Matemáticas II
Clase 15: Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL)

Agenda

Objetivos de la clase

Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL)

Solución homogénea, solución particular y solución de un SEL

Síntesis de resultados

(a) Explicar qué es un sistema de ecuaciones lineales (SEL).

(b) Forma matricial de un SEL.

(c) Soluciones homogénea y particular de un SEL, y solución (general) de un sistema de ecuaciones lineales.

Idea

Ejemplo

Considere el siguiente problema: encontrar x_1 y x_2 tal que

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 3 \qquad (1) \\ 5x_1 - 4x_2 &= 8 \qquad (2) \end{aligned}$$

Este es un sistema de **dos ecuaciones** (la ecuación (1) y la ecuación (2)) y **dos incógnitas** (x_1 y x_2).

Ejemplo

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_4 &= 2 \qquad (3) \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 7 \qquad (4) \end{aligned}$$

Es un sistema de **dos ecuaciones** (las ecuaciones (3) y (4)) y **cuatro incógnitas**: x_1, x_2, x_3 y x_4.

Problema general

Un sistema de ecuaciones lineales (**SEL**) de n incógnitas y m ecuaciones es de la forma

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n &= b_i \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

donde los coeficientes a_{ij} y b_i son conocidos. Las **incógnitas** del problema son $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Forma matricial de un SEL

Sobre la base de lo anterior, definiendo los siguientes elementos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

el sistema de ecuaciones general que se mostró previamente se puede escribir de la siguiente manera (**forma matricial** del SEL):

$$AX = \boldsymbol{b}. \tag{5}$$

• Note que la matriz del SEL tiene tantas filas como ecuaciones del SEL, y tantas columnas como el número de variables del SEL.

FACULTAD ECONOMÍA Y NEGOCIOS UNIVERSIDAD DE CHILE

Ejemplo 1

- La forma matricial del SEL

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 3 \\ 5x_1 - 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

es dada por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}.$$

- La forma matricial del SEL

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$$

es dada por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}.$$

Nota: "forma que tiene la matriz del SEL"

Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y el lado derecho $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, para el SEL

$$AX = \boldsymbol{b}$$

se tiene que

- el **número de ecuaciones** es igual a la **cantidad de filas** de la matriz (m),
- el **número de incógnitas** es igual al **número de columnas** de la matriz (n).

De esta manera:

- *Si el sistema de ecuaciones tiene* **más ecuaciones que incógnitas** *($m > n$), la matriz A del sistema es rectangular, pero "alargada"*
- *Si el sistema de ecuaciones tiene* **más incógnitas que ecuaciones** *($n > m$), la matriz A del sistema es rectangular, pero "achatada".*
- *Si el sistema de ecuaciones tiene* **igual número de incógnitas que ecuaciones** *($m = n$), la matriz A del sistema es cuadrada.*

Ejemplo 2

- **Más ecuaciones que incógnitas:** tres ecuaciones y dos incógnitas

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 6 \\ x_1 - x_2 &= 8 \\ x_1 + 6x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

- **Más incógnitas que ecuaciones:** cuatro incógnitas y tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

• **Igual número de incógnitas que de ecuaciones:** cuatro incógnitas y cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_4 &= 7 \\ x_1 - x_4 &= 3 \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 8 \\ x_3 + 6x_4 &= 9 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4}.$$

Nota Importante

Consideremos el SEL

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 6 \\ x_1 - x_2 &= 8 \\ x_1 + 6x_2 &= 5 \end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

• Note que AX es una combinación lineal de las columnas de A usando coeficientes dados por las componentes de dicho vector. Para el caso:

$$AX = x_1 A_{\bullet 1} + x_2 A_{\bullet 2} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

• Luego, encontrar X tal que $AX = \boldsymbol{b}$ corresponde a preguntarnos si existe una combinación lineal de las columnas de A cuyo resultado es $\boldsymbol{b}$. Los *ponderadores* de dicha combinación lineal son las *componentes* del vector X

$$AX = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad x_1 A_{\bullet 1} + x_2 A_{\bullet 2} = \boldsymbol{b}.$$

• En general, dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y dado $X \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $AX \in \mathbb{R}^m$ es una combinación lineal de las columnas de A, donde los coeficientes de esta son las componentes de X:

$$AX = x_1 A_{\bullet 1} + x_2 A_{\bullet 2} + \cdots + x_n A_{\bullet n} = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{\bullet j}.$$

• Luego, $AX = \boldsymbol{b}$ corresponde a obtener los ponderadores de las columnas de A que como resultado da el vector $\boldsymbol{b}$.

Solución homogénea

• Para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, dado el sistema de ecuaciones lineales $AX = \boldsymbol{b}$, definimos el **sistema homogéneo** asociado (correspondiente) como

$$AX = 0_m.$$

• Las **soluciones homogéneas** del sistema de ecuaciones $AX = \boldsymbol{b}$ corresponden a los vectores $X_h \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$AX_h = 0_m,$$

NOTA. Observe que el sistema homogéneo $AX = 0_m$ **siempre** tiene solución: al menos $X_h = 0_n$ lo resuelve (pudiendo, eventualmente, haber más soluciones...).

Comentario

- Si **las columnas** de la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ son l.i, entonces la ecuación homogénea $AX = 0_m$ tiene una **única solución**: $X_h = 0_n$. ¿Por qué? Si las columnas de A son l.i entonces la única combinación lineal de ellas que es el vector 0_m se obtiene cuando todos los coeficientes son cero.
  - En particular, si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ del sistema es **invertible**, entonces la ecuación homogénea tiene una única solución: $X_h = 0_n$.
- Si **las columnas** de la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ del sistema $AX = \boldsymbol{b}$ son l.d (en particular, si A **no es invertible**), entonces la ecuación homogénea $AX = 0_m$ tiene soluciones diferentes del vector 0_m.
  - Más aún: si la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ no es invertible, entonces el sistema homogéneo $AX = 0_m$ tiene infinitas soluciones: si $X_h \neq 0_n$ es solución de la ecuación homogénea, entonces para todo $\beta \in \mathbb{R}$ se tiene βX_h también es solución de la ecuación homogénea:

$$A(\beta X_h) = \beta A X_h = \beta 0_m = 0_m.$$

Solución particular

- Considere el SEL $AX = \boldsymbol{b}$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.
- Una **solución particular** de ese sistema (si es que existe) es un vector $X_p \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$AX_p = \boldsymbol{b}.$$

- A diferencia de lo que ocurre con la solución homogénea (que siempre existe), **puede ocurrir que la solución particular no exista**.
- ¿Bajo qué condiciones existe la solución particular? El SEL $AX = \boldsymbol{b}$ tiene solución particular sí y solo sí $\boldsymbol{b}$ está en el conjunto de las combinaciones lineales que forman las columnas de A.
    - *En efecto: el hecho de que exista solución particular es porque existe $X_p \in \mathbb{R}^n$ tal que $AX_p = \boldsymbol{b}$, es decir, el vector $\boldsymbol{b}$ se escribe como combinación lineal de las columnas de A, donde los coeficientes de esa combinación lineal son las componentes del vector X_p.*

Solución de un SEL

A partir de lo anterior, para el SEL $AX = \boldsymbol{b}$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, si $X_p \in \mathbb{R}^n$ es una **solución particular** y $X_h \in \mathbb{R}^n$ es una **solución homogénea**, entonces para todo $\beta \in \mathbb{R}$ tenemos que la **solución** del SEL es el vector

$$X_s = X_p + \beta X_h.$$

En efecto:

$$AX_s = A(X_p + \beta X_h) = AX_p + \beta AX_h = \boldsymbol{b} + \beta 0_m = \boldsymbol{b}.$$

• En síntesis, la solución de un SEL (si es que existe) es la suma de dos componentes: la solución particular y la solución homogénea.

Consecuencias prácticas

(a) Si A **es invertible** (por lo que debe ser **cuadrada**) entonces el sistema $AX = \boldsymbol{b}$ **siempre** tiene **solución única**. En efecto: si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es invertible entonces sus columnas son l.i, por lo que estas son una base de $\mathbb{R}^n$, y luego generan dicho espacio. Luego, cualquier vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir, **de manera única**, como una combinación lineal de las columnas de A. Los ponderadores de dicha combinación lineal son las componentes de la solución.

(b) Si la matriz A del sistema **no es invertible** (pudiendo ser cuadrada o rectangular), entonces **ocurre solo una de las siguientes alternativas**:

(b1) El SEL **no tiene solución**: ocurre cuando $\boldsymbol{b}$ no está en las combinaciones lineales de las columnas de A.

(b2) El SEL tiene **infinitas soluciones**: ocurre cuando $\boldsymbol{b}$ está en las combinaciones lineales de las columnas de A. Las soluciones son de la forma

$$X_s = X_p + \beta X_h.$$

Ejemplo 3

Considere el siguiente SEL:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{b}.$$

Se tiene entonces que:

(i) A es invertible pues $2 * 10 - 3 * 7 = -1$ (diferente de 0).

(ii) Luego, para cualquier $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ **existe solución única** para el SEL: las columnas de A son una base de $\mathbb{R}^2$, por lo que podemos escribir el vector $\boldsymbol{b}$ como una combinación lineal (única) de las columnas de A.

Ejemplo 4

Considere el siguiente SEL:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 3 & 10 & 12 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{b}.$$

(i) La matriz A no es invertible (no es cuadrada). Por este hecho **hay infinitas soluciones para la ecuación homogénea**.

(ii) Notamos ahora que cualquier par de columnas de A es l.i: la primera con la segunda son l.i, la segunda con la tercera son l.i, etc.

(iii) Por lo anterior, a pesar de que son l.d., las columnas de A **generan** $\mathbb{R}^2$, implicando que existe solución particular para cualquier vector $\boldsymbol{b}$ al lado derecho.

(iv) Por (i) y (iii) ocurre que este SEL **tiene infinitas soluciones** cualquiera que sea el lado derecho.

Ejemplo 5

Si la matriz del sistema es $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ el sistema de ecuaciones (general) es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{b}.$$

(i) La matriz A no es invertible, aunque sus columnas son l.i. Por este hecho, la ecuación homogénea tiene solución única ($X_h = 0_3$).

(ii) Existe solución particular para $AX = \boldsymbol{b}$ siempre y cuando $\boldsymbol{b}$ esté en el espacio generado por las columnas de A. Caso contrario, no hay solución particular (y por ende, no hay solución).

Síntesis de resultados

- La solución de un sistema de ecuaciones siempre tiene dos componente: una *solución homogénea* y una *solución particular*.
- La solución homogénea **siempre existe**, pudiendo ser única (solo $X_h = 0_n$) o pudiendo haber infinitas.
- La solución particular puede o no existir: todo depende de si $\boldsymbol{b}$ está o no en las combinaciones lineales de las columnas de A.

• Combinando todo lo anterior: para un sistema de ecuaciones $AX = \boldsymbol{b}$ **puede ocurrir solo uno de los siguientes tres casos**:

(i) El sistema tiene **solución única**.

(ii) El sistema **no tiene solución**.

(iii) El sistema tiene **infinitas soluciones**.

- ¿Cuándo ocurre (i)?
  - La matriz A del sistema es invertible.
  - A no es cuadrada pero sus columnas son l.i, y $\boldsymbol{b}$ está en las combinaciones lineales de las columnas de A.
- ¿Cuándo ocurre (ii)?
  - La matriz **no es invertible** y $\boldsymbol{b}$ no está en las combinaciones lineales de las columnas de A.
- ¿Cuándo ocurre (iii)?
  - La matriz A **no es invertible** y $\boldsymbol{b}$ está en las combinaciones lineales de las columnas de A.