SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO >

Dato un primo sistema, è lo stesso sistema ma con vettore dei coefficienti a 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + \dots + a_{1n}x_{1n} = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_{k1} + \dots + a_{kn}x_{kn} = b_k \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_{11} + \dots + a_{1n}x_{1n} = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_{k1} + \dots + a_{kn}x_{kn} = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare — Sistema omogeneo associato

Questo, ovviamente, si ripercuote sulle rappresentazioni delle matrici

---

SOLUZIONI SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO > (PROPRIETÀ)

- L'insieme delle soluzioni S_0 del sistema lineare omogeneo è sotto-spazio dello spazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.
- Mentre l'insieme delle soluzioni del sistema lineare non lo è.
- COSTRUZIONE SOLUZIONI

Data 1 soluzione del sistema lineare $x \in S$, si possono trovare tutte le altre soluzioni aggiungendo tutti i vettori soluzione del sistema omogeneo associato.

Es "Dato $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ con 1 soluzione $x=2$ e $y=3$"

(1) Monto il sistema associato

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{t}{2}+y=0 \\ \frac{2x}{2}=-\frac{t}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{t}{2} \\ x=\frac{-t}{2} \end{cases} \qquad sol \Rightarrow t(\underset{x}{-1},\underset{y}{1})$$

(2) Aggiungo le soluzioni

$(2,3)+(-t,t) \Rightarrow \underline{(2-t,3+t)}$ es con $t=5$ $(-3,8)$ $\begin{cases} -3+8=5 \\ -6+8= \end{cases}$

SOTTO-SPAZIO AFFINE >

Dato uno spazio vettoriale V e un suo sotto-spazio W, lo è il sotto-insieme formato dall'aggiunta di tutti i $w \in W$ al vettore $x \in V$

$S = \{x + w \mid x \in V \wedge w \in W\}$ → ≡ costruzione soluzioni. $\dim(S) = \dim(W)$

RANGO > CALCOLO

Il rango è dato dal numero di colonne con pivot.

ES
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$rnk(A)=3$ $rnk(A)=2$ $R_2 \to R_2 - 4R_1$, $R_3 \to R_3 - 2R_1$ $rnk(A)=2$

Si può usare gauss

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI >

Dice che

- Ci sono soluzioni, solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa.

  $rnk(A) = rnk(A|b) \iff A$ ha soluzioni

- Il numero di soluzioni è
  - 0 -> se $rnk(A) \neq rnk(A|b)$
  - 1 -> se // = // e $rnk(A) = n$ (Numero di colonne di A)
  - 2 -> se // = // e $rnk(A) < n$ con $n - rnk(A)$ parametri

con n la dimensione della matrice

ES "con $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

(0) Applico gauss : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$

(1) controllo ranghi $rnk(A)=2$ $rnk(A|b)=2 \to$ Ha soluzioni

$rnk(A) < n \to$ Ha ∞ soluzioni per $3-2=1$ parametri

ES "con $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

(0) Gauss: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{l} rnk(A)=1 \\ rnk(A|b)=2 \end{array}\right\}$ non ha soluzioni

---

SOLUZIONI CON MATRICI INVERTIBILI >

Se si nota che la matrice è invertibile, allora ha 1 unica soluzione calcolabile come:

$x = b \cdot A^{-1}$ con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vettore incognite
$b = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ vettore termini noti

ES: con $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1) Trovo A^{-1}

$\frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t(\mathrm{cof})$

$\det(A) = 4 - 3 = 1$

$11 = (-1)^{1+1} \cdot \det(2) = 2 \quad 12 = (-1)^{1+2} \cdot \det(1) = -1$

$21 = (-1)^{2+1} \cdot \det(2) = 2 \quad 22 = \cancel{(-1)} \cdot \det(2) = 2$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\cancel{2} & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

L13 • SISTEMI LINEARI III & APPLICAZIONI LINEARI I

COORDINATE RISPETTO A BASE >

Data una base $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale V, sappiamo che ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come

$$\bar{v} = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 \cdot \lambda_n \cdot b_n$$

Le coordinate del vettore $\bar{v}$ generato dalla combinazione lineare sono gli scalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Si possono trovare mettendo a sistema gli scalari incogniti col dato vettore noto:

ES: " Data la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ trovare il vettore delle coordinate per $\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$ "

(1) Definisco sistema

$$\lambda_1 \cdot (1,1,0) + \lambda_2 \cdot (0,1,1) + \lambda_3 \cdot (1,1,-1) = (3,3,-2)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \\ 0 + \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \frac{1-\lambda_1}{2} \\ \lambda_3 = +2 + \lambda_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

le coord. per $\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

(2) Verifico

$$(1,1,0) + 0 + (2,2,-2) = (3,3,-2) \checkmark$$

L13 • SISTEMI LINEARI III & APPLICAZIONI LINEARI I

APPLICAZIONI LINEARI >

È una funzione f che mappa 2 spazi vettoriali dello stesso campo:

$f: V \to W$ con V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$

In cui, per ogni $v_1, v_2 \in V$ dominio

- $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$

  Ovvero, l'immagine della somma DEVE coincidere con la somma delle immagini.

- $f(\lambda \cdot \bar{v}) = \lambda \cdot f(\bar{v})$

  Ovvero, il prodotto per scalare del vettore DEVE coincidere con il prodotto scalare per l'immagine.

ES: Verificare in $\mathbb{R}^3$ che $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $f: (x,y,z) \mapsto (x+y, x, x-z)$ sia un'app. lineare"

(1) Definisco i 2 vettori generici $\bar{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$
$\bar{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

(2) Verifico le proprietà

(2.a) Somma

$$\bar{v}_1+\bar{v}_2 = (\underbrace{x_1+x_2}_{x}, \underbrace{y_1+y_2}_{y}, \underbrace{z_1+z_2}_{z})$$

$$f(\bar{v}_1+\bar{v}_2) = (\overbrace{x_1+x_2+y_1+y_2}^{x+y}, \overbrace{x_1+x_2}^{x}, \overbrace{x_1+x_2-z_1-z_2}^{x-z})$$

$$f(\bar{v}_1) = (x_1+y_1, x_1, x_1-z_1) \qquad f(\bar{v}_2) = (x_2+y_2, x_2, x_2-z_2)$$

$$f(\bar{v}_1)+f(v_2) = (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2, x_1+x_2-z_1-z_2)$$

$f(\bar{v}_1+\bar{v}_2) = f(\bar{v}_1)+f(\bar{v}_2)$ ok

(2.b) Prod.

$$\left.\begin{array}{l} f(\lambda \cdot v_1) = (\overbrace{\lambda x_1 + \lambda y_1}^{=\lambda\cdot(x_1+y_1)}, \lambda x_1, \overbrace{\lambda x_1 - \lambda z_1}^{=\lambda\cdot(x_1-z_1)}) \\ \lambda \cdot f(v_1) = (\lambda\cdot(x_1+y_1), \lambda x_1, \lambda(x_1-z_1)) \end{array}\right] \text{ ok}$$

APPLICAZIONI LINEARI > COMBINAZIONI LINEARI

Per la 2° proprietà delle applicazioni lineari, si può ricostruire il vettore del co-dominio partendo dalla combinazione lineare del dominio

$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$ su V

e ho come app. lin $f: V \to W$

$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ → 2° prop.

$f(v) = f(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n)$

$// \quad = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2) + \dots + \lambda_n \cdot f(v_n)$

Applico 1° e 2° proprietà

ES: Dato $v = (1,2,3)$ su V con Base $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

e $f: V \to W$ $\quad f: v \mapsto (x+y, x, x-z)$

(1) Comb. lin del dominio

$(1,2,3) = 1 \cdot (1,0,0) + 2 \cdot (0,1,0) + 3 (0,0,1)$

(2) Applico f

$f(b_1) = (1,1,1) \quad f(b_2) = (1,0,0) \quad f(b_3) = (0,0,-1)$

Quindi $f(v_1) = 1 \cdot (1,1,1) + 2 \cdot (1,0,0) + 3 \cdot (0,0,-1)$

$= (1,1,1) + (2,0,0) + (0,0,-3) = (3,1,-2)$

(3) Verifico

$f((1,2,3)) = (1+2, 1, 1-3)$

$= (3, 1, -2)$ OK coincidono

L14 • APPLICAZIONI LINEARI II

APPL. LINEARE > APPLICAZIONI BANALI

- **APP. IDENTITÀ** : $f: V \to V \quad \bar{v} \mapsto \bar{v}$
- **APP. NULLA** : $f: V \to W \quad \bar{v} \mapsto \bar{0}_W$

APPL. LINEARE > "LEFT"

Dato lo spazio vettoriale $V = \mathbb{K}^n$ e lo spazio $W = \mathbb{K}^m$ la left, data una matrice $A \in M(n, m, \mathbb{K})$:

$$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \qquad \bar{v} \mapsto A \cdot \bar{v}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$$

Left di A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + \dots +$$

$$x_1 \cdot A^1 + x_2 \cdot A^2 + x_n \cdot A^n$$

Left sta a indicare che la matrice deve stare a sinistra

ES: $V = \mathbb{R}^2 \quad W = \mathbb{R}^3 \quad f: V \to W \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

NUCLEO > (SOLO DEFINIZIONE, CALCOLO LEZIONI DOPO)

Dati gli spazi vettoriali V, W e l'applicazione lineare $f: V \to W$, allora il Kernel / Nucleo sono tutti i vettori del dominio V per cui mappano all'origine in W:

$$\text{Ker } f = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = 0_W \}$$

Proprietà

- $\bar{0}_V \in \text{Ker} f$ per $f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$ L'origine è contemplata
- $\text{Ker } f$ è sotto-spazio del dominio V
- L'applicazione f è iniettiva sse $\text{Ker } f = \{\bar{0}_V\}$

IMMAGINE > (SOLO DEF.)

Sono gli elementi dello spazio W che sono raggiunti dall'app. lineare:

- $\text{Im } f$ è sotto-spazio del co-dominio W
- L'applicazione f è suriettiva se immagine e co-dominio coincidono $W = \text{Im} f$

IMMAGINE > CALCOLO COI GENERATORI

Se si sa che i vettori $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ dominio $f: V \to W$ sono generatori di V ($Span(v_1, v_2, ..., v_n) = V$) si può calcolare l'immagine:

$$Im f = Span(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n))$$

Proprietà:

- $Im\, L_A = Span(L_A(e_1), ..., L_A(e_n)) = Span(A^1, A^2, ..., A^n)$
  Per le left, l'immagine è composta dalle colonne
- $dim(Im\, L_A) = dim(Span(A^1, A^2, ..., A^n)) = rnk(A)$
  La dimensione della left è il rango per colonne della matrice

ES: Dato $\mathbb{R}^3$ con Base $= \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ e co-dominio $\mathbb{R}^3$ per
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x+y\\x\\x-z\end{pmatrix}$

determinare l'immagine

(1) Osservazioni: Se $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ è Base di V, allora è anche generatore $Span\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^3$

(2) Applico f: $f(e_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

Quindi $Im f = Span\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \right)$

TEOREMA DELLA DIMENSIONE >

Data l'applicazione $f: V \to W$ se si sa la $dim\, V$

$$dim\, V = dim(Ker f) + dim(Im f)$$

In particolare usando $f = L_A$ porterei a rondé capelli

$$n = \underset{\substack{\uparrow \\ A \cdot x = 0}}{dim\, S} + dim(Im\, L_A) \implies dim\, S = n - dim(Span(A^1, ..., A^n)) = n - rnk(A^1, ..., A^n)$$

DIMENSIONE > PROPRIETÀ (con dim finite)

- $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim V$
- f è iniettiva
  - sse $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$
  - sse $\dim V \leq \dim W$
- f è suriettiva
  - sse $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$
  - sse $\dim V \geq \dim W$

ISOMORFISMI > (DEF)

È un applicazione lineare biettiva.
Dati 2 spazi vettoriali V, W, sono isomorfi se esiste 1 isomorfismo
Proprietà:

- Hanno funzione inversa f^{-1} isomorfismo
  $[f \circ f^{-1} = id_W, \ f^{-1} \circ f = id_V]$

MATRICE ASSOCIATA >

Data un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali $f: V \to W$ dei quali con basi $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$

Applicando la funzione f su ogni elemento della base del dominio si avrà l'insieme delle immagini

$\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$

$f(v_1) = a_1 \cdot w_1 + a_2 \cdot w_2 + \dots + a_m \cdot w_m$

$\vdots$

$f(v_n) = \lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 + \dots + \lambda_m \cdot w_m$

Per def., ogni immagine è rappresentabile come combinazione lineare della base del co-dominio C

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \cdots & \lambda_1 \\ a_2 & b_2 \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m & b_m \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} \\ f(v_1) \quad f(v_2) \cdots f(v_n) \end{array} = [A]^B_C$$

$A \in M(m, n)$

La matrice associata sarà quindi la matrice con colonne i coeff. usati per generare ogni imagine di ogni membro della base del dominio.

ES: Determinare la matrice associata per l'applicazione lineare:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y, z) \mapsto (2x + y,\ y - z)$

(1) Definisco una base

DOMINIO: base canonica in $\mathbb{R}^3$ $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $\mathcal{E}_3 = A$

CO-DOMINIO: base canonica in $\mathbb{R}^2$ $\{(1,0), (0,1)\}$ $\mathcal{E}_2 = B$

(2) Calcolo le immagini

$f(e_1) = (2+0, 0) = (2, 0) \qquad f(e_2) = (1, 1) \qquad f(e_3) = (0, -1)$

(3) Calcolo le combinazioni lineari

$\lambda_1 \cdot (1,0) + \lambda_2 \cdot (0,1) = (2,0)$

$\begin{cases} \lambda_1 + \cancel{0\lambda_2} = 2 \\ \cancel{0 \cdot \lambda_1} + 1 \cdot \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$

$(2, 0) = A^1$

$\lambda_1 \cdot (1,0) + \lambda_2 \cdot (0,1) = (1,1)$

$\begin{cases} \lambda_1 + 0 = 1 \\ 0 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

$(1, 1) = A^2$

$\lambda_1 \cdot (1,0) + \lambda_2 \cdot (0,1) = (0,-1)$

$\begin{cases} \lambda_1 + 0 = 0 \\ 0 + \lambda_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

$(0, -1) = A^3$

(4) Monto la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

MATRICE ASSOCIATA >

ES (con basi non canoniche): Calcolare la matrice associata a

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y,z) \mapsto (2x+y,\ y-z)$ con basi $B = \{(1,-2,-2),(0,1,1),(0,0,1)\}$

$C = \{(1,1),(1,-1)\}$

(0): Ho le basi fisse: ✓

(1): Calcolo l'immagine:

- $f(b_1) = (2\cdot 1 + (-2),\ -2-(-2)) = (0,0)$
- $f(b_2) = (2\cdot 0 + 1,\ 1-1) = (1,0)$
- $f(b_3) = (2\cdot 0 + 0,\ 0-1) = (0,-1)$

(2) Calcolo le combinazioni lineari

$\lambda_1\cdot(1,1)+\lambda_2\cdot(1,-1) = (0,0)$

$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1-\lambda_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_1 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1\cdot(1,1)+\lambda_2\cdot(1,-1) = (1,0)$

$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1-\lambda_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\lambda_1 = 1 & \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = \lambda_1 & \lambda_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\lambda_1\cdot(1,1)+\lambda_2\cdot(1,-1) = (0,-1)$

$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1-\lambda_2 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\lambda_1 = 1 & \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = +1+\lambda_1 & \Rightarrow \lambda_2 = +\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(3) Unisco i ris:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

MATRICE ASSOCIATA > PROPRIETÀ

- Se le basi sono canoniche e l'applicazione lineare è una "Left"

$[A]_C^B = A$ per B, C basi canoniche

MATRICI DEL CAMBIO DI BASE >

Data un'applicazione lineare
$f: V \to W$ con:
- E base del dominio V
- F // = co-dominio W

Per def. la matrice associata è
$[A]^E_F$

Date altre basi E_1 per il dominio ed F_1 per il co-dominio, con matrice associata $[B]^{E_1}_{F_1}$

Le matrici del cambiamento di base sono le matrici per cui è possibile ottenere la nuova matrice associata:
$Q^{-1} \cdot [A]^E_F \cdot P = [B]^{E_1}_{F_1}$ con $P \in M(m)$ m = dim dominio
$Q^{-1} \in M(n)$ n = // co-dominio

In cui:
- P può essere intesa come
  - $\equiv$ $[id]^{E_1}_E$: la matrice associata della base precedente rispetto alla successiva.
  - $P^{E \to E_1}$: la matrice che contiene come colonne le coordinate delle combinazioni lineari (con vettori della vecchia base) che generano gli elementi della nuova base.
- Q Idem come P ma con le basi F, F_1

MATRICI DEL CAMBIO DI BASE

ES: Data l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con la matrice associata rispetto alle basi canoniche $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$, calcolare la matrice associata per le basi
- $E_1 = \{(1,-2,-2), (0,1,1), (0,0,1)\}$
- $E_2 = \{(1,1), (1,-1)\}$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) $[B]_{E_2}^{E_1} = Q^{-1} \cdot [A]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_1} \cdot P$ - Calcolo P

$$P^{\mathcal{E}_1 \to E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \cdot (1,0,0) + \lambda_2 \cdot (0,1,0) + \lambda_3 \cdot (0,0,1) = (1,-2,-2)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0 + 0 = 1 \\ 0 + \lambda_2 + 0 = -2 \\ 0 + 0 + \lambda_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \cdot (1,0,0) + \lambda_2 \cdot (0,1,0) + \lambda_3 \cdot (0,0,1) = (0,1,1)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + \lambda_2 + 0 = 1 \\ 0 + 0 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \cdot (1,0,0) + \lambda_2 \cdot (0,1,0) + \lambda_3 \cdot (0,0,1) = (0,0,1)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + \lambda_2 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{F \to F_1} = [id]_F^{F_1} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 \cdot (1,0) + \lambda_2 \cdot (0,1) = (1,1)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0 = 1 \\ 0 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \cdot (1,0) + \lambda_2 \cdot (0,1) = (1,-1)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0 = 1 \\ 0 + \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} \cdot {}^t(\mathrm{cof}(Q))$

- $\det Q = (-1) - 1 = -2$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cof}(Q) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = {}^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$11 = (\cancel{-1}) \cdot \det(-1) = -1$ $\quad 12 = (-1)^1 \cdot \det[1] = -1$

$21 = (-1)^{\cancel{1}} \cdot \det[1] = -1$ $\quad 22 = (\cancel{-1})^4 \cdot \det(1) = 1$

L15 • APPLICAZIONI LINEARI III

MATRICI DEL CAMBIO DI BASE

ES:

(2): Applico la formula

$$[B]^{E_1}_{F_1} = Q^{-1} \cdot [A]^{E}_{F} \cdot P$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$11 = 1 - 2 + 1 = 0 \qquad 12 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad 13 = -\frac{1}{2}$

$21 = 1 - 1 = 0 \qquad 22 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \qquad 23 = \frac{1}{2}$

L16 • APPLICAZIONI LINEARI IV

MATRICE ASSOCIATA > GENERAZIONE IMMAGINI

A partire dalla matrice associata $[A]^B_C$ si possono calcolare tutte le immagini del co-dominio:

$$\underbrace{[f(v)]_C}_{} = \underbrace{[A]^B_C}_{} \cdot \underbrace{[v]_B}_{}$$

Il vettore nel codom — La matrice associata — Il vettore delle coordinate nella base $B \to v = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \dots + \lambda_n \cdot b_n$

ES: Data l'applicazione lineare $f: V \to W$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y,z) \mapsto (2x+y,\ y-z)$ con basi $B = \{(1,-2,-2),(0,1,1),(0,0,1)\}$

$C = \{(1,1),(1,-1)\}$

e matrice associata $[A]^B_C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

calcolare l'immagine di $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(1) Trovo i coeff. di v $\quad \lambda_1 \cdot (1,-2,-2) + \lambda_2 \cdot (0,1,1) + \lambda_3 (0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ -2 + \lambda_2 = 2 \Rightarrow \\ = \end{cases} \begin{cases} = \\ \lambda_2 = 4 \\ = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \\ -2+4+\lambda_3 = 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases} \qquad (1,-2,-2) + (0,4,4) + (0,0,1) = (1,2,3) \checkmark$$

(2) Formula $\quad [f(v)]_C = [A]^B_C \cdot [v]_B$

$$[f(v)]_C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \qquad \frac{3}{2} \cdot (1,1) + \frac{5}{2}(1,-1)$$

$11 = 0 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$

$21 = 0 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$

$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$= (4, -1)$$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2+2,\ 2-3) \leftarrow$ ok

$= (4, -1)$

COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI >

Date due applicazioni lineari $f: V \to W$, $g: W \to U$ allora si possono comporre come:

$$g \circ f = V \to U \quad \text{con} \quad v \mapsto w \mapsto u$$

Nel caso delle Left, la composta sarà la left del prodotto delle matrici

$$L_A: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k \qquad L_B: \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n \qquad L_B \cdot L_A = L_{B \cdot A}: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$$

COMPOS. APP. LIN > MATRICE ASSOCIATA

Si può calcolare come il prodotto tra le matrici associate di dominio e co-dominio invertite:

$$f: V \to W \quad , g: W \to U \qquad g \circ f: V \to U$$

$$[A]^M_N \qquad [B]^N_O \quad = [C]^M_O = [B]^N_O \cdot [A]^M_N$$

Controllo veloce: $\underline{N} \quad O \quad M \quad \underline{N}$ ✓
- gli estremi devono =
- gli interni devono essere al contrario.

ES: "Data $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $f(v) = (x+y, -x, y)$, $g(w) = (x-y, y-z)$
Determinare la matrice associata dell'applicazione lineare. [con basi canoniche]

(0) Determino le matrici associate

$$[A]^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_3}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [B]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) Determino la matrice composta

$$C^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_2}(g \cdot f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$11 = 1 + 1 = 2$ $\qquad$ $12 = 1 + 0 + 1 = 2$

$21 = 0 - 1 + 0 = -1$ $\qquad$ $22 = 0 + 0 + 1 = 1$

METODO ALT: (DIRETTO)

$$g \circ f = (\overbrace{[x+y]}^{x}\overbrace{+x}^{-y}, \overset{y}{-x} \overset{+z}{+y})$$

$$g = (x - y, y + z)$$

ISOMORFISMI E MAT ASSOCIATE

Se un'applicazione è isomorfismo, con $f: V \to W$, allora si può calcolare l'inversa della matrice associata

da $[A]^B_C$ a $[B]^C_B f^{-1}$ = inversa

ENDOMORFISMI (SOLO DEF)

Sono applicazioni lineari che hanno come dominio e co-dominio lo stesso spazio vettoriale

$f: V \to V$

SIMILITUDINE TRA MATRICI

Date 2 matrici $A, B \in M(m,n,K)$ sono simili sse. esiste una terza matrice invertibile C per la quale

$A = M^{-1} \cdot B \cdot M \iff A \sim B$

- È commutativa
  $A \sim B \iff B \sim A$
- Si possono "concatenare"
  $A \sim B,\ B \sim C \iff A \sim C$
- Simile a se stesso
  $A \sim A$ per $A = (I_n)^{-1} \cdot A \cdot I_n$

AUTO-VALORI / AUTO-VETTORI > (DEF.)

VALIDATORI > ! Auto-valori e Auto-vettori ci sono solo se si parla di endorfismo.

PREMESSA > Dato uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ e un endorfismo $f: V \to V$

Sono detti auto-vettori e auto-valori i vettori e scalari per cui l'applicazione dell'endorfismo risulta nel prodotto per scalare del vettore.

$f(v) = \lambda \cdot v$ sse
- v è auto-vettore
- λ è auto-valore

COME TROVARE AUTO-VALORI >

1. Trovare la [matrice associata] dell'endorfismo.
2. Calcolare il polinomio sulla matrice associata:
   $A = [A]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} \to p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n)$
3. Le radici del polinomio caratteristico saranno gli auto-valori

ES: "Dato l'endorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z) = (x, y+z, x+y+z)$ trovare gli auto-valori."

(0) Trovo le basi da usare per la mat. associata: uso le canoniche $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

(1) Calcolo la matrice associata:

$\lambda_1 \cdot (1,0,0) + \lambda_2 \cdot (0,1,0) + \lambda_3 \cdot (0,0,1) = (1,0,1) = f(e_1)$ $\quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$

$\lambda_1 \cdot (1,0,0) + \lambda_2 \cdot (0,1,0) + \lambda_3 \cdot (0,0,1) = (0,1,1) = f(e_2)$ $\quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$

$\lambda_1 \cdot (1,0,0) + \lambda_2 \cdot (0,1,0) + \lambda_3 \cdot (0,0,1) = (0,1,1) = f(e_3)$ $\quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$

$$[A]^{e_3}_{e_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

COME TROVARE AUTO-VALORI >

ES (CONTINUAZIONE):

(2) Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p_A = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

[USO LAPLACE] con $i=1$ perché ha più 0 sulla riga

$j=1 \to \cancel{(-1)}^{2} \cdot (1-\lambda) \cdot \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow (1-\lambda) \cdot [(1-\lambda)^2 - 1]$

= DIFF DI QUADRATI

$(A-B)^2 = (A+B)(A-B)$

$A = (1-\lambda) \quad B = 1$

$= (1-\lambda) \cdot [(1-\lambda+1)(1-\lambda-1)]$

$= (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (0-\lambda)$

$j=2 \to (-1)^{1+2} \cdot 0 = 0$

$j=3 \to \cancel{(-1)}^{1+3} \cdot 0 = 0$

(3) Determino le radici

sappiamo che i polinomi $(x-a)$ sono divisori del polinomio $p(x)$ sse a è radice di $p(x)$

In questo caso $(1-\lambda) \overset{\cdot -1}{=} (\lambda - 1)$ per $p_A(\lambda)$ quindi sono radici

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 0$

COME TROVARE GLI AUTO-VETTORI >

1. Trovare gli [auto-valori]
2. Usando la matrice del polinomio caratteristico $[A]_C^C - I_n = H$

   Montare il sistema $H \cdot \vec{v} = 0_V$ ovvero $H \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$
3. Risolvere il sistema (con Gauss o in maniera diretta) più volte valorizzando λ con tutti gli auto-valori trovati

COME TROVARE AUTO-VALORI >

ES: Dato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z) = (x, y+z, x+y+z)$ con auto-valori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$ e matrice del polinomio caratteristico $M = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ trovare gli auto-vettori.

(1) = (2) Per conseguire

(3) Risolvo il sistema (diretta) come $A \cdot v = 0$ con $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (1-\lambda)\cdot x = 0 \\ (1-\lambda)\cdot y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)\cdot z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \in \mathbb{R} \\ y = -t \end{cases} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$\begin{cases} -x = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y + t = 0 \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = t \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 0}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = t \in \mathbb{R} \\ t + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

MATRICI DIAGONALIZZABILI >

Una matrice è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale

A è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ $A \sim B$ con $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

$\exists P \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = B$