L22 • Lo Spazio Euclideo I

MATRICI ORTOGONALI >

Una matrice è ortogonale se il prodotto per la sua trasposta è la matrice identità.

$$A \text{ è ortogonale} \iff {}^tA \cdot A = I_n$$

ES: Per $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}$

(1) Calcolo la formula

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad {}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

ISOMETRIE > MATRICI ISOMETRICHE

Classificandole, le isometrie di Trasformazione sono ortog.

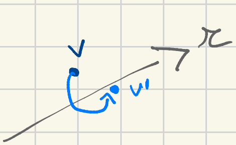
$$Rif_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad Rot(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Questo perché usando sin e cos possiamo far variare i valori tra 0 e 1.

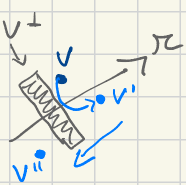
ISOMETRIE > SPAZIO (SOLO DEF)

Nello spazio ($\mathbb{R}^3$), le isometrie sono rotazioni o anti-rotazioni.

L'Anti-Rotazione è una composizione di
- rotazione attorno alla retta r
- riflessione su un piano ortogonale alla retta $V^\perp$



Rotazione



Anti-Rotazione

PRODOTTO VETTORIALE >

Dati 2 vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$, il prodotto vettoriale $v \times w$ è il vettore

$$v \times w = \begin{pmatrix} d_1 \\ -d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

con d_n Determinante della matrice composta $A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$ Tolta l'i-esima riga.

NB: $v \times w$ è ortogonale sia a v che a w

ES: Calcolare il prodotto vettoriale tra $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

(0) Calcolo i determinanti $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$d_1 = \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = -3$$

$$d_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = -6$$

$$d_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = -3$$

(1) $v \times w = \begin{pmatrix} -3 \\ +6 \\ -3 \end{pmatrix}$

(2) Verifico

$\langle v, v \times w \rangle = -3 + 12 - 9 = 0$ ✓

$\langle w, v \times w \rangle = -12 + 30 - 18 = 0$ ✓

PRODOTTO VETTORIALE > PROPRIETÀ

- SE È NULLO: $v \times w = 0_V$
  Allora i vettori sono linearmente dipendenti
- SE NON È NULLO: $v \times w \neq 0_V$
  Allora i vettori sono linearmente indipendenti
- Vale l'equazione $\|v \times w\|^2 + \langle v, w \rangle^2 = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$

L23 • Lo Spazio Euclideo II 1

PIANI IN $\mathbb{R}^3$ >

Dati 2 vettori nello Spazio $v, w \in \mathbb{R}^3$.
Se sono linearmente Indipendenti, allora lo $\text{Span}(v, w) = \pi$ è un piano nello spazio.

ES: "Determinare se $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ generano un piano nello spazio."

(1) Verifico linearità $\lambda_1 \cdot (0,1,0) + \lambda_2 \cdot (1,0,0) = (0,0,0)$

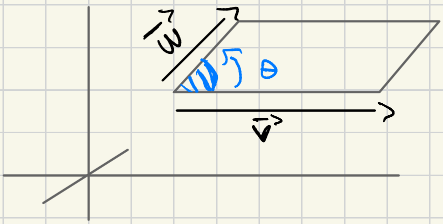
$$\begin{cases} 0 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 = 0 \\ 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 0 = 0 \ \checkmark \end{cases} \quad \text{ok}$$

Sono un piano nello spazio.

AREA DEL PARALLELOGRAMMA >

Dati 2 vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$, possiamo definire il parallelogramma con lati in $\vec{v}, \vec{w}$.

Con area equivalente al prodotto delle norme prodotto al $\sin(\theta)$ del loro angolo.



$$\text{Area}(P) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\theta)$$

Un modo alternativo per calcolare l'area è la norma del prodotto vettoriale.

$$\text{Area}(P) = \|v \times w\|$$

NB: L'altezza del parallelogramma è $\sin(\theta) \cdot \|w\|$

AREA DEL PARALLELOGRAMMA

ES: "Calcolare l'area del parallelogramma con vettori in $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$"

(0) Uso il metodo "classico" $A(P) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\theta)$

(1) Calcolo l'angolo

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = 0 \qquad \cos(\theta) = 0 \to \frac{\pi}{2}$$

$\langle v, w \rangle = 0 \qquad \|v\| = 1 = \|w\|$

(2) Calcolo l'area: $A(P) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\theta)$
$= 1 \cdot 1 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

ES: "Calcolare l'area del parallelogramma con vettori in $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$"

(1) Calcolo l'area $A(P) = \|v \times w\|$

$$v \times w = \begin{pmatrix} d_1 \\ -d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $d_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ • $d_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$
- $d_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$

$\|v \times w\| = \sqrt{1} = 1$

Lo Spazio Euclideo II

BASE POSITIVA >

Dati 3 vettori basi $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, la base viene detta positiva se la matrice composta dai vettori è > 0

ES: Determinare se $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sono una "base pos."

(1) Calcolo il determinante:

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = 1$$ ✓ è positiva

BASE POSITIVA > PROPRIETÀ

- Se $v, w \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti, allora per def $v \times w$ è ortogonale ad essi.
  Quindi $\{v, w, v \times w\}$ è una Base positiva
  $\det(v \mid w \mid v\times w) > 0$

PRODOTTO VETTORIALE > ALTRE PROPRIETÀ

- "ANTI" COMMUTATIVITÀ: $v \times w = -(w \times v)$
- BILINEARITÀ
  - $(v_1 + v_2) \times w = v_1 \times w + v_2 \times w$
    $v \times (w_1 + w_2) = v \times w_1 + v \times w_2$
  - $\lambda v \times w = \lambda(v \times w)$
    $v \times \lambda w = \lambda(v \times w)$

NB: La proprietà associativa NON è contemplata

SOTTO-SPAZIO AFFINE > PT.2

Sono sotto-spazi generati a partire da un sotto-spazio al quale viene aggiunta una soluzione particolare.

$$S = \{ v + w \mid w \in W \} \quad \text{con} \quad W \subseteq V \quad \text{e} \quad v \in V \text{ fisso.}$$

Il "sotto-spazio base" W è detto anche giacitura di V

SPAZI AFFINI > COINCIDENZA

Dati 2 spazi affini, essi sono coincidenti se V e $W \subseteq V$, $X \subseteq V$ e $S_0 = \{ v_1 + w \mid w \in W \}$
$S_1 = \{ v_2 + x \mid x \in X \}$

- Hanno la stessa giacitura $W = X$
- La differenza dei vettori fissi appartiene alla giacitura $v_1 - v_2 \in W$

ES: "Dato $V = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ una retta, definirne le rette affini per $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

(1) Uso la Forma Parametrica

$$r_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + V = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+t\\t\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$r_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + V = \left\{ \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}s\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\s-1\end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

In questo caso sono le stesse. Per $s = 1+t$ $r_1 = \begin{pmatrix}s\\s-1\end{pmatrix}$

SPAZI AFFINI > DIMENSIONE

- Se in Forma Parametrica: È la dimensione del sotto-spazio base ovvero il numero dei parametri
- Se è in Forma Cartesiana: Si usa Rouché-Capelli

L23 • Lo Spazio Euclideo II

S

SPAZI AFFINI > COMPONENTI DELLO SPAZIO

Nello spazio $\mathbb{R}^3$, sono sotto-spazi affini:

- I punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
- Le rette $\text{Span}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$

  Possono essere rappresentate da
  - 2 equazioni lineari
  - 1 punto e 1 vettore

- I piani $\text{Span}\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right)$

I piani possono essere descritti:
- Da un equazione lineare $\pi = \{ax + by + cz = d\}$
- Da un punto e 2 vettori

$$\pi = \{P_0 + t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2\}$$

RETTE > FORMA PARAMETRICA

Dati 2 punti $\in \mathbb{R}^3$, è possibile definire l'unica retta come:

$$\begin{cases} x = x_0 + l\lambda \\ y = y_0 + m\lambda \\ z = z_0 + n\lambda \end{cases}$$

con
- $P = (x_0, y_0, z_0)$ è 1 dei due punti
- $\vec{v} = (l, m, n)$ è il vettore direzione. Dei 2 punti

ES "Trovare la retta passante per $A = (1, 0, 3)$ e $B = (0, 1, 4)$"

(1) Trovo il vettore direzione (casuale)

$$\vec{AB} = (0-1, 1-0, 4-3) = (-1, 1, 1)$$

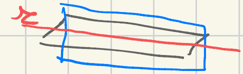
(2) Rappresento in forma Parametrica: Scelgo A

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda & \rightarrow (-1) \\ y = 0 + \lambda & \rightarrow (1) \\ z = 3 + \lambda & \rightarrow (1) \end{cases}$$

Lo Spazio Euclideo II

RETTE > FORMA CARTESIANA

È formata da un sistema a 2 equazioni perchè nasce dall'intersezione di 2 piani



ES: Data la seguente retta in forma parametrica trasformarla in forma cartesiana:

$$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 0-\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$$

(1) Isolo "λ" e scelgo 2 dei 3 per ri-scrivere il resto

$$\begin{cases} \lambda = x-1 \\ \lambda = -y \\ \lambda = 3-z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y = x-1 \\ -y = 3-z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ y-z+3=0 \end{cases}$$

sostituisco $\lambda = -y$

ES: Data la retta in forma cartesiana, ricavare la forma parametrica: $\begin{cases} x+y-1=0 \\ y-z+3=0 \end{cases}$

(1) Ri-formulo in funzione di 1 var. libera: y

$$\begin{cases} x = +1-y \\ y = 0+y \\ z = 3+y \end{cases} \rightarrow \text{Sostituisco } y=\lambda \rightarrow \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 0+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$$

SOTTO-SPAZI AFFINI > ORTOGONALI

Lo sono se hanno i vettori di direzione (parametrica) ortogonali.

SOTTO-SPAZI AFFINI > INCIDENTI

Dati 2 spazi affini, essi sono incidenti sse l' insieme formato dalla somma è $\mathbb{R}^n$

$S_0, S_1 \vDash$ S_0 è incidente a $S_1 \iff S_0 + S_1 = \mathbb{R}^n$

ES: " Dato - il piano $\pi = \{ P + t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \}$
- la retta $r = \{ Q + t_3 \cdot v_3 \}$

Determinare se sono incidenti "

(1) Dimostro per composizione:

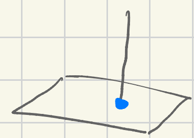
Se v_1, v_2, v_3 sono generatori di $\mathbb{R}^3$

$\iff$ v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$

$\iff$ v_1, v_2, v_3 sono lin. Indipendenti

$\iff$ $\det(v_1 | v_2 | v_3) \neq 0$

Se lo sono, l'intersezione è 1 punto



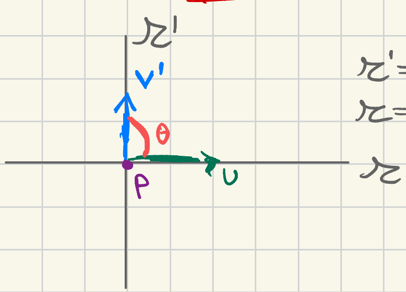
SOTTO-SPAZI AFFINI > ANGOLI

- ANGOLO TRA RETTE

È un valore minore o uguale a $\frac{\pi}{2}$. $[\leq \frac{\pi}{2}]$

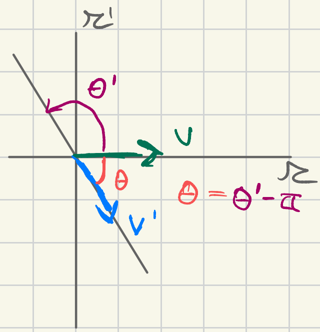
Calcolabile come [l'angolo tra vettori] al quale

- Se $\theta > \frac{\pi}{2}$ si toglie π
- Se $\theta < \frac{\pi}{2}$ sarà θ



$r' = P + \text{Span}(v')$

$r = P + \text{Span}(u)$



L24 • Lo Spazio Euclideo III

SA

SOTTO-SPAZI AFFINI > INCIDENTI $S \cap S'$

Bisogna montare un sistema tra i 2 sotto-spazi per poi provare a risolverlo. Se esistono soluzioni allora sono incidenti.

ES: "Verificare se $\pi_1 = \{2x+y-z=1\}$ e $\pi_2 = \{x+2y+z=2\}$ sono incidenti"

1) Monto il sistema

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2+x-2y=1 \\ z=2-x-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y=3 \\ \cancel{} \end{cases}$$

isolo z

$$\begin{cases} x = t \in \mathbb{R} \\ y = -3+3t \\ z = 2-x-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \in \mathbb{R} \\ y = -3+3t \\ z = 2+6-6t-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0+t \\ y = -3+3t \\ z = 8-7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

isolo y + x libero

(2) Verifico le equazioni originali $(t=1)$

- $2x+y-z=1$ $\quad [x=0+1,\ y=-3+3=0,\ z=8-7=1]$

  $2\cdot\cancel{1}+0-1 \Rightarrow 2-1=1$ ✓

- $x+2y+z=2$

  $1+0+1=2$ ✓

SOTTO-SPAZI AFFINI > INCIDENTI $S \cap S'$

ES: "Verificare se sono incidenti $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, r \in \mathbb{R} \right\}$
$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(0) Definisco equazioni

$1+t = 4+\lambda$, $2+r = 5+\lambda$, $3+t+r = 6$

(1) Monto il sistema (risolvo incognite)

$$\begin{cases} 1+t = 4+\lambda \\ 2+r = 5+\lambda \\ 3+t+r = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3+\lambda \\ r = 3+\lambda \\ 3+(3+\lambda)+(3+\lambda) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = // \\ r = // \\ \frac{\cancel{2}\lambda}{\cancel{2}} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ r = \frac{3}{2} \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

(2) Verifico

- $1+t = 4+\lambda \Rightarrow 1+\frac{3}{2} = 4-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2+3}{2} = \frac{8-3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$ ✓
- $2+r = 5+\lambda \Rightarrow 2+\frac{3}{2} = 5-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{4+3}{2} = \frac{10-3}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$ ✓
- $3+t+r = 6 \Rightarrow 3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 6 \Rightarrow \frac{6+3+3}{2} = 6 \Rightarrow \cancel{\frac{12}{2}} = 6$ ✓

SOTTO SPAZI AFFINI > TROVARE PIANO ORTOGONALE A RETTA

Data la retta equivale a prendere i termini noti e toglierli alle incognite meno le incognite

$$r = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$u_1(x - t_1) + u_2(y - t_2) + u_3(z - t_3) = 0$

ES: Con $r = \left\{ \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$

$$\frac{7}{5} \cdot \left(x + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5}\left(y - \frac{3}{5}\right) \quad 0 \cdot (z-1) = 0$$

$$\frac{7}{5}x + \frac{7}{25} - \frac{1}{5}y + \frac{3}{25} = 0$$

$$\frac{7}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{10}{25} = 0 \Rightarrow 7x - y + \frac{10}{5} = 0$$

$$-\frac{7}{5} - \frac{3}{5} + \frac{10}{5} = 0$$

Se si vuole invece che passi per l'origine basta prendere le coordinate del vettore direzione

$$r = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \Rightarrow t_1 a + t_2 b + t_3 c = 0$$

trovati $a, b, c \Rightarrow ax + by + z = 0$

ES: Con $r = \left\{ \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$

$$-\frac{1}{5}a + \frac{3}{5}b + c = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{5}a = -\frac{3}{5}b - c \\ b = b \\ c = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3b + 5c \\ b = b \\ c = c \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = 8 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{matrix}$$

$$8x + y + z = 0$$

$$-\frac{1}{5} \cdot 8 + \frac{3}{5} + 1$$

$$= -\frac{8}{5} + \frac{3}{5} + \frac{5}{5} = 0 \checkmark$$

L24 • Lo Spazio Euclideo III

SOTTO-SPAZI AFFINI > ANGOLI

- ANGOLO TRA RETTE

ES: Date le rette con vettori di direzione $v=(1,0,0)$ e $w=(0,1,0)$, calcolarne l'angolo

(0) Def. i vettori direzione: ✓

(1) Calcolo l'angolo:

$\langle v, w\rangle = 0$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = 0$$

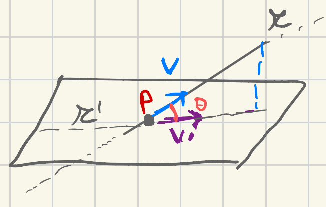
$\|v\| = 1$

$\|w\| = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ok

- ANGOLO FRA RETTA E PIANO

L'angolo equivale all'angolo che si viene a formare tra il vettore di proiezione ortogonale sul piano e il vettore stesso



In cui

- r è la retta
- v è un vettore della retta r
- θ angolo
- r' è la retta proiettata nel sottospazio (piano)
- v' è il vettore proiezione

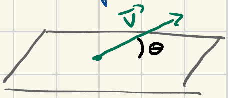
L24 • Lo Spazio Euclideo III

3

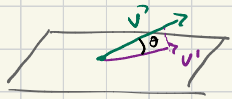
SOTTO-SPAZI AFFINI > ANGOLI

- ANGOLO FRA RETTA E PIANO

Si possono calcolare come



La loro somma è $90° / \frac{\pi}{2}$



L'angolo diretto tra il vettore direzione e il piano

L'angolo tra il vettore d. e la sua proiezione nel piano

- METODO DIRETTO

Si traduce alla formula dell'angolo tra il vettore direzione e il vettore (a,b,c) da $\pi = \{ax+by+c=0\}$

ES "Calcolare l'angolo tra la retta $r = \text{Span}(e_3)$ e lo spazio $\{x+y-z=0\}$"

(1) estraggo i vettori
- v. direzione retta: $\text{Span}(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- v. normale piano: $[1, 1, -1]$

(2) Applico formula angolo

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle v_1, v_2 \rangle|}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.955$$

$\|e_3\| = \sqrt{1} = 1$ $\qquad \langle v_1, v_2 \rangle = -1$

$\|v_1\| = \sqrt{3}$

SOTTO-SPAZI AFFINI > ANGOLI

- **ANGOLO FRA RETTA E PIANO**

- METODO CON PROIEZIONE

Trovato il vettore di direzione, bisogna proiettarlo nel piano e calcolarne l'angolo

ES "Calcolare l'angolo tra la retta $r = \text{Span}(e_3)$ e lo spazio $\{4x+y-z=0\}$"

(1) Determino i vettori:
- v_0 direzione retta: $[0,0,1]^t$
- v_0 normale spazio: $[1,1,-1]$

(2) Proietto il vettore nel piano
uso formula veloce

$$p_\pi(v) = v - \frac{\langle v \cdot \pi_1\rangle}{\langle \pi_1 \cdot \pi_1\rangle} \cdot \pi = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} =$$

$$\langle v, \pi_1\rangle = -1 \qquad = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\-1/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix}$$

$$\langle \pi_1, \pi_1\rangle = 3$$

(3) Calcolo gli angoli

$$\cos(v, p_\pi(v)) = \frac{\langle v, p_\pi(v)\rangle}{\|v\| \cdot \|p_\pi(v)\|} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cong 35.3° \cong 0.615$$

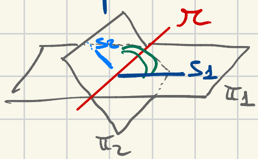
- $\|v\| = 1$
- $\|p_\pi(v)\| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\langle v, p_\pi(v)\rangle = \frac{2}{3}$$

SOTTO-SPAZI AFFINI > ANGOLI

- ANGOLO TRA PIANI

Dati 2 piani π_1 e π_2 il loro angolo diedrale è l'angolo tra le rette incidenti che fanno parte del piano:



Avendo 2 vettori ortogonali ai piani, l'angolo tra i piani è l'angolo dei vettori. (o $\pi-\theta$)

ES: Trovare l'angolo tra $\pi_1 = \{ x+y-z = 3 \}$, $\pi_2 = \{ x-y-z = a \}$

con $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ortogonale a π_1 → sono $x,y,z=-1$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ // a π_2

(1) Calcolo gli angoli

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{1}{3}$$

$\|v_1\| = \sqrt{3}$

$\|v_2\| = \sqrt{3}$

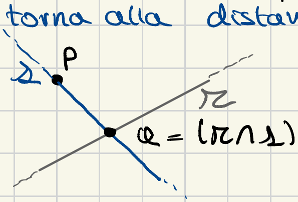
$\langle v_1, v_2 \rangle = 1-1+1=1$

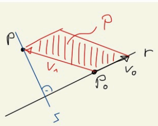
$\cong 70°$

SOTTO SPAZI AFFINI > DISTANZE

- DISTANZE TRA PUNTI : $\|\vec{PQ}\|$ [vedi lez. precedenti]
- DISTANZA TRA PUNTO E RETTA:

Basta tracciare una retta ortog. che passa per il punto e finisce nella retta data. Da lì si torna alla distanza tra punti





$\text{Area}(P) = \|v_0\| \cdot d(P,r) = \|v_0 \times v_1\|$

Prop 9.2.36

Se $r = \{P_0 + t v_0\}$ e $v_1 = \vec{P_0P} = P - P_0$ allora

$$d(P,r) = \frac{\|v_0 \times v_1\|}{\|v_0\|}$$

SOTTOSPAZI AFFINI > DISTANZE

- DISTANZA TRA PUNTO E RETTA:

Dati $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ il punto ed $r = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \right\}$ la retta, basta applicare la formula:

$$d(P, r) = \frac{\| t \times v_1 \|}{\| t \|}$$

→ la norma del prodotto vett. tra

- Il vettore direzione della retta (t)
- Il vettore direzione tra il punto e un vettore della retta

$$v_1 = \overrightarrow{\lambda P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ES: Calcolare la distanza tra il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e la retta $r = \begin{cases} x - 3z = -4 \\ y - 2z = -2 \end{cases}$

(0) Trasformo in forma parametrica r

$$\begin{cases} x - 3z = -4 \\ y - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$$

Isolo z

Verifico con $\lambda = 1$ $\begin{cases} -1 - 3 = -4 \checkmark \\ 0 - 2 = -2 \checkmark \end{cases}$

$x = -1, \ y = 0, \ z = 1$

$$P \in r = \begin{pmatrix} -4+3 \\ -2+2 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) Applico formula

- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\| t \| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$
- $t \times v_1 \Rightarrow A \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$d_1 = \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - (-2) = 6$

$d_2 = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 2 = 4$

$d_3 = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = -6 - 4 = -10$

- $\| t \times v_1 \| = \sqrt{36 + 16 + 100} = \sqrt{152}$

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{152}}{\sqrt{14}}$$

L24 • Lo Spazio Euclideo III

SOTTOSPAZI AFFINI > DISTANZE

- DISTANZA TRA **PUNTO E RETTA:**

ES:

Esempio: $P=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $r=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$. Allora

$$d(P,r)=\frac{\|v_0\times v_1\|}{\|v_0\|}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right\|}$$

$P-P_0$ con $P_0=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$=\frac{\left\|\begin{pmatrix}6\\-4\\-10\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{\cancel{2}\cdot2\cdot2\cdot19}}{\sqrt{\cancel{2}\cdot7}}=\frac{2}{7}\sqrt{7\cdot19}$$

$$=\frac{2}{7}\sqrt{133}$$

- DISTANZA TRA **RETTE**:

Date 2 rette disgiunte r_0, r_1

Con $r_0 = P_0 + \text{Span}(v_0)$

$r_1 = P_1 + \text{span}(v_1)$

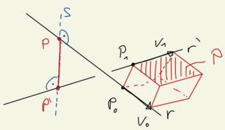
- Se sono **parallele** (v_0 dipendente a v_1)

La distanza è $d(r_0,r_1)=d(P,r_1)$

con P punto qualsiasi di r

- Se sono **sghembe** (v_0 non dip. da v_1)

$\Rightarrow$ esiste una retta s che interseca r & r' in modo ortogonale in punti P, P'. Poniamo $d(r,r')=d(P,P')$. Poniamo $v_2=P_1-P_0$



$\text{Vol}(\ldots)$

$=|\det(v_0|v_1|v_2)|$

$=\|v_0\times v_1\|\cdot d(r,r')$

Prop 9.3.39: Se r & r' sono sghembre, allora

$$d(r,r')=\frac{|\det(v_0|v_1|v_2)|}{\|v_0\times v_1\|}$$

dove $r=P_0+tv_0$, $r'=P_1+tv_1$, $v_2=P_1-P_0$.

Esempio: $r=\left\{\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\{P_0+tv_0\}$

$r'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}\right\}=\{P_1+sv_1\}$

$$\Rightarrow d(r,r')=\frac{\left|\det\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&-2&6\\1&3&-1\end{pmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\left|2\cdot\det\begin{pmatrix}-2&6\\3&-1\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&6\end{pmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix}2\\-7\\-4\end{pmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{|(-32)+(-8)|}{\sqrt{2^2+7^2+4^2}}=\frac{40}{\sqrt{69}}=\frac{40\sqrt{69}}{69}.$$

SOTTOSPAZI AFFINI > DISTANZE

- **DISTANZA TRA RETTE**:

Bisogna prima verificare l'intersezione tra le rette

- se si intersecano: la distanza è 0
- se NON si intersecano:

  Partendo dalla forma parametrica delle 2 rette

  $r_1 = P_1 + \mathrm{Span}(t_1) \qquad r_2 = P_2 + \mathrm{Span}(t_2)$

  - Se i vettori direzione sono dipendenti allora le rette sono parallele

    La distanza sarà

    $$d(r_1, r_2) = d(P, r_2)$$

    ovvero la distanza tra un punto qualsiasi della prima retta e l'altra retta

  - Se i vettori direzione sono indipendenti allora le rette sono sghembe

    La distanza sarà:

    $$d(r_1, r_2) = \frac{\det\left(t_1 \,|\, t_2 \,|\, \vec{v} \right)}{\| t_1 \times t_2 \|}$$

    dove:

    $$\vec{v} = P_2 - P_1$$

ES: "Date $r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ed $r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ determinare la distanza

(o) Verifico che siano disgiunte

$$\begin{cases} 2 + 2t = 1 - s \\ -5 = 1 - 2s \\ 1 + t = 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2-2} + 6s = 1 - s \\ // \\ t = -1 + 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7s = 1 \\ \frac{\cancel{2}s}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{2}} = 3 \\ // \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 14 = 1 \quad \times \rightarrow \text{disgiunte} \\ s = 3 \\ t = -1 + 9 = 8 \end{cases}$$

L24 • Lo Spazio Euclideo III   SB

SOTTOSPAZI AFFINI > DISTANZE

• DISTANZA TRA RETTE :

ES (continua)

Date $r_1 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{P_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{t_1} \right\}$ ed $r_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_2} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{t_2} \right\}$

determinarne la distanza

(1) Verifico se sono sghembe o parallele

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

↳ sono lin. Indip ⇒ sghembe

(2) Applico la formula

∘ $\bar{v} = P_2 - P_1 = \begin{bmatrix} 2-1 \\ -5-1 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$

∘ $\det(t_1 | t_2 | \bar{v}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$A_1 \to A_1 - 2A_3$

Laplace su (3,3)

$\cancel{(-1)^{3+3}} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} = 42 - 2 = 40$

∘ $t_1 \times t_2$ $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad d_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 2$

$d_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -4$ $\quad d_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 7 \Rightarrow -7$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \|t_1 \times t_2\| = \sqrt{4 + 49 + 16} = \sqrt{69}$

$d(r_1, r_2) = \dfrac{40}{\sqrt{69}}$