Indipendenza e dipendenza lineare

V spazio vettoriale su K.

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in V$

$v_1, \dots, v_k$ si dicono lineamente dipendenti se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = \bar{0}$$

Se invece vale

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = \bar{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

allora i vettori $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ si dicono lineamente indipendenti.

Esempio: consideriamo i vettori in $\mathbb{R}^3$

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo sapere se sono l.d. oppure l.i.

Supponiamo che $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ siano t.c.

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3 = \bar{0}, \quad \text{cioè}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \\ -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$ sistema lineare omogeneo

La sua matrice dei coeff. è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1-0) - 0(-1-0) + 1(1-0)$$

$$= -1 + 1 = 0$$

$\mathrm{rank}(A) < 3 \rightsquigarrow$ il sistema ha una sol. non banale $\rightsquigarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ sono l. d.

Altrimenti si poteva fare la riduzione di Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightsquigarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightsquigarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Rank}(A) = 2 \Rightarrow$ il sistema ha infinite sol.

$\Rightarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ sono l.d.

Rango 2 $\Rightarrow$ span $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ ha dim 2
$\Rightarrow$ i vettori sono l.d., altrimenti genererebbero un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^3$ di dim. 3.

Spazio generato da vettori

Sia V spazio vett. su un campo K

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in K$

$$\text{Span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \{\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots \lambda_k \bar{v}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K\} \subseteq V$$

è un sottospazio vett. di V

è il più piccolo sottospazio vett. di V che contiene $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$

Come fare a capire se

$$\text{Span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = V$$

Questo avviene se ogni elemento $\bar{v}$ di V è combinazione lineare di $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$.

Esempio

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Un vettore $\bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sta in $\mathrm{Span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$

$\Longleftrightarrow$ esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ t.c.

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3 = \bar{v} \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 = b \\ \lambda_2 - \lambda_3 = c \end{cases}$$

sistema lineare non omogeneo

La matrice dei coeff è

$$A \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \end{array}\right)$$

Riduzione di Gauss

$R_2 \to R_2 - R_1 \rightsquigarrow$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & -1 & c \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 - R_2 \rightsquigarrow$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b+a \end{array}\right)$$

Il sistema ammette sol. $\Longleftrightarrow \boxed{c - b + a = 0}$

Quindi

$$\mathrm{Span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \ c - b + a = 0 \right\} \subsetneq V$$

Consideriamo invece i vettori

$\bar{w}_1 = \bar{v}_1 \qquad \bar{w}_2 = \bar{v}_2 \qquad \bar{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Questa volta si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1(-1 \quad -1) + 1(1) = -2+1 = -1 \neq 0$

$\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ sono l.i.

essendo l.i generano uno spazio di dimensione 3

$\Rightarrow \mathrm{Span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3) = \mathbb{R}^3.$

Per esempio $\bar{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$

Per trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ t.c.

$$\lambda_1 \bar{w}_1 + \lambda_2 \bar{w}_2 + \lambda_3 \bar{w}_3 = \bar{w}$$

occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

Esercizio: risolvere il sistema.

Basi

Sia V uno spazio vettoriale su K

$\bar{v}_1, \dots \bar{v}_k \in V$ è una base di V se

1) $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ sono l.i

2) $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ generano tutto V.

In questo caso k si dice dimensione di V e non dipende dalla base scelta.

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ non sono una base di $\mathbb{R}_3$

$\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ sono una base di V

(3 vettori l. i in $\mathbb{R}^3$ formano una base)

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale e sia $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ una base di V.

Allora ogni $\bar{v} \in V$ si scrive in modo unico come c. l. di $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$.

Cioè esiste un' unica n-upla $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in K^n$

t.c. $\bar{v} = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n \qquad (*)$

Gli elementi $\lambda_1 \dots \lambda_n$ si dicono coordinate di $\bar{v}$ rispetto alla base $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ si dice vettore delle coordinate di $\bar{v}$ rispetto alla base $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$.

Dim.

Sia $\bar{v} \in V$.

Per hp $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ generano V, quindi esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che $\bar{v} = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n$

Supponiamo

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n = \mu_1 \bar{v}_1 + \dots + \mu_n \bar{v}_n \quad \mu_1, \dots, \mu_n \in K$$

Otteniamo

$$(\lambda_1 - \mu_1)\bar{v}_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)\bar{v}_n = \bar{0}$$

Poiché $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ sono l.i. si deve avere

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1$$

$$\lambda_2 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \mu_2$$

$$\vdots$$

$$\lambda_n - \mu_n = 0 \Rightarrow \lambda_n = \mu_n$$

Quindi la scrittura $(*)$ è unica. $\boxtimes$

Esempio

Sia $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ la base già considerata

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo il vettore $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$
$\mathcal{B}' = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ sono due basi di $\mathbb{R}_3$

Il vettore delle coordinate di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ è $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ infatti $3\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 = \bar{v}$

Per trovare il vettore delle coordinate di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}'$ devo trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ t.c.
$\lambda_1 \bar{w}_1 + \lambda_2 \bar{w}_2 + \lambda_3 \bar{w}_3 = \bar{v}$
cioè

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

Quindi il vettore delle coordinate di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}'$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Applicazioni lineari

Def.

Siano V, W spazi vettoriali su K.
Una funzione $f: V \longrightarrow W$ si dice **applicazione lineare** se

1) $f(\underbrace{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}_{\text{somma in } V}) = f(\bar{v}_1) \underbrace{+}_{\text{somma in } W} f(\bar{v}_2) \quad \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$

2) $f(\lambda \bar{v}) = \lambda f(\bar{v}) \quad \forall \bar{v} \in V \quad \forall \lambda \in K.$

Osserviamo che la 2) ci dà in particolare

$$f(\bar{0}) = f(0 \cdot \bar{0}) = 0 f(\bar{0}) = \bar{0}$$

Quindi

$$f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W \quad \text{se } f \text{ è un' appl. lineare}$$

Esempio

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2x + y$$

è un' appl. lineare perché dati $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1 + y_1 + 2x_2 + y_2 \quad \Longrightarrow \text{la (1) è soddisfatta}$$

Verifico la (2)

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = 2\lambda x + \lambda y$$

$$\lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda (2x + y)$$

Oss.

Se $\bar{v} = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k$ con $\bar{v}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in V$

$$f(\bar{v}) = f(\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k)$$
$$= \lambda_1 f(\bar{v}_1) + \lambda_2 f(\bar{v}_2) + \dots + \lambda_k f(\bar{v}_k)$$

Quindi noti $f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_k)$ possiamo ricavare il vettore $f(\bar{v})$

Esempio

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+3b \end{pmatrix}$

Esercizio: 1) verificare che vale la condizione (1)

Verifichiamo (2)

se $\lambda \in \mathbb{R}$

$$T\left(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda a + \lambda b \\ \lambda a + 3\lambda b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+3b \end{pmatrix} = \lambda T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Es. 2 $\quad U: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad$ verificare che non è un'appl. lineare.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a^2 \\ b-1 \end{pmatrix}$$