

## Лабораторная № 5

Прокопенко Тимофей, АСОБД, timophej3@gmail.com

### № 5.3 ¶

5.3. Найдите инвариантную функцию (первый интеграл) для системы  $\ddot{x} = ax - x^2$  и изобразите фазовый портрет для  $a < 0$ ,  $a = 0$ ,  $a > 0$ .

Решение:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = ax_1 - x_1^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{x_2} = dt \\ \frac{dx_2}{ax_1 - x_1^2} = dt \end{cases}$$

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{ax_1 - x_1^2}$$

$$(ax_1 - x_1^2)dx_1 = x_2 dx_2$$

$$\frac{ax_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{3} - \frac{x_2^2}{2} = \text{const} - \text{1 интеграл}$$

Итого последнее уравнение задает первый интеграл системы:

$$F(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} - \frac{ax_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{3}$$

Перейдем к построению фазового портрета.

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ ax_1 - x_1^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1(a - x_1) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Особые точки} \\ x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_1 = a & x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a-2x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p = a + d = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$q = -bc = -(a-2x_1) = -a + 2x_1 = 2x_1 - a$$

$$\Delta = p^2 - 4q = -4q = \underline{4a - 8x_1}$$

1) Рассмотрим случай при  $a < 0$ :

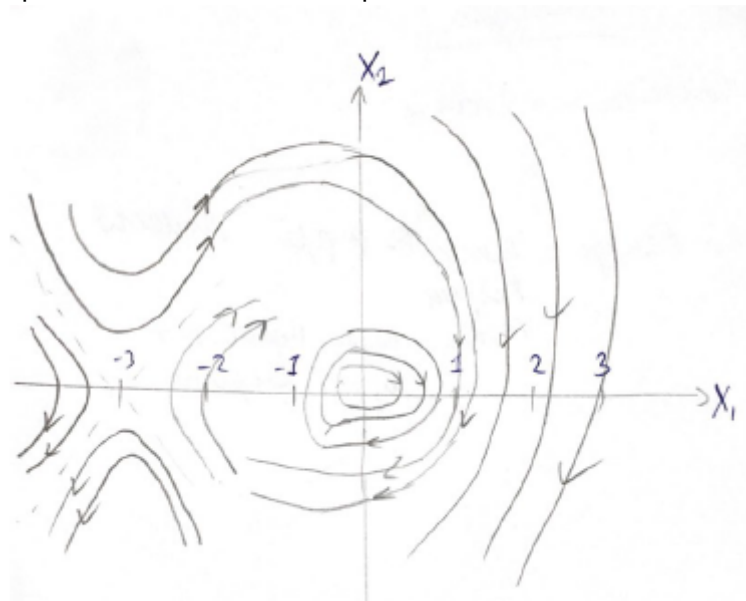
$$1) a < 0: \quad p = 0 \quad q = 2x_1 - a \quad \Delta = 4a - 8x_1$$

$$a) x_1 = 0: \quad \underbrace{p=0 \quad q=-a > 0 \quad \Delta=4a < 0}_{\text{четыре}}$$

$$б) x_1 = a: \quad \underbrace{q=a < 0 \quad \Delta=-4a > 0 \quad p=0}_{\text{сегно}}$$

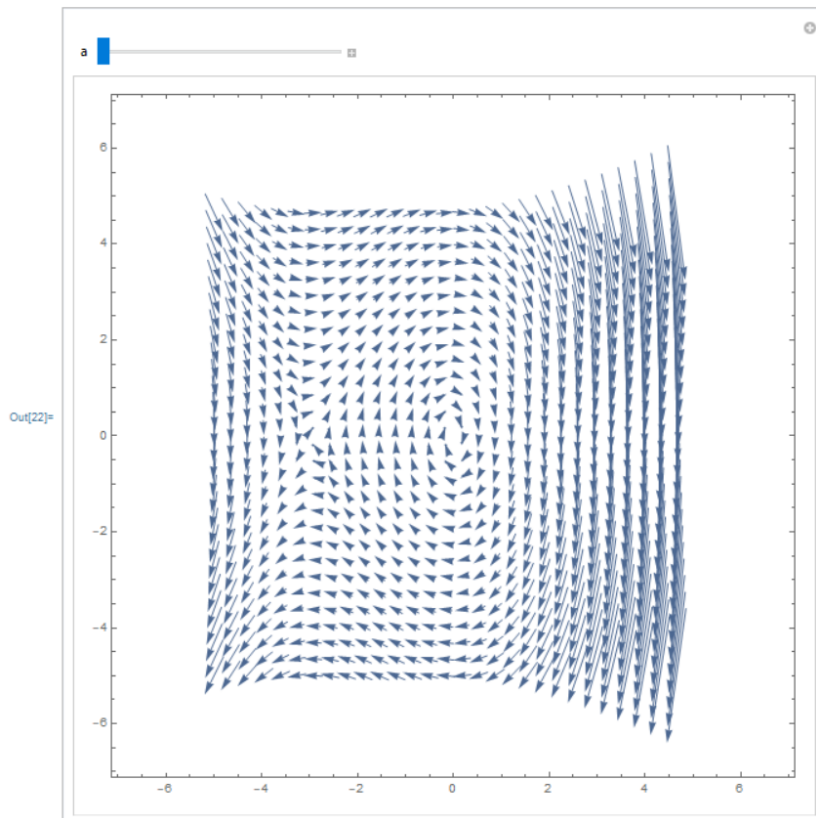
Собственные векторы принимают вид  $V_1=(1, -\sqrt{-a})$ ,  $V_2=(1, \sqrt{-a})$ , учтем это при построении особой точки типа "седло".

Изобразим фазовый портрет без помощи компьютера:



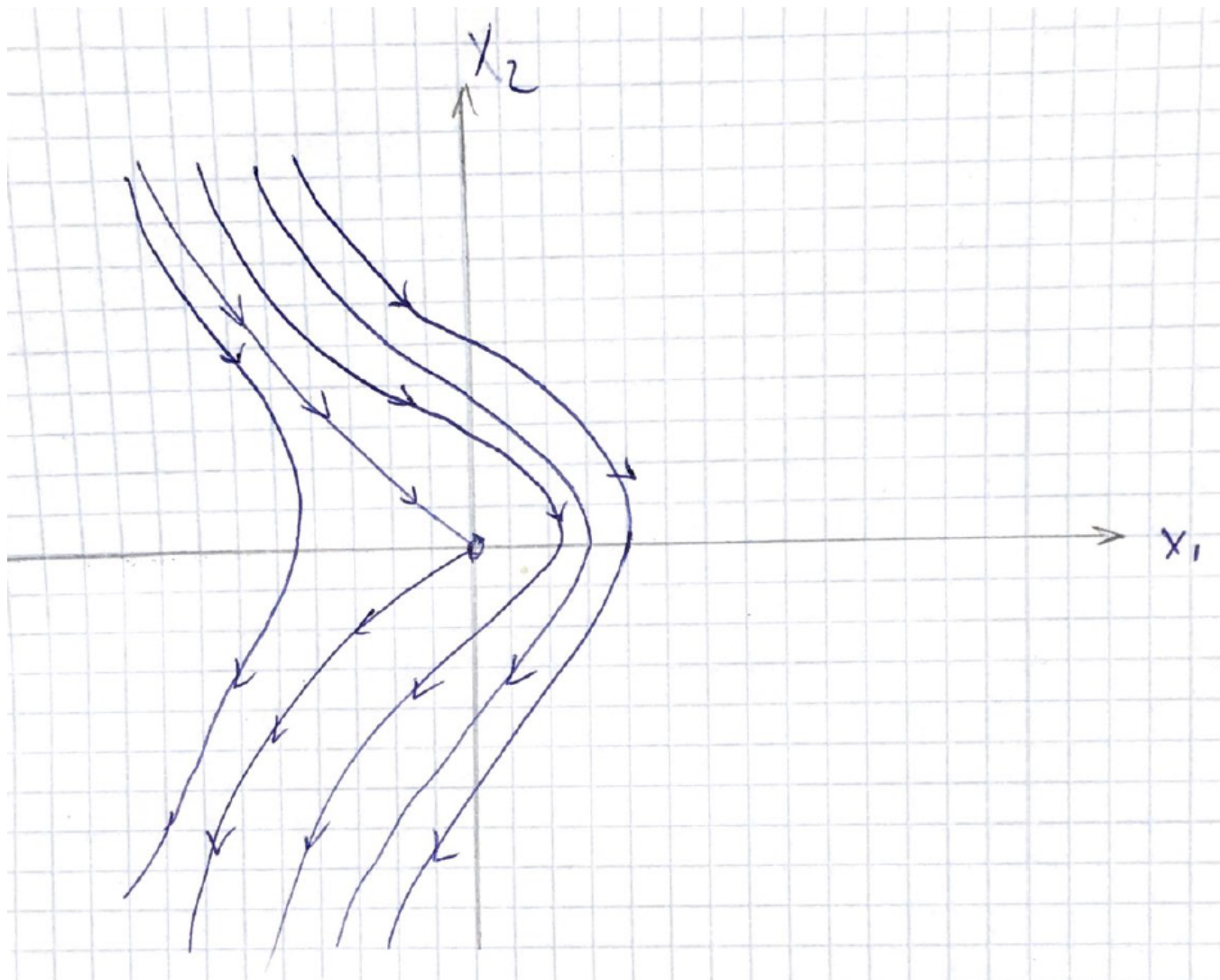
И сравним полученный результат с Вольфрамом:

```
In[22]:= Manipulate[  
  VectorPlot[{y, a * x - x * x}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, VectorPoints -> 30, VectorStyle -> Arrowheads[0.02], VectorScale -> 0.2, ImageSize -> Large], {a, -3, -3}  
]
```



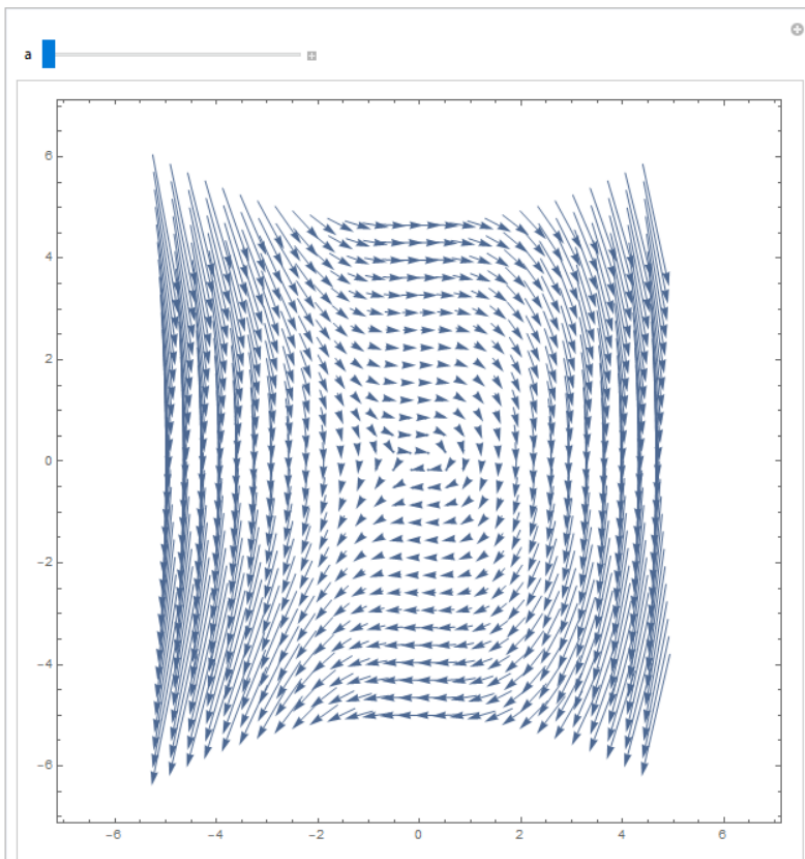
2) При  $a=0$  система имеет одну особую точку в  $(0,0)$ , тип и построение графика для которой требует дополнительных исследований. В таком случае  $F(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^3}{3}$ , то есть все траектории фазового графика задаются уравнением  $\frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^3}{3} = c$ . Его можно представить в виде  $x_1 = \sqrt[3]{3c - \frac{3}{2}x_2^2}$ .

Исходя из вида системы, при  $x_2 > 0$   $x_1$  возрастает, при  $x_2 < 0$   $x_1$  убывает, а при  $a=0$   $x_2$  всегда убывает. Построим фазовый портрет:



Проверим с помощью Вольфрама:

```
Manipulate[
  VectorPlot[{y, a*x - x*x}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, VectorPoints -> 30, VectorStyle -> Arrowheads[0.02], VectorScale -> 0.2, ImageSize -> Large], {a, 0, 0}
]
```



3) При  $a > 0$ :

$$b) a > 0 : p = 0, q = 2x_1 - a \quad \Delta = 4a - 8x_1,$$

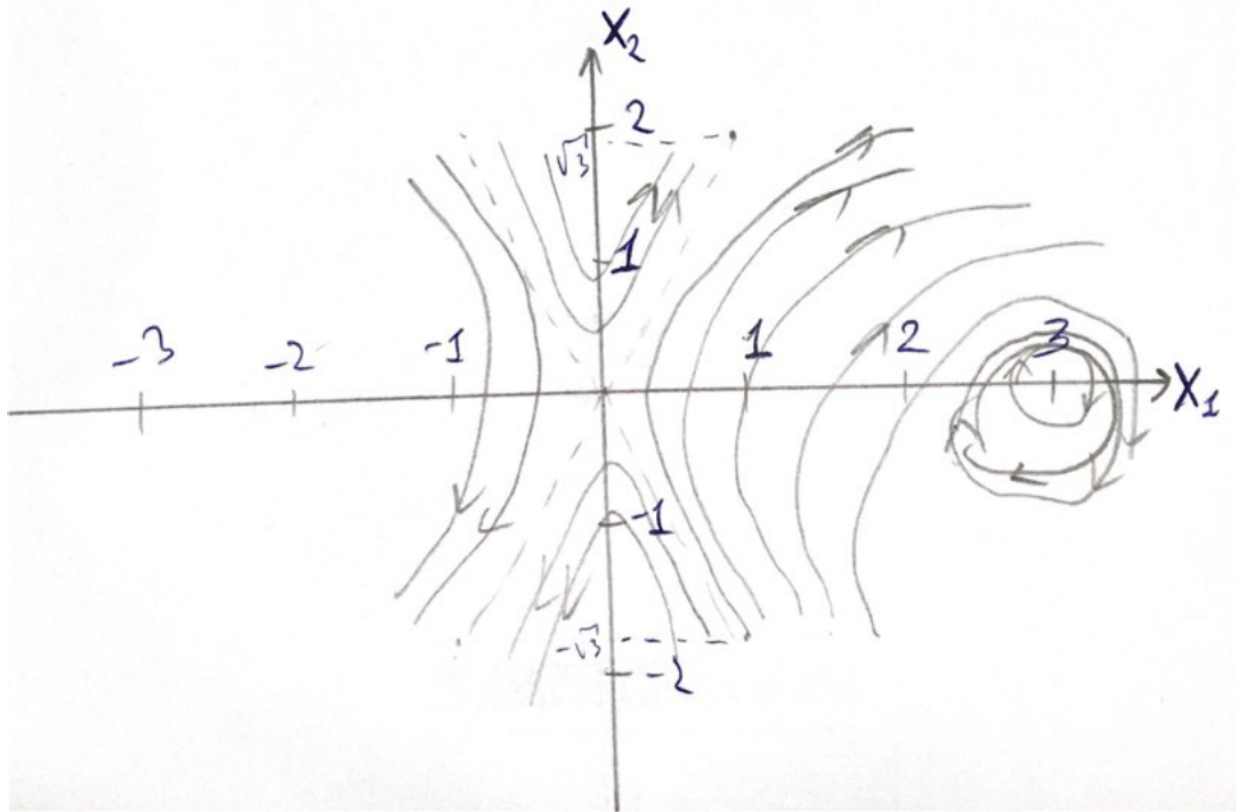
$$a) x_1 = 0 : q = -a < 0 \quad \Delta > 0 \Rightarrow \text{седло}$$

$$b) x_1 = a : q = a > 0 \quad \Delta < 0 \Rightarrow \text{узел}$$



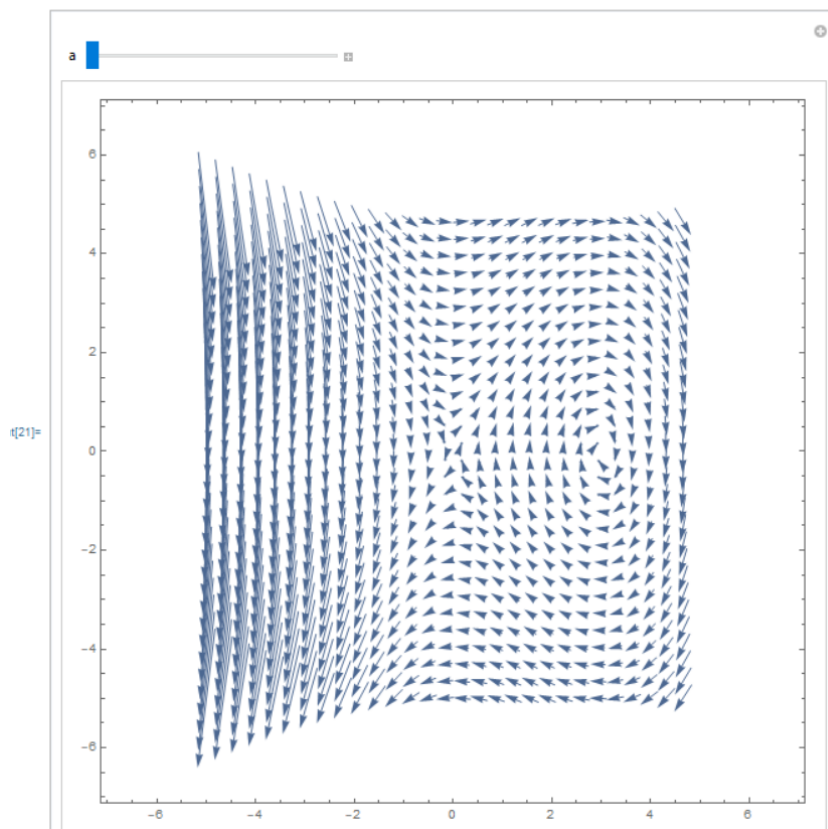
Собственные векторы принимают вид  $V_1=(1, -\sqrt{a})$ ,  $V_2=(1, \sqrt{a})$ , учтем это при построении особой точки типа "седло".

Построим фазовый портрет при  $a = 3$ :



Вольфрам:

```
[21]:= Manipulate[
  VectorPlot[{y, a*x - x*x}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, VectorPoints -> 30, VectorStyle -> Arrowheads[0.02], VectorScale -> 0.2, ImageSize -> Large], {a, 3, 3}
]
```



## № 8.1.9

8.1. (Численные эксперименты с системой Лоренца) Для каждого из указанных значений исследуйте экспериментально динамику системы Лоренца, как обычно полагая  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ . В каждом случае изобразите графики  $x(t)$ ,  $y(t)$  и проекцию фазовой кривой на плоскость  $(x, z)$ . Необходимо исследовать влияние различных начальных условий и интервалов интегрирования. В некоторых случаях уместно игнорировать «переходный режим» системы и изобразить графики для больших  $t$ .

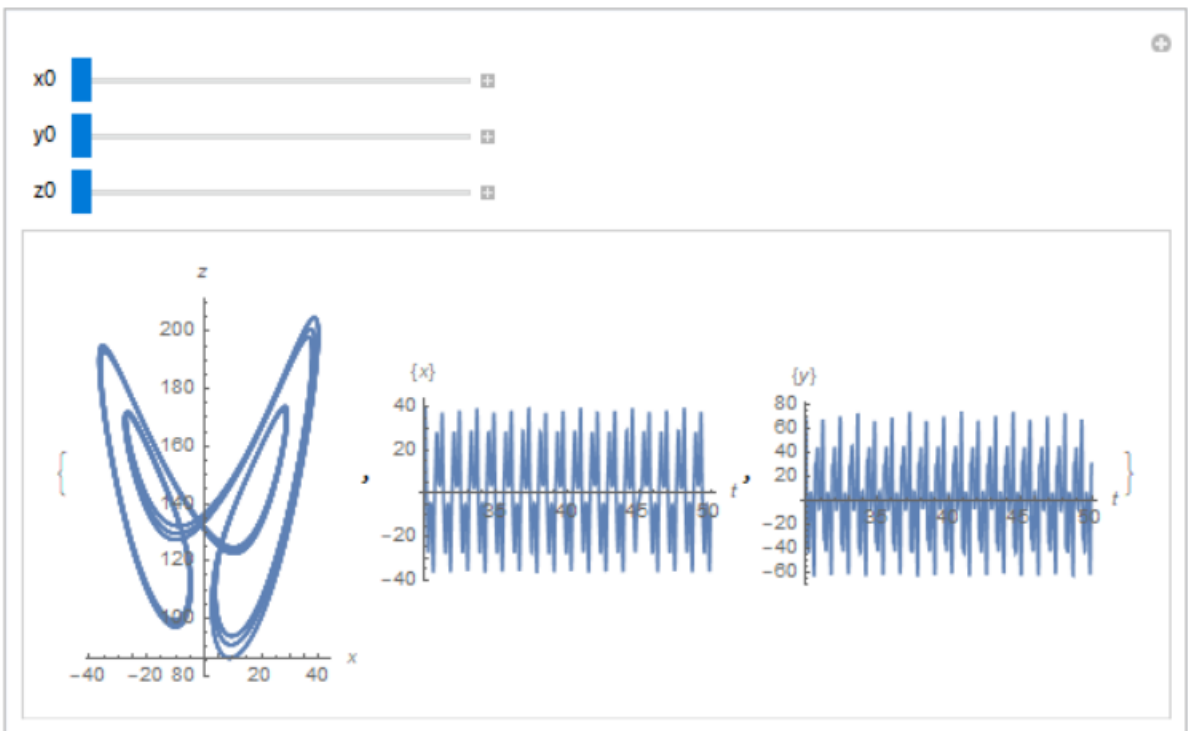
### 8.1.9. $145 < r < 166$ (удвоение периода)

Система Лоренца была исследована с помощью Вольфрама (код прикреплен - Lab5.nb).

Рассмотрим изменение системы при  $r = 146$ ,  $30 < t < 50$ . Будем изменять начальное значение параметров:

```
},
{x0, -10, 10},
{y0, -10, 10},
{z0, -10, 10}
]
```

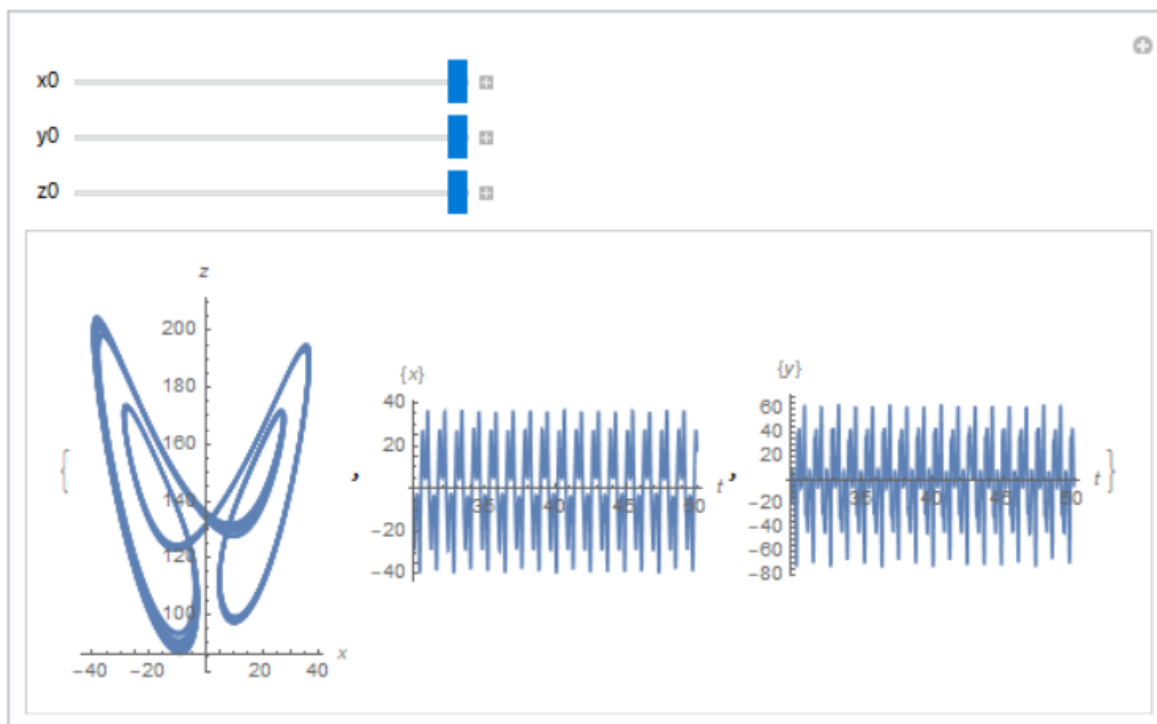
Out[563]=





```
{x0, -10, 10},
{y0, -10, 10},
{z0, -10, 10}
]
```

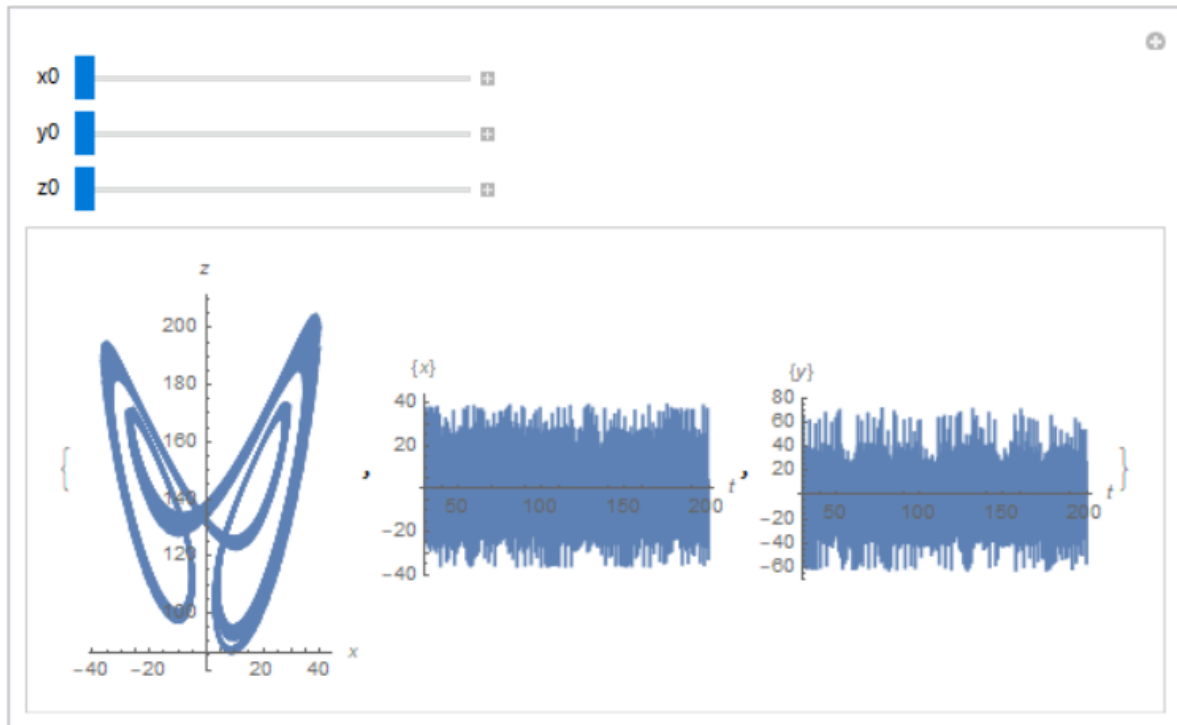
Out[563]=

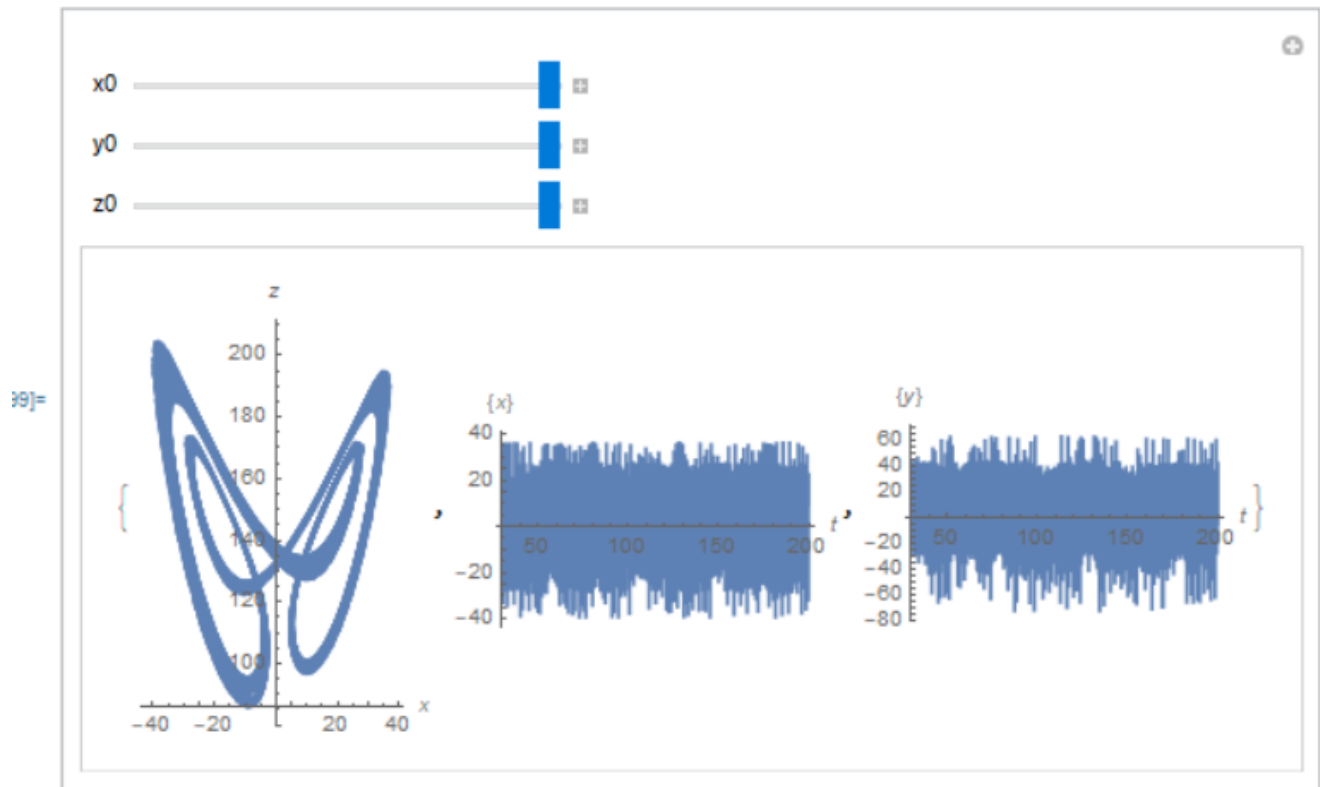


На изображениях показаны крайние положения начальных параметров, при этих значениях хорошо видны различные положения системы. При динамическом изменении значений начальных параметров было замечено, что двойной цикл всегда сохраняется, правда, график периодически меняет размеры своих "ушей" - принципиально разные положения зафиксированы на изображениях.

Теперь попробуем изменить интервалы интегрирования(увеличим верхнюю границу до 200, нижнюю оставим 30):

Out[599]=

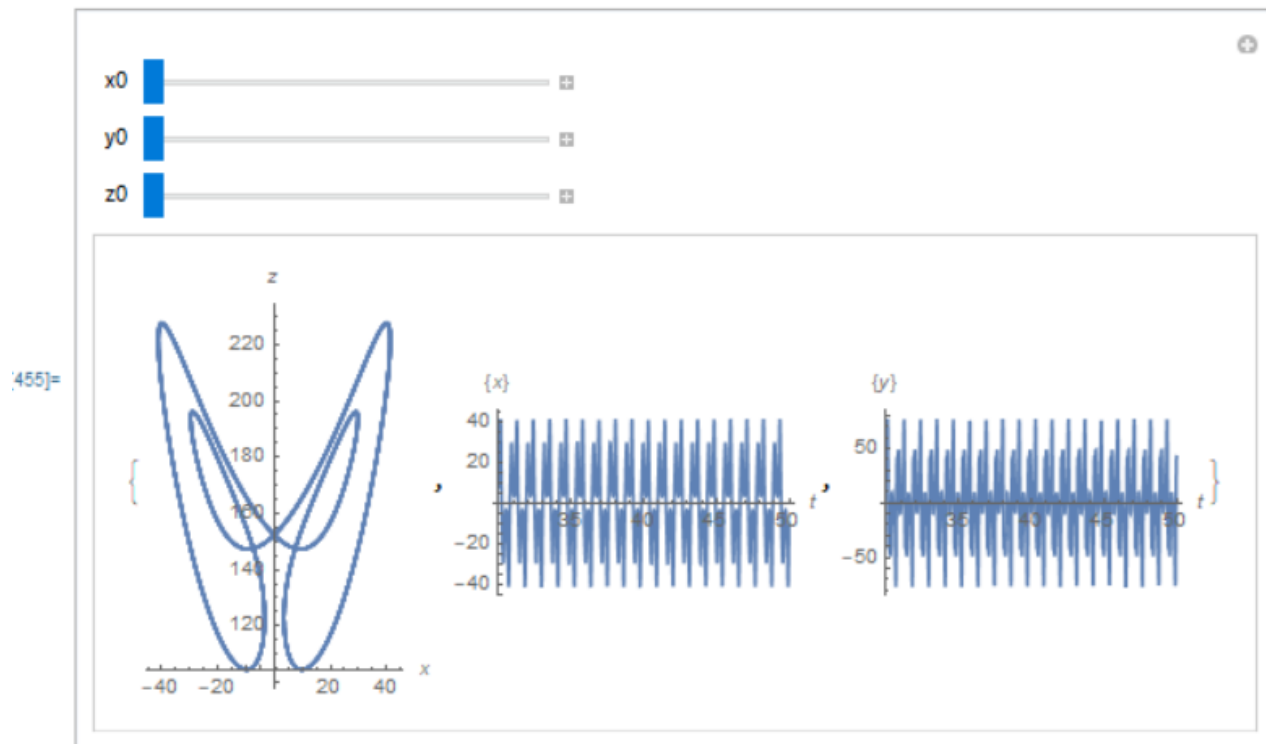




Как видно, система сохранила свое поведение, но при больших  $t$  хаотическое поведение  $x(t)$ ,  $y(t)$  стало более очевидным.

Рассмотрим теперь систему Лоренца на правом промежутке значения  $r=166$ ,  $30 < t < 50$ .

```
{x0, -10, 10},
{y0, -10, 10},
{z0, -10, 10}
]
```

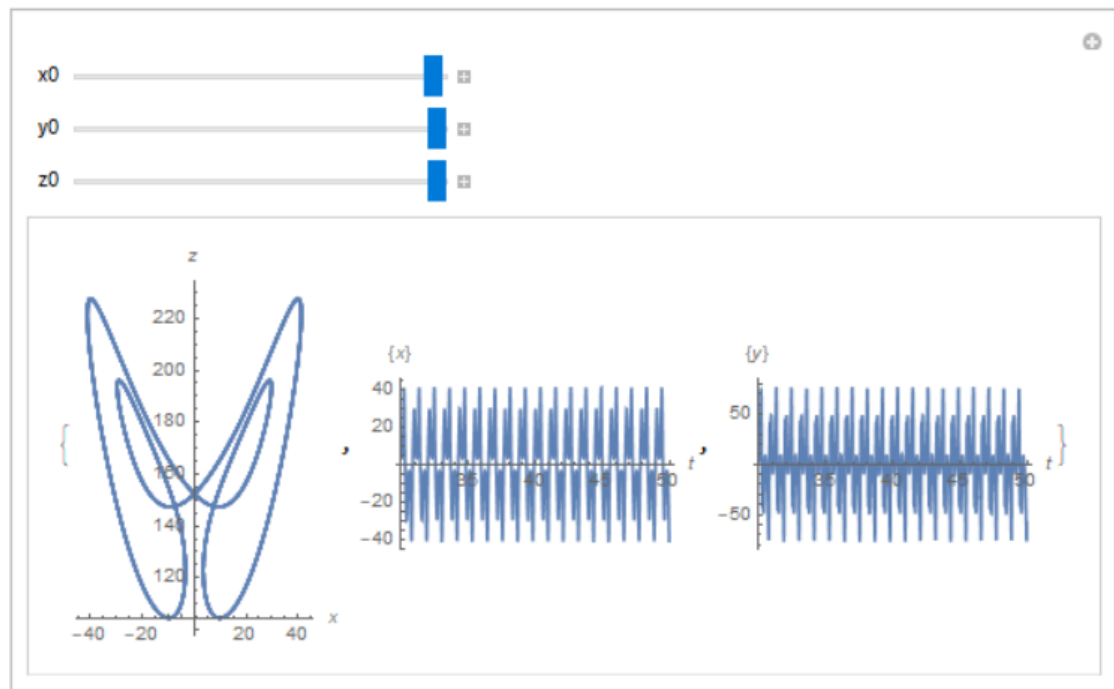


```

},
{x0, -10, 10},
{y0, -10, 10},
{z0, -10, 10}
]

```

Out[511]=



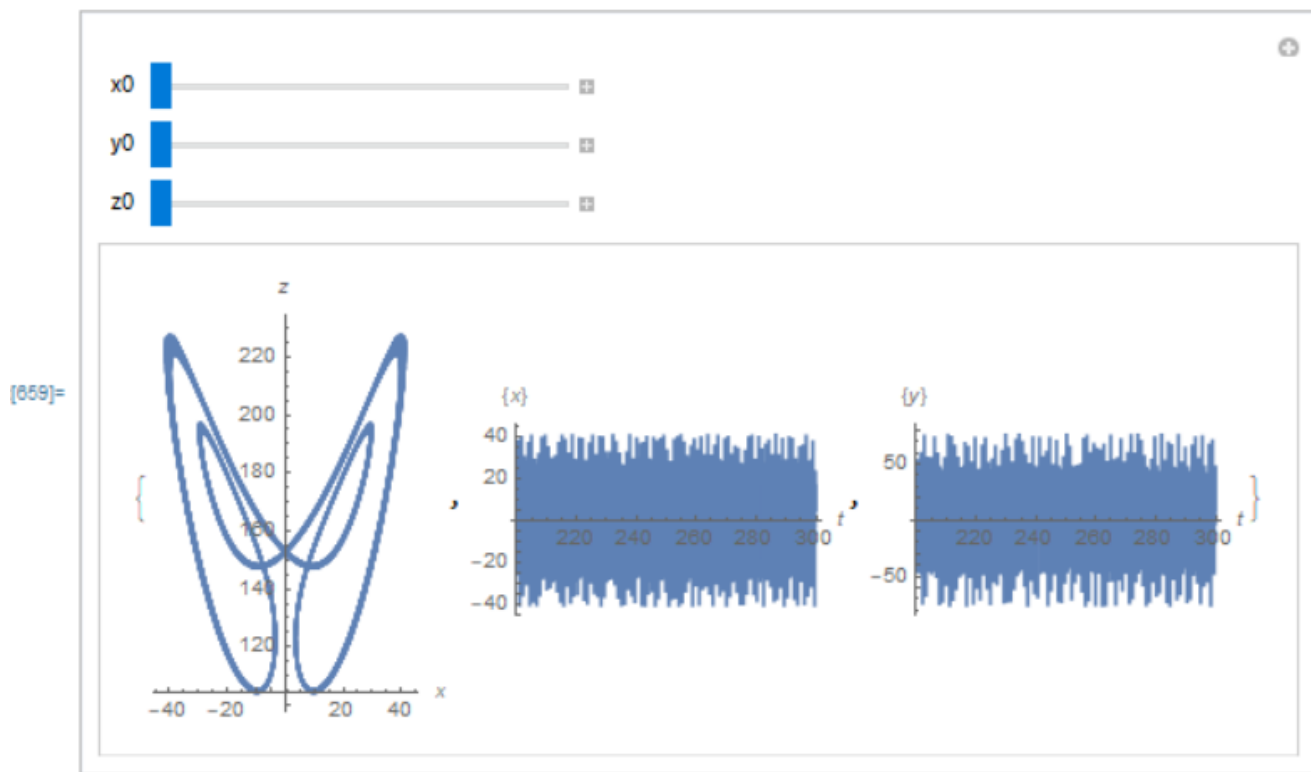
При динамическом изменении начальных значений было замечено, что при данном значении  $\gamma$  различные начальные значения не изменяют график  $z$  от  $x$ .

При больших  $t$  (на графике  $200 < t < 300$ ) система сохраняет свой вид:

```

    },
    {x0, -10, 10},
    {y0, -10, 10},
    {z0, -10, 10}
]

```



Еще раз отметим хаотическое поведение  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

Таким образом, можно сделать вывод что при  $146 < r < 166$  аттрактор Лоренца содержит два цикла, их симметричность варьируется в зависимости от значения  $r$ . При несимметричном графике ( $r$  ближе к 146) форма аттрактора зависит от начальных параметров, а изменения пределов интегрирования более наглядно показывают хаотичность системы, но не влияют на форму аттрактора.

In [ ]: