Tutorato informatica 22 / NOV / 2023

Esercizio 1

Trovare una base per lo spazio di matrici $M(2,\mathbb{C})$ visto
1. Come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$
2. Come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$

Svolgimento

Considero 1, quindi il campo per le combinazioni è $\mathbb{C}$.

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

a) Devono essere linearmente indipendenti:
siano $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tali che

$$a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Sono linearmente indipendenti se e solo se
$a=b=c=d=0$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{matrix}a=0\\b=0\\c=0\\d=0\end{matrix}} \Rightarrow \checkmark$$

b) Sia $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C})$ voglio che esistano
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ tali che

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = b \\ \lambda_3 = c \\ \lambda_4 = d \end{array} \Rightarrow \checkmark$$

② Considero

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}$$

Verifico che sono linearmente indipendenti

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$\lambda_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} + \lambda_7 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_8 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_8 \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 i & \lambda_3 + \lambda_4 i \\ \lambda_5 + \lambda_6 i & \lambda_7 + \lambda_8 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 i = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 i = 0 \\ \lambda_5 + \lambda_6 i = 0 \\ \lambda_7 + \lambda_8 i = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_8 = 0$$

Verifico che generano gli elementi: uguale a prima.

$\square$

Esercizio 2

Consideriamo $\mathbb{R}_2[x]$, polinomi a coefficienti su $\mathbb{R}$ di grado ≤ 2 su campo $\mathbb{R}$.
Provare che

$$\{ 1+x,\ x^2,\ 3+x^2,\ 5x,\ 7x+x^2 \}$$

non è una base di $\mathbb{R}_2[x]$ e trovare un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}_2[x]$.

Svolgimento

Ci sono due modi: o si prova che sono linearmente dipendenti oppure che non generano tutto $\mathbb{R}_2[x]$.

La seconda implicherebbe che non si può trovare un sottoinsieme che è base, quindi vediamo che sono linearmente indipendenti.
Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_1(1+x) + \lambda_2(x^2) + \lambda_3(3+x^2) + \lambda_4(5x) + \lambda_5(7x+x^2) = 0$$

se trovo che $\lambda_1 = \dots = \lambda_5 = 0$ non è l'unica soluzione allora sono linearmente dipendenti.

$$\underline{\lambda_1} + \underline{\underline{\lambda_1 x}} + \lambda_2 x^2 + \underline{3\lambda_3} + \lambda_3 x^2 + \underline{\underline{\lambda_4 5x}} + 7\lambda_5 x + \lambda_5 x^2 = 0$$

Tutorato informatica 22 / NOV / 2023

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_4 + 7\lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$rk(A) = rk(A|B) = 3 \Rightarrow$ il sistema ha soluzioni

le variabili sono 5 quindi le soluzioni sono $S \subseteq \mathbb{R}^5$ sottospazio di dimensione $5-3=2$

Scelgo di calcolare le soluzioni rispetto a

λ_4 e λ_5

$$\begin{cases} \lambda_3 = \dfrac{5\lambda_4 + 7\lambda_5}{3} \\ \lambda_1 = -5\lambda_4 - 7\lambda_5 \\ \lambda_2 = -\dfrac{5\lambda_4 + 7\lambda_5}{3} - \lambda_5 = -\dfrac{5\lambda_4 - 10\lambda_5}{3} \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono del tipo

$$\left(-5\lambda_4 - 7\lambda_5, -\frac{5\lambda_4 - 10\lambda_5}{3}, \frac{5\lambda_4 + 7\lambda_5}{3}, \lambda_4, \lambda_5\right)$$

Quindi se $\lambda_4 = \lambda_5 = 1$ abbiamo

$\lambda_1 = -12$
$\lambda_2 = -5$
$\lambda_3 = 4$

Quindi

$$\lambda_1(1+x)+\lambda_2 x^2+\lambda_3(3+x^2)+\lambda_4 5x+\lambda_5(7x+x^2)=$$

$$=\cancel{-12}-\cancel{12x}-\cancel{5x^2}\cancel{+12}+\cancel{4x^2}+\cancel{5x}+\cancel{7x}\cancel{+x^2}=$$

$$=0 \quad \text{cioè}$$

$(-12,-5,4,1,1)$ da luogo ad una combinazione lineare dei polinomi dell'insieme che da zero $\Rightarrow$ non sono linearmente indipendenti quindi non sono una base.

OSSERVAZIONE: Poiché $\mathbb{R}_2[x]$ è di dimensione 3 dovevano per forza essere dipendenti

Estraggo una base se esiste

La matrice di riduzione finale per risolvere il sistema era

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

seleziono solo i primi 3 elementi dell'insieme

$$\{1+x,\ x^2,\ 3+x^2\}$$

So già che sono linearmente indipendenti.
Verifico che generano tutto $\mathbb{R}_2[x]$:

Sia $a+bx+cx^2$ un polinomio in $\mathbb{R}_2[x]$ allora devo trovare $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_1(1+x)+\lambda_2x^2+\lambda_3(3+x^2)=a+bx+cx^2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1+3\lambda_3)+\lambda_1 x+(\lambda_2+\lambda_3)x^2=a+bx+cx^2$$

Per l'identità dei polinomi su $\mathbb{R}$ questo è vero se e solo se

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 = a \\ \lambda_1 = b \\ \lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 3 & a \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 3 & a-b \end{array}\right)$$

$rk(A) = rk(A|B) = 3 \Rightarrow$ esiste una soluzione
$S \subseteq \mathbb{R}^3$ sottospazio di dimensione $3-3=0$
$\Rightarrow$ cioè è <u>unica</u>

$$\begin{cases} \lambda_1 = b \\ \lambda_3 = \dfrac{a-b}{3} \\ \lambda_2 = -\dfrac{a-b}{3} \end{cases}$$

quindi

$$b(1+x) - \left(\frac{a-b}{3}\right)x^2 + \left(\frac{a-b}{3}\right)(3+x^2) = a + bx + c$$

Allora quella è una base.

Osservazione: Risposta veloce al secondo punto

Poiché $\mathbb{R}_2[x]$ è di dimensione 3, una volta che abbiamo trovato tre vettori linearmente indipendenti allora questi sono una base.

Esercizio 3

Siano date le matrici a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

dire per quali matrici è possibile calcolare la traccia ed in quel caso calcolarla.

Svolgimento

La traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale principale.

Quindi non esiste la traccia di A, mentre esiste quella di B.
La calcolo

$$tr(B) = 7 + 1 + 2 = 10$$

$\square$

Esercizio 4

Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$

② $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & i & 0 \\ i & 1-i & 7-i \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{C})$

Svolgimento

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2) - (5 \cdot 3) = 2 - 15 = -13$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & i & 0 \\ i & 1-i & 7-i \end{vmatrix} = 1 \cdot i \cdot (7-i) = 7i - i^2 = 1 + 7i$$

Tutorato informatica 22 / NOV / 2023

Esercizio 5

Calcolare il determinante della seguente matrice in $M(4,\mathbb{R})$ usando la regola di Laplace:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Svolgimento

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Applichiamo Laplace sulla riga o colonna con più zeri (se presente)

Svolgo Laplace rispetto alla prima colonna

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{(-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}} +$$

$$+ (-1)^{2+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+1} \cdot 5 \begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$\cancel{+ (-1)^{4+1} \cdot 0 \begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}}$$

Tutorato informatica 22 / NOV / 2023

Calcolo i determinanti della formula con Sarrus

$$\left|\begin{matrix} 5 & 7 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 5 & 7 \\ 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix} = (5\cdot 1\cdot 2) + (7\cdot 4\cdot 1) + (4\cdot 5\cdot 3) +$$

$$- (4\cdot 1\cdot 1) - (5\cdot 4\cdot 3) - (7\cdot 5\cdot 2) =$$

$$= 10 + 28 \cancel{+60} - 4 \cancel{-60} - 70 =$$

$$= -36$$

$$\left|\begin{matrix} 5 & 7 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 5 & 7 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{matrix} = \cancel{(5\cdot 0\cdot 2)} + (7\cdot 5\cdot 1) + (4\cdot(-2)\cdot 3) +$$

$$- \cancel{(4\cdot 0\cdot 1)} - (5\cdot 5\cdot 3) - (7\cdot(-2)\cdot 2) =$$

$$= 35 - 24 - 75 + 28 =$$

$$= -36$$

Quindi

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-36) + 5\cdot(-36) = 36 - 180 = -144$$

Esercizio 6

Date le seguenti matrici in $M(2, \mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

dire se ammettono inversa e nel caso calcolarla.

Svolgimento

$|A| = 0 \Rightarrow$ non ammette inversa

↳ la seconda riga è 2 per la prima riga

$|B| = (1 \cdot 3) - (-1 \cdot 2) = 3 + 2 = 5 \Rightarrow$ esiste inversa

$B^{-1} = \frac{1}{|B|} B^*$ dove B^* è la matrice trasposta dei cofattori

Calcolo B^*:

$$B^* = {}^t\begin{pmatrix} cof_{11} & cof_{12} \\ cof_{21} & cof_{22} \end{pmatrix}$$ dove

$cof_{ij} = (-1)^{i+j} C_{ij}$, dove C_{ij} è il determinante della matrice B cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna

$$C_{11} = |3| = 3$$
$$C_{12} = |-1| = -1$$
$$C_{21} = |2| = 2$$
$$C_{22} = |1| = 1$$

$$\Rightarrow B^* = \begin{pmatrix} C_{11} & -C_{21} \\ -C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tutorato informatica 22 / NOV / 2023

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

SECONDO METODO PER TROVARE INVERSA:

RIDUZIONE CON GAUSS

I Identità dimensione 2

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \overbrace{1 \quad 2}^{B} & & \overbrace{1 \quad 0}^{I} & \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_1 + r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{5} r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\downarrow r_1 \to r_1 - 2r_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

applico la stessa operazione a B e ad I. Lo scopo è far diventare B come I e così I diventa B^{-1}.

Quindi $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Esercizio 7

Verificare quali tra le seguenti relazioni sono applicazioni lineari e in quel caso calcolare Kernel ed immagine e dire sulla base del ker se f è iniettiva e/o suriettiva.

① $f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$a+bx+cx^2 \longmapsto a+b+c+1$

② $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(a,b,c) \longmapsto (ab, bc)$

③ Sia $A \in \mathbb{R}^{3,2}$ tale che $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

e

$L_A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$x \longmapsto A \cdot x$

Svolgimento

①

f non è un'applicazione lineare perché

$f(0) = 1$ e 1 non è l'elemento neutro della somma in $\mathbb{R}$.

In particolare non vale la proprietà

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{dove } \lambda \in \mathbb{R}$$

perché se $\lambda = 0$ allora

$$\lambda f(x) = 0 \quad \text{ma} \quad f(\lambda x) = 1$$

(2)

g non è un'applicazione lineare
perché se ho
(a,b,c) ed $(A,B,C) \in \mathbb{R}^3$
allora

$g((a,b,c)+(A,B,C)) =$

$= g((a+A, b+B, c+C)) =$

$= ((a+A)(b+B), (b+B)(c+C))$

mentre
$g((a,b,c)) + g((A,B,C)) =$

$= (ab+AB, bc+BC)$ quindi posso trovare

un controesempio alla proprietà $g(u+v) = g(u)+g(v)$:
considero $(1,1,1)$ e $(1,2,1)$

$g((1,1,1)+(1,2,1)) = g((2,3,2)) = (6,6)$

$g((1,1,1))+g((1,2,1)) = (1,1)+(2,2) = (3,3)$

③ L_A è lineare (FATTO A LEZIONE)

Comunque se lo dimentichiamo :

$$L_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = L_A(x) + L_A(y)$$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad L_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda L_A(x)$

Troviamo il kernel, ovvero

$$\ker(L_A) = \{ y \in \mathbb{R}^3 \mid L_A(y) = \overline{0} \in \mathbb{R}^2 \}$$

Quindi $y = (y_1, y_2, y_3)$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 3y_2 + 2y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 0 \\ 3y_2 + 2y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$rk(A) = rk(A|B) = 2$

$\Rightarrow$ il sistema ha soluzioni $S \subset \mathbb{R}^2$ sottospazio di dimensioni $3-2=1$

$\Rightarrow$ infinite soluzioni

Trovo le soluzioni in funzione di $y_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y_2 = -\frac{2y_3}{3} \\ y_1 = -\frac{4y_3}{3} \end{cases}$$

$$\ker(L_A) = \left\{ \left(-\frac{4y_3}{3}, -\frac{2y_3}{3}, y_3 \right) \mid y_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

La dimensione del $\ker(L_A)$ è 1 quindi la dimensione di $\mathrm{Im}(L_A) = \underset{\dim(\mathbb{R}^3)}{3} - \underset{\dim(\ker(L_A))}{1} = 2$

Quindi

f non è iniettiva

f è suriettiva.