Settimana 2

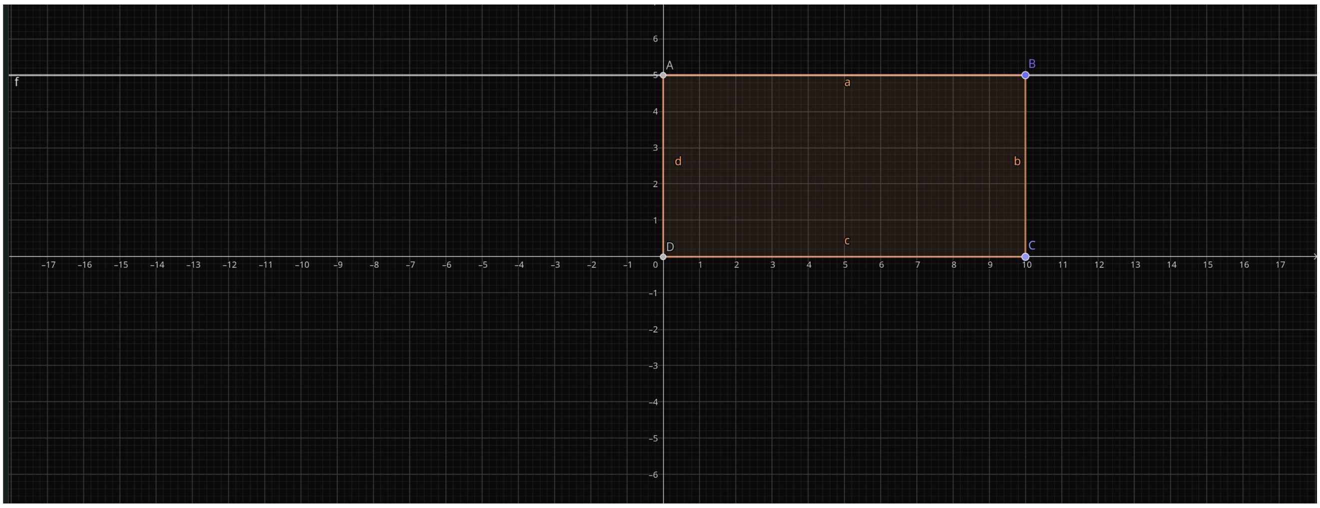
Appunti di Alessandro Salerno
Lezioni 4-6 Prof. J. Seiler

Area di una funzione

Disegnando una funzione f su un piano cartesiano, si ottiene un oggetto geometrico che, a seconda del comprtamento della funzione sottostante, può trovarsi sopra o sotto l'asse delle ascisse in ogni dato punto. La superficie di piano compresa tra l'asse delle ascisse ed il grafico della funzione è detta *area sottesa dal grafico* e dati due punti, è possibile calcolarla con modaltà di diversa precisione.

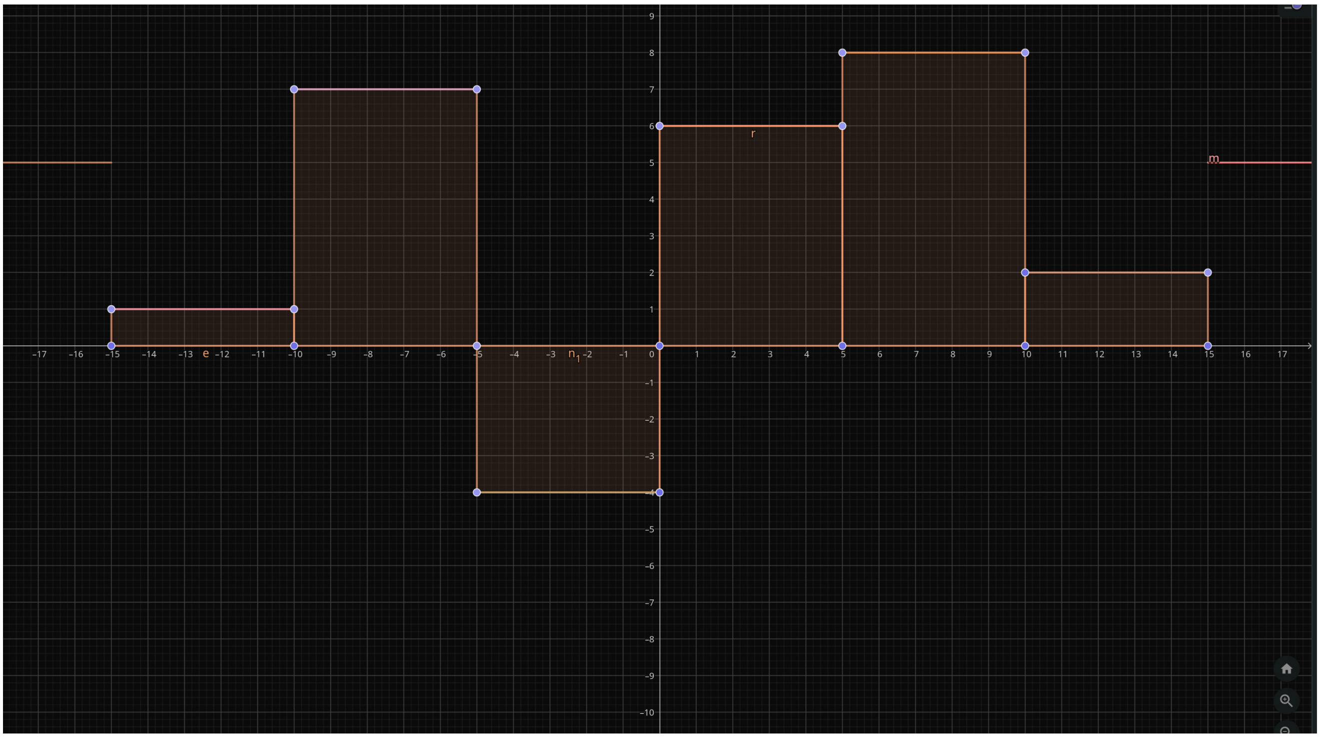
Area di funzioni costanti

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione costante definita come $f(x) = c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$ e siano $a \neq b \in \mathbb{R}$ due valori del dominio. È possibile identificare un rettangolo sotteso dal grafico della funzione con base $b - a$ ed altezza c:



Area di una funzione costante a tratti

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione costante a tratti, ossia una funzione il cui comportamento è costante all'interno di intervalli del dominio.



> **Important**
>
> In questo caso diventa evidente che l'area sottesa dal grafico della funzione tra $a \neq b \in \mathbb{R}$ è la somma delle aree dei rettangoli costruiti nei singoli sottointervalli.
>
> È necessario distinguere tra *area* ed *area con segno*. In geometria del piano, è generalmente impossibile avere un oggetto con area negativa, ma questo diventa comune calcolando l'area sottesa dal grafico di una funzione. Sia $f(x) = c$ e siano $a \neq b \in dom(f)$, usando la procedura illustrata in precedenza, si ottiene un rettangolo con altezza $c < 0$ e quindi area $A = c(b - a)$ anch'essa negativa.
>
> Nel caso delle funzioni costanti a tratti, l'area con segno può essere drasticamente diversa dall'area. Questo perché, nel sommare le aree dei vari sottointervalli, si ottengono contribuzioni positive e negative. Pertanto, in generale, per ottenere l'area senza segno di una funzione, è possibile:
>
> - Studiare il comportamento del segno della funzione f e calcolare l'area a tratti, così da poter applicare il modulo alle aree negative prima di sommarle
> - Calcolare l'area di $|f|$

Area di funzioni reali

Spesso si rende necessario calcolare l'area (con o senza segno) di una funzione il cui comportamento non è costante (a tratti o meno).

Soluzione approssimativa

È possibile trattare le funzioni continue come costanti a tratti ed ottenere un'approssimazione dell'area sottesa dal grafico. Per farlo, occorre stabilire un numero arbitrario di intervalli N oltre ai due elementi $a \neq b$ del dominio. Ogni intervallo è di lunghezza $\frac{b-a}{N}$ e preso un elemento del dominio z_i per ogni intervallo, è possibile descrivere l'area con segno approssimativa come:

$$A = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(z_i)$$

Formalizzazione

$$f \ : \ [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$N \in \quad N \geq 1$$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

$$x_i = x_0 + i \frac{b-a}{N}$$

$$z_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

Formula del punto medio

La formula del punto medio è un'implementazione del metodo descritto sopra. Questa formula prende come z_i il punto medio dell'intervallo i-esimo.

$$z_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

$$A = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(z_i) = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{x_{i-1} - x_i}{2}\right)$$

> **Note**
>
> È importante notare che diverse implementaizoni della suddivisione in intervalli costanti possono restituire valori diversi data la medesima f ed i medesimi parametri a, b, N. Questo perché la scelta di z_i influenza il risultato approssimativo.

Area precisa di funzioni continue ed integrale definito

Per valutare l'area di una funzione in modo preciso, è necessario immaginare infiniti rettangoli di dimensioni infinitamente piccole. Per farlo, usiamo un limite. Se:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(z_i)$$

Esiste finito e non dipende dalla scelta dei punti z_i, allora il valore che si ottiene è detto integrale definito di f sull'intervallo $[a, b]$ ed è indicato come:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Notazione

La formula sopra descrittà è detta *somma di Riemann* e la notazione dell'integrale non è altro che "un'abbreviazione" del limite:

$$\int_a^b = \sum_{i=1}^{N}$$

$$dx = \frac{b-a}{N}$$

Teorema 5 (Torricelli-Barrow)

1. Sia f derivabile nell'intervallo $[a, b]$ con funzione derivata f'. Allora $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$
2. Supponiamo che $f\,:\,[a, b] \to \mathbb{R}$ abbia una primitiva F (cioè $F' = f$), allora $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Teorema 6 (Fondamentale del calcolo integrale)

Data $f\,:\,[a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia:

$$g(x)\,:\,[a, b] \to \mathbb{R} = \int_a^x f(t)\,dt$$

Allora, g è derivabile sull'intervallo $[a, b]$ ed è una primitiva di f.

Media integrale

Sia $f\,:\,[a, b] \to \mathbb{R}$ e, siano $z_1, \ldots, z_N \in [a, b]$ e sia $y_i = f(z_i)$, allora la media m è descritta da:

$$m = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_N}{N}$$

Ossia:

$$m = \frac{f(z_1) + f(z_2) + \ldots + f(z_N)}{N}$$

Che può essere riscritto come:

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(z_i)$$

Possiamo usare le proprietà delle frazioni per portare quest'equazione in una forma già vista:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b-a}{N}$$

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(z_i)$$

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$$

Proprietà della funzione modulo

La funzione modulo $|x|$ è definita come:

$$|x| = \begin{cases} x \ : \ x \geq 0 \\ -x \ : \ x < 0 \end{cases}$$

Questa funzione presenta le seguenti proprietà:

- L'unico numero per cui $|x| = 0$ è $x = 0$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|-a| = |a|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Disuguaglianza triangolare)
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$
- Dati due punti sulla retta reale, la distanza tra loro è la lunghezza del segmento che li unisce. In altre parole, la distanza è data da $|b - a|$ o, per le proprietà viste prima, anche da $|a - b|$. Le proprietà del modulo si applicano anche alla funzione d che descrive la distanza
- Due punti si dicono "vicini" se la distanza è qualitativamente "piccola"

Intorno

Dato $c \in \mathbb{R}$ si dice *intorno di centro c e raggio r ($r > 0$)* l'insieme:

$$I_r(c) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, c) < r\}$$

$$I_r(c) = \{x \in \mathbb{R} \mid c - r < x < c + r\}$$

$$I_r(c) = (c - r, c + r)$$

Proprietà vera definitivamente

Si dice che una proprietà è vera definitivamente per $x \to c$ se esiste un $r > 0$ tale per cui tale proprietà è vera per ogni $x \in I_r(c)$ tranne al più per $x = c$.

> **Important**
>
> Basta che esista **un intorno** per cui questo è vero. Non è necessario che l'intorno sia *ottimale*.

Retta reale estesa ed intorno di infinito

Introduciamo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\ \{-\infty, +\infty\}$. Un intorno di $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ è un intervallo definiti come:

$$\begin{cases} I_a(+\infty) = (a, +\infty) \\ I_a(-\infty) = (-\infty, a) \end{cases} a \in \mathbb{R}$$

Proprietà definitivamente vera all'infinito

Si dice che una proprietà è vera definitivamente per $x \to \pm\infty$ se esiste un UN $a \in \mathbb{R}$ tale per cui la proprietà è vera per ogni:

$$\begin{cases} x \in I_a(+\infty) \\ x \in I_a(-\infty) \end{cases}$$

Limiti finiti al finito

Data una funzione definita vicino ad un punto c, $f\ :\ I_r(c) - \{c\} \to \mathbb{R}$ per qualche $r > 0$, si dice che f ammette limite finito l per $x \to c$ e si scrive:

$$l = \lim_{x \to c} f(x)$$

se:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists > 0 \mid x \in I(c) - \{c\} \to f(x) \in I_\epsilon(l)$$

Note

Il limite per $x \to c$ non richiede alcun comportamento specifico di f nel punto c stesso. $f(c)$ potrebbe essere diverso dal limite, potrebbe anche non esistere.