Settimana 6

Appunti di Alessandro Salerno
Lezioni 12-13 Prof. J. Seiler

Approssimazione locale di funzioni (Ordine 1)

Sia I intervallo, $c \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile su I.

Definiamo il polinomio di Taylor di ordine 1 di f centrato nel punto c:

$$T_{1,c}(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

Con notazione:

- 1 indica che è una retta (la retta tangente alla funzione, un polinomio di primo grado)
- c indica il punto in cui si calcola la derivata

Trattandosi di un'approssimazione, è possibile definire l'errore come:

$$E_1(x) = |f(x) - T_{1,c}(x)|$$

Osserviamo che:

- L'approssimazione con retta tangente è esatta in un solo punto, ossia in $x = c$ ($E_1(c) = 0$)
- $E_1(x)$ è una funzione continua in quanto differenza di due funzioni continue

> **Important**
>
> Il polinomio di Taylor $T_{1,c}$ è l'unico polinomio di grado 1 per cui valgono:
>
> $$\begin{cases} T_{1,c}(c) = f(c) \\ T'_{1,c}(c) = f'(c) \end{cases}$$

Approssimazione locale di funzioni (Ordine 2)

Alcune funzioni, come per esempio $\sin x$, assumono comportamenti più facili da approssimare localmente con funzioni di secondo grado (parabole) piuttosto che con rette. Definiamo, quindi, un polinomio di approssimazione di ordine 2 come:

$$(x) = \alpha(x - c)^2 + (x - c) +$$

$$\alpha, , \in \mathbb{R}$$

Per essere un polinomio di Taylor, deve rispettare:

$$
\begin{aligned}
(c) &= f(c) \\
{}'(c) &= f'(c) \\
{}''(c) &= f''(c)
\end{aligned}
$$

Si può osservare che ci sono tre condizioni e tre parametri $\alpha, ,$, quindi si può intuire che la soluzione sarà unica.

- $(c) = f(c) \leftrightarrow \ = (c)$
- ${}'(c) = f'(c) \leftrightarrow \ = f'(c)$
- ${}''(c) = f''(c) \leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} f''(c)$

Dunque, l'unico polinomio di ordine 2 con queste caratteristiche è:

$$T_{2,c}(x) = (x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2} f''(c)(x-c)^2$$

Teorema 19 (Polinomio di Taylor/McLaurin)

Sia $f \ : \ I \to \mathbb{R}$ n-volte derivabile su I. Esiste un unico polinomio di ordine n tale che

- $(c) = f(c)$
- ${}'(c) = f'(c)$
- ${}''(c) = f''(c)$
- ...
- ${}^{(n)}(c) = f^{(n)}$

  Chiamiamo $T_{n,c}(x) = (x)$ polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in c, calcolato ocme:

  $$T_{n,c}(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2} f''(c)(x-c)^2 + \frac{1}{3} f\,(c)(x-c)^3 + \ldots + \frac{1}{n} f^{(n)}(c)(x-c)^n$$

  Ossia:

  $$T_{n,c}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} f^{(k)}(c)(x-c)^k$$

Note

Per convenzione, $0 = 1$ e $f^{(0)} = f$.

Important

È noto come Polinomio di McLaurin il polinoimo di Taylor centrato in 0 ($c = 0$).

Relazione tra funzione e polinomio di Taylor

La relazione tra la funzione ed il polinomio di Taylor:

$$_n(x) = f(x) - T_{n,c}(x)$$

$$E_n(x) = |_n(x)|$$

Dal Teorema di Lagrange segue che:

$$c < x$$

$$[c, x] \subseteq I$$

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$f(x) = f(c) + f'(z)(x - c)$$

Notiamo che $f(c)$ è il valore della funzione nel punto, quindi $f'(z)(x-c)$ è il resto $_0(x)$. Questo è noto come polinomio di Taylor con resto di Lagrange.

Formula di Taylor con resto di Lagrange

Sia $f \in C^{(n+1)}(I)$:

$$\forall c, x \in I \; \exists z \in (c, x) \; oure \; z \in (x, c) \; : \; f(x) = T_{n,c}(x) + {}_n(x) = T_{n,c}(x) + \frac{1}{(n+1)} f^{(n+1)}(z)(x-c)^{n+1}$$

Quindi:

$$_n(x) = \frac{1}{(n+1)} f^{(n+1)}(z)(x-c)^{n+1}$$

Corollario

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)} f^{(n+1)}(z)(x-c)$$

$$E_n(x) = \underset{z \in [c,x] \; o \; [x,c]}{\mathrm{ma}} f^{(n+1)}(z) + |x-c|^{n+1}$$

In particolare, se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M \; \forall x \in I$, allora

$$E_N(x) \leq \frac{M}{(n+1)} |x-c|^{n+1}$$

Successioni numeriche

Una successione è una funzione $a \; : \; \{n \in \mathbb{Z} \mid n > n_0\} \to \mathbb{R}$. La differenza con le funzioni osservate finora è che il dominio di una successione è un insieme discreto, a differenza degli intervalli che sono continui.

Notazione

Generalmente, le successioni sono scritte come $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, ma esistono forme abbreviate come $\{a_n\}$ usate quando non è necessario specificare il range.

Definizioni

Una successione a_n si dice monotona crescente se $a_{n+1} \geq a_n$ e decrescente se $a_{n+1} < a_n$ per tutti gli n.

Una successione si dice inferiormente limitata se:

$$\exists m \ : \ a_n \geq m \, \forall n$$

E si dice limitata superiormente se:

$$\exists M \ : \ a_n < M \, \forall n$$

La successione si dice convergente ad un valore l se:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

La definizione del limite è la stessa delle funzioni

Una successione si dice divergente a $\pm\infty$ se:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty$$

Le successioni che non sono né convergenti né divergenti si dicono indeterminate.

Teorema 20

Se una successione è convergente, allora la successione è anche limitata.

Teorema 21

Una successione monotona è convergente o divergente, non può essere indeterminata.

Successione geometrica

Una successione $\{a_n\}$ si dice geometrica se esistono numeri $a_0, q \in \mathbb{R}$ tali che:

$$a_n = q^n \cdot a_0$$

Alternativamente, definita per ricorrenza come:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Il numero q è detto *ragione della successione*. Fissando $a_0 = 1$, osserviamo che:

- Per $q > 1$, a_n divergente a $+\infty$
- $0 < q < 1$, a_n converge a 0 per $n \to +\infty$
- Per $-1 < q < 0$ si ha $q = -\frac{x}{y}$ con $y > x$ e $x > 0$ ossia $q = (-x)^n \frac{1}{y^n}$ converge a 0 per $x \to +\infty$ per eccesso e per difetto, in quanto a seconda della parità di n si ha $a_n = |q|^n$ o

$a_n = -|q|^n$

- $q < -1$, quindi $q^n = (-1)^n \cdot |q|^n$ diverge a $\pm\infty$ per $x \to +\infty$ in base alla parità di n: per n pari si ha $(-1)^n = 1$ e quindi $a_n = |q|^n$ (uguale al caso $q > 1$), mentre per n dispari si ha $(-1)^n = -1$ e quindi $a_n = -|q|^n$ (ossia come $x > 1$ riflesso rispetto alle ascisse)