Matemáticas II
Clase 14: Inversa de una matriz

Facultad Economía y Negocios
Universidad de Chile

Agenda

Objetivos de la clase

- Conocer el concepto de matriz invertible (y de inversa de una matriz)
- Conocer que una matriz (cuadrada) es invertible sí y solo sí sus columnas son l.i.
- Conocer propiedades básicas de matrices invertibles.

Idea

- Considere

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

- Es directo ver que

$$A\,B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2 \quad \wedge \quad B\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2.$$

- En lo anterior, para la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hay una matriz (la matriz B) tal que $A\,B = \mathbf{I}_2$ y $B\,A = \mathbf{I}_2$.
- ¿Será cierto que para **cualquier** matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hay otra matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A\,B = \mathbf{I}_2$ y $B\,A = \mathbf{I}_2$?

Ejemplo 1

Para $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$, nos preguntamos si existe $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ tal que $AB = \mathbf{I}_2$. Usando producto interno, la matriz B debe cumplir que (desarrollar AB e identificar con la identidad)

$$
\begin{aligned}
3b_{11} + 5b_{21} &= 1 \quad (1)\\
3b_{12} + 5\,b_{22} &= 0 \quad (2)\\
6b_{11} + 10b_{21} &= 0 \quad (3)\\
6b_{12} + 10b_{22} &= 1 \quad (4)
\end{aligned}
$$

• El lado izquierdo de (3) es dos veces el lado izquierdo de (1). Luego, que esas ecuaciones se cumplan equivale a decir que $0 = 2 * 1 = 2$, una **contradicción**.
• El lado izquierdo de (4) es dos veces el lado izquierdo de (2). Luego, que esas ecuaciones se cumplan equivale a decir que $1 = 2 * 0 = 0$, una **contradicción**.
• Por lo tanto, **no existe** una matriz B que cumpla $AB = \mathbf{I}_2$, es decir, la matriz A **no es invertible**.

Idea y concepto

• Sobre la base de los ejemplos anteriores, se concluye que dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, **no necesariamente** existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tal que $A\,B = B\,A = \mathbf{I}_m$. Cuando existe tal matriz (B) uno dice que A **es invertible**, y que su inversa es la matriz B en cuestión.

• Esa matriz B (si es que existe) se denota como

$$A^{-1}.$$

• Visto de otra manera:

Diremos que una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *es* **invertible** *si* existe *otra matriz, que denotaremos* $A^{-1} \in \mathbb{R}^{m\times m}$*, tal que*

$$AA^{-1} = \mathrm{I}_m \quad (= A^{-1}A).$$

• **Nota**: el concepto de matriz invertible **no aplica** a matrices **rectangulares**.

Propiedad importante

Una matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

es invertible (es decir, tiene inversa) sí y solo sí

$$a * d - b * c \neq 0.$$

Dado eso, se cumple además que:

$$A^{-1} = \frac{1}{a * d - b * c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Ejemplo 1

Para $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ es invertible ya que $2 * 10 - 6 * 3 = 20 - 18 = 2 \neq 0$.
Por lo anterior, la inversa de A es (verificar)

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{rr} 10 & -3 \\ -6 & 2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{rr} 5 & -3/2 \\ -3 & 1 \end{array} \right]$$

Propiedades generales

Proposición

Dadas $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, se tiene que:

(a) Si A y B son invertibles, entonces AB es una matriz invertible y se cumple que:
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(b) Si A es invertible entonces A^{t} es invertible, y se cumple que
$$(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{t}.$$

(c) Si A es invertible y $\beta \neq 0$, entonces βA es invertible y se cumple que
$$(\beta A)^{-1} = \frac{1}{\beta}A^{-1}.$$

• (a) dice que el producto de matrices invertibles es invertible, e informa el resultado de la inversa del producto. (b) dice que si una matriz es invertible entonces su traspuesta lo es, e indica cómo obtener la inversa de la traspuesta.

- Para ver lo anterior:

(a) Se tiene que:

$$(AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\mathbf{I}_m A^{-1} = AA^{-1} = \mathbf{I}_m \quad \Rightarrow$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(b) Se tiene que:

$$A^{\mathrm{t}}\,(A^{-1})^{\mathrm{t}} = (A^{-1}\,A)^{\mathrm{t}} = \mathbf{I}_m^{\mathrm{t}} = I_m^{\mathrm{t}} \quad \Rightarrow \quad (A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}.$$

(c) Se tiene que:

$$(\beta A)\left(\frac{1}{\beta}A^{-1}\right) = \beta\frac{1}{\beta}AA^{-1} = 1\mathbf{I}_m = \mathbf{I}_m \quad \Rightarrow \quad (\beta A)^{-1} = \frac{1}{\beta}A^{-1}.$$

Ejemplo 2 (ecuación matricial)

Suponga que $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices dadas, con B invertible. Se pide obtener $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si sabemos que

$$(A + BM^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = C.$$

Para el caso se tiene que (usar propiedades de traspuesta y de inversa)

$$(A + BM^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = C \quad \Rightarrow \quad A + BM^{\mathrm{t}} = C^{\mathrm{t}} \quad \Rightarrow \quad BM^{\mathrm{t}} = C^{\mathrm{t}} - A \quad \Rightarrow$$

$$M^{\mathrm{t}} = B^{-1}(C^{\mathrm{t}} - A) \quad \Rightarrow \quad M = \left(B^{-1}(C^{\mathrm{t}} - A)\right)^{\mathrm{t}}.$$

Solo como una cuestión complementaria, desarrollando el lado derecho de lo anterior que define M se obtiene lo siguiente:

$$M = (C^{\mathrm{t}} - A)^{\mathrm{t}}(B^{-1})^{\mathrm{t}} = (C - A^{\mathrm{t}})(B^{\mathrm{t}})^{-1}.$$

NOTA. *Suponiendo que* **se cumplen las condiciones adecuadas**, *en este ejemplo se usa el hecho que para matrices (cuadradas) A, B, C* **cualquiera**, *se tiene que $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$ y que $(A^{-1})^{\mathrm{t}} = (A^{\mathrm{t}})^{-1}$. También se usa que si $AB = C$ entonces $B = A^{-1}C$.*

Caso 2×2 y extensión

• Vamos a probar que una matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es invertible **sí y solo sí** sus columnas son **l.i**.

• **Primero:** suponga que $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es invertible. Entonces dado $X_0 \in \mathbb{R}^2$ tenemos que existe $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $AX = X_0$. En efecto, dicho vector X es dado por

$$AX = X_0 \quad \overset{\textit{multiplica por } A^{-1}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{A^{-1}A}_{\mathbf{I}_2}X = \underbrace{A^{-1}X_0}_{\in\mathbb{R}^2} \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}X_0.$$

• Por lo anterior, las columnas de A (que son dos) generan $\mathbb{R}^2$, por lo que deben ser **l.i** (AX es una combinación lineal de las columnas de A, que variando los ponderadores, componentes de X, permiten obtener cualquier vector X_0 de $\mathbb{R}^2$). Así:

$$A \textit{ invertible} \quad \Rightarrow \quad \textit{columnas de } A \textit{ son l.i.}$$

• **Segundo**: supongamos que las columnas de A son l.i. Entonces esas columnas son una base de $\mathbb{R}^2$, por lo que existe un vector X_1 y existe un vector X_2 tal que

$$AX_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad AX_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• La inversa de A es la matriz cuya primera columna es X_1 anterior y cuya segunda columna es X_2 anterior.
• Luego, cuando las columnas de A son l.i, existe la inversa de A. Así:

$$\textit{columnas de } A \textit{ son l.i} \quad \Rightarrow \quad A \textit{ es invertible}$$

• En síntesis: A **es invertible si y sólo sí sus columnas son l.i.**

• El resultado anterior se extiende de manera directa a matrices cuadradas de cualquier orden:

> *Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es* invertible *sí y solo sí sus columnas son* l.i.

• Por la Proposición anterior (parte (b)), note que lo anterior es equivalente a decir que $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es invertible si y solo sí sus **filas** son l.i (eso porque si A es invertible entonces su traspuesta también es invertible).

Ejemplo 3 (invertibilidad de una matriz triangular)

Considere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix},$$

tal que $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ y $a_{33} \neq 0$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tal que

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Luego, se cumple que

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} \\ \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} \\ \alpha_3 a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} &= 0 && (5) \\ \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} &= 0 && (6) \\ \alpha_3 a_{33} &= 0 && (7) \end{aligned}$$

• Puesto que $a_{33} \neq 0$, de (7) tenemos que $\alpha_3 = 0$.
• Lo anterior en (6) implica que $\alpha_2 = 0$ cuando $a_{22} \neq 0$, y eso en (5) implica que $\alpha_1 = 0$ cuando $a_{11} \neq 0$.
• De esta manera, las columnas de A (**triangular superior o inferior**) son l.i cuando los elementos de la diagonal de A son diferentes de cero.
• Es decir:

> *Una matriz triangular (superior o inferior) es invertible sí y solo sí todos los elementos de la diagonal son distintos de cero. Este resultado sigue siendo válido para matrices triangulares de cualquier orden.*

• Consecuencia directa de lo anterior es que una **matriz diagonal** es invertible sí y solo sí todos los elementos de la diagonal son diferentes de 0 (¿por qué eso es cierto?)

Comentarios finales

(a) Si $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es invertible corresponde a decir que **existe** una matriz, que llamamos A^{-1}, tal que $A\,A^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I}_m$.

(b) Si una matriz **no es invertible** es porque no existe la matriz que multiplicada por A de como resultado la identidad.

(c) Conocer si una matriz es invertible pasa, **en general**, por encontrar su inversa (si es que existe). Sin embargo, **en algunos casos** podemos conocer si es invertible usando algunas propiedades:

- (c1) Si la matriz es 2×2 basta que la diferencia del producto cruzado de sus elementos sea diferente de cero (esta regla no sirve –no aplica– para matrices de orden superior).
- (c2) Para una matriz de orden $m \times m$, basta con verificar que las **columnas son l.i** (o que las **filas son l.i**).
- (c3) Para una matriz triangular (superior o inferior) y para una matriz diagonal, basta verificar que todos los elementos de la diagonal son diferentes de cero.
- (c4) Si sabemos que dos matrices son invertibles, entonces el producto de ellas es invertible. Si sabemos que una matriz es invertible, entonces su traspuesta es invertible.