} = 2 \\ \cancel{\lambda_1 \cdot 0} + \lambda_2 \cdot (-1) = 3 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

ES: "Trovare i coeff. per i quali $v = (1,5,3)$ è in comb. con $(1,0,2), (-1,0,2)$"

$\lambda_1 (1,0,2) + \lambda_2 (-1,0,2) = (1,5,3)$ (2) sistema $\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 1 \\ 0 = 5 \end{cases}$ ← no soluzioni

GENERATORI > (DEF)

SEGNALETICA > Span $(v_1, v_2, \ldots v_n)$

I generatori o sotto-spazio generato è l'insieme contenente tutti i vettori v dello spazio vettoriale V generati tramite la combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2 \ldots v_n$.

GENERATORI > HOW TO: GENERA SPAZI GENERICI?

1. Definire la combinazione lineare col vettore generico
2. Montare il sistema.
   SE le soluzioni dipendono da più parametri scegliere una variabile come $t \in K$
3. Verificare.

ES: "Verificare che Span$(\underset{v_1}{(1,0)}, \underset{v_2}{(1,1)}, \underset{v_3}{(-1,1)})$ generi $\mathbb{R}^2$"

(1) Def. combinazione lineare: $\lambda_1 \cdot (1,0) + \lambda_2 (1,1) + \lambda_3 \cdot (-1,1) = (x,y)$

(2) sistema $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = x \\ 0 + \lambda_2 + \lambda_3 = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - y + 2t \\ \lambda_2 = y - t \\ \lambda_3 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$

dipende da 1 parametro
scelgo $\lambda_3 = t \in \mathbb{R}$

(3) Verifico $(1,4) = \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \rightarrow (-3,0) + (4,4) = (1,4)$ OK

ES: "Verificare che Span$((1,0,-1), (1,0,1))$ generi $\mathbb{R}^3$"

(1) Def. comb.: $\lambda_1 \cdot (1,0,-1) + \lambda_2 \cdot (1,0,1) = (x,y,z)$

(2) Sistema: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ 0 = y \leftarrow \text{NO SOLUZ!} \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = z \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = x - \lambda_2 \\ 0 = y \\ \lambda_2 = z + \lambda_1 \end{cases}$

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

Dato uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ ed una serie di vettori $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$.

I vettori sono linearmente indipendenti se quando messi in combinazione lineare con degli scalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ allora l'unico modo per generare il vettore nullo $(0,0,\ldots,0)$ è di avere gli scalari a 0.

DEF. FORMALE

V su $\mathbb{K}$ $\models \{v_1, v_2, \ldots v_n\} \in V$ solo l.i $\iff \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0_v$ solo quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

ES: "Determinare se in $\mathbb{R}^2$ $\{\underset{v_1}{(1,2)}, \underset{v_2}{(-1,1)}\}$ sono linearmente indipendenti"

(1) Definire la combinazione lineare:

$\lambda_1 \cdot (1,2) + \lambda_2 \cdot (-1,1) = (0,0)$

(2) Definire il sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda_1 - (-2\lambda_1) = 0 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

È un sistema con unica sol. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ per cui v_1 e v_2 sono l.i.

ES: "Determinare se in $\mathbb{R}^3$ $\{\overset{v_1}{(1,0,0)}, \overset{v_2}{(0,1,1)}, \overset{v_3}{(1,1,1)}\}$ è l.i"

(1) Def. combinazione lineare

$\lambda_1 \cdot (1,0,0) + \lambda_2 \cdot (0,1,1) + \lambda_3 \cdot (1,1,1) = (0,0,0)$

(2) Def. + risolvo sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda_1 = -t \\ \lambda_2 = -t \\ \lambda_3 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2 polinomi uguali si può togliere 1 dei due

Definisco $\lambda_3 = t \in \mathbb{R}$

es. con $\lambda_3 = 1$: $(-1,0,0) + (0,-1,-1) + (1,1,1) = (0,0,0)$

Il sistema ha ∞ soluzioni per 1 parametro quindi NON è l.i.

BASE >

Dato lo spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ e i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

Allora i vettori sono una base se:

- sono linearmente indipendenti [L7]
- sono generatori di V [L6]

ES: "In $\mathbb{R}^2$, determinare che $\{\overset{v_1}{(1,1)}, \overset{v_2}{(-1,1)}\}$ siano una base".

(1) Verifico che siano l.i.

(1.a) Definisco l.i

$$\lambda_1 \cdot (1,1) + \lambda_2 \cdot (-1,1) = (0,0)$$

(1.b) Def. + risolvo sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ -\lambda_2 + \lambda_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Sono lin indipendenti

(2) Verifico generatori

(2.a) Def. Span$(v_1 \dots)$

$$\lambda_1 (1,1) + \lambda_2 \cdot (-1,1) = (x,y)$$

(2.b) Def. + Risolvo sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 = x + \lambda_2 \\ x + \lambda_2 + \lambda_2 = y \end{cases} \to \begin{cases} \lambda_1 = x + \frac{-x+y}{2} \\ \frac{2\lambda_2}{2} = \frac{-x+y}{2} \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{x+y}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-x+y}{2} \end{cases}$$

∞ sol: OK

$$\frac{2x - x + y}{2} = \frac{x+y}{2}$$

i due punti sono verificati.

L'insieme è una base

ES: "In $\mathbb{R}^3$, determinare che $\{(1,0,0), (0,-1,0)\}$ è una base"

(1) Verifico che sia l.i.

(1.a) Definisco l.i.

$$\lambda_1 \cdot (1,0,0) + \lambda_2 \cdot (0,-1,0) = (0,0,0)$$

(1.b) Risolvo il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Di sicuro non genera

BASE > CANONICA

Dato un n-spazio vettoriale, la base canonica è un'insieme di base formato da vettori in cui sono valorizzati solo 0 tranne in 1 punto:

ES: "In $\mathbb{R}^3$"

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

"$R_2[x]$"

$$\begin{array}{c} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

BASE > DIMENSIONE

Se lo spazio vettoriale

- ha una base, allora sono il num. di vettori
- NON ha una base, è ∞

L8 • MATRICI I

TRASPOSTA >

SEGNALETICA > ${}^tA$ con $A \in M(n,m,K)$

Data una matrice $A \in M(m,n,K)$, la sua trasposta è la matrice ottenuta scambiando gli indici di riga e colonna.

ES: "Definire la matrice trasposta di $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$"

(1) Definisco la trasposta

Se $A \in M(2,3,\mathbb{R})$, ${}^tA \in M(3,2,\mathbb{R})$

$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 11=11 12=21 13=31

21=12 22=22 23=32

TRASPOSTA > PROPRIETÀ

- ${}^tA + {}^tB = {}^t(A+B)$ → La somma della trasposta equivale alla Trasposta della somma
- ${}^t({}^tA) = A$ → La trasposta della trasposta si annulla
- ${}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^t(A)$ → La Trasposta dello scalare è lo scalare della trasposta.
- ${}^tA = A \Leftrightarrow A$ è simmetrica → La matrice e la sua trasposta sono identiche sse la matrice è simmetrica
- ${}^tA = -A \Leftrightarrow A$ è anti-simmetrica → La matrice è equivalente alla sua opposta sse la matrice è anti-simmetrica.
- $\mathrm{rnk}({}^tA) = \mathrm{rnk}(A)$ → Il rango non cambia la trasposta [vedi pagina dopo]

L8 • MATRICI I

RANGO > (SOLO DEF)

Data una matrice $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, è possibile definire il rango come:

- $\dim(\text{Span}(A^1, A^2, \dots A^n))$ ovvero il numero massimo di vettori colonna che compongono la matrice che sono linearmente indipendenti.
- $\dim(\text{Span}(A_1, A_2, \dots, A_n))$ ovvero il numero massimo di vettori riga della matrice che sono linearmente indipendenti

I due ranghi hanno lo stesso valore.

PRODOTTO TRA MATRICI >

VALIDATORI > Date A, B $\quad A \cdot B$ si può fare solo se il num di colonne della prima è equivalente alla seconda:

$A_{r_1 \times c_1}$, $B_{r_2 \times c_2}$ $\quad A \cdot B \Leftrightarrow c_1 = r_2$

Genera una nuova matrice con num. righe della prima e num. colonne della seconda.

$$A \in M(r_a, p),\ B \in M(p, c_b) \models A \cdot B = C \in M(r_a, c_b)$$

Il calcolo si fa moltiplicando la riga per la colonna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{r_a1} & a_{r_a2} & \cdots & a_{r_ap} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1c_b} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pc_b} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1c_b} \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{r_a} & \cdots & & c_{r_ac_b} \end{pmatrix} \qquad c_{ij} = \underset{\text{riga}}{A_i} \cdot \underset{\text{colonna}}{B^j}$$

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

PRODOTTO TRA MATRICI >

ES: "Calcolare il prodotto tra $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

(0) Controllo validità operazione

A è una 2×3, B è una 3×3 $\quad \underset{\text{righe A}}{3} = \underset{\text{col B}}{3}$ quindi va bene

(1) Calcolo la matrice

$C \in M(2,3)$

$11 = A_1 \cdot B^1$

$= 2\cdot 1 + \cancel{1\cdot 0} + \cancel{0\cdot 3} = 2$

$12 = A_1 \cdot B^2 = 4-1 = 3$

$13 = A_1 \cdot B^3 = -2$

$21 = A_2 \cdot B^1 = -1+9 = 8$

$22 = A_2 \cdot B^2 = -2-1+3 = 0$

$23 = A_2 \cdot B^3 = 1-15 = -14$

$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & -14 \end{pmatrix}$

ES: "Calcolare il prodotto tra $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

(0) Controllo validità

$A \in M(2,\underline{2})$ $\quad B \in M(\underline{3},3)$ $\quad 3 \neq 2$ non si può fare

---

PRODOTTO TRA MATRICI > PROPRIETÀ

- Distributiva dal prodotto alla somma

  $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

- Associativa

  $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

- Commutatività (solo con I_n)

  $I_n \cdot A = A \cdot I_n$ $\quad I_n$ = matrice identità $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$

NB: NON è commutativa

TRACCIA >

SEGNALETICA > $tr(A)$

Sommatoria degli elementi sulla diagonale principale.

ES: " $A=\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{7} & \pi \\ 0 & 9 & -112 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ "

$tr(A) = 1+9+3 = 13$

DETERMINANTE > (DEF - STANDARD)

VALIDATORI => A DEVE essere quadrata

SEGNALETICA => A , det(A)

Data una matrice quadrata $A \in M(n)$, è il numero $\in \mathbb{R}$ ottenibile come sommatoria dei segni delle permutazioni:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{1\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

In cui
- $\operatorname{sgn}(\sigma)$ è la Funzione ottenibile da $(-1)^k$ con k il numero di trasposizioni.

ES: "Calcolare il determinante di $A = (15)$"

(0) Determino se la mat. è quadrata: $A \in M(1)$ ✓

(1) Determino le permutazioni: $S_1 = \binom{1}{1}$ solo perm id con 0 Trasposizioni

(2) Applico formula

$\det(A) = (-1)^0 \cdot 15 = 15$

ES: "Calcolare determinante di $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$"

(0) Valido: $A \in M(2)$ ✓

(1) Definisco le permutazioni: $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ o $\left\{ \overset{1\ 2}{[1,2]}, \overset{1\ 2}{[2,1]} \right\}$

(2) Applico la formula: Trasposiz: 0 , 1

$\det(A) = (-1)^0 \cdot 3 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 1 \cdot (-2) = 3 + 2 = 5$

ES: "Calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$"

(0) Valido: $A \in M(3)$ ✓

(1) Definisco le perm: $S_3 = \overset{0}{[1,2,3]}\ \overset{1}{[1,3,2]}$ sono $3! = 6$

$\overset{1}{[2,1,3]}\ \overset{2}{[3,1,2]}$

$\overset{2}{[2,3,1]}\ \overset{3}{[3,2,1]}$

(2) Applico formula:

$\det(A) = (-1)^0 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 + (-1)^1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 8 + (-1)^1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 + (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8$

$+ (-1)^2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7 + (-1)^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$= 45 - 48 - 72 + 96 + 84 - 105 = 0$

$35 \cdot 3 = 105$

DETERMINANTE > 2×2

VALIDATORI => A DEVE essere 2×2

È la sottrazione tra le produttorie delle 2 diagonali:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ det(A) = $a \cdot d - c \cdot b$

ES: "Calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$"

(0) Controllo: $A \in M(2)$ ✓

(1) Applico formula det(A) = $3 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 3 + 2 = 5$

DETERMINANTE > LAPLACE

VALIDATORI >

Data la matrice A

- A DEVE essere quadrata
- A DEVE avere grado ≥ 2

L'algoritmo di Laplace consente di semplificare il calcolo del determinante scomponendo il calcolo in determinanti più piccoli.

FORMULA >

Scelta la riga i

$\det(A) = a_{i1} \cdot \det(A - A_i - A^1) + a_{i2} \cdot \det(A - A_i - A^2) + \ldots + a_{in} \cdot \det(A - A_i - A^n)$

HOW TO >

1. Scegliere la riga o colonna con più 0
2. Scelta, sarà la somma degli elementi della riga / colonna in cui per ogni elemento a_{rc}
   - l'elemento sarà moltiplicato per il determinante a cui viene tolta l'r-esima riga e la c-esima colonna.

DETERMINANTE > LAPLACE

ES: "Calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$"

(0) Verifico requisiti: $A \in M(3)$ ✓

(1) Applico algoritmo:

(1.a) Scelgo riga/colonna con più 0 $A^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 12 \\ 22 \\ 23 \end{matrix}$

(1.b) Applico la formula:

$$\det(A) = (-1)\cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \cancel{(1)}\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \cancel{0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= (-1)\cdot(\cancel{3-2}) + 5$$

$$= 1 + 5 = 6$$

ES: "Calcolare determinante di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$"

(0) Verifico requisiti: $A \in M(3)$ ✓

(1) Applico algoritmo:

(1.a) Scelgo riga/colonna con più 0 $A_2 = \overset{21}{(0}, \overset{22}{3}, \overset{23}{0)}$

(1.b) Applico la formula:

$$\det(A) = \cancel{0 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \cancel{0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$= 3 \cdot (1-1) = 0$$

DETERMINANTE > PROPRIETÀ

- Se è TRIANGOLARE, Ha $\det(A) \searrow$
- 〃 〃 DIAGONALE, 〃 $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ ovvero il prodotto su diagonale principale
- $\det({}^tA) = \det(A)$, la trasposta non influisce
- Se ha 1 riga/1 colonna nulli, allora $\det(A) = 0$
- Se si ha una matrice B ottenuta applicando un prodotto su riga/colonna per uno scalare λ, allora: $\det(B) = \lambda \cdot \det(A)$
- Se la matrice B si ottiene scambiando 2 righe/colonne rispetto alla matrice A, allora $\det(B) = -\det(A)$
- Il determinante della trasposta è equivalente a quello normale $\det(A) = \det({}^tA)$

DETERMINANTE > PROPRIETÀ

- Se è TRIANGOLARE o DIAGONALE è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale

ES: $\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 20 \\ 0 & -1 & 14 & 36 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(1) Determino che è Triangolare
(2) Applico il calcolo
$\det(A) = 5 \cdot (-1) \cdot 7 \cdot 2 = -70$

- $\det({}^tA) = \det(A)$, Ovvero, la trasposta non influisce sul calcolo.

ES: $\det\left({}^t\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right)$ (1) per la prop. è eq. a $\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
$= 10 - 3 = 7$

- Se ha 1 riga / 1 colonna nulli, allora $\det(A) = 0$

ES: $\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$ $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 100 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 0$

- Se la matrice B si ottiene scambiando 2 righe/colonne rispetto alla matrice A, allora $\det(B) = -\det(A)$

ES: $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 5 & 14 \end{pmatrix}$

(1) In questo caso riconosco che forse spostando le righe posso semplificare il calcolo

$A_3 \leftrightarrows A_1$

$\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 14 \end{pmatrix}$

$A_2 \leftrightarrows A_4$

$\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot -1 = -18$

- Se 1 riga/colonna è combinazione lineare delle altre $\det(A) = 0$

ES: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $1 \cdot (1,2,3) + 1 \cdot (1,1,1) = (2,3,4)$
$\det(A) = 0$

DETERMINANTE > PROPRIETÀ

- "RACCOGLIMENTO DI SCALARE"

Data A matrice di m righe, n colonne:
- Se moltiplico 1 riga per λ => Il det sarà $\lambda \cdot \det(A)$
- " moltiplico 2 righe per λ => " " $\lambda^2 \cdot \det(A)$
- " " m righe " => " " $\lambda^n \cdot \det(A)$

E questo vale anche "al contrario"

ES: $\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (0) Posso 'astrarlo' con 2 · riga

$A_1 = 2 \cdot (1,2,2)$ $\quad A_3 = 2 \cdot (2,0,1)$

(1) Riscrivo det $\quad A_2 = 2 \cdot (1,1,1)$

$\det(A) \Rightarrow 2^3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 8$

NB: vale anche per le colonne

- SOMME DI RIGHE PER SCALARI

Data A matrice, se ad una riga/colonna sommo un'altra riga/colonna (stesso tipo) moltiplicata per uno scalare, il determinante è uguale.

$\det(A) = \det(B)$ con $B = A_i + A_j \cdot \lambda \ \vee \ B = A^i + A^j \cdot \lambda$

ES: $\det\begin{vmatrix} 20 & 10 & 10 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 21 & 1 & 8 & 30 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 10 & 10 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10 \cdot \det\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(0) Applico $A_3 = A_3 + (-1) \cdot A_1$ $\quad = 120$

- TEOREMA DI BINET

Se si hanno 2 matrici quadrate della stessa dimensione vale $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ ovvero si può "saltare il prodotto"

ES: $\det\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{B}\right)$

(1) Applico binet

$\det(A) = \overset{2}{\cancel{1 \cdot 2}} - \overset{15}{\cancel{3 \cdot 5}} = -13$

$\det(B) = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1$

$\Big] = \det(A \cdot B) = (-13) \cdot 1 = -13$

MATRICE INVERTIBILE > (INTRO)

Lo è se esiste un'altra matrice di stesse dimensioni per cui il prodotto da la matrice identità.

TEOREMA 'FORMALE' >

$A \in M(n, \mathbb{K}) \vDash A$ è invertibile $\iff \exists A^{-1}$ t.c. $A \cdot A^{-1} = I_n$

Si può controllare che sia invertibile col determinante.

$\det(A) \neq 0 \iff A$ è invertibile

COFATTORE >

Il co-fattore di una matrice in posizione ij è equivalente a:

$(-1)^{i+j} \cdot \det(A - A_i - A^j)$ con

- $(-1)^{i+j}$
- $\det(A-A_i-A^j)$: Il determinante della matrice tolta la i-esima riga e j-esima colonna

ES: Calcolare il cofattore $i=1, j=2$ di

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) applico la formula per $i=1, j=2$

$(-1)^{1+2} \cdot \det(5) = (-1) \cdot 5 = -5$

MATRICE INVERSA >

VALIDATORI > Data A matrice

- A Deve essere quadrata
- $\det(A) \neq 0$

Si calcola con la formula:

$A^{-1} = \det(A^{-1}) \cdot {}^t(\operatorname{cof}(A))$ con

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- ${}^t(\operatorname{cof}(A))$ è la matrice dei cofattori per ogni cella. Alla quale va fatta la trasposta.

MATRICE INVERSA >

ES: "Calcolare l'inversa di $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(0) Determino se è invertibile

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con $i=2$ riga $= (-1)^{2+3} \cdot -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot 1 = 1$ $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ è invertibile!

(1) Determino la matrice di cofattori $\mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathrm{cof}(A) =$

$11 = \cancel{(-1)^{1+1}} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \boxed{-1}$ $12 = (-1)^{1+2} \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (-1)\cdot 3 - 1 = \boxed{-2}$

$13 = \cancel{(-1)^{1+3}} \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{-1}$ $21 = (-1)^{2+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (-1)\cdot 2 = \boxed{-2}$

$22 = \cancel{(-1)^{2+2}} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \boxed{-1}$ $23 = (-1)^{2+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{-1}$

$31 = (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{0}$ $32 = (-1)^{3+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(\overset{-1}{\cancel{1-2}}) = \boxed{1}$

$33 = (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0}$

(3) Applico il resto della formula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^{t}(\mathrm{cof}(A))$$

$${}^{t}(\mathrm{cof}) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{1} = 1 \qquad A^{-1} = {}^{t}\mathrm{cof}(A)$$

SISTEMI LINEARI > (DEF)

Sono insiemi di K equazioni con n variabili nella forma

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_{11} + a_{12} \cdot x_{12} + \dots + a_{1n} \cdot x_{1n} = b_1 \\ a_{21} \cdot x_{21} + a_{22} \cdot x_{22} + \dots + a_{2n} \cdot x_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1} \cdot x_{k1} + a_{k2} \cdot x_{k2} + \dots + a_{kn} \cdot x_{kn} = b_k \end{cases}$$

Il sistema di equazioni si può raggruppare in maniera matriciale con

- Una matrice dei coefficienti A
- Il vettore dei termini noti b
- La matrice completa C

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{vmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \quad C = A|b$$

ES: Per $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + z = 0 \\ x - y = -2 \end{cases}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x & \quad y & \quad z \end{matrix} \end{array} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

SISTEMI LINEARI > SOLUZIONI

L'insieme S delle soluzioni è l'insieme di n-uple $(x_1, x_2, \dots x_n)$ per i quali valgono tutte le equazioni

$A \cdot x = b$

$\hookrightarrow (x_1, \dots, x_n)$ con $x_1, x_2, \dots x_n$ elementi del campo non incogniti

MOSSE DI GAUSS >

Sono una serie di operazioni che lasciano inalterate le soluzioni della matrice completa:

- **SCAMBIO RIGHE**
  Lo scambio di una riga per un'altra $A_i \leftrightarrow A_j$

- **PRODOTTO PER SCALARE RIGA** $A_i \to \lambda A_i$
  Moltiplicare per un $\lambda \in \mathbb{K}$

- **SOMMA RIGA • SCALARE DI UN'ALTRA** $A_i \to A_i + \lambda \cdot A_j$
  Ad una riga sommi un'altra per $\lambda \in \mathbb{K}$

ES: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ Scambio $A_1 \to A_3$ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ scalare $A_2 \to 3A_2$ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Somma • scalare $A_3 \to A_3 + 2A_1$ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$

ALGORITMO DI GAUSS >

L'algoritmo ha lo scopo di trasformare qualsiasi matrice in una matrice a scalini.
Ovvero matrici con pivot (1° colonna $\neq 0$) sempre più a destra

1. (se non c'è già) scambiare le righe per fare in modo che avere la riga con pivot più a sx possibile per 1°
2. Sostituire tutte le righe col pivot allo stesso livello con la formula
   $$A_i = A_i - \frac{A_{i1}}{A_{11}} \cdot A_1$$
   Ovvero la riga meno il $\frac{\text{primo el.}}{\text{primo el pivot}}$ per la riga pivot.
3. Ripetere tenendo conto di 1 colonna più a dx

ALGORITMO DI GAUSS

ES : Applicare gauss su $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ "

(1) Procedo per la colonna 1

(1.a) Scambio $A_1 \leftrightarrow A_2$ $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1.b) 'Tolgo' il pivot su A_3

$A_3 \to A_3 + 1 \cdot A_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ \hline 0 & 3 & 3 & -2 \end{array} +$$

(2) Metto a posto colonna 2

(1.a) è già ok

(1.b) Tolgo i pivot su $A_3 \to A_3 - 3 \cdot A_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

OK

$$\begin{array}{rrr} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} -$$

ALGORITMO DI GAUSS-JORDAN

Versione estesa dell'algoritmo di gauss con cui si chiede (usando le mosse di Gauss):

- Che ci sia sempre 0 sopra i pivot
- Che i pivot siano valorizzati a 1

Così facendo si possono sostituire i valori alle incognite dal basso verso l'alto e trovare eventualmente la soluzione

ES : Applicare Gauss-Jordan a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ "

(1) Metto a posto gli 0 sopra

$A_1 \to A_1 - 1 \cdot A_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -3 \end{array} -$$

(2) Valorizzo pivot a 1

$A_3 = A_3 \cdot \frac{1}{2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\checkmark$

SISTEMI LINEARI I

ALGORITMO DI GAUSS-JORDAN

ES: Risolvere con Gauss
$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$$

(0) Rappresento come matrice

$$C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \Big| \underbrace{\begin{matrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}}_{b}$$

(1) Applico Gauss-Jordan

(1.1) Metto a posto la colonna 1

(1.1.a) Pivot più a sx: c'è già ✓

(1.1.b) Tolgo i pivot sotto

$$A_2 \to A_2 - \frac{2}{1}\cdot A_1 \qquad A_3 \to A_3 - \frac{3}{1}\cdot A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right)$$

A_2:
$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 18 \\ \hline 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}$$

A_3:
$$\begin{array}{cccc} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 27 \\ \hline 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}$$

(1.2) Metto a posto colonna 2

(1.2.a) Pivot più a sx: c'è già ✓

(1.2.b) Tolgo i pivot sotto

$$A_3 \to A_3 - \frac{3}{2}\cdot A_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$-11-\left(-\frac{21}{2}\right) = \frac{-22+21}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$-27-\left(-\frac{51}{2}\right) = \frac{-54+51}{2} = -\frac{3}{2}$$
$$-27\cdot 2 = -54$$

$$2\cdot\frac{3}{2}=3 \qquad -7\cdot\frac{3}{2} = -\frac{21}{2} \qquad -17\cdot\frac{3}{2} = -\frac{51}{2}$$
$$17\cdot 3 = 51$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 3 & -\frac{21}{2} & -\frac{51}{2} \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 12 \end{array}$$

(1.3) Metto a posto i pivot

$$A_3 \to -2\cdot A_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$A_2 \to A_2 + 7\cdot A_3 \qquad A_2 \to \frac{1}{2}\cdot A_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$A_1 \to A_1 - 2\cdot A_3 \qquad A_1 \to A_1 - 1\cdot A_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 1+2+6=9 \ ✓ \\ 2+8-9=1 \ ✓ \\ 3+12-15=0 \ ✓ \end{cases}$$

$x=1$
$y=2$
$z=3$

$$\begin{array}{ccc} 2 & -7 & -17 \\ 0 & 7 & 21 \\ \hline 2 & 0 & 4 \end{array} \cdot \frac{1}{2}$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right\} A_3$$
$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} A_2$$