L24 • Lo Spazio Euclideo III

SOTTOSPAZI AFFINI > DISTANZE

// Ho scritto a mano fino a qua. concedetemi lo screenshot

4) Distanza fra punto e piano

[copre anche distanza fra retta & piano e distanz fra due piani.]

$$\pi = \{ax + by + cz = d\}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Prop: $d(P_0, \pi) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Esempio: $\pi = \{2x - y + z = 4\}$, $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow d(P_0, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 + (-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Teorema Spettrale I

PRODOTTO HERMITIANO >

PREMESSA >

Data un'applicazione lineare $f: V \times V \to \mathbb{C}$ con V spazio vettoriale con campo complesso: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

È un'applicazione che applica il prodotto scalare:

$(v, w) \to \langle v, w \rangle$

Che soddisfa:

- $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$: Linearità del 1° fattore
- $\langle \lambda w \rangle = \lambda w$
- $\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$: Anti: ~~Linearità~~ del 2° fattore
- $\langle v, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle v, w \rangle$ con coniugo di scalare
- $\langle v, w \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$: Il prodotto hermitiano DEVE essere uguale al suo coniugo.
- $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$
- $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$: Il prodotto per se stesso appartiene ai reali

La caratteristica di essere lineare sul 1° fattore ma anti-lineare sul 2° fattore viene detta di sesquilinearità

PRODOTTO HERMITIANO > PROPRIETÀ

- DEFINITO POSITIVO: $\langle v, v \rangle > 0 \quad \forall v \in V \setminus 0$

  Se il prodotto per se stesso è maggiore di 0.

  Se è def. positivo, si può definire:

  - La norma: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
  - La distanza: $d(v, w) = \|v - w\|$

- PRODOTTO HERMITIANO EUCLIDEO

  È definito nella forma: $\langle v, w \rangle = {}^t v \cdot \bar{w}$

  ovvero la trasposta per il coniugo del vettore

PRODOTTO HERMITIANO >

ES: Calcolare il prodotto Hermitiano Euclideo di
$^tv = (1+i, -2, i)$, $^tw = (1-i, i, 3)$

(0) Calcolo i componenti della formula $\langle v,w\rangle = {}^tv \cdot \overline{w}$
$^tv = (1+i, -2, i)$ $\overline{w} = (1+i, -i, 3)$

(1) Calcolo la formula

$$\langle v,w\rangle = (1+i, -2, i)\cdot\begin{pmatrix}1+i\\-i\\3\end{pmatrix} = (1+i)(1+i) + 2i + 3i$$
$$= \cancel{1}+i+i\cancel{-1}+2i+3i$$
$$= 2i+2i+3i = 7i$$

MATRICI HERMITIANE >

Sono matrici Hermitiane le matrici quadrate:
- coefficienti complessi: $A \in M(n, \mathbb{C})$
- Termini invertiti con stesso coniugo:

Ovvero $a_{ij} = \overline{a}_{ij} \in A$. Da cui si capisce che sulla diagonale principale gli elementi sono reali

ES: "$\begin{bmatrix}2 & 1+i\\1-i & 1\end{bmatrix}$

- Ha coeff $\in \mathbb{C}$
- $a_{11} \in \mathbb{R}$ $a_{22} \in \mathbb{R}$
- $a_{12}(1+i) \Leftrightarrow (1-i)a_{21}$ se Trasposto

$$\begin{bmatrix}\sqrt{7} & 0 & i\\ 0 & \pi & 2+3i\\ -i & 2-3i & e^2\end{bmatrix}$$

- $a_{ij} \in \mathbb{C}$
- $\in \mathbb{R}$
- , , sono coniugati

PRODOTTO HERMITIANO > "LEFT"

Come coi prodotti scalari si può usare una matrice simetrica:

$g_S(v, w) = {}^tv \cdot S \cdot \overline{w}$ → Se $S = I_n$ è il prod. Herm. Euclideo

Se si usano vettori appartenenti alla base canonica di $\mathbb{C}$:

$g_S(e_i, e_j) = S_{ij}$

PRODOTTO HERMITIANO > MATRICE ASSOCIATA

Sempre come nel prodotto scalare:

$$[g]_B = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix} = \overline{[g]_B} \quad \text{per definizione}$$

con $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

PRODOTTO HERMITIANO > CALCOLO ALTERNATIVO

Come coi prodotti scalari, si può calcolare il prodotto hermitiano come:

$$\langle v, w \rangle = {}^t[v]_B \cdot [g]_B \cdot \overline{[w]_B} \quad \text{con base } B$$

con:
- ${}^t[v]_B$: È il vettore dei coefficienti di v rispetto alla base B (trasposto)
- $\overline{[w]_B}$: È il coniugo del vettore dei coefficienti di w rispetto alla base B

ENDORFISMI AUTO-AGGIUNTI >

PREMESSA >

Dato l'endorfismo $f: V \to V$ con spazio V nel campo reale o complesso

L'endorfismo è auto-aggiunto sse vale la regola nel prodotto scalare/hermitiano:

$$\langle v, f(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle$$

ENDOMORFISMI AUTO-AGGIUNTI >

ES: "Determinare se $T\binom{x}{y} = (2x+y, x)$ con $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ è un endomorfismo auto-aggiunto"

(0) Definisco $v = (x_1, y_1)$ $w = (x_2, y_2)$

(1) Verifico membro a sinistra → $\langle T(v), w \rangle$

$T(v) = (2x_1 + y_1, x_1)$

$\langle T(v), w \rangle = [(2x_1 + y_1) \cdot x_2 , x_1 y_2]$

$= 2x_1 x_2 + y_1 x_2 + x_1 y_2$ ✓

(2) Verifico membro a destra → $\langle v, T(w) \rangle$

$T(w) = (2x_2 + y_2, x_2)$

$\langle v, T(w) \rangle = [x_1 \cdot (2x_2 + y_2), x_1 y_2]$

$= 2x_1 x_2 + y_2 x_1 + x_1 y_2$ ✓

ENDOMORFISMI AUTO-AGGIUNTI > RELAZIONE CON BASE

PREMESSA >

Data una base ortonormale $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ di V e l'endomorfismo $T: V \to V$ con $[T]_B$ matrice associata

L'endomorfismo è autoaggiunto se e solo se la matrice associata è Hermitiana

---

ENDOMORFISMI AUTO-AGGIUNTI > CON LEFT

PREMESSA >

Dato il prodotto Hermitiano $g_S: V \times V \to \mathbb{C} / \mathbb{R}$
o prodotto Scalare

Se la matrice della "Left" S è Hermitiana, allora descrive un endomorfismo auto-aggiunto.

SOTTO-SPAZI INVARIANTI >

PREMESSA >

- Dato V spazio vettoriale sui reali o complessi con prodotto scalare euclideo o prodotto Hermitiano definito positivo.

- Definendo un endomorfismo auto-aggiunto $T: V \to V$ e un sotto-spazio vettoriale $U \subset V$

Si dice che il sotto-spazio U è T-invariante (con T l'endomorfismo) se per ogni suo vettore, l'applicazione dell'endomorfismo fa ancora parte del sotto spazio:

$$U \text{ è t-invariante} \iff \forall u \in U \quad T(u) \in U$$

Da cui possiamo anche dire che se $U^\perp$ è il sotto-spazio con tutti i vettori ortogonali ai vettori in U allora se U è t-invariante, allora lo è anche $U^\perp$

$$U \text{ è t-invariante} \models U^\perp \text{ è t invariante.}$$

TEOREMA SPETTRALE >

Dato un endomorfismo $T: V \to V$. Si può dire che:

T è un endomorfismo auto-aggiunto $\iff$ V ha
- Una base di auto-vettori orto-normale
- Ha auto-spazi ortogonali
- Gli auto-valori reali

L26 • Teorema Spettrale II

CASO D'USO : TEOREMA SPETTRALE

" Dato l'endomorfismo $T: V \to V$ in $\mathbb{R}^3$ definito come:

$(x, y, z) \mapsto (2x - z, -y, -x + 2z)$

usare il T. spettrale per definire le cavatte risfide: "

(1) Verifico se è auto-aggiunto: (uso il metodo de passa per la matrice associata)

(1.1) Trovo la matrice associata (rispetto alla base canonica)

$$A = [T]_e^e = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Se è Hermitiana / Simmetrica descrive l'endomorfismo auto-aggiunto

✓ È simmetrica ⇒

↳ Per T. spettrale
- ∃ base di auto-vettori ortogonali
- Gli auto-valori sono reali

(2) Verifico T. spettrale: Trovo gli autovalori

(2.1) Trovo il polinomio caratteristico:

$$P_\lambda(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

[Laplace su riga 3] $i=3$

$$= \cancel{(-1)^{3+1}} \cdot (-1) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1-\lambda & 0 \end{bmatrix}\right) + \cancel{(-1)^{3+3}} \cdot (2-\lambda) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-1-\lambda) + (2-\lambda)^2(-1-\lambda) = (-1-\lambda)(1-(2-\lambda)^2)$$
$$= (-1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda = 3$

$\lambda_2 = -1$

Appartengono ai reali

Auto-vettori

$V_1 = (0, 1, 0)$; $V_2 (1, 0, 1)$

$V_3 = (1, 0, -1)$

CASO D'USO : TEOREMA SPETTRALE

(3) Orto normalizzo la base trovata:

$V_1 = (0,1,0) \rightarrow$ Va bene così

$V_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad V_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(4) Determino la matrice diagonale $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Per T. spett $= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$\leftarrow P = {}^{-1}P$

T. SPETTRALE > COROLLARIO SU CASO IN $\mathbb{C}$

- Nelle 'Left' $L_S : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ per def.:

  S è Hermitiana $\Leftrightarrow$ L_S è un endomorfismo autoagg.

  $\Leftrightarrow$ L_S / S Ha una base di auto-vettori ortonormale + auto-valori in $\mathbb{R}$

UTILITIES

A_1 = riga 1 , B^1 = colonna 1

MATRICI A BLOCCHI > (DEF)

È una matrice che

- Ha λ sulla diagonale principale
- 1 sopra la diagonale
- 0 altrove

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \quad k \times k$$

I blocchi possono essere di più dimensioni:

ES

$\boxed{\lambda}$ 1x1 $\qquad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ 2x2 $\qquad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ 3x3

NB: Le matrici Diagonali sono a blocchi di 1x1

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

3 blocchi 1x1

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ MATRICE A BLOCCHI >

- **AUTO-VALORI**

  Sono i λ sulla diagonale principale

  ES $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$ sono λ e x

- **MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA**

  È il numero di volte in cui appare un auto-valore λ nella diagonale principale

  ES $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$ auto-valori λ, x

  $Ma(\lambda) = 2$, $Ma(x) = 1$

- **MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA**

  Sono il numero di blocchi per l'auto-valore λ

  ES:

$$\begin{vmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$Mg(\lambda) = 3$

UTILITIES

A_1 = riga 1 , B^1 = colonna 1

CRAMER >

VALIDATORI >

La matrice dei coefficienti è invertibile : $\det(A) \neq 0$

I singoli termini incogniti x_i sono definiti come :

$$x_i = \frac{\det(C_i)}{\det(A)}$$

Per $i \in \{0, \ldots, n\}$

con C_i: è la matrice A ma con la diff. che sostituisco il vettore b dei termini noti con l'i-esima colonna

$A^i = b \Rightarrow C_i$

RICAVARE BASI > SE NON CANONICHE

- IN $\mathbb{R}^n$

Scegliere n vettori in cui, incolonnandoli, per ogni vettore gli altri sotto "hanno $\emptyset$" :

ES : In $\mathbb{R}^3$

(1) Scelgo il 1° a caso: $v_1 = (1, 2, 5)$

(2) Stilo il 2° con 1 colonna a $\emptyset$ rispetto a v_1 : $v_2 = (0, 3, 6)$

(3) Stilo il 3° con lo stesso: $\emptyset$ + un altro da v_2 : $v_3 = (0, 0, 1)$

- CON EQUAZIONE/I

Trovare la dimensione, dopodiché isolare le variabili libere e prenderne i coeff.

ES : $V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0 \}$

(1) Trovo la dimensione $\dim(V) = \overset{\to \mathbb{R}^n}{n}$ - equazioni indipendenti $= 3 - 1 = 2$ variabili libere

(2) Isolo variabili: y, z

$$\begin{cases} x = 1y + 2z \\ y = 1y + 0z \\ z = 0y + 1z \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

UTILITIES

A_1 = riga 1 , B^1 = colonna 1

DEFINIRE SPAN SU POLINOMIO > DATA RADICE

Definire il polinomio radice $(x-a)$ ed applicare la regola del sotto-spazio:

ES: Definire i generatori di $U = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0 \}$

(1) Definisco il polinomio radice : $(x-1)$

(2) Moltiplico per il polinomio standard in $\mathbb{R}_3[x]$ $(x-1)(\overbrace{p(x)}^{\text{Deve star in } \mathbb{R}_2})$

$= (x-1)(x^2+x+1) = \{ (x-1) , x(x-1) , x^2(x-1) \}$

Quindi $(1)(x-1)$, $\underbrace{p(x)}_{\text{grado } 1}(x-1)$, $\underbrace{q(x)}_{\text{grado } 2}(x-1)$

DEFINIRE SE UN PRODOTTO È HERMITIANO >

Se la sua matrice associata è Hermitiana

Se invece va controllato se sia auto-aggiunta va fatta la stessa cosa ma rispetto alla canonica

---

DIMENSIONE SPAZIO MATRICI >

Pensa alle singole celle che possono essere valorizzate

ES: Determinare la dimensione delle 3x3 Diagonali

sono nella forma $\begin{bmatrix} \underline{a} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{b} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{c} \end{bmatrix}$ per cui = 3

COMMON • 1

QUADRATO DEL BINOMIO >

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2 = A^2+2AB+B^2$ (SOMMA)

$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2-AB-BA+B^2 = A^2-2AB+B^2$ (SOTTRAZIONE)

ES 1: $(a+1)^2 = a^2+2a+1^2$

ES 2: $(-a+1)^2 = a^2-2(-a\cdot 1)+1^2 = a^2-2a+1$

ES 3: $4x^2-12xy+9y^2$

$4x^2 = 2x$, $9y^2 = 3y$

$2x\cdot 3y = 6xy$

$6xy \cdot -2 = -12xy$

$= (2x-3y)^2$

ES 4: $-5x^7+20x^4y^2-20xy^4$

(1) Raggruppo per $5x$

$5x(-x^6+4x^3y^2-4y^4)$

(2) Nego il segno

$-5x(x^6-4x^3y^2+4y^2)$

(3) Determino quadrati

$x^6 \to x^3$, $4y^2 \to 2y$

$x^3\cdot 2y \Rightarrow 2x^3y \cdot -2 \to -4x^3y$

(4) Ri-scrivo semplificata:

$-5x((x^3-2y)^2) \to 5x(x^3-2y)^2$

SCOMPOSIZIONE TRINOMIO NOTEVOLE > COEFF max 1

Seguire la formula:

- CON GRADI 2 E 1 $\quad x^2+sx+p = (x+a_1)(x+a_2)$

  Se e solo se esistono dei numeri a_1, a_2 per i quali $\begin{cases} a_1+a_2 = s \\ a_1\cdot a_2 = p \end{cases}$

- CON GRADO $2n+n$ $\quad n\in\mathbb{N} \wedge n\geq 1$ $\quad x^{2n}+sx^n+p = (x^n+a_1)(x^n+a_2)$

  Se e solo se esistono dei numeri a_1, a_2 per i quali $\begin{cases} a_1+a_2 = s \\ a_1\cdot a_2 = p \end{cases}$

ES1: x^2+5x+6

$\begin{cases} a_1+a_2 = 5 \\ a_1\cdot a_2 = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} 2+3 = 5 \\ 2\cdot 3 = 6 \end{cases}$

$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$

ES2: "$x^2-5x-14$"

$\begin{cases} a_1+a_2 = -5 \\ a_1\cdot a_2 = -14 \end{cases}$

$\begin{cases} 2-7 = -5 \\ 2\cdot -7 = -14 \end{cases}$

$(x+2)(x-7)$

ES3: "x^8+x^4-12"

$\begin{cases} a_1+a_2 = 1 \\ a_1\cdot a_2 = -12 \end{cases}$

$\begin{cases} -3+4 = 1 \\ -3\cdot 4 = -12 \end{cases}$

$(x^4+4)(x^4-3)$

SCOMPOSIZIONE TRINOMIO NOTEVOLE > COEFF MAX $\neq 1$

Seguire la formula:

- CON EXP 2:

  Se e solo se esistono due numeri t_1, t_2 tali che

$$ax^2+sx+p=(ax+t_1)\cdot\left(x+\frac{t_2}{a}\right)$$
$$\begin{cases} t_1+t_2=s \\ t_1\cdot t_2=ap \end{cases}$$

- CON EXP 2n, n:

  Se e solo se esistono due numeri t_1, t_2 tali che

$$ax^{2n}+sx^n+p=(ax+t_1)\cdot\left(x+\frac{t_2}{a}\right)$$
$$\begin{cases} t_1+t_2=s \\ t_1\cdot t_2=ap \end{cases}$$

ES1: "Scomporre $3x^2-x-2$"

$$\begin{cases} t_1+t_2=-1 \\ t_1\cdot t_2=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} -3+2=-1 \\ -3\cdot 2=-6 \end{cases} \Rightarrow (3x+2)\cdot\left(x+\frac{-3}{3}\right)=(3x+2)\cdot(x-1)$$

ES2: "Scomporre $y^6z^6+5y^3z^3+6$"

Pongo $x=y^3z^3 \Rightarrow x^2+5x+6$
$$\begin{cases} t_1+t_2=5 \\ t_1\cdot t_2=6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3+2=1 \\ 3\cdot 2=6 \end{cases}$$

$(x+2)(x+3)$

DIFFERENZA DI QUADRATI > $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

Seguire la formula:

ES1: $(2x+y)(2x-y)$

$A=2x$, $B=y$

$A^2=4x^2$, $B^2=y^2$

$=4x^2-y^2$

ES2: $(-2x+y)(-2x-y)$

$A=-2x$ $\quad B=y$

$A^2=4x^2$ $\quad B^2=y^2$

$4x^2-y^2$

ES3: "Scomporre $9a^2-16b^4$"

$A^2=9a^2$, $B^2=16b^4$

$A=3a$, $B=4b^2$

$=(3a+4b^2)(3a-4b^2)$

COMMON • 3

SCOMPOSIZIONE TRAMITE RUFFINI

Dato un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ le eventuali radici nei razionali $\mathbb{Q}$ saranno nella forma $r = \frac{p}{q}$ in cui

- p divide a_0
- q divide a_n

1. Elencare possibili radici del polinomio tra i divisori di a_0.
2. Definire lo schema in cui
   - r = La radice del polinomio trovata prima
   - $a_n, a_{n-1}, \dots a_0$ sono i coefficienti del polinomio

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \\
r & & a_n \cdot r & & & \\
\hline
 & a_n & \begin{matrix} a_n \cdot r \\ + a_{n-1} \end{matrix} & & & 0
\end{array}
$$

3. Spostare il coeff. del termine massimo in fondo
4. Moltiplicare il resto per il risultato precedente
5. Sommo il coefficiente corrente con la moltiplicazione
6. Il risultato del coefficiente a_0 deve essere 0.
7. Montare un nuovo polinomio coi coefficienti calcolati nella forma $(x - r)(a_n x^{n} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0)$

ES: $x^4 - 2x^3 - 8x + 16$

(1) Divisori di a_0: $\{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8, -16, 16\}$

(2) Trovo le radici: $x = 2$ $P(x) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 + 16 = 0$

(3) Definisco lo schema:

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & -2 & 0 & -8 & 16 \\
2 & & 1 \cdot 2 & -2 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & -16 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & -8 & 0
\end{array}
$$

Se $a_n \neq 1$ andavano fatte tutte le combinazioni di p e q.

(4) Ri-definisco il polinomio $(x-2)(x^3 - 8)$

(5) Ri-applico ruffini su $x^3 - 8$ $\{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$

con $x = 2$ $2^3 - 8 = 0$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & -8 \\
2 & & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 8 \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & 0
\end{array}
$$

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 - 2x + 4) \rightarrow (x-2)(x-2)(x^2 - 2x + 4)$

RISOLUZIONE EQUAZIONI DI 2NDO GRADO

Data un'equazione $ax^2+bx+c=0$.

1. Trovare il delta $\Delta = b^2-4ac$ Se $\Delta < 0$ non è scomponibile
   Se $\Delta \geq 0$ allora è rappresentabile come $a(x-x_1)(x-x_2)$
2. x_1, x_2 Si prendono come $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

   Se $\Delta = 0$ allora è scomponibile come $a(x-x_1)^2$ $x_1 = -\frac{b}{2a}$

ARCCOS => Sono i valori $x \in X$ per cui $\cos(x) = y$
per $\arccos(y)$

ES "Calcolare $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$" $\rightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$X = \{\frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi\}$ Scegliere a seconda del quadrante.

ARCSIN => È il valori $x \in X$ per cui $\sin(x) = y$
per $\arcsin(y)$

ES: "Calcolare $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$" $\rightarrow \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$X = \{\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\}$ Scegliere a seconda del quadrante.

PROPRIETÀ UTILI DI COS/SIN

- $x \cdot \cos(y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$
- $x \cdot \sin(y) = \sin\left(\frac{y}{x}\right)$

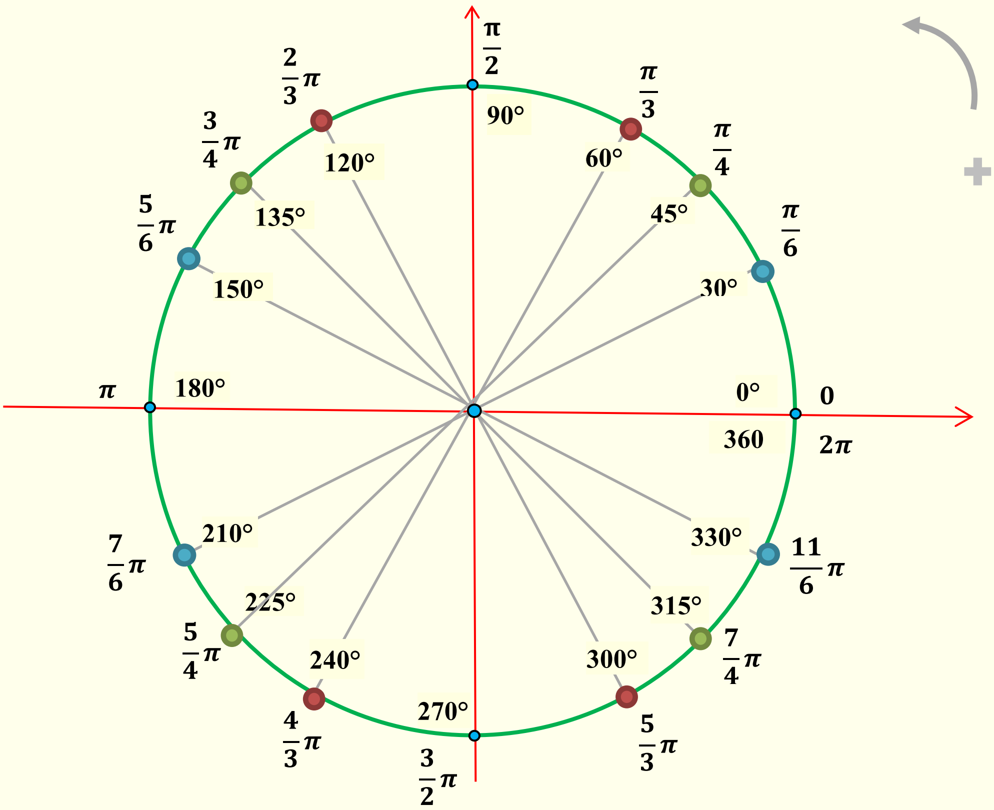
COMMON S

Tabella dei valori di angoli ricorrenti

	rad +	deg +	seno	coseno	tangente	cotangente	rad −	deg −
primo quadrante	0	$0°$	0	1	0	∞	-2π	$-360°$
	$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{11}{6}\pi$	$-330°$
	$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\frac{7}{4}\pi$	$-315°$
	$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{5}{3}\pi$	$-300°$
	$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	∞	0	$-\frac{3}{2}\pi$	$-270°$
secondo quadrante	$\frac{2}{3}\pi$	$120°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{4}{3}\pi$	$-240°$
	$\frac{3}{4}\pi$	$135°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\frac{5}{4}\pi$	-225
	$\frac{5}{6}\pi$	$150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{7}{6}\pi$	$-210°$
	π	$180°$	0	-1	0	∞	$-\pi$	$-180°$
terzo quadrante	$\frac{7}{6}\pi$	$210°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-150°$
	$\frac{5}{4}\pi$	$225°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$-\frac{3}{4}\pi$	$-135°$
	$\frac{4}{3}\pi$	$240°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-120°$
	$\frac{3}{2}\pi$	$270°$	-1	0	∞	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-90°$
quarto quadrante	$\frac{5}{3}\pi$	$300°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-60°$
	$\frac{7}{4}\pi$	$315°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\frac{\pi}{4}$	$-45°$
	$\frac{11}{6}\pi$	$330°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-30°$
	2π	$360°$	0	1	0	∞	0	$0°$

Tabella dei valori di angoli ricorrenti

Posizione di angoli ricorrenti sulla circonferenza goniometrica. Senso di rotazione antiorario (**positivo**)



Posizione di angoli ricorrenti sulla circonferenza goniometrica. Senso di rotazione orario (**negativo**)

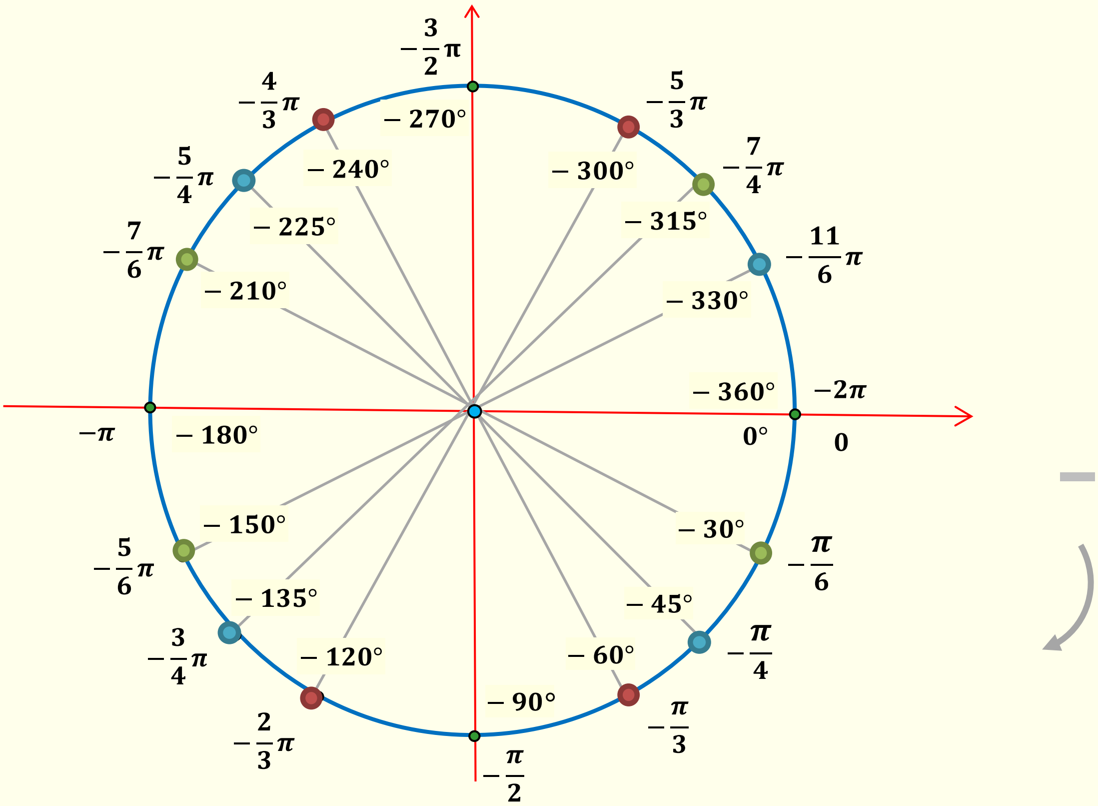
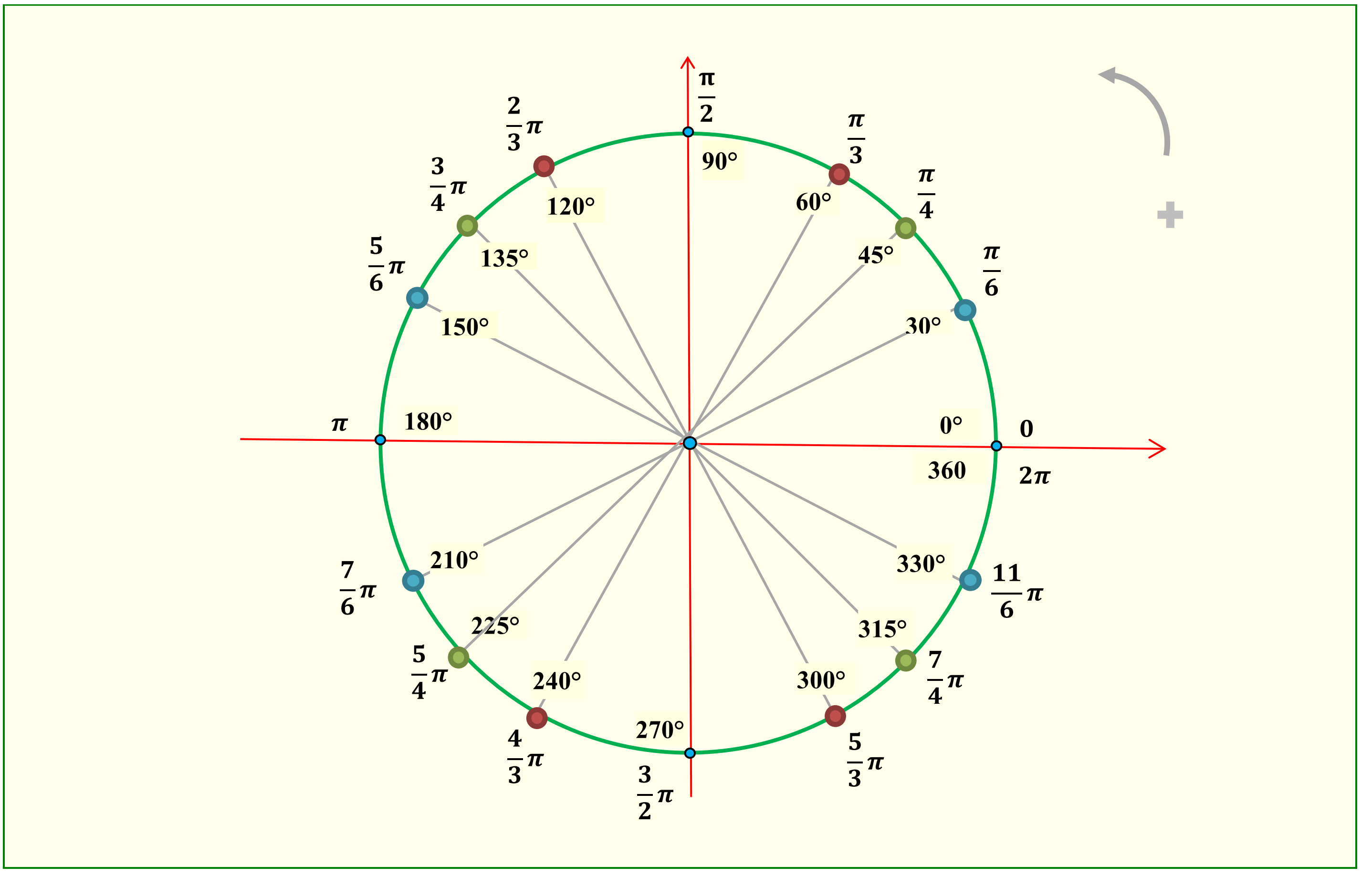


Tabella dei valori di angoli ricorrenti

Posizione di angoli ricorrenti sulla circonferenza goniometrica. Senso di rotazione antiorario (**positivo**)



Posizione di angoli ricorrenti sulla circonferenza goniometrica. Senso di rotazione orario (**negativo**)