Settimana 1

Appunti di Alessandro Salerno
Lezioni 1-3 Prof. J. Seiler

Funzioni

Una funzione $f : A \to B$ è una relazione tra l'insieme A (dominio) e l'insieme B (codominio) che rispetta due proprietà fondamentali:

- Funzionalità: la funzione restituisce uno ed un solo valore ($|f(\{a \in A\})| = 1$)
- Ovunque definita: per ogni elemento del dominio esiste un'immagine ($f(\{a \in A\}) \neq \emptyset \, \forall a \in A$)

Una funzione può essere:

- Suriettiva: se l'insieme delle immagini di f corrisponde con il codominio di f, ossia $f(A) = B$
- Iniettiva: se elementi distinti del dominio producono immagini distinte della funzione (non esistono y ripetute), ossia $f(a_1 \in A) \neq f(a_2 \in A) \, \forall a_1 \neq a_2 \in A$
- Biiettiva: se è sia suriettiva che iniettiva

Il comportamento delle funzioni deve essere definito. Le funzioni sono comunemente definite con espressioni il cui valore dipende dagli argomenti della funzione, per esempio:

$$f(x) = x + 1$$

Se gli insiemi dominio e codominio non sono impliciti, è preferibile definire il comportamento della funzione in modo più rigoroso:

$$f(x) : A \to B$$
$$x \to x + 1$$

Funzioni lineari

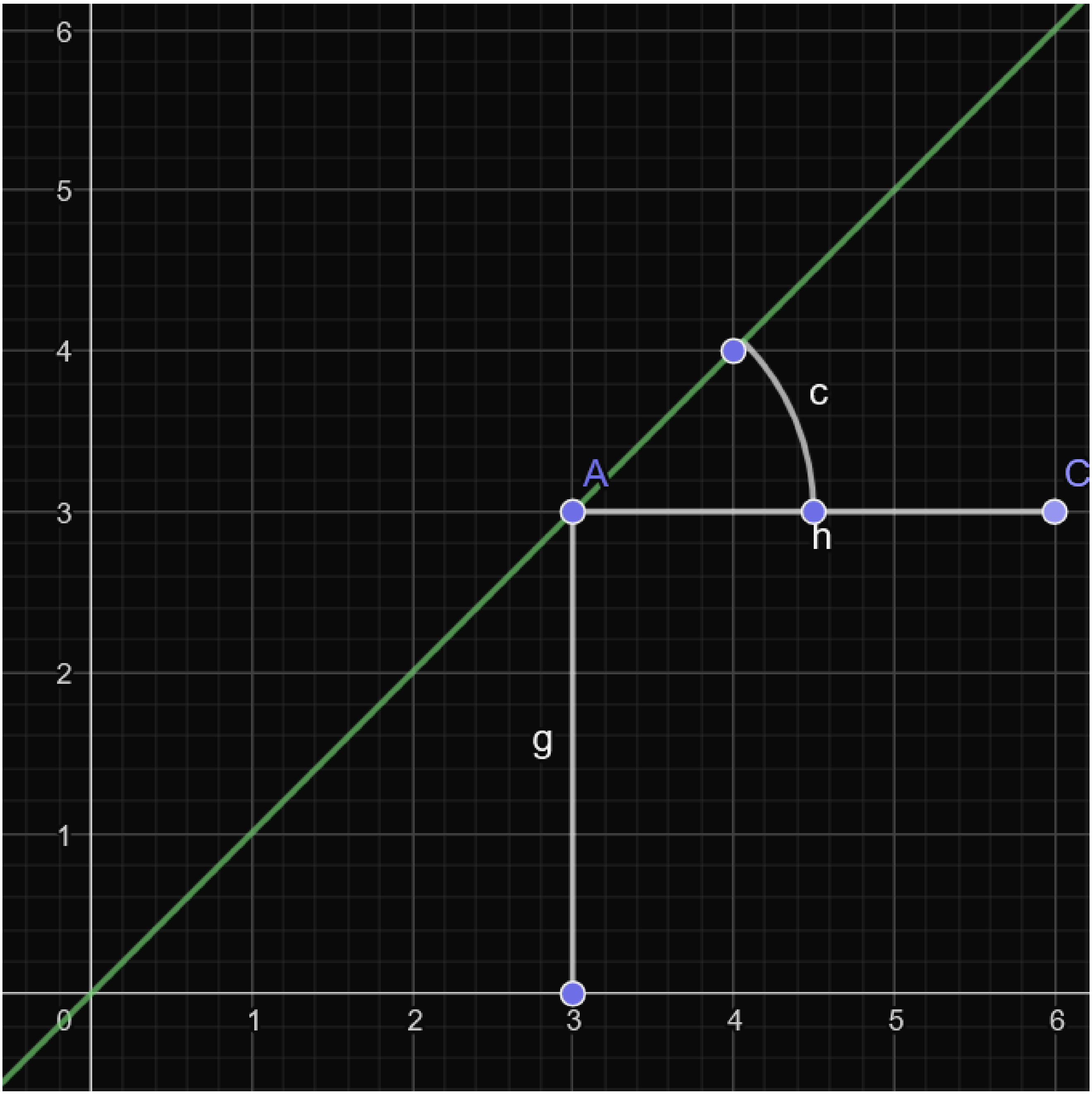
Nella forma scritta, le funzioni lineari sono spesso espresse come rette nella forma:

$$f(x) = mx + q$$
$$m, q \in A$$

Note

Le funzioni lineari in analisi differiscono dalle funzioni lineari in algebra lineare e dagli omomorfismi in matematica discreta. Difatti sarebbe più corretto chiamare le funzioni della forma $f(x) = mx + q$ con il nome di *funzioni affini* in quanto non rispettano le due proprietà delle funzioni lineari per $q \neq 0$. Nello specifico, le funzioni affini sono composte da una funzione lineare (in questo caso mx) ed una traslazione q che sposta l'origine.

Chiamiamo m in diversi modi: *pendenza della funzione*, *coefficiente di proporzionalità tra la variazione di f e la variazione di x*, o *coefficiente angolare*. Quest'ultimo nome ha una radice geometrica: usando le formule trigonometriche, esce che $c = \tan m$ e, quindi, $m = \arctan c$.



Note

Nel caso in cui $m \neq 0$, $f(x) = 0$ per $x = -\frac{q}{m}$ e $f(0) = q$.

Rappresentazione delle funzioni

Le funzioni ad una variabile possono facilmente essere rappresentate su un sistema cartesiano (piano cartesiano) dove l'asse delle ascisse corrisponde alla *variabile* *indipendente* x, mentre quello delle ordinate corrisponde $f(x)$ e prende il nome di *variabile dipendente* y.

Trasformazioni geometriche delle funzioni

- Data $f(x)$ il grafico di $f(x) + t$ è semplicemente traslato verticalmente di t rispetto a f.
- $-f(x)$ è $f(x)$ riflessa rispetto all'asse X
- $|f(x)|$ riflette verso l'alto solo la parte negativa
- $f(x+t)$ trasla orizzontalmente in base al segno di t dove se t è positivo la traslazione è a sinistra, altrimenti a destra
- $f(-x)$ è $f(x)$ riflessa rispetto all'asse Y
- $f(|x|)$ ha $f(x)$ per $x > 0$ ed anche per $x < 0$
- $t \cdot f(x)$ è $f(x)$ riscalata verticalmente se $t > 0$. Se $t < 0$ abbiamo $t \cdot -f(x)$ quindi i due effetti si combinano. Per $0 < t < 1$ si ha un "alleviamento" della funzione
- $f(t \cdot x)$ applica una dilatazione o contrazione orizzontalmente

Le trasformazioni geometriche si possono combinare. Il modo corretto di valutare gli effetti sul grafico di più trasformazioni è quello di scomporle in trasformazioni più elementari, come quelle descritte sopra.

Example

Presa $f(x) = \ln(2x+1)$ si vuole disegnare un grafico qualitativo della funzione. Sapendo la forma approssimativa del grafico della funzione $\ln$ è possibile tracciare un grafico qualitativo, ma è necessario sapere in quale punto la funzione interseca l'asse delle ascisse, ossia quando $\ln(2x+1) = 0$. È noto che $\ln 1 = 0$, e sappiamo che $\ln 2x = 0$ per $x = \frac{1}{2}$ in quanto $2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ e $\ln 1 = 0$. A questo punto, sappiamo che $\ln(2x+1)$ è semplicemente traslato a sinistra di 1, quindi $f(x) = 0$ per $x = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

Incremento, variazione e Quoziente di Newton

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e presi $x_1 \neq x_2 \in [a, b]$, definiamo:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Come l'incremento o variazione tra le due x.

Inoltre, definiamo:

$$\Delta y = \Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

Come la variazione dei valori assunti da f nei due punti x_2, x_1.

Possiamo stabilire un rapporto tra queste due grandezze usando il Quoziente di Newton:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Osserviamo che:

$$x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

E quindi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

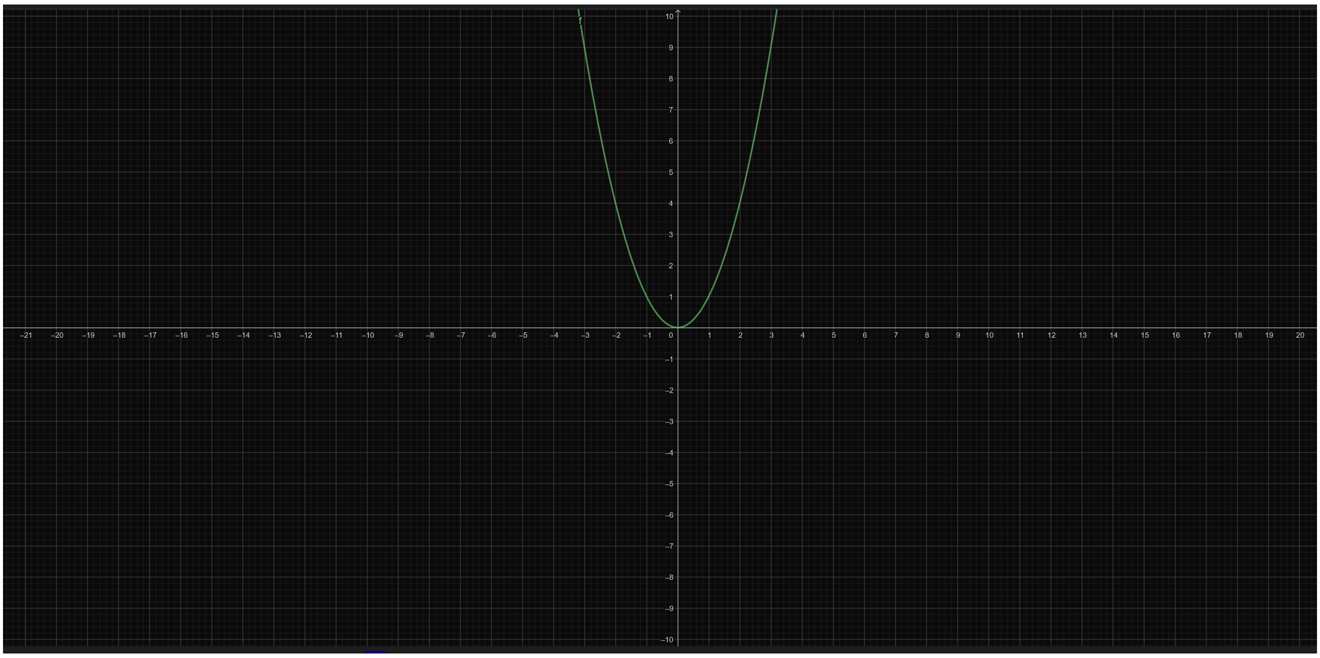
Questo permette di stabilire un fattore comune a numeratore e denominatore che tornerà utile più avanti.

Pendenza di una funzione

Rappresentare le funzioni sul grafico permette di osservarne il comportamento visivamente. Questo rende più facile notare alcune caratteristiche della funzione, tra cui il fatto che possiede una pendenza.

> **Tip**
>
> Intuitivamente definiamo *ripida* una salita che avanza (cresce) velocemente. Due rampe che salgono della stessa altezza Δy possono essere più o meno ripide in base a quanto sono *lunghe*, ossia in base alla distanza orizzontale Δx tra il punto di inizio e quello di fine. È, quindi, il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tra queste due grandezze che da la *ripidità* (pendenza) di una rampa, non tanto le singole grandezze.

Intuitivamente verrebbe, quindi, da calcolare $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ con la formula fornita al punto precedente, ma nel fare ciò ci si imbatterebbe inevitabilmente in un quesito: che x_2, x_1 (e che Δx) scegliere? Per funzioni lineari questo non ha alcuna importanza, visto che la loro pendenza è costante (m), ma esistono funzioni come x^2 che visivamente non mantengono una pendenza costante:



Limite del Quoziente di Newton

Supponiamo di voler ottenere la misurazione più precisa possibile della pendenza della funzione in un dato punto. Per farlo, è necessario scegliere x_1, x_2 il più vicini possibile in modo da avere $\Delta x \approx 0$, sapendo che $x_1 \neq x_2$ e quindi $\Delta x \neq 0 \; \forall x_1 \neq x_2$ (anche perché sarebbe impossibile calcolare una divisione per 0).

Questa necessità porta al concetto di limite che verrà esplorato in maggiore dettagli più avanti. Possiamo, quindi, scrivere il valore della pendenza di f nel punto x_1 ($P_f(x_1)$) come:

$$P_f(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Tip

Per calcolare questo limite in maniera approssimativa, basta porre $\Delta x = 0,01$, sostituire e svolgere i calcoli. Verranno poi introdotti dei metodi di risoluzione precisa dei limiti.

Important

Trovare la pendenza $P_f(x_1)$ di una funzione generica f nel punto x_1 equivale a trovare la pendenza m della funzione lineare g (retta) tangente al punto $(x_1, f(x_1))$. Nel caso in cui f sia essa stessa una funzione lineare (retta), la funzione tagente coinciderà con f, ossia $g = f$. Sapendo $P_f(x_1)$ è possibile determinare l'equazione della retta tangente al punto $(x_1, f(x_1))$:

$$f(x_1) = g(x_1) = mx_1 + q = P_f(x_1)x_1 + q$$

$$g(x) = mx + q = P_f(x_1) + q$$

$$q = g(x_1) - P_f(x_1)x_1 = f(x_1) - P_f(x_1)x_1$$

$$g(x) = P_f(x_1)x + f(x_1) - P_f(x_1)x_1$$

$$g(x) = P_f(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

Funzione pendenza

Sia f una funzione definita su un intervallo I su $\mathbb{R}$. Se esiste:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Per tutti i punti $c \in I$, allora definiamo la funzione pendenza come una funzione $f(c) \;:\; I \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni punto c la pendenza in quel punto: $c \to P_f(c)$.

Metodo grafico per il calcolo della pendenza

Il metodo grafico per la determinazione della pendenza in un punto richiede di disegnare la retta tangente al grafico in quel punto per poi cercare due punti diversi $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ appartenenti alla retta tangente dove sono facilmente individuabili dei valori per ascisse ed ordinate così da calcolare il Quoziente di Newton e, quindi, la pendenza.

Funzione localmente dritta

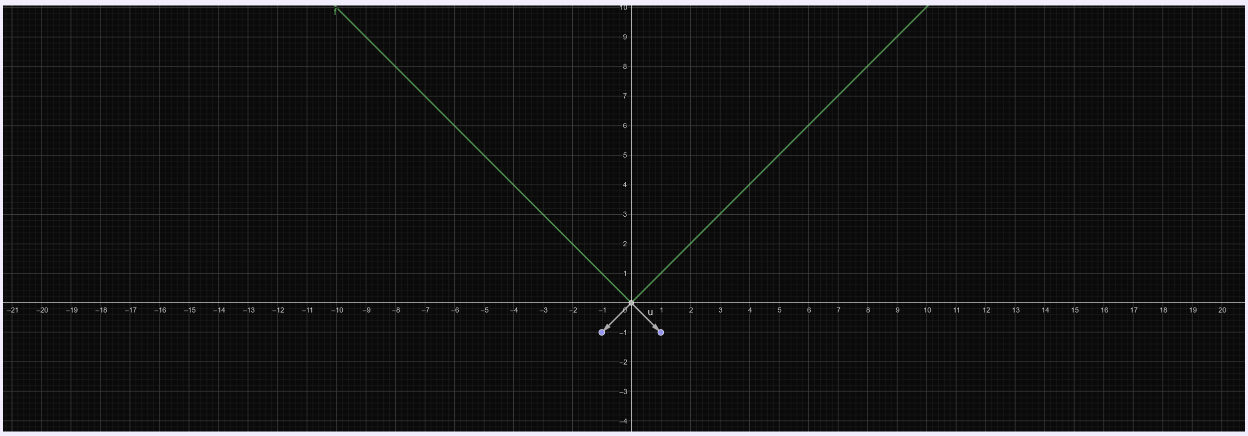
Una funzione di dice *localmente dritta* in un intervallo quando ingrandendo a sufficienza questa appare comportarsi in maniera lineare in quell'intervallo.

Quando è possibile calcolare la pendenza

Non è sempre possibile calcolare la pendenza di una funzione in un punto. Per farlo, come affermato in precedenza, è necessario identificare la pendenza della retta tangente al grafico nel punto interessato. Tuttavia, è possibile che esistano più rette tangenti ad un punto con pendenze diverse.

Example

La funzione $f(x) = |x|$ ha due rette tangenti nel punto $x = 0$ con pendenze diverse.



Questo concetto verrà poi esplorato meglio nel discutere i concetti di derivabilità e esistenza di un limite.

Teorema 1

qualsiasi funzione $f(x) = mx + q$ e per qualsiasi scelta di x_1, x_2, il quoziente di Newton risulta sempre essere uguale a m. (perché m è la pendenza della funzione).
\

Dimostrazione

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(mx_2 + q) - (mx_1 + q)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{mx_2 - mx_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

Funzione derivata e derivabilità

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $c \in [a, b]$, f si dice *derivabile nel punto* c se esiste finito il limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Se f è derivabile in ogni punto del dominio, definiamo la funzione derivata prima $f'(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ che restituisce la pendenza della retta tangente nel punto $(x, f(x))$.

> **Note**
>
> La funzione derivata è una formalizzazione più rigorosa della funzione pendenza. Seguiranno ulteriori approfondimenti quando verrà trattato il concetto di esistenza di un limite.

Teorema 2 (Monotonia)

Una funzione si dice monotona in un intervallo se è crescente o decrescente su questo intervallo.

f è monotona crescente su un intervallo se e solo se $f' \geq 0$ in quello stesso intervallo. Analogamente, f è monotona decrescente su un intervallo se e solo se $f' < 0$ sul medesimo intervallo.

Teorema 3 (Concavità e convessità)

Sia f una funzione:

1. f si dice convessa su un intervallo se e solo se f' è monotona crescente in quell'intervallo, ossia $f'' \geq 0$ su quell'intervallo
2. f si dice concava su un intervallo se e solo se f' è monotona decrescente in quell'intervallo, ossia $f'' < 0$ su quell'intervallo

Inverso della derivazione

Una volta ottenuta la derivata di una funzione è legittimo chiedersi se esista una correlazione biunivoca tra questa e la funzione originale e, quindi, se sia possibile risalire a quest'ultima sapendo solo la derivata.

Sfortunatamente, non è possibile identificare una sola f data f', ma infinite f che differiscono solo per valore noto, ossia è possibile trovare infinite funzioni $g(x) = f(x) + c$.

Primitiva di una funzione

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si dice primitiva di f sull'intervallo $[a, b]$ una qualsiasi funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g'(x)\ \forall x \in [a, b]$.

Teorema 4

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia g una primitiva di f sull'intervallo $[a, b]$, allora anche $g + c$ è una primitiva di f sull'intervallo $[a, b]$ per tutti i numeri c.

Dimostrazione

Per dimostrare che le primitive variano solo per un c è necessario dimostrare che le costanti in una funzione vengono "uccise" quando si calcola la sua derivata.

Sia $f(x)$ una funzione derivabile qualsiasi e sia $g(x)$ definita come $f(x) + c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. Dimostriamo che:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_1 + \Delta x) - g(x_1)}{\Delta x} \quad \forall x_1 \in dm(f)$$

Espandiamo la funzione g usando la sua definizione:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x_1 + \Delta x) + c) - (f(x_1) + c)}{\Delta x} \quad \forall x_1, c \in dm(f)$$

Nel secondo limite, risolviamo le parentesi a numeratore:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) + c - f(x_1) - c}{\Delta x} \quad \forall x_1, c \in dm(f)$$

A questo punto semplifichiamo $+c$ e $-c$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \ \ \forall x_1, c \in dm(f)$$

Corollario

Siano g, h due primitive di f sull'intervallo $[a, b]$, allora g ed h differiscono solo da una costante, ossia $h - g$ è una funzione costante.