

### Esercizio 3

Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{array}{lll} \min z = & 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 + x_3 \geq 2 \\ & x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

- 1 Trasformare il programma in forma standard. ✓
- 2 Scrivere il duale del programma in forma standard. ✓
- 3 Risolvere il duale con il metodo grafico.
- 4 Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplex duale, partendo dalla riformulazione associata alla forma standard.

3.a)  $\max z = -4x_1 - 5x_2 - 7x_3$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_3 \rightarrow u_4 = 2$$

$$x_2 + x_3 \rightarrow -x_5 = 1$$

3.b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [-4 \ -5 \ -7 \ 0 \ 0]$$

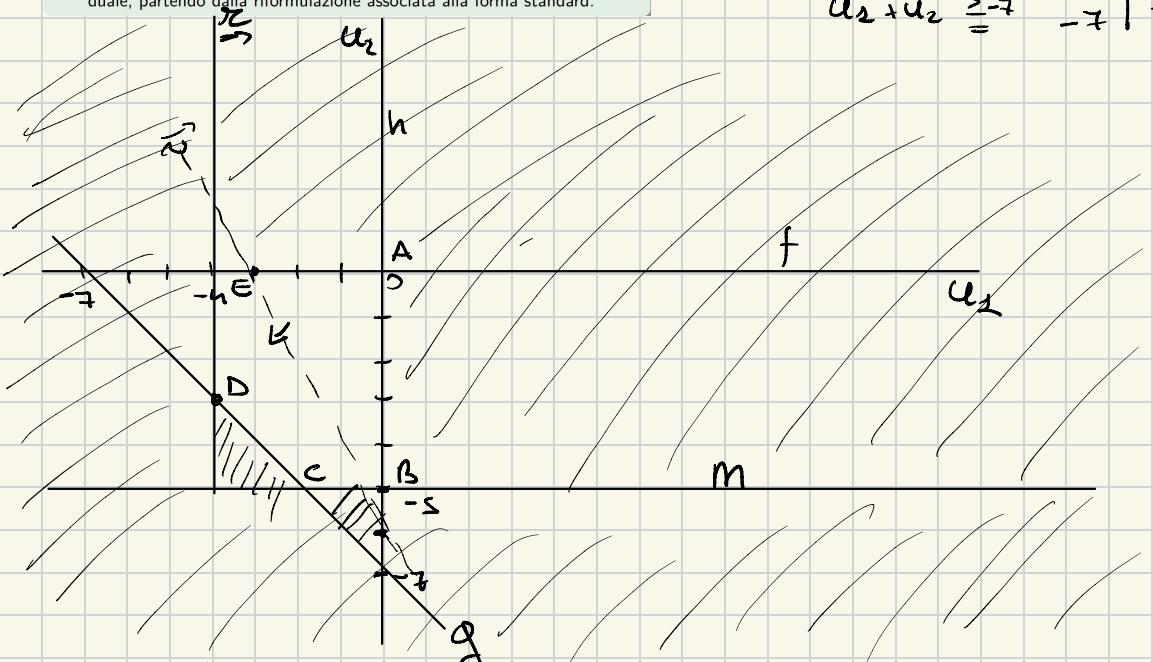
$$\begin{array}{lll} \min z = u_1 + u_2 & | & \max -2u_1 + u_2 \\ u_1 \geq -4 & | & +u_1 - v_1 = -4 \\ u_2 \geq -5 & | & +u_2 - v_2 = -5 \\ u_1 + u_2 \geq -7 & | & +u_1 + u_2 - v_3 = -7 \\ -u_1 \geq 0 & | & -u_1 - u_4 = 0 \\ -u_2 \geq 0 & | & -u_2 - u_5 = 0 \\ u_1 \leq 0 & \xrightarrow{\text{std}} & \\ u_2 \leq 0 & & \end{array}$$

### Esercizio 3

Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{array}{lll} \min z = & 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 + x_3 \geq 2 \\ & x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

- 1 Trasformare il programma in forma standard. ✓
- 2 Scrivere il duale del programma in forma standard. ✓
- 3 Risolvere il duale con il metodo grafico. ✓
- 4 Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplex-duale, partendo dalla riformulazione associata alla forma standard.



$$\begin{aligned} A(0,0) &= 0 \\ B(0,-1) &= -1 \\ C(-2,-1) &= -4 - 1 = -5 \\ D(-4,-3) &= -11 \rightarrow \text{Optimo} \\ E(-4,0) &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \min & 2u_1 + u_2 \\ \text{s.t.} & u_1 \geq -4 \\ & u_2 \geq -5 \\ & u_1 + u_2 \geq -7 \\ & -u_1 \geq 0 \\ & -u_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} u_1 & u_2 \\ \hline 0 & -7 \\ -7 & 0 \end{array}$$

$$u_2 + u_2 \geq -7$$

$$\begin{array}{l} \boxed{C} \\ \left\{ \begin{array}{l} u_1 + u_2 = -7 \\ u_2 = -5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 - 5 = -7 \\ u_2 = -5 \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} u_1 = -2 \\ u_2 = -5 \end{array} \right. \end{array}$$

D

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = -4 \\ u_1 + u_2 = -7 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_2 = -3 \\ -4 + u_2 = -7 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_2 = -4 \\ u_2 = -3 \end{array} \right.$$

$$2u_1 + u_2 = -6$$

$$\begin{array}{r|rr} u_1 & u_2 \\ \hline 0 & -6 \\ -3 & 0 \end{array}$$

### Esercizio 3

Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{array}{llllll} \min z = & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_3 & \geq & 2 \\ & x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & & \end{array}$$

- 1 Trasformare il programma in forma standard. ✓
- 2 Scrivere il duale del programma in forma standard. ✓
- 3 Risolvere il duale con il metodo grafico. ✓
- 4 Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplex duale, partendo da riformulazione associata alla forma standard.

$$\max z = 0 - 4x_1 - 5x_2 - 7x_3 \quad B = \{x_1, x_2\}$$

$$x_1 + x_3 - x_4 = 2$$

$$x_2 + x_3 - x_5 = 1$$


---

$$x_1 = 2 - x_3 + x_4$$

$$x_2 = 1 - x_3 + x_5$$

$$B^W = \{x_3\}$$

$$B^D = \{ \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_1}{x_2} \}$$

$$x_1 \xrightarrow{x_2} W$$

$$\begin{aligned} \max z &= 0 - 4x_1 - 5x_2 - 7x_3 \\ &= 0 - 4(2 - x_3 + x_4) - 5(1 - x_3 + x_5) \\ &= 0 - 8 + 4x_3 - 4x_4 - 5 + 5x_3 - 5x_5 \\ &= -13 + 9x_3 - 4x_4 - 5x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - x_3 + x_4 \\ &= 2 - 1 + x_2 - x_5 + x_4 \\ &= 1 + x_2 + x_4 - x_5 \end{aligned}$$

$$x_3 = 1 - x_2 + x_5$$

Primale

$$x_1 = 1 \rightarrow v_2 = 0$$

$$x_2 = 0 \rightarrow u_2 \geq 0$$

$$x_3 = 1 \rightarrow u_3 = 0$$

$$x_4 = 0 \rightarrow u_4 \geq 0$$

$$x_5 = 0 \rightarrow u_5 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \max z &= -13 + 9x_3 - 4x_4 - 5x_5 \\ &= -13 + 9(1 - x_2 + x_5) - 4x_4 - 5x_5 \\ &= -13 + 9 - 9x_2 + 9x_5 - 4x_4 - 5x_5 \\ &= -4 \oplus 9x_2 \ominus 4x_4 \ominus 4x_5 \end{aligned}$$

Esercizio 3

Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{array}{lllll} \min z = & 4x_1 & + & 5x_2 & + 7x_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_3 & \geq 2 \\ & x_2 & + & x_3 & \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

$$U_2 = U_3 = 0$$

- Trasformare il programma in forma standard. ✓
- Scrivere il duale del programma in forma standard. ✓
- Risolvere il duale con il metodo grafico. ✓
- Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplex duale, partendo da riformulazione associata alla forma standard. ✓

$$\max -2u_1 + u_2$$

$$+ u_1 - \cancel{x_2} = -4$$

$$+ u_2 - v_2 = -5 \Rightarrow$$

$$+ u_1 + u_2 - \cancel{x_3} = -7$$

$$- u_1 = 0$$

$$- u_2 - v_5 = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} u_1 = -4 \\ u_1 + u_2 = -7 \\ u_1 = -4 \\ u_2 = -3 \end{array} \right.$$

OPT

### Esercizio 4

Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{array}{lll} \min z = & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{soggetto a} & -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

- Trasformare il programma in forma standard. ✓
- Scrivere il duale del programma in forma standard. ✓✓
- Risolvere il duale con il metodo grafico.
- Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplex duale, partendo dalla riformulazione associata alla forma standard.

4.a)  $\max z = -2x_1 - 3x_2 - x_3$

$$\begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 & = 1 \end{array}$$

4.b)

$$A \left[ \begin{array}{ccccc} -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad b \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$C \left[ \begin{array}{ccccc} -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \right]$$

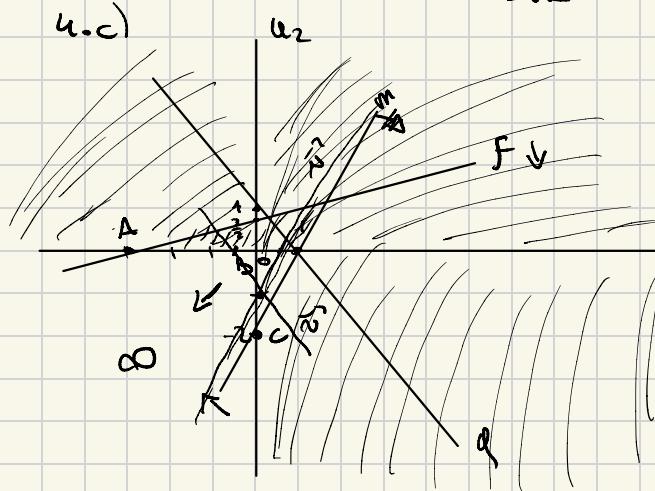
$$\begin{array}{ll} \min 2u_1 + u_2 & \\ -2u_1 + u_2 \geq -2 & \\ u_1 - 2u_2 \geq -3 & \\ -u_1 - u_2 \geq -1 & \\ -u_1 \geq 0 & \\ -u_2 \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max -2u_1 - u_2 & \\ -2u_1 + u_2 - v_1 & = -2 \\ u_1 - 2u_2 - v_2 & = -3 \\ -u_1 - u_2 - v_3 & = -1 \\ -u_1 & \\ -u_2 & \end{array}$$

$$-v_4 = 0$$

$$-v_5 = 0$$

$\rightarrow$   
set



•  $-2u_1 + u_2 = -2$   $m$

$$\frac{u_1}{0} \frac{u_2}{2}$$

•  $u_1 - 2u_2 = -3$   $f$

$$\frac{u_1}{0} \frac{u_2}{\frac{1}{2}}$$

•  $-u_1 - u_2 = -1$   $g$

$$\frac{u_1}{0} \frac{u_2}{1}$$

$u_1 \leq 0$

$u_2 \leq 0$

$u_1 + u_2 = -1$

$$\frac{u_1}{0} \frac{u_2}{-1}$$

$$-\frac{1}{2} \quad 0$$

Esercizio 4

Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{array}{lll} \min z = & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{soggetto a} & -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

- 1 Transformare il programma in forma standard. ✓
- 2 Scrivere il duale del programma in forma standard. ✓✓
- 3 Risolvere il duale con il metodo grafico.
- 4 Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplex duale, partendo dalla riformulazione associata alla forma standard. ✓

$B^{-1} x_1, x_2$

$$\begin{array}{llllll} \max z = & 0 & -2x_1 & -3x_2 & -x_3 & \\ -2x_1 & + x_2 & -x_3 & -x_4 & & = 2 \\ x_1 & - 2x_2 & -x_3 & & -x_5 & = 1 \end{array}$$


---

$$x_1 = 1 + 2x_2 + x_3 + x_5$$

$$x_2 = 2 + x_1 + x_3 + x_4$$

$$= 2 + 2(1 + 2x_2 + x_3 + x_5) + x_3 + x_4$$

$$= 2 + 2 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_5 + x_3 + x_4$$

$$-4x_2 + x_2 = 4 + 3x_3 + x_4 + 2x_5$$

$$-\frac{4}{5}x_2 = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5$$

$$\left[ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right]$$

$\hookrightarrow \leq 0 \wedge \text{termini neg} \rightarrow \not\exists \text{ sol Primale}$   
 $\rightarrow \infty \text{ sol Duale}$