F.D.I • L4

RAPPRESENTAZIONE FLOAT >

I numeri frazionari/con componente decimale possono essere rappresentati in binario:

- Con virgola fissa >

Dato il numero con la virgola, si segue la metodologia utilizzata moltiplicando per un' esponente negativo.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1, & 1 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 2^2 & 2^1 & 2^0, & 2^{-1} & 2^{-2} \end{array}$$

$4+0+1, \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 5+\frac{3}{4} = 5.75$

Proprio come

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 0, & 1 & 5 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 10^2 & 10^1 & 10^0 & 10^{-1} & 10^{-2} \end{array}$$

NB: L'algoritmo di somma rimane invariato.

Uno svantaggio della rappresentazione dei numeri a virgola fissa è che indipendentemente che il numero sia grande o piccolo i bit dopo la virgola sono gli stessi.

è infatti consigliato di riservare più bit quando il numero è vicino allo Ø, mentre meno bit quando il numero è lontano.

- Con virgola mobile (vedere L5)

RAPPRESENTAZIONE DEL SEGNO >

È possibile specificare il segno di un numero binario usando il complemento a 2, che è molto legato ai bit memorizzati.

I numeri negativi nel complemento a 2 partono da
con 4 bit $1111 = -1$
segno
$1110 = -2$
ai quali si sottrae 1 ad ogni numero successivo.

Il vantaggio principale del complemento a 2 è che la somma è naturale tra numeri e produce Ø in quanto va in overflow.

$$\begin{array}{rl} {}^{1\,1}0010 + & \rightarrow 2 \\ 1110 = & \rightarrow -2 \\ \hline (1)\,0000 & \end{array}$$

↳ bit perso in overflow "non ci sta"

OTTENERE L'INVERSO DI UN NUMERO >

Per ottenere l'inverso di un numero nel complemento 2: (partendo da dx)

- Copiare uguale tutti i numeri fino al primo 1 incluso
- Scrivere il complemento/inverso nei numeri successivi.

1 incluso

00|10 → 2

11|10 → -2

NB: È possibile rilevare l'overflow in quanto se si sommano 2 negativi si ottiene 1 positivo.

F.D.I • 24

RAPPRESENTAZIONE EXCESS NOTATION >

La rappresentazione in excess notation è un modo alternativo di rappresentare binari con segno.
Il funzionamento prevede di assegnare tutti 1 ad al numero massimo rappresentabile, per poi decrementarlo

NB: dec → esp: sommare i bit+1 al num + trasformarlo in bin
3 esp 4 (2 bit = 3+4=7 111

AL CONTRARIO trasformare in dec + togliere 4
111 = 7 − 4 = 3

Con 3
111 → 3
110 → 2
101 → 1
100 → 0
011 → −1
010 → −2
001 → −3
000 → −4

F.D.I • 25

RAPPRESENTAZIONE IN FLOATING POINT >

La rappresentazione in Floating Point consente di avere una virgola variabile.
Si basa sul concetto di rappresentazione con esponenziale: $65.37 = 6.537 \cdot 10^1$

In particolare, il floating point è in 1 byte:

segno, mantissa, esp.

- 1 di segno
- 3 per l'esponente 2^ non c'è bisogno di salvarlo in excess notation a 3
- 4 per la mantissa, ovvero il num. di cifre significative da memorizzare

BIN → DEC >

Dato un num binario in floating point il corrispettivo si trova:

- Trasformare l'esponente da excess notation in dec
- Spostare la virgola del numero per l'esponente
  esp ≥ 1 → dx
  esp ≤ 1 → sx aggiungendo ∅
- Ri-trasformare il numero in int

eccesso per 3 bit
111 → 3 011 → −1
110 → 2
101 → 1
100 → 0

1 = 4+1 = 5
101
$2^2\,2^1\,2^0$

Per 00111100
Pos → 0|011|1100

0.1100×10^{-1}
0.01100
$10^{-1}\,10^{-2}\,10^{-3}\,10^{-4}\,10^{-5}$
$0\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ 0\ 0 = \frac{2+1}{8} = \frac{3}{8}$

30 | 8
24 | 0,375
60
56
40
40
/

$4 = 2^2$ $gcd(2^2, 2^3) = 8$
$8 = 2^3$

DEC → BIN >

Dato un numero decimale per ottenere la controparte:

- Trasformare il numero nella parte intera e decimale come con virgola fissa.
- Definire l'esponente partendo dalla notazione normalizzata 0.1 ovvero 0. Il primo 1 disp. L'esponente sarà il numero di elementi da spostare per passare da notazione normalizzata → virgola fissa

2^0 0.2^{-3}
$1 + \frac{1}{8}$
1.001
dsc di 1 per
In notazione norm: 0.1001
1 cn esp: 101
0|101|1001

NB: In caso la mantissa non riesca a contenere il risultato si parla di: Truncation error
Round off error

F.D.I. • 25

COMPRESSIONE DELLE INFORMAZIONI >

La compressione delle informazioni può avvenire con delle tecniche di tipo:

- Lossless: l'informazione non viene persa durante il processo
- Lossy: l'informazione viene parzialmente persa // // .
  In questo caso è bene tenere un livello basso di perdita delle info.

Alcune tecniche di compressione:

- **Run Length encoding: (LOSS-LESS)**
  Effettua l'encoding basandosi sulle ripetizioni. In particolare si indica l'elemento ripetuto e la quantità di volte in cui è ripetuto.
  ESEMPIO: "aa bb c ii" → a×2 b×2 c×1 i×2

- **Frequency Encoding: (LOSS-LESS)**
  Effettua l'encoding basandosi sulle informazioni più frequenti. In particolare, per esse verrà usata una rappresentazione in bin più piccola, mentre per le altre una più grande.
  - Codice di Huffman

  ESEMPIO: "ciao ␣ mamma"

  ~~00~~ → a
  01 → m
  1xx
  → 100 → c
  101 → i
  110 → o
  111 → ␣

- **Relative / Differential encoding (LOSSY / LOSSLESS)**: Consiste nel codificare uno stato iniziale e aggiungere solo le modifiche apportate dal primo stato.
  Può essere sia lossy che lossless, variando a seconda dell'approssimazione scelta per le modifiche.
  ESEMPIO: Nei video si comprimono i frame + i cambiamenti dal frame precedente a quello successivo.

- **Dictionary Encoding**: Definisce un dizionario contenente i valori ed una chiave semplificata e usa quello per la codifica.
  È presente una variante con dizionario adattivo, ovvero che cambia durante la compressione.

  JPEG → LOSSY / LOSSLESS
  GIF → LOSSY / LOSSLESS: assegna lo stesso codice a frame con colori simili
  TIFF → LOSSY / LOSSLESS: aggiunge tag di info

F.D.I • 25

COMPRESSIONE DI AUDIO/VIDEO >

Le varie tecniche di compressione audio/video sono sviluppati prevalentemente dalla MPEG (Motion Picture Express Group).

In particolare, nella famiglia di encoding viene usata la compressione relativa nei file video.
Nei file audio, come l'MP3 (MPeg Layer 3) sfrutta le caratteristiche dell'orecchio umano, come:

- Temporal Masking: Siccome dopo suoni forti, quelli più deboli sono più difficili da sentire, maschera quelli.
- Frequency Masking: Siccome ad una certa freq. i suoni più deboli vicini sono più difficili da sentire, maschera quelli.

RILEVAMENTO DI ERRORI >

Alcune tecniche di rilevamento degli errori sono:

- Parity Bit   OK → $\boxed{1}$ 01100111   ERR → $\boxed{1}$ 01101111

  Data un'informazione codificata, prevede di aggiungere un bit

  1 = se il numero di '1' nel resto dell'info è pari

  0 = se " " " " è dispari

  In questo modo, se l'informazione cambia di 1 bit/dispari l'errore viene rilevato altrimenti NO.

- Check Byte

  Evoluzione del Parity Bit, in cui si usa 1 Byte per il rilevamento degli errori sull'intera info.

  Da esso nasceranno il Check sum, Cyclic Redundancy Checks (CRC)

FDI • L6

CORREZIONI DEGLI ERRORI >

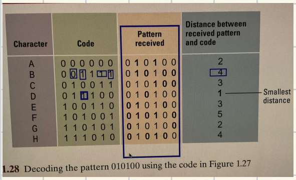
È possibile correggere gli errori sfruttando la distanza di Hamming

DISTANZA DI HAMMING >

Dati 2 sequenze di bit, la distanza di Hamming rileva il numero di bit che cambiano tra i 2 input.

ESEMPIO: "10101" e "10111" distano 1

In particolare, si definiscono le codifiche delle singole unità di informazione in modo che un unità abbia almeno distanza 3 dall'altra.
In questo modo, se arriva un'informazione errata la si corregge con quella con distanza minore.



Character	Code	Pattern received	Distance between received pattern and code
A	0 0 0 0 0 0	0 1 0 1 0 0	2
B	0 0 1 1 1 1	0 1 0 1 0 0	4
C	0 1 0 0 1 1	0 1 0 1 0 0	3
D	0 1 1 1 0 0	0 1 0 1 0 0	1
E	1 0 0 1 1 0	0 1 0 1 0 0	3
F	1 0 1 0 0 1	0 1 0 1 0 0	5
G	1 1 0 1 0 1	0 1 0 1 0 0	2
H	1 1 1 0 1 0	0 1 0 1 0 0	4

1.28 Decoding the pattern 010100 using the code in Figure 1.27

TIP: Per stabilire la distanza ideale tra le info, soddisfare la seguente equazione $\overset{\text{BIT}}{d} + \overset{\text{PARITÀ}}{r} + 1 \leq 2^r$

Questo per stabilire i bit di parità necessari da trasmettere per coprire l'informazione.

FDI • 27

INSIEMI

Per insieme si intende una collezione di elementi in cui
- non conta l'ordine
- non contano le ripetizioni

Gli insiemi possono rappresentare
- numeri finiti di elementi: $X = \{1, 2, 3, 4\}$
- numeri infiniti di elementi: $X = \{1, 2, 3 \ldots\}$ v $X = \{n \in \mathbb{N}\}$ (appartiene a)

e soddisfare condizioni: $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 | n\}$ (tale che)

È possibile definirne la cardinalità $X = \{1, 2, 3\}$ $|X| = 3$

E utilizzare insiemi noti
- $\mathbb{N}$ = Numeri naturali da $\emptyset$ a ∞
- $\mathbb{Z}$ = Numeri interi, ovvero naturali + i loro opposti ..$-2, -1, 0, 1$..
- $\mathbb{Q}$ = Numeri rappresentabili nella forma $\frac{n}{m}$ $n \in \mathbb{Z}$ $m \neq \emptyset$
- $\mathbb{R}$ = Numeri non rappresentabili come frazioni: π, $3{,}333\ldots$

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$

- $\emptyset$ = Insieme vuoto

Ogni insieme contiene se stesso e $\emptyset$.

È anche possibile definire sottoinsiemi con $\subseteq$, con la variante $\subset$ / $\subsetneq$ per indicare i sotto-insiemi propri ovvero che NON sono uguali al sopra-insieme.

ESEMPIO: $X = \{1, 2, 3\}$ $X \subseteq X$ OK $X \subsetneq X$ NO $\{1\} \subsetneq X$ OK

INSIEME DELLE PARTI

L'insieme delle parti o potenza di un insieme è l'insieme formato da tutti gli insiemi che lo compongono con 2^n elementi

ESEMPIO: $X = \{1, 2, 3\}$ $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

UNIONE E INTERSEZIONE

- UNIONE: Dati 2 insiemi, l'unione è l'insieme formato dagli elementi nel primo o nel secondo insieme $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- INTERSEZIONE: dati 2 insiemi, l'intersezione è l'insieme formato dagli elementi nel primo e nel secondo insieme $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

FDI • L7

DIFFERENZA > $A, B \vDash A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$

Dati 2 insiemi A, B, la differenza è data dagli elementi presenti nel primo ma non nel secondo

INSIEMI DISGIUNTI > A, B $\quad A$ disgiunto $B \longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$

2 insiemi vengono detti disgiunti se e solo se la loro intersezione è $\emptyset$

UNIVERSO > $x \quad x \subset U$

L'universo degli elementi è un insieme che contiene tutti gli insiemi relativi a un dato insieme.

COMPLEMENTO > $x, U \quad x \subsetneq U \quad \overline{x} = U \setminus x$

Il complemento di un insieme sono formati dagli elementi dell'Universo che non sono contenuti nel dato insieme.

LEGGE DI DE-MORGAN > $\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}$

La legge di De-Morgan dice che, dati 2 insiemi, la loro intersezione negata è equivalente all'unione degli insiemi negati. Analogamente, l'unione negata è equivalente all'intersezione degli insiemi negati.

FAMIGLIA DI INSIEMI > $S = \{A_1, A_2, A_3 \dots\}$

Le famiglie di insiemi sono collezioni di insiemi.

- UNIONE: l'unione della famiglia di insiemi è data dagli elementi che appartengono ad almeno 1 insieme $\in S$

$\cup S / \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

- INTERSEZIONE: l'intersezione della famiglia di insiemi è data dagli elementi che appartengono a tutti gli insiemi della famiglia.

$\cap S / \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$

PARTIZIONE > $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \land A_1 \cap A_2 = \emptyset \land A_3 \cap A_1 = \emptyset$

Per partizione si intendono una collezione di insiemi disgiunti tali che la loro unione restituisce il sopra-insieme

FDI • 27

PRODOTTO CARTESIANO > $A, B \models A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Dati 2 insiemi A,B il loro prodotto cartesiano è l'insieme delle n-uple ordinate con le posizioni degli elementi corrispondenti agli insiemi moltiplicati.

FDI • 28

PROPOSIZIONI > $P = 3 > 2$

Per proposizione si intende qualsiasi affermazione risolvibile a VERO o FALSO. Su di esse è possibile fare:

- CONGIUNZIONE: la congiunzione di 2 insiemi è vera see solo se entrambe le proposizioni sono vere.
  $P \wedge Q$ / P and Q

- DISGIUNZIONE: la disgiunzione di 2 insiemi è vera quando o la prima condizione o la seconda è vera.
  $P \vee Q$ / P or Q

- DISGIUNZIONE ESCLUSIVA: la disgiunzione esclusiva di 2 insiemi è vera quando solo 1 delle due proposizioni è vera.
  $P \oplus Q$

- NEGAZIONE: la negazione di una proposizione
  $\neg P$

- IMPLICAZIONE: l'implicazione di 2 predicati è interpretata come "if a, then b" oppure "a if and only if b".
  $a \rightarrow b$
  $b \rightarrow a$ CONVERSA
  Essa è falsa soltanto quando la premessa è vera e la conclusione è falsa.
  In tutti gli altri casi è vera.
  - Condizioni sufficienti "Se A visita Roma, allora va in Italia"
    Spesso possono essere usate per rappresentare implicazioni.
    Indica che all'avverarsi della premessa è garantita la conseguenza. Altrimenti non è garantita
  - Condizioni necessarie "Se A vince, allora ha segnato"
    Indicano implicazioni che cui premessa è obbligatoria per poter ottenere un risultato corretto

ORDINE
1. $\neg$
2. $\vee$ o $\wedge$
3. $\rightarrow$
4 $\leftrightarrow$

FDI • 28

- BI-IMPLICAZIONE: Date 2 proposizioni A, B, la loro bi-implicazione è vera solo quando il loro risultato è uguale

$A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

FDI • 29

EQUIVALENZA LOGICA > $A \equiv B \Leftrightarrow v_i(A) = v_i(B)$

Date 2 proposizioni, esse sono logicamente equivalenti se il loro valore nella tavola di verità è lo stesso.

CONSEGUENZA LOGICA > $p_1, p_2, p_3 \models q_1$

Usate per esporre teoremi, se le ipotesi sono vere allora è vera la conseguenza

Essa accetta da 0..N premesse e 1 conseguenza

QUANTIFICATORI >

I quantificatori sono dei simboli che consentono di definire dei predicati validi per tutti / per almeno 1 elemento. Essi sono

- Q. ESISTENZIALE: Quantifica la soddisfazione di almeno 1 elemento per una determinata proposizione / predicato
  $\exists, \nexists$
- Q. UNIVERSALE: quantifica la soddisfazione di tutti gli elementi per una determinata proposizione / predicato.
  $\forall$ / $\not\forall$

$$\neg(\forall_x P(x)) \equiv \exists_x \neg P(x) \quad , \quad \neg(\exists_x P(x)) \equiv \forall_x \neg P(x)$$

PREDICATI > $P(x) = 2 \mid x$ in $\mathbb{N}$ ✓ $\quad \forall_x P(x)$

I predicati sono proposizioni con parametri. Esse lavorano con un dominio del discorso, che consente di definire i valori ammissibili per i parametri.

VARIABILI >

Nella definizione di proposizioni usando i predicati, essi possono essere di 2 tipi:

- Libere: legate soltanto al dominio del discorso
- Vincolate: legate ai quantificatori

FDI • 2/10

DIMOSTRAZIONI CON QUANTIFICATORI >

Data un'espressione da dimostrare come "$\forall_x (P(x) \to Q(x)) \equiv \forall_x (\neg P(x) \to \neg Q(x))$"
è possibile dimostrarla usando 1 singolo elemento dell'universo per istanziare i quantificatori:

ESEMPIO Data l'ipotesi $p \to q \overset{*}{\equiv} \neg q \to \neg p$ dimostrare che $\forall_x (P(x) \to Q(x)) \equiv \forall_x (\neg Q(x) \to \neg P(x))$

Dato un generico $d \in D$ di U:
se $\overset{p}{P(d)} \to \overset{q}{Q(d)}$, per l'ipotesi * allora
$\neg Q(d) \to \neg P(d)$ per $d \in D$
concludendo che $\forall_x (\neg Q(x) \to \neg P(x))$

MODUS TOLLENS > $p \to q, \neg q \models \neg p$

Se una data implicazione è vera e la conclusione è falsa, lo è anche la premessa.

COMPOSIZIONE DI QUANTIFICATORI >

- $\forall_x \exists_y (\dots)$: Per ogni x, esiste un y che soddisfa la condizione.
- $\exists_y \forall_x (\dots)$: Esiste una y per la quale vale la condizione su tutti gli x

DIMOSTRAZIONI >

Le dimostrazioni sono procedimenti rigorosi atti a dimostrare un Teorema:

DEFINIZIONI >

- ASSIOMI: Sono delle affermazioni che vengono usate come premesse per provare i Teoremi con la conseguenza logica
- LEMMA: Il lemma è un tipo di Teorema poco importante che viene utilizzato per dimostrare un altro Teorema.
- TEOREMA: Il Teorema è l'affermazione da provare.
- COROLLARIO: è un teorema già dimostrato visto in modo diverso.