L2

ESERCIZI A LEZIONE

(1)

L'acciaieria PLASTIK deve evadere un ordine di 1000 tonnellate di acciaio INOX. Per questa produzione servono manganese (almeno l'1% in peso), cromo (almeno il 18%) e molibdeno (almeno il 2%).
I fornitori di metalli non ferrosi vendono — per esigenze di mercato — questi prodotti in tre tipi di confezioni differenti. La prima confezione contiene 2 Kg. di manganese, 2 Kg. di cromo e 1 Kg. di molibdeno e costa 10 euro. La seconda confezione contiene 2 Kg. di manganese, 3 Kg. di cromo e 1 Kg. di molibdeno e costa 15 euro. La terza confezione contiene 1 Kg. di manganese, 2 Kg. di cromo e 5 Kg. di molibdeno e costa 20 euro.
Formulare il modello di Programmazione Lineare per minimizzare il costo di acquisto delle confezioni.

Si organizza la Tabella

Tipo conf.	Manganese	Cromo	Molibdeno	Costo
1	2	2	1	10
2	2	3	1	15
3	1	2	5	20
Fabbisogno (Kg)	10000	180000	20000	

→ Sono le percentuali del Testo

(0) Definisco le variabili di controllo

$x_1 =$ N° di 1° confezione $\qquad x_3 =$ // // 3° confezione.

$x_2 =$ // // 2° //

(1) Definisco la funzione obiettivo

$$f(x_1, x_2, x_3) = 10 \cdot x_1 + 15 x_2 + 20 x_3$$

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ $\qquad$ si vuole il min di f

(2) Definisco i vincoli

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot x_1 + 2 x_2 + x_3 \geq 10000 \quad \text{Manganese}$$

$$g_2(// \quad //) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \geq 180000 \quad \text{Cromo}$$

$$g_3(// \quad //) = x_1 + x_2 + 5 \cdot x_3 \geq 20000 \quad \text{Molibdeno}$$

L2

Problemi di mix

Un problema semplificato di produzione

Una ditta produce sette tipi di prodotti in legno numerati $1, 2, \ldots, 7$; ognuno dei mobili viene processato dai reparti di falegnameria, verniciatura, assemblaggio, verifica e imballaggio. Questi reparti dispongono rispettivamente di 2000, 1500, 1700, 300 e 500 ore-uomo di lavoro al mese. I prodotti richiedono lavorazioni di diversa entità, come da tabella, ed hanno ognuno il margine di profitto unitario indicato.

Prodotto	1	2	3	4	5	6	7
Falegn.	7	5	9	10	10	12	15
Vernic.	2	2	2	3	3	3	3
Assembl.	2	2	4	7	9	15	18
Verifica	1	1	1	2	1	2	2
Imball.	1	1	1	1	2	1	0
Profitto	10	18	20	25	27	28	35

(ore-uomo di lavorazione per prodotto; profitto in euro)

La produzione deve sottostare ai seguenti vincoli. Dei prodotti 1 e 2 si ritiene di non poter vendere più di 70 unità; dei prodotti 1, 2, 3 e 4 si devono produrre almeno 20 unità. Per tutti gli altri prodotti, non si pongono limiti precisi ma si vuole che nessuno rappresenti più del 35% della produzione totale. *

Scrivere un programma lineare che permette di massimizzare il profitto ottenuto dalla vendita della produzione mensile.

* 5, 6 e 7 devono avere quantità minori del 35% della quantità totale.

(0) Definisco le variabili

x_i con i che rappresenta il prodotto

$x_1, x_2, \ldots x_7$

(1) Definisco la funzione obiettivo

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_7) = 10 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 + 25 \cdot x_4 + 27 \cdot x_5 + 28 \cdot x_6 + 35 \cdot x_7$$

Per avere il massimo $\rightarrow \max(f(x_1, \ldots x_7))$

$x_1, x_2 \ldots x_7 \in \mathbb{N}$

(2) Definisco i vincoli

$$g(x_1 \ldots x_7) = 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 + 10x_5 + 12x_6 + 15x_7 \leq 2000$$ Ore in Falegnameria ≤ 2000

$$g(x_1 \ldots x_7) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 \leq 1500$$ Ore in Falegnameria ≤ 1500

⋮ + gli altri vincoli per reparto

$x_1 \leq 70 \wedge x_2 \leq 70$

$x_1 \geq 20 \wedge x_2 \geq 20 \wedge x_3 \geq 20 \wedge x_4 \geq 20$

Parte del 35%

$$\cancel{\frac{x_5}{\sum_{i=1}^{i=7} x_i} \leq \frac{35}{100}} \Longrightarrow x_5 \leq \frac{35}{100} \cdot \sum_{i=1}^{i=7} x_i$$

No! niente frazioni con variabili!

$$x_6 \leq \frac{35}{100} \cdot \sum_{i=1}^{i=7} x_i$$

$$x_7 \leq \frac{35}{100} \sum_{i=1}^{i=7} x_i$$

✓ Ha lo stesso significato

L3

Problemi di mix

Costruzione (semplificata) di portafoglio

Il sig. Ibrahim Rossi vuole investire la somma di 500000 euro, con l'orizzonte temporale di un anno. A tal fine il sig. Rossi vuole ripartire il capitale in due tipi di investimenti:

(a) un conto bancario privo di rischi che paga interessi del 2%;

(b) un portafoglio azionario composto da un mix di quote di ETF descritti qui di seguito.

Gli ETF che il sig. Rossi prende in considerazione sono i seguenti.

ID	Denominazione	Settore	Rend. atteso	Max. perdita	Prezzo
1	Euro STOXX 600	Europa, globale	14%	-5%	36
2	Euro STOXX 600 HC	Europa, Health-care	20%	-10%	76
3	Euro STOXX 600 Banks	Europa, Finanziari	23%	-25%	19
4	USA S&P500	Usa, globale	12%	-4%	17
5	BRICS 50	Mercati emergenti	15%	-21%	18
6	MSCI Emerg. Marks.	Mercati emergenti	13%	-19%	27

Problemi di mix

Il sig. Rossi, per ogni ETF, ha stimato il rendimento atteso a un anno e anche una possibile massima perdita che ritiene che possa verificarsi nel caso l'ETF abbia una cattiva performance.
Il sig. Rossi vuole ripartire il suo denaro al fine di massimizzare il rendimento atteso a un anno, compatibilmente con i seguenti vincoli.

(1) Non meno di 150000 euro devono essere depositati nel conto privo di rischi.

(2) In ogni ETF non devono essere investiti più di 100000 euro.

(3) Non più del 20% della quota investita in ETF deve essere investita in mercati emergenti.

(4) Almeno il 10% della quota investita in ETF deve essere nel settore health-care.

(5) La perdita massima possibile complessiva del portafoglio ETF non deve essere superiore al 15%.

Formulare il programma lineare per risolvere il problema del sig. Rossi.

(0) Variabili di controllo => Quanti soldi spendere

x_1 = l'euro STOXX...1 Nell'esercizio del prof lui ha usato il n° di quote

$x_2 = ID_2 \dots$, $x_6 = MSCI\dots$, x_7 = Conto privo di rischi

(1) Funzione Obiettivo

$$f(x_1, x_2, \dots, x_7) \Rightarrow \frac{14}{100}\cdot x_1 + \frac{20}{100}\cdot x_2 + \frac{23}{100}\cdot x_3 + \frac{12}{100}\cdot x_4 + \frac{15}{100}x_5 + \frac{13}{100}x_6 + \frac{2}{100}\cdot x_7$$

sarà il max(f)

(2) Vincoli

$x_7 \geq 150'000$ Manca $x_7 + \sum_{i=1}^{x=6} = 500'000$

$x_1 \leq 100'000 \wedge x_2 \dots \wedge \dots x_6 \leq 100'000$

~~$x_5 \leq \sum_{i=1}^{i=6} x_i \cdot \frac{20}{100} \wedge x_6 \leq \sum_{i=1}^{i=6} x_i \frac{20}{100}$~~

Usare la somma $x_5 + x_6 \leq \frac{20}{100} \cdot \sum_{i=1}^{6} x_i$

$\sum_{i=1}^{i=6} x_i \cdot \frac{10}{100} \cancel{\geq} x_2$

almeno! $\leq$

$$g(x_1, x_2, x_3 \dots x_7) = -\frac{5}{100}\cdot x_1 - \frac{10}{100} x_2 - \dots - \frac{19}{100} x_6 + \cancel{0} x_7 \leq \sum_{i=1}^{i=6} x_i \cdot \frac{15}{100}$$

Manca specificare la tipologia di variabili di controllo!

L3

Problema di "copertura"

Modelli di copertura

Copertura di turni di lavoro.

Un motel autostradale, dovendo garantire un servizio continuato 24 ore su 24, ha bisogno di un numero minimo di inservienti per ogni ora del giorno secondo la seguente tabella.

	Fascia oraria	Numero min.	Fascia oraria	Numero min.	
1	02-06	4	14-18	7	4
2	06-10	8	18-22	12	5
3	10-14	10	22-02	4	6

Ciascun inserviente lavora 8 ore consecutive al giorno, coprendo due fasce orarie consecutive.
Formulare il modello di Programmazione Lineare per garantire la presenza richiesta utilizzando il minor numero possibile di inservienti.

- Min di inservienti
- 1 inserviente copre 2 fasce
- Chi attacca in 1 fascia fa la sua la f deve dare un num. di inserv. del quale si deve fare il min.

(0) Variabili di controllo

f_i = fascia oraria $\quad i = \{1, \dots, 6\}$ fascia 1, 2, 3 ... 6

x_1 = quanti inservienti per la 1° fascia ecc.

(1) Funzione obiettivo

$f(x_1, x_2 \dots, x_6) = \sum_{i=1}^{i=6} x_i$ in questo caso non c'é bisogno di moltiplicare con niente.

(2) Vincoli

1) $x_6 + x_1 \geq 4$ → Perché "fissiamo" i turni delle persone in fase consecutiva
2) $x_1 + x_2 \geq 8$
3) $x_2 + x_3 \geq 10$
4) $x_3 + x_4 \geq 7$
5) $x_4 + x_5 \geq 12$
6) $x_5 + x_6 \geq 4$

L3 •

In un impianto produttivo occorre evadere un lotto costituito da 10 pezzi $\{1, 2, \dots, 10\}$ da sottoporre a lavorazione. Per eseguire le lavorazioni in questione si possono utilizzare tre macchine diverse M_1, M_2, M_3. Tutte e tre le macchine possono eseguire le stesse lavorazioni su ogni pezzo, ma a causa dei tipi di lavorazione richiesti e del tipo di tecnologia di ogni macchina, il tempo richiesto (in ore) per lavorare ogni pezzo è diverso a seconda della macchina che lo processa. I tempi sono dati dalla seguente matrice macchine-pezzi.

$$
p_{ij} = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
2 & 7 & 3 & 4 & 9 & 2 & 1 & 1 & 2.5 & 3 \\
1 & 1 & 6 & 3 & 2 & 3.5 & 3 & 3 & 4 & 1 \\
2 & 3 & 2 & 1.5 & 4 & 4 & 1 & 2.5 & 2 & 7
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Le macchine sono tutte disponibili dallo stesso istante (apertura del reparto), lavorano senza interruzioni e quando una macchina comincia un pezzo lo lavora senza interruzioni per il tempo previsto, portandolo a compimento. Il reparto non si occupa di altre lavorazioni fino a quando non ha terminato il lotto in questione.
Scrivere il programma lineare che permette di pianificare la lavorazione dei pezzi sulle macchine in modo da terminare il lotto il più in fretta possibile.

↳ Fare il min del max

(0) Variabili di controllo
La matrice con i bool per dire se il pezzo viene elaborato da quella macchina:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}, \dots, x_{1\,10} \\ \vdots \\ x_{3\,1}, \dots x_{3\,10} \end{pmatrix} \quad \text{con } x_{ij} \in \{0,1\}$$

(1) Funzione obiettivo
Dichiaro T_i come il Tempo complessivo per fare un Lotto come

$$T_i = \sum_{j=1}^{j=10} p_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\min z = y \qquad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{i=3} T_i \leq y$$

(2) • "Niente altre lavorazioni"

$$\sum_{i=0}^{i=3} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in \{1,2,3\}$$

• $y \geq 0$

L3

Piano di investimento con reinvestimento degli utili.

Un finanziere ha a disposizione due piani di investimento A e B, disponibili all'inizio di ciascuno dei prossimi cinque anni. Ogni euro investito in A all'inizio di ogni anno dà, due anni più tardi, un profitto di 0.4 euro, e può essere immediatamente reinvestito. Ogni euro investito in B all'inizio di ogni anno dà, tre anni dopo, un profitto di 0.7 euro. In più, da un certo momento in avanti, sarà possibile sfruttare anche due altri piani di investimento C e D. In particolare, ogni euro investito in C all'inizio del secondo anno raddoppierà dopo quattro anni. Ogni euro investito in D all'inizio del quinto anno darà un profitto di 0.3 euro l'anno successivo. Anche per i piani B, C, D, vale la possibilità di reinvestimento come per il piano A.
Il finanziere ha a disposizione 100000 euro e vuole sapere quale piano di investimento massimizza il profitto maturato entro l'inizio del sesto anno.

- Input: 100'000
Output: max profitto entro il 6° anno

(0) Definisco la tabella dei dati % PROFITTO

Rendim.	1	2	3	4	5	6
A	0	0	0.4	0	0.4	0
B	0	0	0	0.7	0	0
C	0	0	0	0	0	1
D	0	0	0	0	0	0.3

$= A \in M(4, 6, \mathbb{R})$

(1) Funzione Obiettivo

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{i=4} x_1 \cdot \left[\sum_{j=1}^{j=6} a_{ij} \right] \quad \max f$$

con $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$

(2) Vincoli

- $\sum_{i=1}^{i=4} x_i = 1$ ovvero solo 1 variabile "accesa"

23

Problemi con vincoli logici
Un problema di copertura

Scrivere il modello in programmazione lineare del seguente problema. Si consideri un territorio sul quale siano localizzati 7 punti di domanda (ad es. 7 città) indicati in tabella con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Si considerino, inoltre, 5 punti di offerta indicati in tabella con A, B, C, D, E nei quali potrebbero essere aperti dei centri vendita di un'impresa di distribuzione. Tale impresa è interessata a soddisfare la domanda sopramenzionata in modo tale che i clienti non percorrano più di 30 minuti di auto per raggiungere almeno uno dei centri vendita. In tabella, per ogni coppia di punti di domanda e di offerta, viene indicato il tempo auto necessario. L'impresa ha inoltre fatto sapere che accetterà soluzioni che prevedano l'attivazione del centro vendita B solo se è già attivo uno dei centri C o D.
L'apertura dei centri vendita costa rispettivamente (in miliardi di lire): $A = 310$, $B = 250$, $C = 260$, $D = 330$, $E = 280$.

Problemi con decisioni logiche

L'obiettivo dell'impresa è di minimizzare i costi di apertura dei centri vendita garantendo il fatto che che tutti i punti di domanda vengano serviti.

	A	B	C	D	E
1	41	33	24	29	58
2	25	12	22	58	41
3	21	43	34	54	18
4	21	42	39	26	18
5	11	23	24	29	53
6	47	23	19	16	31
7	37	47	51	26	19

<30 → B e C *
<30 → B, C, A
⋮

Gli obiettivi sono:
- il min del costo di apertura
- soddisfare i centri di richiesta

(1) Definisco la funzione obiettivo

$$f(x_1, x_2, \dots, x_5) = 310 \cdot x_1 + 250 \cdot x_2 + 260 \cdot x_3 + 330\, x_4 + 280 \cdot x_5$$

Si vuole il min f, ovvero il costo minimo di apertura.

(2) Definisco i vincoli

- $x_1, x_2, \dots, x_5 \in \{0,1\} \rightarrow$ Dettano l'apertura o meno del centro
- $\cancel{x_2 = x_3 + x_4}$ Non è un or ma una implicazione logica

$B \rightarrow C \vee D$

$x_3 + x_4 \geq x_2$

B	$C \vee D$	$B \rightarrow C \vee D$	
1	0	0	$1 \leq 0+0$ ✓ nel senso che non è valida
0	1	1	$0 \leq 1+1$ ✓
1	0	1	$1 \leq 0+1$ ✓
0	1	1	$0 \leq 1+1$ ✓

- $x_1 \cdot 41 + x_2 \cdot 33 + x_3 \cdot 24 + x_4 \cdot 29 + x_5 \cdot 58 \leq 30 \cdot \sum_{i=1}^{i=5} \cdot x_i$ (1)

⋮ e così via per le altre.

Si può semplificare "complicando" le scelte, ovvero:

(1) → $B + C \geq 1$ $\quad B \vee C$

B	C	$B \vee C$	
0	0	0	$0 \geq 1$ ✓
0	1	1	$1 \geq 1$ ✓
1	0	1	$1 \geq 1$ ✓
1	1	1	$1 \geq 1$ ✓

(2) → $B + C + A \geq 2$

e così via...

B	C	A	R	
0	0	0	0	$0 \geq 2$ ✓
0	0	1	1	$1 \geq 1$ ✓
0	1	0	1	=
0	1	1	1	$2 \geq 1$ ✓
1	0	0	1	=
1	0	1	1	=
1	1	0	1	
1	1	1	1	$3 \geq 1$ ✓

24

Problemi con vincoli logici - grande M

Pianificazione di coltivazioni

Un'azienda agricola produce mais, soia e grano in tre tenute A, B, C. La tenuta A dispone di 600 ettari di terreno e di una riserva di 8×10^6 m^3 di acqua. La tenuta B ha 700 ettari di terreno e 5×10^6 m^3 di acqua. La terza dispone di 450 ettari e di 6×10^6 m^3. Le produzioni di mais, soia e grano garantiscono rispettivamente profitti di 5, 7 e 6 Keuro/ettaro. I consumi di acqua sono di 20000 m^3/ha per il mais,10000 m^3/ha per la soia e 10000 m^3/ha per il grano. Le direttive della comunità europea richiedono che:

- almeno una tenuta lasci 200 ettari di terreno incolto, e
- l'estensione complessiva del terreno coltivato a soia dall'azienda non superi il 40% del totale del suolo coltivato.

Formulare il programma lineare per la massimizzazione del profitto.

Tenute

	ettari	acqua (mln)
A	600	8
B	700	5
C	450	6

$$ett = \begin{pmatrix} 600 \\ 700 \\ 450 \end{pmatrix}$$

Produzioni

Tipo	Profitti (K·€/ettaro)	Acqua (m^3)
"Mais"	5	20'000
"Soia"	7	10'000
"Grano"	6	10'000

Si vuole il max del profitto

(1) Definizione variabili obiettivo

$$\begin{pmatrix} x_{AM} & x_{AS} & x_{AG} \\ x_{BM} & x_{BS} & x_{BG} \\ x_{CM} & x_{CS} & x_{CG} \end{pmatrix}$$

con x_{AM} = Quantità di ettari riservati a Mais per settore A $\in \mathbb{N}$

$A=1, B=2, C=3$

$M=1, S=2, G=3$

e $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ → si stanno risparmiando ettori A, B, C $\in \{0,1\}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$ Matrice dei profitti p_{ij}

$$\begin{pmatrix} 20k & 10k & 10k \\ 20k & 10k & 10k \\ 20k & 10k & 10k \end{pmatrix}$$ Matrice dei consumi c_{ij}

(2) Definisco la funzione obiettivo

$$f(\dots) = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} p_{ij} \cdot x_{ij} \qquad \max f$$

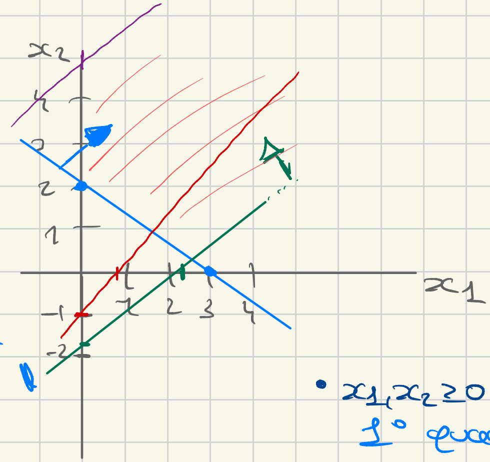
(3) Vincoli

- $\sum_{i=1}^{i=3} x_{1i} \cdot c_{1i} \le 8'000'000$
  - $\le 5'000'000$
  - $\le 6'000'000$
- $\sum_{i=1}^{i=3} x_{1i} \le ett_i - 200 \cdot b_i$
- $b_1 + b_2 + b_3 \ge 1$
- $\sum_{i=1}^{i=3} x_{i2} \le \left[\sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} x_{ij} \right] \cdot 0{,}4$
-

L7

(1)

$$\max z = -x_1 + 3x_2$$
$$\text{soggetto a } 2x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$3x_1 - 4x_2 \leq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



(1) calcolo vincoli

- $2x_1 + 3x_2 \geq 6$

  $2x_1 + 3x_2 = 6$

  - $\frac{\cancel{2}x_1}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{6}\,3}{\cancel{2}}$
  - $\frac{\cancel{3}x_2}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{6}\,2}{\cancel{3}}$

x_1	x_2
3	0
0	2

$0 \geq 6$

- $3x_1 - 4x_2 \leq 7$

  $3x_1 - 4x_2 = 7$

  - $\frac{\cancel{3}x_1}{\cancel{3}} = \frac{7}{3}$
  - $-\frac{\cancel{4}x_2}{\cancel{-4}} = -\frac{7}{4}$

x_1	x_2
$\frac{7}{3}$	0
0	$-\frac{7}{4}$

$0 \leq 7$

- $x_1, x_2 \geq 0$

  1° quadrante

(2) Calcolo il vettore e direzione

$K = -x_1 + 3x_2$

$1 = -x_1 + 3x_2$

$\rightarrow -1 = +x_1$

$\rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\cancel{3}x_2}{\cancel{3}}$

x_1	x_2
0	-1
$\frac{1}{3}$	0

$(-1, 3)$

Crescendo verso l'alto la vetta cresce all'infinito verso x_2
la ricerca del massimo ha ∞ soluzioni

(2) Trasformarlo in forma standard

- $4x_1 + 5x_2 \leq 10$

  $4x_1 + 5x_2 + y_1 = 1$

- $4x_1 + 10x_2 \leq 15$

  $4x_1 + 10x_2 - y_2 = 15$

(1) Calcolare il punto migliore per il seguente modello lineare:

$\max z = 2x_1 + x_2$

Vincoli
- $x_1 + x_2 \geq 4$
- $x_1 - 3x_2 \leq 6$
- $x_1 \leq 8$
- $x_1, x_2 \geq 0$

(0) Trasformo in forma standard
- max → ok
- Variabili ≥ 0 → ok
- "=" al posto di "$\leq, <, >, \geq$"

$x_1 + x_2 \geq 4 \Rightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 4$

$x_1 - 3x_2 \leq 6 \Rightarrow x_1 - 3x_2 + x_4 = 6$

$x_1 \leq 8 \Rightarrow x_1 + x_5 = 8$

(1) Scelgo le variabili in base e fuori base

1.1) Base: Tip = scegliere variabili che avranno termine noto positivo

$x_1 = 4 - x_2 + x_3$

$x_4 = 2 + 4x_2 - x_3$

$x_5 = 4 + x_2 - x_3$

$x_5 = 8 - \underbrace{(4 - x_2 + x_3)}_{x_1} = 4 + x_2 - x_3$

1.2) F. obiettivo $2x_1 + x_2$
è in base → ! ✓

$2x_1 = 2 \cdot (4 - x_2 + x_3) \Rightarrow 8 - 2x_2 + 2x_3$

$2x_1 + x_2 = 8 - x_2 + 2x_3$

(3 → Giro 1.)

3.1 Controllo se è ottima $8 - x_2 + 2x_3$ ✓ ! so x_3 possiamo ancora lavorare

(1) Continuazione

(3 - Giro 1)

3.2 → Determino variabile entrante e uscente

Ho il sistema così

$z = 8 - x_2 + 2x_3$

$x_1 = 4 - x_2 + x_3$

$x_4 = 2 + 4x_2 - x_3$ ←

$x_5 = 4 + x_2 - x_3$ ←

Si sceglie l'uscente come 1 var. pos nella fo obiettivo

Considerando x_3

Guardo i punti in cui è < 0

Calcolo i rapporti

$x_4 = \frac{2}{1}$ ← MIN e se questa

$x_5 = \frac{4}{1}$ ← coeff. di $|x_3|$

3.3 Scambio

$x_3 = 2 + 4x_2 - x_4$

$x_1 = 6 + 3x_2 - x_4$

$x_5 = 2 - 3x_2 + x_4$

$\overbrace{4 - x_2 + 2 + 4x_2 - x_4}^{x_3}$

$4 + x_2 - 2 - 4x_2 + x_4$

$z = 8 - x_2 + 2 \cdot [2 + 4x_2 - x_4]$

$= \quad // \quad + 4 + 8x_2 - 2x_4$

$= 12 + 7x_2 - 2x_4$ ← Fine giro 1

!

(3: Giro 2)

3.1

3.2 ENTRANTE: x_2

USCENTE: x_5

3.3 Ricalcolo

L12

(1) Continuazione

$x_3 = 2 + 4x_2 - x_4$

$x_1 = 6 + 3x_2 - x_4$

$x_5 = 2 - 3x_2 + x_4$

$z = 12 + 7x_2 - 2x_4$

3.3) Ricalcolo

$(x_5) \to \quad x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4$ *

$(x_3) \to \quad x_3 = \frac{14}{3} - \frac{4}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4$

$2 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4\right) - x_4$

$= 2 + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}x_5 + \frac{4}{3}x_4 - x_4$

$= \frac{14}{3} - \frac{4}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4$

$(x_1) \to x_1 = 8 - x_5$

$= 6 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4\right) - x_4$

$= 6 + 2 - x_5 + \cancel{x_4} - \cancel{x_4}$

$= 8 - x_5$

$z = \frac{50}{3} - \frac{7}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4$ ✓ !

$12 + 7 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4\right) - 2x_4$

$= 12 + \frac{14}{3} - \frac{7}{3}x_5 + \frac{7}{3}x_4 - 2x_4$

$= \frac{50}{3} - \frac{7}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4$

(3: Giro 3)

3.1

3.2 → USCENTE ! Non c'è perché sono tutte ≥ 0

ENTRANTE: x_4

$\Downarrow$

Problema infinito *

L13

1) Risolvere il seguente problema:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Risolvere con metodo grafico ✓
2. Forma standard
3. Elencare le basi ammissibili del problema
4. Risolvere con simplesso

1.1) Risoluzione con metodo grafico

(1) Def. Rette vincoli

• $-x_1 + 3x_2 = 6$ ↓

x_1	x_2
0	2
1	$\frac{7}{3}$

$\frac{3x_2}{3} = \frac{6}{3}\ 2$

$-1 + 3x_2 = 6$

$\frac{3x_2}{3} = \frac{7}{3}$

• $2x_1 + x_2 = 6$ ↓

x_1	x_2
0	6
1	4

$x_2 = 6$

$2 + x_2 = 6$
$x_2 = 4$

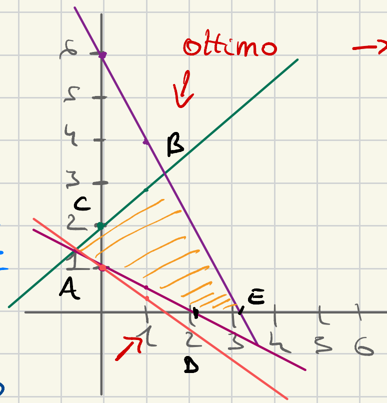
• $x_1 + 2x_2 = 2$ ↑

x_1	x_2
0	1
1	$\frac{1}{2}$

$\frac{2x_2}{2} = \frac{2}{2}\ 1$

$1 + 2x_2 = 2$

$\frac{2x_2}{2} = \frac{1}{2}$



→ $B = \left(\frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$

$A = (0, 1)$

$C = (0, 2)$

$D = (2, 0)$

$E = (3, 0)$

(2) Def. funz. obiettivo

$2x_1 + 3x_2 = k \xrightarrow[k=3]{}$ $2x_1 + 3x_2 = 3$

$\frac{3x_2}{3} = \frac{3}{3}\ 1$

$2 + 3x_2 = 3 - 2$

$\frac{3x_2}{3} = \frac{1}{3}$

x_1	x_2
0	1
1	$\frac{1}{3}$

(3) Det coord. punto ottimo

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 + 3x_2 \\ x_2 = 6 - 2(-6 + 3x_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} // \\ x_2 = 6 + 12 - 6x_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} // \\ \frac{7x_2}{7} = \frac{18}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 + 3 \cdot \frac{18}{7} \\ x_2 = \frac{18}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 + \frac{54}{7} \\ x_2 = \frac{18}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{12}{7} \\ x_2 = \frac{18}{7} \end{cases}$$

$54 - 42 = 12$

$18 \cdot 3 = 54$

$\frac{-42 + 54}{7} = \frac{12}{7}$

$$\max z = 2 \cdot \left(\frac{12}{7}\right) + 3\left(\frac{18}{7}\right) = \frac{24}{7} + \frac{54}{7} = \frac{68}{7}$$

2-13

(1) Risolvere il seguente problema:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

1. Risolvere con metodo grafico ✓
2. Forma standard ✓
3. Elencare le basi ammissibili del problema ✓
4. Risolvere con simplesso

(1.4) Forma standard

(1) Max = ✓

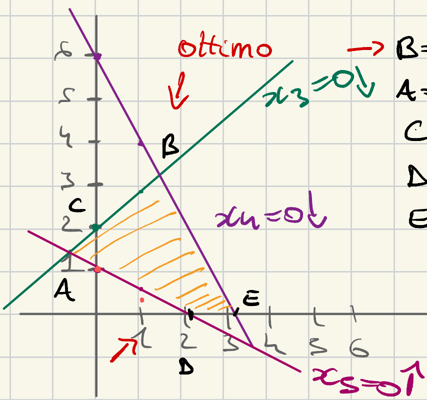
(2) Var. pos = ✓

(3) "=" al posto di "<, >"

- $-x_1 + 3x_2 \le 6 \rightarrow -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$
- $2x_1 + x_2 \le 6 \rightarrow 2x_1 + x_2 + x_4 = 6$
- $x_1 + 2x_2 \ge 2 \rightarrow x_1 + 2x_2 - x_5 = 2$

$x_1, \dots, x_5 \ge 0$

(1.5) Basi ammissibili



$B = \left(\frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$

$A = (0, 1)$

$C = (0, 2)$

$D = (2, 0)$

$E = (3, 0)$

$\forall$ vertice elencare le x per i quali sta dentro (oppure provare a sost.)

- $A \rightarrow (0, 1)$ (x_1, x_2) BASI: (x_2, x_3, x_4)
  - $0 + 3 + x_3 = 6$ ↳ $\underline{x_3 = 3} > 0$
  - $0 + 1 + x_4 = 6 \rightarrow \underline{x_4 = 5} > 0$
  - $0 + 2 - x_5 = 2$ ↳ $\underline{x_5 = 0}$ $\cancel{>0}$

- B $\left(\frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$ Tramite grafico
  - $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ Per def. del punto
  - $x_5 > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

  Quindi (x_1, x_2, x_5)

- C $(0, 2) \rightarrow (x_2, x_5, x_4)$
- D $(2, 0) \rightarrow (x_1, x_4, x_3)$
- E $(3, 0) \rightarrow (x_1, x_3, x_5)$

L13

(1) Risolvere il seguente problema:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

1. Risolvere con metodo grafico ✓
2. Forma standard ✓
3. Elencare le basi ammissibili del problema ✓
4. Risolvere con simplesso

(1.4) Risolvere con simplesso

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \qquad z = 0 + 2x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 - x_5 = 2$$
$$x_1, \dots, x_5 \ge 0$$

$$\frac{2}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$$

Con

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5 \qquad x_3 = 6 + x_1 - 3\cdot\left(1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5\right)$$

ESCE $\rightarrow$ $x_3 = 3 + \frac{5}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_5 \quad \left(3 \cdot \frac{2}{3} = 2\right) \qquad = 6 + x_1 - 3 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_5$

$$x_4 = 5 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5 \quad (5 \cdot 2 = 10) \qquad = 3 + \frac{5}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_5$$

$$z = 2x_1 + 3\left(1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5\right) \qquad x_4 = 6 - 2x_1 - x_2$$
$$= 2x_1 + 3 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_5 \qquad = 6 - 2x_1 - \left(1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5\right)$$
$$= 3 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_5 \qquad = 6 - 2x_1 - 1 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5$$

ENTRA $\qquad = 5 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5$

(2)

$$x_5 = 2 + \frac{5}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \qquad \frac{2}{3}\,\frac{3}{2}x_5 = 3 + \frac{5}{2}x_1 - x_3$$
$$x_2 = 2 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \qquad = \frac{2}{3}\cdot 3 + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}x_1 - \frac{2}{3}x_3$$
$$x_4 = 4 - \frac{7}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 \qquad x_5 = 2 + \frac{5}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3$$

$$x_3 = 5 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3\right) \qquad 1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3\right)$$
$$= 5 - \frac{3}{2}x_1 - \cancel{\frac{2}{2}} - \frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_3 \qquad 1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}x_1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}x_3$$
$$= 4\ \frac{-9-5}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_3 \qquad =$$
$$= 2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_1 - \frac{1}{3}x_3$$
$$= 4 - \frac{14}{6}\frac{7}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 \qquad = 2\ \frac{-3+5}{6}x_1 - \frac{1}{3}x_3 = 2 + \frac{2}{6}\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3$$

$$z = 3 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}\left(2 + \frac{5}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3\right)$$
$$= 3 + \frac{1}{2}x_1 + 3 + \frac{5}{2}x_1 - x_3 = 6 + 3x_1 - x_3$$

213

(1.4) $z = 6 + 3x_1 - x_3$

BASE IN: x_1
BASE OUT: x_4

$$x_5 = 2 + \frac{5}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3$$
$$x_2 = 2 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3$$
$$x_4 = 4 - \frac{7}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3$$

$$\frac{7}{3}x_1 = 4 + \frac{1}{3}x_3 - x_4$$
$$\cancel{\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}}x_1 = \frac{3}{7}\cdot 4 + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}x_3 - \frac{3}{7}x_4$$
$$x_1 = \frac{12}{7} + \frac{1}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4$$

$$x_5 = 2 + \frac{5}{3}\cdot\left(\frac{12}{7} + \frac{1}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4\right) - \frac{2}{3}x_3$$
$$= 2 + \frac{20}{7} + \frac{5}{21}x_3 - \frac{5}{7}x_4 - \frac{2}{3}x_3$$
$$= \frac{14+20}{7} + \frac{5-14}{21}x_3 - \frac{5}{7}x_4$$
$$= \frac{34}{7} - \cancel{\frac{9}{21}}\frac{3}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4$$

$$x_1 = \frac{12}{7} + \frac{1}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4$$
$$x_5 = \frac{34}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4$$
$$x_2 = \frac{18}{7} - \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{3}\left(\frac{12}{7} + \frac{1}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4\right) - \frac{1}{3}x_3$$
$$= 2 + \frac{4}{7} + \frac{1}{21}x_3 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{1}{3}x_3$$
$$= \frac{14+4}{7} + \frac{1-7}{21}x_3 - \frac{1}{7}x_4$$
$$= \frac{18}{7} - \cancel{\frac{6}{21}}\frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$$

$$z = 6 + 3\cdot\left(\frac{12}{7} + \frac{1}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4\right) - x_3$$
$$= 6 + \frac{36}{7} + \frac{3}{7}x_3 - \frac{9}{7}x_4 - x_3$$
$$= \frac{42+36}{7} + \frac{3-7}{7}x_3 - 7x_4$$
$$= \frac{78}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{9}{7}x_4$$ → ottimo

$$\begin{array}{r} 12\cdot \\ 3 \\ \hline 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 42+ \\ 36 \\ \hline 78 \end{array}$$

L13

(2)

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 + 5x_2 \le 15$$
$$x_1 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

1. Risolvere con metodo grafico
2. Forma standard
3. Elencare le basi ammissibili del problema
4. Risolvere con simplesso

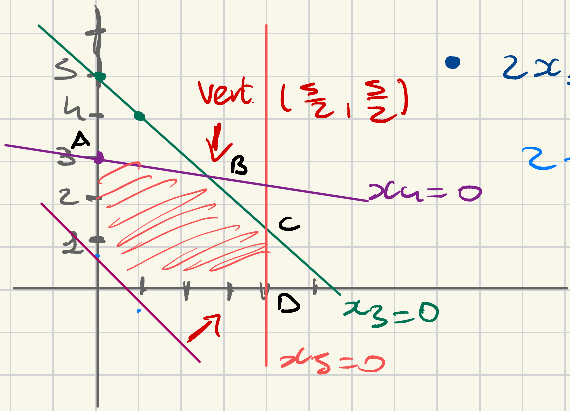
(2.1)

- $x_1 + x_2 \le 5$

x_1	x_2
0	5
1	4

- $x_1 + 5x_2 \le 15$

x_1	x_2
0	3
1	$\frac{14}{5} \simeq 3$



- $2x_1 + 3x_2 = K = 1$

$2 + 3x_2 = 1$

$\frac{3x_2}{3} = -\frac{1}{3}$

x_1	x_2
0	$\frac{1}{3}$
1	$-\frac{1}{3}$

(2.2)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 + 5x_2 + x_4 = 15$$
$$x_1 + x_5 = 4$$

2.3) $A = (x_2, x_3, x_5)$ $\quad C = (x_1, x_2, x_4)$

$B = (x_2, x_5, x_1)$ $\quad D = (x_1, x_4, x_3)$

L19 •

ESERCIZIO 1

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$3x_1 + x_2 \le 9$$
$$2x_2 \le 7$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

→ Risolvere (metodo a scelta) ✓
→ Scrivere duale
→ Dedurre la soluzione ottima duale (cond. di complem.)

1. $x_1 + 2x_2 \le 8$

x_1	x_2
0	4
8	0

• $(0,4)$
• $(8,0)$

$3x_1 + x_2 \le 9$

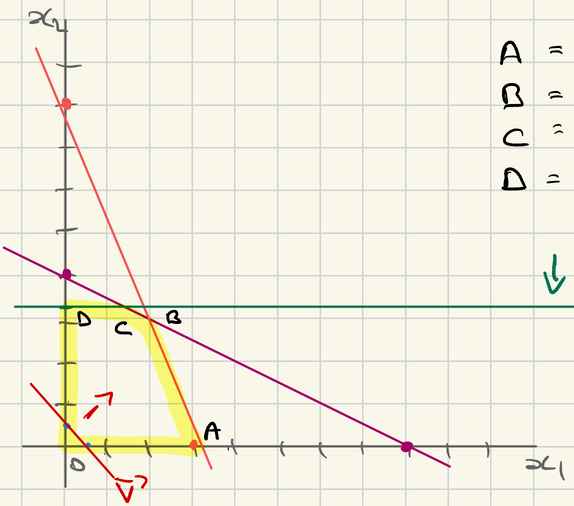
x_1	x_2
0	9
3	0

$2x_2 \le 7$

$x_2 \le \frac{7}{2}$

$2x_1 + 3x_2 = 1$

x_1	x_2
0	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	0



$A = (0,3) = 9$
$B = (2,3) = 13 \to \max$
$C = (1, \frac{7}{2}) = 5$
$D = (0, \frac{7}{2}) = \frac{21}{2}$

$2 + \frac{6}{2} = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot \frac{7}{2} + x_3 = 8 \\ 3x_1 + \frac{7}{2} + x_4 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_4 = \frac{6-7}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1.2 Duale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} {}^t c = & [\,2 & 3 & 0 & 0 & 0\,] \\ & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$

$$u_1 + 3u_2 \ge 2$$
$$2u_1 + u_2 + 2u_3 \ge 3$$
$$u_1 \ge 0$$
$$u_2 \ge 0$$
$$u_3 \ge 0$$

L19

ESERCIZIO 1

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$3x_1 + x_2 \le 9$$
$$2x_2 \le 7$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

→ Risolvere (metodo a scelta) ✓
→ Scrivere duale ✓
→ Dedurre la soluzione ottima duale (cond. di complem.) ✓

$$\min\ 8u_1 + 9u_2 + 7u_3$$

$$\begin{aligned} u_1 + 3u_2 &\ge 2 \\ 2u_1 + u_2 + 2u_3 &\ge 3 \\ u_1 &\ge 0 \\ u_2 &\ge 0 \\ u_3 &\ge 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u_1 + 3u_2 - v_1 &= 2 \\ 2u_1 + u_2 + 2u_3 - v_2 &= 3 \\ u_1 - v_3 &= 0 \\ u_2 - v_4 &= 0 \end{aligned}$$

$B = (2,3) \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = 3, \quad x_3, x_4 = 0, \quad x_5 \ge 0$

$$\begin{cases} u_1 + 3u_2 - \cancel{v_1} = 2 \\ 2u_1 + u_2 + 2\cancel{u_3} - \cancel{v_2} = 3 \\ u_1 - v_3 = 0 \rightarrow \\ u_2 - v_4 = 0 \rightarrow \\ u_3 - \cancel{v_5} = 0 \end{cases} \text{rid.}$$

$$\begin{cases} u_1 + 3u_2 = 2 \\ 2u_1 + u_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = 2 - 3u_2 \\ 4 - 6u_2 + u_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} = \\ -5u_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{7}{5} \\ u_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$2 - \frac{3}{5} = \frac{10-3}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\min z = \frac{56}{5} + \frac{9}{5} = \frac{\cancel{65}}{5} = 13$$

ESERCIZIO 2.

$$\max\ z = 2x_1 + x_2 - 2x_3$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

- Scrivere il duale ✓
- Risolvere il duale ✓
- Dedurre l'ottimo primale ✓
- Riformulare il primale rispetto alla base ottima
- Introdurre il vincolo x_1<=2 e riottimizzare con simplesso duale

2.1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ {}^t c = & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\min\ 5u_1 + 10u_2$$
$$2u_1 + u_2 \ge 2$$
$$3u_1 + u_2 \ge 1$$
$$-u_1 + u_2 \ge -2$$
$$u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0$$

2.2)

$2u_1 + u_2 \ge 2$ $\quad v_1$

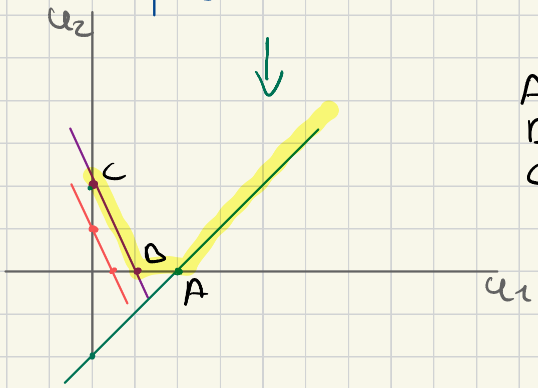
u_1	u_2
0	2
1	0

$3u_1 + u_2 \ge 1$ $\quad v_2$

u_1	u_2
0	1
$\frac{1}{3}$	0

$-u_1 + u_2 \ge -2$ $\quad v_3$

u_1	u_2
0	-2
2	0



$A = (2,0) = 10$
$B = (1,0) = 5 \rightarrow \min$
$C = (2,0) \quad 10$

$u_1 = 1 \qquad v_2 > 0$
$u_2 = 0 \qquad v_3 > 0$
$v_1 = 0 \qquad v_4 > 0$

$$\max\ z = 2x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + \cancel{3x_2} - \cancel{x_3} + \cancel{x_4} &= 5 \\ x_1 + \cancel{x_2} + \cancel{x_3} + x_5 &= 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 5 \\ x_1 + x_5 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} \\ x_5 = \frac{20-5}{2} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO 2.

$\max z = 2x_1 + x_2 - 2x_3$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 5$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Scrivere il duale ✓
Risolvere il duale ✓
Dedurre l'ottimo primale ✓
Riformulare il primale rispetto alla base ottima ✓
Introdurre il vincolo x_1<=2 e riottimizzare con simplesso duale ✓

2.4)

$\max z = 2x_1 + x_2 - 2x_3$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 10$

- $2x_1 = 5 - 3x_2 + x_3 - x_4$
  $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$

- $x_5 = 10 - x_1 - x_2 - x_3$
  $= 10 - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - x_2 - x_3$
  $= \frac{15}{2}\ \cancel{\frac{20-5}{2}} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$

- $5 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_2 - 2x_3$
  $5 - 2x_2 - x_3 - x_4$

2.5) $\max\ 5 - 2x_2 - x_3 - x_4$

$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$

$x_5 = \frac{15}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$

$x_6 = 2 - x_1$
$= 2 - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$
$= \frac{4-5}{2}$
$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$

$x_1 \leq 2$

$x_1 + x_6 = 2$

OUT: x_6

IN

$x_2 \Rightarrow \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \rightarrow$ ✓

$x_4 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

max $5 - 2x_2 - x_3 - x_4$

$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$

$x_5 = \frac{15}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$

$x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$ $\qquad \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + x_6$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_6$

$x_5 = \frac{15}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 + \frac{2}{6}x_6$

$= \frac{45+1}{6} + \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 + \frac{2}{6}x_6$

$\frac{15\cdot 3}{45}$

$= \cancel{\frac{46}{6}}\,\frac{23}{3} + \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 + \frac{2}{6}x_6 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$

$\frac{23}{3} + \frac{1-9}{6}x_3 + \frac{-1+3}{6}x_4 + \frac{1}{3}x_6$

$= \frac{23}{3} - \cancel{\frac{8}{6}}\,\frac{4}{3}x_3 - \cancel{\frac{2}{6}}\,\frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_6$

$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}x_3} + \cancel{\frac{1}{2}x_4} - x_6 + \cancel{\frac{1}{2}x_3} - \cancel{\frac{1}{2}x_4}$

$= \cancel{\frac{4}{2}}\,2 - x_6$

max $z = 5 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_6 - x_3 - x_4$

$= \frac{15-3}{3} + \frac{-2-3}{3}x_3 + \frac{2-3}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_6$

$= \frac{13}{3} - \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_6$