MODELLI

RICERCA OPERATIVA

MODELLI DI MIX

esercizio:

PRODOTTO	1	2	3	4	5	6	7	
FALEGN.	7	5	9	10	10	12	15	x 2000
VERNIC.	2	2	2	3	3	3	3	x 1500
ASSEMBL.	2	2	4	7	9	15	18	x 1700
VERIFICA	1	1	1	2	1	2	2	x 300
IMBALL.	1	1	1	1	2	1	0	x 500
PROFITTO	10	18	20	25	27	28	35	

$\max z = 10X_1 + 18X_2 + 20X_3 + 25X_4 + 27X_5 + 28X_6 + 35X_7$

Variabili: X_i = # PRODOTTI DI TIPO i $\quad i = 1 - 7 \quad X_i \in \mathbb{Z}^+$

soggetto a: vincoli di produzione:

$X_1 \leq 70 \qquad X_1 \geq 20 \qquad X_5 \leq 35\% \left(\sum_{i=1}^{7} X_i\right)$

$X_2 \leq 70 \qquad X_2 \geq 20 \qquad X_6 \leq 35\%$ "

$X_3 \geq 20 \qquad X_7 \leq 35\%$ "

$X_4 \geq 20$

vincoli di forza lavoro:

1) $7X_1 + 5X_2 + 9X_3 + 10X_4 + 10X_5 + 12X_6 + 15X_7 \leq 2000$

2) $2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 3X_4 + 3X_5 + 3X_6 + 3X_7 \leq 1500$

3) $2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 7X_4 + 9X_5 + 15X_6 + 18X_7 \leq 1700$

4) $X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 + X_5 + 2X_6 + 2X_7 \leq 300$

5) $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 + X_6 \leq 500$

---

esercizio: Signor Rossi

Variabili: X_0 = soldi in banca $\quad X_0 \geq 0$

X_i = # conti azionari $\quad i = 1 - 6 \quad X_i \in \mathbb{Z}^+$

$\max z = 14\% \cdot 36X_1 + 20\% \, 76X_2 + 23\% \cdot 19X_3 + 12\% \cdot 17X_4 + 15\% \cdot 18X_5 + \ldots$

soggetto a: a $X_0 \geq 150\,000$

1) $36X_1 \leq 100.000$

$76X_2 \leq 100.000$

2) $18X_5 + 27X_6 \leq 20\% \, (36X_1 + 76X_2 + \ldots + 2$

3) $76X_2 \geq 10\% \, (36X_1 + 76X_2 + \ldots + 27X_6)$

4) $36 \cdot 5\% \cdot X_1 + 76 \, 10 X_2 \quad \leq 15\% \cdot (36X_1 \ldots$

MODELLI DI TRASPORTO E ASSEGNAMENTO

esercizio: - 4 centri di smistamento S_1, S_2, S_3, S_4
- numero copie per ogni centro: 100.000, 150.000, 50.000, 75.000
- numero tipografie: $T_1 - T_2 - T_3$
- produzione massima 125.000, 180.000, 70.000
- costo spedizione: 2€\Km
- distanza tra: T_1 20, 25, 15, 5
  T_2 12, 14, 18, 30
  T_3 19, 11, 40, 12.

Variabili: in questo caso si possono usare variabili doppie x_{ij}
x_{ij} = # numero giornali spediti $T_i \to S_j$ $i = 1,2,3$ $j = 1,2,3,4$

T_i \ S_j	1	2	3	4
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

i \ j	1	2	3	4
1	20	25	15	5
2	12	14	18	30
3	19	11	40	12

× 2€\Km

d_{ij} = # kilometri

$$\min z = 2 \cdot \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} d_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$T_1)$ $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 125.000$
$T_2)$ $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 180.000$
$T_3)$ $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 70.000$

$S_1)$ $x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 100.000$
$S_2)$ $x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 150.000$
$S_3)$ $x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 50.000$
$S_4)$ $x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 75.000$

PROBLEMA DI ASSEGNAMENTO

esercizio:
- 5 operai = 1, 2, 3, 4, 5
- 5 macchine = A, B, C, D, E

} producono num. di pezzi diversi

Variabili: 5 x 5 variabili $X_i = 1, 2, 3, 4, 5$ $P_J = A, B, C, D, E$

X_{iJ} = # operaio associato a macchina $\in \{0, 1\}$

P_J \ X_J	A	B	C	D	E
1	10	7	9	2	1
2	8	9	12	7	2
3	2	9	9	8	8
4	9	18	2	4	3
5	9	9	4	5	4

$$\max z = \sum_{i=5}^{5} \sum_{J=5}^{5} x_i \cdot P_J$$

soggetto a:

$$\left.\begin{aligned}
&X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} + X_{1D} + X_{1E} = 1 \\
&X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} + X_{2D} + X_{2E} = 1 \\
&X_{3A} + X_{3B} + X_{3C} + X_{3D} + X_{3E} = 1 \\
&X_{4A} + X_{4B} + X_{4C} + X_{4D} + X_{4E} = 1 \\
&X_{5A} + X_{5B} + X_{5C} + X_{5C} + X_{5E} = 1
\end{aligned}\right\} \sum_{J=A}^{E} X_{iJ} \qquad i = 1 — 5 \qquad J = A — E$$

MODELLI MULTIPERIODO

esercizio: mesi = 4

mesi 4,0 : non ci devono essere prodotti in magazzino

al mese si chiedono: 120T, 160T, 300T, 200T

capacità produttiva: 140T, 150T, 140T, 160T × 10 €/T

al più si possono produrre: 50T, 75T, 70T, 80T × 6 €/T

per ogni prodotto lasciato in giacenza = 5 €/T

Variabili:

X_i = # capacità richiesta $\quad i = 1 - 4$

M_i = # prodotti extra $\quad i = 1 - 4$

Y_i = # giacenze magazzino al mese $\quad i = 1 - 4$

$$\min z = 10 \sum_{i=1}^{4} X_i + \underbrace{16}_{10+6\,=\,\text{prodotti aggiuntivi}} \sum_{i=1}^{4} M_i + 5 \sum_{i=1}^{4} Y_i$$

Vincoli:

Capacità produttiva

$X_1 \leq 140$

$X_2 \leq 150$

$X_3 \leq 140$

$X_4 \leq 160$

Prodotti straordinari

$M_1 \leq 50$

$M_2 \leq 75$

$M_3 \leq 70$

$M_4 \leq 80$

Domanda:

$X_1 + M_2 \geq 120$

prodotti rimasti in magazzino

$$\begin{cases} Y_1 + X_2 + M_2 \geq 160 \\ Y_2 + X_3 + M_3 \geq 300 \\ Y_3 + X_4 + M_4 \geq 200 \end{cases}$$

Magazzino:

$Y_1 = X_1 + M_1 - 120$

$Y_2 = Y_1 + X_2 + M_2 - 160$

$Y_3 = Y_2 + X_3 + M_3 - 300$

$Y_4 = Y_3 + X_4 + M_4 - 200$

$X_1, M_1, Y_1 \geq 0$

esercizio operatori = 10

rapidità chiamate = 3,5 - 6 - 7 - 2,8 - 1,5 - 1,5 - 3 - 4 - 6,5 - 4

squadre : 2 - 4 persone per 4 squadre

Variabili i = # operatori 1 - 10

V_j = # rapidità chiamate

x_{ij} = # binaria $\begin{cases} 1 & \text{se operatore } i \text{ lavora nella squadra } j \\ 0 & \text{se " " non lavora nella squadra } j \end{cases}$

V_i = # velocità operatori

es.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0
4	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1

$\left(\max z = \min \sum_{i=1}^{10} V_i x_{ij} \quad j = 1,2,3,4 \right)$

il vincolo di un minimo non è lineare perciò lo dovremo riformulare

Vincoli

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad i = 1 - 10$$ → CONTROLLO ORIZZONTALE

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} \leq 4 \; , \; \sum_{i=1}^{10} x_{ij} \geq 2 \quad j = 1,2,3,4$$ CONTROLLO VERTICALE

$$\sum_{i=1}^{10} V_i x_{ij} \geq 8 \quad j = 1,2,3,4$$

quando $x_{ij} = 1$ allora moltiplico per la velocità di ogni operatore

quando $x_{ij} = 0$ non moltiplico la velocità - sarebbe 0

- Per eliminare il "min" o il "max" uso delle variabili ausiliarie e dei vincoli

$$y \leq \sum_{i=1}^{10} V_i x_{ij} \quad j = 1,2,3,4$$ → è una quantità non superiore alla velocità delle squadre

quindi diventa $\max z = y$

- Al fine di valutare la funzione, tutte le squadre sono equivalenti

Quindi proviamo a massimizzare la squadra 1 ipotizzandola la più lenta

$$\max z = \sum_{i=1}^{10} V_i x_{i1}$$

impongo il limite che le altre squadre non siano più lente

$$\sum_{i=1}^{10} V_i x_{ij} \geq \sum_{i=1}^{10} V_i x_{i1} \quad j = 1,2,3,4$$

PROBLEMI CON VINCOLI LOGICI

Esercizio MINIMIZZARE I COSTI DI APERTURA DEI CENTRI VENDITA GARANTENDO IL SERVIZIO

Variabili $x_i = \#$ siti $\quad i = \{A - E\}$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se apre il sito scelto} \\ 0 & \text{se non si apre} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ costo

$$\min z = 310\, x_A + 250\, x_B + 260\, x_C + 330\, x_D + 280\, x_E$$

Vincoli

1) $x_C + x_D \geq 1$
2) $x_A + x_B + x_C \geq 1$
3) $x_A + x_E \geq 1$
4) $x_A + x_D + x_E \geq 1$
5) $x_A + x_B + x_C + x_D \geq 1$
6) $x_B + x_C + x_D \geq 1$
7) $x_B + x_E \geq 1$

$\Rightarrow$ devono essere aperti almeno uno tra i seguenti

NB Usiamo due sensi per modellare un "OR"

$B \Rightarrow C \vee D$

$x_B \leq x_C + x_D$

$\hookrightarrow$ se $x_B = 1$ allora almeno uno tra C e D è vero

se $x_B = 0$ allora C e D sono sempre vere

Esercizio DECIDERE LE PRODUZIONI DA ATTIVARE E PIANIFICARE I QUANTITATIVI PER MASSIMIZZARE I SOLDI COSTO - PROFITTI

Prodotti = A - B - C - D

Quantità minima 1000, 1500, 3000, 2000

Variabili # Prodotti $x_i \quad i = \{A - D\}$

$$y_i \begin{cases} 1 & \text{se decido di produrre } i \\ 0 & \text{se non decido di produrre } i \end{cases}$$

costi

$$\max z = ((50\, x_A + 60\, x_B + 55\, x_C + 80\, x_D) - (14.500\, y_A + 10.000\, y_B + 8000\, y_C + 9000\, y_D))$$

Vincoli $10\, x_A + 15\, x_B + 5\, x_C + 14\, x_D \leq 200.000$

$x_C \geq 3000\, y_C \qquad x_A \geq 1000\, y_A$

$x_D \geq 2000\, y_D \qquad x_B \geq 1500\, y_B$

} Rispettare il quantitativo minimo

$x_A \Rightarrow x_C \vee x_D$

$y_A \leq y_C + y_D \Rightarrow$ se $y_A = 1$ y_C o $y_D = 1$; se $y_A = 0$ y_C o y_D non sono vincolati

introduco una "grande M" $\Rightarrow x_A \leq M y_A \qquad x_C \leq M y_C$

$x_B \leq M y_B \qquad x_D \leq M y_D$

$\Rightarrow$ • Dove $y_i = 1$ allora x_i è capace di produrre più del richiesto

• Dove $y_i = 0$ è verificato il vincolo

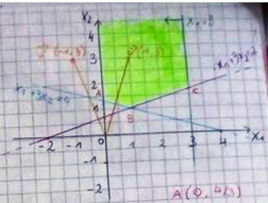
REGIONE AMMISSIBILE

MATE: $f_1 : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{12}$

esercizio

$\min z = x_1 + 2x_2$ → cerco le intersezioni

vincoli
1) $-x_1 + 3x_2 \geq 2$
2) $x_1 + 3x_2 \geq 4$
3) $x_1 \leq 3$
4) $x_1, x_2 \geq 0$



A $(0, 4/3)$
B $(1, 1)$
C $(3, 5/3)$

1)

x_1	x_2
0	2/3
-2	0

per $-x_1 + 3x_2 \geq 2$ → cerco piano ≥

$\vec{v}(-1,3)$ = vettore che punta ai risultati che soddisfano ≥ 0 → quindi prendo i punti sopra la retta

2)

x_1	x_2
0	4/3
4	0

per $x_1 + 3x_2 \geq 4$

$\vec{v}(1,3)$ = vettore che punta verso i risultati che soddisfano il $\geq \alpha$ → quindi prendo i punti sopra la retta

3) $x_1 \leq 3$ → prendo il semipiano $x_1 = 3$

4) $x_1, x_2 \geq 0$

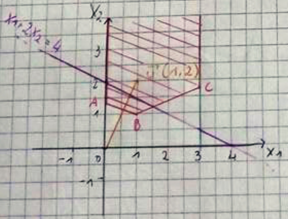
$B = \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 + 4 \\ -(-3x_2 + 4) + 3x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + 4 \\ 3x_2 - 4 + 3x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_1 = 1} \; \boxed{x_2 = 1}$

$C = \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 + 3x_2 = 2 \\ x_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = 5 \\ x_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_2 = 5/3} \; \boxed{x_1 = 3}$

$x_1 + 2x_2 = z \qquad z = 4 \qquad \vec{v}(1,2)$

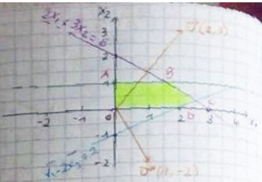
$x_1 + 2x_2 = 4$ → prendo semipiano sotto perché devo minimizzare →

x_1	x_2
0	2
4	0



→ cerco i punti che stanno sotto $x_1 + 2x_2 = 4$
↓
il punto ottimo per questa soluzione quindi è A

NB se fosse max z non ci sarebbe un punto di ottimo esercizio: max $z = x_1 + 2x_2$ in $\mathbb{R}^2$



Vincoli:
$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ 2)\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 3)\ x_2 \leq 1 \\ 4)\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \text{semipiani}$$

1)

x_1	x_2
0	-1
2	0

per $x_1 - 2x_2 \leq 2$ → mi interessa il semipiano dove vale ≤ 2 perciò prendiamo la parte sopra la retta

$\vec{v}x = a$

$\vec{v}(1,-2)$ = vettore che punta verso il semipiano "$\geq a$"

2)

x_1	x_2
0	2
3	0

per $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ → prendo il semipiano sotto la retta

opposto al vettore

$\vec{v}(2,3)$ = vettore che punta verso il piano che soddisfa il vincolo

3) $x_2 \leq 1$ → prendo il semipiano sotto la retta

4) $x_1, x_2 \geq 0$ → regione per $x \geq 0$

$$C = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ x_1 = 2x_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2x_2 + 2) + 3x_2 = 6 \\ x_1 = 2x_2 + 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4x_2 + 4 + 3x_2 = 6 \\ x_1 = 2\left(\frac{2}{7}\right) + 2 \end{cases} = \begin{cases} \boxed{x_2 = 2/7} \\ \boxed{x_1 = 18/7} \end{cases}$$

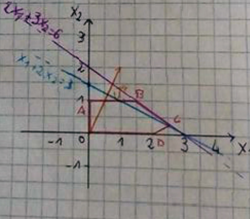
- Cerchiamo il punto di ottimo per $z = 3$

$x_1 + 2x_2 = z \qquad z = 3$

$x_1 + 2x_2 = 3$ → sto cercando il max z perciò prendo il semipiano sopra la retta → prendo la retta e mi sposto nella direzione del semipiano

$\vec{v}(1,2)$

x_1	x_2
0	3/2
3	0



→ Il punto B si trova nel semipiano che massimizza z quindi è il punto più adatto come risultato

MATRICI

EQ LINEARI E MATRICI

$$A x = b$$

A → MATRICE FORMATA DA $m \cdot n$

x → VARIABILE - VETTORE COLONNA

b → termine noto - VETTORE COLONNA

Per calcolare sistemi di equazioni cercheremo di ridurre $Ax = b$ in un sistema più semplice $A'x = b'$

es.
$$\begin{cases} E_1: -2x_2 + 1x_4 = 1 \\ E_2: 3x_1 + 1x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ E_3: 1x_1 + 1x_3 + 1x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

Per trasformare questa matrice bisogna porre:

$$A^i \leftarrow A^i - \frac{a_{i\mathcal{s}}}{a_{r\mathcal{s}}} A^r$$ dove "r" non deve essere nulla.

$$\begin{array}{c|c} & x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \begin{array}{c} E_1 \\ \Rightarrow E_2 \\ E_3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{0} & -2 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{3} & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow$$

scelgo un $a_{r\mathcal{s}} \neq 0$ dove r = riga, $\mathcal{s}$ = colonna

$a_{21} = 3$

1. $E_1 = E_1 - \frac{a_{11} \to 0}{a_{21} \to 3} E_2 \Rightarrow E_1 \leftarrow E_1 - 0E_2$
2. $E_3 = E_3 - \frac{a_{31}}{a_{21}} E_2 \Rightarrow E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{3} E_2$
3. $E_2 = \frac{1}{3} E_2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$2 - \frac{1}{3} \cdot 3$

Si possono scambiare le righe e invertiamo

$E_1 \leftrightarrow E_2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1/3 & 4/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

scelgo un nuovo $a_{r\mathcal{s}}$ nella colonna due

$a_{22} = -2$

⇒ voglio trasformare la colonna di x_2 in $(0\ 1\ 0)$ ⇒

$E_1 \leftarrow E_1 + \frac{1}{6} E_2$

$E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{6} E_2$

$E_2 \leftarrow -\frac{1}{2} E_2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 5/6 & 7/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{4/3} & 1/6 & 5/6 \end{array}\right]$$

⇒ vogliamo trasformare la colonna x_3 in $(0\ 0\ 1)$ ⇒

$a_{33} = \frac{4}{3}$

$E_1 \leftarrow E_1 + 1/4 E_3$

$E_3 \leftarrow E_3 \cdot \frac{3}{4}$

$E_2 \leftarrow$ rimane invariata perché c'è già '0'

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7/8 & 11/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 5/8 \end{array}\right]$$

esercizio:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ 0 + x_2 - \frac{3}{5}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

scelgo ars partendo da E_1 in alto a sinistra

$a_{11} = 1$

$\Rightarrow$ trasformo la colonna x_1 in $(1\,0\,0)$ $\Rightarrow$ $E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1$, $E_3 \leftarrow$ rimane invariata

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ scelgo ars da E_2 e trasformo x_2 in $(0\,1\,0)$

$a_{22} = -5$

$\Rightarrow$ $E_1 \leftarrow E_1 + \frac{2}{5}E_2$, $E_3 \leftarrow E_3 + \frac{1}{5}E_2$, $E_1 \leftarrow -\frac{1}{5}E_2$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right) \Rightarrow \text{RITRASFORMO}$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_3 = \frac{7}{5} \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 = -1/5 \\ \boxed{0 = \frac{1}{5}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ impossibile

esercizio:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

scegliamo ars da E_1

ars $= a_{11} = 1$

Dobbiamo trasformare x_1 in $(1\,0\,0)$ $\Rightarrow$ $E_2 = E_2 - 2E_1$, $E_3 = E_3 - 3E_1$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

scegliamo ars da E_2

$a_{22} = -5$

Dobbiamo trasformare x_2 in $(0\,1\,0)$ $\Rightarrow$ $E_1 \leftarrow E_1 + \frac{2}{5}E_2$, $E_3 \leftarrow E_3 - E_2$, $E_2 \leftarrow \frac{1}{5}E_2$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & - & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ abbiamo infinite possibilità

esercizio:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

ars $= a_{11} = 2$

$\Rightarrow x_1 = (1\,0\,0)$ $\Rightarrow$ E_2 = invariata, $E_3 = E_3 - \frac{1}{2}E_1$, $E_1 = \frac{1}{2}E_1$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 3/2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 7/2 \end{array}\right)$$

$a_{22} = 1$

$\Rightarrow x_2 = (0\,1\,0)$ $\Rightarrow$ $E_1 = E_1 - \frac{1}{2}E_2$, $E_3 = E_3 + \frac{1}{2}E_2$, E_1 = invariata

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{3/2} & 11/2 \end{array}\right)$$

$a_{33} = 3/2$

$\Rightarrow x_3 = (0\,0\,1)$ $\Rightarrow$ $E_1 \leftarrow E_1 - \frac{1}{3}E_3$, $E_3 \leftarrow E_3 \cdot \frac{2}{3}$, $E_2 \leftarrow E_2 + \frac{2}{3}E_3$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 11/3 \end{array}\right) =$$

$x_1 = 0$

$x_2 =$

$x_3 = \frac{11}{3}$

INVERSIONE DI MATRICI

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$A\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ => devo unire A alla matrice di GAUSS-JORDAN => $\begin{array}{c} A \quad\quad\quad I \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$ $a_{11} = 2$, $X_1 = (1\ 0\ 0)$

$E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{2}E_1$

$E_2 \leftarrow E_1 \cdot \frac{1}{2}$

=> $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ => $a_{22} = 1$, $X_2 = (0\ 1\ 0)$ => E_1 = invariata, $E_3 = E_3 - E_2$, E_2 = invariata

=> $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1/2} & -1/2 & -1 & 1 \end{array}\right)$ => $a_{33} = \frac{1}{2}$, $X_3 = (0\ 0\ 1)$ => $E_1 \leftarrow E_1 - E_3$, $E_2 \leftarrow E_2 + 2E_3$, $E_3 \leftarrow 2E_3$ => $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$

$I \quad\quad A^{-1}$

esercizio:

$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ => $\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ => $a_{11} = 1$, $X_1 = (1\ 0\ 0)$ ⇒ E_1 = invariata, $E_2 \leftarrow E_2 - E_1$, E_3 = invariata.

=> $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ => $a_{22} = -2$, $X_2 = (0\ 1\ 0)$ => $E_1 \leftarrow E_1 + E_2$, $E_3 \leftarrow E_3 + E_2$, $E_2 \leftarrow -\frac{1}{2}E_2$ => $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

↳ NON È SODDISFACIBILE E INVERTIBILE

esercizio:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ => $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ => $E_2 \to 1/2\, E_2$, $E_3 \to E_3 - 1/4\, E_2$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1/4 & 0 \end{array}\right)$

$E_1 \leftrightarrow E_2$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1/4 & 0 \end{array}\right)$ => $X_2 = 0\ 1\ 0$, $a_{22} = 1$; E_1 = INVARIATA, E_2 = INVARIATA, $E_3 = E_3 - 2E_2$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1/4 & 0 \end{array}\right)$ → INSODDISFACIBILE E INVERTIBILE

$$A\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow E_3 = E_3 - E_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$E_1 \leftrightarrow E_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow X_2 = 010$$

$a_{22} = 2$

$E_1 = E_1 - \frac{1}{2}E_2$

$E_2 = \frac{1}{2}E_2$

$E_3 = E_3 + \frac{1}{2}E_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3/2} & -1/2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow X_3 = 001$$

$E_1 = E_1 + 1/3\,E_3$

$E_2 = E_2 - 1/3\,E_3$

$E_3 = 2/3\,E_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

esercizio

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$X_1 = 100$

$E_2 = E_2 - \frac{1}{2}E_1$

$E_3 =$ INVARIATA

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$E_2 \leftrightarrow E_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow X_2 = 010$$

$a_{22} = -1$

$E_1 = E_1 + 1/2\,E_2$

$E_2 = -1E_2$

$E_3 =$ INVARIATA

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_3 = 2E_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

esercizio:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow X_1 = 100$$

$a_{11} = 2$

$E_3 = E_3 - \frac{1}{2}E_1$

$E_1 = \frac{1}{2}E_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{3/2} & 2 & 3/2 \end{array}\right) \Rightarrow X_3 = 001$$

$a_{33} = 3/2$

$E_1 = E_1 - 1/3\,E_3$

$E_2 = E_2 - 2E_3$

$E_3 = 2/3\,E_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 1 \end{array}\right)$$

INDIPENDENZE LINEARI

COMBINAZIONI LINEARI

Dato $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice ω = COMBINAZIONE LINEARE dei vettori di S se ci sono $x_1, x_2, \dots, x_k$ tali che

$$\vec{\omega} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_k \vec{v}_k$$

È detto $\mathcal{L}(S)$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari con $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$

NB Come riconosco che $\vec{\omega}$ è COMBINAZIONE de i vettori di S?
Risolvo un sistema lineare con matrice A_S formata dai vettori.

$A_S x = \vec{\omega}$ dove le colonne sono $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ecc..

La condizione è verificata se il sistema ammette soluzioni

NB I vettori di S sono detti LINEARMENTE INDIPENDENTI sse:

$$\sum_{j=1}^{k} v_j x_j = \vec{0}$$

ovvero se tutti gli x_j sono NULLI, ovvero se $A_S x = 0$, in questo caso avrò un unica soluzione ed è il vettore $\vec{\omega} = \vec{0}$

PROPRIETÀ:

1) $\sum_{i=1}^{k} x_i \vec{v}_i = \vec{0} \Rightarrow x_i = x_1, x_2, \dots, x_k = 0$

2) $\vec{0} \notin S$ e $\nexists \vec{v} \in S : \vec{v} \in \mathcal{L}(S \setminus \{\vec{v}_j\})$

3) $\forall \vec{\omega} \in \mathcal{L}(S) : \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{j} x_i \vec{v}_i$

NB I vettori di S sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se S è un INSIEME LIBERO, ovvero gode delle proprietà:

1) $0 \notin S$
2) $S' \subseteq S \rightarrow S'$ è libero
3) $S_1, S_2 \rightarrow S_1 \cap S_2$ è libero.

DIMOSTRAZIONE

1) $\vec{0} \notin S$ perchè dato $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ se, per assurdo, prendo $\vec{v}_1 = \vec{0}$ e combino $1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 \dots 0 \cdot \vec{v}_k = \vec{0}$ NON È POSSIBILE perchè non ho tutti gli $x_k = 0$.

2) $S' \subseteq S \Rightarrow S'$ è libero perchè dato $\left.\begin{matrix} S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \\ S' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{0} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 + 0\vec{v}_4 + \dots + 0\vec{v}_k$

3) $S_1, S_2 \Rightarrow S_1 \cap S_2$ è libero perchè intersezione è inclusione

9). CONTROLLIAMO CHE $\vec{w}$ È COMBINAZIONE LINEARE DI S, CONTROLLANDO SE AMMETTE SOLUZIONI E SE APPARTIENE A L(S)

$$S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\} \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix}1\\1/2\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

x_1, x_2, x_3

$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^T = (1, 1/2, -2)$

$$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1/2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & 0 & 1/2\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{2} & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1/2 & 1/2\\0 & 1 & 2 & -2\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l}E_2 = E_2 - 1/2 E_1\\E_1 = 1/2 E_1\end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1/2 & 1/2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & -2\end{array}\right) \Rightarrow E_2 \leftrightarrow E_3$$

(A = matrice dei coefficienti, ultima colonna $\vec{w}$)

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1/2 & 1/2\\0 & 1 & 2 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

→ Ha infinite soluzioni

VERIFICA

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1/2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1/2\\-2\end{pmatrix}$$

NB. Possono esserci infiniti coeff. di x che restituiscono $\vec{w}$

10). CONTROLLIAMO SE $\vec{w}$ È COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DI S. PER QUALI VETTORI DI $\vec{w}$ L'INSIEME CADE IN L(S), OVVERO AMMETTE SOLUZIONI?

- CONTROLLO SE $\vec{w} \in L(S)$: CON $\vec{w} = (1\ 0\ 0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{2} & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1/2 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l}E_2 = E_2 - 1/2 E_1\\E_1 = 1/2 E_1\end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1/2 & 1/2\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & -1/2\end{array}\right)$$

→ NON È SODDISFACIBILE quindi $\vec{w} \notin L(S)$

- CONTROLLO SE AMMETTE SOLUZIONI:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l}E_2 = E_2 - \frac{1}{2}E_1\\E_1 = \frac{1}{2}E_1\end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$E_2 \leftrightarrow E_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\-1/2 & 1 & 0\end{pmatrix} \times \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & 1 & w_1\\1 & 0 & 1/2 & w_2\\0 & 1 & 2 & w_3\end{array}\right) \Rightarrow \text{ESEGUO LA VERIFICA}$$

P = MATRICE DI TRASPOSIZIONE

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1/2 & 1/2\, w_1\\0 & 1 & 2 & w_3\\ \hline 0 & 0 & 0 & -1/2\, w_1 + w_2\end{array}\right) \Rightarrow L(S) = \left\{\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} \middle| -\frac{1}{2}w_1 + w_2 = 0\right\}$$

SONO COMPLANARI = stanno sullo stesso spazio perchè abbiamo detto che se sommo due vettori il risultato non esce da V (SOTTOSPAZIO)

PIANO IN $\mathbb{R}^3$

INDIPENDENZA LINEARE

Dato $S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\} \subseteq \mathbb{R}^n$, i vettori sono tra loro LINEARMENTE INDIPENDENTI se $\exists!$ soluzione ed è un vettore nullo

$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{k} x_i \vec{v_i} = \vec{0}}_{\text{SISTEMA DI EQ. LINEARI CON TERMINI NOTI NULLI}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_k = 0 \end{cases} \Rightarrow$ ovvero nullo

es. $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Mi chiedo se esistono coefficienti nulli tali che:

$$x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + x_3\vec{v_3} = \vec{0}$$

MATRICE $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} E_2 = E_2 - \frac{1}{2}E_1 \\ E_1 = \frac{1}{2}E_1 \end{array}$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_2 \leftrightarrow E_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ ABBIAMO INFINITE SOLUZIONI $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Dato che x_3 è variab. indipendente e le soluz. sono infinite allora i vett. NON SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI tra loro, quindi S NON È LIBERO

NB Se, in questo caso, le $\vec{v}$ fossero solo $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ i vettori sarebbero linearmente indipendenti perché:

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow$ HO UN'UNICA SOLUZIONE ED È 0.

SOTTOSPAZI IN $\mathbb{R}^n$ (FINITAMENTE GENERATI)

Un SOTTOSPAZIO in $\mathbb{R}^n$ è definito tramite il segno $V = L(S)$ con

$S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \ldots, \vec{v_k}\} \subseteq \mathbb{R}^n$

PROPRIETÀ DEI SOTTOSPAZI

1) Nell'insieme V, le operazioni di SOMMA e PRODOTTO rimangono all'interno del sottospazio.
   - Dati $\vec{u}, \vec{w}$, sono vettori, $\in V$ si ha che $(\vec{u} + \vec{w}) \in V$
   - Dati $a, \vec{w}$ con $\forall a \in \mathbb{R}$ e $\vec{w} \in V \Rightarrow a \cdot \vec{w} \in V$

NB HA OPERAZIONI INTERNE, PER QUESTO È CHIAMATO SOTTOSPAZIO

2) S è detto INSIEME GENERATORE del sottospazio V e i suoi elementi sono detti GENERATORI
3) S è chiamato BASE di V $\Leftrightarrow$ è anche INSIEME LIBERO
4) Tutte le BASI di V hanno la stessa CARDINALITÀ o DIMENSIONI DI V

es. $S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ → Dall'es precedente so già che NON È LIBERO

$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ → I vettori NON SONO Linearmente indipendenti, in quanto:

$\vec{v_3} = \frac{1}{2}\vec{v_1} + 2v_2$ = quindi è COMBINAZIONE LINEARE di v_1 e v_2

- BASE di $V = L(S)$ se: 1) $L(B) = V$
  2) B è un insieme libero → se B fosse NON libero avrei degli elementi ridondanti

· Siccome $\vec{v_3}$ è elemento ridondante si può scartare, e possiamo utilizzare v_1 e v_2 come Basi di V.

ESERCIZIO: TROVA LE BASI DI V dato $S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ con:

$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \{\vec{v_1}, \vec{v_3}\}$

- Incominciamo prendendo $\vec{v_1}$ come base (perchè NON è NULLO).
- Controlliamo che $\vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$ non siano combinazioni lineari di $\vec{v_1}$:

$\exists\, x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇒ sì, se poniamo $x_1 = -1$ quindi $\vec{v_2}$ è COMB LINEARE e viene scartato.

$\exists\, x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⇒ NO, quindi $\vec{v_3}$ viene inserito nelle basi di V

- Controlliamo che l'ultimo vettore, $\vec{v_4}$, non sia combinazione lineare di v_1 e v_3 (ovvero le basi di V).

$\exists\, x_1, x_3 \mid x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ -x_1 + x_3 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ ⇒ Sì, quindi $\vec{v_4}$ è combinazione lineare di v_1 e v_3 e viene scartato dalle basi di V

NB Si scarta un vettore quando questo è COMBINAZIONE LINEARE del vettore/i già inseriti in B!

NB A seconda del primo vettore scelto come base, lo spazio V può avere PIÙ BASI DIFFERENTI

TEOREMA $V = L(B)$ dove B è base di V

$\vec{w} \in V - \{\vec{0}\} \to \exists!\, \vec{v} \in B \mid [(B \cup \{\vec{w}\}) - \{\vec{v}\}]$ è base di B.

DIMOSTRAZIONE Lo spazio V è COMBINAZIONE LINEARE dei vettori di B

⇒ $V = L(B)$, ma è anche COMBINAZIONE LINEARE di B e $\vec{w}$

⇒ $V = L(\underbrace{B \cup \{\vec{w}\}}_{})$

S = INSIEME GENERATORE

- MA così, usando $\vec{w}$ come vettore primo, dovremo toglierne un'altro dalle basi, in quanto avrei un insieme B NON LIBERO

- Supponiamo di scartare un certo $\vec{v_j}$; (HA):
- per assurdo, scartiamo due vettori $\vec{v_j}, \vec{v_i}$ con $i > j$, avremo

$$\vec{v_j} = x_0 \vec{w} + \sum_{r=1}^{j-1} x_r \vec{v_r} \quad \text{con } x_0 \neq 0$$

$$\vec{v_i} = y_0 \vec{w} + \sum_{r=1}^{j-1} y_r \vec{v_r} + \sum_{r=j+1}^{i-1} y_r \vec{v_r} \quad \text{con } y_0 \neq 0$$

- Isolando $\vec{w}$, otterrei:

$$\vec{w} = \sum_{r=1}^{j-1} \left(-\frac{x_r}{x_0}\right) \vec{v_r} + \frac{1}{x_0} \vec{v_j}$$

$$\vec{w} = \sum_{r=1}^{j-1} \left(-\frac{y_r}{y_0}\right) \vec{v_r} + \sum_{r=j+1}^{i-1} \left(-\frac{y_r}{y_0}\right) \vec{v_r} + \frac{1}{y_0} \vec{v_i}$$

- Ho trovato due combinazioni lineari che, con coefficienti diversi, mi danno come risultato $\vec{w}$. Questo significa che v_j e v_i non erano linearmente indipendenti tra loro.
- Arrivo ad un assurdo, in quanto, se prendo $S = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\}$ linearmente indipendenti, allora:
  1) $\sum_{i=1}^{k} x_i \vec{v_i} = \vec{0}$ in quanto i coeff. devono essere nulli
  2) $\nexists \vec{v} \in S \mid \vec{v} = L(S - \vec{v})$
  3) $\forall \vec{w} \in L(S)$ si esprime in modo unico.

TEOREMA Prese due basi B, B' di $V \Rightarrow |B| = |B'|$

DIMOSTRAZIONE Dati: $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_p}\}$, $B' = \{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \dots, \vec{w_q}\}$ con $p \neq q$

trasferisco $\vec{w_1}$ in B:

- Se $p < q$: $\{\vec{w_1}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_p}\}$ $\Rightarrow$ utilizzando il th precedente, il metodo scarterà una base $\vec{v_p}$

$$\Downarrow$$

$$\{\vec{w_1}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_{p-1}}\}$$

- prendo la nuova B e gli trasferisco di nuovo $\vec{w_2}$

$$\{\vec{w_2}, \vec{w_1}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_{p-1}}\}$$ $\Rightarrow$ di nuovo verrà scartato una $\vec{v_p}$

$$\Downarrow$$

$$\{\vec{w_2}, \vec{w_1}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_{p-2}}\}$$

- Continuo il procedimento per p volte, fino ad ottenere $B = \{w_p, \dots, w_3, w_2, w_1\}$ come nuovo insieme B.

TEOREMI
PER SIMPLESSO

PROGRAMMI A VARIABILI CONTINUE

FORMA STANDARD = Ogni programma lineare generico può essere sempre trasformato in STANDARD.

$$\max z: \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \quad \text{ovvero} \quad \max z = \{c\ x : Ax = b,\ x \geq 0\}$$

soggetto a $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, \dots, n \quad x_1, \dots, x_m \geq 0$

TRASFORMAZIONI:

1) DA MIN A MAX (invertire il segno)

$$\min z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \iff \max z = -\sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

2) ELIMINAZIONE VARIABILI LIBERE (differenza di due numeri)

x_j LIBERA $\iff x_j = x_j^+ - x_j^-$ con $x_j^+, x_j^- \geq 0$

3) ELIMINAZIONE VARIABILI NEGATIVE

$x_j \leq 0 \iff x_j = -\bar{x}_j$, con $\bar{x}_j \geq 0$

4) ELIMINAZIONE DI DISUGUAGLIANZA

1) $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i \iff \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + y_i = b_i$ con $y_i \geq 0$ → PRIMO MEMBRO NON PUÒ MAI DIVENTARE PIÙ GRANDE DEL TERMINE NOTO

2) $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq b_i \iff \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j - y_i = b_i$ con $y_i \geq 0$ → IL 1° MEMBRO NON PUÒ MAI ESSERE PIÙ PICCOLO DI b_i

La variabile y_i modella la differenza tra il termine noto e il primo membro.

Es.) $\min z = 4x_1 + 5x_2 - x_3$ → usiamo il primo passo per trasformarla in $\max z$.

$\max z = -4x - 5x_2 + x_3$

vincoli
$2x_1 + x_3 \geq 7$ (4)
$x_1 + x_2 \leq 16$
$x_1 + 2x_2 = 8$
$x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 0$ (3), x_3 libera (2)

1) $\min z = 4x_1 + 5x_2 - x_3 \longleftrightarrow \max z = -4x_1 - 5x_2 + x_3 \rightarrow x_3^+ - x_3^-$

2) x_3 LIBERA = CAMBIO CREANDO DUE VARIABILI x_3^+, x_3^- E PONGO

$x_3 = x_3^+ - x_3^-$, POI SOSTITUISCO

$\max z = -4x_1 - 5x_2 + (x_3^+ - x_3^-)$

$2x_1 + (x_3^+ - x_3^-) \geq 7$

3) $x_2 \leq 0$ LA VARIABILE è ≤ 0 quindi cambio VARIABILE e SOSTITUISCO nelle DISUGUAGLIANZE

$x_2 \leq 0 \rightarrow -\tilde{x}_2 \geq 0$

$\max z = -4x_1 - 5(-\tilde{x}_2) + (x_3^+ - x_3^-)$

$x_1 + (-\tilde{x}_2) \leq 16$

$x_1 + 2(-\tilde{x}_2) = 8$

$x_2 \geq 0$

4) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + (x_3^+ - x_3^-) \geq 7 \\ x_1 + (-\tilde{x}_2) \leq 16 \end{array}\right\}$ CAMBIO LE DISUGUAGLIANZE creando una NUOVA VARIABILE POSITIVA $x_n \geq 0$ PER OGNI DISUGUAGLIANZA

$2x_1 + (x_3^+ - x_3^-) - x_4 = 7$

$x_1 - \tilde{x}_2 + x_5 = 16$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

I segni delle nuove variabili sono:

$-x_n$ se $\geq$

$+x_n$ se $\leq$

SOLUZIONI DI VERTICE

TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

Se il programma lineare ammette soluzioni, allora almeno una di esse è un vertice della REGIONE AMMISSIBILE

$S_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$

NB INSIEME CONVESSI: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è CONVESSO se: $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in S$ tutte le combinazioni lineari CONVESSE di $\vec{u}, \vec{v}$ sono elementi di S, con $\vec{u} \neq \vec{v}$

Se coefficienti sono ≥ 0 e sommano 1, ovvero

$x = \alpha u + (1-\alpha) v$ con $\alpha \in \{0,1\}$

NB Dato S convesso, un punto $x \in S$ è VERTICE di S, SE NON ESISTONO $\vec{u}, \vec{v} \in S$ con $\vec{u} \neq \vec{v}$ tali che $x = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

NB I VERTICI sono punti che portano il segmento ad uscire dall'insieme \ regione ammissibile.

DIMOSTRAZIONE $\max z = \{ \vec{c}^T \vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b} \text{ con } \vec{x} \geq \vec{0} \}$

$$S_a = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq 0 \}$$

Supponiamo che esista un punto di ottimo $\vec{x}^*$, per cui $z = \vec{c}^T \vec{x}^*$:

1). se $\vec{x}^*$ fosse il vettore $\vec{0}$ (0,0), allora si può dire che x^* è VERTICE

es.

se, per ASSURDO, abbiamo $\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \vec{0}$.
allora $\frac{1}{2}\vec{u_i} + \frac{1}{2}\vec{v_i} = \vec{0}$ con $\vec{u_i}, \vec{v_i} \geq 0$
dovrei avere $\vec{u_i}, \vec{v_i} = \vec{0}$ e quindi vale la tesi.

2). se $\vec{x}^* \neq \vec{0}$, allora supponiamo che le sue componenti positive siano $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k > 0$ e $x_{k+1}, \ldots, x_{k+m} \neq 0$, avremo:

CASO 1 = $\vec{x}^*$ NON È NULLO MA È ANCHE VERTICE allora il teorema vale

CASO 2 = $\vec{x}^*$ NON È VERTICE, allora bisogna seguire una procedura.
Si può dimostrare che è sempre possibile generare un ottimo che ha una componente in più nulla
⇓
Continuo ad aggiungere componenti nulle fino a quando non ottengo un vertice
(questo è possibile fino a k volte)

Dato che $\vec{x}^*$ NON È VERTICE allora è PUNTO MEDIO di $\vec{u}, \vec{v} \in S_a$ tale che: $\vec{x}^* = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$.

questi $\vec{u}, \vec{v}$ hanno caratteristiche simili a $\vec{x}^*$, per cui deve essere vero che:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_i} = 0 \\ \vec{v_i} = 0 \end{array}\right\} \text{ con } i = k+1 \text{ — } m$$

=> vuol dire che la componente i-esima di $\vec{x}^*$ deve essere $\frac{1}{2}\vec{u_i} + \frac{1}{2}\vec{v_i}$

perchè se $\vec{x}^* = \vec{0}$ allora $u, v = 0$

⇓

$$\vec{c}^T \vec{u} = \vec{c}^T \vec{v} = \vec{x}^*$$

TEOREMA $\vec{c}^T \vec{u} = \vec{c}^T \vec{v} = \vec{x}^*$

DIMOSTRAZIONE Se $z^* = \vec{c}^T \vec{x}^*$ dove z^* è il valore della funzione obiettivo calcolato nel suo punto di ottimo, allora:

$$z^* = \vec{c}^T \vec{x}^* = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\vec{c}^T \vec{u}}_{\leq z^*}}_{\leq \frac{1}{2} z^*} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\vec{c}^T \vec{v}}_{\leq z^*}}_{\leq \frac{1}{2} z^*}$$

=> MA SE u, v NON SONO OTTIMI allora

$$z^* < z^*$$

ed è ASSURDO

Per trovare una NUOVA SOLUZIONE OTTIMA x^* genero un vettore $\vec{y} \Rightarrow \vec{x}^* + \varepsilon\vec{y}$ dove $\vec{y} = \vec{u} - \vec{v}$ (almeno una componente è strettamente $<0 \to y_i < 0$)
per cui $\vec{x}' = \vec{x}^* + \varepsilon\vec{y} \in S_a$ c'è bisogno che:

$$\begin{cases} ① \; A\vec{x}' = \boxed{\vec{b}} \\ ② \; \vec{x}' \geq \vec{0} \end{cases} \Rightarrow$$ vincoli che devono essere soddisfatti, di modo che $x' \in$ alla regione ammissibile

① $A\vec{x}' \Rightarrow A(\vec{x}^* + \varepsilon\vec{y}) \to \underbrace{A\vec{x}^*}_{\text{vettore}} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{numero}} A\vec{y} \Rightarrow A\vec{x}^* + \varepsilon A(\vec{u} - \vec{v})$

$\Rightarrow \underbrace{A\vec{x}^*}_{\vec{b}} + (\varepsilon A\vec{u} - \varepsilon A\vec{v}) \Rightarrow \vec{b} + \varepsilon \underbrace{A\vec{u}}_{\vec{b}} - \varepsilon \underbrace{A\vec{v}}_{\vec{b}}$ → $A\vec{u}$, $A\vec{v}$ sono $= \vec{b}$ in quanto entrambe $\in S_a$

$\Rightarrow$ per cui si ha che $Ax' = \vec{b}$

② $\vec{x}' \geq 0$ → prendiamo la *i-esima* componente ottenuta ponendolo:

$$x_i' = x_i^* + \varepsilon y_i \quad \text{con } \varepsilon > 0$$

$\Downarrow$

Si ottengono casi diversi:

1) se $i = k+1 \_\_ n$ allora si ha che $x^* = 0$ e $\vec{y} = \vec{0}$ per cui $0 + \varepsilon 0 = 0$

2) se $i = 1 \_\_ k$ ottengo di nuovo due casi:

a.) se $y_i \geq 0$ allora ho che $x_i' \geq 0$ perché ε e y_i sono ≥ 0

b.) se $y_i < 0$ ho che $x_i' < 0$

Il caso b. deve essere controllato in quanto il segno dipende dal 'ε':
- se ε è abbastanza piccolo la componente è POSITIVA.
- se ε è grande la componente può diventare negativa, quindi devo stabilire un limite di ε in modo tale che y_i rimanga

$\Downarrow$

Devo avere: $x_i + \varepsilon y_i \geq 0 \quad \forall i$ tale che $y_i < 0$

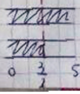
$\varepsilon \leq \left(-\dfrac{x_i}{y_i}\right)$ con $y_i < 0$ → num strettamente positivo

quindi scelgo ε come $\min\left\{-\dfrac{x_i}{y_i} \;\middle|\; y_i < 0\right\}$, fissando questo ε succede che almeno una delle componenti si annullerà. (ε deve rimanere piccolo)

$$x_i' = x_i^* + \varepsilon y_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1 \_\_ k\text{-}1$$

quando x_i' arriverà ad essere x_k' questo sarà $= 0$ perché si azzera

ES: $C: 5 - \varepsilon \geq 0$ dove $x^* = 5$, $y = -1$ $\Rightarrow \varepsilon \leq 5$ | $\varepsilon > 0$
$C: 3 - 2\varepsilon \geq 0$ dove $x^* = 3$, $y = -2$ $\Rightarrow \varepsilon \leq 3/2$ | $\varepsilon > 0$



} ε cade tra $0 < \varepsilon <$

Per sapere se il punto trovato è ottimo: $\vec{c}^T \vec{x}^* = \vec{c}^T (\vec{x}^* + \varepsilon \vec{y})$

$\vec{c}^T \vec{x}^* = \vec{c}^T \vec{x}^* + \vec{c}\, \varepsilon \vec{y} \Rightarrow \vec{c}^T \vec{x} + \vec{c}(\varepsilon)(u - v) \Rightarrow \vec{c}^T \vec{x}^* + \varepsilon(\underbrace{\vec{c}u}_{0} - \underbrace{\vec{c}v}_{0})$

$\Rightarrow$ ricavo che $\vec{c}^T \vec{x}' = \vec{c}^T \vec{x}^* + \varepsilon(0)$ quindi dividendo per c^T

$\Rightarrow$ $\vec{x}' = \vec{x}^*$

$\Rightarrow$

ESERCIZIO: TRASFORMA IL PROGRAMMA IN FORMA STANDARD

$\max z = x_1 + x_2$

Sog. a: $x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

La retta z la sposto fino a quando i suoi valori non escono dalla regione ammissibile

vincoli: $x_1 + x_2 = 4$ con $\vec{v}(1,1)$

DEVO PRENDERE LA PARTE OPPOSTA AL VETTORE, quindi sotto la retta

x_1	x_2
4	0
0	4

STANDARD: $\max z\ x_1 + x_2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \rightarrow x_3 = 0$ valore sulla retta

$x_1 + x_4 = 3 \rightarrow x_4 = 0$ valore sulla retta

$x_2 + x_5 = 3 \rightarrow x_5 = 0$ valore sulla retta

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

- se abbiamo un $x^* = (2\ 2\ 0\ 1\ 1)$ se azzeriamo x_3, x_4, x_5 otteniamo $x^* = (2,2)$
- se questo x^* NON È VERTICE allora $\exists\ u, v$ ottimi che ci permettono di trovare un'altra soluzione x':

$\vec{u} = \left(\frac{11}{4}\ \frac{5}{4}\ 0\ \frac{1}{4}\ \frac{7}{4}\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ 0\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \vec{y} = (\vec{u} - \vec{v}) = \left(\frac{5}{4}\ -\frac{5}{4}\ 0\ -\frac{5}{4}\ \frac{5}{4}\right)$

prendo la direzione $\vec{y}$ data da $(\vec{u} - \vec{v})$

Dopo aver ottenuto $\vec{y}$ cerco ε tale che $x^* + \varepsilon\vec{y}$ sostituendo x^* e $\vec{y}$

$$x^* + \varepsilon\vec{y} \begin{cases} 2 + \frac{5}{4}\varepsilon & \rightarrow \text{RIMANE POSITIVO} \\ 2 + (-\frac{5}{4})\varepsilon & \longrightarrow 2 - \frac{5}{4}\varepsilon \geq 0 \Rightarrow \varepsilon \leq 8/5 \\ 0 + 0\varepsilon & \rightarrow \text{NULLO} \\ 1 + (-5/4)\varepsilon & \longrightarrow 1 - \frac{5}{4}\varepsilon \geq 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon \leq 4/5} \\ 1 + \frac{5}{4}\varepsilon & \rightarrow \text{RIMANE POSITIVO} \end{cases}$$

DEVO SCEGLIERE ε tale che $y_i < 0$

SIMPLESSO

LEMMA 2. $x \in S_a = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b},\ x \geq 0\}$. x è VERTICE di S_a $\Leftrightarrow$ le colonne di A in $\{A_j,\ x_j > 0\}$ sono linearmente indipendenti, dove $x_j > 0$ sono i coefficienti > 0 della rispettiva colonna j.

esempio:

A è il punto: A $\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ $\Rightarrow$ QUESTI VETTORI FORMANO UN S libero? No, perchè non sono tutti linearmente indipendenti, per cui il punto A NON è punto di vertice.

B è il punto: $B \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ B È VERTICE, OVVERO FORMA UN S libero? Si, perchè i vettori sono linearmente indipendenti

INSIEMI DI VARIABILI DI BASE

$$\max \{ z = \vec{c}^T \vec{x} = A\vec{x} = \vec{b},\ \vec{x} \geq 0 \}$$

Data una base $B = \{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}\}$ insieme di VARIABILI DI BASE

$\Leftrightarrow$ le colonne $A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jm}$ sono linearmente indipendenti

- Con la base B formiamo una MATRICE DI BASE A_B dove le colonne formano una matrice quadrata e sono INVERTIBILI perchè linearmente indipendenti.
- Con le variabili NON linearmente indipendenti formiamo un insieme N chiamat insieme delle VARIABILI FUORI BASE che vengono poste a 2° membro nel sistema.

$N = \{x_j, \dots, x_m\}$, con questo insieme formiamo una matrice A_N, le cui colonne vengono poste a destra della matrice A

SOLUZIONE DI BASE

Data la base B, la soluzione di base del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ è l'UNICA soluzione $x = x_B$ dove $x_N = 0$.

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow A_B x_B + A_N x_N = \vec{b}$$

$$x_B = A_B^{-1}\vec{b} - A_B^{-1} A_N x_m$$

$$\text{se } x_m = 0 \Rightarrow x_B = A_B^{-1}\vec{b}$$

ESEMPIO: $\max z = 8x_1 + 3x_2$

sogg. a: $4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10$

$4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15$

$x_2 + x_5 = 1$

- Uniamo i vincoli in un sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\ x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

- trasformiamo il sistema in una matrice A:

$$A = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

=> tiro fuori x_1, x_4, x_5 sono insiemi di soluzioni di base?

$$A_B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

= noto che i vettori sono linearmente indipendenti e quindi formano un S libero => $B = \{x_1, x_4, x_5\}$

- Dato che le colonne x_1, x_4, x_5 formano A_B, posso spezzare A in $A_B \, A_N$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 4 & 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \\ 4 & 1 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

=> prendiamo $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_B^{-1} A = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 5/4 & 1/4 & 10/4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5/2 - 5/4\, x_2 - x_3 \\ x_4 = 5 - 5x_2 + x_3 \\ x_5 = 1 - x_2 \end{cases}$$

=> SOLUZIONE AMMISSIBILE

$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A_B \vec{x_B} + A_N \vec{x_N} = \vec{b} \Rightarrow A_B^{-1}(A_B \vec{x_B} + A_N \vec{x_N}) = \vec{b}\, A_B^{-1}$

A_B^{-1} = matrice che applica GAUSS JORDAN => $\boxed{\vec{x_B} = A_B^{-1}\vec{b} - A_B^{-1} A_N \vec{x_N}}$

- Soluzioni che abbiano tutte le $x \geq 0$, se io prendo x_1, x_4, x_5 l'unica soluzione di base sarà quella che ha $x_2, x_3 \geq 0$, infatti se prendo x_1, x_4, x_5 e poi pongo $x_2, x_3 = 0$, la soluzione ammissibile viola i vincoli della NON NEGATIVITÀ ed esce da Sa.

NB Sia $\bar{x} \in S_a \rightarrow \bar{x}$ è soluzione ammissibile di base $\Leftrightarrow \bar{x}$ è vertice di S_a

- Siccome $\max z = 8x_1 + 3x_2$ per trovare la soluz. ottima prendo x_1 dal sistema lineare:

$$z = 8\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{4}x_2 - x_3\right) + 3x_2 \rightarrow z = 20 - 7x_2 - 2x_3$$

=> riuscito così so già che il valore di z è 20 perché pongo le variabili fuori base $x_2, x_3 = 0$

- Per trovare una qualsiasi altra soluzione di base devo porre $x_2, x_3 \geq 0$, quindi prendo un $\bar{x} = (x_1 \ldots x_5)$ se $\in S_a$ con $x_2, x_3 \geq 0$

$$z' = 20 - 7x_2' - 2x_3'$$

quindi se faccio variare x_2, x_3 so che le altre soluzioni non possono superare 20, ovvero l'ottimo del problema.

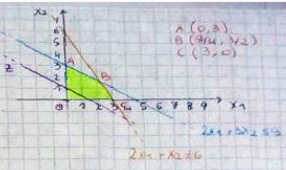
ESERCIZIO: $\max z = 3x_1 + 4x_2$

soggetto a: $2x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 + 3x_2 \leq 9$

$x_1, x_2 \geq 0$

$z = 4 \to 4 = 3x_1 + 4x_2$



- ci interessano le soluzioni sulla retta

FORMA STANDARD: $\max z = 3x_1 + 4x_2$

soggetto a: $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$

$x_1, \_\_\_, x_4 \geq 0$

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow B = \{x_3, x_4\}$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \text{vincoli} = \begin{cases} x_3 = -2x_1 - x_2 + 6 \\ x_4 = -2x_1 - 3x_2 + 9 \end{cases}$$

$\max z = 3x_1 + 4x_2 \Rightarrow$ Siccome non abbiamo variabili $x_1, x_2 = 0$ il punto della fx obbiettivo è $(0,0)$

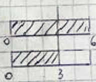
Per cercare di migliorare la soluzione, nel $\max z = 3x_1 + 4x_2$ con $x_1, x_2 \geq 0$ scelgo un x_2 e lo pongo $\varepsilon > 0$ mentre $x_1 = 0$ e sostituisco:

$$\begin{cases} x_3 = 6 - 0 - \varepsilon & \geq 0 \\ x_4 = 9 - 0 - 3\varepsilon & \geq 0 \\ x_2 = \varepsilon & \geq 0 \\ x_1 = 0 & \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Soluzioni $\in S_a$ che soddisfano i vincoli, valgono quando $z = 0 + 4\varepsilon$ se $\varepsilon \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 6 - \varepsilon \geq 0 \to \varepsilon \leq 6 \\ 9 - 3\varepsilon \geq 0 \to \varepsilon \leq 3 \end{array}\right\}$$



$\Rightarrow$ prendo le ε che cadono in entrambi i valori quindi $\varepsilon = 3$

Adesso attuiamo un cambio di base partendo da x_2

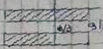
$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & \boxed{3} & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4/3 & 0 & 1 & -1/3 & 3 \\ 2/3 & 1 & 0 & 1/3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

sistema di vincoli quando $B = \{x_2, x_3\}$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 3 - 4/3\,x_1 + 1/3\,x_4 \\ x_2 = 3 - 2/3\,x_1 + (-1/3)\,x_4 \end{array}\right\} z = 3x_1 + 4x_2 \Rightarrow 3x_1 + 4(3 - 2/3\,x_1 - 1/3\,x_4)$$

- È possibile migliorarlo ulteriormente? Controllo le v. fuori base.
prendo x_1 e lo pongo $= \varepsilon$, mentre $x_4 = 0$ con $z = 12 + \frac{1}{3}\varepsilon$

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \frac{2}{3}\varepsilon & \geq 0 \rightarrow \varepsilon \leq 4/3 \\ x_3 = 3 - \frac{4}{3}\varepsilon & \geq 0 \rightarrow \varepsilon \leq 9/4 \\ x_1 = \varepsilon & \geq 0 \rightarrow x_1 = 4/3 \\ x_4 = 0 & \geq 0 \end{cases}$$



$\varepsilon = \frac{4}{3}$

PUNTO B

$$A\begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 1 & -1/3 & | & 3 \\ 2/3 & 1 & 0 & 1/3 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{riduco } x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 & -1/4 & | & 9/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & | & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 9/4 - 3/4\,x_3 + 1/4\,x_4 \\ x_2 &= 3/2 + 1/2\,x_3 - 1/2\,x_4 \end{aligned}\right\} z = 3x_1 + 4x_2$$

$$z = 3\left(\frac{9}{4} - \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right) + 4\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) \Rightarrow \frac{27}{4} - \frac{9}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 + 6 + 2x_3 - 2x_4$$

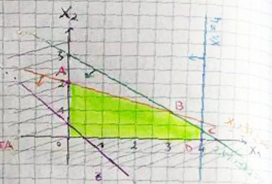
$$\Rightarrow z = +\frac{27}{4} + 6 = \frac{27+24}{4} = \frac{51}{4}$$

ESERCIZIO ALG SIMPLESSO

max $x_1 + x_2$

sogg a
$2x_1 + 3x_2 \leq 9$
$x_1 + 3x_2 \leq 6$
$x_1 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

Il punto "C" è il punto di ottimo perchè è l'ultimo punto di Sa raccolto dalla RETTA



FORMA STANDARD

max $x_1 + x_2$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_5 &= 4 \\ x_1, \_\_, x_5 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{prendo } x_3, x_4, x_5 \text{ come base } B = \{x_3, x_4, x_5\}$$

$$A\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & | & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & | & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & x_2 & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= 9 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 &= 6 - x_1 - 3x_2 \\ x_5 &= 4 - x_1 \end{aligned}$$

Id

Una delle soluzioni è max $z = 0 + x_1 + x_2$, e ci interessa la soluzione dove $x_1, x_2 = 0$ e $x_3 = 9$, $x_4 = 6$, $x_5 = 4$.

Ma max $z = x_1 + x_2$ NON È SOLUZ. OTTIMA in quanto $x_1, x_2 \geq 0$ allora prendo "x_1" e lo faccio crescere e lo pongo come soluzione di base, mentre lascio x_2.

$B = \{x_1, x_3, x_4\}$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \cdot & 3 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ \cdot & 3 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$ faccio il rapporto tra x_1 e b

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b & \\ \hline x_3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 9 & 9/2 \\ x_4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 6 & 6/1 \\ x_5 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4/1 \end{array}$$

$\uparrow$ ... $\downarrow$ ESCE

…il rapporto più piccolo è la riga in cui si trova $\Rightarrow$ La variabile che esce è x_5

Applico GAUSS-JORDAN per introdurre x_1 in var. di base $\Rightarrow$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline x_3 & 0 & 3 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ x_4 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

$x_3 = 1 - 3x_2 + 2x_5$
$x_4 = 2 - 3x_2 + x_5$
$\boxed{x_1 = 4 - x_5}$

- Sostituisco x_1 nella fx max: $\Rightarrow$ $\max z = (4 - x_5) + x_2$

Ricomincio l'algoritmo perchè $\max z = 4 - x_5 + x_2$ NON È OTTIMO in quanto $x_2 \geq 0$, quindi prendo x_2 e lo faccio entrare in B

$$\begin{array}{c|ccccc|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b & \\ \hline x_3 & 0 & \boxed{3} & 1 & 0 & -2 & 1 & 1/3 \\ x_4 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2/3 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ con il rapporto so che x_3 esce ed entra x_2 $\Rightarrow$ Uso GAUSS-JORDAN su x_2 per trasf. in base

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline x_2 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1/3 \\ x_4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x_2 = 1/3 - 1/3x_3 + 2/3x_5}$
$x_4 = 1 + x_3 - x_5$
$x_1 = 4 - x_5$

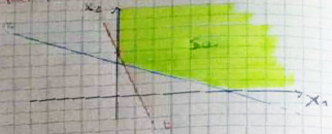
$\Rightarrow$ sostituisco $x_1 + x_2$

$$\max z = 4 - x_5 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_5\right) = 4 - x_5 + \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 \rightarrow \frac{13}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5$$

$x_3, x_5 \leq 0$ quindi soluzione ottima

ESERCIZIO ALG. SIMPLESSO

TECNICA DELLE BASI AMMISSIBILI



$\max z = 2x_1 + 3x_2$

$r: \; x_1 + 2x_2 \geq 6$

$t: \; 3x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

STANDARD: $z = 2x_1 + 3x_2$

$r: \; x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$

$t: \; 3x_1 + x_2 - x_4 = 4$

$x_1, \dots, x_4 \geq 0$

→ NON C'È BASE AMMISSIBILE perché $x_3, x_4 \leq 0$

1) Si crea un programma ausiliario:

$\min z = S_1 + S_2$ * → Si aggiungono S_n quante sono le variabili $x_n \leq 0$

sogg a: $x_1 + 2x_2 - x_3 + S_1 = 6$

$3x_1 + x_2 - x_4 + S_2 = 4$

⇓

Ho l'ottimo = 0 se e solo se il programma iniziale ha soluzione

2) Teniamo S_1, S_2 come variabili di base:

$S_1 = 6 - x_1 - 2x_2 + x_3$

$+$

$S_2 = 4 - 3x_1 - x_2 + x_4$

$= \max z = -10 + 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4$ → con INVERSIONE di segno

VARIABILE CON COSTO RIDOTTO PIÙ ALTO quindi entra x_1

3) Faccio i rapporti di S_1, S_2 con x_1:

$S_1 = 6/4$

$S_2 = 4/4$ → ESCE S_2

4) Isolo x_1 nell'eq con la S che esce, (in questo caso S_2), e sostituisco nell'eq della variabile che non esce e in "max z".

- $x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4$
- $S_1 = 6 - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4\right) = \frac{14}{3} + \frac{1}{3}S_2 - \frac{5}{3}x_2 + x_3 - \frac{1}{3}x_4$

* $-\max z = -S_1 - S_2$ → INVERTO perché "MAX z"

$= -\frac{14}{3} + \frac{5}{3}x_2 - x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}S_2 - S_2$

ENTRA

⇓

NON È OTTIMO perché $x_2, x_4 \geq 0$

5) Isolo la nuova variabile di Base da "max z" e la sostituisco in x_1

- $-\frac{5}{3}x_2 = -\frac{14}{3} - \frac{4}{3}S_2 - x_3 + \frac{1}{3}x_4 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{14}{5} + \frac{4}{5}S_2 + \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4}$
- $x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}S_2 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}S_2 + \frac{1}{5}S_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4$
- $\max z = 0 - S_2 - S_1 \Rightarrow$ TOLGO S_1, S_2 da $x_1,\ \frac{5}{2}x_2 - 1 - S_2 - 2S_1 - 2x_3$

$-\frac{14}{3} + \frac{5}{3}\left(\frac{14}{5} + \frac{4}{5}S_2 + \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4\right) - x_3 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x_1 - 1 - S_2 - 2S_1 - 2x_3\right)$

$-\frac{1}{3}S_2 - S_2$

$\left(\cancel{-\frac{14}{3} + \frac{14}{3}} + \frac{4}{3}S_2 + x_3 - \frac{1}{3}x_4 - x_3 + \frac{5}{6}x_1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}S_2 - \frac{2}{3}S_1 - \frac{2}{3}x_3\right)$

$\frac{4}{3} - \frac{1}{3} = S_2$