Settimane 3-4

Appunti di Alessandro Salerno
Lezioni 7-9 Prof. J. Seiler (Lezioni 8, 9 non seguite in presenza)

Proprietà algebriche dei limiti finiti al finito

Siano:

$$c \in \mathbb{R}$$
$$r > 0$$
$$f : I_r(c) - \{c\} \to \mathbb{R}$$
$$g : I_r(c) - \{c\} \to \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to c} g(x) = m \in \mathbb{R}$$

Allora valgono le identità:

1. Il limite di una somma è la somma dei limiti

$$\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = l + m$$

2. Il limite di un prodotto è il prodotto dei liimti

$$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$$

3. Il limite di un rapporto è il rapporto dei limiti

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m} \quad m \neq 0$$

> **Note**
>
> $l, m \in \mathbb{R}$ implica che i due limiti siano **finiti**.

Dimostrazione della proprietà 1

$$\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = l + m$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ : \ x \in I_\delta(c) - \{c\} \to f(x) + g(x) \in I_\epsilon(l + m)$$

Sia ϵ positivo arbitrario.

$$|f(x) + g(x) - (l + m)| = |f(x) - l + g(x) - m|$$

Per la disugualgianza triangolare:

$$|f(x) + g(x) - (l + m)| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m|$$

Allora:

$$\exists \delta_f > 0$$

$$\exists \delta_g > 0$$

$$0 < |x - c| < \delta_f \to |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$0 < |x - c| < \delta_g \to |g(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Definiamo:

$$\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$$

Quindi vale:

$$0 < |x - c| < \delta$$

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$$

Quindi:

$$|f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Limiti infiniti al finito

Sia $f : I_r(c) - \{c\} \to \mathbb{R}$, si dice che f ammette limite $\pm\infty$ per $x \to c$ e si scrive:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

Se:

$$\forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; x \in I_\delta(c) - \{c\} \to f(x) \in I_M(\pm\infty)$$

Note

L'intorno di un infinito è il semiasse che va nella direzione di quell'infinito $(-\infty, +\infty)$.

Important

Avendo un limite infinito per un valore finito delle ascisse, si crea un *asintoto verticale* nell'intorno di c.

Intorni unilaterlai

È possibile descrivere l'intorno di un valore del dominio c anche da un solo lato:

- $I_r^+(c)$ intorno di raggio r attorno a c a destra
- $I_r^-(c)$ intorno di raggio r attorno a c a sinistra

Limiti unilaterali

Sia $f : I_r(c) - \{c\} \to \mathbb{R}$ una funzione, si dice che f ammette limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ per $x \to c$ da sinistra e si scrive:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Se:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \mid x \in I_\delta^-(c) - \{c\} \to f(x) \in I_\epsilon(l)$$

E si dice che f ammette limite $m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ per $x \to c$ da destra e si scrive:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Se:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \mid x \in I_\delta^+(c) - \{c\} \to f(x) \in I_\epsilon(l)$$

> **Important**
>
> I due limiti laterali di uno stesso c possono essere diversi. Inoltre, uno dei due o entrambi potrebbe non esistere.

Teorema 7 (Esistenza di un limite)

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Esiste se e solo se entrambi i limiti laterali esistono ed hanno lo stesso valore.

Corollario

Il limite non esiste se uno dei due limiti laterali non esiste o se:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$$

Limiti finiti all'infinito

Sia $f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione, si dice che f ammette limite $l \in \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$ e si scrive:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Se:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists M > 0 \, : \, x \in I_M(+\infty) \to f(x) \in I_\epsilon(l)$$

Ed inversamente:
Sia $f \, : \, (-\infty, r) \to \mathbb{R}$ una funzione, si dice che f ammette limite $l \in \mathbb{R}$ per $x \to -\infty$ e si scrive:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Se:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists M > 0 \, : \, x \in I_M(-\infty) \to f(x) \in I_\epsilon(l)$$

Limiti per eccesso e per difetto

Come discusso in precedenza, non è garantito che il limite di una funzione in un dato punto sia equivalente al valore della funzione in quel punto. In alcuni casi, non è possibile valutare la funzione nel punto (e.g., non è possibile valutare una funzione per $x = \pm\infty$, non è possibile valutare la funzione in un punto in cui la funzione non esiste). In questi casi, il grafico della funzione potrebbe trovarsi *sopra* o *sotto* il valore del limite. Si dice *limite per eccesso* nel caso in cui il grafico si trovi sopra il limite e si dice *limite per difetto* altrimenti.

Limiti infiniti all'infinito

Sia $f \, : \, (a, +\infty) \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ una funzione, si diche che f ammette limite $\pm\infty$ per $x \to +\infty$ e si scrive:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$$

Se (Per $+\infty$):

$$\forall M > 0 \, \exists N > 0 \, : \, x > N \to f(x) > M$$

Oppure (Per $-\infty$):

$$\forall M > 0 \, \exists N > 0 \, : \, x > N \to f(x) < -M$$

Ed inversamente:
Sia $f \, : \, (-\infty, a) \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ una funzione, si diche che f ammette limite $\pm\infty$ per $x \to -\infty$ e si scrive:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$$

Se (Per $+\infty$):

$$\forall M > 0 \, \exists N > 0 \, : \, x < -N \to f(x) > M$$

Oppure (Per $-\infty$):

$$\forall M > 0\ \exists N > 0\ :\ x < -N \rightarrow f(x) < -M$$

Principio di definizione di limite

Dati $c, l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Significa:

- f è definita in un intorno di c ma non necessariamente in c stesso
- Per qualsiasi intorno I di l, esiste un intorno di c tale che:

$$x \in \ - \{c\} \rightarrow f(x) \in I$$

> **Note**
>
> $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ implica che il limite esiste. Assumerlo equivale a premettere *se il limite esiste*.

Algebra parziale dei limiti infiniti

Sia $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e siano f, g, h, k funzioni tali per cui:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to c} k(x) = 0^+$$

Allora:

$$\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to c} [g(x) + h(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to c} g(x) \cdot h(x) = +\infty$$

$$l \neq 0 \rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{k(x)} = \begin{cases} +\infty\ :\ l > 0 \\ -\infty\ :\ l < 0 \end{cases}$$

Forme di indeterminazione

Esistono alcuni limiti per cui non è possibile stabilire una regola. Per esempio infinito su infinito, 0 per infinito, infinito meno infinito.

Teorema 8 (Permanenza del segno 1)

Siano $c, l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e sia $f : I_r(c) - \{c\} \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Allora:

1. Se $l > 0$ oppure $l = +\infty$, allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$
2. Se $l < 0$ oppure $l = -\infty$, allora $f(x) < 0$ definitivamente per $x \to c$

Dimostrazione

Inserire dimostrazione qui.

Teorema 9 (Permanenza del segno 2)

Siano $c, l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e sia $f : I_r(c) - \{c\} \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Allora:

1. Se $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \to c$, allora $l \geq 0$
2. Se $f(x) \leq 0$ definitivamente per $x \to c$, allora $l \leq 0$

Dimostrazione

Inserire dimostrazione qui.

Teorema 10 (Teorema di confronto 1)

Sia $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $f, g, h : I_r(c) - \{c\} \to \mathbb{R}$ tali che:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Definitivamente per $x \to c$. Se vale:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$\lim_{x \to c} g(x) = l$$

Example

Questo teorema torna molto utile nel calcolo di alcuni limiti, per esempio quelli che contengono funzioni trigonometriche:

$$g(x) = \frac{1 + \cos x}{x}$$

Si vuole ottenere:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x)$$

Sappiamo che $-1 \leq \cos x \leq 1$ e quindi possiamo dire che per $x > 0$:

$$\frac{1-1}{x} \leq \frac{1 + \cos x}{x} \leq \frac{1+1}{x}$$
$$\frac{0}{x} \leq \frac{1 + \cos x}{x} \leq \frac{2}{x}$$

Che per $x \to +\infty$ equivale a dire:

$$0 \leq \frac{1 + \cos x}{x} \leq 0$$

Quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{0}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Dimostrazione

Inserire dimostrazione qui.

Teorema 11 (Teorema del confronto 2)

Sia $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $f, g : I_r(c) - \{c\} \to \mathbb{R}$ tali che:

$$f(x) \leq g(x)$$

Definitivamente per $x \to c$. Allora:

1. Se $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \to c} g(x) = +\infty$
2. Se $\lim_{x \to c} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$

Dimostrazione

Inserire dimostrazione qui.

Funzioni monotone

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ funzione con I intorno. f si dice:

- **Monotona crescente** su I se:

$$x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)$$

- **Monotona decrescente** su I se:

$$x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2)$$

Funzioni limitate

Sia $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $f, g : I_r(c) - \{c\} \to \mathbb{R}$ tali che:

- Funzioni limitate inferiormente:

$$\exists b : x \in I_r(c) \to f(x) > b$$

- Funzioni limitate superiormente

$$\exists b : x \in I_r(c) \to f(x) < b$$

- Funzioni limitate (sia inferiormente che superiormente)

$$\exists b, B : x \in I \to b \leq f(x) \leq B$$

Teorema 12 (Funzioni monotone e limiti)

Se $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ è monotona, allora esiste

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Finito o infinito. In particolare:

1. f monotona crescente e limitata superiormente da b, allora $l \in \mathbb{R}$ e $l \leq b$
2. f monotona crescente ma non limitata superiormente, allora $l = +\infty$
3. f monotona decrescente e limitata inferiormente da b, allora $l \in \mathbb{R}$ e $l \geq b$
4. f monotona decrescente ma non limitata inferiormente, allora $l = -\infty$

Funzioni continue

Sia $f : I_r(c) \to \mathbb{R}$ una funzione, f si dice continua in c se:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

In particolare:

1. La funzione esiste in c
2. Il limite esiste e coincide con $f(c)$

> **Important**
>
> Sia $= (a, b)$ intervallo e $g : \to \mathbb{R}$, g si dice continua su se g è continua in ogni punto $c \in$.
>
> Se $= [a, b)$, si dice che g è continua in a se:

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = g(a)$$

Se $= (a, b]$, si dice che g è continua in b se:

$$\lim_{x \to b^-} g(x) = g(b)$$

Salti

Una funzione ha un salto in un punto c se:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l^-$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l^+$$

Esistono entrambi ma non concidono.

Proprietà legate alla continuità

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ continua su I, allora:

- $h(x) = f(x) \pm g(x)$ è continua su I
- $k(x) = f(x) \cdot g(x)$ è continua su I
- $o(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ è continua su I se g non ha zeri su I

Teorema 13

Se f è continua in c e g è continua in $f(c)$, allora $g \ \ f$ è continua in c.

Teorema 14 (Teorema di Waierstrass)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$, allora esistono $x_m, x_M \in [a, b]$ tali che:

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \ \ \forall x \in [a, b]$$

Important

L'ipotesi di continuità e la chiusura dell'intervallo $[a, b]$ sono indispensabili.

Teorema 15 (Teorema dei valori medi)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$, sia $y \in \mathbb{R}$ tale che:

$$f(x_m) \leq y \leq f(x_M)$$

Allora esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = y$.