Лабораторная № 6

Прокопенко Тимофей, АСОБД, timophej3@gmail.com

№ 9.1.5

9.1. Постройте отображение $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающее указанными свойствами. Подтвердите ответ теоретически, численно и графически.

9.1.5. φ имеет устойчивый цикл периода три, проходящий через точку $x = 0$.

Решение: Необходимо построить отображение из R в R с устойчивым 3-циклом, проходящим через x=0. По теореме Шарковского непрерывное отображение с 3-циклом влечет за собой хаос при изменении начальных параметров, а в условии не сказано, что отображение должно быть непрерывным. Поэтому для простоты построим кусочно-гладкое отображение с устойчивым 3-циклом, проходящим через x=0

Например:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in (-\infty; -1] \\ 1, & \text{при } x \in (\text{-}1; 1) \\ -2, & \text{при } x \in [1; +\infty) \end{cases}$$

Подтвердим ответ теоретически, численно и графически.

1) Теоретически.

По определению ясно, что f(x) - это 3-цикл, где $x_1^* = 0, x_2^* = 1, x_3^* = -2$, т.к. f(f(f($x_i^*$)))=$x_i^*$.

Осталось доказать устойчивость. Найдем производную f(x). Так как эта функция кусочно-гладкая, то на любом из трех интервалов существует производная. f'(x_i^*)=0 на всех интервалах, т.к. значения f(x) не зависят от x.

И abs(f'(x_1^*)f'($x^{}_2)*f' (x^{*}_3$))<1 => функция имеет устойчивый цикл.

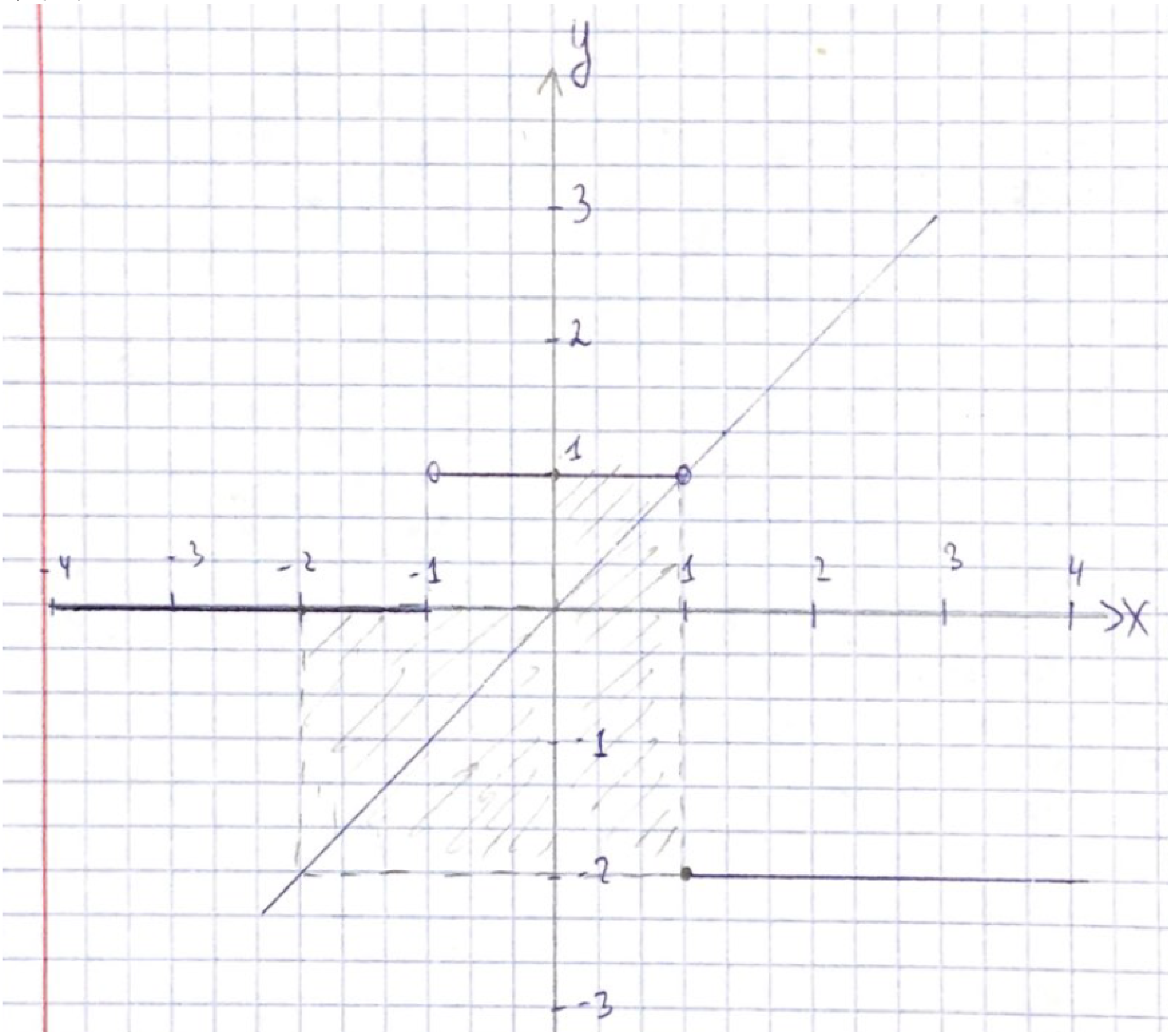
2) Численно. Выберем несколько различных начальных значений. Например, -3, 0, 2.

а) x_1=f(-3)=0. f(0) = 1 f(1) = -2 f(-2) = 0.

б) x_1=f(0)=1. f(1) = -2 f(-2) = 0 f(0) = 1.

в) x_1=f(2)=-2. f(-2) = 0 f(0) = 1 f(1) = -2.

3) Графически



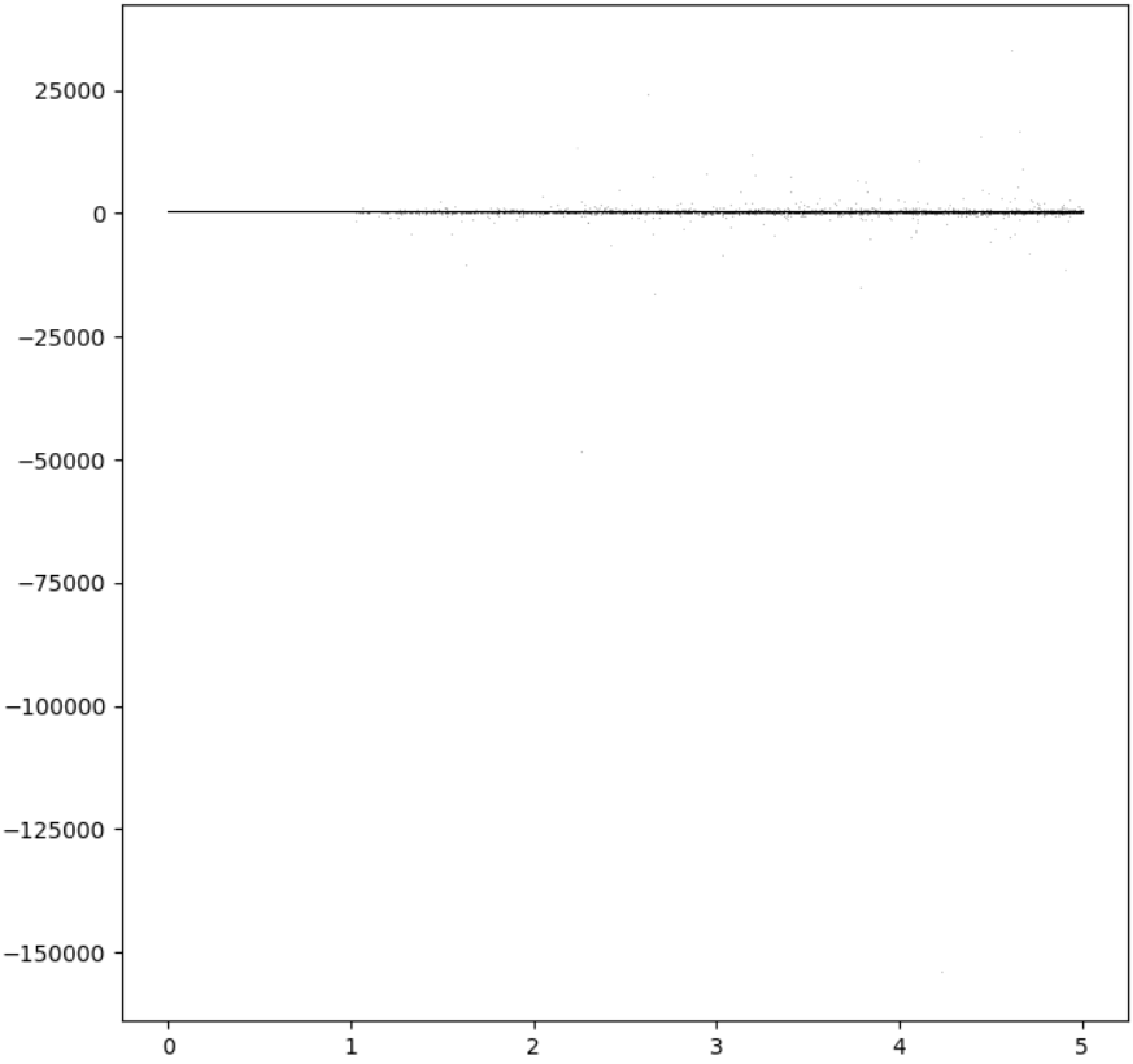
№ 9.5.4

9.5. Постройте диаграмму орбит для данной системы. Проверьте различные начальные условия на случай если от них что-то зависит. Прокомментируйте полученную картину.

9.5.4. $x_{n+1} = r \operatorname{tg} x_n$ (Мешанина)

Решение:

Диаграмму орбит построим используя скрипт Python.

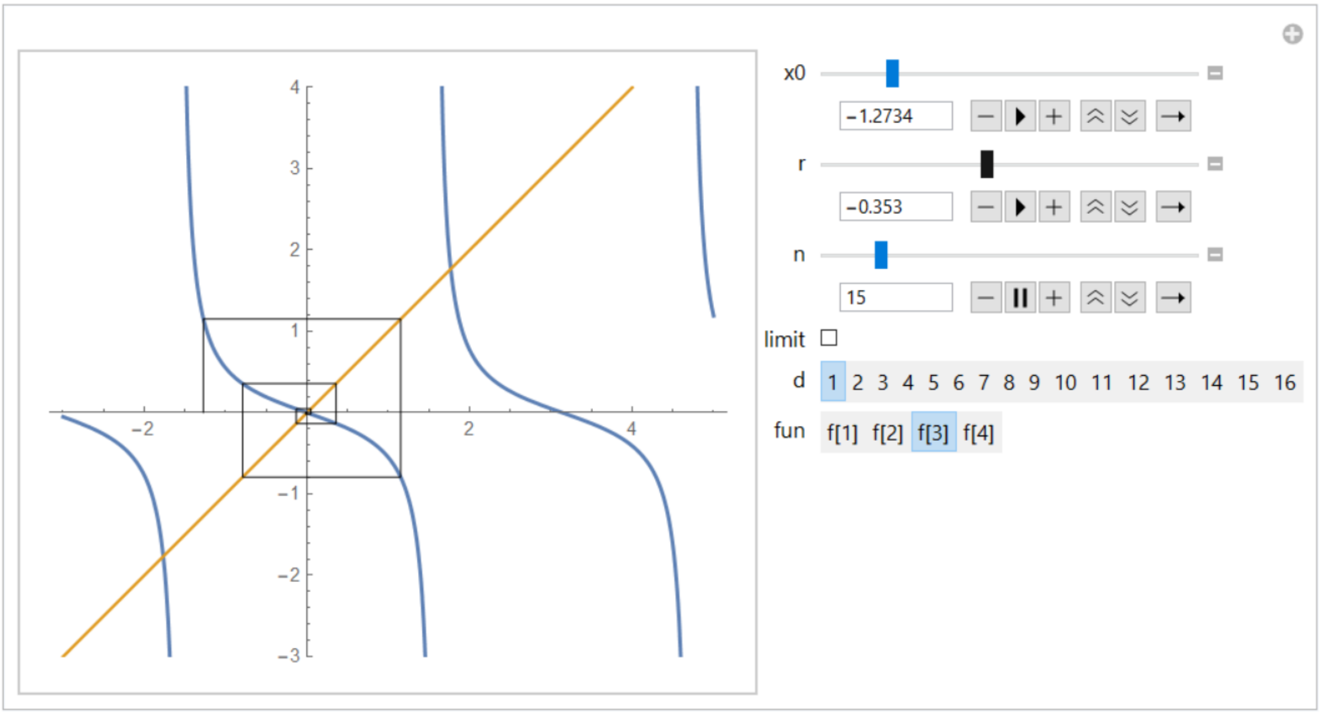


Как видно, эта диаграмма не имеет четкой бифуркационной структруры, точки ведут себя хаотически вдоль прямой x=0. Можно предположить, что 0 является устойчивой точкой, а некоторая хаотичность появляется при изменении параметров.

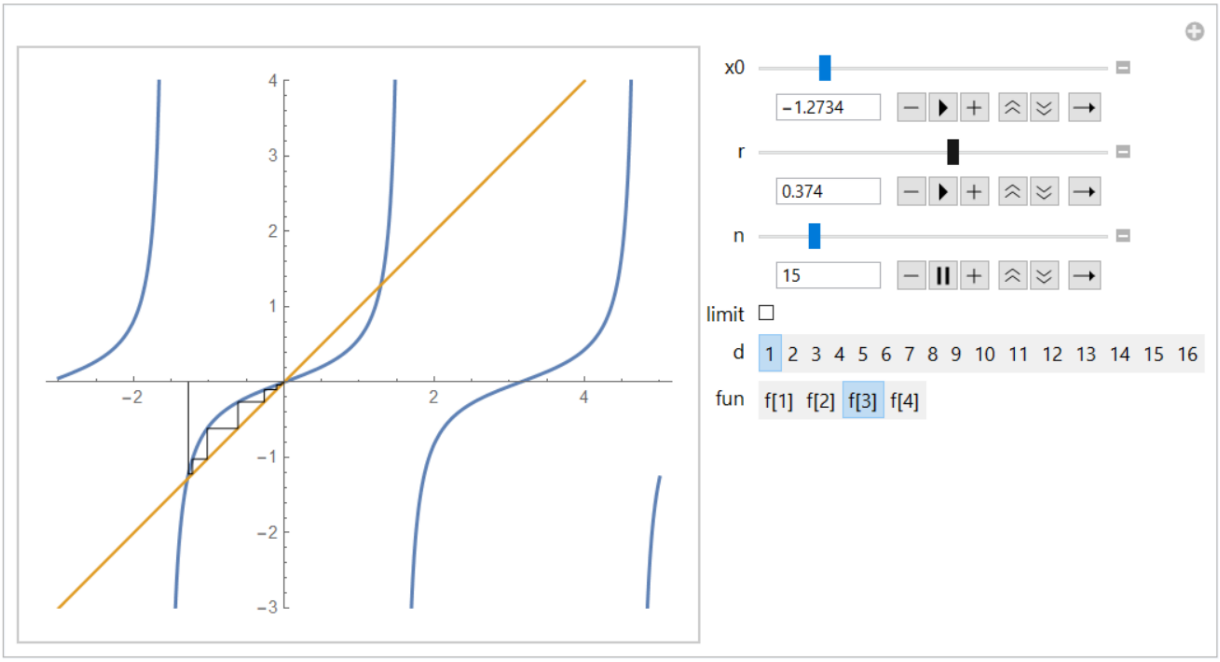
Проверим различные начальные условия.

В простейшем случае если x лежит внутри между двумя ассимптотами pi/2 и значение r таково, что функция не выходит за ассимпототы, то наблюдается устойчивая точка.

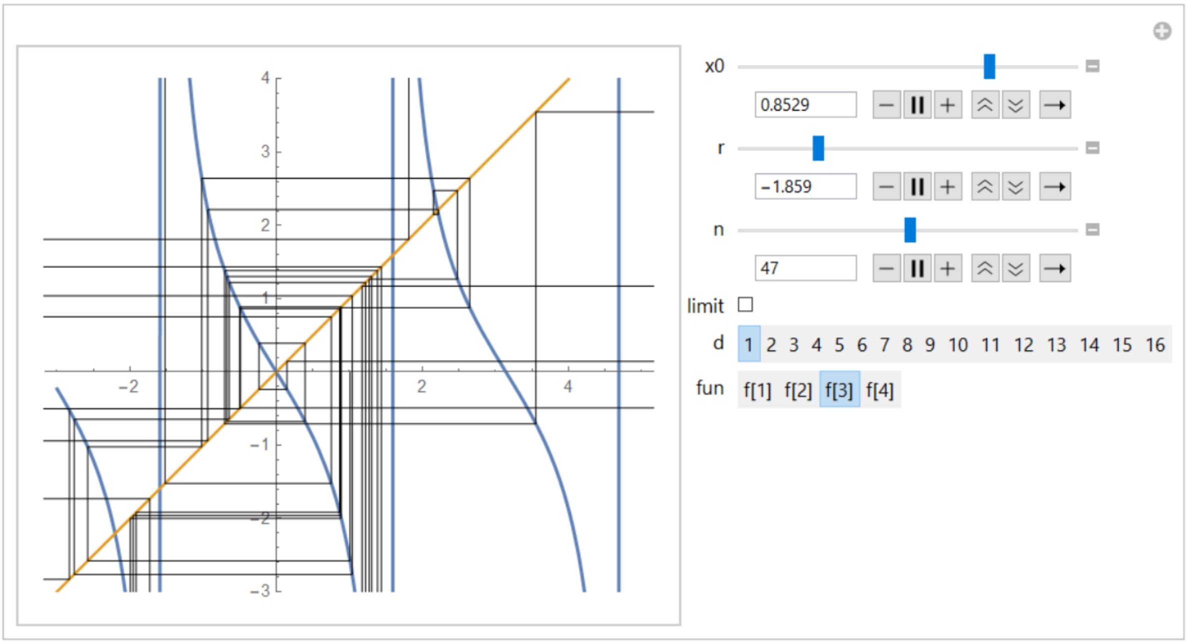
:=

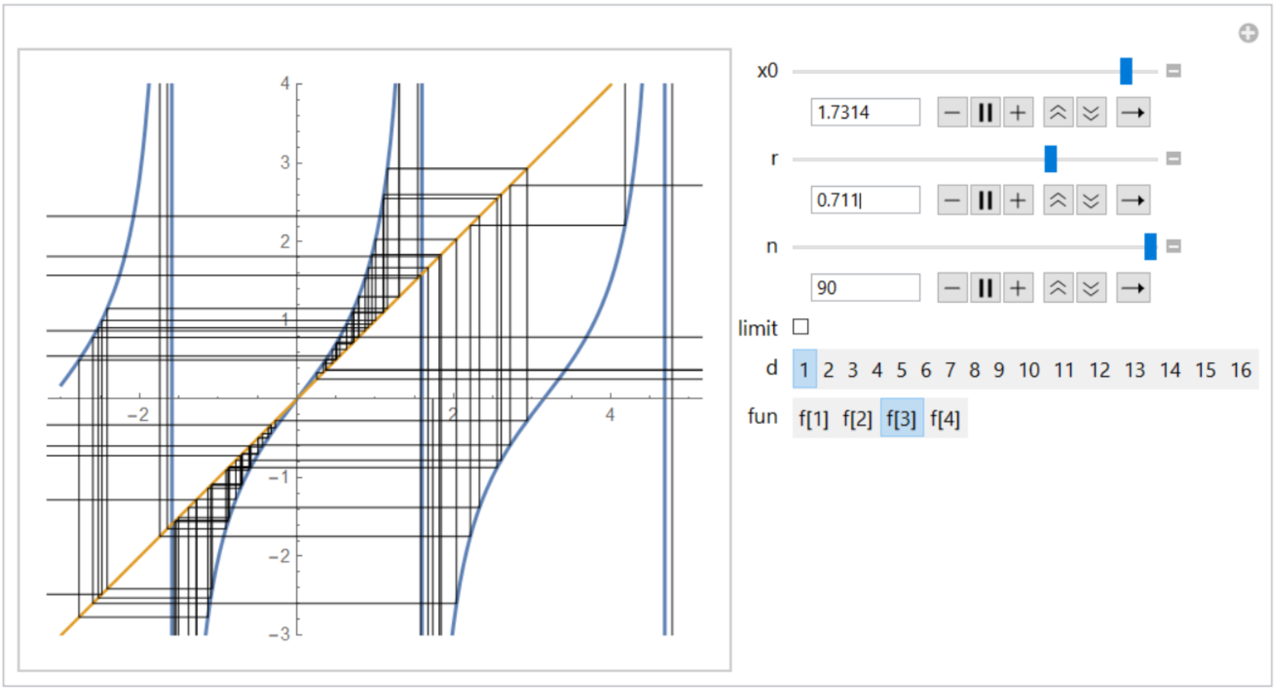


In[∘]:=



При иных значениях r и x также 0 является устойчивой точкой, но рисунок может выглядеть несколько сложнее:





Был использован файл Бифуркация отображений.nb из общей папки и скрипт на Python, который прикреплен к письму.