Problema 1: In S_8 si consideri la permutazione

$$\sigma = (1\,3\,5\,6)(1\,2)(3\,6\,8).$$

1. (Punti 4) Calcolare la decomposizione di σ, σ^{-1} e di σ^2 in cicli disgiunti.
2. (Punti 3) Calcolare quante sono le permutazioni di S_8 che hanno lo stesso tipo di σ.
3. (Punti 4) Si consideri $H = \{\mathrm{id}, \sigma\}$. H è un sottogruppo di S_8? Qual è il più piccolo sottogruppo di S_8 che contiene H?

1) $\sigma = (1,2,3)(5,6,8)$ $\quad \sigma^{-1} = (1,2,3)^{-1}(5,6,8)^{-1} = (1,3,2)(5,8,6)$ $\quad \sigma^2 = (1,2,3)^2(5,6,8)^2 = (1,3,2)(5,8,6)$ ✓

2) Tipo$(\sigma) = (3,3)$

Sono $\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3}\cdot\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3}\cdot\dfrac{1}{2!}$ ✓

= 1120

3) - $e_{S_8} \in H$? si $\mathrm{id}_{S_8} \in H$ ✓
- $H * H \in H$? $\mathrm{id}\cdot\mathrm{id} = \mathrm{id} \in H$, $\sigma\cdot\mathrm{id} \in H$, $\sigma\circ\sigma \notin H$

Non è sottogruppo

Il più piccolo sottogruppo ciclico è quello generato da $\langle\sigma\rangle$ ovvero

Periodo$(\sigma) = \mathrm{mcm}(3,3) = 3$

$\langle\sigma\rangle = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2\}$

1. (Punti 4) La sede di Torino della ACME Corporation vuole assumere 50 nuovi dipendenti. Si presentano 150 persone alla selezione, che consiste in un esame scritto da cui viene fatta una graduatoria. Vengono assunti i primi 50 classificati. Quanti sono i possibili insiemi distinti di nuovi dipendenti?
2. (Punti 4) Tra i 50 nuovi dipendenti assunti ci sono 27 donne e 23 uomini. In quanti modi si possono selezionare 4 dipendenti come rappresentanti dei nuovi lavoratori nel consiglio di amministrazione? E in quanti modi se vogliamo che tra i 4 rappresentanti ci sia almeno una donna?
3. (Punti 3) I 50 nuovi assunti sono tutti laureati, in particolare 22 sono laureati in Informatica e 35 sono laureati in ingegneria gestionale. Quanti sono i nuovi assunti con due lauree?

$|P| = 150$ ✓

1) $\binom{150}{50} = \dfrac{150!}{50!\cdot(150-50)!}$

2) 4 rappresentanti generici $\binom{50}{4} = \dfrac{50!}{4!\cdot46!} = 230300$ ✓

Con almeno 1 donna

_ _ _ _

$27\cdot\binom{23}{3} = \dfrac{23!}{3!\cdot20!} = \dfrac{23\cdot22\cdot21\cdot\cancel{20!}}{3!\cdot\cancel{20!}} = 1771$

Non funziona perché in questo caso si stà contando l'ordine

Conviene la sottrazione tra 4 su 50 e le possibilità di scegliere solo uomini 23 su 50

$= \binom{50}{4} - \binom{23}{4} = \dfrac{50!}{46!\cdot4!} - \dfrac{23!}{19!\cdot4!}$

3) $|I| = 22 \quad |G| = 35$

$|I\cup G| = 50$

$|I\cap G| = 22+35-50$

$= 7$ hanno 2 lauree ✓

Problema 1

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Si consideri il gruppo prodotto $(\mathbb{Q}^\times \times \mathbb{Z}_6, *)$ (si ricordi che su $\mathbb{Q}^\times$ l'operazione è la *moltiplicazione*, e su $\mathbb{Z}_N$ l'operazione è l'*addizione*).
Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}^\times \times \mathbb{Z}_6$$
$$n \longmapsto ((-1)^n, \overline{n})$$

1. (Punti 4) Dimostrare che f è un omomorfismo.
2. (Punti 4) Calcolare $\ker(f)$ e dire se f è iniettiva.
3. (Punti 3) Calcolare $\mathrm{im}(f)$, dire se è un gruppo ciclico e in caso affermativo calcolarne un generatore.

1) Ben definita?

Dati $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a = b \rightarrow f(a) = f(b)$

sse $a - b = 0$

sse

Omomorfismo

$f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$

$((-1)^{a+b}, \overline{a+b}) = ((-1)^a, \overline{a}) * ((-1)^b, \overline{b})$

$((-1)^{a+b}, \overline{a+b}) = ((-1)^{a+b}, \overline{a+b})$

Kernel

$\mathrm{Ker}(f) = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = (1, \overline{0})\}$

$= \{0, 6, 12, \dots\}$

Non è iniettiva

- Per il dominio di $\mathbb{Q}^\times \times \mathbb{Z}_6$ l'elemento neutro è 1 quindi per avere 1 n deve essere pari.
- Per il codominio, l'elemento neutro è $\overline{0}$ o $\overline{6n}$

Quindi è

$\{n \in \mathbb{Z} \mid 2 | n \wedge 6 | n\}$

$= \{n \in \mathbb{Z} \mid 6 | n\}$

mcm(2,6)

$6 = 3 \cdot \underline{2} + 0$

$\mathrm{Im}(f) = \{ (1, \overline{0}), (-1, \overline{1}), (1, \overline{2}), (-1, \overline{3}), (+1, \overline{4}), (-1, \overline{5}) \}$

$\mathbb{Q}^\times$ in questo caso è ciclico con periodo 2

$\mathbb{Z}_6$ è ciclico con periodo 6

$(\mathbb{Q}^\times, \mathbb{Z}_6)*$ è ciclico con periodo 6

$\langle g \rangle = \mathrm{Im}(f)$

Problema 2

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

1. (Punti 4) Calcolare il massimo comune divisore di 231 e 143 e scrivere l'identità di Bézout.
2. (Punti 4) Dire se le seguenti congruenze hanno soluzione e in caso affermativo risolverle.

$$a)\ 143X \equiv 55 \mod 231, \qquad b)\ 143X \equiv 8 \mod 231.$$

3. (Punti 3) Determinare l'inverso di $\bar{5}^{29999}$ in $\mathbb{Z}_{231}$

1) $MCD(231, 143) = 11$

$231 = 1 \cdot 143 + 88$

$143 = 1 \cdot 88 + 55$

$88 = 1 \cdot 55 + 33$

$55 = 1 \cdot 33 + 22$

$33 = 1 \cdot 22 + \underline{11}$

$22 = 2 \cdot 11 + 0$

$x \quad y$

$11 = 5 \cdot 231 - 8 \cdot 143$ Bezout ✓

$11 = 5 \cdot 88 - 3 \cdot 143 \Rightarrow 5 \cdot (231 - 1 \cdot 143) - 3 \cdot 143 \Rightarrow 5 \cdot 231 - 5 \cdot 143 - 3 \cdot 143$

$11 = 2 \cdot 88 - 3 \cdot 55 = 2 \cdot 88 - 3 \cdot (143 - 1 \cdot 88) = 2 \cdot 88 - 3 \cdot 143 + 3 \cdot 88$

$11 = 2 \cdot 33 - 1 \cdot 55 = 2 \cdot (88 - 1 \cdot 55) - 1 \cdot 55 \Rightarrow 2 \cdot 88 - 2 \cdot 55 - 1 \cdot 55$

$11 = 33 - 1 \cdot 22 \Rightarrow 33 - 1 \cdot (55 - 1 \cdot 33) \Rightarrow 33 - 1 \cdot 55 + 1 \cdot 33$

$22 = 55 - 1 \cdot 33 \qquad 55 = 143 - 1 \cdot 88$

$33 = 88 - 1 \cdot 55 \qquad 88 = 231 - 1 \cdot 143$

2) a) $143x \equiv 55 \mod 231$

$MCD(231, 143) = 11 \rightarrow 143$ non è invertibile ma $11 \mid 55$

$13\ \frac{\cancel{143}}{11} x \equiv \frac{\cancel{55}}{11}^{5} \mod \frac{\cancel{231}}{11}\ 21$

$MCD(13, 21) =$ $21 = 1 \cdot 13 + 8 \Rightarrow 1$

$13 = 1 \cdot 8 + 5$

$8 = 1 \cdot 5 + 3$

$5 = 1 \cdot 3 + 2$

$3 = 1 \cdot 2 + \underline{1}$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

$1 = 5 \cdot 21 - 8 \cdot 13 \Rightarrow \bar{1} = \overline{\cancel{5 \cdot 21} - 8 \cdot 13}$ $\bar{8}$ è inverso di 13

$1 = 5 \cdot 8 - 3 \cdot 13 \Rightarrow 5 \cdot (21 - 1 \cdot 13) - 3 \cdot 13 \Rightarrow 5 \cdot 21 - 5 \cdot 13 - 3 \cdot 13$

$1 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \Rightarrow 2 \cdot 8 - 3 \cdot (13 - 1 \cdot 8) \Rightarrow 2 \cdot 8 - 3 \cdot 13 + 3 \cdot 8$

$1 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 2 \cdot (8 - 1 \cdot 5) - 1 \cdot 5 \Rightarrow 2 \cdot 8 - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 5$

$1 = 3 - 1 \cdot (5 - 1 \cdot 3) = 3 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3$

$1 = 3 - 1 \cdot 2$

$2 = 5 - 1 \cdot 3 \qquad 5 = 13 - 1 \cdot 8$

$3 = 8 - 1 \cdot 5 \qquad 8 = 21 - 1 \cdot 13$

$-\cancel{8 \cdot 13} x \equiv 5 \cdot -8 \mod 21$

$x \equiv -40 \mod 21$

$\equiv 2 \mod 21$

$= \{2, 23, 44, 65, 86, 107, 128, 149, 170, 191, 212\}$ in $\mathbb{Z}_{231}$

b) $143x \equiv 8 \mod 231$

$MCD(143, 231) = 11$ 143 non è invertibile

e $11 \nmid 8$ per cui non è risolvibile

3) $MCD(5, 231)$

$231 = 46 \cdot 5 + 1$

$5 = 5 \cdot 1 + 0$

è invertibile

$\varphi(231) = \varphi(3) \cdot \varphi(7) \cdot \varphi(11) = 2 \cdot 6 \cdot 10 = 120$

$29999 = 249 \cdot 120 + 119$

$5^{29999} = \cancel{5}^{\cancel{120}\ 249} + 5^{119} \mod 231$

$226 \mod 231$

VERSIONE A

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Problema 1: Sia $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $T = \{0, 1, 3, 4\}$.

1. (Punti 3) Quanti sono i sottoinsiemi di S non contenenti il sottoinsieme T?
2. (Punti 4) Quanti sono i sottoinsiemi di S di cardinalità 8 non contenenti il sottoinsieme T?
3. (Punti 4) Quanti sono i sottoinsiemi di S di cardinalità 3 non contenenti due numeri consecutivi?

$30 \mid 2$
$15 \mid 5$
$3 \quad 3$
1

$\varphi(5)\cdot\varphi(2)\,\varphi(3) = 4 \cdot 2 = 8$

1) $2^{10} - 2^4$

2) $C_{10,8} = \binom{10}{8} - \binom{10}{4}$

3) R R _ _ $\quad 10 \cdot 9 = 2(10 \cdot 9)$

_ R R _ $\quad 10 \cdot 9$

$\binom{10+3-1}{10-1} = \frac{(10+3-1)!}{(10-1)! \cdot 3!} - 2(10\cdot 4) = 40$

Problema 2: Si consideri la permutazione

$$\sigma = (4\ 3\ 5)(6\ 1\ 3)(1\ 2\ 5\ 7\ 9)(8\ 4) \in S_9.$$

1. (Punti 4) Determinare tipo, periodo e parità di σ.
2. (Punti 3) Dire se esiste un intero $k \geq 0$ tale che $\sigma^k(1) = 8$ e se esiste un intero $h \geq 0$ tale che $\sigma^h(1) = 7$.
3. (Punti 4) Dimostrare che la funzione

$$f : \langle\sigma\rangle \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$$
$$f(\sigma^t) \longmapsto \overline{5t}$$

è ben definita ed è un omomorfismo. Determinare im(f) e ker(f).

1) $\sigma = (1,2,4,8,3)(5,7,9)$ $\quad$ tipo$(\sigma) = (5,3)$ $\quad$ Periodo$(\sigma) = 15$

Parità$(5,3)$ = D+D = P

2) con $\sigma^3 = (1,8,2,3,4)$

con h non esiste n tale che $(1,8,2,3,4)^h \Rightarrow (1,7,\ldots)$

3) dati σ^a, σ^b se $\sigma^a = \sigma^b \rightarrow f(\sigma^a) = f(\sigma^b)$

Omomorfismo $\quad$ sse $\sigma^{a-b} = id$

$f(\sigma^a \circ \sigma^b) = f(\sigma^a) + f(\sigma^b)$ $\quad$ sse $15 \mid a-b$

$f(\sigma^{a+b}) = \overline{5a} + \overline{5b}$ $\quad$ sse $75 \mid 5(a-b)$

$\overline{5(a+b)} = \overline{5(a+b)}$ $\quad$ sse $75 \mid 5a - 5b \rightarrow \overline{5a} = \overline{5b}$ $\quad$ Ben def.

$\frac{3}{15}$

$\frac{5}{75}$

è omomorfismo.

$\ker(f) = \{\sigma^n \mid f(\sigma^n) = 0 \bmod 15\}$ $\quad$ $\mathrm{Im}(f) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\}$

$= \{id, \sigma^3, \sigma^6, \sigma^9, \sigma^{12}\}$