

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
Τμήμα Πληροφορικής ΑΠΘ, 17/2/2021

ΑΕΜ που λήγουν σε 0 ή 1 ή 8 ή 9

Θέμα 1. (40%)

α) (10%) Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y(x) y'(x) + (1 + y^2(x)) \sin x = 0, \quad y(0) = 1.$$

β) (15%) Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x > 0.$$

γ) (15%) Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace, λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''(t) + y(t) = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

$$\text{όπου } f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}.$$

Θέμα 2. (40%)

α) (10%) Λύστε την εξίσωση $e^z = -1 - i$.

β) (15%) Βρείτε τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία η συνάρτηση

$$f(z) = y - 2xy + i(-x + x^2 - y^2) + (x + iy)^2, \quad z = x + iy$$

είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγο $f'(z)$.

γ) (15%) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\oint_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{\sin(5z)}{(z-z_0)^3} dz$ για $z_0 = \pi$ και $z_0 = \frac{\pi}{2}$.

Θέμα 3. (20%)

Βρείτε τους μετασχηματισμούς Fourier των συναρτήσεων (όπου $\tau \in \mathbb{R}$)

α) (10%)
$$f(t) = \begin{cases} 1, & 1 - \tau \leq t \leq 1 + \tau \\ 0, & |t - 1| > \tau \end{cases}$$

β) (10%)
$$g(t) = \begin{cases} 0, & |t| \leq \tau \\ \cos t, & |t| > \tau \end{cases}.$$

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
Τμήμα Πληροφορικής ΑΠΘ, 17/2/2021

ΑΕΜ που λήγουν σε 2 ή 4 ή 6

Θέμα 1. (40%)

α) (10%) Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x y'(x) + 3y(x) = \frac{\sin x}{x^2}, \quad x > 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

β) (15%) Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}, \quad x > 0.$$

γ) (15%) Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace, λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''(t) + y(t) = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

$$\text{όπου } f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}.$$

Θέμα 2. (40%)

α) (10%) Λύστε την εξίσωση $e^z = -1 + i\sqrt{3}$.

β) (15%) Αποδείξτε, με τη βοήθεια των συνθηκών Cauchy-Riemann, ότι η συνάρτηση

$$f(z) = e^{z^2}, \quad z = x + iy$$

είναι αναλυτική στο \mathbb{C} και υπολογίστε την παράγωγο $f'(z)$.

γ) (15%) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\oint_{|z-3|=\frac{1}{2}} \frac{\cos(5z)}{(z-z_0)^3} dz$ για $z_0 = \pi$ και $z_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Θέμα 3. (20%)

Βρείτε τους μετασχηματισμούς Fourier των συναρτήσεων (όπου $\omega_0, \varphi, \tau \in \mathbb{R}$)

α) (10%) $f(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$

β) (10%) $g(t) = \begin{cases} \cos t, & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}.$

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
Τμήμα Πληροφορικής ΑΠΘ, 17/2/2021

ΑΕΜ που λήγουν σε 3 ή 5 ή 7

Θέμα 1. (40%)

α) (10%) Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(2y^2(x)+1)y'(x) = y(x) \cos x, \quad y(0) = 1.$$

β) (15%) Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \cos(e^x)..$$

γ) (15%) Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace, λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''(t) + y(t) = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

$$\text{όπου } f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}.$$

Θέμα 2. (40%)

α) (10%) Λύστε την εξίσωση $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.

β) (15%) Βρείτε τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία η συνάρτηση

$$f(z) = |z|^2 - \bar{z}^2, \quad z = x + iy$$

είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγο $f'(z)$.

γ) (15%) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{5z}}{(z-z_0)^3} dz$ για $z_0 = \frac{\pi}{2}$ και $z_0 = \frac{\pi}{4}$.

Θέμα 3. (20%)

Βρείτε τους μετασχηματισμούς Fourier των συναρτήσεων (όπου $\omega_0, \varphi, \tau \in \mathbb{R}$)

α) (10%) $f(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi)$

β) (10%) $g(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}.$

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία