Esercizio 1

Dati i seguenti complessi

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}+i} \qquad z_2 = \frac{3}{4}(\sqrt{3}-i)$$

Calcolare

- $z_1 + z_2$
- $|z_1 + z_2|$ e forma polare di $z_1 + z_2$
- $(z_1 + z_2)^{-1}$ se possibile

SVOLGIMENTO

$$z_1 + z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+i} + \frac{3}{4}(\sqrt{3}-i) =$$

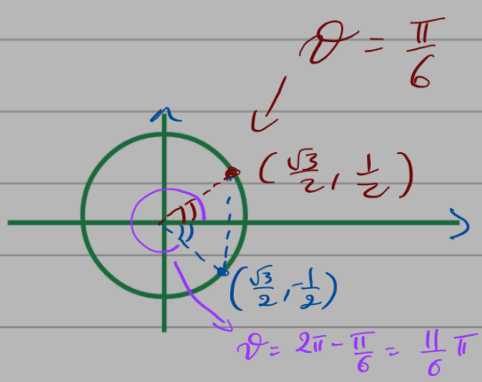
$$= \frac{4 + 3(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}{4(\sqrt{3}+i)} =$$

$$= \frac{4+12}{4(\sqrt{3}+i)} = \frac{4}{\sqrt{3}+i} = \frac{4(\sqrt{3}-i)}{4} = \sqrt{3}-i$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

Forma polare

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\vartheta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \vartheta = \frac{11}{6}\pi$$

$$z_1+z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right)$$

$\boxed{\text{METODO 1}}$

$$(z_1+z_2)^{-1} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}$$

$\boxed{\text{METODO 2}}$

$$(z_1+z_2)^{-1} = (\sqrt{3}-i)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}+i}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}$$

$\boxed{\text{METODO 3}}$

$$(z_1+z_2)^{-1} = \frac{\overline{z_1+z_2}}{|z_1+z_2|^2} = \frac{\sqrt{3}+i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}$$

ESERCIZIO 2

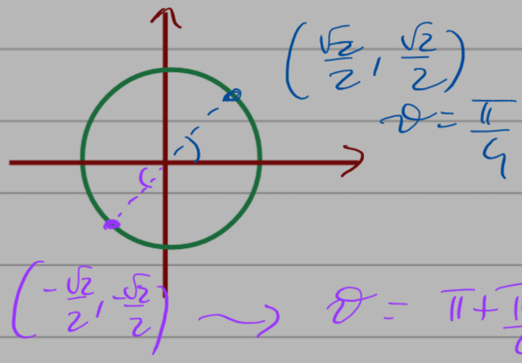
Sia $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ calcolare z^{1725} ed esprimere il risultato in forma polare con radianti tra 0 e 2π (escluso).

SVOLGIMENTO

Calcolo forma polare

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\vartheta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$\rightsquigarrow \vartheta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

$$\vartheta = \frac{5}{4}\pi$$

$$z = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi$$

$$\Rightarrow z^{1725} = \cos\left(\frac{1725\cdot 5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1725\cdot 5}{4}\pi\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{25}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{25}{4}\pi\right) =$$

$$1725 = \frac{(8\cdot 215+5)\,5}{4} = 2\cdot 215 + \frac{25}{4}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{25}{4} = \frac{8\cdot 3+1}{4} = 2\cdot 3 + \frac{1}{4}$$

□

Esercizio 3

Calcolare le radici ottave di $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

SVOLGIMENTO

Vuol dire trovare le radici dell'equazione

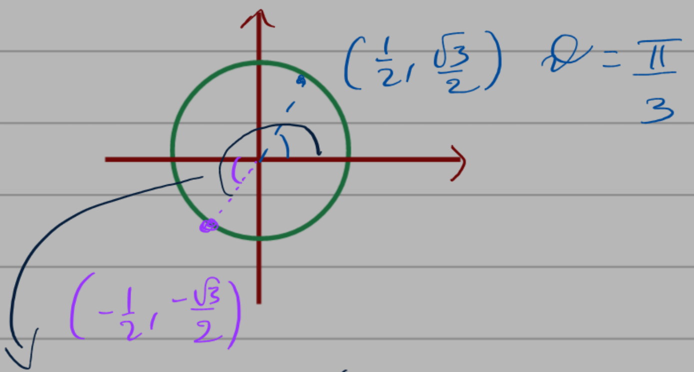
$$z^8 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

OSS/ Per queste equazioni sono tutte diverse!

Trovo la forma polare di z^8

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = -\frac{1}{2} \\ \sin\vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



$$\vartheta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\vartheta = \frac{4}{3}\pi$$

$$z^8 = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)$$

Trovo le radici di $z^8 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Sarano $z_0, z_1, \dots, z_7$

$$z_i = \rho_i \left(\cos \vartheta_i + i \sin \vartheta_i \right)$$

$\rho_i = \sqrt[8]{\rho} = \sqrt[8]{1} = 1$ (perché per definizione è sempre positivo)

$$\vartheta_i = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2\pi i}{8} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi i}{4}$$

$\vartheta_0 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z_0 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$\vartheta_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{12}\pi \Rightarrow z_1 = 1\left(\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right)$

$\vartheta_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow z_2 = 1\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

$\vartheta_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{4}\pi = \frac{11}{12}\pi \Rightarrow z_3 = 1\left(\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{11}{12}\pi\right)\right)$

$\vartheta_4 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7}{6}\pi \Rightarrow z_4 = 1\left(\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right)$

$\vartheta_5 = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{4}\pi = \frac{17}{12}\pi \Rightarrow z_5 = 1\left(\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right)$

$\vartheta_6 = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}\pi = \frac{10}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi \Rightarrow z_6 = 1\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right)$

$$\theta_7 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi 7}{4} = \frac{23}{12}\pi \Rightarrow z_7 = 1\left(\cos\left(\frac{23}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{23}{12}\pi\right)\right)$$

$\square$

Esercizio 4

Dato un numero complesso z e un naturale n, verificare che $\overline{z^n + z^n} = z^n + \overline{z}^n$.
Dedurre che $z^n + \overline{z}^n$ è sempre un numero reale, indipendentemente da z e n.

SVOLGIMENTO

$$z = a + ib = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

$$\overline{z}^n = \rho^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

$$z^n + \overline{z}^n = \rho^n(\cos(n\theta) + \cancel{i\sin(n\theta)} + \cos(n\theta) - \cancel{i\sin(n\theta)}) =$$

$$= \rho^n(2\cos(n\theta)) = 2\rho^n\cos(n\theta)$$

Poiché l'unità immaginaria è nulla e sono stati usati z e n generici, allora

$$z^n + \overline{z}^n \in \mathbb{R} \text{ per ogni } z \text{ e } n \text{ scelto.}$$

$\square$

Esercizio 5

Siano A, B e C le seguenti matrici ad elementi in $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ i & 7 & 4+i \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 7+i & -i \end{pmatrix}$$

Calcolare quando possibile il prodotto riga/colonna di AB, BA, AC, CA, BC, CA.

SVOLGIMENTO.

$$A \in \mathbb{C}^{2,2} \qquad B \in \mathbb{C}^{3,3} \qquad C \in \mathbb{C}^{2,2}$$

Il prodotto é possibile se e solo se il numero di colonne della prima matrice coincide col il numero di righe della seconda matrice. Quindi gli unici prodotti possibili sono

$$AC \qquad e \qquad CA$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & i \\ 7+i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+14+2i & i-2i \\ 9+35+5i & 3i-5i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17+2i & -i \\ 44+5i & -2i \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 7+i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3+3i & 6+5i \\ 7+i-3i & 14+2i-5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3i & 6+5i \\ 7-2i & 14-3i \end{pmatrix}$$

Esercizio 6

Verificare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soddisfa la seguente identità

$$A^3 - 3A + 2I = 0$$

SVOLGIMENTO

$$3A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2+2 & 3-3 & -3+3 \\ 2-3 & -2+2 & 2-3 \\ -3+3 & 3-3 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è diverso da $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

allora A non soddisfa $A^3 - 3A + 2I = 0$.

$\square$

ESERCIZIO 7

Quali dei seguenti complessi è radice di $z^2 + iz - 3 = 0$?

- $\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{1}{2} i$
- $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$
- $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$
- $-\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{1}{2} i$

SVOLGIMENTO

METODO 1

Risolvo equazione

$z = a + ib \Rightarrow z^2 + iz - 3 = a^2 - b^2 + 2ab\, i + ai - b - 3 =$

$= (a^2 - b^2 - b - 3) + (2ab + a) i = 0$

$a, b \in \mathbb{R}$

Questo è vero se e solo se

$$\begin{cases} a^2-b^2-b-3=0 \\ 2ab+a=0 \end{cases}$$

Considero la seconda equazione

$$2ab+a = a(2b+1)=0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto è vero se e solo se

$a=0$ oppure $2b+1=0$

$b=-\frac{1}{2}$

Suppongo $a=0$, allora vedo cosa succede alla prima equazione $(a^2-b^2-b-3=0)$

Sostituisco $\Rightarrow 0-b^2-b-3=0$, cioè $b^2+b+3=0$

Ricordando che $b\in\mathbb{R}$, risolvo l'equazione

$\Delta = 1-12=-11 \rightsquigarrow$ ASSURDO, non produce soluzioni reali

Suppongo $b=-\frac{1}{2}$, allora vedo cosa succede alla prima equazione $(a^2-b^2-b-3=0)$

Sostituisco: $a^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-3=0$

Quindi $a^2-\frac{11}{4}=0 \iff a^2=\frac{11}{4} \iff a = \frac{\sqrt{11}}{2}$, $-\frac{\sqrt{11}}{2}$

Quindi se $b=-\frac{1}{2}$ ottengo due possibilità per a; questo mi dice che ho due radici dell'equazione

$$z_0 = \frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{1}{2}i \qquad z_1 = -\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{1}{2}i$$

METODO 2

Trovo la soluzione per sostituzione

$$z^2 + iz - 3 = 0$$

- Controllo $\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{1}{2}i$

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2 + i\left(\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{1}{2}i\right) - 3 =$$

$$= \frac{11}{4} - \frac{1}{4} - \cancel{\frac{\sqrt{11}}{2}i} + \cancel{\frac{\sqrt{11}}{2}i} + \frac{1}{2} - 3 =$$

$$= \frac{11 - 1 + 2 - 12}{4} = 0$$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{1}{2}i$ è soluzione

- controllo $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) - 3 =$$

$$= \cancel{\frac{2}{4}} - \cancel{\frac{2}{4}} - \frac{2}{2} i + \frac{\sqrt{2}\, i}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\right) + \frac{\sqrt{2} - 2}{2} i \neq 0$$

Quindi $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$ non è radice.

Le altre due verifiche si fanno allo stesso modo.

$\square$