Лабораторная № 8

Прокопенко Тимофей, АСОБД, timophej3@gmail.com

№ 10.1.3

10.1.3. (Неподвижная точка) Рассмотрим систему из двух осцилляторов и модельную функцию (13.9).

$$g(z) = \frac{e^{bz} - 1}{e^b - 1}, \tag{13.8}$$

$$f(\phi) = \frac{1}{b} \ln(1 + (e^b - 1)\phi). \tag{13.9}$$

1. Выполните упражнение 5 из лекции 13 (включая построение графиков).

$\triangleright_5$ Вычислите неподвижную точку ϕ^*. Изобразите график зависимости ϕ^* от ε при различных b.

Решение:

Для нахождения неподвижной точки нужно решить уравнение h(ϕ^*)=ϕ^*, где h(ϕ)=g(f(1-ϕ)+ϵ).

$$g(f(1-\varphi^*)+\varepsilon) = \varphi^*$$

$$f(1-\varphi^*)+\varepsilon = f(\varphi^*)$$

$$f(\varphi^*) - f(1-\varphi^*) = \varepsilon$$

$$\frac{1}{b}\ln\left(1+(e^b-1)\varphi^*\right) - \frac{1}{b}\ln\left(1+(e^b-1)(1-\varphi^*)\right) = \varepsilon$$

$$\ln\left(\frac{1+(e^b-1)\varphi^*}{\cancel{1}+e^b\cancel{-1}-\varphi^*(e^b-1)}\right) = \varepsilon b$$

$$\left[\varphi^*(e^b-1) = t\right]$$

$$\frac{1+t}{e^b-t} = e^{\varepsilon b}$$

$$1+t = e^{\varepsilon b+b} - t\cdot e^{\varepsilon b}$$

$$t + te^{\varepsilon b} = e^{\varepsilon b+b} - 1$$

$$t(1+e^{\varepsilon b}) = e^{\varepsilon b+b} - 1$$

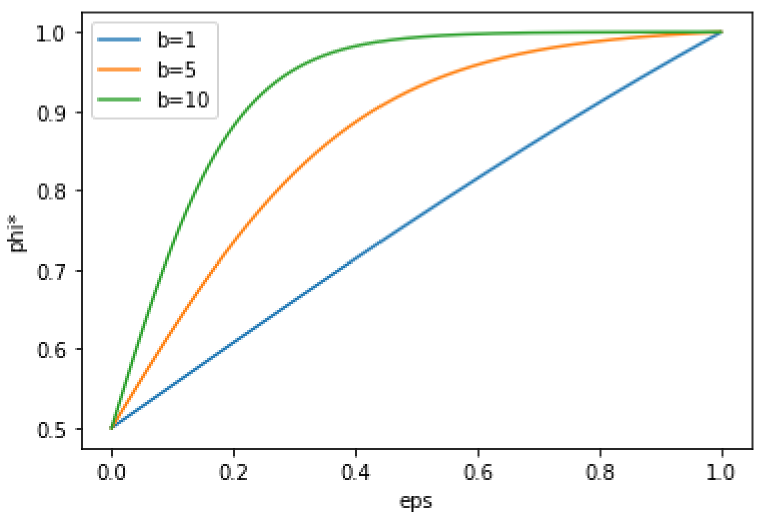
$$t = \frac{e^{\varepsilon b+b}-1}{1+e^{\varepsilon b}}$$

$$\varphi^* = \frac{e^{\varepsilon b+b}-1}{(1+e^{\varepsilon b})(e^b-1)}$$

In [15]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
%matplotlib inline
```

In [16]:
```
def get_static_point(eps, b):
    return (np.exp(eps * b + b) - 1) / ((1 + np.exp(eps * b)) * (np.exp(b) - 1
))
```

In [106]:
```
epsilons = np.arange(0, 1, 0.001)
plt.plot(epsilons, [get_static_point(eps, 1) for eps in epsilons], label="b=1"
)
plt.plot(epsilons, [get_static_point(eps, 5) for eps in epsilons ], label="b=
5")
plt.plot(epsilons, [get_static_point(eps, 10) for eps in epsilons ], label="b=
10")
plt.legend()
plt.xlabel("eps")
plt.ylabel("phi*")
plt.show()
```



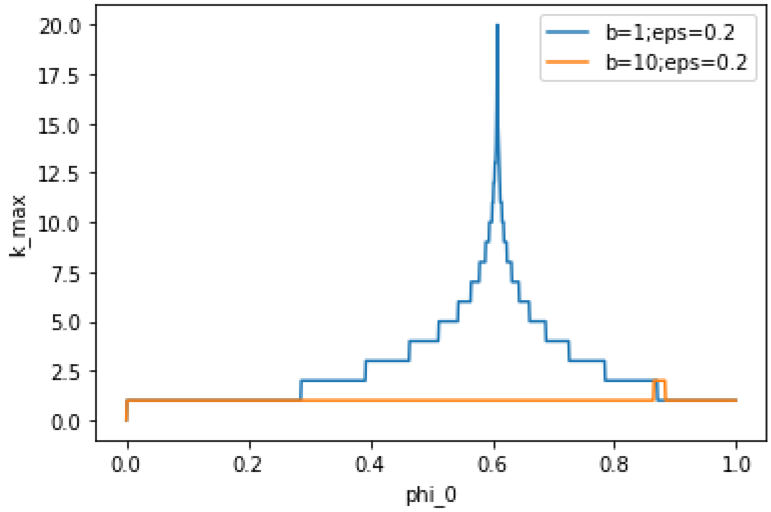
2. Подтвердите полученный результат экспериментально: постройте график $k_{max}(\phi_0)$, где k_{max} — количество итераций отображения возвращения R, необходимое для достижения синхронизма, ϕ_0 — начальная фаза осциллятора B (осциллятор A по предположению находится в нуле). Для наглядности, возможно, графики следует изобразить в логарифмической шкале. Постройте несколько таких графиков для различных ε и b.
   Согласуются ли полученные результаты с теорией?

In [78]:
```
def f(fi, b):
    return (1 / b) * np.log(1 + (np.exp(b) - 1) * fi)

def g(z, b):
    return (np.exp(b * z) - 1) / (np.exp(b) - 1)
```

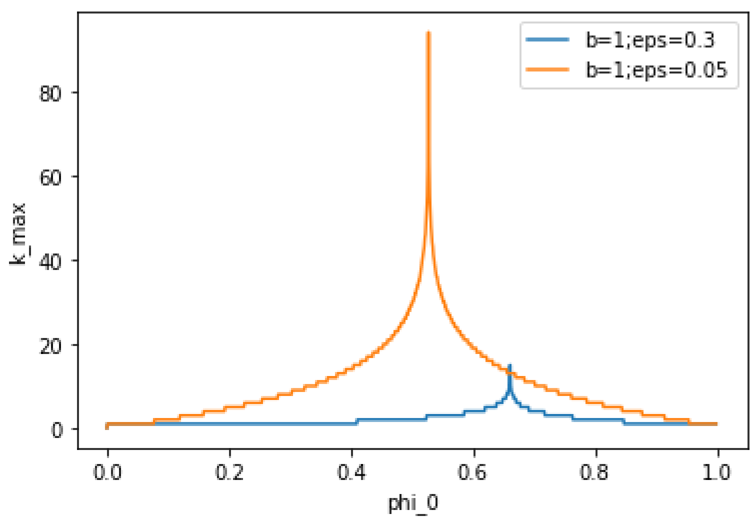
In [87]:
```
def simulation(func, inv_func, init_phase, eps, step=0.01):
    r_count = 0
    state = init_phase
    time = 0

    while not np.all(state == 0):
        state = state + min(1.0, min(step, np.min(1 - state)))
        time += min(step, np.min(1 - state))
        values = func(state)

        impulse = eps * (values >= 1).sum()
        new_values = values + impulse
        state = inv_func(new_values)
        state[new_values >= 1] = 0
        if state[0] == 0:
            r_count+=1;

    return r_count;
```

In [121]:
```
fi_vector = np.arange(0.001, 1, 0.001)

def get_r_vector(eps, b, fun=f, inv_fun=g, fi_vector=fi_vector):
    return [simulation(
        func=lambda x: fun(x, b),
        inv_func=lambda x: inv_fun(x, b),
        init_phase=np.array([0, fiB]),
        eps=eps,
        step=0.01) for fiB in fi_vector]
```

In [108]:
```
plt.plot(fi_vector, get_r_vector(eps=0.2, b=1), label="b=1;eps=0.2")
plt.plot(fi_vector, get_r_vector(eps=0.2, b=10), label="b=10;eps=0.2")
plt.legend()
plt.xlabel("phi_0")
plt.ylabel("k_max")
plt.show()
```



In [110]:
```
plt.plot(fi_vector, get_r_vector(eps=0.3, b=1), label="b=1;eps=0.3")
plt.plot(fi_vector, get_r_vector(eps=0.05, b=1), label="b=1;eps=0.05")

plt.legend()
plt.xlabel("phi_0")
plt.ylabel("k_max")
plt.show()
```



Как видим, у каждого графика есть ярко выраженный пик - это неподвижная точка. Все значения неподвижных точек больше 0.5, как и было показано в графике, изображенном в 1 пункте.

Проверим значения при конкретных параметрах.
1) b=1, eps=0.2. По данным из первого пункта неподвижная точка будет в 0.6. Это подтвержается и графиком в пункте 2.

In [111]:
```
print(get_static_point(eps=0.2, b=1))
```

```
0.6078384486045795
```

2) b=10, eps=0.2. По данным из первого пункта неподвижная точка будет в 0.88. Это подтвержается и графиком в пункте 2.

In [113]:
```
print(get_static_point(eps=0.2, b=10))
```

```
0.8808316558689041
```

Данные результаты хорошо согласуются с теорией. На графиках из второго пункта видно, что неподвижная точка всего одна и что она неустойчива. По степени удаления ϕ_0 от ϕ^* уменьшается количество итераций отображения возвращения до наступления синхронизации. Также можно заметить, что при бОльших b функция увеличивается с экспоненциальной скоростью, поэтому синхронизация наступает почти сразу. БОльшие значения ϵ также ускоряют процесс схождения.

3. Рассмотрим теперь $f(\phi) = \dfrac{1 - e^{-b\phi}}{1 - e^{-b}}$. Для $b = 1$ и $b = 10$ численно постройте графики $\phi^*(\varepsilon)$.

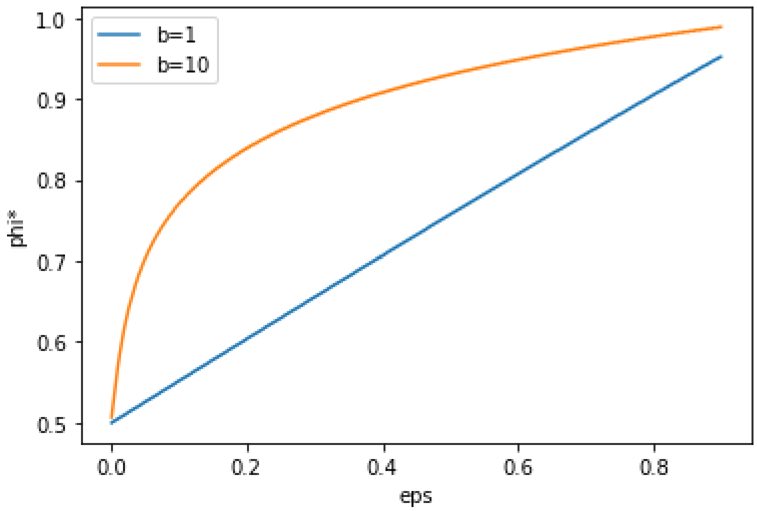
In [139]:
```
def f_2(fi, b):
    return (1 - np.exp(-b * fi)) / (1 - np.exp(-b))
```

In [140]:
```
def g_2(fi, b):
    return (np.log(1 + (np.exp(-b) - 1) * fi)) / (-b)
```

In [180]:
```
phi_values = np.arange(0.5, 0.999, 0.001)

def get_intersection_point(eps, b):
    f_values = np.asarray([f_2(fi,b) for fi in phi_values])
    another_f_values = np.asarray([f_2(1-fi,b)+eps for fi in phi_values])
    idx = np.argwhere(np.diff(np.sign(f_values - another_f_values))).flatten()
    return phi_values[idx[0]]
```

In [194]:
```
epsilons = np.arange(0.001, 0.9, 0.001)

y_values_b1 = np.asarray([get_intersection_point(eps, 1) for eps in epsilons])
y_values_b10 = np.asarray([get_intersection_point(eps, 10) for eps in epsilons
])
```

In [195]:
```
plt.plot(epsilons, y_values_b1, label="b=1")
plt.plot(epsilons, y_values_b10, label="b=10")
plt.legend()
plt.xlabel("eps")
plt.ylabel("phi*")
plt.show()
```



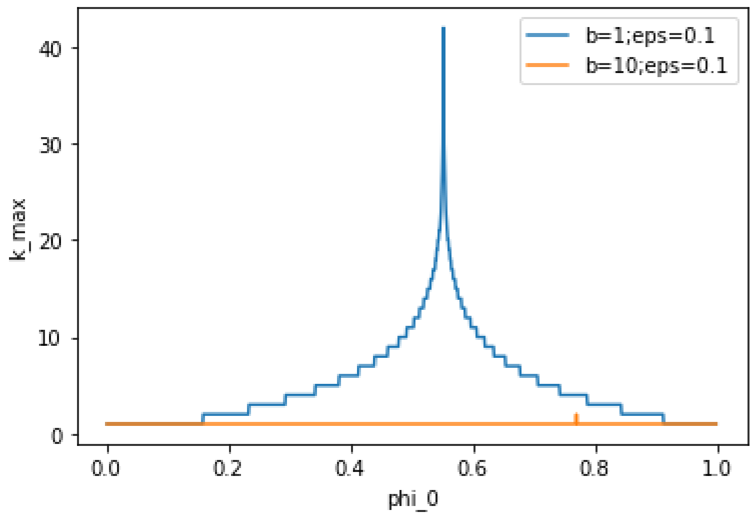
In [203]:
```
def get_static_point_2(eps):
    dict_b1 = dict(zip(epsilons, y_values_b1))
    dict_b10 = dict(zip(epsilons, y_values_b10))

    print(f"Phi_0 for b=1: {dict_b1[eps]}.")
    print(f"Phi_0 for b=10: {dict_b10[eps]}.")
```

4. Подтвердите полученные в предыдущем пункте результаты экспериментально.

In [189]:

```
plt.plot(fi_vector, get_r_vector(eps=0.1, b=1, fun=f_2, inv_fun=g_2), label="b=1;eps=0.1")
plt.plot(fi_vector, get_r_vector(eps=0.1, b=10, fun=f_2, inv_fun=g_2), label="b=10;eps=0.1")
plt.legend()
plt.xlabel("phi_0")
plt.ylabel("k_max")
plt.show()
```

```
D:\Anaconda3\lib\site-packages\ipykernel_launcher.py:2: RuntimeWarning: invalid value encountered in log
```



In [205]:

```
get_static_point_2(eps=0.1)
```

```
Phi_0 for b=1: 0.552.
Phi_0 for b=10: 0.7700000000000002.
```

Как видно, экспериментальные результаты подтвердили значения, полученные на графике из пункта 3.