Esercizio 1

Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{array}{rrcrcl} \max\ z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

- (a) Risolvere il programma con il metodo grafico. ✓
- (b) Trasformare il programma in forma standard.
- (c) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard.
- (d) Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice di coordinate $(x_1 = 0, x_2 = 0)$.

a) $x_1 + 3x_2 \leq 9$ r $\quad -x_1 + x_2 \leq 1$ m

x_1	x_2
0	3
9	0

$\rightarrow \frac{\cancel{3}x_2}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{9}\,3}{\cancel{3}}$

$\rightarrow x_1 = 9$

x_1	x_2
0	1
-1	0

$\rightarrow x_2 = 1$

$\rightarrow -x_1 = 1$

$x_1 = -1$

$\rightarrow x_1 = 4 \quad \forall x_2$

$\rightarrow 2x_1 + x_2 = 2 \quad \vec{v}$

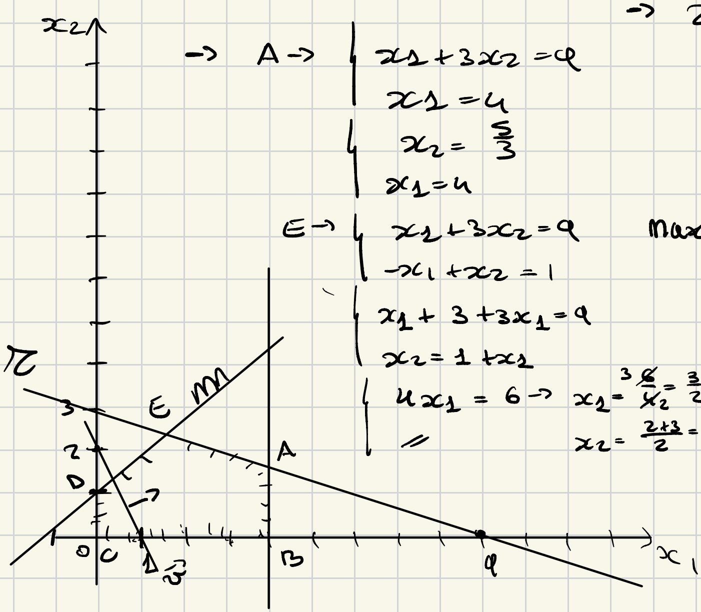
$\quad // \quad = 2$

x_1	x_2
0	2
1	0

$\rightarrow A \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9 \\ x_1 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \frac{5}{3} \\ x_1 = 4 \end{cases}$

$E \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 3 + 3x_1 = 9 \\ x_2 = 1 + x_1 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 = 6 \rightarrow x_1 = \frac{3\,\cancel{6}}{\cancel{4}\,2} = \frac{3}{2} \\ // \quad x_2 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$

max $\rightarrow$
- $A\left(4, \frac{5}{3}\right) = 8 + \frac{5}{3} = \frac{24+5}{3} = \frac{29}{3} \cong 9$
- $B(4, 0) = 8$
- $C(0,0) = 0$
- $D(1,0) = 2$
- $E\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6+5}{2} = \frac{11}{2} \cong 5$



Esercizio 1

Si consideri il seguente programma lineare.

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
\max\ z & = & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{soggetto a} & & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\
& & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
& & x_1 & & & \leq & 4 \\
& & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

- (a) Risolvere il programma con il metodo grafico. ✓
- (b) Trasformare il programma in forma standard. ✓
- (c) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. ✓
- (d) Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice di coordinate $(x_1 = 0, x_2 = 0)$.

b) $\max =$ ✓ $\quad x_1, x_2 \geq 0$ ✓

$\max \; 2x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{rrrrrcl}
x_1 + 3x_2 & +x_3 & & & = & 9 \\
-x_1 + x_2 & & +x_4 & & = & 1 \\
x_1 & & & +x_5 & = & 4
\end{array}
$$

c) sono basi x_3, x_4, x_5 per $x_1, \ldots x_5 \geq 0$

$\max \; 2x_1 + x_2$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 9 - x_1 - 3x_2 \\
x_4 &= 1 + x_1 - x_2 \\
x_5 &= 4 - x_1
\end{aligned}
$$

Esercizio 1

Si consideri il seguente programma lineare.

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max\ z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{soggetto a} & x_1 & + & 3x_2 & \le & 9 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\
 & x_1 & & & \le & 4 \\
 & x_1, x_2 \ge 0 & & & &
\end{array}
$$

- (a) Risolvere il programma con il metodo grafico. ✓
- (b) Trasformare il programma in forma standard. ✓
- (c) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. ✓
- (d) Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice di coordinate $(x_1 = 0, x_2 = 0)$.

$2 \cdot 0 + 0 = 0 \quad P(0,0)$

d)

$$\max\ 0 + 2x_1 + x_2$$
$$x_3 = 9 - x_1 - 3x_2$$
$$x_4 = 1 + x_1 - x_2$$
$$x_5 = 4 - x_1$$

B. IN: x_2

B. OUT: $\left\{ \begin{array}{cc} \cancel{\frac{9}{3}}\, 3, & \frac{1}{1} \\ x_3 & x_4 \end{array} \right\} = x_4$

$$x_3 = 9 - x_1 - 3x_2 = 9 - x_1 - 3 - 3x_1 + 3x_4 = 6 - 4x_1 + 3x_4$$

$$\max\ z = 1 + 3x_1 - x_4$$
$$x_3 = 6 - 4x_1 + 3x_4$$
$$x_2 = 1 + x_1 - x_4$$
$$x_5 = 4 - x_1$$

$$\max\ z = 2x_1 + 1 + x_1 - x_4 = 1 + 3x_1 - x_4$$

B IN $= x_1$

B OUT $= \left\{ \begin{array}{cc} \cancel{\frac{6}{4}}\, \frac{3}{2}, & \cancel{\frac{4}{1}}\, 4 \\ x_3 & x_5 \end{array} \right\} = x_3$

$$4x_1 = 6 - x_3 + 3x_4$$
$$x_1 = \cancel{\tfrac{6}{4}}\, \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{3}{4}x_4$$

$$x_2 = 1 + \frac{6}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - x_4 = \cancel{\frac{4+6}{4}}\ \frac{10}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \cancel{\frac{3-4}{4}} - \frac{1}{4}x_4$$

$$x_1 = \frac{6}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4$$
$$x_2 = \frac{10}{4} - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4$$
$$x_5 = \frac{10}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4$$

$$x_5 = 4 - x_1 = 4 - \frac{6}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 = \cancel{\frac{16-6}{4}}\ \frac{10}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4$$

Esercizio 1

Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{array}{rrcrcl} \max\ z & = & 2x_1 & + & x_2 & \\ \text{soggetto a} & & x_1 & + & 3x_2 & \le 9 \\ & & -x_1 & + & x_2 & \le 1 \\ & & x_1 & & & \le 4 \\ & & x_1, x_2 \ge 0 & & & \end{array}$$

1. Risolvere il programma con il metodo grafico. ✓
2. Trasformare il programma in forma standard. ✓
3. Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. ✓
4. Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice di coordinate $(x_1 = 0, x_2 = 0)$. ✓

$$\max z = 1 + 3x_1 - x_4$$

$$x_1 = \frac{6}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4$$
$$x_2 = \frac{10}{4} - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4$$
$$x_5 = \frac{10}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4$$

$$B\,IN = x_1$$
$$B\,OUT = \left\{ \begin{array}{cc} \cancel{\frac{6}{4}}\frac{3}{2}, & \cancel{\frac{4}{1}}4 \\ x_3 & x_5 \end{array} \right\} = x_3$$

$$4x_1 = 6 - x_3 + 3x_4$$
$$x_1 = \cancel{\frac{6}{4}}\frac{3}{2} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4$$

$$x_5 = 4 - x_1$$
$$= 4 - \frac{6}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4$$
$$= \cancel{\frac{16-6}{4}}\ \frac{10}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4$$

$$x_2 = 1 + \frac{6}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - x_4$$
$$= \cancel{\frac{4+6}{4}}\ \frac{10}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{3-4}{4} - \frac{1}{4}x_4$$

$$\max z = 1 + 3\cdot\frac{6}{4} - 3\cdot\frac{1}{4}x_3 + 3\cdot\frac{3}{4}x_4 - x_4$$
$$\cancel{\tfrac{18}{4}}\tfrac{9}{2} \quad 1 + \tfrac{9}{2} = 1 + \frac{18}{4} - \frac{3}{4}x_3 + \frac{9}{4}x_4 - x_4$$
$$\tfrac{9}{2} + \tfrac{2}{2} = \tfrac{13}{2} \quad \tfrac{12}{2} = 6 = \frac{4+18}{4} - \frac{3}{4}x_3 + \frac{9-4}{4}x_4$$
$$= \frac{22}{4} - \frac{3}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_4$$

$$B\,IN \quad x_4$$
$$B\,OUT: \left\{ \begin{array}{cc} 10 & \frac{10}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{3}\ \frac{10}{3} \\ x_2 & x_5 \end{array} \right\}$$
$$x_5$$

$$\cancel{\tfrac{4}{3}}\cancel{\tfrac{3}{4}}x_4 = \frac{10}{4} + \frac{1}{4}x_3 - x_5$$
$$x_4 = \frac{4}{3}\cdot\frac{10}{4} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}x_3 - \frac{4}{3}x_5$$

$$x_1 = 4 - x_5$$
$$x_2 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5$$
$$x_4 = \frac{10}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_5$$

$$x_1 = \frac{6}{4} - \cancel{\frac{1}{4}x_3} + \frac{10}{4} + \cancel{\frac{1}{4}x_3} - x_5$$
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{10}{3}$$
$$= \frac{16}{4} - x_5$$
$$= 4 - x_5$$

$$- \frac{10}{12}s$$
$$x_2 = \frac{10}{4} - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{10}{3}_2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}x_5$$
$$= \frac{30-10}{12} + \frac{-3-1}{12}x_3 + \frac{1}{3}x_5$$
$$= \cancel{\frac{20}{12}}\ \cancel{\frac{10}{6}}\ \frac{5}{3} - \cancel{\frac{4}{12}}\ \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5$$

$$\frac{13\cdot 3}{39} \quad \frac{13}{2} + \frac{25}{6} = \frac{39+50}{6} = \frac{89}{6}$$

$$\max \frac{22}{4} - \frac{3}{4}x_3 + \frac{5}{4}\cdot\frac{10}{3} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}x_5$$
$$= \frac{22}{4_2} + \frac{25}{6} + \frac{5}{12}x_3 - \frac{5}{3}x_5$$
$$\frac{29}{3} + \frac{-9+5}{12}x_3 - \frac{5}{3}x_5 = \frac{89}{12} - \frac{4}{12}x_3 - \frac{5}{3}x_5$$

Esercizio 2

Si consideri il seguente programma lineare.

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max z = & x_1 & - & x_2 & & \\
\text{soggetto a} & x_1 & + & 3x_2 & \geq & 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\
& & & x_2 & \leq & 3 \\
& & & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

- a) Risolvere il programma con il metodo grafico. ✓
- b) Trasformare il programma in forma standard.
- c) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard.
- d) Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice di coordinate $(x_1 = \frac{7}{8}, x_2 = \frac{11}{8})$.

$x_1 - x_2 = 1$

x_1	x_2
0	-1
1	0

$0 - x_2 = 1$
$x_2 = -1$

2.a) $x_1 + 3x_2 = 5$ r

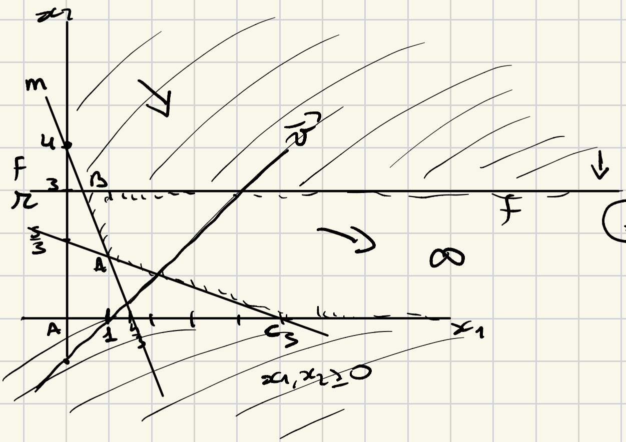
x_1	x_2
0	$\frac{5}{3} \cong 1.4$
1	5

$0 \geq 5$? NO

$3x_1 + x_2 = 4$ m

x_1	x_2
0	4
$1.4 \cong \frac{4}{3}$	0

$x_2 = 3$ f



$A\left(\frac{7}{8}, \frac{11}{8}\right) = -\cancel{\frac{4}{8}} \; -\frac{1}{2}$

$B\left(\frac{1}{3}, 3\right) = \frac{1-9}{3} = -\frac{8}{3} \cong -2.8$

$C(5, 0) = 5$

(A)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 3x_2 \Rightarrow \\ 15 - 9x_2 + x_2 = 4 \end{cases} \quad -8x_2 = -11 \quad \frac{-8x_2}{-8} = \frac{-11}{-8} \quad x_2 = \frac{11}{8}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 3 \cdot \frac{11}{8} = \frac{40-33}{8} = \frac{7}{8} \\ x_2 = \frac{11}{8} \end{cases}$$

(B)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3 = 4 \Rightarrow \frac{\cancel{3}x_1}{\cancel{3}} = \frac{1}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Esercizio 2

Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max z = & x_1 & - & x_2 & & \\
\text{soggetto a} & x_1 & + & 3x_2 & \geq & 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\
& & & x_2 & \leq & 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}$$

- (a) Risolvere il programma con il metodo grafico. ✓✓
- (b) Trasformare il programma in forma standard. ✓
- (c) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. ✓
- (d) Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice di coordinate $(x_1 = \frac{7}{8}, x_2 = \frac{11}{8})$.

2.b) $\max\ x_1 - x_2$ $\quad x_1, \dots, x_5 \geq 0$

$$\begin{array}{lllll}
x_1 & +3x_2 & -x_3 & & & = 5 \\
3x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 4 \\
 & x_2 & & & +x_5 & = 3 \\
\geq 0 & \geq 0 & & & \geq 0 &
\end{array}$$

2.c) $B = \{x_1, x_2, x_5\}$ per

$$\begin{aligned}
x_1 &= 5 - 3x_2 + x_3 \\
x_2 &= 4 - 3x_1 + x_4 \\
&\quad 4 - 3(5 - 3x_2 + x_3) + x_4 \\
&\quad 4 - 15 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 \\
-9x_2 + x_2 &= -11 - 3x_3 + x_4 \\
-8x_2 &= -11 - 3x_3 + x_4 \\
-\tfrac{1}{8} \cdot -8x_2 &= -\tfrac{1}{8} \cdot -11 \quad -\tfrac{1}{8} \cdot -3x_3 \quad -\tfrac{1}{8}x_4
\end{aligned}$$

- $x_2 = \frac{11}{8} + \frac{3}{8}x_3 - \frac{1}{8}x_4$, $\quad \frac{11}{8} \geq 0$

- $$\begin{aligned}
x_1 &= 5 - 3x_2 + x_3 \\
&= 5 - 3\left(\tfrac{11}{8} + \tfrac{3}{8}x_3 - \tfrac{1}{8}x_4\right) + x_3 \\
&= 5 - \tfrac{33}{8} - \tfrac{9}{8}x_3 + \tfrac{3}{8}x_4 + x_3 \\
&\quad \tfrac{40 - 33}{8} + \tfrac{-9+8}{8}x_3 + \tfrac{3}{8}x_4 \\
&= \tfrac{7}{8} - \tfrac{1}{8}x_3 + \tfrac{3}{8}x_4, \quad \tfrac{7}{8} \geq 0
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
x_5 &= 3 - x_2 \\
&= 3 - \tfrac{11}{8} - \tfrac{3}{8}x_3 + \tfrac{1}{8}x_4 \\
&= \tfrac{24 - 11}{8} - \tfrac{3}{8}x_3 + \tfrac{1}{8}x_4 \\
&= \tfrac{13}{8} - \tfrac{3}{8}x_3 + \tfrac{1}{8}x_4, \quad \tfrac{13}{8} \geq 0
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Si consideri il seguente programma lineare.

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max\ z & = & x_1 & - & x_2 & \\
\text{soggetto a} & & x_1 & + & 3x_2 & \geq 5 \\
& & 3x_1 & + & x_2 & \geq 4 \\
& & & & x_2 & \leq 3 \\
& & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

- Risolvere il programma con il metodo grafico. ✓✓
- Trasformare il programma in forma standard. ✓
- Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. ✓
- Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice di coordinate $(x_1 = \frac{7}{8}, x_2 = \frac{11}{8})$.

$$\max\ z = -\frac{1}{2} + x_1 - x_2$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{7}{8} - \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{11}{8} - \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4$$
$$= \frac{-4+7+11}{8} - \frac{4}{8}x_3 + \frac{4}{8}x_4$$
$$= 7\frac{\cancel{14}}{\cancel{8}4} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$
$$= \frac{7}{8} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

2.d) $\max\ z = \frac{7}{8} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$

B OUT => x_4
B IN => x_2
OUT

$$x_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4$$
$$x_2 = \frac{11}{8} + \frac{3}{8}x_3 - \frac{1}{8}x_4$$
$$x_5 = \frac{13}{8} - \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4$$

$$x_1 = 5 + x_3 - 3x_2$$
$$x_4 = 11 + 3x_3 - 8x_2$$
$$x_5 = 3 - x_2$$

$\to \frac{1}{8}x_4 = \frac{11}{8} + \frac{3}{8}x_3 - x_2$

$x_4 = 11 + 3x_3 - 8x_2$

$\to x_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4$

$\frac{7}{8} - \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}\cdot 11 + \frac{3}{8}\cdot 3x_3 - \frac{3}{\cancel{8}}\cdot\cancel{8}x_2$

$= \frac{7}{8} - \frac{1}{8}x_3 + \frac{33}{8} + \frac{9}{8}x_3 - 3x_2$

$= \frac{40}{8} + \frac{8}{8}x_3 - 3x_2$

$= 5 + x_3 - 3x_2$

$\to x_5 = \frac{13}{8} - \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4$

$\Rightarrow \frac{13}{8} - \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}\cdot 11 + \frac{1}{8}\cdot 3x_3 - \frac{1}{8}\cdot 8x_2$

$= \frac{13}{8} + \frac{11}{8} + \frac{3}{8}x_3 - x_2 - \frac{3}{8}x_3$

$= \frac{24}{8} + \frac{3}{8}x_3 - x_2$

$3 - x_2$

$\max\ z = \frac{7}{8} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$

$= \frac{7}{8} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}\cdot 11 + \frac{1}{2}\cdot 3x_3 - \frac{1}{2}\cdot 8x_2$

$= \frac{7}{8} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{11}{2} + \frac{3}{2}x_3 - 4x_2$

$\frac{7+44}{8} + \frac{2}{2}x_3 - 4x_2$

$= \frac{51}{8} + x_3 - 4x_2$

B IN: x_3
B OUT: $\nexists$
∞