# Métodos Matemáticos II

**Ayudante Coordinador**: Ignacio Cisternas

***Ayudantía Asincrónica***

Primavera 2025

## Producto cartesiano

1. Dibujar en el "plano" los siguientes conjuntos:

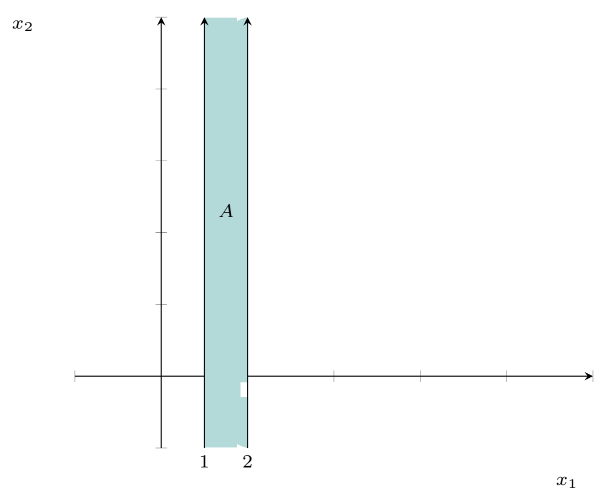
$$a)\ A = [1,2] \times \mathbb{R}, \quad b)\ B = \mathbb{R} \times [1,2], \quad c)\ C = [2,3] \times \mathbb{R}_+$$

**Solution:**

a) El conjunto $A$ son todos los pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ que se encuentran entre 1 y 2 horizontalmente. Esto es:

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 2, x_1 \geq 1\}$$

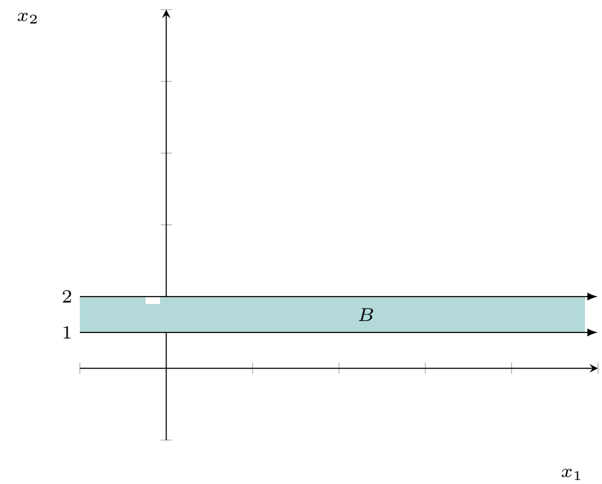
Graficamente:




b) El conjunto $B$ son todos los pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ que se encuentran a una "altura" entre 1 y 2. Esto es:

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 2, x_2 \geq 1\}$$

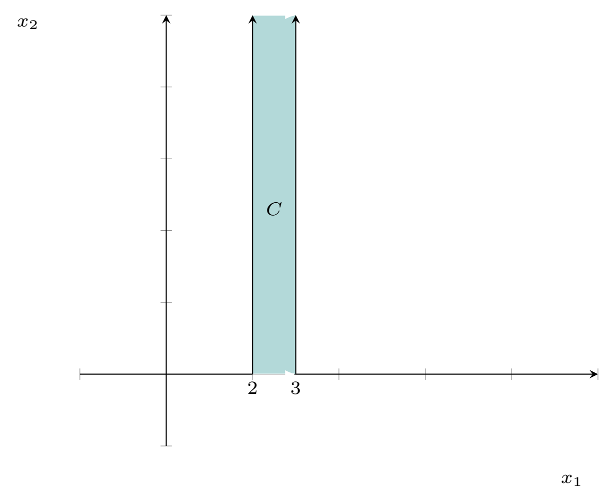
Graficamente:




c) El conjunto $C$ son todos los pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ que se encuentran a una "altura" entre 2 y 3, y que horizontalmente son mayores que 0. Esto es:

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 3,\ x_1 \geq 2,\ x_2 > 0\}$$

Graficamente:




2. Dibujar en el "plano" los siguientes conjuntos:

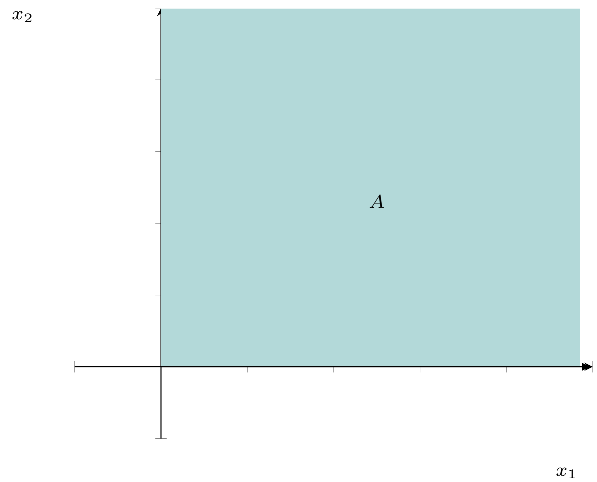
$$A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad B = \{0\} \times \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

**Solution:**

a) El conjunto $A$ son todos los pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ que se encuentran en el primer cuadrante. Esto es:

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$$

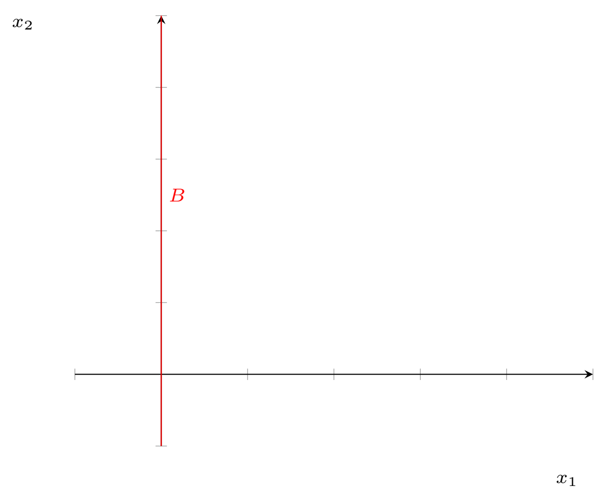
Graficamente:




b) El conjunto $B$ son todos los pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ que se encuentran exactamente en el eje $x_2$. Esto es:

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$$

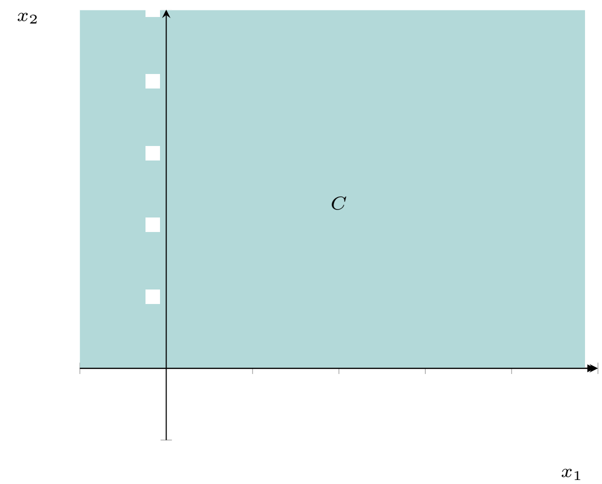
Graficamente:




c) El conjunto $C$ son todos los pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ que se encuentran "arriba"del eje horizontal. Esto es:

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$$

Graficamente:




## Vectores

3. Encuentre el valor de $\alpha$ y $\beta$ si sabemos que:

$$\alpha(1,3) + \beta(2,3) = (6,18)$$

**Solution:** Desarrollamos la expresión del enunciado:

$$\begin{aligned} \alpha(1,3) + \beta(2,3) &= (6,18) \\ (1\alpha, 3\alpha) + (2\beta, 3\beta) &= (6,18) \\ (1\alpha + 2\beta, 3\alpha + 3\beta) &= (6,18) \end{aligned}$$

De esta última expresión se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1\alpha + 2\beta &= 6 \\ 3\alpha + 3\beta &= 18 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema (por el metodo que más le acomode) se obtiene que $\beta = 0$ y $\alpha = 6$.

4. Dados $X_1 = (1,1,2),\ X_2 = (2,2,1) \in \mathbb{R}^3$, ¿existen cantidades $\alpha$ y $\beta$ para que:

$$(7,9,8) = \alpha X_1 + \beta X_2$$

**Solution:** Desarrollamos la expresión del enunciado:

$$\begin{aligned}
(7,9,8) &= \alpha X_1 + \beta X_2 \\
(7,9,8) &= \alpha(1,1,2) + \beta(2,2,1) \\
(7,9,8) &= (\alpha,\alpha,2\alpha) + (2\beta,2\beta,\beta) \\
(7,9,8) &= (\alpha+2\beta,\alpha+2\beta,2\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

Planeamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
i)\ \alpha + 2\beta &= 7 \\
ii)\ \alpha + 2\beta &= 9 \\
iii)\ 2\alpha + \beta &= 8
\end{aligned}$$

Al intentar resolver este sistema de ecuaciones, notaremos que para ningúna combinación de $(\alpha, \beta)$ se pueden satisfacer las 3 ecuaciones, debido a que $7 \neq 9$

# Base y dimensión en espacios vectoriales

5. Muestre que los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\},\ \left\{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\},\ \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

**Solution:**
Dado que la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2, sabemos que cualquier par de vectores que pertenezcan a $\mathbb{R}^2$ l.i. cumplen con ser una base de $\mathbb{R}^2$. Es fácil ver que los 3 conjuntos son pares de vectores, por lo que basta con mostrar que cada uno es l.i. para saber si es que son bases de $\mathbb{R}^2$. Esto último lo podemos comprobar fácilmente con lo aprendido en el curso:

$$\begin{aligned}
i)\ 3\cdot 3 - 0\cdot 2 &= 9 \neq 0 \\
ii)\ 2\cdot 0 - -1\cdot 2 &= 2 \neq 0 \\
iii)\ 1\cdot 1 - 0\cdot 0 &= 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Por lo anterior, los 3 conjuntos cumplen con ser l.i. y por ende, son bases de $\mathbb{R}^2$ (recuerde que este metodo para comprobar si un conjunto de vectores son l.i. solo aplica para $\mathbb{R}^2$).

6. Muestre que el siguiente conjunto de vectores genera $\mathbb{R}^2$, pero que no es una base:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

Por otro lado, muestre que cualquier par de vectores de ese conjunto es una base de $\mathbb{R}^2$.

**Solution:** Para mostrar que el conjunto genera $\mathbb{R}^2$, basta con mostrar que al menos un par de vectores pertenecientes al conjunto son *l.i.*. Tomando los primeros dos vectores del conjunto (de izquierda a derecha) se puede ver que:

$$X_1, X_2 : \ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

Por lo que existe al menos un par de vectores del conjunto que son l.i. entre ellos y por ende, el conjunto genera a $\mathbb{R}^2$. Para mostrar que el conjunto no es una base, debemos mostrar que el conjunto no es l.i., esto es:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0_2$$

de lo anterior obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior llegamos a que $\alpha_1 = -\alpha_3$ y $\alpha_2 = -\alpha_3$, es decir, cualquier combinación de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ que cumpla con lo anteior, resuelve el sistema. Luego, el conjunto de vectores es l.d. y no constituyen una base de $\mathbb{R}^2$. Notar que si la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es dos, entonces siempre tres o más vectores son l.d, por lo que a pesar de que generan dicho espacio, ellos no son una base.

Para comprobar que cualquier par de vectores es una base de $\mathbb{R}^2$, basta con mostrar que son l.i. Recordando que ya lo hicimos para los dos primeros, procedemos a hacerlo para las otras dos posibles combinaciones:

$$\begin{aligned} X_1, X_3 &: \ 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1 \neq 0 \\ X_2, X_3 &: \ 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Como estos dos pares de vectores también son l.i., también constituyen una base de $\mathbb{R}^2$.

7. Muestre que para cualquier $\beta \neq 0$ los siguientes vectores conforman una base de $\mathbb{R}^3$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

**Solution:** Para mostrar que el conjunto genera $\mathbb{R}^3$, basta con comprobar que son l.i. Lo anterior lo comprobamos con:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = 0_3$$

De lo anterior se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\
&\alpha_1 = 0 \\
&\alpha_1 + 3\alpha_2 + \beta\alpha_3 = 0
\end{aligned}$$

Es fácil ver que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, por lo que los vectores son l.i. y son una base de $\mathbb{R}^3$ (notar que si $\beta$ es igual a 0, el conjunto es l.d.).