Nome & Cognome: ______________________________

Algebra Lineare, Esame Finale
Dicembre 4, 2023

- Tutto il lavoro deve essere unicamente vostro.
- L'utilizzo di calcolatrici è vietato.
- L'esame dura 2 ore.
- Scrivete il vostro nome su tutte le pagine, nel caso qualche foglio si staccasse.
- Controllate di avere tutte le 8 pagine dell'esame.
- Ogni domanda a risposta multipla vale 1 punto.
- Le risposte alle domande aperte valgono 11 punti l'una.
- Le domande aperte verranno corrette solo a chi totalizzi almeno 6 punti su 10 nella parte a crocette.

Buon Lavoro!

PER FAVORE MARCATE LE RISPOSTE CON UNA X, non un cerchio!

1.	(a)	(b)	(c)	(d)	~~(e)~~	NO → Resolvibile
2.	(a)	(b)	~~(c)~~	(d)	(e)	NO =
3.	(a)	~~(b)~~	(c)	(d)	(e)	NO =
4.	(a)	~~(b)~~	(c)	(d)	(e)	SI
5.	(a)	(b)	(c)	~~(d)~~	(e)	SI
6.	(a)	(b)	(c)	(d)	~~(e)~~	SI
7.	(a)	(b)	(c)	~~(d)~~	(e)	SI
8.	~~(a)~~	(b)	(c)	(d)	(e)	SI
9.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	NO → Resolvibile
10.	(a)	(b)	(c)	(d)	~~(e)~~	SI

Non scrivere qua sotto!

Risp. Multiple ______________________

Risp. Aperte ______________________

Totale ______________________

Nome & Cognome: ______________________________

Risposta multipla

1.(1 pt.) Il sistema lineare con matrice completa

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

ha un numero di soluzioni pari a:

(a) Un numero finito, maggiore di 1.

(b) Zero.

(c) Infinite, che dipendono da 1 parametro.

(d) Una.

(e) Infinite, che dipendono da 2 parametri. Distrazione

2.(1 pt.) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$ dato da:

$$V = \{p(x) = a(x^3 - 1) + b(x - 1) + c(x - 1) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

ha dimensione Corretto male all'ultimo

(a) Uno. (b) Due. ? (c) Tre. (d) Zero. (e) Quattro.

3.(1 pt.) L'insieme $\{p_1(x) = x^2 - 1, p_2(x) = -x + 1, p_3(x) = x^2 - x\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$, è:

(a) Una base di $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Un insieme di generatori di $\mathbb{R}_2[x]$, ma non linearmente indipendente. errore di calcolo

(c) Una base di $\mathbb{R}_2[x]$, ma non linearmente indipendente.

(d) Né un insieme di generatori di $\mathbb{R}_2[x]$, né un insieme linearmente indipendente.

(e) Un insieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}_2[x]$, ma non un insieme di generatori.

4.(1 pt.) Il numero complesso $z = -5 + 5i$, in coordinate polari, è:

(a) $z = 10e^{i\pi/2}$. (b) $z = 5\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$. (c) $z = 5\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

(d) $z = -5 + 5i$. (e) $z = 10e^{i3\pi/4}$.

1) $A_3 = A_3 - A_1 =$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \qquad - \qquad A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$\cancel{5} - 3 = 2$ param

$4 = 1$

$\mathrm{rnk}(A) = 3$

$\mathrm{rnk}(A|b) = 3$

2)

$$\begin{array}{cccc} x^3 & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} = \cancel{3} = 2$$

3)

$$\begin{array}{c} x^2 \\ x \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & y \\ 0 & 1 & 1 & x+z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & x+z \\ 0 & 0 & 0 & x+z+y \end{array}\right]$$

$0 = x$

$\nexists w!$

$\nexists$ sol.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = \lambda_2 \end{cases} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} = \dfrac{-\cancel{5}}{\cancel{5}\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ = \dfrac{\cancel{5}}{\cancel{5}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array} = \frac{3}{4}\pi = 5\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} = \sqrt{50} \Rightarrow \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

Nome & Cognome: ______________________________

5.(1 pt.) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare $\mathrm{tr}(AB)$:

(a) 3. (b) Non è ben definito. (c) 12.

(d) 6. (e) -4.

6.(1 pt.) Data la matrice $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, la forma quadratica $q_S(x)$ è:

(a) $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_3^2$. (b) $q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_3^2$.

(c) $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2$. (d) $q(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_3^2$.

(e) $q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_3^2$.

7.(1 pt.) Le matrici seguenti

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

formano una base di $M(2, \mathbb{R})$. Il vettore delle coordinate di $2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ in questa base è:

(a) $(2A_1, 0, 0, 2A_4)$. (b) $(1, 0, -1, 1)$. (c) $(2, -1, 3, 0)$.

(d) $(0, 1, 3, -1)$. (e) (A_1, A_2, A_3, A_4).

5) $\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$

$11 = A_1 \cdot B^1 = (0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$22 = A_2 \cdot A^2 = (1,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$33 = A_3 \cdot B^3 = (0,1,3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$

6)

$q(x) = 2x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 +$ (e)

7) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +3 \\ +3 \\ 0 \\ +3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A_4 \to A_4 - 2A_1$

2 0 1 1 2 −

2 0 2 2 4 =

0 0 −1 −1 −2

$\cdot -1$ 0 0 1 1 2

$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$

$A_3 \leftrightarrow A_2$

$A_3 \to A_3 + A_2$

0 −1 1 2 0 +

0 1 0 1 0 =

0 0 1 3 0

$A_4 = A_4 - A_3$

0 0 1 1 2 −

0 0 1 3 0

0 0 0 −2 2

$\cdot -\frac{1}{2} \to$ 0 0 0 1 −1

$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] = \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2 \\ \lambda_2 = +1 \\ \lambda_3 = +3 \\ \lambda_4 = -1 \end{cases}$

$\lambda_1 \overset{+2}{+3} - 1 = 2 = \lambda_1 = 0$

D

$A_3 \to A_3 - 3A_4$

0 0 1 3 0 −

0 0 0 3 −3

0 0 1 0 3

$A_2 \to A_2 - A_4$

0 1 0 1 0 −

0 0 0 1 −1

0 1 0 0 +1

$\lambda_1 - 3 + 1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -3 \\ \lambda_4 = 1 \end{cases}$

8.(1 pt.) Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare $g_S(x, y) = {}^t x S y$, con

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quale dei seguenti è il radicale di g_S?

(a) $\text{span}({}^t(1, 1, 0))$.

(b) $\text{span}({}^t(1, 1, 0), {}^t(0, 0, 2))$.

(c) $\{0\}$.

(d) $\text{span}({}^t(1, 0, 0), {}^t(0, 1, 0), {}^t(0, 0, 1))$.

(e) $\text{span}({}^t(1, -1, 0), {}^t(-1, 1, 0), {}^t(0, 0, 2))$.

9.(1 pt.) Per quali valori del parametro k, la matrice seguente non è invertibile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) $k = 3$. (b) $k = 6$. (c) $k = 0$. (d) $k = 21$. (e) $k = 1$.

Non data

10.(1 pt.) La distanza tra $P = (3, 4, 5)$ e il piano di coordinate cartesiane $2x - 2y + z = 9$ è:

(a) 0. (b) 9. (c) 1/3. (d) 1. (e) 2.

8)
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \in \mathbb{R} \\ y = x = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(1,1,0)\ S \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = (0,0,0) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0_V \qquad (a)$$

$$(0,0,2) \cdot S \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = (0,0,4)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0_V$$

9) cqu • $k=0$ $\det(A) = 6!$
• $k=1$

$$\cancel{(-1)}^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{bmatrix} 2&2&0&0&0\\ 0&3&3&0&0\\ 0&0&4&4&0\\ 0&0&0&5&5\\ 0&0&0&0&6 \end{bmatrix}$$

$$= 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 \quad +$$

$$(-1)^{\cancel{1+2}} \cdot 1 \cdot \det\begin{bmatrix} 0&2&0&0&0\\ 0&3&3&0&0\\ 0&0&4&4&0\\ 0&0&0&5&5\\ k&0&0&0&6 \end{bmatrix} = -1 \cdot_2 \det\begin{bmatrix} 0&3&0&0\\ 0&4&4&0\\ 0&0&5&5\\ k&0&0&6 \end{bmatrix} = -1 \cdot_3 \det\begin{bmatrix} 0&4&0\\ 0&0&5\\ k&0&6 \end{bmatrix}$$

$$(\cdot\cdot) = (-1)\cdot 2 \cdot (-1)\cdot 3 \cdot (-1)\cdot 4 \cdot \det\begin{bmatrix} 0&5\\ k&6 \end{bmatrix} = -5k$$

$$= \cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 - (2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot k) = 0$$

$$k = 6$$

10)
$$P_0 = (3,4,5) \qquad \pi = \{2x - 2y + z = 9\}$$

$$\begin{array}{r} 17- \\ 11 \\ \hline -06 \end{array}$$

$$d(P_0, \pi) = \frac{|6 - 8 + 5 - 9|}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = \frac{|11-17|}{\sqrt{9}} = \frac{-6}{\sqrt{9}} = \frac{2+\cancel{6}}{1\cancel{3}} = 2 \qquad (e)$$

Nome & Cognome: ______________________________

Risposta aperta
Per ricevere punteggio parziale, dovete mostrare il vostro lavoro!

11.(11 pts.) Diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolando anche la base di autovettori corrispondente. Potrebbe essere utile sapere che $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ sono tra gli autovalori di A.

$$P_\lambda(A) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\cancel{(-1)}^{2+2} \cdot (1-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$
$$= (2-\lambda+1)(2-\lambda-1)$$
$$= (3-\lambda)(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot [(2-\lambda)^2 - 1]$$
$$= (1-\lambda) \cdot (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2 (2-\lambda)(3-\lambda)$$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (2-\lambda) \cdot [(2-\lambda) - 1]$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

In teoria

Per λ_1

sono uguali

$$\begin{cases} Ma(\lambda_1) = 2 \\ Mg(\lambda_1) = \mathrm{rnk} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$A_4 \to A_4 - A_1$

1 0 0 1 −
1 0 1 1

0 0 −1 0 · −1
0 0 1 0

$$= \mathrm{rnk} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rnk} = {}^{5}\underline{2}$

Nome & Cognome: ______________________

Per $\lambda_2 = 2$ $\quad ma(\lambda_2) = 1 \Rightarrow mg(\lambda_2) = 1$ per teorema

Per $\lambda_3 = 3$ $\quad ma(\lambda_3) = 1 \Rightarrow mg(\lambda_3) = 1$

Calcolo auto-vettori

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$w \quad x \quad y \quad z$

$$\begin{cases} (2-\lambda)\cdot w + y + z = 0 \\ (1-\lambda)\cdot x = 0 \\ (2-\lambda)\cdot y = 0 \\ x + (2-\lambda)\cdot z = 0 \end{cases}$$

λ_1

$$\begin{cases} w + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w + z = 0 \\ \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = -t \\ x = -t \\ y = 0 \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ_2

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ -x = 0 \\ 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases} = \begin{cases} w = t \in \mathbb{R} \\ x = 0 \\ y = -m \\ z = m \in \mathbb{R} \end{cases} \quad t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad m\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ_3

$$\begin{cases} -w + y + z = 0 \\ -2x = 0 \\ -y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nome & Cognome: ______________________________

12.(11 pts.) Siano dati i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) Verificare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

(2) Calcolare la matrice del cambio di base dalla base canonica a $\mathcal{B}$.

(1) LIN IND?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 5 & 4 & w \\ 2 & 1 & 1 & 2 & x \\ 3 & 6 & 5 & 3 & y \\ 2 & 0 & -1 & 3 & z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 3 & z \\ 0 & 1 & 2 & -1 & x-z \\ 0 & 6 & \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} & y-\frac{3}{2}z \\ 4 & 6 & 5 & 4 & w \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 3 & z \\ 0 & 1 & 2 & -1 & x-z \\ 0 & 6 & \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} & y-\frac{3}{2}z \\ 0 & 6 & 7 & -2 & w-2z \end{array}\right]$$

$A_4 \leftrightarrow A_1$

$A_2 \to A_2 - A_1$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & 2 & x \; - \\ 2 & 0 & -1 & 3 & z \\ \hline 0 & 1 & 2 & -1 & x-z \end{array}$$

$A_3 \to A_3 - \frac{3}{2} A_1$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 6 & 5 & 3 & y \; - \\ 3 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2}z \\ \hline 0 & 6 & \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} & y-\frac{3}{2}z \end{array}$$

$5 + \frac{3}{2} = \frac{10+3}{2} = \frac{13}{2}$

$3 - \frac{9}{2} = \frac{6-9}{2} = -\frac{3}{2}$

$A_4 \to A_4 - 2A_1$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 6 & 5 & 4 & w \; - \\ 4 & 0 & -2 & 6 & 2z \\ \hline 0 & 6 & 7 & -2 & w-2z \end{array}$$

$A_3 \to A_3 - \cancel{3}6 A_2$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 6 & \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} & y-\frac{3}{2}z \; - \\ 0 & 6 & 12 & -6 & 6x-6z = \\ \hline 0 & 0 & -\frac{11}{2} & \frac{9}{2} & y-6x+\frac{9}{2}z \end{array}$$

$A_4 = A_4 - 6A_2$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 6 & 7 & -2 & w-2z \; - \\ 0 & 6 & 12 & -6 & 6x-6z = \\ \hline 0 & 0 & -5 & 4 & w-6x+4z \end{array}$$

$\frac{13}{2} - 12 = \frac{13-24}{2} = -\frac{11}{2}$

$$\begin{array}{r} 24 \; - \\ 13 \\ \hline -11 \end{array}$$

$= \frac{3}{2} + 6 = \frac{-3+12}{2} = \frac{9}{2}$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 3 & z \\ 0 & 1 & 2 & -1 & x-z \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & \frac{9}{2} & y-6x+\frac{9}{2}z \\ 0 & 0 & -5 & 4 & w-6x+4z \end{array}\right] \text{ SI GEN}$$

$A_4 \leftrightarrow A_3$

$A_4 \to A_4 + \frac{\frac{11}{2}}{5} A_3 = \frac{11}{\cancel{10}_2} \cdot 5\,1$

$24 \cdot \frac{11}{\cancel{10}_5} = \frac{22}{5}$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & -11 & \frac{9}{2} & y-6x+\frac{9}{2}z \; - \\ 0 & 0 & -11 & \frac{22}{5} & \frac{11}{10}w - \frac{33}{5}x + \frac{22}{5}z \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{17}{5} & -\frac{11}{10}w + \frac{3}{5}x + \frac{23}{10}z \end{array}$$

$\frac{11}{\cancel{10}} \cdot \cancel{6}3 = \frac{33}{5}$

$24 \cdot \frac{11}{\cancel{10}_5} = \frac{22}{5}$

$-6 + \frac{33}{5} = \frac{-30+33}{5} = \frac{3}{5}$

$$\begin{array}{c|c} 34 & 2 \\ 2 & 17 \\ 14 & \end{array}$$

$\frac{9}{2} - \frac{11}{10} = \frac{45-11}{10} = \frac{34}{\cancel{10}} \; \frac{17}{5}$

$\frac{9}{2} - \frac{22}{5} = \frac{45-22}{10} = \frac{23}{10}$

- LIN IND

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{5} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \checkmark$$

12) $[f]^{e}_{B}$ $\qquad [f]_e = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Nome & Cognome: ______________________________

Algebra Lineare, Esame Finale
Dicembre 4, 2023

- Tutto il lavoro deve essere unicamente vostro.
- L'utilizzo di calcolatrici è vietato.
- L'esame dura 2 ore.
- Scrivete il vostro nome su tutte le pagine, nel caso qualche foglio si staccasse.
- Controllate di avere tutte le 8 pagine dell'esame.
- Ogni domanda a risposta multipla vale 1 punto.
- Le risposte alle domande aperte valgono 11 punti l'una.
- Le domande aperte verranno corrette solo a chi totalizzi almeno 6 punti su 10 nella parte a crocette.

Buon Lavoro!

PER FAVORE MARCATE LE RISPOSTE CON UNA X, non un cerchio!

1.	(a)	(b)	(•)	(d)	(e)
2.	(a)	(•)	(c)	(d)	(e)
3.	(a)	(b)	(c)	(•)	(e)
4.	(a)	(•)	(c)	(d)	(e)
5.	(a)	(b)	(c)	(•)	(e)
6.	(a)	(b)	(c)	(d)	(•)
7.	(a)	(b)	(c)	(•)	(e)
8.	(•)	(b)	(c)	(d)	(e)
9.	(a)	(•)	(c)	(d)	(e)
10.	(a)	(b)	(c)	(d)	(•)

Non scrivere qua sotto!

Risp. Multiple ______________________

Risp. Aperte ______________________

Totale ______________________