METODO DEL SIMPLESSO
Monday, August 23, 2021 10:22 AM

Determinare la soluzione ottima del seguente programma lineare con il metodo del simplesso:

$$\max\ x_1 + 3x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

① Scrivere il programma in forma standard

$$\max\ x_1 + 3x$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 6 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 &= 9 \end{aligned}$$

② Forma matriciale e cercare la matrice identità (se non c'è, trovarla applicando Gauss-Jordan)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

Prima iterazione

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} \max\ & 0 + x_1 + 3x_2 \\ x_3 &= 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 6 - 2x_1 + 3x_2 \\ x_5 &= 9 + 2x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

1. Controllo se i coefficienti della f. obiettivo sono negativi → NON LO SONO, quindi non è la soluzione ottima
2. Nella funzione obiettivo, scelgo il coefficiente a "costo ridotto maggiore", ovvero x_2 (perché ha valore più grande)
3. Controllo se è soddisfatto il criterio di illimitatezza
   → NON LO È perché i coefficienti di x_2 NON SONO tutti negativi

→ NON LO È perché i coefficienti di x_2 NON SONO tutti negativi

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\
2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
-2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 9
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\text{Rapporti} \\
7/2 \\
\\
3
\end{array}
$$

Costo ridotto maggiore

$$\max \quad 0 + x_1 + 3x_2$$

$$x_3 = 7 - x_1 - 2x_2$$

$$x_4 = 6 - 2x_1 + 3x_2$$

$$x_5 = 9 + 2x_1 - 3x_2$$

4. Prendo la colonna della matrice corrispondente alla variabile con costo ridotto maggiore (x_2)

5. Calcolo il rapporto tra la colonna scelta e la colonna dei termini noti

6. Scelgo come elemento perno quello col rapporto più basso

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\
2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
-2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 9
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\text{Rapporti} \\
7/2 \\
\\
3
\end{array}
$$

Costo ridotto maggiore

$$\max \quad 0 + x_1 + 3x_2$$

$$x_3 = 7 - x_1 - 2x_2$$

$$x_4 = 6 - 2x_1 + 3x_2$$

$$x_5 = 9 + 2x_1 - 3x_2$$

→ Nuovo elemento perno

Esce x_5 ed entra x_2

7. Operazione di Pivot per spostarci dalla base $\{x_3, x_4, x_5\}$ alla base $\{x_2, x_3, x_4\}$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\
2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
-2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 9
\end{array}\right]
\longrightarrow
$$

$$E_1 \leftarrow E_1 - \frac{2}{3} E_3$$

$$E_2 \leftarrow E_2 + E_3$$

$$E_3 \leftarrow \frac{1}{3} E_3$$

$\lambda_1 = -\frac{2}{3} \quad \lambda_2 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 7/3 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 15 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \end{array}\right]$$

Calcolo di nuovo le variabili

$x_2 = 3 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5$

$x_3 = 1 - \frac{7}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_5$

$x_4 = 15 - x_5$

Ricalcolo la funzione obiettivo

Per farlo, prendo la "vecchia" funzione obiettivo

$\max \; 0 + x_1 + 3x_2$

E sostituiso x_2 (perno) con i nuovi valori calcolati al punto precedente

$x_1 + 3\left(3 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5\right)$

$x_1 + 9 + 2x_1 - x_5$

$\boxed{\max \; 9 + 3x_1 - x_5}$ → Nuova funzione obiettivo

Seconda iterazione

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 7/3 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 15 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \text{Rapporti} \\ 3/7 \\ \infty \, // \\ // \end{array}$$

Costo ridotto maggiore

$\max \; 9 + 3x_1 - x_5$

$x_2 = 3 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5$

$x_3 = 1 - \frac{7}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_5$

$x_4 = 15 - x_5$

Esce x_3, entra x_1

I coefficienti della funzione obiettivo non sono entrambi negativi, serve quindi una seconda iterazione.

I coefficienti della funzione obiettivo non sono entrambi negativi, serve quindi una seconda iterazione.

Scelgo quindi $7/3$ come nuovo elemento pesno ed effettuo un'operazione di pivot con base $\{x_1, x_2, x_4\}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{7/3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 15 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \end{array}\right]$$

$E_2 \leftarrow E_2 + 0\,E_1$

$E_3 \leftarrow E_3 + \frac{2}{7} E_1$

$E_2 \leftarrow \frac{3}{7} E_2$

$\lambda_2 = 0 \qquad \lambda_3 = \frac{2}{7}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & 0 & -\frac{6}{21} & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} & \frac{23}{7} \end{array}\right]$$

Otteniamo i valori delle variabili

$$x_1 = -\frac{3}{7} x_3 + \frac{6}{21} x_5 + \frac{3}{7}$$

$$x_2 = -\frac{2}{7} x_3 - \frac{1}{7} x_5 + \frac{23}{7}$$

$$x_4 = -x_5 + 15$$

Calcoliamo la f. obiettivo

$$\max \; 9 + 3x_1 - x_5$$

$$9 + 3\left(-\frac{3}{7} x_3 + \frac{6}{21} x_5 + \frac{3}{7}\right) - x_5$$

$$9 - \frac{9}{7} x_3 + \frac{6}{7} x_5 + \frac{9}{7} - x_5$$

$$9 - \frac{9}{7} x_3 - \frac{1}{7} x_5 + \frac{9}{7}$$

$$\boxed{\max \; -\frac{9}{7} x_3 - \frac{1}{7} x_5 + \frac{72}{7}}$$

È una soluzione ottima

Il criterio di ottimalità è soddisfatto