Matemáticas II
Clase 16: SEL: segunda parte

Agenda

Objetivos de la clase

Preliminares

Matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales

Solución práctica de SEL: triangulación (triangularización) de la matriz del sistema

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales que dependen de parámetros

- Entender qué es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, **SEL**.
- Explicar el método para triangularizar matrices (ampliada).
- Resolver sistemas de ecuaciones usando la triangularización de matrices (método de Gauss).

Preliminares: ecuación de primer grado

• Suponiendo que α y β son constantes (reales) dadas, nos preguntamos por x tal que

$$\alpha x = \beta.$$

(1) Si $\alpha \neq 0$, la **única solución** es

$$x = \frac{\beta}{\alpha}$$

(2) Si $\alpha = 0$, se pueden dar dos casos:

(2.1) Si $\beta = 0$ la ecuación queda $0\,x = 0$, cuya solución es "x es cualquiera", es decir, tiene **infinitas soluciones**.

(2.2) Si $\beta \neq 0$ la ecuación queda $0x = \beta$, que **no tiene solución**.

• **En resumen:** dependiendo de los valores de α y β, ocurre que la ecuación $\alpha X = \beta$ puede (i) tener solución única, (ii) tener infinitas soluciones o (iii) no tener solución.

Preliminares: sustitución inversa

- Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 3 \quad (1)\\ x_2 + x_3 &= 1 \quad (2)\\ 3x_3 &= 6 \quad (3) \end{aligned}$$

- La matriz del sistema es **triangular superior**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Resolver este sistema es *muy sencillo*: de (3) obtenemos x_3, con ese valor en (2) obtenemos x_2, y con ambos valores en (1) obtenemos x_1:

$$(3) \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2 \quad \overset{en\ (2)}{\Rightarrow} \quad x_2 = -1 \quad \overset{en\ (1)}{\Rightarrow} \quad x_1 = -12.$$

- *Lo descrito es un ejemplo de como aplica el* método de sustitución inversa *para resolver sistemas de ecuaciones.*

Ejemplo 1

Dado $\beta \in \mathbb{R}$, resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4 && (1)\\
x_2 + 2x_3 &= 2 && (2)\\
\beta\, x_3 &= 1 && (3)
\end{aligned}
$$

• Primero, la solución de la ecuación (3) depende del valor de β: si $\beta = 0$ esa ecuación **no tiene solución**; si $\beta \neq 0$ **tiene solución única**.

• Suponiendo que $\beta \neq 0$, entonces

$$(3) \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{\beta} \quad \overset{en\ (2)}{\Rightarrow} \quad x_2 = 2 - \frac{2}{\beta} \quad \overset{en\ (1)}{\Rightarrow}$$

$$x_1 = 4 + 3\left(2 - \frac{2}{\beta}\right) - 2\left(\frac{1}{\beta}\right) = 10 - \frac{8}{\beta}.$$

• En resumen:

(i) Si $\beta = 0$ el SEL **no tiene solución**.

(ii) Si $\beta \neq 0$ el SEL **tiene solución única**, dada por lo antes indicado.

Matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales

- Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, para el sistema ecuaciones

$$AX = \boldsymbol{b}$$

la **matriz ampliada** corresponde a aquella donde a la matriz A se agrega la columna $\boldsymbol{b}$.

- Para distinguir esa "nueva columna", se agregan barras: $|$
- La matriz ampliada se denota como

$$[A \,|\, \boldsymbol{b}] \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$$

Ejemplo 2

Para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 8 \end{aligned}$$

la **matriz ampliada** es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 8 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

Ejemplo 3

Para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 &= 7 \\ x_2 + 6x_3 + \alpha x_4 &= 9 \end{aligned}$$

la **matriz ampliada** es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & \alpha & 9 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{2\times 5}.$$

Descripción

• Para un SEL cualquiera, $AX = \boldsymbol{b}$, el objetivo es obtener una forma equivalente del sistema original, pero donde la matriz del nuevo SEL sea **triangular superior**.

• Para esto se procede realizando "*operaciones elementales*" sobre las filas de la matriz ampliada, $[A \,|\, \boldsymbol{b}]$.

• Las operaciones elementales (sobre filas) son **(i)** ponderar filas por una constante, **(ii)** sumar filas e **(iii)** intercambiar el orden de filas de una matriz.

• Para la triangularización del SEL, las operaciones elementales hechas sobre las filas de A también aplican al vector $\boldsymbol{b}$ (lado derecho del sistema).

• Una vez que se obtiene una matriz triangular para el SEL, y se modifica de manera correspondiente el lado derecho del sistema, se resuelve por sustitución inversa.

Ejemplo 4

Resolver el siguiente SEL (3 ecuaciones, 3 incógnitas):

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

• La matriz ampliada del SEL es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

• En primera instancia, la idea es dejar cero en la posición a_{21} de la matriz del sistema. Para esto, la (nueva) segunda fila de la matriz *modificada* se obtiene multiplicando la primera fila por $-\frac{1}{2}$, que se suma con la segunda fila de la matriz del sistema. Esta operación aplica a **todos los elementos** de las filas de la matriz ampliada, quedando lo siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1 * \left(-\frac{1}{2}\right) + f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

• En segunda instancia, la idea es dejar cero en la posición a_{31}, para lo cual multiplicamos la primera fila por $-\frac{3}{2}$ y sumamos con la tercera fila. Esto aplica para todos los elementos de la tercera fila, quedando

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1*\left(-\frac{3}{2}\right)+f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

• Finalmente, multiplicando por 4 la segunda fila y sumando con la tercera tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2*4+f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 16 & 32 \end{array}\right]$$

• A partir de lo anterior, el **SEL original** es equivalente al siguiente:

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \quad (1)$$
$$x_2 + 3x_3 = 8 \quad (2)$$
$$16x_3 = 32 \quad (3)$$

De (3) tenemos que $x_3 = 2$. Usando esto en (2) se obtiene que $x_2 = 2$, y usando ambas en (1) obtenemos que $x_1 = 1$.

Ejemplo 5

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\
4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

- Ahora procedemos de manera *más esquemática* y directa:

$$
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{f_1*(-2)+f_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{f_1*(-4)+f_3}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 2 & -7 \end{array}\right]
$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 2 & -7 \end{array}\right] \overset{f_2*(-10/7)+f_3}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{rrc|r} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{50}{7}+2) & -7 \end{array}\right]$$

En consecuencia, el **sistema original** es **equivalente** al siguiente sistema (tener presente que $-\frac{50}{7}+2=-\frac{36}{7}$)

$$\begin{aligned} x_1+3x_2-x_3 =& 2 && (1)\\ -7x_2+5x_3 =& 0 && (2)\\ -\frac{36}{7}x_3 =& -7 && (3) \end{aligned}$$

De lo anterior: por (3) tenemos que $x_3=\frac{49}{36}$, y esto en (2) implica que

$$x_2=\frac{5}{7}\cdot x_3=\frac{5}{7}\cdot\frac{49}{36}=\frac{35}{36},$$

y ambos en (1) implica que

$$x_1=2-3\cdot\underbrace{\frac{35}{36}}_{x_2}+\underbrace{\frac{49}{36}}_{x_3}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}.$$

FACULTAD ECONOMÍA Y NEGOCIOS UNIVERSIDAD DE CHILE

Ejemplo 6 (importante)

Dadas las constantes (reales) α y β, considere el siguiente SEL:

$$\begin{aligned} \beta x_1 + x_2 &= \alpha \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

• La matriz ampliada del sistema es

$$\left[\begin{array}{cc|c} \beta & 1 & \alpha \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

• Para aplicar la "técnica" (triangularizar) conviene ponderar las filas por constantes conocidas. Por ese hecho, se sugiere intercambiar las filas de la matriz ampliada (que es una de las operaciones elementales que se definieron):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ \beta & 1 & \alpha \end{array}\right]$$

• Para dejar 0 en la posición a_{21} (donde está β), en la matriz ampliada se debe multiplicar la primera fila por $-\frac{\beta}{2}$ y sumarla con la segunda fila:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ \beta & 1 & \alpha \end{array}\right] \overset{f_1 * \frac{-\beta}{2} + f_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 - \frac{3\beta}{2} & \alpha - \frac{\beta}{2} \end{array}\right].$$

• Sobre la base de lo anterior, teniendo presente que

$$\left(1 - \frac{3\beta}{2}\right) x_2 = \alpha - \frac{\beta}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad (2 - 3\,\beta) x_2 = 2\,\alpha - \beta,$$

el sistema de ecuaciones queda

$$2x_1 + 3x_2 = 1 \tag{1}$$

$$(2 - 3\,\beta) x_2 = 2\,\alpha - \beta \tag{2}$$

- De esta manera, se tiene entonces que:
  (i) Si $2-3\beta \neq 0$, es decir, si $\beta \neq \frac{2}{3}$, el sistema tiene solución única: de ecuación (2) se obtiene x_2, y con eso en ecuación (1) se obtiene x_1:

$$x_2 = \frac{2\alpha-\beta}{2-3\beta} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - 3\,\frac{2\alpha-\beta}{2-3\beta}\right)}_{2x_1+3x_2=1 \;\Rightarrow\; x_1=\frac{1}{2}(1-3x_2)} = \frac{2-6\alpha}{4-6\,\beta} = \frac{1-3\alpha}{2-3\,\beta}.$$

  (ii) Si $2-3\beta = 0$, es decir, si $\beta = \frac{2}{3}$, entonces el sistema
    (ii.1) **no tiene solución** ($0x_2 \neq 0$) si el **lado derecho es diferente de cero**, es decir, cuando

$$2\alpha - \frac{2}{3} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \neq \frac{1}{3}.$$

    (ii.2) **Tiene infinitas soluciones** ($0x_2 = 0$) si el **lado derecho es cero**, es decir, cuando

$$2\alpha - \frac{2}{3} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{3}.$$

- Síntesis:
  (a) Solución única cuando $\beta \neq \frac{2}{3}$.
  (b) No tiene solución cuando $\beta = \frac{2}{3}$ y $\alpha \neq \frac{1}{3}$.
  (c) Infinitas soluciones cuando $\beta = \frac{2}{3}$ y $\alpha = \frac{1}{3}$.

Ejemplo 7 (importante)

Encontrar α y β para que el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + \beta x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= \alpha \end{aligned}$$

- no tenga solución
- tenga infinitas soluciones
- tenga solución única

(a) La matriz ampliada del sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & \beta & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & \alpha \end{array}\right].$$

(b) Triangularizando:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & \beta & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & \alpha \end{array}\right] \overset{f_1*(-2)+f_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \beta+2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \alpha \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \beta+2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \alpha \end{array}\right] \overset{f_1*(-1)+f_3}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \beta+2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & \alpha-1 \end{array}\right]$$

• En principio, debemos dejar 0 en la posición $a_{32} = 2$, por lo que la segunda fila debería ser multiplicada por $-\frac{2}{\beta+2}$ y luego sumar con la tercera fila. Sin embargo, **parece más simple intercambiar las filas** 2 **y** 3 y luego continuar con el método (las operaciones con las filas son más sencillas):

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \beta+2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & \alpha-1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \alpha-1 \\ 0 & \beta+2 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Luego:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \alpha-1 \\ 0 & \beta+2 & 3 & 2 \end{array}\right] \xRightarrow{f_2*\left(-\frac{(\beta+2)}{2}\right)+f_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & \frac{-3(\beta+2)}{2}+3 & -\frac{(\beta+2)(\alpha-1)}{2}+2 \end{array}\right]$$

Sobre la base de lo anterior, la tercera ecuación del SEL es

$$\left(\frac{-3(\beta+2)}{2}+3\right)x_3 = -\frac{(\beta+2)(\alpha-1)}{2}+2,$$

es decir:

$$\frac{-3\beta}{2}x_3 = \frac{-\alpha\beta+\beta-2\alpha+6}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 3\beta x_3 = \alpha\beta-\beta+2\alpha-6.$$

Luego, sobre la base de expuesto:

- Si $\beta \neq 0$ el sistema tiene una **solución única**: se despeja x_3 de ecuación anterior y con él, usando la ecuación del medio en el SEL triangular se obtiene x_2. Finalmente, con los resultados de x_3 y x_2 se obtiene x_1 usando la primera ecuación de SEL.
- Si $\beta = 0$, la ecuación anterior se convierte en

$$0x_3 = 2\alpha - 6$$

Por lo tanto:

(i) El sistema **no tiene solución** si $2\alpha - 6 \neq 0$, es decir, cuando $\alpha \neq 3$. En ese caso, la ecuación bajo análisis queda

$$0x_3 = \underbrace{2\alpha - 6}_{\neq 0}$$

(ii) Si $2\alpha - 6 = 0$, es decir, $\alpha = 3$, entonces el sistema tiene **infinitas soluciones**, ya que la ecuación bajo análisis se convierte en

$$0x_3 = 0.$$