

**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά**  
**Τμήμα Πληροφορικής ΑΠΘ, 21/9/2021**

**ΑΕΜ που λήγουν σε 0 ή 1 ή 8 ή 9**

**Θέμα 1. (45%)**

α) (10%) Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$2x^2 y'(x) = x^2 + y^2, \quad x \neq 0, \quad y(1) = 3.$$

β) (15%) Με δεδομένο ότι η  $y_1 = x$  είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1,$$

βρείτε τη γενική της λύση.

γ) (20%) Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace, λύστε το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\left. \begin{aligned} x'(t) + 2y'(t) - 2y(t) &= t \\ x(t) + y'(t) - y(t) &= 1 \\ x(0) = y(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

**Θέμα 2. (40%)**

α) (10%) Λύστε την εξίσωση  $z^4 = 1 + i$ .

β) (15%) Βρείτε τα  $z \in \mathbb{C}$  για τα οποία η συνάρτηση

$$f(z) = z \operatorname{Re}(z), \quad z = x + iy$$

είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγο  $f'(z)$ .

γ) (15%) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\oint_C \bar{z} dz$  κατά μήκος της θετικά προσανατολισμένης

καμπύλης  $C = C_1 \cup C_2$ , όπου  $C_1$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία  $(-1,0)$  και  $(1,0)$  και  $C_2$  το κάτω ημικύκλιο του κύκλου με κέντρο το 0 και ακτίνα 1.

**Θέμα 3. (15%)**

Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

*Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία*

**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά**  
**Τμήμα Πληροφορικής ΑΠΘ, 21/9/2021**

**ΑΕΜ που λήγουν σε 2 ή 4 ή 6**

**Θέμα 1.** (45%)

α) (10%) Λύστε τη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\cos y \, dx + (y^2 - x \sin y) dy = 0.$$

β) (15%) Με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων, βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2},$$

Υπόδειξη:  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x.$

γ) (20%) Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace, λύστε το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\left. \begin{aligned} x'(t) + 2y'(t) - 2y(t) &= 1 \\ x(t) + y'(t) - y(t) &= 2t \\ x(0) = y(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

**Θέμα 2.** (40%)

α) (10%) Λύστε την εξίσωση  $e^z = -4.$

β) (15%) Βρείτε τα  $z \in \mathbb{C}$  για τα οποία η συνάρτηση

$$f(z) = x^2 + y^2 + i2xy, \quad z = x + iy$$

είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγο  $f'(z).$

γ) (15%) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\oint_C \bar{z} \, dz$  κατά μήκος του θετικά προσανατολισμένου τριγώνου  $C$  με κορυφές τα σημεία  $-1, 1$  και  $i.$

**Θέμα 3.** (15%)

Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

*Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία*

**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά**  
**Τμήμα Πληροφορικής ΑΠΘ, 21/9/2021**

**ΑΕΜ που λήγουν σε 3 ή 5 ή 7**

**Θέμα 1.** (45%)

α) (10%) Λύστε τη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y'(x) - \frac{3}{x}y(x) = x^4, \quad x > 0.$$

β) (15%) Με δεδομένο ότι η  $y_1 = x^2$  είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad x > 0,$$

βρείτε τη γενική της λύση.

γ) (20%) Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace, λύστε το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) + y(t) \\ y'(t) &= 3x(t) + 4y(t) \\ x(0) &= 1, \quad y(0) = 0 \end{aligned} \right\}$$

**Θέμα 2.** (40%)

α) (10%) Λύστε την εξίσωση  $z^3 = -i$ .

β) (15%) Βρείτε τα  $z \in \mathbb{C}$  για τα οποία η συνάρτηση

$$f(z) = x^2 - iy^2, \quad z = x + iy$$

είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγο  $f'(z)$ .

γ) (15%) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\oint_C \bar{z} dz$  κατά μήκος της θετικά προσανατολισμένης

καμπύλης  $C = C_1 \cup C_2$ , όπου  $C_1$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία  $(-1,0)$  και  $(1,0)$  και  $C_2$  το άνω ημικύκλιο του κύκλου με κέντρο το 0 και ακτίνα 1.

**Θέμα 3.** (15%)

Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

*Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία*