Settimana 8

Appunti di Alessandro Salerno
Lezioni 17-18 Prof. J. Seiler

Teorema 24 (esistenza degli zeri)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora esiste $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

> **Note**
>
> Se f è strettamente monotona, c è unico.

> **Important**
>
> Data la continuità di f, $f(a) \cdot f(b) < 0$ è una condizione sufficiente ma non necessaria. Per esempio, $f(x) = x^2$ ha zero in $x = 0$ anche se presi qualsiasi a, b sia ha $f(a) \geq 0$ e $f(b) \geq 0$, quindi $f(a) \cdot f(b) \geq 0$.

Dimostrazione

Supponiamo che $f(a) < 0 < f(b)$, sia $c_1 = \frac{a+b}{2}$, allora:

1. Se $f(c_1) = 0$ il teorema è dimostrato
2. Se $f(c_1) > 0$ si pone $a_1 = a, b_1 = c_1$
3. Se $f(c_1) < 0$ si pone $a_1 = c_1, b_1 = b$

Nei casi 2, 3 si ha quindi costruito un intervallo $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$ tale che $f(a-1) < 0 < f(b_1)$ e $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Ripetiamo fino a c_n tale per cui vale il punto 1. Può dunque succedere che:

1. In un numero FINITO di passi si giunge ad uno zero di f, oppure
2. Si ottiene una successione di intervalli su $[a_n, b_n]$ tali che:
   1. $[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots$
   2. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
   3. $f(a_n) < 0 < f(b_n)$

Dalla costruzione si vede che:

- $\{a_n\}$ è monotona crescente e limitata ($a \leq a_n \leq b$)
- $\{b_n\}$ è monotona decrescente e limitata ($a \leq b_n \leq b$)

Dunque:

$$\exists l_1, l_2 \in [a,b] \ : \ \lim_{n\to+\infty} a_n = l_1, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = l_2$$

E, per proprietà dei liimti,

$$\begin{aligned} l_2 - l_1 &= \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0 \end{aligned}$$

Quindi:

$$l_2 - l_1 = 0$$
$$l = l_1 = l_2$$

E dato che f continua in $[a,b]$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(l) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$$
$$f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$$

Per il teorema di permanenza del segno:

$$f(l) \leq 0 \text{ perché } f(a_n) < 0 \ \forall n$$
$$f(l) \geq 0 \text{ perché } f(b_n) > 0 \ \forall n$$

Quindi:

$$f(l) = 0$$
$$c = l$$

Algoritmo di bisezione

Utilizzando il Teorema degli zeri, è possibile determinare un algoritmo per il calcolo approssimativo degli zeri di una funzione $f \ : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ creando un intervallo $[a_n, b_n] \subseteq [a,b]$ con errore $E \leq \frac{b-a}{2^n}$.
`z

Criterio di arresto

Sia:

$$\frac{b-a}{2^n} < \epsilon$$

Chiamiamo ϵ la *tolleranza*.
Il numero n di passi necessari si trova risolvendo la disequazione per n, ovvero:

$$n > \log_2 \frac{b-a}{\epsilon}$$

Applicazione pratica

1. Determinare un intervallo $[a, b]$. Per farlo si può ricorrere al metodo grafico
2. Verificare che $f(a) \cdot f(b) < 0$
3. Fissare una tolleranza ϵ
4. Calcolare n approssimativamente (arrotondando)
5. Applicare l'algoritmo di bisezione

Metodo di Newton

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile, se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora preso $x_0 \in [a, b]$, per proprietà già viste, la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ è data da:

$$y = h_0(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Determinare il suo zero x_1 equivale a dire:

$$0 = h_0(x_1) = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$$

Ossia:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Si può poi ripetere lo stesso procedimento per x_1 trovando x_2 più accurato. Dunque si crea la successione definita pe ricorrenza:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$f'(x) \neq 0 \; \forall x \in [a, b]$$

> **Important**
>
> Anche supponendo che $f'(x) \neq 0$, la successione $\{x_n\}$ potrebe non convergere.

Teorema 25

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe $C^2([a, b])$, inoltre supponiamo:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. f', f'' hanno segno costante su $[a, b]$
3. $f(a) \cdot f''(a) > 0$ oppure $f(b) \cdot f''(b) > 0$

Allora esiste un unico zero $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$ e la successione $\{x_n\}$ definita da:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Oppure, a seconda dalla validità del punto 3:

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Converge a c.

Note

Il punto 2 implica $f' > 0$ oppure $f' < 0$ su $[a, b]$ e $f'' > 0$ oppure $f'' < 0$ su $[a, b]$.

Quindi:

- Se $f' > 0$, f è strettamente crescente
- Se $f' < 0$, f è strettamente decrescente
- Se $f'' > 0$, f è convessa
- Se $f'' < 0$, f è concava

Dimostrazione

Poiché $f(a) \cdot f(b) < 0$, il Teorema di esistenza delgi zeri assicura che:

$$\exists c \in (a, b) \;:\; f(c) = 0$$

Poiché f' ha segno costante, f è strettamente monotona, quindi c è unico. Si intende dimostrare:

1. La serie $\{x_n\}$ è convergente
2. $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$

Dimostrazione punto 1

Supponiamo $f(a) > 0$ e $f''(a) > 0$, allora f decrescente è convessa. Si noti che $f(x) > 0 \; \forall x \in [a, c)$. Definiamo:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \; x \in [a, b]$$

Notiamo:

$$g(c) = c$$

Inoltre, g è derivabile in $[a, b]$ e:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$= 1 - 1 + \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x^2)} > 0 \text{ su } [a, c)$$

Allora g è strettamente crescente in $[a, c]$. Verifichiamo che**

$$x_n < x_{n+1} < c \,\forall n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Abbiamo:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a = x_0$$

$$\to x_0 < x_1$$

g strettamente crescente su $[a, c]$ implica:

$$x_1 = g(x_0) = g(a) < g(c) = c$$

$$\to x_0 < x_1 < c$$

Quindi vale** per $n = 0$.