Métodos Matemáticos II

Ayudante Coordinador: Ignacio Cisternas

Ayudantía Nº5

Primavera 2025

Base y dimensión en espacios vectoriales

1. Suponga que $\{X_1, X_2, X_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Muestre entonces que el siguiente conjuntos de vectores es una base de $\mathbb{R}^3$:

$$\{X_1, X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3\}$$

2. Suponga que $\{X_1, X_2, ..., X_k\}$ es un conjunto l.i. de vectores de $\mathbb{R}^n$. Explique por qué $k \leq n$.

3. Sea $\{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_n, v_n)\}$ un conjunto de n pares de vectores de $\mathbb{R}^n$, donde cada par $\{u_i, v_i\}$ es linealmente independiente.

    1. ¿Es cierto que el conjunto completo $\{u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$? Justifique su respuesta.
    2. En caso de no serlo en general, entregue una condición sobre los vectores para que el conjunto sí sea linealmente independiente.

4 Considere el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(1, 2, 1),\ (0, 1, 1),\ (1, 3, 2)\}.$$

1. Determine si los vectores de B son linealmente independientes.
2. En caso afirmativo, concluya si B es una base de $\mathbb{R}^3$.

Geometría en $\mathbb{R}^n$

1. Para $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, encuentre el valor de α para que $X_1 \cdot X_2 = 0$.

2. Dado $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, encuentre los valores de α para que $||\alpha X|| = 2||X||$.

3. Dado $X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0_n$, explique por qué:

$$\hat{X} = \frac{1}{||X||} X$$

Es un vector unitario.