Settimane 4-5

Appunti di Alessandro Salerno
Lezioni 10-11 Prof. J. Seiler

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dimostrazione dell'ultimo

Possiamo riscrivere questa frazione moltiplicando per 1 scritto in un modo diverso:

$$1 = \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

Applicando le proprietà dei prodotti tra binomi viste alle superiori, otteniamo che:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

Sempre dalle superiori sappiamo che vale l'identità:

$$1 = \sin^2(x) + \cos^2 x \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi possiamo riscrivere come:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

Riscriviamo come:

$$\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

Sappiamo che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

Quindi:

$$\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Funzioni derivabili

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in un punto x dell'intervallo se esiste finito il limite:

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

E la funzione si dice derivabile su (a, b) se è derivabile in ogni punto $c \in (a, b)$.

> **Note**
>
> $$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$
>
> $$\to f'(x) \approx \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$
>
> Per $y \approx x$. Quindi:
>
> $$f(y) \approx f(x) + f'(x)(y - x)$$
>
> Per $y \approx x$.

> **Note**
>
> La derivata seconda è la derivata della derivata prima. Se la derivata n-esima è essa stessa drivabile, allora è possibile ottenere la derivata $(n+1)$-esima.

> **Important**
>
> Per $n \in$, $f \in C^n((a, b))$ se tutte le derivate $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ esistono su tutto l'intervallo (a, b) e l'ultima derivata è continua. Se $n = 0$ oppure n assente, allora f è continua sull'intervallo.

Teorema 16 (Derivabilità $\to$ continuità)

f derivabile in un punto, implica che f sia continua in quel punto.

Dimostrazione

f continua nel punto x_0 se e solo se esiste finito il limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Equivalente al limite:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

Riscriviamo il limite usando un quoziente di Newton fittizio il cui denominatore viene annullato:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

Ora il limite assomiglia al limite del rapporto incrementale usato per calcolare la derivata. Separiamo il quoziente di Newton ed il binomio usato per annullare il denominatore sfruttando le proprietà dei limiti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Teorema 17 (Lagrange)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (molto importante $[a, b]$ non (a, b)) continua e derivabile su (a, b). Allora:

$$\exists c \in (a, b) \ : \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollario 1

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile, allora f è costante se e solo se $f'(x) = 0 \, \forall x \in (a, b)$.

Dimostrazione

Prima implicazione:
Sia $f(x) = k$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = 0$$

Seconda implicazione:
Siano $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$. Se f continua su (a, b) allora f continua su $[x_1, x_2]$, ci si chiede se f derivabile su (x_1, x_2):

$$\exists c \in (x_1, x_2)$$

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \to f(x_2) = f(x_1)$$

Corollario 2

Sia f due volte derivabile su (a, b). Allora

$$f''(x) = 0 \, \forall x \in (a, b) \leftrightarrow \exists m, q \in \mathbb{R} \, : \, f(x) = mx + q \, \forall x \in (a, b)$$

Dimostrazione

Prima implicazione:
f' è costante su (a, b) se e solo se:

$$\exists m, q \in \mathbb{R} \, : \, f(x) = mx + q \, \forall x \in (a, b)$$

Quindi:

$$(f(x) - mx)' = f'(x) - m = 0 \, \forall x \in (a, b)$$

Seconda implicazione:

$$f(x) = mx + q$$

$$f'(x) = m$$

$$f''(x) = 0$$

$$\forall x \in (a, b)$$

Corollario 3

1. Sia $F \, : \, (a, b) \to \mathbb{R}$, allora se F è una primitiva di f (ossia $F' = f$) anche $F + k$ è una primitiva di f. (Dimostrazione in appunti precedenti).
2. Se F_1, F_2 sono primitive di f, allora esiste un $k \in \mathbb{R}$ tale che $F_2 = F_1 + k$ (dimostrazione in appunti precedenti)

Monotonia e convessità

Sia $f \, : \, (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile, f è monotona crescente se e solo se la prima derivata è sempre non negativa per tutti $x \in (a, b)$.

Dimostrazione per il caso crescente

La dimostrazione per il caso decrescente è semplicemente l'opposto.

Prima implicazione

$$f \, : \, (a, b) \to \mathbb{R} \; crescente \; \to f' \geq 0 \, \forall x \in (a, b)$$

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se $\Delta x > 0$:

$$x + \Delta x > x$$

Quindi:

$$f(x + \Delta x) \geq f(x)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{+}{+} \geq 0$$

Se $\Delta x < 0$:

$$x + \Delta x < x$$

Quindi:

$$f(x + \Delta x) \leq f(x)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{-}{-} \geq 0$$

Ne consegue che:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \forall x) \neq 0$$

Secondo il secondo teorema della premanenza del segno, il segno del limite è uguale al segno dell'espressione, quindi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \geq 0$$

Seconda implicazione

Sia $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$, dimostriamo che la funzione è crescente.

$$x_1, x_2 \in (a, b) \; x_1 < x_2$$

Dimostriamo che:

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Verifichiamo che f soddisfi le ipotesi del Teorema di Lagrange sull'intervallo $[x_1, x_2]$.
La funzione è derivabile, quindi è anche continua sia su (a, b) che su $[x_1, x_2]$ se:

$$\exists c \in (x_1, x_2) \; : \; f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Isoliamo il numeratore moltiplicando la derivata per il denominatore del quoziente di Newton:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Sappiamo che:

$$f'(c) \geq 0$$

$$x_2 - x_1 > 0$$

Quindi:

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

Stretta monotonia

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, f è strettamente crescente se $f'(x) > 0 \, \forall x \in (a, b)$.

$$f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \to f(b) - f(a) > 0$$

> **Important**
>
> Si tratta di un'implicazione semplice, non vale necessariamente il contrario.

Corollario

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ doppiamente derivabile.f' crescente su (a, b) se e solo se $f'' \geq 0$ e decrescente se e solo se $f'' < 0$.

Convessità

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ si dice convessa sull'intervallo (a, b) se presi comunque $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ si ha:

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \, \forall x \in [x_1, x_2]$$

Ed inversamente è concava se:

$$f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \, \forall x \in [x_1, x_2]$$

Teorema 18 (Test di convessità)

Sia f derivabile, allora f è convessa sull'intervallo (a, b) se e solo se f' è monotona crescente sull'intervallo.

Dimostrazione per la convessità

La dimostrazione per la concavità è semplicemente l'inverso di quella per la cnovessità.

Prima implicazione

Se f convessa e $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$, dobbiamo verificare che $f'(x_1) < f'(x_2)$.

$$c(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$g(x) = f(x) - c(x)$$

Se f convessa, allora

$$g(x) \leq 0 \; \forall x \in [x_1, x_2]$$

Se f e c sono derivabili (garantito), allora g è derivabile su (a, b).

$$g'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1^+} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1}$$

Quindi:

$$g'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{0^- - 0}{0^+} \leq 0$$

Analogamente per x_2:

$$g'(x_2) = \lim_{x \to x_2} \frac{g(x) - g(x_2)}{x - x_2} = \lim_{x \to x_1^-} \frac{g(x) - g(x_2)}{x - x_2}$$

Quindi:

$$g'(x_2) = \lim_{\Delta x \to x_1} \frac{0^+ - 0}{0^-} \geq 0$$

Ne consegue che:

$$g'(x_1) \leq 0 \leq g'(x_2) \to g'(x_1) \leq g'(x_2)$$

Tornando alla derivata della funzione:

$$g(x) = f(x) - c(x)$$

$$f(x) = g(x) + c(x)$$

$$f'(x_1) = g'(x_1) + c'(x_1)$$

Sappiamo che $g'(x_1) \leq g'(x_2)$ e che $c(x)$ è una retta, quindi $c'(x_1) = c'(x_2)$.
Quindi:

$$f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

Seconda implicazione

$f'' \geq 0$ sull'intervallo (a, b). Siano $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 <_2$. _

$$c(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$g(x) = f(x) - c(x)$$

Verifichiamo che $g(x) \leq 0$ per tutti $x \in [x_1, x_2]$.
Siano $s, t \in (a, b) \; : \; s < t$.

$$g'(s) = f'(s) - c'(s) \leq f'(t) - c'(t) = g'(t)$$

Sappiamo che $c(x)$ è una retta, quindi la sua derivata è costante, quindi sostituiamo:

$$g'(s) = f'(s) - c'(t)$$

Quindi g' è monotona crescente su (a, b) perché $g'(s) \leq g'(t)$.
Applichiamo il teorema di Lagrange a g su $[a, b]$.

$$\exists z \in (x_1, x_2) \ : \ g'(z) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Considerando la definizione di g come la differenza tra f e c, si può affermare che il valore di g agli estremi di $[x_1, x - 2]$ sia 0 in quanto le due funzioni hano valore uguale:

$$g(x_1) = g(x_2) = 0 \to g'(z) = 0$$

Qjuindi:

$$g' \quad (a, b) \to \begin{cases} g'(x) \leq 0 \ s \ (a, z] \\ g'(x) \geq 0 \ s \ [z, b) \end{cases}$$

Tesi di monotonia:

$$\begin{cases} g \quad (a, z] \\ g \quad [z, b) \end{cases}$$

Essendo $g(x_1) = g(x_2) = 0$, $g(x) \leq 0$ su $[x_1, x_2]$.

Corollario

Sia $f \ : \ (a, b) \to \mathbb{R}$ due volte derivabile, allora:

- f convessa su (a, b) se e solo se $f''(x) \geq 0$
- f concava su (a, b) se e solo se $f''(x) \leq 0$