Nome & Cognome: ______________________________

Algebra Lineare, Esame Finale
Gennaio 24, 2024

- Tutto il lavoro deve essere unicamente vostro.
- L'utilizzo di calcolatrici è vietato.
- L'esame dura 2 ore.
- Scrivete il vostro nome su tutte le pagine, nel caso qualche foglio si staccasse.
- Controllate di avere tutte le 8 pagine dell'esame.
- Ogni domanda a risposta multipla vale 1 punto.
- Le risposte alle domande aperte valgono 11 punti l'una.
- Le domande aperte verranno corrette solo a chi totalizzi almeno 6 punti su 10 nella parte a crocette.

Buon Lavoro!

PER FAVORE MARCATE LE RISPOSTE CON UNA X, non un cerchio!

1.	(a)	(b)	(c)	(d)	~~(e)~~	NO => sparata a caso
2.	~~(a)~~	(b)	(c)	(d)	(e)	SI
3.	(a)	(b)	~~(c)~~	(d)	(e)	NO => errore di distr.
4.	(a)	~~(b)~~	(c)	(d)	(e)	NO => manca il metodo
5.	(a)	~~(b)~~	(c)	(d)	(e)	NO => manca metodo
6.	(a)	(b)	(c)	~~(d)~~	(e)	SI
7.	~~(a)~~	(b)	(c)	(d)	(e)	SI
8.	(a)	(b)	~~(c)~~	(d)	(e)	NO => manca il metodo
9.	(a)	(b)	(c)	(d)	~~(e)~~	SI
10.	(a)	(b)	(c)	~~(d)~~	(e)	NO => Regola sbagliata corretta.

Non scrivere qua sotto!

Risp. Multiple ______________________

Risp. Aperte ______________________

Totale ______________________

Nome & Cognome: ______________________________

Risposta multipla

1.(1 pt.) Siano $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}_3[x]$ definiti da

$$a(x) = x - 1, \qquad b(x) = x + 2, \qquad c(x) = 2x^2 - 2,$$
$$d(x) = x^2 - x, \qquad e(x) = 2x^3 + 1, \qquad f(x) = x^3 - x^2,$$

e sia U il sottospazio $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \; ; \; p(1) = 0\}$. Allora vale

(a) $U = \mathrm{Span}(a, c)$. (b) $U = \mathrm{Span}(a, c, f)$. (c) $U = \mathrm{Span}(c, d, e, f)$.
(d) $U = \mathrm{Span}(b, e, f)$. (e) $U = \mathrm{Span}(a, c, d)$.

2.(1 pt.) Dato $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$, allora z^{12} è uguale a:

(a) -1. (b) $-2i$. (c) $\frac{1}{2^6}(1 - i)$.
(d) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$. (e) $2^{12} i$.

3.(1 pt.) La matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è:

(a) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. (b) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. (c) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
(d) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. (e) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4.(1 pt.) Scriviamo $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$. Quale delle seguenti è un prodotto hermitiano?

(a) $g(x, y) = 2i x_1 \overline{y}_1 + 2 x_1 \overline{y}_2 + 2 x_2 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2$.
(b) $g(x, y) = x_1 y_1 + 2i x_1 y_2 - 2i x_2 y_1 + 2 x_2 y_2$.
(c) $g(x, y) = 2 x_1 \overline{y}_1 + i x_1 \overline{y}_2 - i x_2 \overline{y}_1 - x_2 \overline{y}_2$.
(d) $g(x, y) = x_1 \overline{y}_1 + 2 x_1 \overline{y}_2 - 2 x_2 \overline{y}_1 + 2 x_2 \overline{y}_2$.
(e) $g(x, y) = x_1 \overline{y}_1 + 2i x_1 \overline{y}_2 + 2i x_2 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2$.

1) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ i & 0 \\ -i & -2 \end{bmatrix}$ [

$a(x) = 1-1=0$ $\quad b(x) = 1+2$ ✗ $\quad c(x) = 2\cdot\cancel{(1)}^2 - 2 = 0$ ✓

$d(x) = 1^2 - 1 = 0$ $\quad e(x) = 2\cdot(1)^3+1$ ✗ $\quad f(x) = (1^2 - (1^2)) = 0$ ✓

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_2 = x \\ \lambda_1 = y \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = z \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = y \\ x - y = z \end{array}\right.$$

2) z

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = 1$$

$\cos(\theta) = \dfrac{-\frac{\sqrt2}{2}}{1} = -\dfrac{\sqrt2}{2}$ $\qquad z = 1\cdot e^{i\frac{3}{4}\pi}$

$\sin(\theta) = \dfrac{\frac{\sqrt2}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt2}{2}$ $\qquad z^{12} = (1)^{12}\cdot e^{i\frac{3}{\cancel{4}_1}\pi\cdot\cancel{12}^{\cancel{6}\,3}}$ $\qquad 2 | 12$

$= 1\cdot e^{i\,q\pi}$ $\qquad \frac{3}{\cancel{4}_1}\cdot\cancel{12}^{\cancel{6}\,3} = q$

$1\cdot e^{i\pi}$ $\qquad q = 4\cdot2+1$

$q\pi = \cancel{2\pi\cdot4}+\pi$

$\sin(\theta) = 0$

$\cos(\theta) = -1$

$|z|\cdot(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ $\qquad$ (A)

$= 1\cdot -1 = -1$

3)

$$T(b_1) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cancel{0}+1 \\ 0+2\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad T(b_2) = \begin{pmatrix} 2\cdot1+2 \\ 1+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 2 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 0 \end{array}\right.$$

$\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda \end{array}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad [T]^B_B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\cancel{c}$ $\quad d$

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_2 = 4 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_2 = 4 \\ \lambda_1 + 8 = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_2 = 4 \\ \lambda_1 = -3 \end{array}\right.$$

$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array}$

4) $x = (i, 1)$

(a) $= 2\cdot i\cdot i\cdot -i + 2i\cdot\cancel{1} + 2\cdot\cancel{1}\cdot -i + 1\cdot 1$

$= 2\cdot(-1)\cdot -i + 2i\cdot\cancel{1} + -2i + 1$

$= 2i + \cancel{2i - 2i} + 1$ ✗

(b) $= i\cdot i + 2i\cdot i\cdot 1 - 2i\cdot\cancel{1}\cdot i + 2\cdot 1 1$

$= -1 - \cancel{2 + 2} + 2 = 1$

(c) $2 \cdot i \cdot -i + i \cdot i \cdot 1 - i \cdot 1 \cdot -i - 1$

$= 2 - 1 - 1 - 1 = -1$

(d) $= i \cdot -i + 2i \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot -i + 2 \cdot i \cdot i$

$= 1 + 2i + 2i + 2$ $\times$

(e) $i \cdot -i + 2i \cdot i \cdot 1 + 2i \cdot 1 \cdot -i + 1$
$1 - 2 - 2 + 1$

$i \cdot -i + 2i \cdot i \cdot -i + 2i \cdot i \cdot -1 + i \cdot -i$
$= 1 + 2i + 2 + i$ $\times$

b) $i \cdot i + 2i \cdot i \cdot i - 2i \cdot i \cdot i + 2i \cdot i$

$= -1 \cancel{-2i + 2i} - 2$

c) $2i \cdot -i + i \cdot i \cdot -i - i \cdot i \cdot -i - i \cdot -i$

$= 2 \cancel{+ i - i} + 1$

Nome & Cognome: ______________________________

5.(1 pt.) La dimensione dello spazio $T^s(3)$ delle matrici 3×3 triangolari superiori, è:

(a) Nove. (b) Tre.
(c) Zero. (d) Sei.
(e) $T^s(3)$ non ha una dimensione perché non è uno spazio vettoriale.

6.(1 pt.) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quale identità vale?

(a) $BA = A$. (b) $AB = BA$. (c) $BA = B$.
(d) $AB = B$. (e) $AB = A$.

7.(1 pt.) Dato il prodotto scalare $g(p(x), q(x)) = q(1)p(1) - q(0)p(0)$ su $\mathbb{R}_1[x]$, e la base $\mathcal{B} = \{x+1, 2\}$, allora:

(a) $[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. (b) $[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. (c) $[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
(d) $[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (e) $[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.(1 pt.) Il nucleo della mappa lineare $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $T(ax^2 + bx + c) = bx^2 + cx$ è:

(a) $\{\}$. (b) $\mathbb{R}_1[x]$.
(c) $\mathrm{Span}(x+1, x-1)$. (d) $\mathrm{Span}(x^2)$.
(e) $\mathbb{R}_2[x] \setminus \mathbb{R}_1[x]$.

5)

$$T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

(3)

6)

- AB

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$11 = (1, -1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= -1+1 = 0$

$12 = \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$13 = \quad // \quad \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$

$21 = (0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

$22 = (0,1,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$23 = (0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$31 = (0,-1,2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1+2 = 1$

$32 = (0,-1,2) \; \vec{0} = 0$

$33 = (0,-1,2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$11 = (0,0,-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$12 = \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$

$13 = \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$

$21 = (1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$22 = \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$

$23 = \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$

$31 =$

$B \cdot A = A$ NO

$A \cdot B = B \cdot A$ NO

$A \cdot B = A$ NO

$B \cdot A = B$ NO

$A \cdot B = B$ ~~X~~ SI (d)

7) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$
$\quad\quad b_1 \quad\quad b_2$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ .. & .. \end{bmatrix} = (a)$

$\langle b_1, b_2 \rangle = (0+2)\cdot(1+1) - (0+2)\cdot(0+1)$
$= 2\cdot 2 - 2\cdot 1 = 4-2 = 2$

$\langle b_1, b_1 \rangle = (1+1)\cdot(1+1) - (0+1)\cdot(0+1)$
$2\cdot 2 - 1 = 3$

6) $\ker(T) = \{ v \in \mathbb{R}_2[x] \mid T(v) = 0 \}$

$[T]_e =$

x^2
x
1

$x^2 + x = 0$

$\mathcal{E} = (1,0,0), (0,1,0)(0,0,1)$

$b^2 - 4ac = (1^2) - \cancel{4\cdot 0}$
$= 1$

$T(e_1) = 0$

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 1}{2} = \begin{cases} \cancel{\frac{-2}{2}} \; -1 \\ 0 \end{cases}$

9.(1 pt.) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ha autovalore $\lambda = -1$. Qual è l'autospazio che corrisponde a questo autovalore?

(a) $\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(c) $\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

(d) $\text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(e) $\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

10.(1 pt.) Il sistema lineare con matrice completa

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array}\right)$$

ha un numero di soluzioni pari a:

(a) Una.

(b) Infinite, che dipendono da 1 parametro.

(c) Zero.

(d) Infinite, che dipendono da 2 parametri.

(e) Un numero finito, maggiore di 1.

e)

$$\begin{cases} 3+1\,x & -4y & +4z & =0 \\ 2x & -3+1\,y & +2z & =0 \\ & & -1+1\,z & =0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} = \\ = \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4x - 4t + 4t = 0 \\ \cancel{-2y} = \cancel{-2x} - \cancel{2t} \quad x+t \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r \in \mathbb{R} \\ y = -r - t \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad r\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{4}x = \cancel{4}y - \cancel{4}t \\ 2y - 2t - 2y + 2t = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r - t \\ y = r \\ z = t \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \llcorner_{e)}$$

1b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & 6 & 24 \\ 0 & 3 & 6 & 24 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{rnk}(A) = 2 = \text{rnk}(A|b)$$

$4-2=2$ ∞ per 2 par. (d)

$3-2=1$

$A_2 \to A_2 - 4A_1$

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 6 & 11 \\ 4 & 8 & 12 & 40 \\ \hline 0 & -3 & -6 & -29 \\ 0 & 3 & 6 & 29 \end{array}$$

$\cdot -1$

$$\begin{array}{r} 40 - \\ 11 \\ \hline 29 \end{array}$$

$A_3 \to A_3 - 7A_1$

$$\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 9 & 12 \\ 7 & 14 & 21 & 70 \\ \hline 0 & -6 & -12 & -58 \\ & -3 & -6 & -29 \\ & 3 & 6 & 29 \end{array}$$

$\cdot \frac{1}{2}$, $\cdot -1$

$$\begin{array}{r} 21 - \\ 9 \\ \hline -12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 70 - \\ 12 \\ \hline -58 \end{array}$$

$58 | 2$, 4, 18, 29

Nome & Cognome: ______________________________

Risposta aperta
Per ricevere punteggio parziale, dovete mostrare il vostro lavoro!

11.(11 pts.) Si consideri la seguente matrice

$=9$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k & k^2-k \\ k & -k & k-1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

manca Teorema spett.

in $M(3,\mathbb{R})$ dove k è un parametro reale.

(1) Determinare per quali valori di k la matrice A è invertibile. ✓
(2) Posto $k=1$, calcolare gli autovalori di A, specificando la loro molteplicità algebrica e geometrica, e stabilire se la matrice A è diagonalizzabile. ✓
(3) Posto $k=-1$, calcolare ${}^tA - A$, e stabilire se la matrice A è diagonalizzabile. ✓

A inv $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

(1) $\det(A) = \begin{matrix} A^2 \to A^2 + A^1 \\ A^3 \to A^3 + A^1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -1 & k-1 & k^2-k-1 \\ k & -k+k & k-1+k \\ 2 & -2+2 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & k-1 & k^2-k-1 \\ k & 0 & 2k-1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Laplace su $(3,1)$

$= \cancel{(-1)}^{3+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} k-1 & k^2-k-1 \\ 0 & 2k-1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (k-1)(2k-1) = 0$

$= (2k-2)(2k-1)$

$= 4k^2 - 2k - 4k + 2 = 0$

$= 4k^2 - 6k + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 36 - 32 = 4$ $\quad 16 \cdot 2 = 32$

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{8} = \frac{6 \pm 2}{8} \begin{cases} 1 \\ \cancel{\frac{4}{8}} \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$ — Non inv. per $k=1$, $k=\frac{1}{2}$

(2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad P_\lambda(A) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}$

Laplace su $(3,3)$

$\det() = \cancel{(-1)}^{3+3} \cdot (-2-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$ $\quad A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) \Rightarrow (-1-\lambda+1)(-1-\lambda-1) = (0-\lambda)(-2-\lambda)$

$= (-2-\lambda) \cdot [(-1-\lambda)^2 - 1] =$ $\quad \lambda_1 = -2$

$= (-2-\lambda)(0-\lambda)(-2-\lambda)$ $\quad \lambda_2 = 0$

$= (-2-\lambda)^2(0-\lambda)$

$M_a(\lambda_1) = 2$ $\quad M_a(\lambda_2) = 1 = M_g(\lambda_2)$

2) $p_{\lambda_{\cancel{2}}}(A) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \mathrm{rnk} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathrm{rnk} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad Mg(\lambda_{\cancel{2}}) = 1$

$Ma(\underset{1+1}{\lambda_1}) \neq Mg(\lambda_1)$ non è diag

3) $A \begin{bmatrix} -1 & -1 & (-1)^2-(-1) \\ -1 & 1 & (-1)-1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

${}^tA \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad {}^tA - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$p_A(A) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -2-\lambda \end{bmatrix}$

Nome & Cognome: ______________________________

= 3.5

12.(11 pts.) Siano $\pi_1 = \{2x + y - z = 1\}$ e $\pi_2 = \{x + 2y + z = 2\}$ due piani in $\mathbb{R}^3$. 1.5

(1) Calcolare la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ in forma $r = P + \mathrm{Span}(v)$.

(2) Dimostrare che r e il piano $\pi_3 = \{se_1 + t(e_2 + e_3)\ ;\ s, t \in \mathbb{R}\}$ sono incidenti. 0

(3) Calcolare la proiezione ortogonale del vettore v dal punto (1) sul piano π_3. 2

(4) Calcolare l'angolo fra r e il piano π_3. 1

1) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2+x+2y=1 \\ z=2-x-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=3 \\ z=2-x-2y \end{cases}$ $x+y=1$

$\begin{cases} x=1-y \\ y=0+y \\ z=2-1+y-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y=0+y \\ z=1-y \end{cases}$ $r = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

2) $\pi_3 \doteq \left\{ \begin{pmatrix}s\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\t\\t\end{pmatrix} \right\}$ = con $s=t=1$ = $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

3) $P_{\pi_3}(v_1) = (1,1,-1) - \dfrac{\langle v_1, \pi_3 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|\pi_3\|} \cdot \pi_3 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}4/3\\4/3\\4/3\end{pmatrix}$

$\|v_1\| = \sqrt{3}$

$\|\pi_3\| = \sqrt{3}$

$\langle v_1, \pi_3 \rangle = -1 \cancel{+1} - 1 = -1$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$

4) $\cos(\theta) = \dfrac{|\langle v_1, v_2 \rangle|}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = +\dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{-1}{\frac{24}{9}} = -\dfrac{9}{24}$

$\|v_1\| = \sqrt{3}$

$\|v_2\|\ \sqrt{3}$

$\|v_1\| = \sqrt{3}$

$\|v_2\| = \frac{8}{9} + \frac{8}{9} + \frac{8}{9} = \frac{24}{9}$