Matemáticas II
Clase 17: Sistemas de ecuaciones lineales (SEL): aplicaciones

FACULTAD ECONOMÍA Y NEGOCIOS UNIVERSIDAD DE CHILE

Agenda

Objetivos de la clase

Aplicación 1: determinar si una matriz es invertible

Aplicación 2: obtener la inversa de una matriz

- Aplicar el método de triangularización para determinar si una matriz cuadrada es invertible.
- Encontrar la inversa de una matriz.

Establecer si una matriz es invertible

• Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es invertible sí y solo sí sus columnas son l.i. Esto corresponde a que la única combinación lineal de sus columnas que es el vector 0_n es aquella donde todos los *ponderadores* son 0.
• Lo anterior equivale a decir que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es invertible sí y solo la ecuación $AX = 0_n$ tiene solución única, dada por $\boldsymbol{X} = 0_n$.
• En **términos prácticos**, aplicando el método de Gauss para *triangularizar* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la matriz triangular superior que resulta de aplicar el método debe ser tal que todos los elementos de la diagonal son diferentes de cero para que A sea invertible.

Ejemplo 1

Establecer si la siguiente matriz es invertible:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Debemos entonces resolver el sistema $AX = 0_3$, cuya matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right].$$

• Ya que la columna de *más a la derecha* de la matriz ampliada es de ceros, no se modificará cuando hagamos operaciones sobre las filas de A, de modo que podemos ignorarla en el proceso de triangularización.
• Se tiene entonces que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \overset{-2f_1+f_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \overset{-3f_1+f_3}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{3}f_2+f_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{30} \end{bmatrix}.$$

• De esta manera, ya que **todos los elementos de la diagonal** de la matriz resultante del *proceso* son diferentes de cero se concluye que A es invertible (sus columnas son l.i).

Ejemplo 2

Determine las condiciones sobre β para que la siguiente matriz sea **invertible**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & \beta & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & \beta & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xRightarrow{-2f_1+f_2} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & \beta-14 & -8 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xRightarrow{-3f_1+f_3} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & \beta-14 & -8 \\ 0 & -20 & -10 \end{bmatrix}$$

- Conviene ahora intercambiar las filas 2 y 3 y continuar con el proceso:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & -20 & -10 \\ 0 & \beta-14 & -8 \end{bmatrix} \xRightarrow{\left(\frac{\beta-14}{20}\right)f_2+f_3} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & -20 & -10 \\ 0 & 0 & \left(-8-\frac{\beta-14}{2}\right) \end{bmatrix}$$

• Así, para que A sea invertible, todos los elementos de la diagonal deben ser diferentes de 0, cosa que se cumple cuando

$$-8 - \frac{\beta - 14}{2} \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{\beta - 14}{2} \neq -8 \;\Rightarrow\; \beta - 14 \neq -16 \;\Rightarrow\; \beta \neq -2$$

Por lo anterior, cuando $\beta = -2$, la matriz A no es invertible:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \textit{ no es invertible.}$$

Obtener la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Buscamos una matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para obtener la matriz inversa debemos entonces resolver los siguientes (tres) sistemas de ecuaciones:

$$\textbf{(1)}: \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(2)}: \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(3)}: \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para el SEL **(1)** tenemos que:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{-2f_1+f_3}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \overset{-2f_2+f_3}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Luego, el sistema origina se convierte en

$$\begin{aligned} x_{11} - x_{12} &= 1 \\ x_{21} &= 0 \\ x_{31} &= -2 \end{aligned}$$

a partir de lo cual $x_{11} = 1, x_{21} = 0$ y $x_{31} = -2$.

• Continuando con el ejercicio, resolviendo los sistemas **(2)** y **(3)** Ud. puede verificar que

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$