Matemáticas II
Clase 18: Formas cuadráticas (1)

FACULTAD ECONOMÍA Y NEGOCIOS UNIVERSIDAD DE CHILE

Agenda

Objetivos de la clase

Concepto de forma cuadrática

Signo de una matriz

- Conocer qué es una forma cuadrática (uso de matriz simétrica).
- Conocer qué es el signo de una matriz y los conceptos de matriz *definida positiva* (negativa) y *semidefinida positiva* (negativa).

Motivación

• Función lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (recta que pasa por el origen)

$$f(x) = ax$$

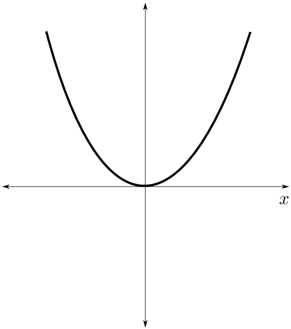
• Función cuadrática de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (parábola con vértice en el origen)

$$f(x) = ax^2.$$

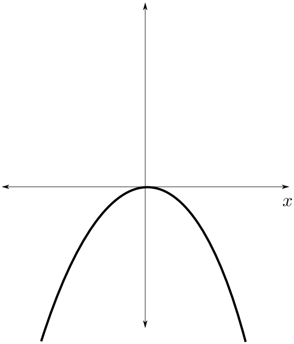
• La idea es extender el concepto de "función cuadrática" al caso vectorial ($x \in \mathbb{R} \to X \in \mathbb{R}^n$)
• **NOTA:** recordemos que si $a > 0$ entonces la función cuadrática $f(x) = ax^2$ es una parábola convexa, mientras que si $a < 0$ es una parábola cóncava.

Figura: PARÁBOLA CONVEXA (A) - PARÁBOLA CÓNCAVA (B)

A: $f(x) = ax^2 : a > 0$



B: $f(x) = ax^2 : a < 0$



Idea de forma cuadrática

- Considere la siguiente matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
- Dado $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 7x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (\mathbb{R}^{2\times 1})$$

- Ya que $X^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ entonces, por las dimensiones de los elementos, podemos multiplicar X^{t} con AX, y el resultado es un elemento de $\mathbb{R}^{1\times 1} \equiv \mathbb{R}$:

$$X^{\mathrm{t}}AX = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 7x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = (2x_1^2 + 3x_1x_2) + (7x_1x_2 + 4x_2^2) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 10x_1x_2.$$

ECONOMÍA Y NEGOCIOS
UNIVERSIDAD DE CHILE

•Por ejemplo, tomando $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ tenemos que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}}_{X^{\mathrm{t}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} 18 \\ 28 \end{bmatrix}}_{AX} = 110 \in \mathbb{R}.$$

• En general, tomando $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tenemos:

$$X^{\mathrm{t}}AX = ax_1^2 + dx_2^2 + (b+c)x_1x_2.$$

• La expresión anterior se llama **forma cuadrática asociada a la matriz** $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, y se representa como $Q_A(X)$. Es decir:

$$Q_A(X) = X^{\mathrm{t}}AX = ax_1^2 + dx_2^2 + (b+c)x_1x_2 \in \mathbb{R}.$$

Concepto de forma cuadrática

• El concepto anterior se puede extender a matrices de $\mathbb{R}^{n\times n}$.
• Dada $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y dado $X\in\mathbb{R}^n$, la forma **cuadrática asociada a la matriz** A se define como

$$Q_A(X) = X^{\mathrm{t}}AX \in \mathbb{R}.$$

• Se insiste: para una matriz de $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y un vector $X\in\mathbb{R}^n$, la forma cuadrática $X^{\mathrm{t}}AX$ es una **cantidad real**.

Formas cuadráticas y matrices simétricas

- Dada

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

notamos que

$$Q_A(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 14x_1x_2.$$

- Definamos ahora

$$A_s = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{t}}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Notamos entonces que

$$X^{\mathrm{t}}AX = X^{\mathrm{t}}A_sX = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 14x_1x_2.$$

- Es decir, la forma cuadrática asociada a la matriz A coincide con la forma cuadrática asociada a una **matriz simétrica** (la matriz A_s).

- De ahora en adelante, cuando se analicen y/o estudien formas cuadráticas, uno **siempre** puede suponer que la matriz correspondiente es **simétrica**:
  - No hay ganancia alguna en considerar otro tipo de matrices.
  - Este hecho tiene consecuencias muy importantes para lo que viene.

Ejemplo 1

• Se insiste que cuando uno trabaja con formas cuadráticas asume que la matriz es simétrica.

• Para el caso de matrices de 2×2, considere la siguiente matriz **simétrica**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

La forma cuadrática asociada a la matriz A es

$$Q_A(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

es decir:

$$\boxed{Q_A(X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{21}x_1x_2.}$$

Ejemplo 2

Determine la matriz que define a la siguiente forma cuadrática:

$$Q(X) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2$$

Si la matriz (simétrica) es $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, la forma cuadrática es $Q_A(X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{21}x_1x_2$. Identificando los términos se tiene que:

$$a_{11} = 2, \quad 2a_{21} = -3, \quad a_{22} = 4,$$

por lo que la matriz buscada es

$$\begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3

- Forma cuadrática de una matriz diagonal

Para la matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

se tiene que

$$Q_A(X) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 .$$

- Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, tenemos que

$$Q_A(X) = 4x_1^2 + \alpha\, x_2^2 + 8x_3^2 .$$

Comentarios

(a) Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, note que

$$Q_A(0_n) = 0_n^{\mathrm{t}} A 0_n = 0,$$

es decir, **cualquier forma cuadrática evaluada en el origen (vector de ceros) es igual a cero (real)**.

(b) Para $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\gamma \in R$, se tiene que (usar propiedades del producto matricial)

$$Q_{A+\gamma B}(X) = X^{\mathrm{t}}(A+\gamma B)X = X^{\mathrm{t}}AX + X^{\mathrm{t}}(\gamma B)X = X^{\mathrm{t}}AX + \gamma X^{\mathrm{t}}BX,$$

es decir,

$$Q_{A+\gamma B}(X) = Q_A(X) + \gamma Q_B(X).$$

Motivación: geometría de las formas cuadráticas

• Desde un punto geométrico (y algebraico...), las formas cuadráticas son una extensión de las **parábolas** en $\mathbb{R}$:

$$ax^2 \quad \Longrightarrow \quad X^{\mathrm{t}}AX.$$

• En efecto: si $A = [a] \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, entonces para $X \in \mathbb{R}$ uno tiene que $X^{\mathrm{t}}A(X) = aX^2$: parábola es una forma cuadrática.
• Desde un punto de vista geométrico, para una forma cuadrática asociada a una matriz de 2×2 se puede dar uno de los siguientes casos:

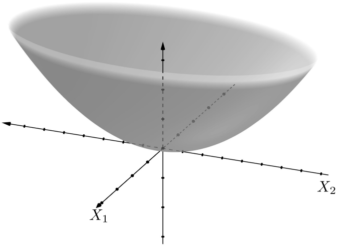
(A) la "parábola tridimensional" es **convexa**.

(B) la "parábola tridimensional" es **cóncava**.

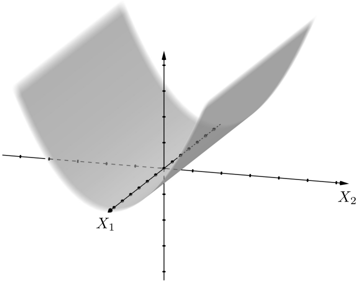
(C) la "parábola tridimensional" es una *combinación* de convexa y cóncava.

NOTA. Las figuras a continuación son solo ilustrativas; en Mate III verá los detalles sobre como se construyen.

Figura: Caso (a): "parábola tridimensional" convexa

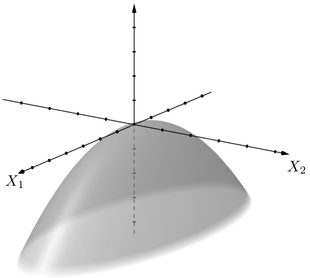


(a) "Parábola tridimensional" **convexa**

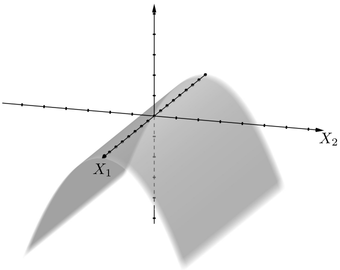


(b) "Parábola tridimensional" **débilmente convexa**

Figura: CASO (B): "PARÁBOLA TRIDIMENSIONAL" CÓNCAVA

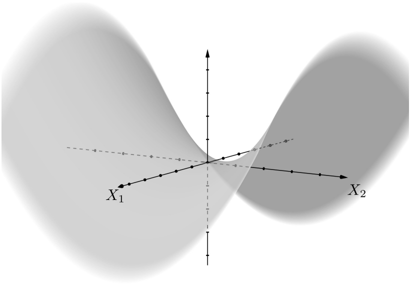


(a) "Parábola tridimensional" **cóncava**



(b) "Parábola tridimensional" **débilmente cóncava**

Figura: CASO (C): "PARÁBOLA TRIDIMENSIONAL" MIXTA



- Notamos entonces que:

(1) Las "parábolas tridimensionales" **débilmente convexas** toman valores mayores o iguales a cero (son "no negativas"), pudiendo ser igual a cero cuando se evalúan en vectores no nulos.

(2) Por otro lado, en la **Figura 2**, **caso (a)**, ocurre que la parábola tridimensional vale 0 solo cuando $X = 0_2$, de modo que para $X \neq 0_2$ ocurre que $X^{\mathrm{t}}AX > 0$.

(3) Las "parábolas tridimensionales" **débilmente cóncavas** toman valores menores o iguales a cero (son "no positivas"), pudiendo ser cero cuando se evalúan en vectores no nulos.

(4) En la **Figura 3, caso (a)**, notar que la parábola es igual a 0 solo cuando $X = 0_2$; para $X \neq 0_2$ se tiene que $X^{\mathrm{t}}AX < 0$.

(5) Las "parábolas tridimensionales" mixtas (**Figura 4**) toman valores negativos y positivos.

Signo de una matriz: idea

Para el caso 2×2:

• Cuando la forma cuadrática asociada a una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una **parábola tridimensional débilmente convexa** entonces uno dice que la **matriz** es **semidefinida positiva**. Sin embargo, cuando la forma cuadrática asociada a una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una **parábola convexa** entonces uno dice que la **matriz** es **definida positiva**.

(a) la Figura 2, caso (a), muestra el caso de una forma cuadrática donde la matriz que define a la forma cuadrática es **definida positiva**.

(b) la Figura 2, caso (b), muestra el caso de una forma cuadrática donde la matriz que define a la forma cuadrática es **semidefinida positiva**.

• Cuando la forma cuadrática que se obtiene con una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ está asociada con una **parábola tridimensional débilmente cóncava** entonces uno dice que la **matriz** es **semidefinida negativa**.
• Cuando la forma cuadrática que se obtiene con una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ está asociada con una **parábola cóncava** entonces uno dice que la **matriz** es **definida negativa**.

(a) *La Figura 3, caso (a), muestra el caso de una forma cuadrática donde la matriz es* definida negativa.
(b) *La Figura 3, caso (b), muestra el caso de una forma cuadrática donde la matriz es* semidefinida negativa.

Signo de una matriz: concepto

- Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es **semidefinida positiva** si para todo $X \in \mathbb{R}^n$ se tiene que
$$X^{\mathrm{t}}AX \geq 0.$$
- Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es **definida positiva** si para todo $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0_n$, se tiene que
$$X^{\mathrm{t}}AX > 0.$$
- Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es **semidefinida negativa** si para todo $X \in \mathbb{R}^n$ se tiene que
$$X^{\mathrm{t}}AX \leq 0.$$
- Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es **definida negativa** si para todo $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0_n$, se tiene que
$$X^{\mathrm{t}}AX < 0.$$

Comentarios

• Si una matriz es **definida positiva** (negativa) entonces es semidefinida positiva (negativa).
• Hay matrices que no son ni semidefinida positiva ni semidefinida negativa (el caso de una matriz asociada con la Figura 4 anterior).
• La **diferencia crucial** entre "*semidefinida positiva*" y "*definida positiva*" es que con la primera puede ocurrir que para vectores $X \neq 0_n$ la forma cuadrática podría ser igual a 0, mientras que con la definida positiva ocurre que si $X \neq 0_n$ entonces estamos seguros de que la forma cuadrática es positiva cuando se evalúa en X.

- Análogo a lo anterior con *semidefinida negativa* y *definida negativa*.

Ejemplo 4

Dada la matriz diagonal $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, para $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ tenemos que

$$Q_A(X) = X^{\mathrm{t}} A X = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

Luego, teniendo presente que cuando $X \neq 0_2$ entonces $x_1 \neq 0$ o $x_2 \neq 0$ (o ambos), por lo que que $x_1^2 > 0$ o $x_2^2 > 0$ (o ambos), se concluye que:

- A es *definida positiva* cuando $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$.
- A es *semidefinida positiva* cuando $\lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_2 \geq 0$;
- A es *definida negativa* cuando $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$.
- A es *semidefinida negativa* cuando $\lambda_1 \leq 0$ y $\lambda_2 \leq 0$.
- Si, por ejemplo, $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ entonces la matriz **no tiene signo.**

Comentarios

• Es muy importante conocer el signo de una matriz, entre otros, por sus aplicaciones en optimización (cosa que se estudiará en otros cursos).
• En general, determinar el signo de una matriz (simétrica) cualquiera es un **problema complicado**. Por ejemplo: ¿cuál es el signo de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}?$$

Para responder, deberíamos conocer si (o no) la siguiente cantidad es *positiva*, *negativa* o, más general aún, conocer su signo en función de los valores de x_1 y x_2:

$$X^{\mathrm{t}} A X = 2x_1^2 + x_2^2 + 10x_1 x_2.$$

Ejemplo 5

Si una matriz tiene solo elementos positivos, ¿es definida positiva? No necesariamente. Por ejemplo, para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

se tiene que

$$Q_A(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

Luego, evaluado en el vector $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ se tiene que

$$Q_A(X_1) = (1)^2 + 4 \cdot (1) \cdot (-1) + (1)^2 = -2.$$

De esta manera, a pesar de que todos los elementos de la matriz son positivos, la forma cuadrática puede tomar valores negativos cuando se evalúa en ciertos vectores. Esto implica que la matriz *no es definida positiva*.