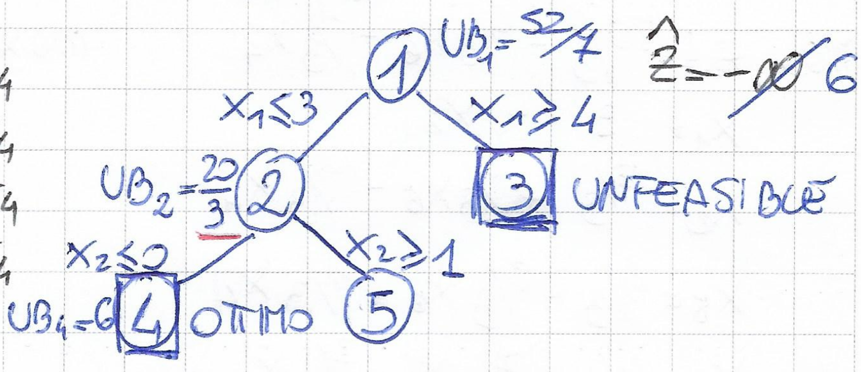
SIMPLESSO, BRANCH & BOUND

$$\max z = 2x_1 + x_2 \qquad\qquad \max\ 2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{array} \xrightarrow[\text{STANDARD}]{\text{FORMA}} \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ x_2 + x_5 = 2 \\ x_{1\_5} \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ x_2 + x_5 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 25/7 - 3/7\, x_3 - 2/7\, x_4 \\ x_2 = 2/7 + 2/7\, x_3 - 1/7\, x_4 \\ x_5 = 12/7 - 2/7\, x_3 + 1/7\, x_4 \end{cases} \quad B = \{x_1, x_2, x_5\}$$

$$\begin{array}{l} \max z = 52/7 - 4/7\, x_3 - 5/7\, x_4 \\ x_1 = 25/7 - 3/7\, x_3 - 2/7\, x_4 \\ x_2 = 2/7 + 2/7\, x_3 - 1/7\, x_4 \\ x_5 = 12/7 - 2/7\, x_3 + 1/7\, x_4 \\ x_{1\_5} \geq 0 \end{array}$$



Scelgo la variabile con indice più piccolo (x_1) e faccio branch.

② $x_1 \leq 3 \rightarrow$ Aggiungo il vincolo $x_1 + x_6 = 3 \Rightarrow x_6 = 3 - x_1$

ENTRA

$$\begin{array}{ll} & \max z = 52/7 - 4/7\, x_3 - 5/7\, x_4 \\ & x_1 = 25/7 - 3/7\, x_3 - 2/7\, x_4 \\ & x_2 = 2/7 + 2/7\, x_3 - 1/7\, x_4 \\ & x_5 = 12/7 - 2/7\, x_3 + 1/7\, x_4 \\ \text{ESCE} & x_6 = -4/7 + 3/7\, x_3 + 2/7\, x_4 \\ & x_{1\_6} \geq 0 \end{array} \xrightarrow{\text{isolo } x_3 \text{ e sostituisco}} \begin{array}{l} \max z = 20/3 - 4/3\, x_6 - 1/3\, x_4 \\ x_1 = 3 - x_6 \\ x_2 = 2/3 + 2/3\, x_6 - 1/3\, x_4 \\ x_5 = 4/3 - 2/3\, x_6 + 1/3\, x_4 \\ x_3 = 4/3 + 7/3\, x_6 - 2/3\, x_4 \\ x_{1\_6} \geq 0 \end{array}$$

- Per decidere chi esce prendo la variabile con ~~costo ridotto~~ termine noto negativo minore (lontano da 0).
- Per chi far entrare prendo i coeff. positivi della variabile uscente, faccio i rapporti coi coeff. della F.O. cambiati di segno e prendo il più piccolo. $\dfrac{4/7}{3/7}$ vs. $\dfrac{5/7}{2/7}$

③ $\underline{x_1 \geq 4}$ $\quad x_1 - x_6 = 4 \Rightarrow x_6 = x_1 - 4$

$$\max z = 32/7 - 4/7\, x_3 - 5/7\, x_4$$
$$x_1 = 25/7 - 3/7\, x_3 - 2/7\, x_4$$
$$x_2 = 2/7 + 2/7\, x_3 - 1/7\, x_4$$
$$x_5 = 12/7 - 2/7\, x_3 + 1/7\, x_4$$
ESCE $\quad x_6 = -3/7 - \underline{3/7}\, x_3 - \underline{2/7}\, x_4$

Non essendoci variabili con coeff. positivi nella variabile uscente non ci sono rapporti da fare per selezionare una variabile entrante, ergo il duale è illimitato ed il primale privo di soluzione ammissibile.

④ Provo a chiudere per interezza la prossima variabile (x_2)

$\underline{x_2 \leq 0}$ $\quad x_2 + x_7 = 0 \Rightarrow x_7 = 0 - x_2$

ENTRA

$$\max z = 20/3 - 4/3\, x_6 - 1/3\, x_4$$
$$x_1 = 3 - x_6$$
$$x_2 = 2/3 + 2/3\, x_6 - 1/3\, x_4$$
$$x_5 = 4/3 - 2/3\, x_6 + 1/3\, x_4$$
$$x_3 = 4/3 + 7/3\, x_6 - 2/3\, x_4$$
ESCE $\quad x_7 = \underline{-2/3} - 2/3\, x_6 + 1/3\, x_4$

$$x_{1-7} \geq 0$$

$$\max z = \underline{6} - 2x_6 - x_7 \qquad UB_4 = 6$$
$$x_1 = 3 - x_6$$
$$x_2 = 0 \quad - x_7$$
$$x_5 = 2 \quad + x_7$$
$$x_3 = 0 + x_6 - 2x_7$$
$$x_4 = 2 + 2x_6 + 3x_7$$

Poiché $UB_4 = 6 = \lfloor 20/3 \rfloor = \lfloor UB_2 \rfloor$ non serve che continui perché al più il ~~fra~~ fratello, qualora fosse ottimo, non potrebbe valere più di 6.

TAGLI DI GOMORY

$$\max z = 51/4 - 1/4\, x_3 - 5/4\, x_4$$
$$x_1 = 9/4 - 3/4\, x_3 + 1/4\, x_4$$
$$x_2 = 3/2 + 1/2\, x_3 - 1/2\, x_4 \qquad x_{1-4} \geq 0$$

- Per effettuare il Taglio di Gomory scelgo la riga (di una var.) col termine noto non intero e almeno un coeff. positivo.
- Occorre ricordare che:

$$\text{frac}(-1/4) = -1/4 - \lfloor -1/4 \rfloor = -1/4 - (-1) = 3/4$$

In questo caso scelgo arbitrariamente x_1.

variabili a sx — termine noto a dx

$$\text{frac}(3/4)\, x_3 + \text{frac}(-1/4)\, x_4 \geq \text{frac}(9/4)$$

$$3/4\, x_3 + 3/4\, x_4 \geq 1/4$$

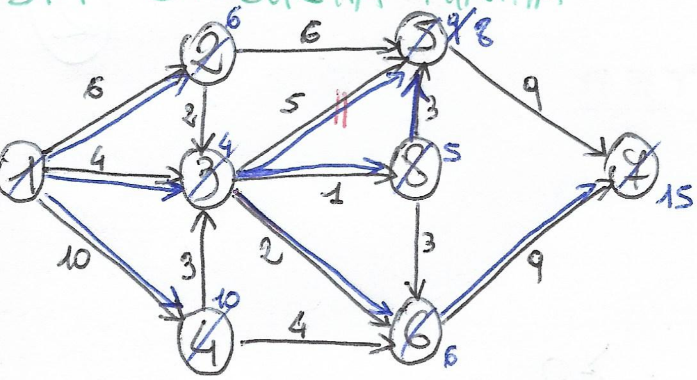
$$3/4\, x_3 + 3/4\, x_4 - x_5 = 1/4 \qquad x_5 \geq 0$$

Aggiungo il nuovo vincolo e riformulo.

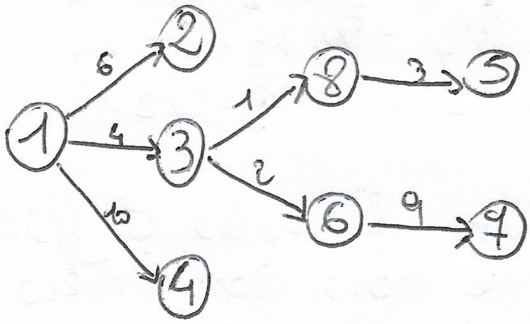
$$\begin{array}{ll} & \max z = 51/4 - 1/4\, x_3 - 5/4\, x_4 \\ & x_1 = 9/4 - 3/4\, x_3 + 1/4\, x_4 \\ & x_2 = 3/2 + 1/2\, x_3 - 1/2\, x_4 \\ \text{ESCE} & x_5 = -1/4 + 3/4\, x_3 + 3/4\, x_4 \\ & \quad \text{ENTRA} \qquad x_{1-5} \geq 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} \max z = 38/3 - 1/3\, x_5 - x_4 \\ x_1 = 2 - x_5 + x_4 \\ x_2 = 5/3 + 2/3\, x_5 - x_4 \\ x_3 = 1/3 + 4/3\, x_5 - x_4 \\ \qquad x_{1-5} \geq 0 \end{array}$$

- A questo punto x_1 è intera, proseguo con un nuovo Taglio su x_2

SPT ETICHETTA MINIMA



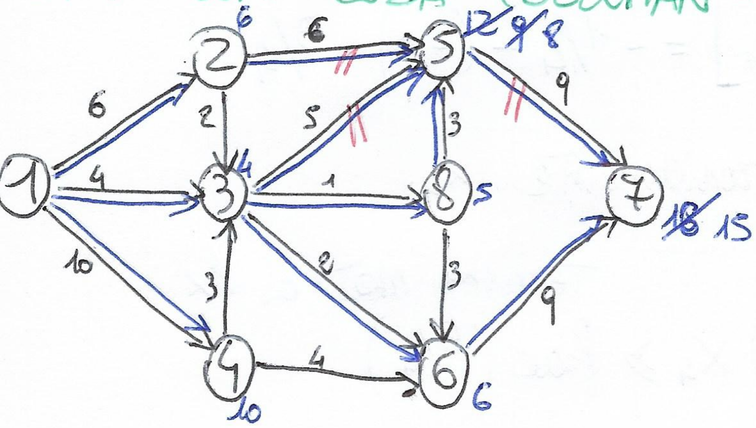
Di volta in volta scelgo sempre il nodo con l'etichetta di costo minore.



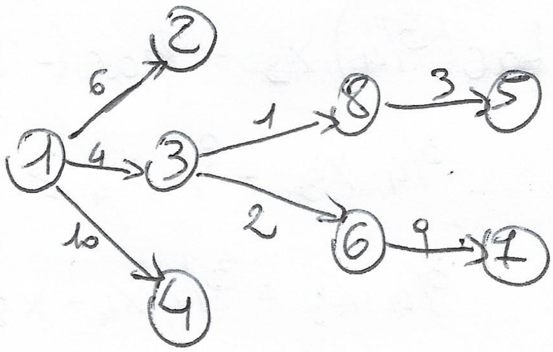
$S = \{ \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{8}, \cancel{6}, \cancel{7} \}$

6 4 10 5 1 2 9

SPT CON CODA (BELLMAN-FORD-MOORE)



Uso una coda invece di un insieme, quindi c'è reinserimento ed estrazione in ordine.

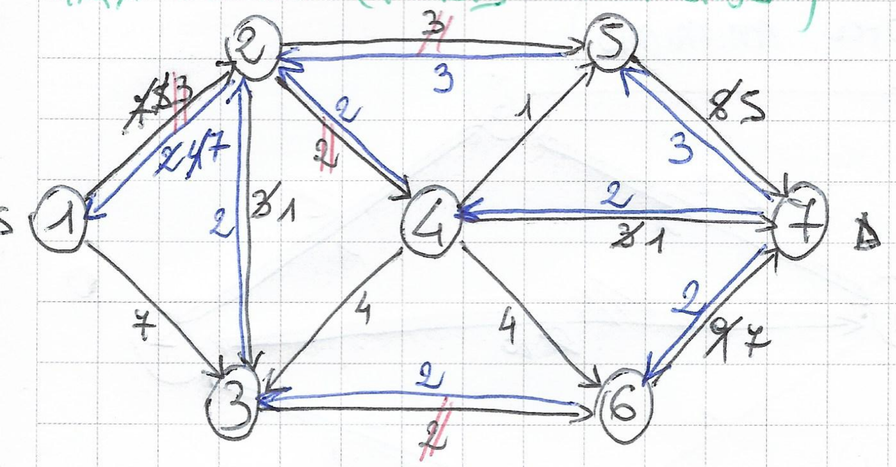


$Q = \{ \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{8}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{5} \}$

SPT CON PAPE D'ESOPO

Uso una double-ended queue (dequeue) in cui ogni nodo viene inserito la prima volta in coda (queue) e le successive in testa (stack).

MAX-FLOW (FORD-FULKERSON)



• Prendo cammini a caso da S a D.

1-2-4-7: 2
1-2-3-6-7: 2
1-2-5-7: 3
Non esistono altri cammini percorribili

• Il Taglio Ns è l'insieme dei vertici che posso raggiungere da S dopo che ho saturato la rete (usando anche archi discordi).

$$N_s = \{1,2,3\} \qquad N_t = \{4,5,6,7\}$$

• La capacità del Taglio è invece la somma degli archi originali* uscenti dal Taglio.

$$U = 3+2+2 = 7$$

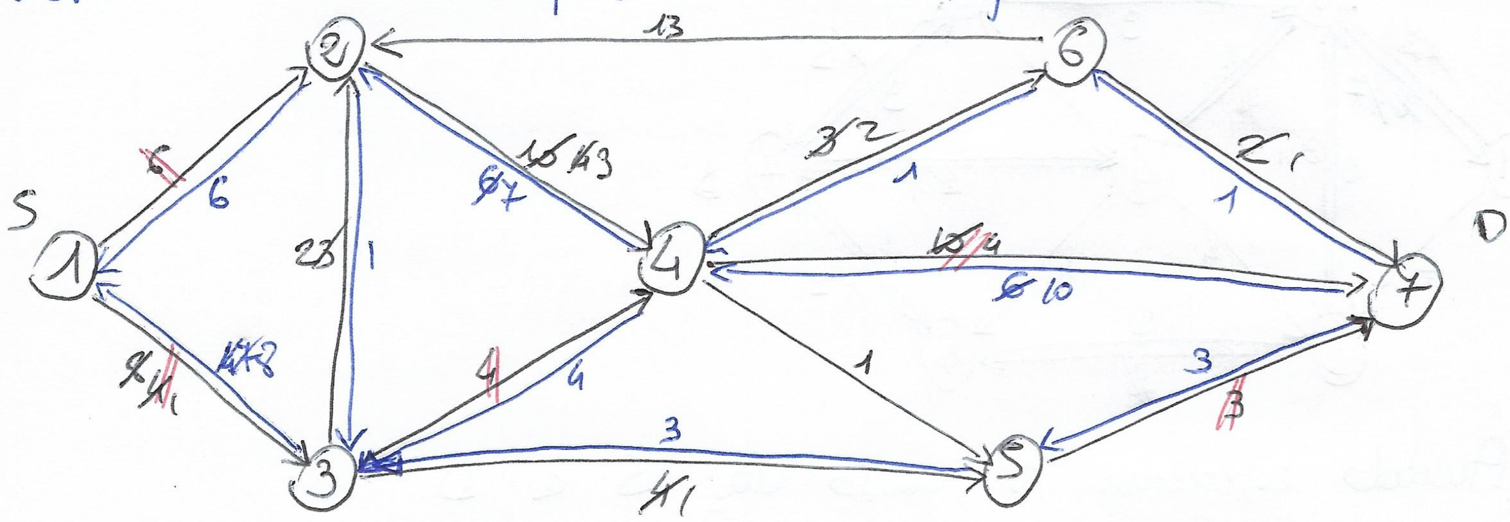
• Il flusso è la somma dei flussi introdotti.

$$X = 2+2+3 = 7$$

• Poiché X = U la capacità è ottima.
* o archi concordi saturi?

MAX - FLOW (EDMONDS - KARP)

Rispetto al FF, ogni volta cerco il cammino aumentante di lunghezza minima (con ricerca BFS, per i pari guardo l'etichetta o l'identificatore minimo).



1-2-4-7: 6
1-3-4-7: 4
1-3-5-7: 3
1-3-2-4-6-7: 1

$N_s = \{1\}$ $\quad N_t = \{2..7\}$

$U = 8+6 = 14$

$x = 6+4+3+1 = 14$

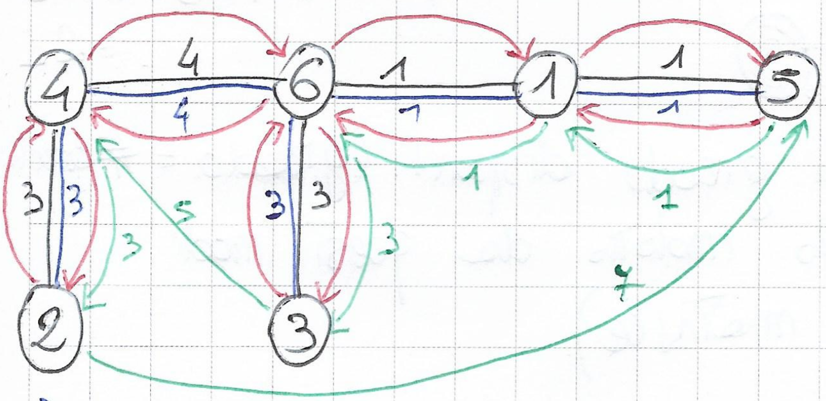
$\underline{x = U}$

Se fosse un CAPACITY SCALING fisserei un parametro K (ad es. K = 4) e scarterei tutti gli archi di capacità < K. Quando non ne trovo più abbasso K. L'idea è di prendere prima i cammini grandi e capienti.

TSP-METRICO DOUBLE SPANNING TREE (2MST)

da(i) \ a(j)	1	2	3	4	5	6
1	x	6	~~3~~	5	~~1~~	~~1~~
2		x	7	~~3~~	7	5
3			x	5	~~4~~	~~3~~
4				x	6	~~4~~
5					x	~~2~~
6						x

1) Costruisco l'MST (ad es. con Kruscal) e calcolo c(T)



T $\quad c(T) = 1+1+3+3+4 = 12$

C $\quad c(C) = 1+1+3+5+3+7 = 20$

2) Raddoppio tutti gli archi

3) Costruisco il ciclo Euleriano partendo da un nodo a piacere ed esplorando tutto il grafo (tornando al punto di partenza).

$1 \to 6 \to 3 \to \cancel{6} \to 4 \to 2 \to \cancel{4} \to \cancel{6} \to \cancel{1} \to 5 \to 1$

4) Creo un circuito C Hamiltoniano partendo da quello Euleriano in cui rimuovo tutti i doppioni una volta che li ho incontrati.

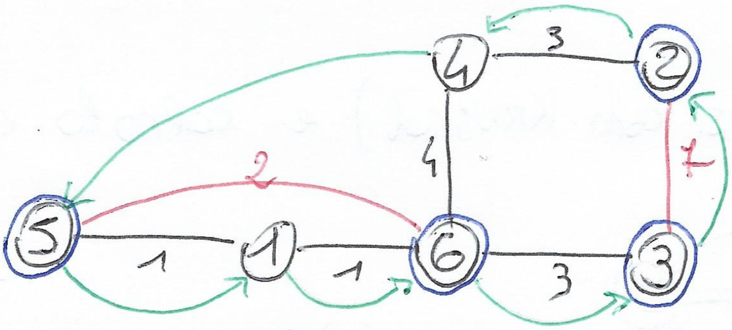
$1 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 5 \to 1$

- Infine calcolo c(C) che dev'essere $\geq$ c(T)

TSP-METRICO CHRISTOFIDES

da \ a	1	2	3	4	5	6
1	X	6	3	5	1	1
2		X	7	3	7	5
3			X	5	4	3
4				X	6	4
5					X	2
6						X

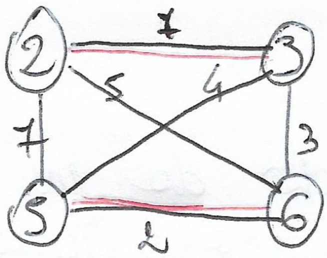
1) Costruisco l'MST e calcolo c(T)



$T = 1+1+3+4+3 = 12$

$C = 1+3+7+3+6+1 = 21$

2) Considero solo i nodi di grado dispari (grado = #archi) e costruisco il sottografo indotto da questi nodi (i pesi sono presi dalla matrice)



3) Prendo l'accoppiamento perfetto a costo minimo, ossia un insieme bipartito di spigoli senza vertici in comune che comprende tutti i vertici e che abbia costo minimo.

4) Aggiungo gli archi dell'accoppiamento perfetto al grafo originale. Così facendo rendo tutti i nodi di grado pari e quindi il grafo Euleriano

5) Costruisco il ciclo Euleriano e lo converto in un circuito Hamiltoniano.

6) Calcolo c(C). $1 \to 6 \to 3 \to 2 \to 4 \to \cancel{6} \to 5 \to 1$

CERTIMETER GROUP

KSP CON PROGRAMMAZIONE DINAMICA

$$\max z = 10x_1 + 8x_2 + 15x_3 + 7x_4 + 9x_5$$
$$4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq 8$$

	1	2	3	4	5
p_i	10	8	15	7	9
w_i	4	3	7	2	5

$b = 8$

$$f_k(s) = \max \begin{cases} p_k + f_{k+1}(s - w_k) \\ f_{k+1}(s) \end{cases}$$

$$f_m(s) = \begin{cases} p_m & w_m \leq s \\ 0 & w_m > s \end{cases}$$

Marco le celle Top-down, le riempio bottom-up

k \ s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
1									18	8+10 > 17
2					8 (0+8 > 7)				17	9+8 > 17
3		0			7	9			16	16 > 0+15
4		0	2<1 Non ci sta		7	9			16	9+7
5		0	0	0	0	9	9		9	

$f_k(s)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1									1
2					1				1
3		0			0	0			0
4		0			1	0			1
5		0	0	0	0	1	1		1

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$f_m(s)$