

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
Τμήμα Πληροφορικής ΑΠΘ, 17/6/2021

ΑΕΜ που λήγουν σε 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8

Θέμα 1. (50%)

α) (15%) Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + \frac{1}{3}y(x) = e^x y^4(x).$$

β) (15%) Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x.$$

γ) (20%) Με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace, λύστε το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\left. \begin{aligned} x'(t) + 2y'(t) - 2y(t) &= t \\ x(t) + y'(t) - y(t) &= 1 \\ x(0) = 0, \quad y(0) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

[Τυπολόγιο Μετασχηματισμού Laplace: $L\{f(t)\} \equiv F(s)$, $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, $L\{1\} = \frac{1}{s}$, $L\{t\} = \frac{1}{s^2}$, $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$]

Θέμα 2. (40%)

α) (10%) Λύστε την εξίσωση $z^3 = \sqrt{3} - i$, σχεδιάστε τις λύσεις της στο μιγαδικό επίπεδο, και αναφέρετε τη χαρακτηριστική γεωμετρική ιδιότητά τους.

β) (15%) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = |z|$ δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα $z \in \mathbb{C}$.

γ) (15%) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C \bar{z} dz$ στην περίμετρο C του τριγώνου με κορυφές τα σημεία 0, 1 και i (κατά την αντιωρολογιακή φορά).

Θέμα 3. (10%)

Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
Τμήμα Πληροφορικής ΑΠΘ, 17/6/2021

ΑΕΜ που λήγουν σε 1 ή 3 ή 5 ή 7 ή 9

Θέμα 1. (50%)

α) (15%) Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x - xy^2) dx + (8y - x^2 y) dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

β) (15%) Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = e^{2x}.$$

γ) (20%) Με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace, λύστε το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\left. \begin{aligned} x'(t) + y(t) &= e^{-t} \\ y'(t) - x(t) &= 3e^{-t} \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = 1 \end{aligned} \right\}.$$

[Τυπολόγιο Μετασχηματισμού Laplace: $L\{f(t)\} \equiv F(s)$, $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$,

$$L\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad L\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}]$$

Θέμα 2. (40%)

α) (10%) Λύστε την εξίσωση $z^3 = \sqrt{3} + i$, σχεδιάστε τις λύσεις της στο μιγαδικό επίπεδο, και αναφέρετε τη χαρακτηριστική γεωμετρική ιδιότητά τους.

β) (15%) Βρείτε τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία η συνάρτηση

$$f(z) = x^2 - iy^2, \quad z = x + iy$$

είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγο $f'(z)$.

γ) (15%) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C \bar{z} dz$ στην περίμετρο C του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $0, -1$ και i (κατά την ωρολογιακή φορά).

Θέμα 3. (10%)

Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία