Прокопенко Тимофей

Задача 2.

Решение:
Рассматриваемое множество функций - H = {$h_\theta = \lceil 0.5sin(\theta x) \rceil$: $\theta \in \mathbb{R}$}.
Оценим значения $\lceil 0.5sin(\theta x) \rceil$:

$$-1 \leq sin(\theta x) \leq 1 => -0.5 \leq 0.5sin(\theta x) \leq 0.5 => \lceil 0.5sin(\theta x) \rceil = \{0, 1\}$$

В качестве C примем множество {$2^{-m} | m \in \mathbb{N}$}. Докажем, что любое его конечное подмножество может быть раскрашено H.

Предположим, что при $\theta = -\pi(1 + \sum_{i=1}^{m} 2^i * y_i)$ выборка {x_i, y_i} будет всегда правильно классифицироваться для любого набора лейблов y_i.

$$\theta * x_j = \theta * 2^{-j} = -\pi * 2^{-j} * (1 + \sum_{i=1}^{m} 2^i * y_i) = -\pi * (2^{-j} + \sum_{i=1}^{j-1} 2^{i-j} * y_i + y_j + \sum_{i=1}^{m-j} 2^i * y_i) =$$

$$* (2^{-j} + \sum_{i=1}^{j-1} 2^{-i} * y_i + y_j + \sum_{i=1}^{m-j} 2^i * y_i) = -\pi * (\sum_{i=1}^{j} 2^{-i} * y_i + y_j + \sum_{i=1}^{m-j} 2^i * y_i)$$

Слагаемое $(-\pi * (\sum_{i=1}^{m-j} 2^i * y_i))$ может быть опущено, так как оно лишь задает периодичность синусоиды (-2πk). Ограничим $(-\pi * (\sum_{i=1}^{j} 2^{-i} * y_i + y_j))$ снизу и сверху:

$$-\pi * (\sum_{i=1}^{j} 2^{-i} * y_i + y_j) < -\pi * y_j$$

$$-\pi * (\sum_{i=1}^{j} 2^{-i} * y_i + y_j) > -\pi * (1 + y_j)$$

$$-\pi * (1 + y_j) < \theta * x_j < -\pi * y_j$$

Допустим y_j = 1:

$$-2\pi < \theta * x_j < -\pi => 0 < sin(\theta * x_j) < 1 => \lceil 0.5sin(\theta x) \rceil = 1$$

При y_j = 0:

$$-\pi < \theta * x_j < 0 => -1 < sin(\theta * x_j) < 0 => \lceil 0.5sin(\theta x) \rceil = 0$$

Таким образом при любом конечном m H раскрашивает C={$2^{-m} | m \in \mathbb{N}$}. Таким образом dim(H)=∞.