Gradi	**Radianti**	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$
0	0	0	1	0	-
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-	0
120	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
135	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
180	π	0	-1	0	-
210	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
225	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
240	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
270	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	-	0
300	$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
315	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
330	$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
360	2π	0	1	0	-

Molt: $(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + (ad+bc)i$ Cnj: $\overline{z} = a - ib$ Molt-Cnj: $z \cdot \overline{z} = ||z||^2$ $i^0 = 1$ $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = i^0 = 1$ Prop: $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + \sin\theta)$ $r = ||z||$ $a = x = r\cos\theta$ $b = y = r\sin\theta$ $\theta = \arctan\frac{x}{y}$ Prendere θ in base ai segni di $x = a, y = b$ sul piano cartesiano. Radici: $z^n = z_0$ $r = \sqrt[n]{r_0}$ $\theta_k = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ con $k \in [0, n)$. Quindi: $\sqrt[n]{z_0}_k = re^{i\theta_k}$. Noto che: $\frac{x}{i} = -xi$.

Spazio vettoriale: $v + w = w + v$, $(v+w)+u = v+(w+u)$, $v + 0 = v$, $v + (-v) = 0$, $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$, $(\lambda u)v = \lambda uv$, $1 \cdot v = v$. Sottospazio $W \subset V$: $v_0 \in V$ origine $v_0 \in W$, $v, v' \in W \to v + v' \in W$, $\lambda \in \mathbb{K} \to \lambda v \in W$.

Prodotto vettoria;e in $\mathbb{R}^3$: $u = v \times w = \begin{bmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{bmatrix}$. u è ortogonale a v, w. $u = 0$ Se v, w sono linearmente dipendenti. $(v|w|u)$ è base di $\mathbb{R}^3$. Vale $||u||^2 + \langle v, w\rangle^2 = ||v||^2 \cdot ||w||^2$. Vale $||u||$ è l'area del parallelogramma.

Molt matrici $M(m, n)$: $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,j}$. Per ottenere $(AB)_{i,j}$ si moltiplica la riga i di A con la colonna j di B. Prop: Assoc $A(BC) = (AB)C$, Dist $A(B + C) = AB + AC$, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Mosse gauss e det: $\lambda \cdot r \to \lambda \det(A)$, scambio $-\det(A)$, $\lambda A \to \lambda^n \cdot \det(A)$, somma non varia. Binet: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Inversa: $(cof)_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{i,j})$. $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t(cof)$. Se $\det = 0$ allora non è né biett/invt.
Controllo (cof): somma di prodotto euclideo tra due righe è $\det(A)$.
Inversa 2x2: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Teorema di Rouché-Capelli: 0 soluzioni se $rk(A|B) > rk(A)$, 1 soluzione se $rk(A) = n$, infinite se $rk(A) < n$. Dimensione spazio soluzioni: $\dim = n - rk(A)$.

Applicazioni lineari: $f(v + w) = f(v) + f(w)$, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. Isomorfismo se biettiva.
Endomorfismo: $f : V \to V$. $L_A(v)$ è una FUNZIONE data da $A \cdot v$.
Iniettiva se $\dim \ker f = 0$ cioè $\ker f$ contiene un solo vettore. Suriettiva se $\dim V \geq \dim Im\ f = \dim W$. $\dim im\ f$ è $Span$ dei vettori di $[f]$.

A ~ B (simili) solo se esiste M per cui $A = M^{-1} \cdot B \cdot M$. Se simili: $rk(A) = rk(B)$ $\det(A) = \det(B)$, A è invertibile se e solo se B lo è. Invece, A, B congruenti se $A = {}^tM \cdot B \cdot M$.

Diagonalizzabilità: se $[f]$ su $\mathbb{R}$ è simmetrica, allora è diagonalizzabile. Stesso se è su $\mathbb{C}$ ed è Hermitiana. Altrimenti, se ci sono tutti autovalori distinti è diagonalizzabile. Altrimenti, se tutte le $m^a = m^g$ è diagonalizzabile. Se matrice non su $\mathbb{C}$, allora controllare somma m^a uguale grado.

Prodotto scalare: $\langle v, w\rangle$ con Prop: $\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$, $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle$, $\langle v, \rangle = \langle w, v\rangle$, $\langle v, w + w'\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle$, $\langle v, \lambda w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle$, $\langle v, 0\rangle = 0$. Se $\langle v, w\rangle = 0$ allora v, w ortogonali. È degenere se $\langle v \neq 0, w\rangle = 0\ \forall w$. Si dice definito positivo se $\langle v, w\rangle \geq 0\ \forall v, w$. $g_S(v, w)$ Prodotto scalare con matrice S dove $g_S(v, w) = {}^tv \cdot S \cdot w$. Matrice associata $[g]_B$ nella base $B = \{v_1, v_n\}$ è dato da $([g]_B)_{i,j} = g_S(v_i, v_j)$. S può essere scritta in forma quadratica dove ax_i^2 è la posizione i-esima sulla diagonale e vale a, mentre $S_{i,j} = S_{j,i} = \frac{1}{2}bx_ix_j$. È noto che $||v|| = \sqrt{g(v, v)}$. FARE ATTENZIONE AL TIPO DI PRODOTTO (Non sempre Euclideo).

Prodotto Hermitiano: simile allo scalare per matrici complesse. Prop: $\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$, $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle$, $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$, $\langle v, w + w'\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle$,

$\langle v, \lambda w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$, $\langle v, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$, $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$. H matrice Hermitiana, può descrivere un prodotto Hermitiano $g_H(v, w) = {}^t v \cdot H \cdot \overline{w}$. Prodotto Hermitiano Euclideo: $\langle v, w \rangle = {}^t v \cdot \overline{w}$.

Rotazione: funzione $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Riflessione con $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.

Autoagiunto: endomorfismo $T : V \to V$ con base ortonormale di V se $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$. Anche se $[T]_B^B$ Hermitiana in $\mathbb{C}$ o simmetrica in $\mathbb{R}$. Casi notevoli: $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con A simmetrica e $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ con A Hermitiana.

Angolo: $\cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| \cdot ||w||}$, $\theta = \arccos\cos\theta$.

Proiezione ortogonale su vettore: w, v vettori: $P_w(v) = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w$. Sia W uno spazio vettoriale con base ortogonale con $\dim W = n$, allora $P_W(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$. Se base ortonormale, niente denominatore. Se base non ortogonale, ortogonalizzare.

Gramm Schmidt:

1. $w_1' = w_1$
2. $w_2' = w_2 - P_{w_1}(w_2)$
3. $w_n' = w_{m+1}' = w_n - P_{\{w_1, \dots, w_m\}}(w_n)$

Intersezioni

- Piano-Piano (Cartesiani): Sistema
- Piano-Piano (Parametrici): Trasformare in cartesiani -> parametrici
- Piano-Retta (Cartesiani): Sistema
- Retta-Retta (Cartesiani): Sistema
- Retta ($P + Span(v)$) - Retta ($Q + Span(w)$) (Parametriche): Porre uguali, $P + tv = Q + sw$, poi isolare: $tv + s(-w) = Q - P$, trasformare in sistema $[v \quad -w \quad | \quad Q - P]$
- Piano (Cartesiano) - Retta (Parametrica $P + Span(v)$): Sostituire x, y, z in equazione del piano $(P_0 + v_0 t) + (P_1 + v_1 t) + (P_3 + v_3 t)$

Angoli

- Piano - Retta ($P + Span(v)$): ϕ angolo tra la retta ed il normale. θ angolo tra piano e retta dato da $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$. Con $\phi = \arccos \left| \frac{\langle v, n \rangle}{||v|| \cdot ||n||} \right|$ con n normale del piano
- Retta ($P + Span(v)$) - Retta ($Q + Span(w)$): $\theta = \arccos \left| \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| \cdot ||w||} \right|$
- Piano - Piano: angolo trai normali

Distanze

- Punto-Punto: $d(P,Q) = ||Q-P||$
- Punto P - Retta $Q + Span(v)$: $d(P,r) = \frac{||v \times (P-Q)||}{||v||}$
- Retta $r = P_0 + tv$ - Retta $r' = P_1 + sw$ (Parallele): $d(r,r') = d(P_0,P_1)$
- Retta $r = P_0 + tv$ - Retta $r' = P_1 + sw$ (Sghembe): $\frac{|\det(v|w|P_1-P_0)|}{||v \times w||}$
- Punto $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ - Piano $\pi = ax + by + cz - d = 0$:$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$