DICHIARAZIONE SEMPLIFICATA >

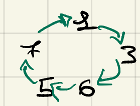
è possibile utilizzare una notazione semplificata $\frac{4}{}$ per definire velocemente i cicli.

ESEMPIO

- Ciclo di s elementi: $\tau \in S_7$ $\quad \ell = 5$ $\quad \tau = (1\ 3\ 6\ 5\ 7)$

  $\tau = (t, t_1, \dots t_n)$

In questo caso si definisce un ciclo con gli elementi collegati tra parentesi specificando la lunghezza in modo da sapere gli elementi non collegati



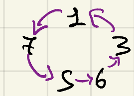
2

4

- Ciclo inverso di s elementi: $\tau^{-1} = (1,3,6,5,7)^{-1} = (1,7,5,6,3)$

  $\tau^{-1} = (t_n, t_{n-1}, \dots t_1)$

In questo caso, il ciclo inverso semplicemente segue un processo inverso rispetto alla sua versione normale.



2

4

COMPOSIZIONI DI CICLI >

La composizione di cicli in generale non garantisce la produzione di un altro ciclo.

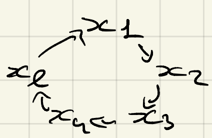
CICLI ED IDENTITÀ >

Effettuando la potenza di un ciclo (ri-applicandolo n-volte) ad un numero sufficiente è possibile ottenere l'identità della permutazione.

Difatti, applicando la potenza K-volte: $\quad \tau : (x_1, x_2, \dots x_\ell)$

SE $0 < K \wedge K < \ell$

Il ciclo elevato non restituirà l'identità



$\tau^2(x_1) = x_3$

$\tau^3(x_1) = x_4$

$\vdots$

$\tau^\ell(x_1) = x_1$

SE $K = \ell$

Il ciclo elevato restituirà l'identità.

Questo perché effettuando la potenza di un ciclo l'associazione dell'n-esimo elemento viene avanzata di K ed essendo finito dopo un certo numero di shifts l'n-esimo elemento verrà mappato a se stesso.

La lunghezza ℓ viene definita periodo in quanto una volta sorpassato il risultato sarà uguale a senza la R (es: $\tau^{\ell+1} = \tau^1$)

INTERSEZIONI DI CICLI >

$\alpha : (x_1, x_2 \dots x_r),\ \beta : (y_1, y_2 \dots y_s)$ $\quad \overbrace{\{x_1, x_2 \dots x_r\} \cap \{y_1, y_2 \dots y_s\} = \emptyset}^{\text{DISGIUNTI}}$

Dati 2 cicli α, β su una permutazione S_n. α e β sono disgiunti se i 2 cicli non hanno elementi in comune.

$\{x_1, x_2 \dots x_r\} \cap \{y_1, y_2 \dots y_s\} = \emptyset$

COMPOSIZIONE CICLI DISGIUNTI > $\tau : (x_1, x_2, x_r),\ \beta(y_1, y_2 \dots y_s) \models \tau \circ \beta = \beta \circ \alpha$

Dati 2 cicli disgiunti, la loro composizione è la stessa indipendentemente dall'ordine.

Questo perché, applicando una delle 2 sull'intero set di dati:

- Restituirà il valore collegato se i dati sono quelli della prima Funzione
- Restituirà l'identità altrimenti

Applicandolo 2 volte, restituirà tutti i valori collegati anche se applicata nel senso inverso

DISCRETA: COMBINATORICA • COMBINATORICA 1

CARDINALITÀ DI INSIEMI E LE LORO PROPRIETÀ >

- Insieme vuoto = $|\emptyset| = 0$
- Sotto-insiemi : $x \subseteq y \models |x| \leq |y|$
  - Intersezione : $x \subseteq y \models x \cap y \subseteq x \land |x \cap y| \leq |x|$
    $\quad$ // $\models x \cap y \subseteq y \land |x \cap y| \leq |y|$
  - Unione : $x \subseteq y \models x \subseteq x \cup y \land |x| \leq |x \cup y|$
    $\quad$ // $\models y \subseteq x \cup y \land |y| \leq |x \cup y|$

Inoltre, se i due insiemi sono disgiunti, l'unione equivarrà alla somma delle cardinalità dei 2 $\quad x \subseteq y \land x \cap y = \emptyset \models |x \cup y| \equiv |x| + |y|$

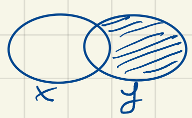
Ottenuto da: $y = x \,\dot{\cup}\, (y - x)$

$|y| = |x| + |y - x|$

$|y| \setminus |x| = |y - x|$

- Sottrazione : $x \subseteq y \models |y \setminus x| \equiv |y| \setminus |x|$

- Sottrazione : $x, y \models |y \setminus x| \equiv |y| \setminus |x \cap y|$
  (non sotto-insiemi)



Questo perché y è formato da:
- gli elementi intersecati con x
- gli elementi che non stanno in x

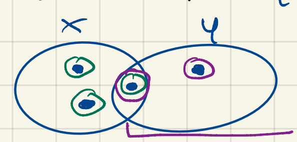
$y = (y \cap x) \,\dot{\cup}\, (y \setminus x)$

$|y| = |y \cap x| + |y \setminus x| \rightarrow |y| \setminus |y \cap x| = |y \setminus x|$

Utile anche: $|x \cap y| \equiv |x| + |y| - |x \cup y|$

- Inclusione - Esclusione : $\models |x \cup y| \equiv |x| + |y| \setminus |x \cap y|$

Il principio di inclusione-esclusione dice che, l'unione di 2 insiemi equivale alla differenza tra
- la somma delle cardinalità dei 2 insiemi
- l'intersezione dei 2 insiemi



Questo perché sommando i 2 insiemi può capitare che si contino 2 volte gli elementi comuni.

ESERCIZIO : (su unione) "In un corso universitario 180 studenti hanno superato l'esame di matematica e 240 quello di Fisica. 75 l'hanno superato entrambi. Quanti di loro hanno superato almeno 1 esame?"

$M(x) \Rightarrow x$ supera matematica $\qquad F(x) \Rightarrow x$ supera fisica

$S_M = \{ s \in S \mid M(s) \} \qquad S_F = \{ s \in S \mid F(s) \} \qquad |S_M \cap S_F| = 75$

"Superare almeno 1 esame" = unione $\rightarrow |S_M \cup S_F| = |S_M| + |S_F| \setminus |S_M \cap S_F|$

$= 180 + 240 - 75$

$= 345$

ESERCIZIO 8 (su intersezione) In una tavoletta di 40 persone ognuno ha preso un primo o un secondo, 35 hanno preso il primo e 24 il secondo. Quanti hanno preso entrambi?

$P =$ persone $\quad |P| = 40 \quad |P_p \cup P_s| = 40$

$P_p = \{ p \in P \mid \text{Primo}(p) \} \quad |P_p| = 35$

$P_s = \{ p \in P \mid \text{secondo}(p) \} \quad |P_s| = 24$

$|P_p \cup P_s| = |P_p| + |P_s| - |P_p \cap P_s|$

$|P_p \cap P_s| = |P_p| + |P_s| - |P_p \cup P_s|$

$= 35 + 24 - 40$

$= 19$

ESECUZIONE SU PIÙ INSIEMI >

È possibile applicare il principio di Inclusione - Esclusione su più insiemi.
Dati n insiemi, la cardinalità dell'unione degli insiemi equivale a

- La somma delle cardinalità degli insiemi singoli

Une Insiemi: In maniera incrementale, la sottrazione dell'intersezione degli insiemi seguita dalla somma dell'intersezione degli insiemi fin quando non si raggiunge il numero di elementi

FORMULA GENERALE

Dati $X_1, X_2 \dots X_n$

$$|X_1 \cup X_2 \dots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| \dots + |X_n| +$$
$$- |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| \dots - |X_j - X_i| +$$
$$+ |X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \dots + |X_j + X_i + X_n| +$$
$$+ (-1)^{n-1} |X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n|$$

ES Per 3 $|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = |X_1| \cup |X_2| \cup |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| - |X_2 \cap X_3|$
$+ |X_2 \cap X_1 \cap X_3|$

UNIONE DI PIÙ INSIEMI DISGIUNTI > $|X_1, X_2 \dots X_n| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$

Per calcolare la cardinalità dell'unione di più insiemi disgiunti con un numero di elementi differente, l'unione equivale alla sommatoria delle cardinalità dei singoli insiemi

ESERCIZIO = "Quanti sono i numeri ≤ 30 coprimi con 30" (non sia né 2 che né 3 che 5)

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$X = \{ n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 30 \land 2 | n \}$

$Y = \{ n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 30 \land 3 | n \}$

$Z = \{ n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 30 \land 5 | n \}$

$X \cap Z = \{ n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 30 \land 10 | n \}$

$Y \cap Z = \{ n \in \mathbb{N} \dots\dots 15 | n \}$

$X \cap Y = \{ n \dots 6 | n \}$

Quindi

$|X| = 15$ $\quad |X \cap Z| = 3$ $\quad |X \cap Y \cap Z| = 1$

$|Y| = 10$ $\quad |X \cap Y| = 5$

$|Z| = 6$ $\quad |Y \cap Z| = 2$

Per cui i NON coprimi ≤ 30 sono $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z|$
$+ |X \cup Y \cup Z|$
$= 23$

$30 - 23 = \boxed{7}$

- Insieme delle Parti (finiti): $\mathcal{P}(X) = 2^{|X|}$

- Prodotto Cartesiano: $|X_1 \times X_2 \dots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \dots |X_n|$

DISCRETA: COMBINATORICA • COMBINATORICA 2

CARDINALITÀ DEL NUMERO DI FUNZIONI >

Dati 2 insiemi A e B, è possibile ottenere la cardinalità di tutte le funzioni che mappano A in B $\mathcal{F}_{A,B} = \{$ fonc $f: A \to B \}$.

Per fare ciò, si considera che, siccome la singola funzione mapperà un elemento di A in B, allora esso avrà tante possibilità quante sono gli elementi in B ($|B| = m$ $f(a_1) = m$ possibilità, $f(a_2) = \,''$, $f(a_3) = \,''$)

Di conseguenza, le funzioni possibili saranno tutte le possibilità: $|\mathcal{F}_{A,B}| = \underbrace{m \cdot m \cdot m \dots}_{n \text{ volte}} = m^n = |B|^{|A|}$

CARDINALITÀ DI NUMERO DI FUNZIONI INIETTIVE >

Dati 2 insiemi A, B con $|A| = n$, $|B| = m$ e si vuole contare il numero di funzioni iniettive $f: A \to B$ come $\mathcal{I} = \{ f \in F \mid f: A \to B \wedge f \text{ iniettiva} \}$ allora:

- Se $|A| > |B|$ NON ci possono essere funzioni iniettive $A \to B$ (Principio dei Cassetti) per cui $\mathcal{I}_{A,B} = \emptyset$ $|\mathcal{I}_{A,B}| = 0$

- Se $|A| \leq |B|$, la funzione di mapping potrà assegnare un numero decrescente di possibilità del co-dominio per l'iniettività. (es: $f(a_1) = m$ possibilità, $f(a_2) = (m-1)$ poss. $f(a_3) = (m-2)$..) per cui: $|\mathcal{I}_{A,B}| = m \cdot (m-1) \dots \cdot (m-n+1)$

  ↳ QUESTO PERCHÉ IL PROCESSO VIENE RIPETUTO N-VOLTE

CARDINALITÀ DI NUMERO DI FUNZIONI BIETTIVE >

Dati due insiemi A, B la cardinalità delle possibili funzioni biettive è
- 0, se $|A| \neq |B|$
- $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots \cdot 1$ se $|A| = |B| = m$ $= D_{m,m} \overset{def}{=} m!$ Questo perché coincide con l'iniettività

Inoltre si nota che se $|A| = n$ allora l'insieme delle disposizioni semplici è equivalente alle permutazioni sull'insieme.

DISPOSIZIONI: CON RIPETIZIONE > $A = \{1, 2\}$, $k = 4$ $\vdash$ disp. con rip di $A = (1, 2, 2, 1)$

Dato un insieme, la disposizione con ripetizione sull'insieme stesso non è altro che la sequenza di elementi appartenenti all'insieme.

Questo perché si effettua un mapping $f: I_k \to A$

DISPOSIZIONI: SEMPLICE > $A = \{a, b, c, d\}$ $k = 2$ $\vdash$ disp. con rip di $A = (a, d)$

Dato un insieme, la sua disposizione semplice è formata dalla sequenza di k elementi dell'insieme a 2 a 2 distinti (n-upla senza ripetizioni).

$D_{m,k} = \dfrac{m!}{(m-k)!}$ se $k \leq m$

Questo perché si effettua un mapping $f: I_n \to A$ iniettiva

Di conseguenza ha la stessa cardinalità delle funzioni iniettive ($m \cdot m-1 \dots \cdot (m-k+1)$)

ESEMPIO: "Quanti num. di 3 cifre si possono formare con 1,2,3,4,5,6? e con cifre distinte?"

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ $|A| = 6$ vis $= |A|^3 = 216$ distinte $= 6 \cdot (6-1) \cdot (6-2) = 120$

$D_{6,4}$

ANAGRAMMA

Dato un insieme ed una parola di lunghezza n appartenente all'insieme non è altro che una sequenza di n elementi.

La parola è quindi descrivibile dalla funzione $f: I_m \to A$ in cui A è il dato insieme, I_m è l'insieme degli m numeri di pos.

L'anagramma sarà quindi la composizione $g \circ f: I_m \to A$ in cui $g: I_m \to I_m$ è una funzione che "esegue lo shuffle" delle posizioni

ESEMPIO: "Anagramma di 'ASIA'"

$A = \{A, S, T\}$ $\quad a = ('a', 's', 't', 'a')$ $\quad f: I_m \to A \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & s & t & a \end{pmatrix}$ $\qquad g: I_m \to I_m \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$f \circ g: I_m \to I_m \to A \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ t & s & a & a \end{pmatrix} = $ 'tsaa'

CARDINALITÀ DEGLI ANAGRAMMI

La cardinalità di un anagramma è calcolabile tramite il numero di ripetizioni.

Data una parola di lunghezza n formata degli elementi $\{a_0, a_1 \dots a_k\}$ in cui $k \leq n$

Si contano le apparizioni dei singoli elementi (es: $a_1 = r_1$ volte, $a_0 = r_0$ volte) di conseguenza la cardinalità è calcolabile con $= \dfrac{n!}{r_1! \cdot r_2! \dots r_k!}$

ESEMPIO: "apparizioni di 'ASIA'"

$A = \{'A', 'S', 'T'\} \quad r_1 = 2, \quad r_2 = r_3 = 1 \qquad ris = \dfrac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12$

$a = ('A', 'S', 'T', 'A') \quad |a| = 4$

DISCRETA: COMBINAZIONI • COMBINATORICA 3

A in cui $|A| = n$ $\quad C \subseteq A$ in cui $|C| = k$ in cui $0 \le k \le n$

Per combinazioni si intendono tutti i sotto-insiemi di un dato insieme finito.
Inoltre, la cardinalità dei sotto insiemi è $\geq 0 \wedge \leq n$ in cui $|A| = n$ sopra-insieme

CARDINALITÀ DELLE COMBINAZIONI >

Dato un insieme, per calcolare il numero di combinazioni formabili a partire da un dato insieme si indica con $C_{n,k}$ in cui
- n è la cardinalità del sopra-insieme
- k è la cardinalità del sotto-insieme

In particolare per ogni insieme
- $C_{n,0} = 1$ In quanto solo l'insieme vuoto ha cardinalità 1.
- $C_{n,1} = n$ In quanto avendo un insieme di n elementi solo i sottoinsiemi formati da un solo elemento hanno cardinalità 1.

- $C_{n,k} = C_{n,n-k}$ $\forall k \le n$ In quanto contare la cardinalità delle combinazioni di lunghezza arbitraria k ha lo stesso valore che contare il suo complementare. Questo perché la funzione $f: B \subseteq A \to \overline{B} = A \setminus B$ è biettiva

- $\sum_{k=0}^{n} C_{n,k} = \mathcal{P}(A) = 2^n$ Questo perché l'unione di tutte le combinazioni possibili fino a n è logicamente equivalente alle parti del sopra-insieme.

- $C_{n,k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$ Questo perché per ogni combinazione di k elementi esistono $k!$ possibili disposizioni semplici per cui dividendo le disposizioni per il numero si ottengono le possibili combinazioni

$= \dfrac{D_{n,k}}{k!} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$=$ coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$

FORMULA DEI BINOMI
/ COEFFICIENTE BINOMIALE

Il coefficiente binomiale è utilizzato per definire la presenza di elementi nell'elevazione a potenze di un binomio. In particolare, data la potenza di un binomio:

$(x+y)^n = \underbrace{(x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y) \cdots}_{n \text{ volte}}$ Eseguendo i calcoli delle moltiplicazioni si avranno:

$\binom{n}{0} x^n +$ ossia ci saranno tutte le x moltiplicate
$\binom{n}{1} n \cdot x^{n-1} y +$ ossia le moltiplicazioni in cui si include y una volta
$\binom{n}{2} n \cdot x^{n-2} y^2$ stessa cosa ma scegliendo y 2 volte

In generale: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$

FORMULA DI SCHIEFEL > $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

La formula di Schieffel dice che il coeff. binomiale di $\binom{n}{k}$ è uguale alla somma di $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

DIMOSTRAZIONE >

Dato il coeff. $\binom{n}{k}$ contenente la cardinalità di combinazioni con k elem dell'insieme A, $|A| = n$, se si definisce $A' = A \setminus \{a_0\}$, $|A'| = n-1$. Definendo $X \subseteq A$ e $|X| = k$ vi sono 2 possibilità:
- $X \subseteq A'$: Ovvero non contiene a_0 e quindi ci sono $\binom{n-1}{k}$ possibilità
- $a_0 \in X$: Contiene a_0 e quindi $X \setminus \{a_0\} \subseteq A$ che ha $k-1$ elementi: $\binom{n-1}{k-1}$

] ma i loro elementi combinati sono quelli totali per cui $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

DISCRETA: COMBINAZIONI • COMBINATORICA 3

Dato un insieme finito A in cui $|A| = n$, una combinazione con ripetizione di k elementi è la scelta di k elementi dell'insieme originale in cui vengono ammesse ripetizioni.

ESEMPIO: $A = \{a, b, c\}$ le comb. con ripetizione di ordine 4 sono aaaa, baba ...

NB: esse vengono chiamate anche multinsiemi. NB: $baba = abab$ Non conta l'ordine

NB2: k può anche essere maggiore di n. Infatti basta che $k \in \mathbb{N}$

ESERCIZIO: "Una gelateria produce 16 gusti di gelato. Ogni cono contiene da 1 a 4 palline mono gusto. Quanti sono i coni diversi che la gelateria produce?"

- Con 1 pallina: 16 gusti
- Con 2 palline: $\binom{16}{2}$ se distinte
  16 se uguali
- con 3 palline: $\binom{16}{3}$ se distinte
  16 se tutte uguali
  $16 \cdot 16$ se 2 gusti uguali e il terzo diff
- con 4 palline: Diventa sempre più complicato senza formula

CON FORMULA:

1 pallina: 16

2 palline: $C'_{16,2} = \binom{16+2-1}{16-1} = \binom{17}{15}$

3 palline: $C'_{16,3} = \binom{16+3-1}{16-1}$

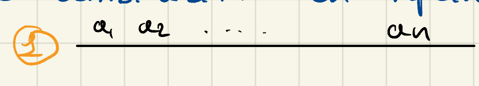
4 palline: $C'_{16,4} = \binom{16+4-1}{16-1}$

$= 4844$

METODO: STARS AND BARS >

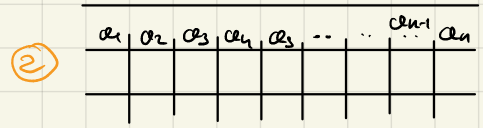
Per poter definire la formula si pensa alle combinazioni con ripetizione come

- Una riga, in cui gli elementi sono disposti in maniera orizzontale

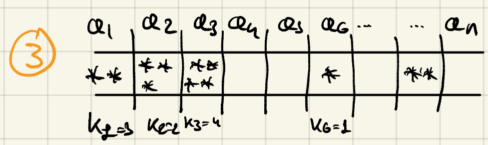


$A = \{a_1 .. a_n\}$

- Gli elementi dell'insieme sono separati tra di loro con $n-1$ righe verticali



- Gli elementi della combinazione con ripetizione sono indicati con simboli (*) all'interno di ogni cella.



Così facendo, la combinazione con ripetizione di ordine k è indicata come la somma degli elementi nelle celle singole ($k = k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2 \dots k_n \cdot a_n$) e può essere descritta come successione di $n-1$ barre e k simboli.

CARDINALITÀ >

Oppure può essere intesa anche come una sequenza di $n+k-1$ elementi, dei quali per ottenerne la cardinalità si ha bisogno di $n-1$ elementi.

Applicando la formula per la cardinalità delle combinazioni:

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

DISCRETA: PERMUTAZIONI • PERMUTAZIONI 2

Data una permutazione, essa può essere descritta come composizione dei cicli che la compongono.

DIMOSTRAZIONE >

Si vuole dimostrare che: $\alpha \in S_n \wedge \alpha \neq id \models \alpha \equiv C_1 \circ C_2 \circ C_3 \dots C_r \wedge r \geq 1 \wedge \bigcap_{i=0} C_i = \varnothing$

Dato un insieme qualunque di n elementi: $1, 2, \dots k \dots, n-1, n$
allora esisterà un ciclo definibile a partire dagli elementi che non puntano a loro stessi: $A = \{x \mid \alpha(x) = x\} \wedge A \neq \{1..n\} \models \exists_K \in A$

↑ elementi che puntano a loro stessi — ↑ altrimenti $\alpha = id$ — ↑ esistono degli altri elementi che formeranno cicli

Quindi gli stessi elementi possono essere definiti su più cicli: $1, 2, 3, \dots k \dots, n-1, n$

$C_1 = (1, \alpha(1))$ $\quad C_3 = (k, \alpha(k))$
$C_2 = (5, \alpha(5))$

ESEMPIO: $\alpha \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 5\,7\,2\,1\,6\,4\,8\,3 \end{pmatrix} = (1\,5\,4)(2\,7\,8\,3)\,(6)$ ← implicito

IN CASO DI CICLI NON-DISGIUNTI >

In caso siano presenti dei cicli non-disgiunti, è possibile convertirli applicando i cicli più volte.

ESEMPIO: $\alpha = (1\,3\,4\,7) \cdot (2\,6\,4) \cdot (5\,1\,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (1\,6\,7) \cdot (2\,5\,3\,4)$$

Oppure con sintassi semplificata: $(1\,3\,4\,7) \cdot (2\,6\,4) \cdot (5\,1\,2) = (1\,6\,7) \circ (2\,5\,3\,4)$

ESEMPIO 2: $\alpha: (1\,7\,3)(1\,4)(3\,4\,6)(2\,5\,3)$ $\quad$ 1 2 3 4 5 6 7
$= (1\,4\,6) \cdot (2\,5\,7\,3)$

TIPO DI UNA PERMUTAZIONE > $\alpha \in S_n \wedge \alpha = C_1 \circ C_2 \dots \circ C_i \wedge |C_1| = l_1 \wedge C_i = l_i \models \text{Tipo}(\alpha) = (l_1, l_2 \dots l_i)$

Data una permutazione, la quale è rappresentabile da cicli disgiunti, si dice tipo la n-upla formata dalle cardinalità dei singoli cicli disgiunti.

ESEMPIO: $\alpha \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 3\,2\,6\,4\,8\,7\,1\,5 \end{pmatrix} = (1\,3\,6\,7) \cdot (5\,8)$ $\quad \text{Tipo}(\alpha) = (4, 2)$

Inoltre si sa che la somma delle cardinalità dei cicli è sempre $\leq$ rispetto alla cardinalità dell'insieme.

PERIODO > $id, \alpha, \alpha^2 \dots \alpha^r$ in cui $\alpha^r = \alpha^k$ $\quad r > k \geq 0$

Data una permutazione e la sua successione $(id, \alpha, \alpha^2 \dots)$ di composizioni siccome la permutazione è finita allora prima o poi una delle sue composizioni sarà uguale ad una delle precedenti.

Si sa inoltre che la prima ripetizione è uguale all'identità $\alpha^p = id$. L'esponente usato per la prima ripetizione viene chiamato periodo.

DISCRETA: PERMUTAZIONI • PERMUTAZIONI 2

CALCOLARE IL PERIODO DAL TIPO > $p = m.c.m.(\text{Tipo}(\pi)) \quad \pi \in S_n$

È possibile calcolare il periodo della permutazione a partire dal Tipo. Esso è dato dal minimo comune multiplo dei valori del tipo.

DIMOSTRAZIONE >

Facendo un esempio, dato $\pi = C_1 \cdot C_2$ $\text{Tipo}(\pi) = (r, s)$ $r \geq s \geq 2$ → questo perché i cicli inferiori sono equivalenti (1) o non sono cicli (0)

definendo la successione $id, \pi, \pi^2 \ldots$ ogni elemento è sempre rappresentabile come prodotto di cicli:

$$\pi = C_1 \circ C_2, \quad \pi^2 = \overbrace{C_1 \cdot C_2}^{\pi} \circ \overbrace{C_1 \cdot C_2}^{\pi} = C_1^2 \cdot C_2^2$$

quindi $\pi^k = C_1^k \circ C_2^k \quad \forall k \geq 0$

se $\pi^k = id$ allora $C_1^k = C_2^k = id$ → $C_1 = id$ se x è n.r → $C_2 = id$ se x è n.s

Ma siccome la permutazione ha un periodo, prima o poi $\pi^k = id$. Questo vorrà dire che $C_1^k \circ C_2^k = id$ ovvero $C_1^k = C_2^k = id$.

K quindi dovrà essere un multiplo sia di r che di s, visto che per tornare l'identità K deve essere il periodo di C_1 e C_2. Il k più piccolo per questo è l'm.c.m.

CARDINALITÀ DEI CICLI > $\frac{1}{\ell} D_{n,\ell} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-\ell+1)}{\ell}$ S_n cicli di lungh ℓ

è possibile calcolare la cardinalità dei cicli di lunghezza ℓ data una permutazione di n elementi. Essa non è altro che la cardinalità delle disposizioni semplici

NB: Non possono essere combinazioni con ripetizione perché le ripetizioni non sono ammesse. Allo stesso tempo però l'ordine è ininfluente

CARDINALITÀ DELLE PERMUTAZIONI DATO IL TIPO >

È possibile calcolare la cardinalità delle permutazioni dato il Tipo moltiplicando la cardinalità dei cicli che lo compongono. In particolare

- se il Tipo contiene cardinalità diff.
  Allora basta la moltiplicazione
  ESEMPIO: $\text{Tipo}(7,3)$ S_{12} $|C_1| = 7 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{7}$...

  $|C_1| = 7 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7} \circ |C_2| = 3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3}$ $\quad C_1 \cap C_2 = \emptyset$

- Se il Tipo contiene cardinalità uguali:
  Allora bisogna dividere il risultato
  ESEMPIO: $\text{Tipo}(2,2)$ S_5 $|C_1| = |C_2| = 2$

$$\frac{5 \cdot 4}{2} \circ \frac{3 \cdot 2}{2} = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

COMBINATORICA: PERMUTAZIONI • PERMUTAZIONI 3

SCAMBI / TRASPOSIZIONI >

Data una permutazione, per scambio si intende un ciclo di lunghezza 2.
Inoltre, ogni ciclo può essere descritto come la composizione di più scambi.

DIMOSTRAZIONE

Si sa che il ciclo viene definito come $(m_1, m_2 \dots m_\ell)$ che viene descritto come la funzione $m_1 \mapsto m_2$, $m_2 \mapsto m_3$ $m_{\ell-1} \mapsto m_\ell$ $m_\ell \mapsto m_1$.

Se è vero che può essere descritta come composizione di scambi, allora sarà nella forma $\underbrace{(m_1, m_\ell) \circ (m_1, m_{\ell-1}) \circ \dots (m_1, m_3) \circ (m_1, m_2)}_{\ell-1 \text{ volte}}$ perché, siccome le composizioni vanno composte da dx a sx, allora le funzioni saranno:

$m_1 \mapsto m_2$ In questo caso m_2 non trova altri elementi nel fondo per cui si ferma a m_2

$m_2 \mapsto m_1 \to m_3$

$m_3 \to m_1 \to m_4$ $\quad m_\ell \to m_1$

$m_{\ell-1} \to m_1 \to m_\ell$

Siccome le funzioni sono identiche allora la dimostrazione è provata.

Inoltre, se una permutazione è descrivibile come composizione di cicli, allora può essere descritto come scambi.

Disp + Disp = Pari
Pari + Pari = Pari
Pari + Disp = Disp

PARITÀ DI UNA PERMUTAZIONE >

Data una permutazione, essa è pari o dispari se si scrive con un analogo numero di scambi.
Questo funziona per ogni scambio possibile in quanto ogni composizione di scambi conserva la sua parità: $\pi \in S_n$ $\quad \pi = S_{c_1} \circ \dots \circ S_r$ $\quad \pi = S'_{c_1} \circ \dots \circ S_\ell$ $\quad r \neq \ell$ se r Pari - ℓ è Pari e viceversa
Quindi per calcolarne la parità si può partire dal Tipo:

- Definire il Tipo
  Se $\alpha \in S_n$ bisogna prima trovare il tipo per ottenere la cardinalità dei cicli disgiunti

- Definire la parità di ogni ciclo
  Per ogni cardinalità si definisce la parità: se la cardinalità è pari, allora le combinazioni sono dispari e vice-versa.

- Applicare la formula sulla parità
  Avendo calcolato tutte le parità si applica la formula: $\pi = \underbrace{(1,3,7,2,5)}_{\substack{5\\P}} \underbrace{(4,9,8)}_{\substack{3\\P}} \underbrace{(6,10,11)}_{\substack{3\\P}} = \text{Pari}$ $\quad P+P+P=P$

Funziona sia sui cicli Disgiunti che non. (nei disgiunti non è chiamato Tipo)

CARDINALITÀ DELLE PERMUTAZIONI PARI / DISPARI >

La cardinalità della parità delle permutazioni su S_n è $\frac{1}{2} n!$
Questo perché vi è un numero uguale di perm. pari e dispari.
Ciò è dimostrabile tramite una biezione su $f: \underset{\text{Pari}}{P_n} \to \underset{\text{Dispari}}{D_n}$