Esercizio 1.2 (Composizione di fondi di investimento). Il sig. Ibrahim Rossi vuole impegnare del denaro in alcuni fondi di investimento. A tal fine ha selezionato cinque fondi, dei quali conosce il prezzo unitario delle quote, il rendimento atteso a un anno e un indice numerico di rischio (più alto il numero, maggiore il rischio). La situazione è rappresentata nella seguente tabella.

Fondo	Prezzo quota	Rendim.	Rischio
1	1000	5%	2.5
2	700	9%	3.2
3	2500	11%	4
4	300	2.5%	1
5	2000	4%	1.5

Per ogni fondo si può solo acquistare un numero intero di quote. Il sig. Rossi dispone di 200000 euro (non è necessario che siano tutti investiti) e vuole

- differenziare l'investimento, investendo in ogni fondo non più del 30% del capitale impegnato; ✔
- investire almeno il 40% del capitale impegnato in fondi con indice di rischio ≤ 3.5;
- ottenere un indice medio pesato di rischio non superiore a 2.8 per l'investimento complessivo.

Insieme al suo fedele gatto Purrer, il sig. Rossi scrive il modello di programmazione lineare per pianificare i suoi investimenti ottenendo il massimo rendimento atteso.

(1) Scrivere il modello lineare sviluppato dal sig. Rossi e da Purrer. (6 punti)

Variabili

x_i = numero di azioni del fondo i acquistate $\quad i \in \{1 \dots 5\}$

p_i = prezzo di una quota

R_i = rischio di un fondo

Funzione obiettivo

$$\max \; 0{,}05x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}11x_3 + 0{,}025x_4 + 0{,}04x_5$$

Vincoli

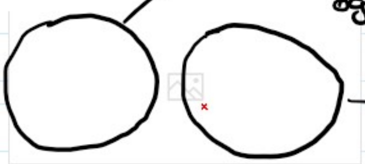
CAPITALE IMPEGNATO =
NUMERO DI AZIONI ACQUISTATE * PREZZO DELL'AZIONE

1) $x_i \cdot p_i \leq 0{,}3 \sum_{1}^{5} x_i \cdot p_i$

2) $x_i p_i \geq 0{,}4 \sum_{i=1}^{5} x_i p_i$

3) $\sum_{i=1}^{5} x_i p_i \leq 200000$

media ponderata der rischio per ogni fondo



$\rightarrow 2{,}8x_1 + 2{,}8x_2 \dots$

BOH

Indici

$i \in \{1 \dots 10\}$

Variabili decisionali

y_i = inizio della i-esima attività

d_i = durata dell'attività

Funzione obiettivo

$$\min z = y_{10}$$

Funzione obiettivo

$\min z = y_{10}$

Vincoli

Rilascio

$y_3 \geq 15$

$y_4 \geq 25$

$y_6 \geq 29$

Scadente

$y_3 + d_3 \leq 30$

$y_5 + d_5 \leq 40$

$y_7 + d_7 \leq 45$

Precedente

$y_2 \geq y_1 + d_1 \qquad y_2 \geq y_3 + d_3$

$y_3 \geq y_1 + d_1$

$y_4 \geq y_1 + d_1$

$y_5 \geq y_2 + d_2$

$y_6 \geq y_2 + d_2 \qquad y_6 \geq y_3 + d_3 \qquad y_6 \geq y_7 + d_7$

$y_7 \geq y_4 + d_4$

$y_8 \geq y_5 + d_5 \qquad y_8 \geq y_6 + d_6$

$y_9 \geq y_7 + d_7$

$y_{10} \geq y_9 + d_9 \qquad y_{10} \geq y_6 + d_6 \qquad y_{10} \geq y_8 + d_8$

Punto B

DA FARE

---

m quartieri popolati da P_j persone

n ambulatori ciascuno con capacità C_i

- d_{ij} = distanza quartiere-ambulatorio

Indici

$i \in \{1 \dots n\}$ $\quad$ n = numero di ambulatori per ogni quartiere

$j \in \{1 \dots m\}$ $\quad$ m = numero di quartieri

Variabili

d_{ij} = distanza ambulatorio - quartiere

C_i = capacità dell'i-esimo ambulatorio
P_j = numero di persone per quartiere

Funzione obiettivo

E) $\min z = d_{ij}$ con d_{ij} = distanza ambulatori i - quartieri j

I) $\min z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_{ij}$

Vincoli:

$C_i \leq n \quad i \in \{1 \ldots n\}$
$P_j \leq m \quad j \in \{1 \ldots m\}$

Variabili

x_i = Quantità per ogni prodotto
$i \in \{1, \ldots 6\}$

Funzione obiettivo

$\max z = 10x_1 + 30x_2 + 6x_3 + 20x_4 + 20x_5 + 8x_6$

Vincoli

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{10}x_4 + x_5 + \frac{1}{2}x_6 \leq 10$$

$$x_1 \geq 2$$
$$x_2 \geq 2$$
$$x_3 \geq 6$$
$$x_4 \geq 10$$
$$x_6 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Variabili

$x_j \longrightarrow$ Quantità di confezioni j

$i \in \{1,2,3\} \longrightarrow$ metalli

$j \in \{1,2,3\} \longrightarrow$ confezione

1 = manganese
2 = cromo
3 = molibdeno

Funzione obiettivo

$$\min z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3$$

Qua stiamo mod. la quantità di confezione

Vincoli:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10000 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 180000 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 20000 \end{cases}$$

x_i = quantità dell'i-esima confezio-

Variabile

x_i = quantità del modello i prodotta
y_j = quantità di materia prima Δ
$i \in \{1,2,3\}$ $j \in \{1,2\}$

Funzione obiettivo

$$\max z = 30x_1 + 20x_2 + 50x_3$$

Vincoli

	1	2	3
A	2	3	5
B	4	2	7

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 4000$$
$$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 6000$$

$x_1 \leq 700$
$x_2 \leq 1400$
$x_3 \leq 2100$

forse equivalenti $\longleftrightarrow$

[redacted]

Variabili

X_i = Quantità di giornali prodotti nella tipografia "i"

Y_j = Richiesta dei centri di smistamento $j \in \{1, 2, 3, 4\}$

Funzione obiettivo

Distanze

	S_1	S_2	S_3	S_4
T_1	20	25	15	5
T_2	12	14	18	30
T_3	19	11	40	12

$\min \; x_1(20+25+15+5) + x_2([illegible]8+30) + x_3(19+11+40+12)$

Richiesta minima

$S_1 \to \geq 100000$

$S_2 \to \geq 150000$

$S_3 \to \geq 50000$

$S_4 \to \geq 70000$

Produzione massima

$x_1 \leq 125000$

$x_2 \leq 180000$

$x_3 \leq 70000$

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 100000$

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 150000$

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 50000$

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 70000$

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 370000$

Qua
ci vuole
l'uguale

$$\sum_{i \in A}^{C} X_{i1} \leq 3200$$

$$\sum_{i \in A}^{C} X_{i2} \leq 3700$$

$$\sum_{i \in A}^{C} X_{i3} \leq 2500$$

$$\sum_{i \in A}^{C} X_{i4} \leq 3000$$

Preso un qualsiasi inceneritore j, tale inceneritore può processare al massimo 900 tonnellate in più degli altri

$$\sum_{i \in A}^{C} X_{in} - \sum_{i \in A}^{C} X_{im} \leq 900$$

con $n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$
e $n \neq m$

→

almeno 1

coperti/giorno

Indici

$i \in \{1, .. 20\}$ → Indica la locazione

$j \in \{1, 2, 3\}$ → Indica la dimensione del ristorante

Parametri

S_j = spesa locale in base alle dimensioni

C_j = capacità locale in base alle dimensioni

Variabile

X_i = indica se il locale aperto nell'i-esima locazione viene aperto

$i \in \{1, ... 20\}$ $\quad i \in \mathbb{Z}$

$x_i \begin{cases} 0 & \text{se il ristorante non viene aperto} \\ 1 & \text{se il ristorante viene aperto} \end{cases}$

Funzione obiettivo

$$\min z = \sum_{i=1}^{20} x_i \cdot S_1 + \sum_{i=1}^{20} x_i \cdot S_2 + \sum_{i=1}^{20} x_i \cdot S_3$$

mettere sommatoria anche per le S

Vincoli

4

Vincoli:

TO $\sum_{i=1}^{4} x_i \geq 3$

CN $\sum_{i=15}^{18} x_i \geq 2$

VC $\sum_{i=5}^{6} x_i \geq 1$

AL $\sum_{i=7}^{8} x_i \geq 1$

NO $\sum_{i=9}^{11} x_i \geq 1$

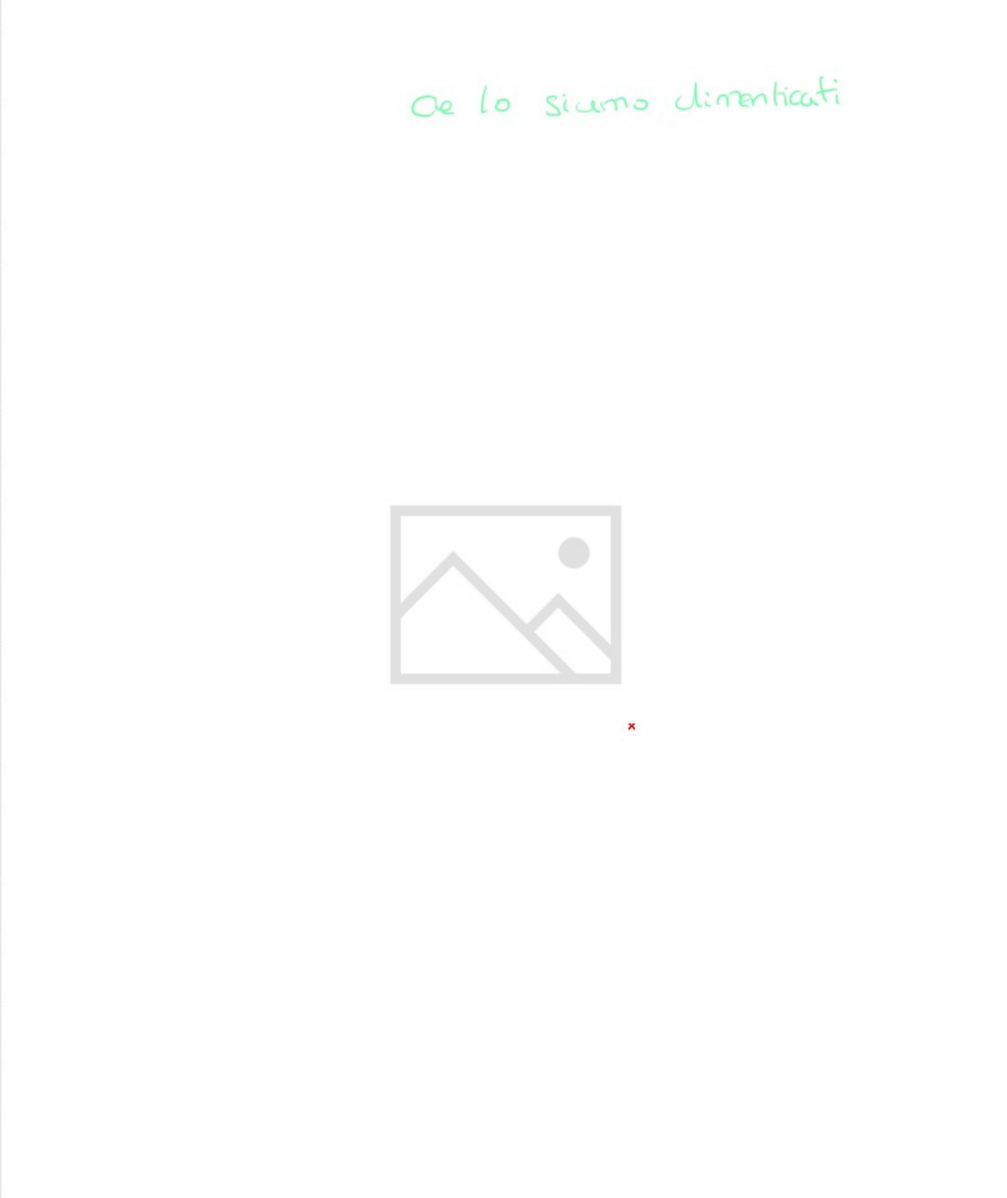
AT $\sum_{i=12}^{14} x_i \geq 1$

VB $\sum_{i=19}^{20} x_i \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i c_i \geq 5000$$

$$\sum_{i=7}^{8} x_i c_i + \sum_{i=12}^{14} x_i c_i$$ → Potrebbero essere separate

Ce lo siamo dimenticati



Variabili

X_{ij} = numero di i menù ordinati, spediti con il mezzo di trasporto j

$i \in \{1,2,3\} \quad i \in \mathbb{Z}^+$

$j \in \{A,B,C\}$

Parametri

c_j = costo del trasporto in base al mezzo j

$j \in \{A,B,C\}$

mezzi di trasporto

menù	A	B	C
1	30	20	19
2	8	15	20
3	11	3	10

g_i = guadagno dato dal menu i

Funzione obiettivo

$$\max z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=A}^{C} x_{ij} (g_i - c_j)$$

$$\left(\max z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=A}^{C} x_{ij} K_{ij} \right.$$

K_{ij} = il guadagno totale dato dal piatto i spedito con j)

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{3} x_{iA} \leq 5$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{iB} \leq 12$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{iC} \leq 23$$

Variabile

x_i = quantità di confezioni di tipo i acquistate

X_i = quantità di confezioni di tipo i acquistate

$i \in \{A,B,C,D\}$

(1) (2) (3) (4) P_i C_i

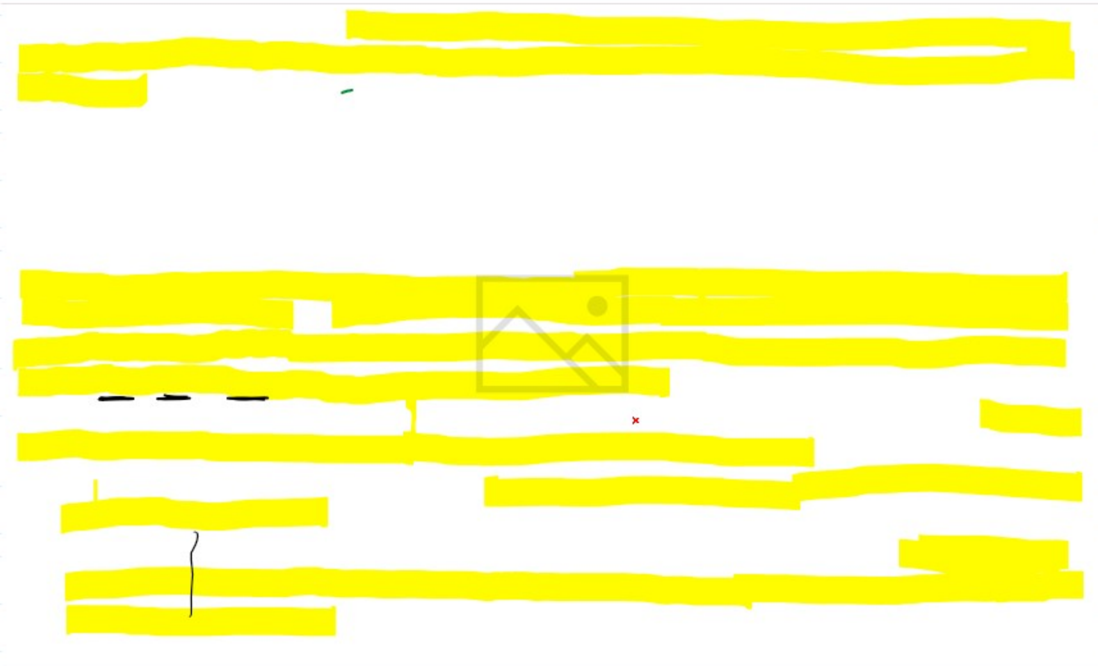
Funzione obiettivo

$$\min z = \sum_{i=A}^{D} X_i C_i$$

Vincoli:

30kg salsa

Da rifare



(a) Variabili

x_{ij} = tonnellate di farina di tipo j acquistate dal fornitore i

$i \in \{A, B, C\}$

$j \in \{1, 2, 3, 4\}$

Parametri

c_{ij} = costo della j-esima farina presso l'i-esimo venditore

1

Funzione obiettivo

$$\min z = \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} c_{ij}$$

$\longrightarrow$ costo della j-esima farina presso l'i-esimo venditore

x_{ij}: tonnellate di farina di tipo j acquistate dal fornitore i

Vincoli

$$\sum_{i=A}^{C} x_{i1} \geq 50$$

$$\sum_{i=A}^{C} x_{i2} \geq 70$$

$$\sum_{i=A}^{C} x_{i3} \geq 90$$

$$\sum_{i=A}^{C} x_{i4} \geq 30$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{Aj} \leq 100$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{Bj} \leq 150$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{Cj} \leq 200$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{kj} \geq 0,2 \sum_{i=A}^{C}\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \qquad k = A, B, C$$

Sommatoria di tutte le tonnellate di farina acquistate dal venditore k

→ 20 % di tutte le farine acquistate da tutti i venditori

$$\sum_{j=1}^{4} x_{Aj} \geq 0,2 \sum_{i=A}^{C}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{Bj} \geq 0,2 \sum_{i=A}^{C}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{Cj} \geq 0,2 \sum_{i=A}^{C}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}$$

(b) $$\min z = \sum_{i=A}^{C}\sum_{j=1}^{4} x_{ij} c_{ij}$$

B e C fanno sconto 2k se compri 50+

$$\min z = \sum_{j=1}^{4} x_{Aj} c_{Aj} + \sum_{j=1}^{4} x_{Bj} c_{Bj} + \sum_{j=1}^{4} x_{Bj} c_{Bj} - 2000 + \sum_{j=1}^{4} x_{Cj} c_{Cj} - 2000$$

Vincoli:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{Bj} \geq 50$$

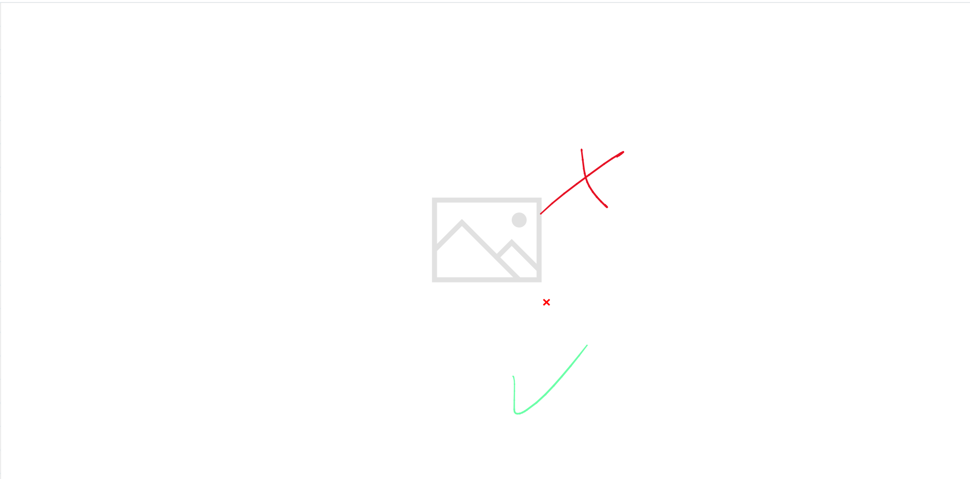
$$\sum_{j=1}^{4} x_{Cj} \geq 50$$

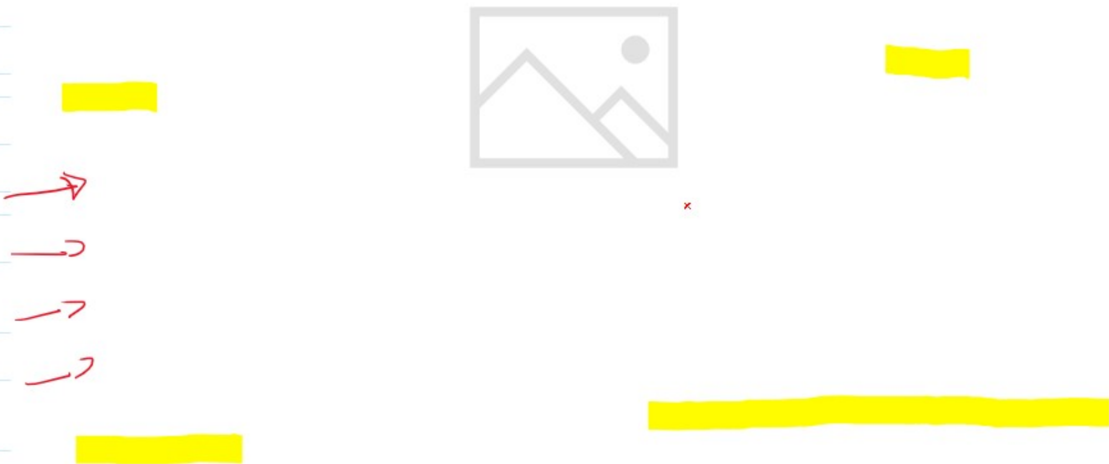
$x_{Bj} \geq 50 \Rightarrow c_{Bj} = c_{Bj} - 2000$

$x_{Cj} \geq 50 \Rightarrow c_{Cj} = c_{Cj} - 2000$

Soluzione

8 punti
perfetto





Variabile decisionale

~~x_{ij} = chilogrammi di i-esima verdura acquistati dal j-esimo venditore~~

~~$i \in \{A,B,C,D\}$ Verdure~~

~~$j \in \{1,2,3,4\}$ Venditori~~

x_i = numero di confezioni acquistate dall'i-esimo venditore

$$y = 19x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 12x_4$$

Funzione obiettivo

$$\min z = \sum_{i=1}^{4} c_i x_i = 12x_1 + 13x_2 + 20x_3 + 11x_4$$

Vincoli

Peso totale

$$19x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 12x_4 \geq 100$$

$$19x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 12x_4 \leq 140$$

Cavoli

$$5x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 8x_4 \geq 0,25\,(19x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 12x_4)$$

Melanzane

$$7x_1 + 4x_3 + 2x_4 \geq 0,20\,(19x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 12x_4)$$

$$7x_1 + 4x_3 + 2x_4 \leq 0,30\,(19x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 12x_4)$$

Fagioli

$$5x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 0,35\,(19x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 12x_4)$$

Pomodoro

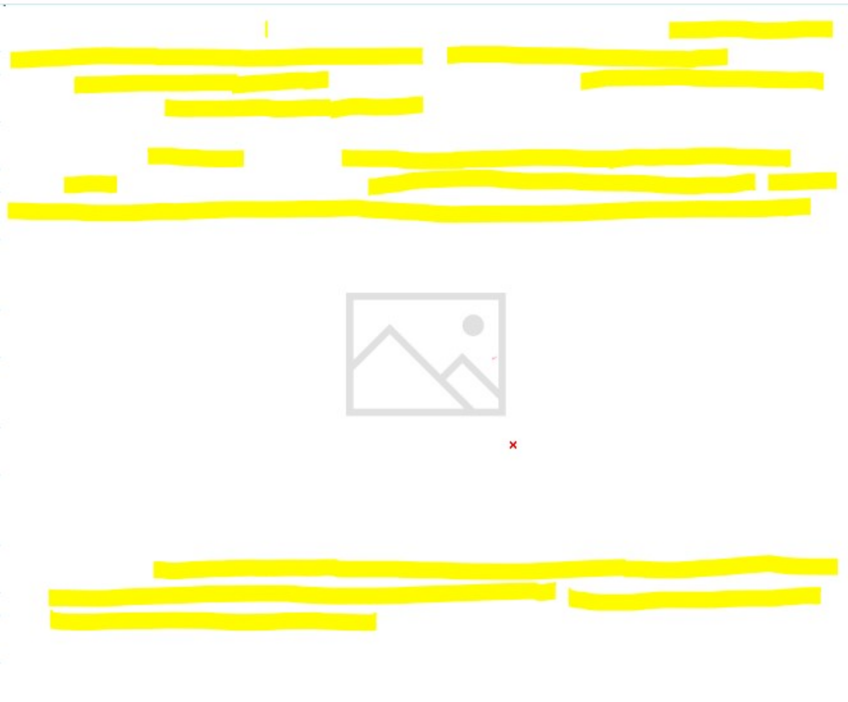
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 0,15\,(19x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 12x_4)$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 0,30\,(19x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 12x_4)$$

$$\min z = \sum_{i=1}^{4} x_i c_i b_i$$

$$b_i \begin{cases} 0 & \text{se la conf } i \text{ NON viene acquistata} \\ 1 & \text{se la co... viene acquistata} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{4} b_i \leq 3$$



(a)

Variabile

x_{ij} = tonnellate di materie prima trasportate dal magazzino i al sito di lavorazione j

$i \in \{A, B, C\}$

$j \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\max z = \sum_{i=A}^{C}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}$$

Vincoli:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{Aj} \leq 100 \qquad \sum_{i=A}^{C} x_{i1} \geq 80$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{Bj} \leq 200 \qquad \sum_{i=A}^{C} x_{i2} \geq 250$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{Cj} \leq 250 \qquad \sum_{i=A}^{C} x_{i3} \geq 100$$

$$\sum_{i=A}^{C} x_{i4} \geq 100$$

$$\sum_{i=A}^{C}\sum_{j=1}^{4} x_{ij} c_{ij} \leq 7000$$

Non capiamo

$$x_{ij} \leq u_{ij} \qquad i = A, B, C \qquad j = 1,2,3,4$$

7000

1b

$$y_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se la tratta } i-j \text{ viene utilizzata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\sum^{C}\sum^{4} y_{ij} \leq 8$$

$$\sum_{i=A}^{C}\sum_{j=1}^{4} y_{ij} \le 8$$

Indici

$i \in \{A, B, C\}$ Impianto di lavorazione

$j \in \{1, .., 10\}$ Lotto

Parametri

p_{ij} = tempo impiegato dall'impianto i per lavorare il lotto j

q_j = quantità di refrigerante richiesto per lavorare il lotto j

Variabile

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se il lotto } j \text{ viene preso in carico dall'impianto } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

f.o.

$$\max z = \sum^{C} \sum^{10} x_{ij}$$

f.o.

$$\max z = \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{10} x_{ij}$$

Vincoli

$$\sum_{i=A}^{C} x_{ij} \leq 1 \qquad j = 1, 2, 3 \dots 10$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{ij} \, p_{ij} \leq 8 \qquad i = A, B, C$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{ij} \, q_j \leq 30 \qquad i = A, B, C$$

Indici

$i \in \{1 \dots n\}$ servizio
$j \in \{1 \dots m\}$ server

Parametri

m_i = memoria richiesta dal servizio i
p_i = potenza di calcolo del servizio i
r_i = ricavo del servizio i

M_j = capacità massima di memoria del server j
P_j = potenza di calcolo massima del server j
e_{ij} = energia elettrica richiesta dal servizio i per girare sul server j

n = numero di servizi
m = numero di server
E = energia elettrica a disposizione

Variabili

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se il servizio } i \text{ è preso in carico dal server } j \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

servizi

server j \ i	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0
3	0	0	0	1	1

Funzione obiettivo

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} r_i$$

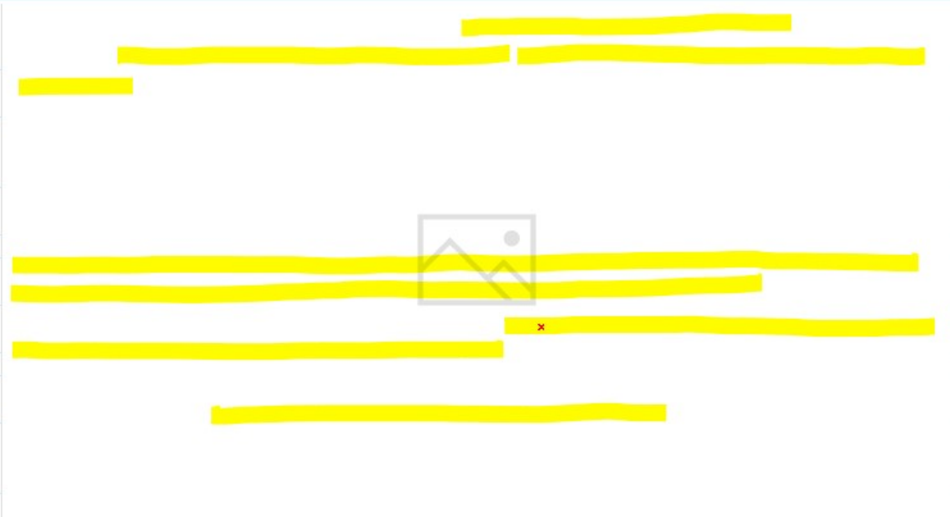
Vincoli:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad i = 1 \dots n$$

$$x_{ij}\, m_i \leq M_j \qquad i = 1 \dots n \quad j = 1 \dots m$$

$$x_{ij}\, p_i \leq P_j \qquad i = 1 \dots n \quad j = 1 \dots m$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}\, e_{ij} \leq E$$



Indici

$i \in \{A, B, C\}$ stabilimenti

$j \in \{1, 2, 3\}$ fornitori

Parametri

c_{ij} = costo in euro di un litro acquistato per lo stabilimento i dal fornitore j

Variabili

x_{ij} = litri di combustibile acquistati dall'azienda per lo stabilimento i, dal fornitore j

Funzione obiettivo

$$\sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}\, c_{ij}$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^{3} x_{Aj} \geq 10'000 \qquad \sum_{i=A}^{C} x_{i1} \leq 20'000$$

$$\sum^{3} x \geq 15'000 \qquad \sum^{C} x_{i2} \leq 30'000$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{Bj} \geq 15'000 \qquad \sum_{i=A}^{C} X_{i2} \leq 30'000$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{cj} \geq 25'000 \qquad \sum_{i=A}^{C} X_{i3} \leq 25'000$$

$$\sum_{i=A}^{C} x_{ij} \geq 0.20 \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \qquad j = 1,2,3$$

se $x_{i1} > 7000$

allora $\sum_{i=A}^{C} x_{i1} c_{i1} = \sum_{i=A}^{C} x_{i1} c_{i1} - 2000$

2) Aggiungiamo una nuova variabile binaria y_j che indica se dal fornitore j sono stati aquistati più di 7k litri

$$y_j \begin{cases} 1 & \text{Se il forn. j fornise più di 7'000 litri} \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

Nuova f.o.

$$\sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} c_{ij} - y_j (2000)$$

$$\sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} c_{ij} - \sum_{j=1}^{2} y_j (2000)$$

Nuovi vincoli (in aggiunta ai vecchi)

$y_3 = 0$