
O
G
D
O
O
O
D
O

Un modello di pianificazione della produzione di un'azienda elementare

ESERCIZIO 1. Scrivere il modello in programmazione lineare del seguente problema. Un'azienda alimentare deve pianificare la produzione di un prodotto per i prossimi 4 mesi. Non ci sono giacenze in magazzino all'inizio del periodo e non ce ne devono essere alla fine dei 4 mesi. La domanda mensile prevista è di 120 ton, 160 ton, 300 ton e 200 ton rispettivamente (ipotesi: la produzione viene stoccata e rilasciata interamente a fine mese). La capacità produttiva mensile è 140 ton, 150 ton, 140 ton e 160 ton rispettivamente ad un costo di 10 euro/ton. In caso di necessità è possibile produrre in straordinario aumentando la capacità mensile di (al più) 50 ton, 75 ton, 70 ton e 80 ton rispettivamente. La produzione straordinaria ha un costo addizionale di 6 euro/ton. Inoltre, per garantire una produzione omogenea si vuole che la produzione ordinaria di ciascun mese sia almeno pari al 10% della produzione totale dei primi tre. Le eventuali giacenze a fine mese costano 5 euro/ton. L'obiettivo è quello di pianificare la produzione di costo minimo.

INDICI

$i \in \{1,2,3,4\}$ mese di pianificazione

PARAMETRI (prestabiliti dal problema)

d_i domanda prevista (ton) per i-esimo mese

c_i capacità produttiva (ton) per i-esimo mese

p costo di produzione (€) per tonnellata

q costo mensile per lo straordinario

m minima produzione (%) di ogni mese rispetto ai primi 3

g costo giacenza (€) per tonnellata

VARIABILI DECISIONALI (al fine di prendere una decisione)

$\mathbb{Z}^+ \to$ interi positivi

$\mathbb{Z} \to$ interi

$\mathbb{R} \to$ reali

$\mathbb{R}^+ \to$ reali positivi $\Leftarrow \mathbb{Z}^+$

sottoinsiemi

x_i quantità (ton) prodotta nel mese i-esimo con produzione ordinaria

s_i quantità (ton) prodotta nel mese i-esimo con produzione straordinaria

y_i quantità (ton) in giacenza nel mese i-esimo $i = 1,2,3$

FUNZIONE OBBIETTIVO

pianificare la produzione di costo minimo

→ costo totale produzione ordinaria

$$p(x_1+x_2+x_3+x_4) = p\sum_{i=1}^{4} x_i$$

→ costo produzione straordinaria

$$(p+q)(s_1+s_2+s_3+s_4) = (p+q)\sum_{i=1}^{4} s_i$$

→ costo giacenze

$$g(y_1+y_2+y_3) = g\sum_{i=1}^{3} y_i$$

$$\min\ 10\sum_{i=1}^{4} x_i + 16\sum_{i=1}^{4} s_i + 5\sum_{i=1}^{3} y_i$$

ATTENZIONE!

- se non contiene variabili decisionali, non è una valida funzione obiettivo (non possiamo moltiplicarle fra loro)
- le uniche operazioni ammesse per le variabili sono: somma e sottrazione e prodotto* per dei parametri (linearità)
- le stesse considerazioni si estendono i vincoli.

VINCOLI

$$x_1 + s_1 = 120 + y_1$$
$$x_2 + s_2 + y_1 = 160 + y_2$$
$$x_3 + s_3 + y_2 = 300 + y_3$$
$$x_4 + s_4 + y_3 = 200$$

$$x_1 \le 0{,}1\left[(x_1+s_1) + (x_2+s_2) + (x_3+s_3)\right]$$
$$x_2 \le 0{,}1\left[(x_1+s_1) + (x_2+s_2) + (x_3+s_3)\right]$$
$$x_3 \le 0{,}1\left[(x_1+s_1) + (x_2+s_2) + (x_3+s_3)\right]$$
$$x_4 \le 0{,}1\left[(x_1+s_1) + (x_2+s_2) + (x_3+s_3)\right]$$

$$x_i \geq 0{,}1 \sum_{J=1}^{3} (x_J + s_J) \qquad J = 1, \dots, 4$$

$$x_1 \le 140, \quad x_2 \le 150, \quad x_3 \le 140, \quad x_4 \le 160$$

$$s_1 \le 50, \quad s_2 \le 75, \quad s_3 \le 70, \quad s_4 \le 80$$

$$\min\ 10 \sum_{i=1}^{4} x_i + 16 \sum_{i=1}^{4} s_i + 5 \sum_{i=1}^{3} y_i$$

soggetto a

$$x_1 + s_1 = 120 + y_1$$
$$x_2 + s_2 + y_1 = 160 + y_2$$
$$x_3 + s_3 + y_2 = 300 + y_3$$
$$x_4 + s_4 + y_3 = 200$$

$$x_i \geq 0{,}1 \sum_{J=1}^{3} (x_J + s_J) \qquad i = 1, \dots, 4$$

$$x_1 \le 140, \quad x_2 \le 150, \quad x_3 \le 140, \quad x_4 \le 160$$

$$s_1 \le 50, \quad s_2 \le 75, \quad s_3 \le 70, \quad s_4 \le 80$$

$$x_i, s_i, y_1 \geq 0 \qquad i = 1, \dots, 4$$

Un modello per l'ottimizzazione del saldo esportazioni-importazioni

ESERCIZIO 2. Lo stato di Islandia ha quattro industrie esportatrici: acciaio, motori, elettronica e plastica. Il ministro dell'economia di questo stato vuole massimizzare il saldo esportazioni-importazioni. La moneta di Islandia è il klutz. I prezzi in klutz sul mercato mondiale per unità di acciaio, motori, elettronica e plastica sono rispettivamente 500, 1500, 300 e 1200. La produzione di una unità di acciaio richiede 0.02 unità di motori, 0.01 unità di plastica, 250 klutz di materie prime acquistate sul mercato mondiale e mezzo anno-uomo di manodopera. La produzione di una unità di motori richiede 0.8 unità di acciaio, 0.15 unità di elettronica, 0.11 unità di plastica, 300 klutz di materie prime acquistate sul mercato mondiale e un anno-uomo di manodopera. La produzione di prodotti elettronici richiede 0.01 unità di acciaio, 0.01 unità di motori, 0.05 unità di plastica, 50 klutz di materie prime acquistate sul mercato mondiale e mezzo anno-uomo di manodopera. La produzione di una unità di plastica richiede 0.03 unità di motori, 0.2 unità di acciaio, 0.05 unità di elettronica, 300 klutz di materie prime acquistate sul mercato mondiale e due anni-uomo di manodopera. La produzione di motori è limitata a 650000 unità, quella di plastica a 60000 unità. La manodopera totale disponibile in Islandia è di 830000 uomini per anno. Acciaio, motori, elettronica e plastica non possono essere importati, ma devono essere prodotti all'interno.

$i \backslash j$	A	M	E	P	anni uomo	mat prime
A		0,02		0,01	0,5	250
M	0,8		0,15	0,11	1	300
E	0,01	0,01		0,05	0,5	50
P	0,2	0,03	0,05		2	300

INDICI

$i, j \in \{A, M, E, P\}$ prodotti

PARAMETRI

p_i = prezzi mercato del prodotto

q_{ij} = quantità prodotto j per produrre prodotto i

c_i = costo per produrre prodotto i

u_i = quantità anni uomo per produrre prodotto i

l_i = limite produzione del prodotto $i = M, P$

U = manodopera (anni uomo) totale a disposizione

VARIABILI DECISIONALI

$x_i \in \mathbb{Z}^+$ unità prodotto per l'esportazione $i \in \{A, M, E, P\}$

$y_i \in \mathbb{Z}^+$ unità prodotto per uso interno $i \in \{A, M, E, P\}$

→ massimizzare saldo import export

- PREZZO TOTALE PRODOTTI PER L'ESPORTAZIONE

$$p_A x_A + p_M x_M + p_E x_E + p_P x_P \rightarrow \sum_{i=A,M,E,P} p_i x_i$$

- SOTTRARRE IL PREZZO MATERIE PRIME ACQUISTATE DAL MERCATO PER TUTTI I PRODOTTI

$$c_A(x_A+y_A) + c_M(x_M+y_M) + c_E(x_E+y_E) + c_P(x_P+y_P) \rightarrow \sum_{i=A,M,E,P} c_i(x_i+y_i)$$

$$\max \sum_{i=A,M,E,P} p_i x_i - \sum_{i=A,M,E,P} c_i(x_i+y_i)$$

forma estesa

$$\max \quad 500x_A + 1500x_M + 300x_E + 1200x_P - [250(x_A+y_A) + 300(x_M+y_M) + 50(x_E+y_E) + 300(x_P+y_P)]$$

VINCOLI

- La produzione interna deve supportare produzione per uso interno e esportazione

$$y_A \geq 0{,}8(x_M+y_M)+0{,}01(x_E+y_E)+0{,}2(x_P+y_P)$$

$$y_M \geq 0{,}02(x_A+y_A)+0{,}01(x_E+y_E)+0{,}03(x_P+y_P)$$

$$y_E \geq 0{,}15(x_M+y_M)+0{,}05(x_P+y_P)$$

$$y_P \geq 0{,}01(x_A+y_A)+0{,}11(x_M+y_M)+0{,}05(x_E+y_E)$$

$$\Rightarrow y_J \geq \sum_{i=A,M,E,P} q_{iJ}(x_i+y_i) \quad J=A,M,E,P$$

- La produzione motori e plastica limitata

$$x_M+y_M \leq 650000$$

$$x_P+y_P \leq 600000$$

- non deve eccedere gli anni uomo disponibili

$$0{,}5(x_A+y_A)+(x_M+y_M)+0{,}5(x_S+y_E)+2(x_P+y_P) \leq 830000$$

- vincoli di dominio

$$x_A, x_M, x_E, x_P \geq 0 \quad y_A, y_M, y_E, y_P \geq 0$$

$$\max \quad 500x_A + 1500x_B + 1200x_P - [250(x_A + y_A) + 300(x_M + y_M) + 50(x_E + y_E) + 300(x_P + y_P)]$$

soggetto a

$$y_A \geq 0{,}8(x_M + y_M) + 0{,}01(x_E + y_E) + 0{,}2(x_P + y_P)$$

$$y_M \geq 0{,}02(x_A + y_A) + 0{,}01(x_E + y_E) + 0{,}03(x_P + y_P)$$

$$y_E \geq 0{,}15(x_M + y_M) + 0{,}05(x_P + y_P)$$

$$y_P \geq 0{,}01(x_A + y_A) + 0{,}11(x_M + y_M) + 0{,}05(x_E + y_E)$$

$$x_M + y_M \leq 650000$$

$$x_P + y_P \leq 600000$$

$$0{,}5(x_A + y_A) + (x_M + y_M) + 0{,}5(x_E + y_E) + 2(x_P + y_P) \leq 830000$$

$$x_A, x_M, x_E, x_P \geq 0 \quad y_A, y_M, y_E, y_P \geq 0$$

Un modello per l'ottimizzazione del profitto di un'azienda agricola

ESERCIZIO 3. Un'azienda agricola produce mais, soia e grano in tre tenute A, B, C. La tenuta A dispone di 600 ettari di terreno e di una riserva di 8×10^6 m^3 di acqua. La tenuta B ha 700 ettari di terreno e 5×10^6 m^3 di acqua. La terza dispone di 450 ettari e di 6×10^6 m^3. Le produzioni di mais, soia e grano garantiscono rispettivamente profitti di 5, 7 e 6 Keuro/ettaro. I consumi di acqua sono di 20000 m^3/ha per il mais, 10000 m^3/ha per la soia e 10000 m^3/ha per il grano. Le direttive della comunità europea richiedono che:

- almeno una tenuta lasci 200 ettari di terreno incolto, e
- l'estensione complessiva del terreno coltivato a soia dall'azienda non superi il 40% del totale del suolo coltivato.

Formulare il programma lineare per la massimizzazione del profitto.

INDICI

$i \in \{M, S, G\}$ colture
$j \in \{A, B, C\}$ tenute

PARAMETRI

p_i profitto (K€/ha) della coltura i
a_i consumo di acqua (m3/ha) della coltura i
e_j ettari terreno tenuta j
w_j m^3 acqua a disposizione della tenuta j
t limite minimo di terreno incolto per una delle tenute
s % max soia

VARIABILI DECISIONALI

$x_{ij} \in \mathbb{R}^+$ ettari della tenuta j adibiti a coltura i
$y_j \in \{0,1\}$ variabile binaria se terreno è limitato ai 200 ha ($y_j = 1$) oppure no ($y_j = 0$)

variabili binarie quando bisogna SELEZIONARE uno o più elementi da un insieme
devono essere legate (messe in relazione tramite dei vincoli) alle altre variabili del modello

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\max\ 5(x_{MA}+x_{MB}+x_{MC})+7(x_{SA}+x_{SB}+x_{SC})+6(x_{GA}+x_{GB}+x_{GC})$$

$$\max \sum_{i=M,S,G} p_i \sum_{j=A,B,C} x_{ij}$$

VINCOLI

- ho a disposizione

$$x_{MA}+x_{SA}+x_{GA}\le 600-200y_A$$

$$x_{MB}+x_{SB}+x_{GB}\le 700-200y_B$$ si "attiva" solo quando $y_i=1$ (variabile binaria)

$$x_{MC}+x_{SC}+x_{GC}\le 450-200y_C$$ potrei però metterli tutte $=0$

$$y_A+y_B+y_C\geq 1 \rightarrow \text{almeno uno è } =1$$

- limite capacità acqua

$$20000\,x_{MA}+10000\,x_{SA}+10000\,x_{GA}\le 8\cdot 10^6$$

$$20000\,x_{MB}+10000\,x_{SB}+10000\,x_{GB}\le 5\cdot 10^6$$

$$20000\,x_{MC}+10000\,x_{SC}+10000\,x_{GC}\le 6\cdot 10^6$$

- colture soia tot max 40%

$$x_{SA}+x_{SB}+x_{SC}\le 0{,}4\sum_{i=M,S,G}\sum_{j=A,B,C}x_{ij}$$

- vincoli di dominio

$$x_{ij}\geq 0 \quad y_i\in\{0,1\} \quad i=M,S,G \quad j=A,B,C \quad y_A+y_B+y_C\geq 1$$

$$\max \; 5(x_{MA}+x_{MB}+x_{MC}) + 7(x_{SA}+x_{SB}+x_{SC}) + 6(x_{GA}+x_{GB}+x_{GC})$$

soggetto a

$$x_{MA}+x_{SA}+x_{GA} \leq 600 - 200y_A$$

$$x_{MB}+x_{SB}+x_{GB} \leq 700 - 200y_B$$

$$x_{MC}+x_{SC}+x_{GC} \leq 450 - 200y_C$$

$$20000x_{MA} + 10000x_{SA} + 10000x_{GA} \leq 8 \cdot 10^6$$

$$20000x_{MB} + 10000x_{SB} + 10000x_{GB} \leq 5 \cdot 10^6$$

$$20000x_{MC} + 10000x_{SC} + 10000x_{GC} \leq 6 \cdot 10^6$$

$$x_{SA}+x_{SB}+x_{SC} \leq 0{,}4 \sum_{\substack{i=M,S,G \\ j=A,B,C}} x_{ij}$$

$$y_A+y_B+y_C \geq 1$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$y_i \in \{0,1\}$$

$$i = M,S,G \qquad j = A,B,C$$

Un modello per massimizzare il saldo costi-profitti di un'azienda

ESERCIZIO 4. Una ditta ha la possibilità di attivare, per l'anno corrente, la produzione di quattro tipi di prodotti A, B, C e D. Per ogni tipo di produzione, se attivata, la ditta si impegna a produrre un quantitativo minimo pari rispettivamente a 1000, 1500, 3000 e 2000 unità. La produzione di A, B, C e D richiede un costo fisso per l'attivazione delle rispettive linee di produzione ed una quantità di forza lavoro per ogni unità prodotta, ed ogni unità venduta fornisce un profitto, come specificato dalla seguente tabella (in euro).

Prodotto	Costo fisso	Forza lavoro unit.	Profitto unit.
A	14500	10	50
B	10000	15	60
C	8000	5	55
D	9000	14	80

La ditta dispone per l'anno in corso di 200000 unità complessive di forza lavoro. Inoltre i committenti per la quale essa lavora richiedono che nel caso venga attivata la produzione di A venga anche prodotto almeno uno tra C o D, almeno nei quantitativi minimi sopra indicati.

Formulare il programma lineare per decidere le produzioni da attivare e pianificarne i quantitativi al fine di massimizzare il saldo costi-profitti.

INDICI

$i \in \{A,B,C,D\}$ tipo prodotto

PARAMETRI

q_i quantitativo minimo del prodotto i
c_i costo fisso attivazione i
f_i forza lavoro per produzione unità i
p_i profitto unitario per i
L forza lavoro per l'anno

VARIABILI DECISIONALI

$y_i \in \{0,1\}$ indica se la produzione viene attivata ($y_i=1$) oppure no ($y_i=0$
$x_i \in \mathbb{Z}^+$ numero di unità prodotte per il tipo i

- x_i deve essere vincolata a y_i
- sapere y_i ci serve sia per calcolare i costi di attivazione che modellare la richiesta

FUNZIONE OBIETTIVO

• profitti:

$$50x_A + 60x_B + 55x_C + 80x_D$$

• costi:

$$14500y_A + 10000y_B + 8000y_C + 9000y_D$$

VINCOLI

se la produzione di un prodotto è attivata, allora il numero di unità prodotte non deve essere inferiore al limite prestabilito, altrimenti è 0 (se non è attivata)

se $y_i = 1$, allora $q_i \leq x_i < \infty$, altrimenti se $y_i = 0$, allora $x_i = 0$ ($= 0 \leq x_i \leq 0$)

→ bisogna considerare separatamente i limiti inferiori ($\geq$) da quelli superiori ($\leq$)

se $Y = 1$ allora $X \geq (\leq) A$, altrimenti $X \geq (\leq) B$ che può essere scritto come

$$X \geq (\leq) AY + B(1-Y)$$

limiti inferiori

$My_A \cdot 0 -$

$x_A \geq 1000y_A \qquad x_B \geq 1500y_B \qquad x_C \geq 3000y_C \qquad x_D \geq 2000y_D$

limiti superiori

$M =$ big-M

$x_A \leq My_A + 0 \cdot (1-y_A) \qquad x_B \leq My_B \qquad x_C \leq My_C \qquad x_D \leq My_D$

• capacità massima forza lavoro

$$10x_A + 15x_B + 5x_C + 14x_D \leq 2000000$$

unità prodotte * lavoro necessario

• se viene attivata A, almeno 1 fra C o D

se $y_A = 1$, allora $y_C + y_D \geq 1$, altrimenti $y_C + y_D \geq 0$

quindi: $y_C + y_D \geq 1y_A + 0(1-y_A)$, ovvero

$$y_A \leq y_C + y_D$$

vincoli di dominio

$x_i \in \mathbb{Z}^+, y_i \in \{0,1\} \quad i \in \{A,B,C,D\}$

$$\max \quad 50x_A + 60x_B + 55x_C + 80x_D - (14500y_A + 10000y_B + 8000y_C + 9000y_D)$$

soggetto a

$$x_A \geq 1000y_A$$
$$x_B \geq 1500y_B$$
$$x_C \geq 3000y_C$$
$$x_D \geq 2000y_D$$

$$x_A \leq My_A$$
$$x_B \leq My_B$$
$$x_C \leq My_C$$
$$x_D \leq My_D$$

$$10x_A + 15x_B + 5x_C + 14x_D \leq 2000000$$

$$y_A \leq y_C + y_D$$

$$x_i \in \mathbb{Z}_+, y_i \in \{0,1\}, \qquad i \in \{A,B,C,D\}.$$

GAUSS-JORDAN

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

termini noti

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

elemento perno: alla r-esima iterazione è il primo elemento $\neq 0$ che trovo dalla r-esima riga in poi nella colonna più a sinistra

3 tipi trasformazioni elementari

1- righe non pivotali: $E_i \leftarrow E_i + \lambda E_{ir}$, con $\lambda = -\dfrac{a_{is}}{a_{rs}}$

riga con pivot

elemento riga iesima in colonna perno

elemento perno

2- considero la riga che appartiene all'elemento perno a_{rs} e applico $E_r \leftarrow \lambda E_r$ con $\lambda = \dfrac{1}{a_{rs}}$

3- se necessario permuto la p-esima riga e la r-esima: $E_p \leftrightarrow E_r$

p = n° permutazione attuale

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$E_1 \leftarrow E_1 + 0E_2$ $\quad \left(\frac{0}{2}\right)$

$E_3 \leftarrow E_3 - E_2$ $\quad \left(-\frac{2}{2}\right)$

$E_2 \leftarrow \frac{1}{2} E_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$E_1 \leftrightarrow E_2$

colonna ridotte

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -3 \end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$\left(-\frac{0}{-1}\right)$

$E_1 \leftarrow E_1 + 0E_2$

$E_3 \leftarrow E_3 + E_2$

$E_2 \leftarrow \frac{1}{-1} E_2 = -E_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

→ elemento di stop → non posso più selezionare altri pivot! → scrivo il sistema

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = +3x_3 + 1x_4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

con x_3, x_4 variabili libere!

⇒ ammette infinite soluzioni

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = 3x_3 + x_4 - 1 \end{cases}$$

con x_3, x_4 variabili libere ← non fanno parte delle matrice identità

altri casi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$(0 = 1)$

← il sistema non ammette soluzioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

il sistema ammette un'unica soluzione

INDIPENDENZA LINEARE

se un insieme di vettori e un insieme di vettori (?) indipendenti

determinare base spazio vettori

esercizio

$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ con

$v_1 = (1, 2, 1)$ $\quad v_2 = (0, 1, 0)$ $\quad v_3 = (1, 0, -1)$ $\quad v_4 = (1, \frac{3}{2}, 0)$ $\quad v_5 = (2, 1, 0)$

1. S é LIBERO? ($v_{..}$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI)
2. determinare una base dello spazio $V = \mathcal{L}(S)$
3. determinare se possibile una base di $V = \mathcal{L}(S)$ contenente v_4

per determinare se un insieme é libero occorre risolvere il sistema lineare $A_S x = 0$, dove A_S é la matrice avente come vettori colonna i vettori $v_1 \dots v_5$, x é il vettore delle incognite e 0 é il vettore nullo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

combinazione lineare = sommare sottrarre fra loro i vettori o moltiplicare per una costante (se $v_3 = v_1 + 2v_4$ allora non sono linearmente indipendenti)

NB: dalla teoria sappiamo che se il sistema ammette soluzioni oltre al vettore nullo $(0,0,0,0,0)^T$, allora i vettori non sono fra loro linearmente indipendenti

$\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix} \leftarrow$ ma non serve

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(l'ultima colonna ha tutti elementi nulli)

$E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1$ $\quad E_1 = 1E_1$

$E_3 \leftarrow E_3 - E_1$

$\frac{3}{2} - 2 = \frac{3-4}{2}$

$E_p \leftrightarrow E_r \to p = r$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -2 & -\frac{1}{2} & -3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ridotto $\quad$ era già ridotta

$E_1 = E_1 - 0E_2$ $\quad E_1 = E_1$

$E_3 = E_3 - 0E_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$E_1 = E_1 + \frac{1}{2} E_3$ $\quad E_3 = -\frac{1}{2} E_3$

$E_2 = E_2 - E_3$

VARIABILI LIBERE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

il sistema $A_S x = 0$ ammette infinite soluzioni, quindi $v_1, \dots, v_5$ NON SONO linearmente indipendenti

Le basi di $L(S)$ hanno cardinalità $3 \to$ {Le colonne ridotte della matrice ci permettono di dire che $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base é possibile una base con v_4?

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

pivot su quarta colonna

se scelgo il $\left(-\frac{1}{2}\right)$, allora ENTRA v_4 (4° colonna) ed ESCE IL VETTORE CHE HA SULLA STESSA RIGA L'ELEMENTO 1 (in questo caso v_1)

se scelgo il secondo entra v_4 e esce v_2

se scelgo il terzo entra v_4 e esce v_3

$$\begin{pmatrix} -2 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$E_2 = E_2 + E_1$ $\qquad$ $E_1 = -2E_1$

$E_3 = E_3 + E_1$

RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA PROGRAMMAZIONE LINEARE CON METODO GRAFICO

max x_1+3x_2

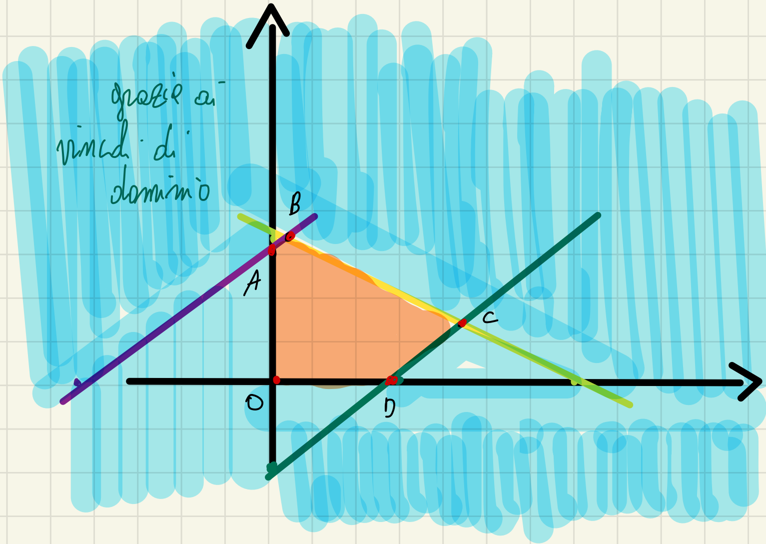
soggetto a

$x_1+2x_2 \leq 7$ r

$2x_1-3x_2 \leq 6$ s

$-2x_1+3x_2 \leq 9$ t

$x_1,x_2 \geq 0$ → vincoli di dominio



$x_1=x$ $x_2=y$

retta di equazione $x_1+2x_2=7$

x_1	x_2
0	$\frac{7}{2}$
7	0

→ $x_1=0$, poi $x_2=0$
così disegno la retta

se sostituiamo le coordinate dell'origine nel vincolo abbiamo $0+0\leq 7$

retta di equazione $2x_1-3x_2=6$

x_1	x_2
0	-2
3	0

se retta passa per origine non si può dare sempre 0 → una volta 0 e una volta tipo 1

origine → $0+0 \leq 6$

$-2x_1+3x_2=9$

x_1	x_2
0	3
$-\frac{9}{2}$	0

origine $0+0\leq 9$

2 CASI

- su uno dei VERTICI si trova la SOLUZIONE OTTIMA
- si hanno INFINITE soluzioni ottime → stesso VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO SU DUE VERTICI e quindi TUTTI I PUNTI SUL LATO CHE CONGIUNGE I DUE VERTICI contengono una SOLUZIONE OTTIMA

VERTICI

O $(0, 0)$
A $(0, 3)$
B $\left(\frac{3}{7}, \frac{23}{7}\right)$ → intersezioni di rette   r intersecato t → $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$
C $\left(\frac{33}{7}, \frac{8}{7}\right)$ → ...   r con r → ...
D $(3, 0)$

$\max x_1 + 3x_2$

O 0
A $0 + 3 \cdot 3 = 9$
B $\frac{3}{7} + 3 \cdot \frac{23}{7} \boxed{= \frac{72}{7}}$
C $\frac{33}{7} + 3 \cdot \frac{8}{7} = \frac{57}{7}$
D $3 + 0$

scelgo il maggiore

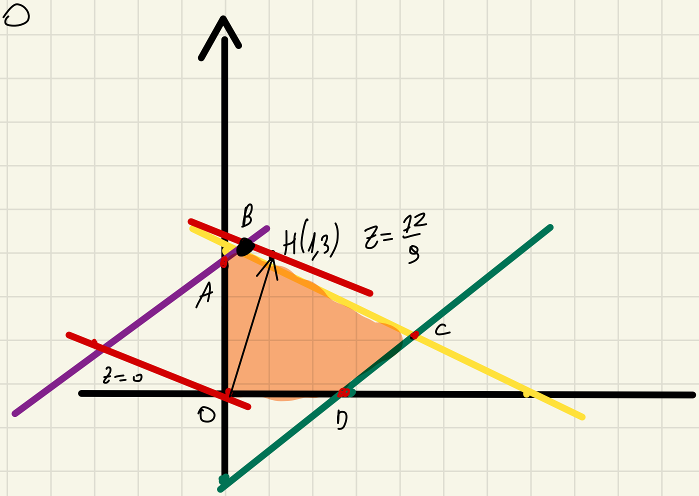
→ $x_1 = \frac{3}{7}$ $x_2 = \frac{23}{7}$ è la soluzione ottima ma se la regione ammissibile é illimitata?

altro metodo!

si disegna una retta di ISOPROFITTO (una delle rette di) → é un fascio di rette // ponendo la funzione obiettivo $= k$ (variabile)

come $k=0 \rightarrow x_1 + 3x_2 = 0$

x_1	x_2
0	0
-3	1



la retta che é data dalla funzione obiettivo uguale ad una costante, il valore della soluzione in tutti i punti di quella retta é uguale alla costante

(tutti su retta rossa funzione obiettivo $=0$)

per vedere dove cresce si traccia un vettore con origine nell'origine e la punta uguale ai coefficienti della funzione obiettivo (in questo caso 1 e 3)

Quindi quella é la direzione dove le rette di isoprofitto crescono

→ trasliamo la retta

B é il punto di massimo

RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE CON IL METODO GRAFICO

$\min z = \frac{1}{2}x_1 - x_2$

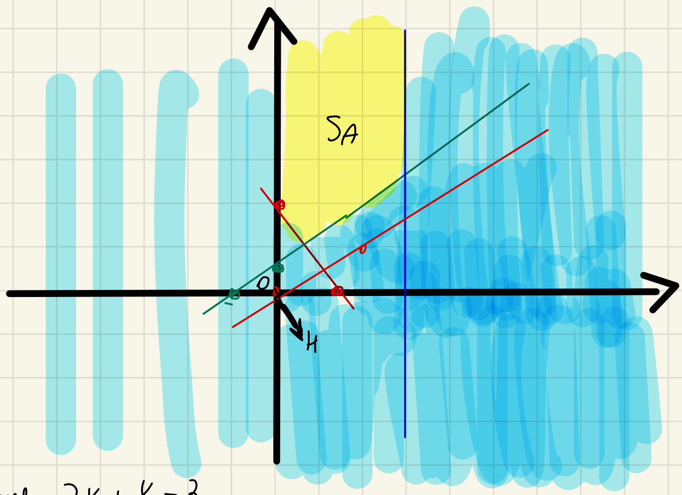
soggetto a

$2x_1 + x_2 \geq 3$

$-x_1 + 2x_2 \geq 1$

$x_1 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



- disegniamo retta r di equazione $2x_1 + x_2 = 3$

x_1	x_2
0	3
$\frac{3}{2}$	0

quale semipiano é incluso nella disequazione? $0+0 \geq 3 \Rightarrow$ non contiene origine

- retta s di equazione $-x_1 + 2x_2 = 1$

x_1	x_2
0	$\frac{1}{2}$
-1	0

semipiano nella disequazione? $0+0 \geq 1 \rightarrow$ no

- retta t di equazione $x_1 = 3$

semipiano nella disequazione? $0 \leq 3 \rightarrow$ sí

La regione è tuttavia illimitata.

Disegno allora la retta di ISOCOSTO (← min, se fosse max ISOPROFITTO)

Le rette di isocosto hanno equazione $\frac{1}{2}x_1 - x_2 = K$

quella nell'origine $\frac{1}{2}x_1 - x_2 = 0$

x_1	x_2
0	0
2	0

non interseca la regione ammissibile

→ VETTORE OH H = coefficienti variabili funzione obiettivo $H\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

la direzione di OH mi dice il verso dove ottengo valori crescenti → cercando un minimo vado nella direzione opposta

NON ESISTONO SOLUZIONI OTTIME → spostandomi riesco ad intersecare sempre l'area → ottengo sempre soluzioni migliori → ∄ infinite soluzioni ottime

BASI AMMISSIBILI DI UN MODELLO DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

$$\min z = \frac{1}{2}x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 1 \\ x_1 \qquad &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- FORMA STANDARD

→ se è di min, si porta a max cambiando segno alla funzione obiettivo

→ SURPLUS e SLACK → se $\geq$ $-x_n$, se $\leq$ $+x_n$ e le disequazioni diventano equazioni

→ tutte le variabili devono essere positive

$$\max z = -\frac{1}{2}x_1 + x_2$$

soggetto a

sono già ≥ 3, per renderle $=$ devo togliere una quantità

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 &= 1 \\ x_1 \qquad\qquad + x_5 &= 3 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$p(A) = 3$ → le ultime 3 colonne sono linearmente indipendenti (0/−1 e ottengo identità)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICE con RANGO 3

BASI AMMISSIBILI → se RANGO 3, allora 3 colonne alla volta

es: $\{A_2, A_3, A_4\}$ notiamo che NON sono linearmente indipendenti → $\{x_2, x_3, x_4\}$ non è una base

es: $\{A_1, A_2, A_3\}$ → sono linearmente indipendenti

vettore termini noti

$$A_B x_B = b$$

$$B = \{A_1, A_2, A_3\} \Rightarrow A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -3 + x_3 \\ -3 + 2(-3 + x_3) = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_3 = 5 \\ x_1 = 3 \end{cases} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

SONO $\geq 0 \Rightarrow$ BASE AMMISSIBILE

$$B = \{A_1, A_2, A_4\} \Rightarrow A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -3 \\ -3 - 6 - x_4 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \\ +x_4 = -10 \end{cases} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$\leq 0 \rightarrow$ non é ammissibile

METODO DEL SIMPLESSO STANDARD

soluzione ottima del seguente programma lineare con il metodo del simplesso

max $x_1 + 3x_2$

soggetto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$
$$2x_1 - 3x_2 \leq 6$$
$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

FORMA STANDARD

C_0: se é un problema di minimo, diventa di massimo CAMBIANDO il segno

$\min z = x_1 - 4x_2 \xrightarrow{C_0} \max z = -x_1 + 4x_2$

C_1: se il "vincolo con la virgola" é ≤ 0, allora CAMBIO IL SEGNO a tutti i vincoli ed esso diventa ≥ 0

NB: le altre disequazioni non cambiano di segno

$x_1 - x_2 \geq 4 \rightarrow -x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 - 2x_2 \leq \rightarrow -x_1 + 2x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \leq 0 \rightarrow x_1, x_2 \geq 0$

C_2: se ho una variabile libera (vincoli senza la virgola), la annullo sostituendola con $x_3^+ - x_3^-$

$x_1 + x_2 + \underbrace{x_3}_{\text{libera}} \leq 4 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3^+ - x_3^-$

C_3: SURPLUS e SLACK per trasformare le disequazioni in equazioni

SURPLUS: se $\geq n$ SOTTRAGGO x_n (arbitraria, per rendere i valori a sinistra uguali a quelli di destra

SLACK: se $\leq n$ AGGIUNGO x_n → NB: saranno diverse per ciascuna variabile

$x_1 + 2x_2 \geq 4$	$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$
$x_1 + 2x_2 \leq 7$	$x_1 + 2x_2 + x_4 = 7$
$x_1 \leq 5$	$x_1 + x_5 = 5$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

così le rendo NON LIBERE

$\max \; x_1 + 3x_2$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 7 \\ 2x_1 - 3x_2 &\le 6 \\ -2x_1 + 3x_2 &\le 9 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

FORMA STANDARD

$\max z = x_1 + 3x_2$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 6 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 &= 9 \\ x_1, \dots, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

ha RANGO 3, prendiamo le colonne 3 e 3

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$B = \{x_3, x_4, x_5\}$ è una BASE AMMISSIBILE perché x_3, x_4, x_5 sono linearmente indipendente

se facciamo il sistema:

$$\begin{cases} x_3 = 7 \\ x_4 = 6 \\ x_5 = 9 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \leftarrow \text{sono tutte positive}$$

Tutte le variabili fuori base $[x_1, x_2]$ sono uguali a $0 \rightarrow$ questa BASE corrisponde all'origine

$$T(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 &= 9 \end{aligned}$$

porto a destra le variabili fuori base $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} x_3 &= 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 6 - 2x_1 + 3x_2 \\ x_5 &= 9 - 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

lo scriviamo perché il termine noto ci va a indicare qual è attualmente il valore di $z(B)$, ovvero la soluzione ammissibile che è associata alla base B

$\max z = 0 + x_1 + 3x_2$

soggetto a

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 6 - 2x_1 + 3x_2 \\ x_5 &= 9 - 2x_1 + 3x_2 \\ x_1, \dots, x_5 &\ge 0 \end{aligned}\right] \rightarrow$$ nella funzione obiettivo non ho nessuno di questi vincoli $\Rightarrow$ non sostituisco

1. Criterio di ottimalità: coefficienti funzione obiettivo tutti negativi
se non è soddisfatto seleziono la variabile fuori base x_j con costo ridotto maggiore
↓
coefficiente maggiore fra le variabili fuori base

in questo caso è $3 \rightarrow x_2$ entrerà in base

QUELLO CHE HO SCELTO PRIMA

2. Criterio di illimitatezza: coefficienti di x_j tutti negativi
se non è così scelgo come elemento perno quello che ha il rapporto minimo (fra termine noto della riga e l'elemento nella colonna x_j)

$$T(B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$\frac{7}{2}$ non la scelgo perché è già negativa

$3 \rightarrow$ lo scelgo come elemento perno

SAPPIAMO CHI USCIRÀ DI BASE: sulla riga del perno vedo quale colonna ha valore $1 \rightarrow$ quella uscirà di base
$\Rightarrow$ esce x_5 ed entra x_2

$\lambda: \frac{\text{riga attuale}}{\text{perno}}$

$$T(B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & \boxed{3} & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$E_1 \leftarrow E_1 - \frac{2}{3} E_3$

$E_2 \leftarrow E_2 + E_3$

$E_3 \leftarrow \frac{1}{3} E_3$

$$T(B') = \left(\begin{array}{ccccc|c} \frac{7}{3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 15 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \end{array}\right)$$

$\frac{7}{3} x_1 + x_3 - \frac{2}{3} x_5 = 1$

$x_4 + x_5 = 15$

$-\frac{2}{3} x_1 + x_2 + \frac{1}{3} x_5 = 3$

soggetto a

$X_3 = 1 - \frac{7}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_5$

$x_4 = 15 - x_5$

$X_2 = 3 + \frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_5$

$x_1, \dots, x_5 \geq 0$

$\Rightarrow \max z = 9 + 3 x_1 - x_5$

costo ridotto positivo $\rightarrow x_1$ entra

$$T(B') = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{\frac{7}{3}} & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 15 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \end{array}\right)$$

dovrei fare $\frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}$, ma tanto gli altri non li prendo in considerazione perché sono $\leq 0 \rightarrow \frac{7}{3}$ è il perno

non è soddisfatto il criterio di illimitatezza:
$\frac{7}{3}$ è positivo!

$\frac{1}{3} + \frac{2}{7}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{21}\right)$

$\frac{7}{21} - \frac{4}{21} = \frac{3}{21}$

$E_1 \leftarrow \frac{3}{7} E_1$ $\qquad$ $E_1 \leftarrow \frac{3}{7} E_1$

$E_2 \leftarrow 0 \cdot E_1 + E_2$ $\qquad$ $E_2 \leftarrow E_2$

$E_3 \leftarrow -\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7}\right) E_1 + E_3$ $\qquad$ $E_3 \leftarrow \frac{2}{7} E_1 + E_3$

$$T(B'') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{23}{7} \end{array}\right)$$

$x_1 + \frac{3}{7} x_3 - \frac{2}{7} x_5 = \frac{3}{7}$

$x_4 + x_5 = 15$

$x_2 + \frac{2}{7} x_3 - \frac{1}{7} x_5 = \frac{23}{7}$

$\max z = \frac{72}{9} - \frac{9}{7} x_3 - \frac{1}{7} x_5$

$x_1 = \frac{3}{7} - \frac{3}{7} x_3 + \frac{2}{7} x_5$

$x_4 = 15 - x_5$

$x_2 = \frac{23}{7} + \frac{1}{7} x_5 + \frac{2}{4} x_3$

$x_1, \dots, x_5 \geq 0$

$\max z = 9 + 3x_1 + x_5$

$$9 + 3\left(\frac{3}{7} - \frac{3}{7} x_3 + \frac{2}{7} x_5\right) - x_5 = 9 + \frac{9}{7} - \frac{9}{7} x_3 + \frac{6}{7} x_5 - x_5 = \frac{72}{9} - \frac{9}{7} x_3 - \frac{1}{7} x_5$$

- il criterio di ottimalità è SODDISFATTO

METODO DEL SIMPLESSO A PARTIRE DA UNA BASE DATA

determinare la soluzione ottima del seguente programma lineare in forma standard con il metodo del simplesso a partire dalla base $B=\{x_1, x_2, x_5\}$

$\max z = x_1 - 2x_2$

soggetto a

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$
$$3x_1 + x_2 - x_4 = 3$$
$$x_1 + x_5 = 4$$
$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

bisogna ridurre colonne corrispondenti variabili x_1, x_2, x_5 con pivot

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{-1} & 3 & -1 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & - & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} E_1 \leftarrow -E_1 \\ E_2 \leftarrow E_2 + 3E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 + E_3 \end{array}$$

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & \boxed{10} & -3 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} E_1 \leftarrow E_1 + \frac{3}{10} E_2 \\ E_2 \leftarrow \frac{1}{10} E_2 \\ E_3 \leftarrow E_3 - \frac{3}{10} E_2 \end{array}$$

$$(A''|b'') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{21}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 1 & \frac{37}{10} \end{array}\right) = T(B)$$

è già ridotta!

$\max z = x_1 - 2x_2$

$x_1 = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}x_3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10}x_4$

$x_2 = \frac{21}{10} + \frac{3}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_4$

$x_5 = \frac{37}{10} + \frac{1}{10}x_3 - \frac{3}{10}x_4$

$x_1, \dots, x_5 \geq 0$

$$\max z = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}x_3 + \frac{3}{10}x_4 - 2\left(\frac{21}{10} + \frac{3}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_4\right) = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}x_3 + \frac{3}{10}x_4 - \frac{42}{10} - \frac{6}{10}x_3 - \frac{2}{10}x_4 = -\frac{39}{10} - \frac{7}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_4$$

$$\max z = -\frac{39}{10} - \frac{7}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_4 \overset{?}{\Longrightarrow} \max z = \frac{39}{10} \boxed{+\frac{7}{10}x_3} - \frac{1}{10}x_4$$

ottimalità non soddisfatta

$$T(B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{21}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 1 & \frac{37}{10} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} E_1 \leftarrow 10E_1 \\ E_2 \leftarrow E_2 + 3E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 + E_1 \end{array}$$

$$-\frac{1}{10} \quad -\frac{9}{10}$$

$$T(B') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 10 & 0 & 1 & \boxed{-3} & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & 4 \end{array}\right)$$

→ vale il criterio di illimitatezza ⇒ esistono INFINITE soluzioni ottime

riformulazione in base B'

$$\max z = x_1 - 2x_2 \longrightarrow x_1 - 2(3 - 3x_1 + x_4) \to x_1 - 6 + 6x_1 - 2x_4 \Rightarrow \max z = -6 + 7x_1 - 2x_4$$

$$x_3 = 3 - 10x_1 + 3x_4$$

$$x_2 = 3 - 3x_1 + x_4$$

$$x_5 = 4 - x_1$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \max z = 6 - 7x_1 + \underline{2x_4}$$

↑ è positivo

DETERMINARE UNA BASE AMMISSIBILE DI PROGRAMMA LINEARE TRAMITE IL PROBLEMA DI PRIMA FASE

è in forma standard

$\max z = x_1 + 2x_2 - x_3$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= 8 \\ -x_1 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

→ devono essere positivi

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

← non è possibile trovare una sottomatrice che sia uguale alla matrice identità di rango massimo (numero righe)

i termini noti son tutti non negativi, quindi possiamo aggiungere variabili artificiali

$\max z = -s_1 - s_2 - s_3$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + s_1 &= 8 \\ -x_1 + x_3 + s_2 &= 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 + s_3 &= 3 \\ x_1, \dots, x_4, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

risolviamo il problema di prima fase a partire dalla base ammissibile $B = \{s_1, s_2, s_3\}$ per ottenere (se esiste) una base ammissibile per il problema di partenza

$$\max z = -17 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + s_1 &= 8 \\ -x_1 + x_3 + s_2 &= 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + s_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= 8 - x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 \\ s_2 &= 6 + x_1 - x_3 \\ s_3 &= 3 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1, \dots, x_4, & \; s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\max z = -(8 - x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 6 + x_1 - x_3 + 3 - x_2 - x_3 - x_4)$$

$$\max z = -(17 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4)$$

$$\max z = -17 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4$$

costo ridotto maggiore

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} 4 \\ \\ \boxed{3} \end{array}$$

$E_1 \leftarrow E_1 - 2E_3$

$E_2 \leftarrow E_2$

$E_3 \leftarrow E_3$

entra in base

esce di base

$$T(B') = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & -6 & -1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$s_1 = 2 - x_1 + 6x_3 + x_4 + 2s_3$

$s_2 = 6 + x_1 - x_3$

$x_2 = 3 - x_3 - x_4 - s_3$

$$\max z = -17 + 3(3 - x_3 - x_4 - s_3) - 2x_3 + 2x_4 \rightarrow -17 + 9 - 3x_3 - 3x_4 - 3s_3 - 2x_3 + 2x_4$$

$$\rightarrow -8 - 5x_3 - x_4 - 3s_3$$

ottimalità soddisfatta (≤ 0)

$$\max z = -8 - 5x_3 - x_4 - 3s_3$$

soggetto a

$s_1 = 2 - x_1 + 6x_3 + x_4 + s_3$

$s_2 = 6 + x_1 - 6x_3$

$x_2 = 3 - x_3 - x_4 - s_3$

$x_1, \dots, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

B' è la base ottima del programma di prima fase, con $z^* < 0$

$\rightarrow$ il programma lineare di partenza non ha soluzioni ammissibili (visto che non è $= 0$ ma strettamente < 0)

$\max z = x_1 + x_2 + x_3$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad + x_4 &= 4 \\ -x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 \quad\quad\quad\quad\quad + x_5 &= 2 \end{aligned}$$

termini noti ≥ 0 (é un'ipotesi per poter applicare il simplesso nella prima fase)

$x_1, \dots, x_5 \geq 0$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

é però già ridotta! Aggiungo la variabile di slack per la 3° equazione

$\max \xi = -s_1 - s_2$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \quad + s_1 \quad &= 4 \\ -x_2 - x_3 + x_4 \quad\quad + s_2 &= 2 \\ x_1 \quad\quad\quad + x_5 \quad\quad &= 2 \end{aligned}$$

$x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 \geq 0$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

base ammissibile $B = \{s_1, s_2, x_5\}$

$$T(B) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\max \xi = -(4 - x_1 - 2x_2 - x_4 + 2 + x_2 + x_3 - x_4) \to -(-x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 6) \to -6 + x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$

soggetto a

$s_1 = 4 - x_1 - 2x_2 - x_4$

$s_2 = 2 + x_2 + x_3 - x_4$

$x_5 = 2 - x_1$

$x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 \geq 0$

$$T(B) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \frac{4}{1} \\ \boxed{\frac{2}{1}} \end{array}$$

$E_1 = E_1 - E_2$

$E_2 = E_2$

$E_3 = E_3$

$$T(B') = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \boxed{3} & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$E_1 \leftarrow \frac{1}{3} E_1$

$E_2 \leftarrow E_2 + \frac{1}{3} E_1$

$E_3 \leftarrow E_3$

$$T(B'') = \left(\begin{array}{ccccccc|c} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$4 + 2x_2 + 2x_3 - 2s_2$

$\max z = -6 + x_1 + x_2 - x_3 + 2(2 + x_2 + x_3 - s_2) \rightarrow -2 + x_1 + 3x_2 + x_3 - 2s_2$

entra

soggetto a

$s_1 = 2 - x_1 - 3x_2 - x_3 + s_2$

$x_4 = 2 + x_2 + x_3 - s_2$

$x_5 = 2 - x_1$

$x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 \geq 0$

nel caso di prima fase anche questo ci dà ottimalità

$2 \quad -x_1 \quad -x_3 \quad -s_1 \quad +s_2$

$\max z = -2 + x_1 + 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2\right) + x_3 - 2s_2 = 0 - s_1 - s_2$

criterio di ottimalità

soggetto a

$x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2$

$x_4 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_3$

$x_5 = 2 - x_1$

$x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 \geq 0$

$\Rightarrow \{x_2, x_4, x_5\}$ è una base OTTIMA del programma di prima fase, con $z^* = 0$

$\Rightarrow \{x_2, x_4, x_5\}$ è una base AMMISSIBILE (non necessariamente ottima) del problema di partenza

abbiamo inoltre già la matrice per la riformulazione del problema di partenza rispetto alla base $\{x_2, x_4, x_5\}$

$\max z = x_1 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right) + x_3 \rightarrow \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3$ NON è OTTIMA

soggetto a

$x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3$

$x_4 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3$

$x_5 = 2 - x_1$

$x_1, \dots, x_5 \geq 0$