MATRICI DIAGONALIZZABILI > NEGLI ENDOMORFISMI

Si può anche dire che un endomorfismo è diagonalizzabile quando

- Ha una base formata da auto-vettori
  (In questo caso la matrice associata $[A]_B^B$ è diagonale)
- La sua matrice associata è diagonalizzabile
  In particolare con $A = [f]_B^B$
  $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ in cui
  - D avrà sulla diagonale gli auto-valori
  - P avrà come colonne gli auto-vettori

SIMILITUDINE SU $p_A(\lambda)$

Se 2 matrici sono simili, allora hanno lo stesso polinomio caratteristico. $A \sim B \iff p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$

Inoltre, dato un endorfismo $f: V \to V$ per qualsiasi base, il polinomio caratteristico delle matrici associate è lo stesso.

$f: V \to V \quad [f]_C^B = A \quad [f]_D^D = Z \quad p_A(\lambda) = p_Z(\lambda)$

PROPRIETÀ AUTO-VAL/VET

- Se gli auto-vettori hanno auto-valori distinti, allora l'insieme di autovettori è linearmente indipendente.
- Se gli auto-vettori hanno auto-valori distinti, allora l'endomorfismo è diagonalizzabile.

SOMMA DIRETTA

Dato uno spazio vettoriale V e due sotto-spazi U, W. si dice che i sottospazi sono in somma diretta se ogni vettore $v \in V$ è generato da 1 sola somma tra $u \in U$, $w \in W$.

In alternativa, se l'intersezione dei sotto-spazi è 0. $U \cap W = \{0\}$

La somma diretta $\oplus$ sarà il sotto-spazio generato dalla somma dei vettori $U \oplus W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$

ES "Verificare che $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \wedge y = 0\}$
$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ sono in somma diretta per $\mathbb{R}^3$

(1) Monto il sistema di entrambi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \left.\right] V \\ \\ \left.\right] W \end{matrix}$$

ha 1 sol ovvero $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi è in somma diretta

AUTO-SPAZIO ›
È l'insieme formato dagli auto-vettori per un dato auto-valore in aggiunta dell'origine 0_V.

$$V_\lambda = \{ v \in V \mid v \text{ è auto-vettore per } \lambda \} \cup \{0_V\}$$

Per definizione è un sotto-spazio vettoriale.

Sappiamo infine che
- Tutti gli auto-spazi sono in somma diretta:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \dots \oplus V_{\lambda_n}$$

- Se la somma diretta equivale a V, allora l'endomorfismo è diagonalizzabile

---

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA › $m_a(\lambda)$
È la molteplicità del dato auto-valore per dividere il polinomio caratteristico.

n di $(x-a)^n \mid p_A(a)$

ES: Con $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$

(0) Calcolo auto-valori $(1-\lambda)^2$ dice che $\boxed{\lambda = 1}$

(1) Calcolo $m_a = 2$ per $(1-\lambda)^2 = (\lambda - \underline{1})^{2}$

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA ›
È la dimensione di un dato auto-spazio V_λ.

Si calcola con rouché-capelli come:

$$m_g(\lambda) = n - \text{rnk}(A - \lambda \cdot I_n)$$

dove
- A = matrice associata
- n = dim di A

ES: Con $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$

$$m_g(1) = 2 - \text{rnk}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 - \text{rnk}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1$$

NB: $1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)$

TEOREMA DI DIAGONALIZZABILITÀ >

Un endomorfismo è diagonalizzabile se

- Tutti i suoi auto-valori sono nel campo di riferimento
  ES se $\lambda_1 = i$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R} \to$ NO!, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ = sì
- Se le molteplicità sono uguali $ma = mg$

ES: Data $A = \begin{pmatrix} 3 & t+4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$ con $t \in \mathbb{R}$ per quali t è diagonalizzabile?

(1) Calcolo auto-valori

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & t+4 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad \boxed{i=3} \quad = (\cancel{-1})^{3+3} \cdot (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$j = 1 \quad 2 \quad 3$

$$= (2-\lambda) \cdot (-3-\lambda)(2-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)^2 (-3-\lambda)$$

$\underbrace{\lambda_1 = 2}_{\in \mathbb{R}}, \quad \underbrace{\lambda_2 = -3}_{\in \mathbb{R}}, \quad \in \mathbb{K}$ sono nel campo di rif. ✓

(2) Calcolo molteplicità

2.1: $\lambda_1 = 2$

$ma(2) = 2$

$$mg(2) = 3 - rnk \begin{pmatrix} 1 & t+4 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_1 = A_1 + A_2$
$A_1 \overset{?}{\leftrightarrow} A_2$

se $t = 1$ $rnk = 1$
$t \neq 1$ $rk = 2$

2.2 $\lambda_2 = -3$

$ma(-3) = 1$

$$mg(-3) = 3 - rnk \begin{pmatrix} 3\cancel{-(-3)}^{+3} & t-4 & 1 \\ -1 & \cancel{-3+3}\,0 & -1 \\ 0 & 0 & 2+3 \end{pmatrix} =$$

$$3 - rnk \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & t-4 & 1 \\ 0 & 0 & 2+3 \end{pmatrix}$$

se $t = 4$ $rnk = 1$
se $t \neq 4$ $rnk = 0$

$A_1 = A_1 + 3R_2$
$A_1 \overset{?}{\leftrightarrow} R_2$

PRODOTTO SCALARE > (DEF)

PREMESSA >

Dato uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ (per ora $\mathbb{R}$)

È un applicazione del tipo $V \times V \to \mathbb{R}$ definita come $\langle v, w \rangle$ con $v \in V$ e $w \in V$ in cui vale che:

- COMMUTATIVITÀ $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
- LINEARITÀ NEL 1° FATTORE
  - $\langle \lambda_1 \cdot v, w \rangle = \lambda_1 \langle v, w \rangle$
  - $\langle b + v, w \rangle = \langle b, w \rangle + \langle v, w \rangle$
  - $\langle \lambda_1 \cdot b + \lambda_2 \cdot v, w \rangle = \lambda_1 \cdot \langle b, w \rangle + \lambda_2 \cdot \langle v, w \rangle$
- PRODOTTO PER SE STESSO

  $\langle v, v \rangle \geq 0$ Per se stesso deve essere sempre ≥ 0

  $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0_v$ Deve essere 0 se e solo se il vettore è l'origine.

ES: "Determinare se è prodotto scalare $\langle v, v \rangle = 4x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$" $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

(1) Commutatività

Basta invertire le parti

(2) Linearità: banale

(3) Per se stesso:

$\langle v, v \rangle = 4x_1^2 - \cancel{x_1x_2} + \cancel{x_2x_1} + 4x_2^2 = 4x_1^2 + 4x_2^2$

PRODOTTO SCALARE > PROPRIETÀ

- BILINEARE

  Lo è se la proprietà di linearità vale sul secondo fattore:

  ES $\langle v, 0 \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

  $\langle v, 0 + 0 \rangle = \langle v, 0 \rangle + \langle v, 0 \rangle = 0$
- DEGENERE

  Lo è se esiste un vettore $v \in V$ diverso da 0 per cui $\langle v, w \rangle = 0$ il prod con tutti gli altri da 0.

PRODOTTO SCALARE > PROPRIETÀ

- DEFINITO POSITIVO
  Se il prodotto per se stesso è ≥ 0
- EUCLIDEO
  Se il prodotto è "riga per colonna"
  $$\langle v, w\rangle = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad v, w \in \mathbb{R}^n$$

PRODOTTO SCALARE > CON MAT. SIMM.

Data una matrice simmetrica $S \in M(n, \mathbb{R})$ si può definire il prodotto scalare in funzione della matrice come

$$g_S(v, w) = {}^t v \cdot S \cdot w = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

ES: Con $g_S(v, w)$ euclideo con $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

$$g_S(v, w) = (1, 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad = (1, 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 + 8 = 11$$

PRODOTTO SCALARE > MATRICE ASSOCIATA

La matrice associata al prodotto scalare $V \times V \to \mathbb{R}$ con $\mathcal{B}$ base di V è una matrice formata dai prodotti scalari per gli indici

$$s_{ij} = \langle v_i, w_j \rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1\rangle & \cdots & \langle v_1, w_n\rangle \\ \vdots & & \\ \langle v_n, w_1\rangle & \cdots & \langle v_n, w_n\rangle \end{pmatrix} = [g]_{\mathcal{B}}$$

PRODOTTO SCALARE > CON MAT SIMM (ASSOCIATA)

Dato un prodotto scalare con matrice simmetrica g_S
Si può calcolare velocemente la matrice associata sulla base canonica come la matrice ass. stessa (S)

$$g_S : V \times V \to \mathbb{R} \qquad [g]_e = S \iff e \text{ è base canonica in } \mathbb{R}^n$$

ES: "Con il prodotto scalare euclideo $g_S\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (x,y)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$"

$$[g_S]_e = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) Verifica

$$[g_S]_e = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$ ok combaciano.

con $e = \{(1,0),(0,1)\}$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = (1,0)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle = (1,0)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,3)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = (0,1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (3,2)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

PRODOTTO SCALARE > MAT. CAMBIAMENTO DI BASE

Vale sempre la formula per il cambiamento di base

$g : V \times V \to \mathbb{R}$ con basi

- $B \to [g]_B = \{b_1, b_2, \dots b_n\}$
- $C \to [g]_C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

$$f(b_1) = a_{11}\cdot c_1 + a_{21}\cdot c_2 + \dots + a_{n1}\cdot c_n$$
$$\vdots$$
$$f(b_n) = a_{1m}\cdot c_1 + a_{2m}\cdot c_2 + \dots + a_{mn}\cdot c_n$$

$$[g]^B_C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ES: Col prodotto scalare $g(x,y) = {}^t x \cdot y$ e basi $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ e canonica in $\mathbb{R}^2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

(1) Trovo le coordinate da B a e_2

$$\lambda_1\cdot(1,0) + \lambda_2\cdot(0,1) = (1,0)$$
$$\lambda_1\cdot(1,0) + \lambda_2\cdot(0,1) = (1,1)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ coord } e_1 \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ coord } e_2$$

$$[g]^B_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L20 • Prodotti Scalari II

PROD. SCALARE > MAT. CAMB. BASE FORMA INV.

È possibile usare una forma inversa per ricavarsi una delle 2 matrici associate partendo da:

- Matrice del cambio di Base
- L'Altra matrice associata.

$g : V \times V \to \mathbb{R}$ con basi $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

$C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$

e matrice del cambiamento: $[g]_C^B$

e matrice associata $[g]_C$

$$[g]_B = \underbrace{{}^t[g]_C^B}_{\text{Trasposta mat. camb. base}} \cdot \underbrace{[g]_C}_{\text{l'altra associata}} \cdot \underbrace{[g]_C^B}_{\text{Mat. camb. base}} \quad \to \quad A = {}^tM \cdot B \cdot M$$

Relazione di congruenza.

ES: "Dato il prodotto scalare $g(v,w) = {}^tv \cdot w$ e le basi

- $\mathcal{E} \to$ canonica in $\mathbb{R}^2$
- $B = \{ \binom{1}{0}, \binom{1}{1} \}$

Supponendo di avere la matrice del cambio $[g]_{\mathcal{E}}^B \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e la mat. associata: $[g]_B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Trovare $[g]_B$.

(1) Applico la formula $[g]_B = {}^t\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) Controllo

$$[g]_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{OK}$$

$\langle v_1, v_1 \rangle = (1,0)\binom{1}{0} = 1$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle = (1,0)\binom{1}{1} = 1$

$\langle v_2, v_2 \rangle = (1,1)\binom{1}{1} = 2$

MATRICI CONGRUENTI >

VALIDATORI >

Le matrici devono essere simmetriche (A, B)

Due matrici si dicono congruenti sse esiste una terza matrice invertibile per la quale:

$$B = {}^{t}M \cdot A \cdot M$$ con
- A, B le matrici congruenti
- M la terza matrice.

ES: "con $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ed $M=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$"

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Non sembra valere il contrario

MATRICI CONGRUENTI > PROPRIETÀ

- STESSO SEGNO

Se A è congruente a B
- $\det(A) > 0 \rightarrow \det(B) > 0$
- $\det(A) = 0 \rightarrow \det(B) = 0$
- $\det(A) < 0 \rightarrow \det(B) < 0$

POLINOMIO OMOGENEO >

Sono omogenei i polinomi che hanno lo stesso grado su tutti i monomi che contengono:

ES: $x_1x_2 + x_1^2$ ✓ (2,2) $\quad x^4 \cdot x_3^{-1} + 3x_1^3$ ✓ (3,3) $\quad x^2 + x$ ✗ (2,1)

FORMA QUADRATICA >

È un polinomio omogeneo di 2° grado

ES $x^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ✓ $\quad x_3^2 x_2 + x_2^2$ ✗ (3,2) $\quad x_3^3 + x_4^3$ ✗ (3,3)

L20 • Prodotti Scalari II

FORMA QUADRATICA → MATRICE

Ogni forma quadratica è rappresentabile come:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Def pos sse $g_A(x,x) > 0$

in cui A è una matrice simmetrica in cui

- Nella diagonale principale ci vanno i coefficienti delle incognite pure
- Nelle altre celle ci va il $\frac{\text{coefficiente}}{2}$

ES: Definire la matrice della forma quadratica $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

(1) Definisco la matrice $p(x_1, x_2, x_3)$

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	1	1
x_2	1	0	2
x_3	1	2	0

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) Verifico l'inversa

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 + x_3,\ x_1 + 2x_3,\ x_1 + 2x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{x_1x_2} + x_1x_3 + \underline{x_2x_1} + 2x_3x_2 + x_3x_1 + 2x_2x_3$$

$$= 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \ ✓$$

PRODOTTO SCALARE > VETTORI ORTOGONALI

Dati $v, w \in V$ per un generico prodotto scalare $\langle v,w \rangle$ sono ortogonali sse il loro prodotto scalare è 0.

$v, w \in V \quad \langle v,w \rangle = 0 \iff v$ e w sono ortogonali

ES: "Per il prodotto scalare euclideo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$"

$\langle v,w \rangle = (0,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ sono ortogonali

SOTTOSPAZIO ORTOGONALE >

Dato un sotto-spazio vettoriale W di V, è

$W^{\perp} = \{ v \in V \mid \langle v,w \rangle = 0 \quad \forall w \in W \}$

Ovvero i vettori del "parent" V che sono ortogonali con tutti i vettori di W.

RADICALE >

È il sotto-spazio vettoriale $V^{\perp}$ composto dai vettori $v \in V$ dello spazio che sono ortogonali a tutti gli altri vettori

$\{ v \in V \mid \langle v,w \rangle = 0 \quad \forall w \in V \}$

L21 • Prodotti Scalari III

NORMA >
Dato un prodotto scalare su un campo $\mathbb{K}$, la norma di 1 vettore è la radice del prodotto per se stesso:
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \quad \text{con} \quad v \in V$$

Se lo spazio vettoriale è $\mathbb{R}^n$ ed il prodotto scalare è standard equivale al modulo $\|v\| = |v|$
$= \sqrt{v_1 + v_2 + \dots v_n}$

ES " Calcolare la norma di (20, 5) in $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare standard "
(1) Applico la formula: è in $\mathbb{R}^2$ con standard → modulo
$\|v\| = \sqrt{20+5} = \sqrt{25} = 5$

ES: " Calcolare la norma di $v = (1, 2)$ sul prodotto scalare $4x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$ "
(1) Definisco la formula del versore $x_1 = y_1 \quad x_2 = y_2$
$\langle v, v\rangle = 4x_1^2 - \cancel{x_1x_2} + \cancel{x_2x_1} + 4x_2^2 = 4x_1^2 + 4x_2^2$
$\|v\| = \sqrt{4x_1^2 + 4x_2^2}$

(2) Applico la formula
$\|v\| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

NORMA > VERSORE
Sono versori tutti i prodotti per i quali la norma vale 1

ES: Determinare se $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $(1, 2, 3)$ sono versori "
(1) Applico norma (assumo sia prod. standard)
$\|v\| = \sqrt{\frac{1^2}{(\sqrt{2})^2} + 0 + \frac{1}{(\sqrt{2})^2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$ lo è ✓

(2) Applico per il 2°
$\|w\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ NON è versore

NORMA > NORMALIZZAZIONE

Dato un vettore $v \in V$ se non è già versore lo si può far diventare usando il rapporto con la norma attuale

$\|v\| \neq 1 \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ è versore $\longleftrightarrow \left\|\frac{v}{\|v\|}\right\| = 1$

ES: "Normalizzare $v=(1,2,3)$ nel prodotto scalare standard"

(1) Calcolo la norma

$\|v\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \rightarrow$ Non è versore

(2) Normalizzo

$v' = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

(3) Verifico

$\|v'\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{14}+\frac{4}{14}+\frac{9}{14}} = \sqrt{\frac{14}{14}} = \sqrt{1} = 1$ ou

ANGOLO >

VALIDATORI > ! I vettori NON devono essere nulli.

L'angolo è un numero nel range $[0, \pi]$ che viene definito come:

$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$ in cui • θ è l'angolo dei 2 vettori $v, w \in V$

Essendo tra 0 e π si può triangolare solo col $\cos(\theta)$

ES: "Calcolare l'angolo di $v=(1,0)$ e $w=(2,0)$ rispetto al prodotto scal. std."

(0) Calcolo le sotto-formule:

(0.1) Calcolo $\langle v, w \rangle$

$\langle v, w \rangle = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$

(0.2) Calcolo norme

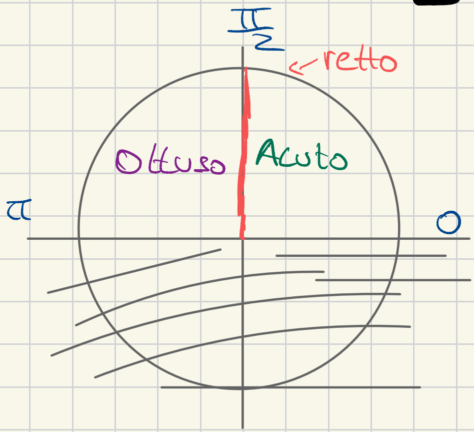
$\|v\| = \sqrt{1^2+0} = 1$

$\|w\| = \sqrt{4} = 2$

(1) Calcolo formula

$\cos(\theta) = \frac{2}{2} = 1 \qquad \theta = 0$

L21 • Prodotti Scalari III 3



ANGOLO > PROPRIETÀ

In base al valore dell'angolo:

- SE $\theta < \frac{\pi}{2}$
  - L'angolo è acuto
  - Il prodotto $\langle v, w \rangle$ è positivo

- SE $\theta = \frac{\pi}{2}$
  - L'angolo è retto
  - Il prodotto $\langle v, w \rangle$ è zero
  - 〃 〃 〃 è ortogonale

- SE $\theta > \frac{\pi}{2}$
  - L'angolo è ottuso
  - Il prodotto $\langle v, w \rangle$ è negativo

VETTORE DI DIREZIONE >

Dati 2 n-uple rappresentanti punti in $\mathbb{R}^n$

Il vettore direzione è il vettore che parte da 1 punto ed arriva nell'altro.

È espresso come la sottrazione delle n-uple in ordine

$P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\quad$ $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (y_1, y_2, \dots, y_n) - (x_1, x_2, \dots, x_n)$

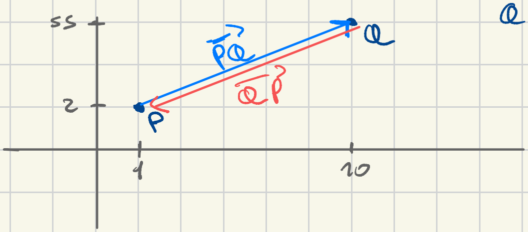
$Q\,(y_1, y_2, \dots, y_n)$ $\quad$ $\overrightarrow{QP} = P - Q = (x_1, x_2, \dots, x_n) - (y_1, y_2, \dots, y_n)$

ES: Calcolare il vettori direzione $(1,2)$ e $(10, 55)$ in $\mathbb{R}^2$

(1) Applico la formula

$P = (1,2)$ $\quad$ $Q = (10, 55)$ $\quad$ $\overrightarrow{PQ} = (10,55) - (1,2) = (9, 53)$

$\overrightarrow{QP} = (1,2) - (10,55) = (-9, -53)$



DISTANZA (o Metrica)

Dati 2 punti $P, Q \in \mathbb{R}^n$, la distanza è la norma del vettore direzione ordinata.

$d(P,Q) = \|\vec{PQ}\|$ è diverso da $d(Q,P) = \|\overleftarrow{PQ}\|$

Questo perché avendo il vettore direzione, la norma calcola la lunghezza.

ES: "Calcolare la distanza tra $P=(1,2)$ e $Q=(4,6)$"

(1) Calcolo il vettore direzione: serve $\vec{PQ}$

$\vec{PQ} = (4,6)-(1,2) = (3,4)$

(2) Calcolo la norma del vettore direzione

$d(P,Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\langle \vec{PQ}, \vec{PQ} \rangle} = \sqrt{25} = 5$

$\langle \vec{PQ}, \vec{PQ} \rangle = 3^2+4^2 = 9+16 = 25$

BASI ORTOGONALI

Dato uno spazio vettoriale V e una sua base B essa è ortogonale se i suoi vettori sono a 2 a 2 ortogonali

ES: "Verificare se la seguente è una base ortogonale in $\mathbb{R}^3 = \{\underbrace{(1,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{v_2}, \underbrace{(1,0,-1)}_{v_3}\}$"

(1) Calcolo le combinazioni

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ $\quad \langle v_1, v_3 \rangle = 1-1=0$ $\quad \langle v_2, v_3 \rangle = 0$

Sono ortogonali

ORTOGONIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT >

È un algoritmo che consente di trasformare una base qualsiasi in una base ortogonale

Considerando lo spazio V e B base NON ortogonale e W la desiderata base ortogonale:

$$W_1 = V_1$$
$$W_2 = V_2 - P_{W_1}(V_2)$$
$$W_3 = V_3 - P_{W_1}(V_3) - P_{W_2}(V_3)$$
$$W_4 = V_3 - P_{W_1}(V_3) - P_{W_2}(V_3) - P_{W_4}(V_4) \dots$$
$$\vdots$$

Con $P_{W_n}(V_n)$ Proiezione del vettore V su W_n

$$P_{W_n}(V_n) = \frac{\langle v, w \rangle}{(\|w\|)^2} \cdot w$$

ES: Ortogonalizzare la base $\{(1,0,0),(1,0,1),(1,-1,0)\}$

(1) Definisco gli elementi

$$w_1 = b_1$$
$$w_2 = b_2 - P_{w_1}(b_2)$$
$$w_3 = b_3 - P_{w_1}(b_3) - P_{w_2}(b_3)$$

(2) Calcolo gli elementi

$$w_1 = (1,0,0)$$
$$w_2 = (1,0,1) - \frac{\langle w_1, b_1 \rangle}{(\|w_1\|)^2} \cdot w_1$$

$\langle w_1, b_1 \rangle = 1$

$\|w_1\| = \sqrt{1^2} = 1$

$$= (1,0,1) - \frac{1}{1} \cdot (1,0,0) = \boxed{(0,0,1)}$$

$$w_3 = (1,-1,0) - \frac{\langle w_1, b_3 \rangle}{(\|w_1\|)^2} \cdot w_1 - \frac{\langle w_2, b_3 \rangle}{(\|w_2\|)^2} \cdot w_2$$

$\langle w_1, b_3 \rangle = 1$

$\|w_1\| = 1$

$\langle w_2, b_3 \rangle = 0$

$$= (1,-1,0) - 1 \cdot (1,0,0) - 0$$
$$= (0,-1,0)$$

(3) Verifico

$\langle w_1, w_2 \rangle = 0 + 0 + 0 = 0$

$\langle w_1, w_3 \rangle = 0 + 0 + 0 = 0$ $\quad$ $\langle w_2, w_3 \rangle = 0 + 0 + 0 = 0$

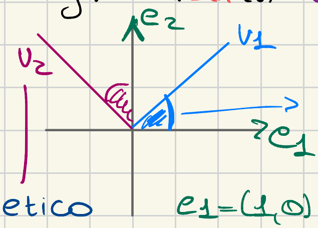
$\{w_1, w_2, w_3\}$ è base ortogonale ✓

ROTAZIONI NEL PIANO $\mathbb{R}^2$

Dato un angolo, la sua rotazione è definita dall' applicazione lineare

$L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Che restituisce quindi il nuovo vettore ruotato.



θ fra e_2 ed e_1

Ipotetico vettore ruotato.

$e_1 = (1,0)$ $e_2 = (0,1)$

NB: Usando le coordinate polari la destinazione è

$\begin{vmatrix} r \cdot \cos(\theta + \alpha) \\ r \cdot \sin(\theta + \alpha) \end{vmatrix}$ con α l'angolo di rotazione, θ l'angolo del vettore rispetto le basi

ES "Ruotare il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nel piano di $\mathbb{R}^2$"

(1) Definisco la formula

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Che equivale al vettore verticale $\uparrow e_2$

ES "Ruotare di $45°$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$"

(1) Definisco la formula

$$L_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

L22 • Lo Spazio Euclideo I

ROTAZIONI > NEL PIANO $\mathbb{R}^2$

ES: "Ruotare il vettore $(1,1)$ usando le coordinate polari di $\frac{\pi}{2}$"

(0) Calcolo l'angolo rispetto alle basi

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, e_1 \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \langle v, e_1 \rangle = 1 \quad \|v\| = \sqrt{2} \quad \|e_1\| = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

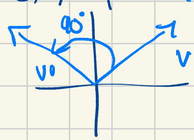
(1) Calcolo le coordinate polari

$$v = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta) \\ r \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad r = \|v\| \; \sqrt{2} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ok}$$

(2) Applico la rotazione

$$v' = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta + \alpha) \\ r \cdot \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) \\ r \cdot \sin\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \\ \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



ok

RIFLESSIONI > SUL PIANO

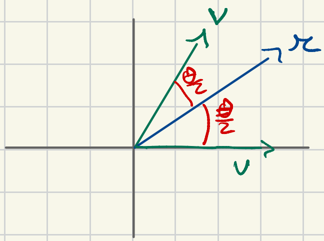
Dato un vettore (in forma normale o in coordinate polari) è un'applicazione lineare Rif_θ:

$$L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

NB: Nelle coordinate polari equivale a

$$\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta) \\ r \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta - \alpha) \\ r \cdot \sin(\theta - \alpha) \end{pmatrix}$$ con α l'angolo di rotazione

NB2: $\frac{\theta}{2}$ è l'angolo della retta con cui si fa la riflessione sull'asse x.

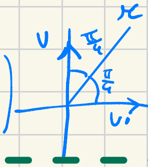


RIFLESSIONI > SUL PIANO

ES: "Riflettere di $\frac{\pi}{2}$ il vettore $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

(1) Definisco la formula

$$Rif\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2})\\ \sin(\frac{\pi}{2}) & -\cos(\frac{\pi}{2})\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$



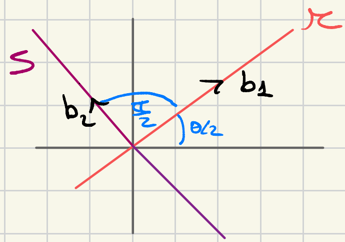
RIFLESSIONI > SUL PIANO CON LE RETTE

Date 2 rette ortogonali r ed s, con basi $\{b_1, b_2\}$ delle quali

- v_1 punta alla retta r
- v_2 punta alla retta s

La riflessione lineare (rispetto alla base canonica sarà

$$[Rif]_{\theta}{}^{B}_{B} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{matrix}\to x\\ \to y\end{matrix}$$



ISOMETRIA >

È un'applicazione lineare che conserva il prodotto scalare:

$T(U)$ è isometria $\Longleftrightarrow$ $\langle u, w\rangle = \langle T(u), T(w)\rangle$

Si può verificare anche con le basi: data B base di V è isometria se la base conserva il prod scalare.

$T(U)$ è isometria $\Longleftrightarrow$ $\langle b_i, b_j\rangle = \langle T(b_i), T(b_j)\rangle$ $\forall\, i,j$ con $b_i, b_j \in B$

ISOMETRIA > PROPRIETÀ

- Se l'applicazione $T(v)$ candidata è una trasformazione lineare (es. rotazione) su spazi vettoriali con prodotto scalare def. positivo ($\langle v, w\rangle > 0 \ \forall v, w \neq 0_v$)
  Allora
  - T è isometria
  - T preserva la norma $\to$ $\|T(v)\| = \|v\| \ \forall v$
  - T preserva la distanza $\to$ $d(v, w) = d(T(v), T(w))$

- CON MATRICI ASSOCIATE
  Data l'appl. Lineare $T: V \to W$ con V, W spazi su $\mathbb{K}$
  Con
  - B base di V e g prodotto scalare
  - C base di W e m // //

  E le relative matrici associate
  - $[g]_B$ del dominio
  - $[m]_C$ // co-dominio
  - $[T]^B_C$ dell' applicazione

  Quindi, T è isometria se le matrici associate dei prodotti scalari sono congruenti:

$$[g]_B = {}^t[T]^B_C \cdot [m]_C \cdot [T]^B_C$$

- SU ENDOMORFISMI (LEFT)
  Dato un endomorfismo $L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'isometria se il prodotto della trasposta per la left è la mat. id.

L_A è isometria $\iff$ ${}^tA \cdot A = I_n$ $\iff$ A è una matrice ortogonale