Лабораторная № 2

Прокопенко Тимофей, АСОБД, timophej3@gmail.com

2.1.6

Нарисуйте все качественно различные векторные поля, которые возможны в системе при изменении r. Покажите, что при некотором критическом значении $r = r^*$ происходит бифуркация. Определите тип бифуркации и укажите точку бифуркации r^*. Изобразите бифуркационную диаграмму.

$\dot{x} = rx + x^2$

Особые точки:

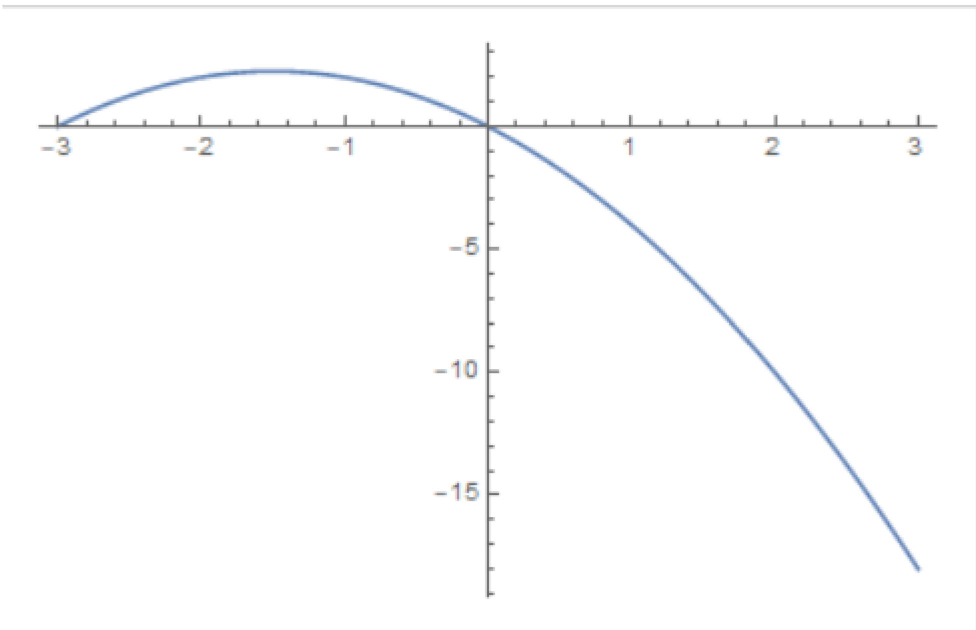
$x^2 + rx = 0$

$x_1 = 0$

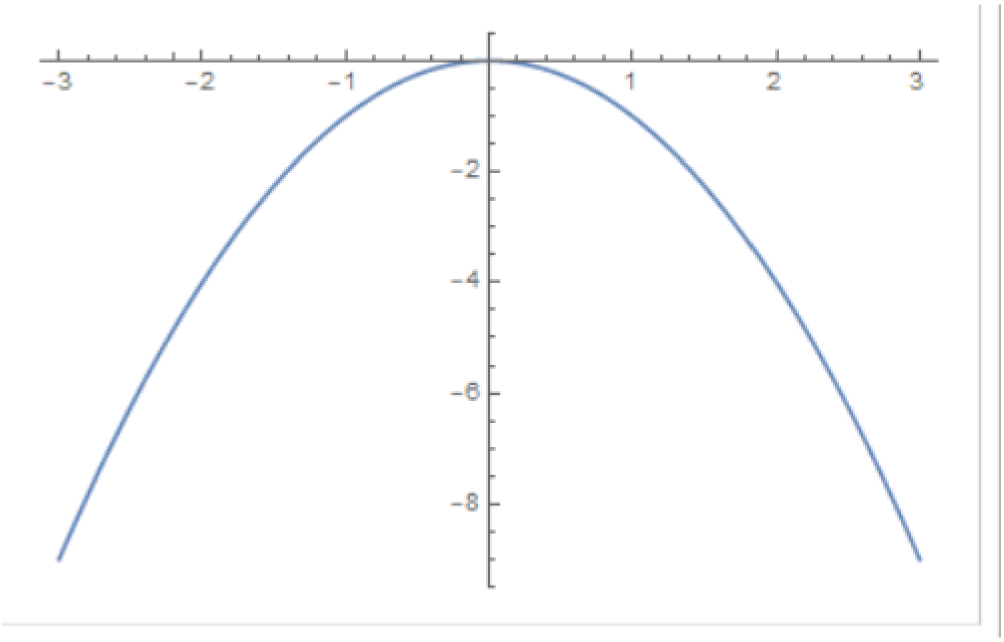
$x_2 = -r$

График функции выглядит следующим образом:

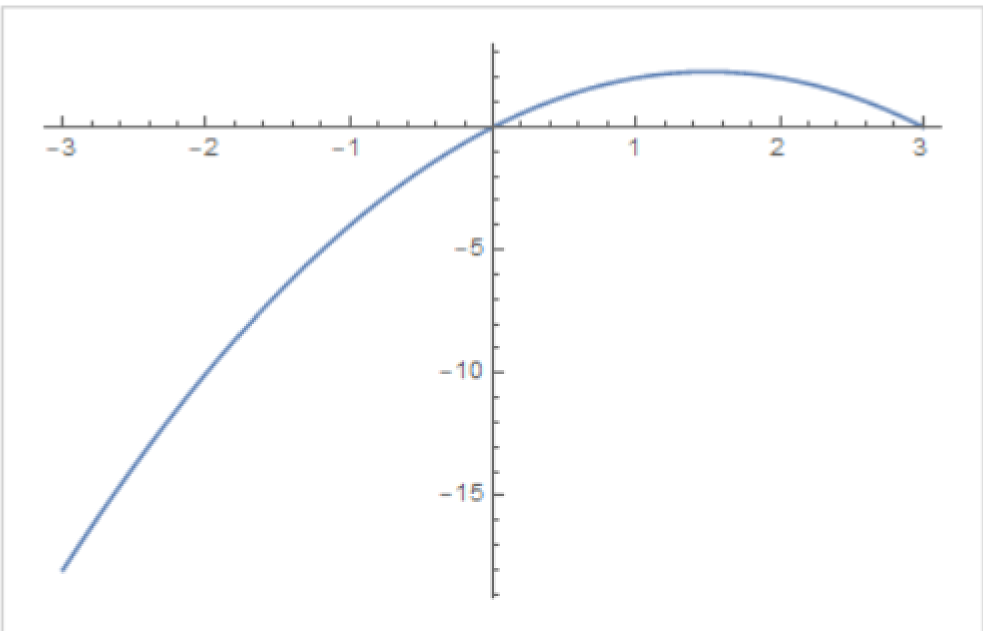
при $r < 0$:



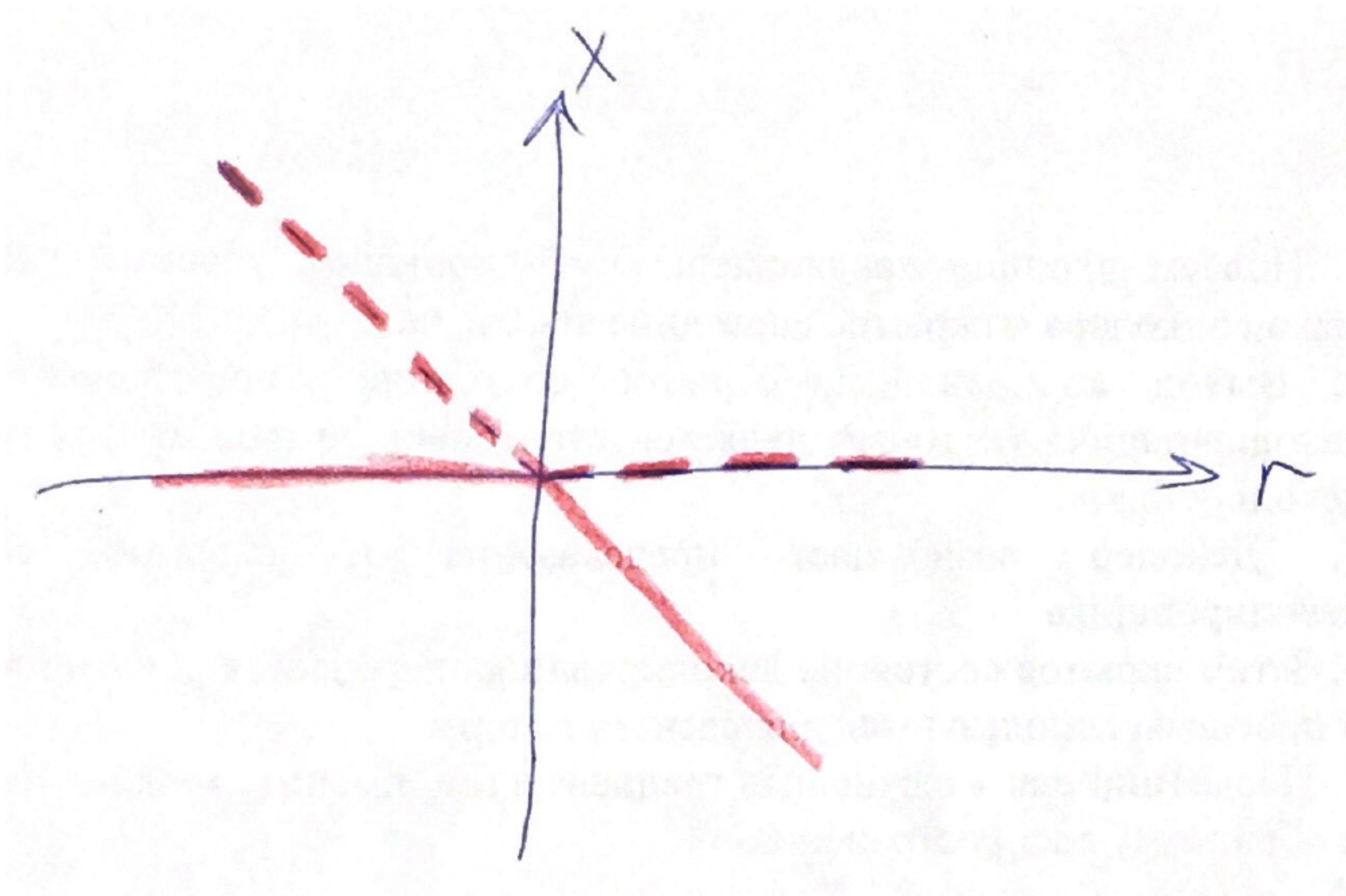
при $r = 0$:



при $r > 0$:



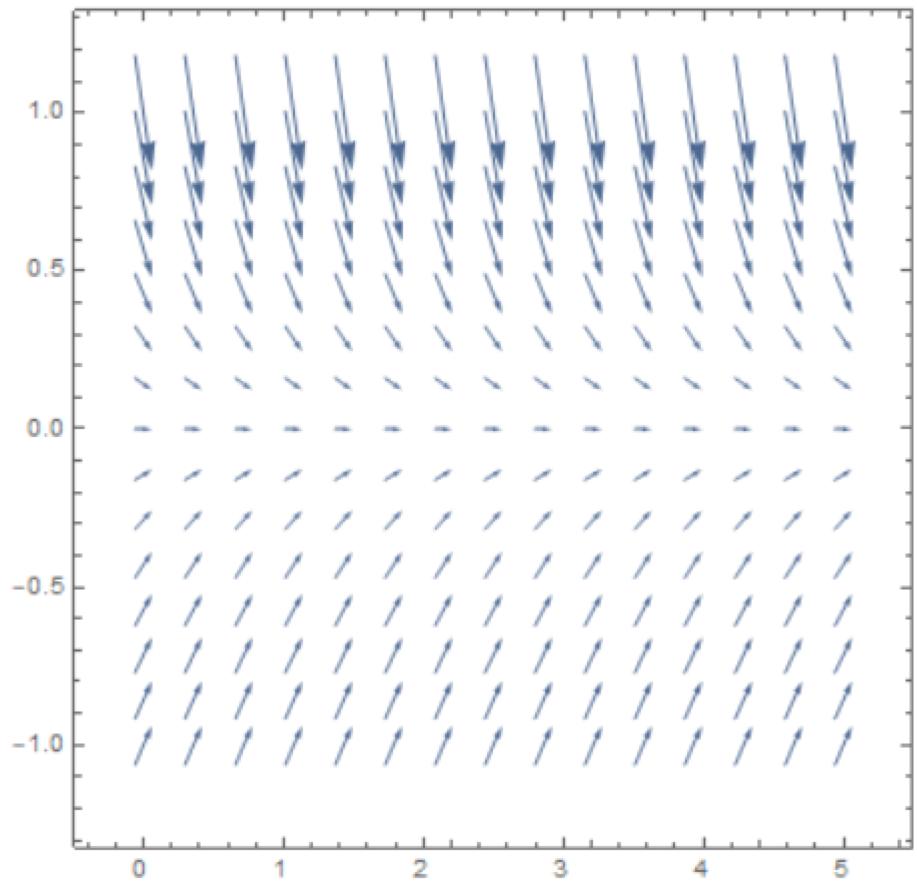
Таким образом, при $r \neq 0$ две особые точки, а при $r = 0$ одна особая точка. Бифуркация происходит в точке r*=0, это транскритическая бифуркация. Биффуркационная диаграмма выглядит следующим образом:



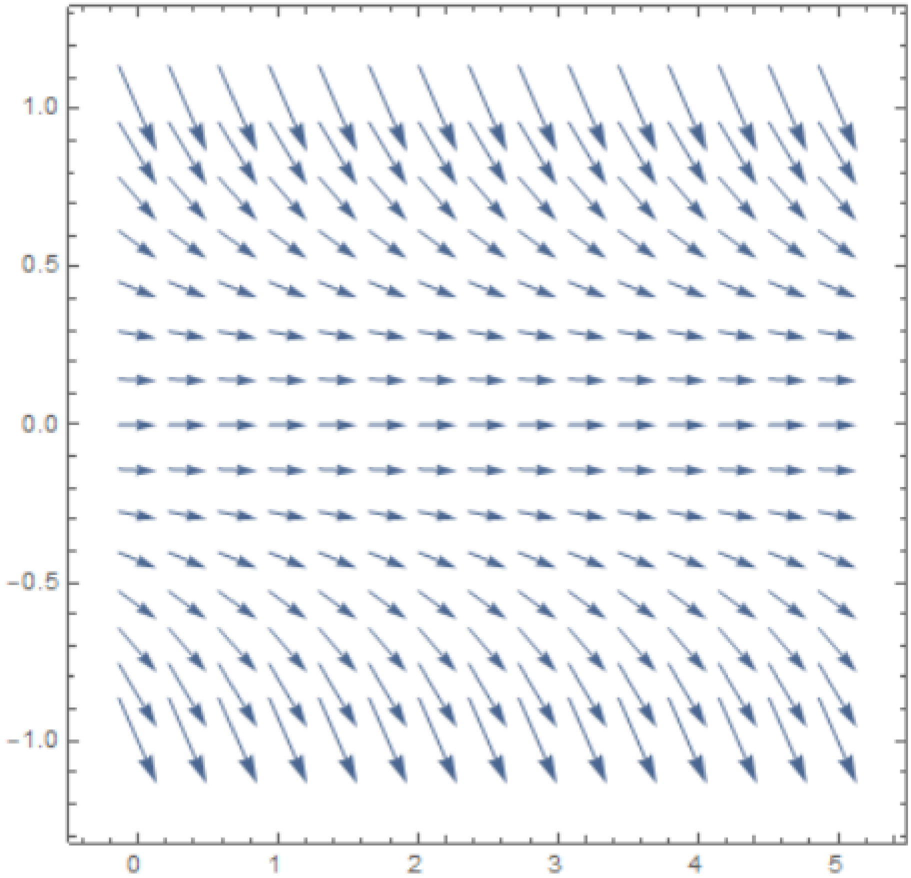
где сплошная линия - устойчивые, а пунктирная - неустойчивые точки.

Векторные поля

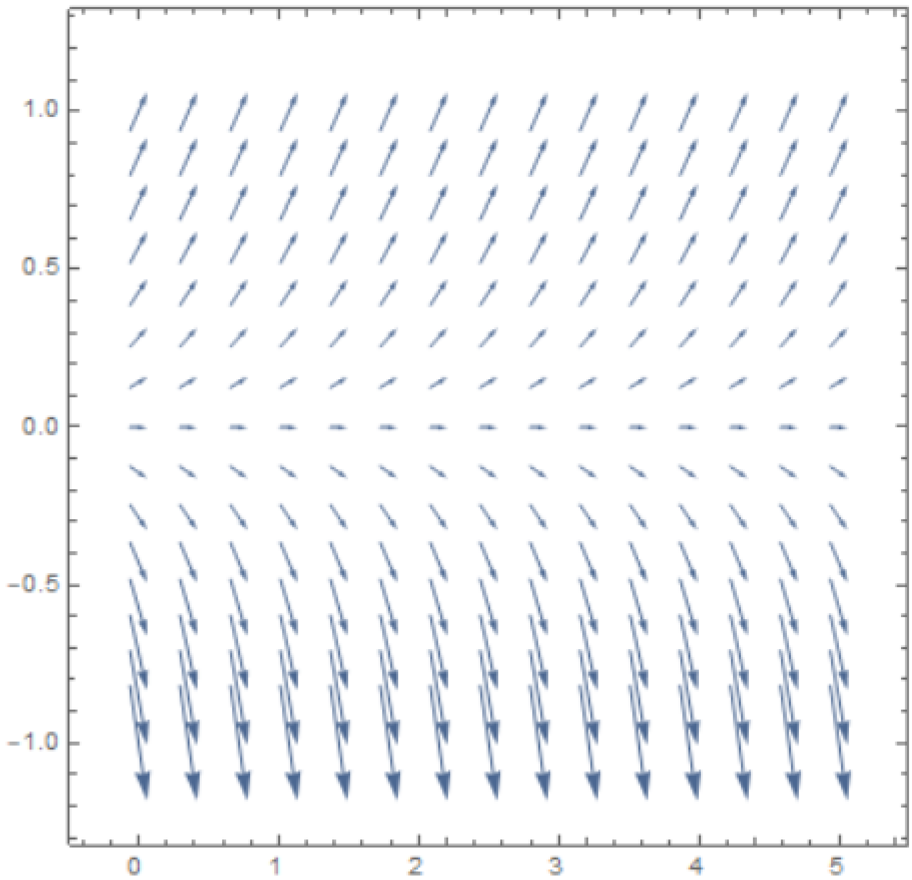
1) $r < 0$ (на графике r = -2):



2) r = 0:



3) $r > 0$ (на графике r = 2):



2.6

(Возмущение суперкритической вилки) Рассмотрим систему

$$\dot{x} = rx + ax^2 - x^3,$$

где $a \in \mathbb{R}$. При $a = 0$ имеем нормальную форму суперкритической вилкообразной бифуркации. Цель задания — исследовать влияние нового параметра a.

а) Примерно изобразите все качественно различные бифуркационные диаграммы на плоскости (r, x^*), которые могут быть получены при различных a.

б) Обобщите полученные результаты, изобразив на плоскости (r, a) области, соответствующие различным типам векторных полей. Укажите тип бифуркаций, которые происходят на границах этих областей.

а) Корни $rx + ax^2 - x^3$:

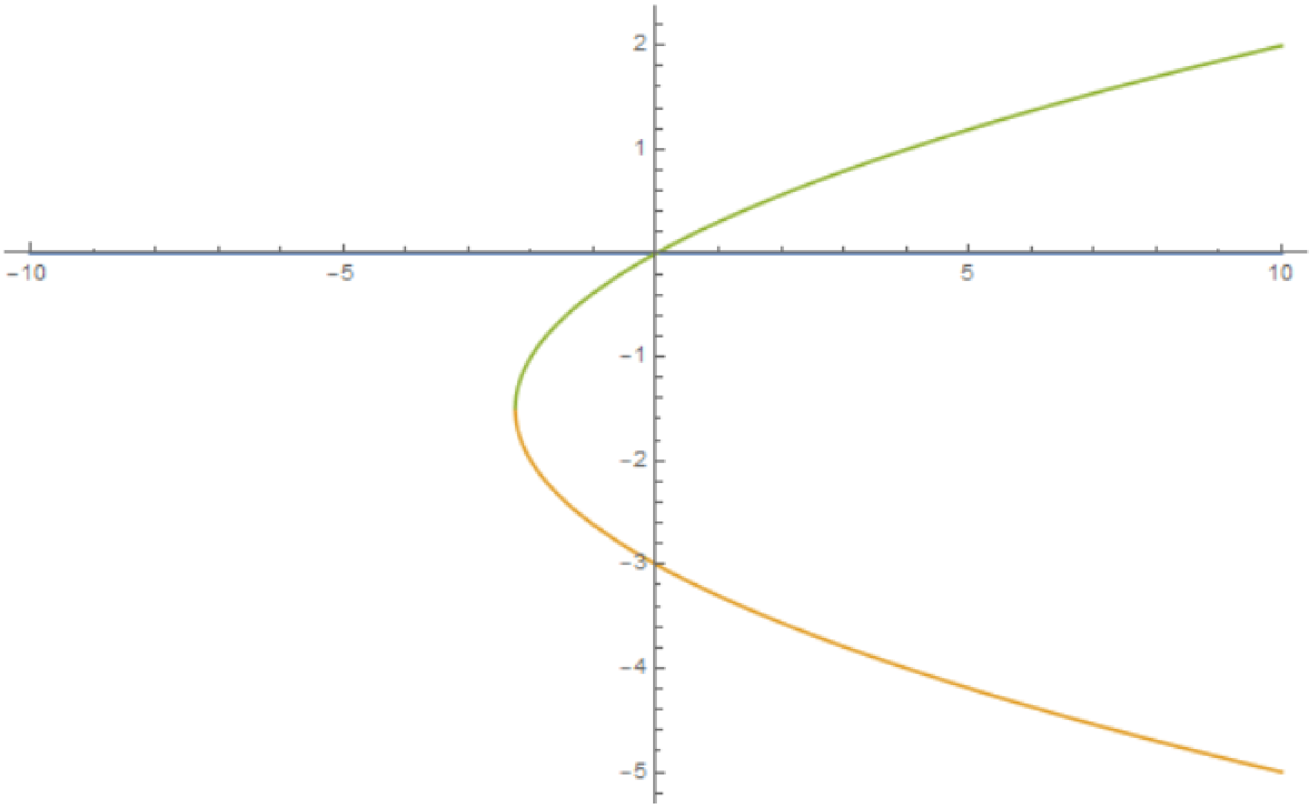
$x_1 = 0$

$x_{2,3} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4r}}{2}$

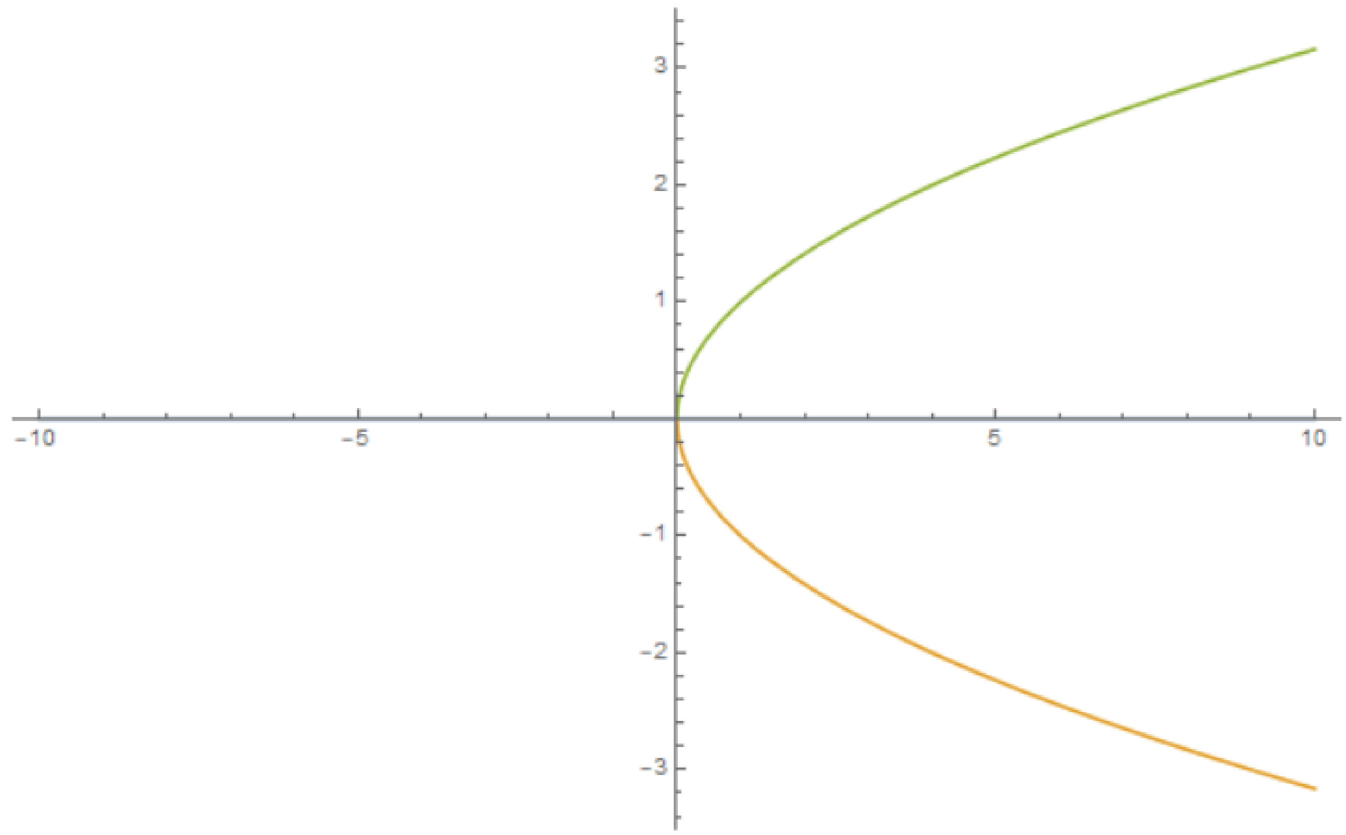
Таким образом, особая точка в 0 не зависит от параметра h. Другие две точки принимают действительные значения при $r > \frac{a^2}{4}$.

Изобразим биффуркационные диаграммы при a < 0, a = 0, a > 0:

1) a < 0 (на рисунке a=-3):

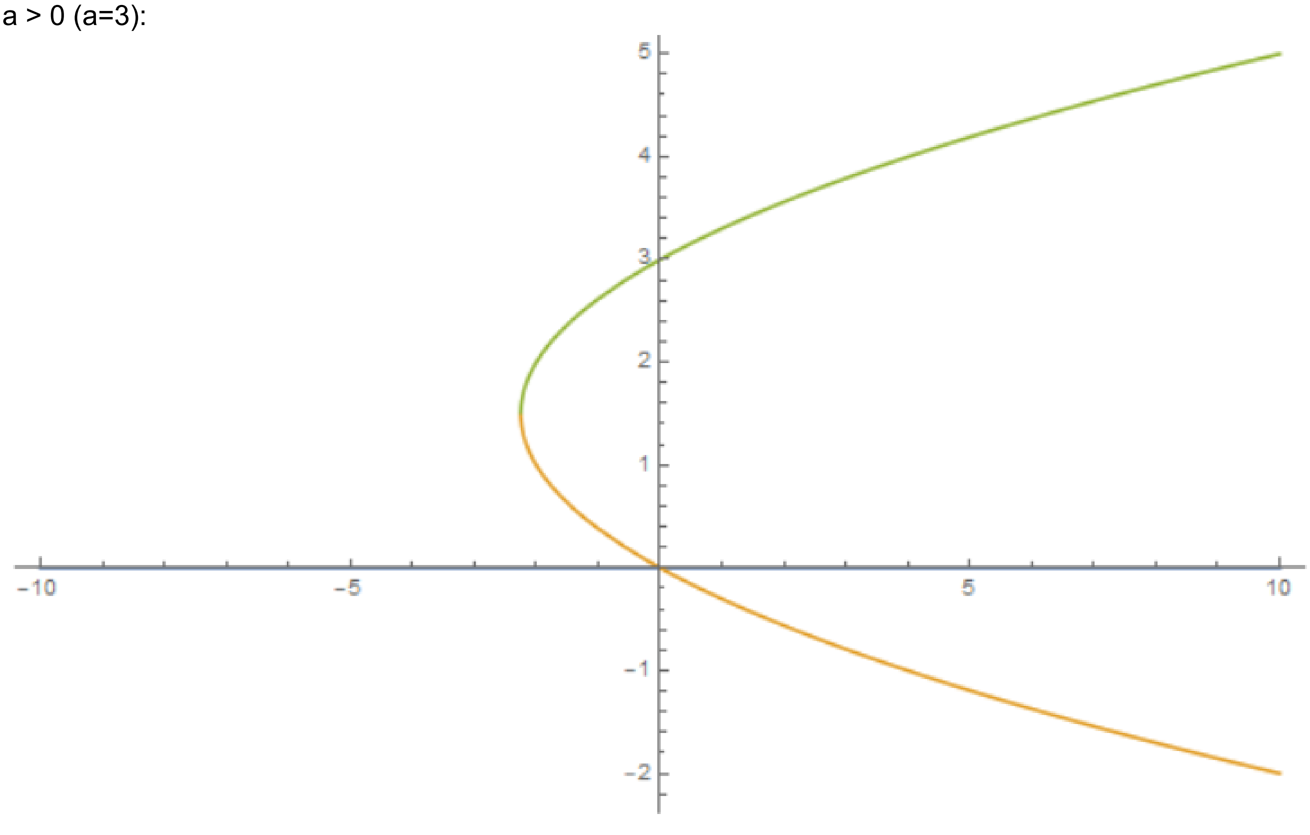


2) a = 0



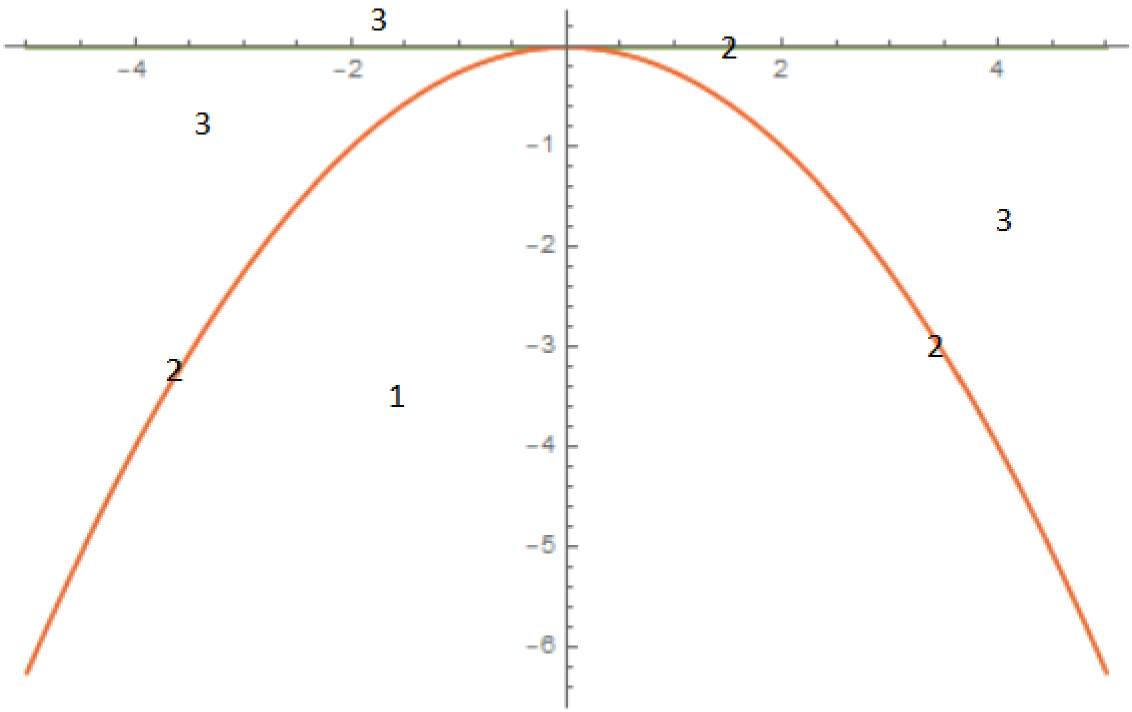
3) a > 0 (a=3):

2]=



Везде зеленые линии обозначают устойчивые точки, оранжевые - неустойчивые.
Синия линия, совпадающая с осью X, состоит из устойчивых точек слева от 0, справа - неустойчивые.

б) Изобразим на (r, a) области, соответствующие различным типам векторных полей:



Тип бифуркации на границах: на сторонах параболы - вилка, на зеленой линии - транскритическая.