MATRICE ASSOCIATA A UN' APPLICAZIONE LINEARE

V, W spazi vett. sullo stesso campo K

$f: V \longrightarrow W$ è un' appl. lineare se

- $f(\bar{v}+\bar{w}) = f(\bar{v}) + f(\bar{w}) \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in V$
- $f(\lambda \bar{v}) = \lambda f(\bar{v}) \quad \forall \bar{v} \in V$

In particolare se $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ è una base di V allora ogni $\bar{v}$ si scrive in modo unico come c.l. degli elementi di $\mathcal{B}$

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

$$f(\bar{v}) = \lambda_1 f(\bar{v}_1) + \lambda_2 f(\bar{v}_2) + \dots + \lambda_n f(\bar{v}_n)$$

$\Rightarrow$ f è completamente determinato dai suoi valori su $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$.

Sia $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ base di V

e sia $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ base di W

$\forall i = 1, \dots, n \quad f(\bar{v}_i) \in W$ quindi $f(\bar{v}_i)$ è c.l. degli elementi di $\mathcal{C}$:

$$f(\bar{v}_1) = a_{11} \bar{w}_1 + a_{21} \bar{w}_2 + \dots + a_{m1} \bar{w}_m$$

$$f(\bar{v}_2) = a_{12} \bar{w}_1 + a_{22} \bar{w}_2 + \dots + a_{m2} \bar{w}_m$$

$$\vdots$$

$$f(\bar{v}_n) = a_{1n} \bar{w}_1 + a_{2n} \bar{w}_2 + \dots + a_{mn} w_m$$

Posso considerare la matrice $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

coordinate di $f(\bar{v}_1)$ $f(\bar{v}_2)$ ... $f(\bar{v}_n)$ nella base $\mathcal{C}$

A si dice matrice associata a f relativamente alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$:

$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ ← base del dominio V

← base del codominio W

Esempi

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - z \\ y + z \end{pmatrix}$$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\underset{\bar{e}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{e}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{e}_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$$

$\mathcal{C}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{C} = \left(\underset{\bar{f}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{f}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\bar{e}_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f(\bar{e}_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad f(\bar{e}_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se invece di $\mathcal{B}$ considero

$$\mathcal{B}' = \left(\underset{\bar{e}_1'}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{e}_2'}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{e}_3'}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$$

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(\bar{e}_1') = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\bar{e}_2') = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\bar{e}_3') = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Potrei considerare una nuova base del codominio per esempio $\mathcal{C}' = \left(\underset{\bar{f}_1'}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{f}_2'}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$

$$[f]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} = 2 \\ a_{21} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 0 \end{cases}$$

$$f(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{12} + a_{22} = 0 \\ a_{22} = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_{12} = -1 \\ a_{22} = 1 \end{cases}$$

$$f(\bar{e}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{13} + a_{23} = -1 \\ a_{23} = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_{13} = -2 \\ a_{23} = 1 \end{cases}$$

Esercizio Costruire $[f]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}$

Altro esempio

Dato A $m \times n$ a coeff. in K, $\exists$ appl. lin.

$$L_A : K^n \longrightarrow K^m$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sia $\mathcal{B}$ = base canonica di K^n

$\mathcal{C}$ = " " K^m

$$[L_A]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Per riempire la prima colonna devo calcolare

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{prima colonna di } A$$

$$L_A(\bar{e}_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{seconda colonna di } A$$

$\vdots$

Quindi $[L_A]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = A$ se $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono le basi canoniche

Altro esempio:

$\mathbb{R}_2[x]$ = sp. vett. dei polinomi a coeff. reali di grado ≤ 2

$p(x) = a + bX + cX^2 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

Una base naturale di $\mathbb{R}_2[x]$ è

$\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

Consideriamo

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$p(x) \longmapsto \begin{pmatrix} p(2) \\ p(-2) \end{pmatrix}$$

è un'appl. lineare

Sia $\mathcal{B}$ come sopra e $\mathcal{C}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(1) & f(x) & f(x^2) \end{matrix} \end{array} \text{ rispetto a } \mathcal{C}$$

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(x^2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Sia ora

$$p(x) = 3 + 5X - 2X^2$$

Posso calcolare $f(p) = \begin{pmatrix} p(2) \\ p(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix}$

Osserviamo che il vettore delle coordinate di p rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calcolo

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} [p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Proposizione

Sia $f: V \longrightarrow W$ appl. lineare

sia $\mathcal{B}$ base di V, sia $\mathcal{C}$ base di W. $\forall \bar{v} \in V$

$$\underbrace{[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}}_{A} [\bar{v}]_{\mathcal{B}} = [f(\bar{v})]_{\mathcal{C}} \qquad (*)$$

Dim. Supponiamo $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$

Sia $\bar{v} \in V$ e scriviamo

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n$$

$$f(\bar{v}) = \lambda_1 f(\bar{v}_1) + \dots + \lambda_n f(\bar{v}_n)$$

$$[f(\bar{v})]_{\mathcal{C}} = \lambda_1 [f(\bar{v}_1)]_{\mathcal{C}} + \dots + \lambda_n [f(\bar{v}_n)]_{\mathcal{C}}$$

prima colonna di A — n-esima colonna di A

$$= A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [\bar{v}]_{\mathcal{B}}. \quad \blacksquare$$

Supponiamo che $V = W$ e consideriamo

$$id : V \longrightarrow V$$
$$\bar{v} \longmapsto \bar{v}$$

Sia $\mathcal{B}$ base di V

$$[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n \qquad n = \dim V$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

Se prendo due diverse basi di V

$\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$

$\mathcal{C} = (\underline{w}_1, \dots, w_n)$

$$[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \end{pmatrix}$$

coordinate di $\bar{v}_1$ nella base $\mathcal{C}$ $\quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_n$

La prop. (*) ci dice che $\forall \bar{v} \in V$

$$\boxed{[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [\bar{v}]_{\mathcal{B}} = [\bar{v}]_{\mathcal{C}}}$$

$[id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ si dice **matrice del cambiamento di base** dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$.

<u>Esempio</u>

$V = \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}$ = base canonica = $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

$\mathcal{C} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ con

$$\bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \bar{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trovare la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

<u>Sol.</u>

$$[id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

coord. di $\bar{e}_1$ risp. a $\mathcal{C}$ — coord di $\bar{e}_2$ ...

Per ogni colonna si deve risolvere un sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11} = 1 \\ 2a_{11} + 2a_{21} + a_{31} = 0 \\ 3a_{11} + a_{21} + a_{31} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 1 \\ a_{31} = -4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a_{12} = 0 \\ 2a_{12} + 2a_{22} + a_{32} = 1 \\ 3a_{12} + a_{22} + a_{32} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 1 \\ a_{32} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = -1 \\ a_{33} = 2 \end{cases}$$

$$A = [id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Altro modo:</u>

Sappiamo che la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ è

$$[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad [id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left([id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array}$$

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$