L11 • 1

ALGORITMO DEL SIMPLESSO >

È un algoritmo che consente di trovare un punto di ottimo partendo da una soluzione di base:

1. Usando la soluzione di base, si riformulano le incognite della base in funzione delle non-basi.
2. Si prova a controllare se è un vertice
2.? Se è vertice il problema è finito
3. Altrimenti vengono dati dei valori per calcolare la direzione per calcolare il vertice
4. Si ricomincia con il candidato + offset.

Algoritmo del simplesso

Input: un programma lineare $\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, e una sua base ammissibile B. — Ho la base

$\mathbf{x}(B) = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$.

$r_j = c_j - \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_j$ per ogni j t. c. $x_j \in N$.

loop

  if $r_j \leq 0$ per ogni j t. c. $x_j \in N$ **then** — Calcolo $\mathbf{x}$ y

    return $\mathbf{x}(B)$, ottima!

  else

    Scegli $r_q > 0$. — Scelgo 1 var a costi ridotti

    Calcola $\mathbf{y}_B = -\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_q$. — Calcolo comp. base sol amm

    if $\mathbf{y}_B \geq \mathbf{0}$ **then** — Se ha comp. ≥ 0 sol

      return Problema illimitato!

    else

      Scegli $x_p \in B$ tale che $-\frac{x_p(B)}{y_p} = \min\{-\frac{x_j(B)}{y_j} : y_j < 0\}$

      Aggiorna $B \leftarrow B \setminus \{x_p\} \cup \{x_q\}$.

    end if

  end if

end loop

Calcolo perturbazione

CASO D'USO >

"Dato il programma lineare $\max z = 2x_1 + x_2$"
con vincoli :

$$\begin{aligned} &\to & x_1 - 2x_2 &\le 3 \\ &\to & 2x_1 + 3x_2 &\le 8 \\ &\to & x_2 &\le 2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

(0) Faccio diventare il programma in forma standard.

- Max = ✓ lo è già
- Variabili ≥ 0 ✓ ≥ 0 sono già
- Vincoli con uguaglianze :

$$\begin{aligned} &\to x_1 - 2x_2 \le 3 \Rightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ &\to 2x_1 + 3x_2 \le 8 \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 + 0 + x_4 &= 8 \\ &\to x_2 \le 2 \Rightarrow 0 + x_2 + 0 + 0 + x_5 &= 2 \end{aligned}$$ ✓

$$\to x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

(1) Trovo una base di partenza.

Parto osservando che x_3, x_4, x_5 sono sfalsate, ovvero

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \\ x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$

e quindi sono linearmente indipendenti
Perché :
- con $x_2, x_1 = 0$, si trovano subito i termini
- È una base in $\mathbb{R}^3$

Riformuliamo il problema: Parte dei vincoli

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 - x_1 + 2x_2 \\ x_4 &= 8 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_5 &= 2 - x_2 \end{aligned} \qquad x_1, \dots, x_5 \ge 0$$

Riformuliamo il problema: Parte della funzione obiettivo

$z = 0 + 2x_1 + x_2$ In funzione delle non basi è già apposto così

$\lfloor$ Per segnalare che siamo in 1 sol. base di crescita.

Fine inputs.

Input: un programma lineare $\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$, e una sua base ammissibile B.
$\mathbf{x}(B) = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$.
$r_j = c_j - \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_j$ per ogni j t. c. $x_j \in N$.

CASO D'USO > (CONTINUA)

(2) Verifico se esiste 1 punto di ottimo. (Vertice)

(2.1) Definisco i criteri: Non deve esistere y che

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_2 + y_3 &= 0 \\ 2y_1 + 3y_2 + 0 + y_4 &= 0 \\ y_2 + y_5 &= 0 \end{aligned}\right] \quad A \cdot y = 0$$

$$2y_1 + y_2 > 0 \qquad c^t \cdot y > 0$$

$$y_1 + y_2 \geq 0 \qquad y_i \geq 0 \text{ quando } x_i = 0$$

METODO ESTESO GUARDARE PT. (4)

(2.2) Riformulo in funzione delle stesse variabili della x (y_3, y_4, y_5)

$$\underbrace{\begin{aligned} y_3 &= 0 - y_1 + 2y_2 \\ y_4 &= 0 - 2y_1 - 3y_2 \\ y_5 &= 0 - y_2 \end{aligned}}_{\text{vincoli}} \qquad \underbrace{2y_1 + y_2 > 0}_{\text{f. obiettivo}}$$

$y_1, y_2 \geq 0$

(2.3) Mi prendo 1 vettore (valore a caso su y non basi)

* Con $y_1 = 1$ e $y_2 = 0$

- $y_3 = -1$
- $y_4 = -2$
- $y_5 = 0$

$\rightarrow \exists$ 1 elemento < 0 per cui ci sono soluzioni finite

(3) Calcolo perturbazione:

(3.1) Ri-definisco le variabili della f. obiettivo

- $x_1 = 0 + \varepsilon \cdot 1$
- $x_2 = \underbrace{0}_{\text{gli ottimi}} + \varepsilon \cdot 0$

Sono le coordinate a caso della y *

(3.2) Ri-scrivo gli elementi della base in funz. della perturb.

$x_3 = 3 - \varepsilon$

$x_4 = 8 - 2\varepsilon$

$x_5 = 2 - 0$

CASO DIVISO (CONTINUA) >

(3)

(3.3) Calcolo delle disuguaglianze

$$x_3 = 3 - \varepsilon \qquad x_4 = 8 - 2\varepsilon \qquad x_5 = 2 - 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3 - \varepsilon \geq 0 \\ x_4 = 8 - 2\varepsilon \geq 0 \\ x_5 = 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \geq \varepsilon \\ 4 \geq \varepsilon \\ 2 \geq 0 \checkmark \end{cases}$$

(3.4) Calcolo la ε massima: L'unica è la 3

(3.5) Ri-calcolo per $\varepsilon = 3$

$$\begin{aligned} x_3 &= 3-3 \\ x_4 &= 8-6 \\ x_5 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_4 &= 2 \\ x_5 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 + 3 \cdot 1 = 3 \\ x_2 &= 0 + 3 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

I coeff. non base non cambia

Entra in base

-> I coefficienti noti della nuova base

(4/2) Metodo Veloce - Partendo dal Punto 2.

$$\begin{aligned} z &= 0 + 2x_1 + x_2 \\ x_3 &= 3 - x_1 + 2x_2 \\ x_4 &= 8 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_5 &= 2 - x_2 \end{aligned}$$

(4.1) Scelgo 1 variabile non-base esce > 0 (a caso) = x_1

(4.2) Scelgo 1 variabile di base da far uscire

Ri definisco come prima la $\varepsilon = x_3$

-> x_3 $\quad 3 - \varepsilon \geq 0 \rightarrow \varepsilon \leq 3$

x_4 $\quad 8 - 2\varepsilon \geq 0 \rightarrow \varepsilon \leq \frac{8}{2}$

] Scelgo la var più piccola

(4.3) Ri-Formulo scambiando $x_1 \Leftrightarrow x_3$

$$\begin{aligned} z &= 0 + 2x_1 + x_2 \\ x_3 &= 3 - x_1 + 2x_2 \\ x_4 &= 8 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_5 &= 2 - x_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} z &= 0 + 6 - 2x_3 + 4x_2 + x_2 \\ x_1 &= 3 - x_3 + 2x_2 \\ x_4 &= 8 - 6 + 2x_3 - 4x_2 - 3x_2 \\ x_5 &= 2 - x_2 \end{aligned}$$

$$\left[z = 6 - 2x_3 + 5x_2 \right.$$

Fine ciclo

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + 2x_2 - x_3 \\ x_4 &= 2 - 7x_2 + 2x_3 \\ x_5 &= 2 - x_2 \end{aligned}$$

L11 • S

CASO DIUSO (CONTINUA)

(4.2) Loop PT2

$$z = 6 - 2x_3 + 5x_2$$

$$x_1 = 3 + 2x_2 - x_3$$
$$x_4 = 2 - 7x_2 + 2x_3$$
$$x_5 = 2 - x_2$$

(4.1) Base IN: x_2

(4.3) Base OUT: x_4

$x_1 \Rightarrow \frac{3}{2}$

$x_4 \Rightarrow \frac{2}{7} \Leftarrow$

$x_5 \Rightarrow \frac{2}{1}$

(4.4) Ri-scrittura

$$z = \frac{52}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4$$

Negativi -> Punto di ottimo

$$x_1 = 3 + 2\cdot\left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4\right) = \frac{25}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4$$
$$x_2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$$
$$x_5 = \quad = \frac{12}{7} - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4$$

(4.5) Verifico Punto di ottimo (Non necessario)

$$y_1 = 0 - \frac{3}{7}y_3 - \frac{2}{7}y_4$$
$$y_2 = 0 + \frac{2}{7}y_3 - \frac{1}{7}y_4$$
$$y_5 = 0 - \frac{2}{7}y_3 + \frac{1}{7}y_4$$

Per def -> $y_3, y_4 \geq 0$

Ma sappiamo che con z

$$-\frac{4}{7}y_3 - \frac{5}{7}y_4 > 0$$

Assurdo!

TROVARE VARIABILI DI BASE >

Per trovare le variabili artificiali, ci sono più casi possibili:

- **VARIABILI OVVIE**

  Esistono delle variabili nei vincoli per le quali riformulando in funzione delle variabili stesse il valore noto è >0

  ES:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + x_4 = 3 \\ -\frac{5}{2}x_1 + \frac{8}{5}x_2 + x_5 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

  formano una matrice diag. pos.

- **VARIABILI NON OVVIE**

  - Si definiscono delle variabili artificiali aggiungendole nelle righe in cui serve in positivo.

  - Si riformula la funzione obiettivo nella sintassi
    $z = \min \; s_1 + s_2 + \ldots + s_n$

  - Infine, si prova a risolvere il nuovo problema. Se ha soluzioni in cui le variabili artificiali stanno fuori base (nella f. obiettivo) allora

- Fatto ciò, se ci sono sol., le funzioni obiettivo riformulate saranno già pronte per il problema iniziale. (eliminando le var. art.)

TROVARE VARIABILI DI BASE >

- VARIABILI NON OVVIE

ES: "Risolvere col simplesso il seguente sistema lineare"

$$\max \quad z = 3x_1 + x_2$$

$$2x_1 + x_2 \geq 4 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$x_1 \leq 5$$

(0) Trasformare in sistema lineare omogeneo:

- Max = ✓
- Var. positive: ✓
- = sui vincoli

$$\begin{array}{l} \text{NO} \to \\ \text{NO} \to \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$x_5 \to$ va bene

$$\begin{array}{llll} 2x_1 + x_2 - x_3 & & & = 4 \\ x_1 + 2x_2 & - x_4 & & = 4 \\ x_1 & & + x_5 & = 5 \end{array}$$

(1) Trovo la base:

(1.a) Aggiungo le variabili artificiali

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 + x_2 - x_3 & & & + s_1 & = 4 \\ x_1 + 2x_2 & - x_4 & & + s_2 & = 4 \\ x_1 & & + x_5 & & = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & x_5 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

1.b) Risolvo il sotto-sistema: ↑

$$z' = \min \quad s_1 + s_2 \qquad x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 \geq 0$$

1.b.1) 1° iterazione:

BASE IN: s_1, s_2, x_5

$$z' = \max \; -s_1 - s_2$$

BASE OUT:

$$s_1 = 4 - 2x_1 - x_2 + x_3$$
$$s_2 = 4 - x_1 - 2x_2 + x_4$$
$$x_5 = 5 - x_1$$

x_1
$\left[\frac{4}{2} = 2\right] \to$ Prox IN
$[4]$
$[5]$

$$z' = -4 + 2\acute{x}_1 + \acute{x}_2 - x_3 - 4 + \dot{x}_1 + 2\acute{x}_2 - x_4$$
$$= -8 + 3x_1 + 3x_2 \ominus x_3 \ominus x_4$$

TROVARE VARIABILI DI BASE

- **VARIABILI NON NULLE**

ES: Continuazione

(1) Trovo la base:

1.b) Risolvo il sotto-sistema:

1.b.2) Iterazione 2:

$z = -8 + 3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4$

BASE OUT: s_1
BASE IN: x_1

$\left[\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4\right]$ $x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_1$

$\left\{\frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\right\}$ $s_2 = 2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_1 + x_4$

$x_5 = 3 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_1$

$2x_1 = 4 - x_2 + x_3 - s_1$

$x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_1$

$s_2 = 4 - x_1 - 2x_2 + x_4$
$= 4 - (2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_1) - 2x_2$
$= 4 - 2 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_1 - 2x_2 + x_4$
$= 2 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_1 - 2x_2 + x_4$

$x_5 = 5 - 2 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_1$
$= 3 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_1$

$z = -8 + 3(2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_1) + 3x_2 - x_3 - x_4$
$= -8 + 6 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}s_1 + 3x_2 - x_3 - x_4$
$= -2 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}s_1 + 3x_2 - x_3 - x_4$
$= -2 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}s_1 - x_4$

1.b.3) Iterazione 3:

BASE OUT: s_2
BASE IN: x_2

Basi utilizzabili
$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \\ x_5 = \frac{11}{3} + \frac{2}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

$\frac{-1-3}{6} = -\frac{4}{6}\frac{2}{3}$

$z = 0 - s_1 - s_2$ ottimo

$\frac{3}{2}x_2 = 2 + \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 - s_2$

$\cancel{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2}x_2 = \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}s_1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}s_2$

$x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}s_2$

$3 + \frac{1}{2}(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}s_2)$
$3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}s_1 - \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_2$
$\frac{11}{3} + \frac{1}{6}s_1 - \frac{1}{3}s_2 - \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4$
$- \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_1$
$= \frac{11}{3} + \frac{2}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$
$- \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_1$

L12

REGOLE DI SCELTA PER BASE IN/OUT

- **BASE-IN:** Scegliere quella positiva col coeff. maggiore
  Se ci sono valori uguali, scegliere a caso

- **BASE-OUT:** Fra i rapporti, scegliere il rapporto minore
  Se ci sono valori uguali, scegliere a caso

BASI DEGENERI

Sono basi con Termine Noto = 0. Possono portare cicli

Per evitare cicli (Regola di Bland)
  - Tra le variabili con costo ridotto > 0, scegliere la min o a caso
  - Tra i rapporti, scegliere la min o a caso.

DUALE >

Dato un programma lineare (detto Primale) preferibilmente in forma standard, il Duale è nella forma

$$\min z = \{ {}^t u \cdot b \mid {}^t u \cdot A \geq c^t \} \leftarrow \max z = \{ x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid c \cdot x \cdot A = b \}$$

In cui:

- ${}^t u$: È il vettore con termini ignoti $\in \mathbb{R}$
- b : È il vettore dei Termini noti dei vincoli del problema originale
- c : È il vettore dei coefficienti della f. obiettivo.

ES: Per il problema

$$\max z = x_1 - x_2$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = \boxed{5} \qquad x_1, \dots, x_4 \geq 0$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 = \boxed{6} \rightarrow b$$

(0) Def. programma lineare: ✓

(1) Def. Duale:

$$\min w = 5u + 6u$$
$$u_1 + 3u_2 \geq 1$$
$$2u_1 + 1u_2 \geq -1$$
$$-u_1 \geq 0$$
$$u_2 \geq 0$$
con $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$c = [\,1 \quad -1 \quad 0 \quad 0\,]$$

RILASSAMENTO LAGRANGIANO >

Metodo alternativo per calcolare la duale. Consiste nel sommare le funzioni obiettivo moltiplicate per i valori incogniti:

ES: Con $\max z = x_1 - x_2$

$x_1, \dots, x_4 \geq 0$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \rightarrow u_1$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 = 6 \rightarrow u_2$$

(1) Ri-scrivo z:

$$x_1 - x_2 + u_1 \cdot [\, 5 - (x_1 + 2x_2 - x_3) \,] + u_2 \cdot [\, 6 - (3x_1 + x_2 + x_4) \,]$$

RILASSAMENTO LAGRANGIANO

ES: "Continua"

(1) Calcolo il Rilassamento

$L(u) =$

$$x_1 - x_2 + u_1 \cdot [\boxed{5} - (\overbrace{x_1}^{-1;3} + 2x_2 - x_3)] + u_2 \cdot [\boxed{6} - (3x_1 + x_2 + x_4)]$$

$$= 5u_1 + 6u_2 + \max_{x_1, x_2} \; x_1 [1 - \overbrace{u_1 - 3u_2}^{-1 \quad -3}] \le 0$$

$$x_2 [-1 - 2u_1 - u_2] \le 0$$

$$[-u_3] \le 0$$

$$[+u_4] \le 0$$

Da qui possiamo risalire al rilassamento lagrangiano

DUALE PROPRIETÀ

- Il duale del duale è il primale originale
- Se il Primale è illimitato, il Duale NON ha soluzioni amissibili
- Se il Duale è illimitato, il Primale non ha soluzioni
- Se si ha 2 soluzioni amissibili per la primale e duale in cui hanno entrambe la stessa funzione obiettivo, allora i due punti sono ottimi
- Se si ha 2 soluzioni amissibili per la primale e duale In generale la soluzione della primale sarà $\geq$ alla soluzione della duale

DUALE > DUALITÀ FORTE

Dati un primale e un duale. Il primale ha un ottimo se e solo se il duale ha un ottimo.

Inoltre avranno lo stesso valore $v \cdot x = 0$

Ovvero sono complementari:

Con x (primale) e v (duale):

- $x_i > 0 \to v_i = 0$
- $v_i > 0 \to x_i = 0$

L17 • Simplesso Duale

CASO D'USO: RISOLUZIONE SISTEMA CON DUALE

" Risolvere $\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$

con vincoli:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \le 10 \qquad x_1, \dots, x_4 \ge 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 5$$

(1) Trasformo in forma standard:

- Vincoli:
  - $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 10 \qquad x_1, \dots, x_6 \ge 0$
  - $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 5$

(2) Definisco il duale:

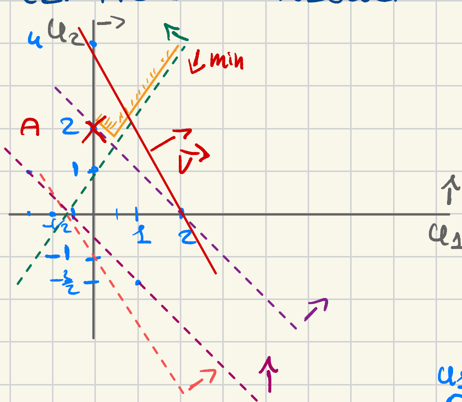
$$b = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = [\,2 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$$

$\min \; 10u_1 + 5u_2$ Vincoli

$$u_1 + u_2 \ge 2$$
$$2u_1 + u_2 \ge -1$$
$$-u_1 + u_2 \ge 1$$
$$3u_1 + 2u_2 \ge 0$$
$$u_1 \ge 0 \quad u_2 \ge 0$$

(3) Provo a risolvere il sistema (Per via grafica)



$u_1 + u_2 \ge 2 \rightarrow u_1 + u_2 = 2$

u_1	u_2
0	2
2	0

$-u_1 + u_2 \ge 1$

u_1	u_2
0	1
-1	0

$2u_1 + u_2 \ge -1$

u_1	u_2
0	-1
$-\frac{1}{2}$	0

$3u_1 + 2u_1 \ge 0$

u_1	u_2
1	$-\frac{3}{2}$
$-\frac{2}{3}$	1

$3 + 2u_1 = 0$
$2u_1 = -3$
$u_1 = -\frac{3}{2}$
$3u_1 + 2 = 0$
$\frac{3u_1}{3} = -\frac{2}{3}$

$10u_1 + 5u_2 = 20$

u_1	u_2
0	4
2	0

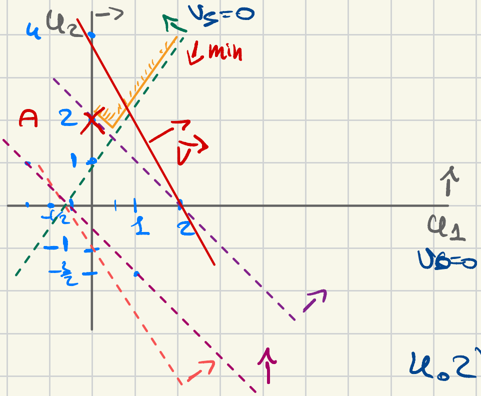
Ottimo

$A = (0, 2)$ con $u_1 = 0$, $u_2 = 2$

L17 • Simplesso Duale

CASO D'USO: RISOLUZIONE SISTEMA CON DUALE

(4) Deduco i valori del primale con le prop. del duale



4.1) Trasformo in Lineare

x_1	$u_1 + u_2$	$- V_1$	$= 2$
x_2	$2u_1 + u_2$	$- V_2$	$= -1$
x_3	$-u_1 + u_2$	$- V_3$	$= 1$
x_4	$3u_1 + 2u_2$	$- V_4$	$= 0$
x_5	u_1	$- V_5$	$= 0$ (1)
x_6	u_2	V_6	$= 0$ (2)

4.2) Deduco i valori delle v_i

$v_1 \Rightarrow \quad 0 + 2 - v_1 = 2 \Rightarrow v_1 = 0$

$v_2 \Rightarrow \quad 0 - 1 - v_2 = -1 \Rightarrow v_2 = 0$

$v_3 \Rightarrow \quad 0 + 1 - v_3 = 1 \Rightarrow v_3 = 0$

$v_4 \Rightarrow \quad 3 - 2 \cdot \frac{3}{2} - v_4 = 0 \Rightarrow v_4 = 0$

$v_5 \Rightarrow \quad 0 - v_5 = 0 \Rightarrow v_5 = 0$

$v_6 \Rightarrow \quad v_6 = 0$

Ottimo

$A = (\underset{u_1}{0}, \underset{u_2}{2})$

4.3) Applico la proprietà della duale

$v_i = 0 \Rightarrow x_i > 0 \qquad x_i > 0 \vDash v_i = 0$

Dall'ottimo

- $v_1 = 0$ (retta /) $\wedge$ $v_6 = 0$ $\qquad v_2, v_3, v_4, v_6 > 0$

Le altre DEVONO essere $> 0 \rightarrow$

5) Applico le proprietà sul primale $\qquad x_2, x_3, x_4, x_6 = 0$

$\max z \quad 2x_1 - x_2 + x_3$

$x_1 + 2\cancel{x_2} - \cancel{x_3} + 3\cancel{x_4} + x_5 = 10$

$x_1 + \cancel{x_2} + 2\cancel{x_3} + 2\cancel{x_4} + \cancel{x_6} = 5$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_5 = 10 \\ x_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 5 \end{cases}$ ✓

SIMP. DUALE > BASI OTTIME MA NON AMMISSIBILI

Può succedere che, applicando il simplesso, capiti un vincolo in base con ==termine noto negativo==.

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2 - \tfrac{4}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_4 \\ x_1 &= 2 - \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_4 \\ \rightarrow x_3 &= -3 + \tfrac{5}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_4 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \min\ z &= 2\ v_1 - 3\ v_3 \\ v_2 &= \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3} v_1 - \tfrac{5}{3} v_2 \\ v_3 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} v_1 + \tfrac{1}{3} v_2 \end{aligned}$$

Per risolvere il problema, bisognerà

1. Creare il Duale
2. Portare tutti i termini in funzione delle variabili di slack trasponendo le basi con le non-basi:

duale
- I coefficienti noti diventano i coefficienti delle variabili fuori base e vice versa
- I coefficienti dei vincoli vengono trasposti

3. Da cui si prosegue normalmente il simplesso sul duale

1

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2 - \tfrac{4}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_4 \\ x_1 &= 2 - \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_4 \\ \rightarrow x_3 &= -3 + \tfrac{5}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_4 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min\ w &= 2 + 2v_1 - 3v_3 \\ v_2 &= \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}v_1 - \tfrac{5}{3}v_3 \\ v_4 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}v_1 + \tfrac{1}{3}v_3 \\ & v_1, \dots, v_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ z &= -\tfrac{2}{5} - \tfrac{4}{5}x_3 - \tfrac{3}{5}x_4 \\ x_1 &= \tfrac{7}{5} - \tfrac{1}{5}x_3 - \tfrac{2}{5}x_4 \\ x_2 &= \tfrac{9}{5} + \tfrac{3}{5}x_3 + \tfrac{1}{5}x_4 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min\ w &= -\tfrac{2}{5} + \tfrac{7}{5}v_1 + \tfrac{9}{5}v_2 \\ v_3 &= \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{5}v_1 - \tfrac{3}{5}v_2 \\ v_4 &= \tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{5}v_1 - \tfrac{1}{5}v_2 \\ & v_1, \dots, v_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplesso Duale II

SIMP. DUALE > METODO VELOCE

Per evitare di andarsi a creare e risolvere il duale, conviene lavorare sul primale:

- Scegliere come termine uscente dalla base il termine con valore noto < 0
- Guardando sulla stessa riga, scegliere la variabile con coefficiente > 0:
  Tra le candidate, scegliere quella col rapporto $\left|\frac{-b}{a_i}\right|$ minore, con
  - b coeff. dell i-esimo costo (F. obb)
  - a_i coeff. della i-esima variabile non in base

Se non si riesce a trovare, il problema non ha sol.!

ES:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2 - \tfrac{4}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_4 \\ x_1 &= 2 - \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_4 \\ x_3 &= -3 + \tfrac{5}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_4 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ z &= -\tfrac{2}{5} - \tfrac{4}{5}x_3 - \tfrac{3}{5}x_4 \\ x_1 &= \tfrac{7}{5} - \tfrac{1}{5}x_3 - \tfrac{2}{5}x_4 \\ x_2 &= \tfrac{9}{5} + \tfrac{3}{5}x_3 + \tfrac{1}{5}x_4 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

ESCE: x_3 per -3 noto

ENTRA: x_2 per $\frac{5}{3}$ unica scelta possibile

ovvero $\dfrac{+\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = +\frac{4}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} = \frac{4}{5}$

CASO D'USO: APPLICAZIONE SIMPLESSO DUALE

"Risolvere $\min z = 2x_1 + 3x_2$ con: $3x_1 + 2x_2 \geq 4$, $x_1 + 3x_2 \geq 5$, $x_1, x_2 \geq 0$"

(0) Trasformo forma STD

- Max => $\max z = -2x_1 - 3x_2$
- Vincoli => $3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$
  $x_1 + 3x_2 - x_4 = 5$ $\quad x_1, \dots, x_4 \geq 0$

(1) Applico il simplesso come non ammissibile $x_B = \{x_3, x_4\}$

$x_3 = -4 + 3x_1 + 2x_2$ $\qquad \max z = 0 - 2x_1 - 3x_2$

$x_4 = \underbrace{-5}_{<0} + x_1 + 3x_2$

CASO D'USO: APPLICAZIONE SIMPLESSO DUALE

(1.1) Simplesso Duale: Applico la forma semplificata

$$\max z = 0 - 2x_1 - 3x_2$$
$$x_3 = -4 + 3x_1 + 2x_2$$
$$x_4 = -5 + x_1 + 3x_2$$

BASE OUT: x_4

BASE IN: $\min\left\{ \frac{2}{1}, \frac{3}{3} \right\} = \frac{3}{3}$ x_2

$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$

Da cui in poi come sempre

$$x_2 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4$$
$$x_3 = -\frac{2}{3} + \frac{7}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_4$$

$$\max z = -5 \underbrace{-x_1 - x_4}$$

⚠ solitamente questi coeff. devono stare < 0

(1.2) Simplesso Duale: Applico la forma semplificata

BASE OUT: x_3 per $-\frac{2}{3}$

BASE IN: x_1

$$\max z = -5 - x_1 - x_4$$
$$x_2 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4$$
$$x_3 = -\frac{2}{3} + \frac{7}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_4$$

$$\min = \left\{ \frac{1}{\frac{7}{3}}, \frac{1}{\frac{2}{3}} \right\} = \left\{ \frac{3}{7}, \frac{3}{2} \right\} = x_1$$

($\frac{3}{7}$: x_1, $\frac{3}{2}$: x_4)

$$\max z = -\frac{37}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4$$

✓

$$x_1 = \frac{2}{7} + \frac{3}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4$$
$$x_2 = \frac{4}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4$$

INSERIMENTO VINCOLI SU VARIABILI ESISTENTI

Dato un sistema di cui si sa già l'ottimo, a volte vengono aggiunti nuovi vincoli. Per gestirli basta standardizzare

---

ES

$$\max z = \frac{52}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4$$
$$x_1 = \frac{25}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4$$
$$x_2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$$
$$x_5 = \frac{12}{7} - \frac{5}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4$$
$$x_6 = -\frac{3}{7} \underbrace{- \frac{3}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4}$$

aggiungo $x_1 \geq 4$

(1) Standardizzo:

$x_1 \geq 4 \rightarrow x_1 - x_6 = 4$

(2) Riformulo in base

$x_6 = -4 + x_1$

$=$

↳ In questo caso non ha sol ammissibili

PROGRAMMA LINEARE INTERO >

È una variante di programmazione lineare in cui

- I coefficienti della matrice dei coefficienti della matrice sono $\in \mathbb{Z}$ [vincoli]
- I coefficienti della funzione obiettivo sono interi positivi $\in \mathbb{Z}^+$

PROGRAMMA LINEARE INTERO > SOLUZIONI

Le soluzioni sono le soluzioni del programma lineare intero al quale è stato applicato il rilassamento continuo (var in $\mathbb{R}$).
Dalle quali va preso solo la parte intera

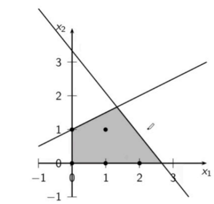
Forma standard

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 6x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 15x_1 + 12x_2 \leq 40 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 6x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 15x_1 + 12x_2 + x_3 = 40 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Rilassamento continuo.

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 6x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 15x_1 + 12x_2 \leq 40 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 6x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 15x_1 + 12x_2 + x_3 = 40 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Forma standard Rilassata



$Z_a \subseteq S_a$

$\hat{z} = \max\{c^T x : x \in Z_a\} \leq \max\{c^T x : x \in S_a\} = UB$ (Upper bound)

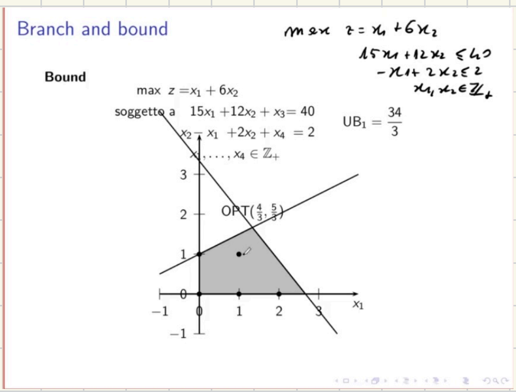
P. LIN. INTERA > BRANCH & BOUND : RISOLUZIONE

Per risolvere i sistemi lineari interi, si segue:

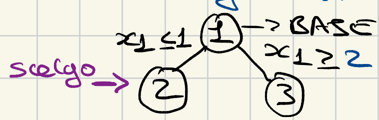
1. Si Risolve il problema rilassato
2. • SE la soluzione appartiene agli interi (Tutte le x_i!) Allora la soluzione vale anche per gli interi
   • ALTRIMENTI
   Per ogni componente non lineare, si devono risolvere 2 sotto-problemi
   - Problema con aggiunta di vincolo $P \wedge x_i \leq \lfloor \lambda_i \rfloor$ minore del floor
   - $P \wedge x_i \geq \lceil \lambda_1 \rceil$ maggiore del ceil

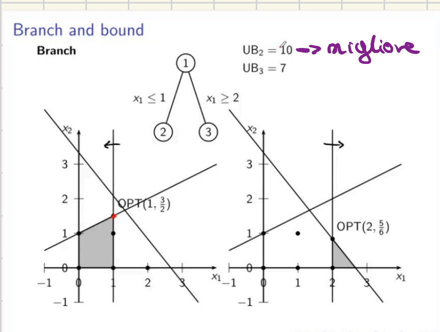
   Da cui si prende la soluzione migliore.

ESEMPIO

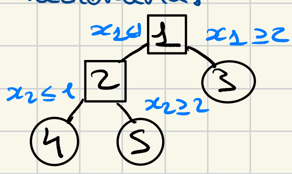


- Il S.L.I fornisce come punto OPT $(\underbrace{\frac{4}{3}, \frac{5}{3}}_{\notin \mathbb{Z}})$
- Va fatto un branch. Si parte scegliendo 1 solo caso: Scelgo $x_1 \to \frac{3}{3}1, \frac{6}{3} = 2$



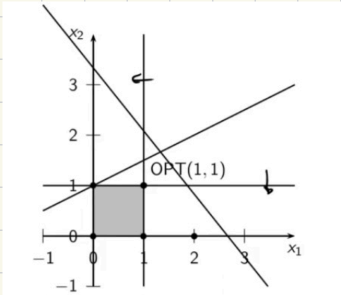


- Ripeto per l'altra componente frazionaria:



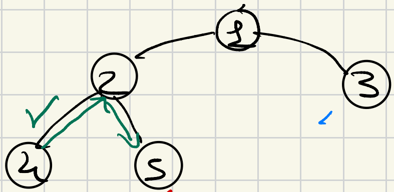
P. LIN. INTERA > BRANCH & BOUND : RISOLUZIONE

ESEMPIO

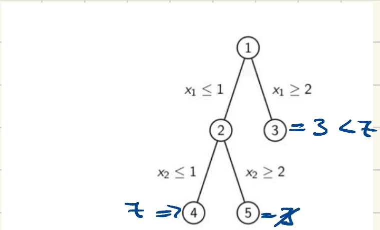


→ $UB_4 = 7$ Soluzione intera! → $\hat{z}$
$UB_5 =$ No soluzioni ammissibili!

- Trovato un ottimo, si prosegue sugli altri branch.



no sol. non esploro sotto



Il problema (3) non va più risolto!
Chiuso perché $UB_3 = 7 \leq \hat{z}$
Ottimo $\hat{z} = 7$, $\hat{x}_1 = 1$, $\hat{x}_2 = 1$.

Se nei rami fratelli il valore è minore rispetto al candidato, allora si può anche skippare