ММиОСС Лабораторная работа №1

Прокопенко Тимофей, АСОБ-D, timophej3@gmail.com

1.1.2. Проведите графический анализ данного уравнения. Изобразите векторное поле скоростей на прямой, определите особые точки и их тип устойчивости, изобразите график решения для различных начальных условий.

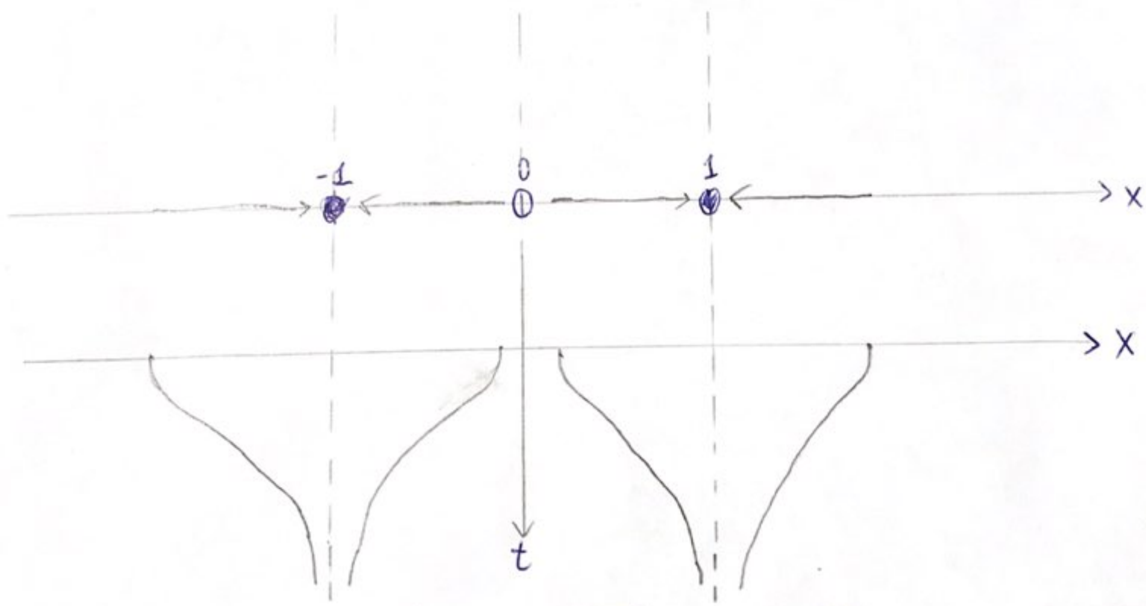
$\dot{x} = x - x^3$

$f(x) = x - x^3$

Найдем особые точки: $f(x) = 0$

$x(1-x^2) = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ особые точки $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$



Определим тип устойчивости: $f'(x) = 1 - 3x^2$

$f'(0) = 1 > 0$ — x_1 - неустойчивая точка

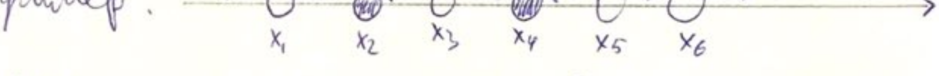
$f'(1) = -2 < 0$ — x_3 - устойчивая точка

$f'(-1) = -2 < 0$ — x_2 - устойчивая точка

№1.2.6. Для указанных ниже случаев укажите уравнение $\dot{x} = f(x)$ с заданными свойствами. В случае, если таких уравнений не существует, необходимо пояснить почему. Во всех вариантах подразумевается, что f гладкая.

Условие: Существует ровно шесть особых точек: две устойчивые и четыре неустойчивые.

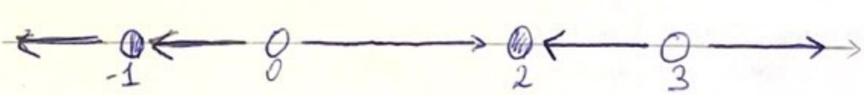
Решение: Таких уравнений не существует, так как при данном условии особые точки одного типа были бы рядом. Например:



Очевидно, что между x_5 и x_6 должна быть еще одна устойчивая точка. При любом другом расположении 4-х неустойчивых и 2-х устойчивых точек на прямой будет, как минимум, две соседние точки одного типа. Так что лучшего примера построить нельзя, и не существует уравнений с заданными в условии свойствами.

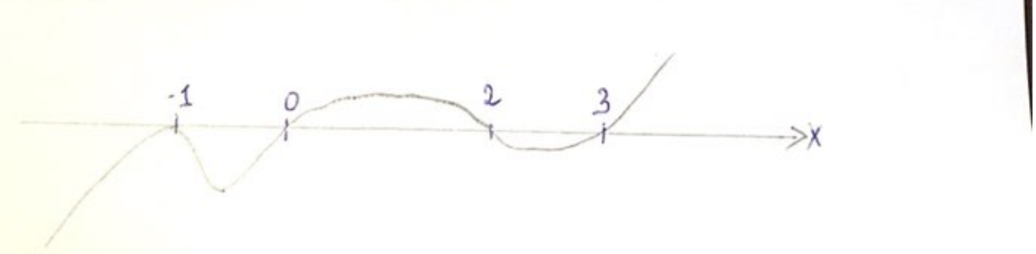
№ 1.3.10. На фазовой прямой даны особые точки некоторого ОДУ и указан тип их устойчивости. Запишите уравнение $\dot{x} = f(x)$, соответствующее этому портрету. Правильных вариантов может быть бесконечно много (неправильных тоже). Если таких уравнений не существует, то необходимо объяснить почему.

$\dot{x} = f(x)$



$f'(-1) = 0 \quad f'(0) > 0 \quad f'(2) < 0 \quad f'(3) > 0.$

Предполагаем вид $f(x)$:



Многочлен, обращающийся в ноль в $-1, 0, 2, 3$, будет иметь следующий вид: $f(x) = a_0 (x+1) x (x-2)(x-3)$.

-1 – точка перегиба, значит $f(x)$ не меняет знак в этой точке: $f(x) = a_0 (x+1)^2 x (x-2)(x-3)$

На $(3; +\infty)$ $f(x) > 0$, значит $a_0 > 0$ и значение a_0 влияет только на изгиб функции между особыми точками.
Для простоты примем $a_0 = 1$.
Ответ: $\dot{x} = (x+1)^2 x (x-2)(x-3)$

1.4.2 Используя линеаризацию уравнения в окрестности особой точки, исследуйте устойчивость неподвижных точек следующих систем. Если $f'(x^*) = 0$, используйте графический метод.

$\dot{x} = tg\, x$

$f(x) = tg\, x \qquad f(x) = 0$ при $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \qquad f'(x)\Big|_{x = \pi k, k \in \mathbb{Z}} = \dfrac{1}{\cos^2(\pi k)} > 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

Все точки $x_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ являются неустойчивыми.

1.5 (Модель роста опухоли) Рассмотрим модель роста раковой опухоли на основе закона Гомперца: $\dot{N} = -aN\ln(bN)$, где N пропорционально количеству клеток в опухоли, $a, b > 0$ – параметры. Данная модель хорошо согласуется с наблюдениями в случаях, если N не слишком мало.

1.5.1 Укажите биологический смысл коэффициентов a, b.

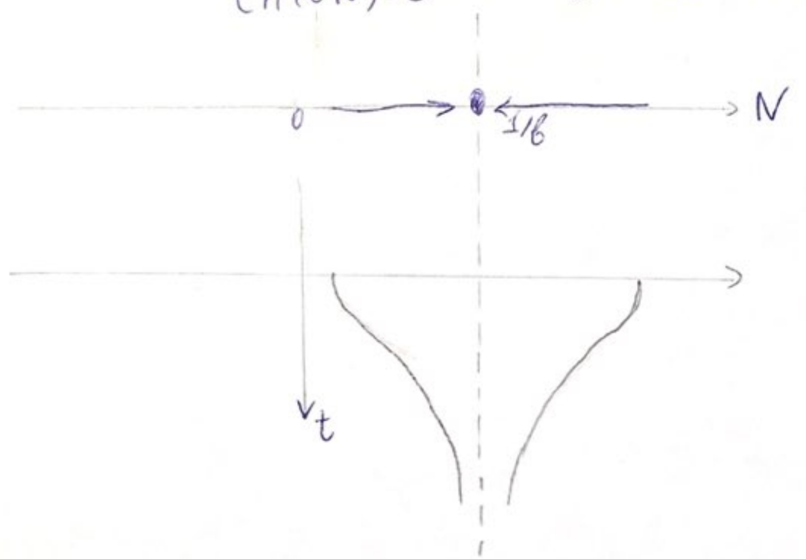
a – максимальный размер опухоли

b – параметр роста, от которого зависит количество клеток в опухоли (N^*).

1.5.2 Примерно изобразите векторное поле и график $N(t)$ для различных значений параметров и начальных условий.

Особые точки: $-aN\ln(bN)=0$, $a>0, b>0, N>0$

$\ln(bN)=0 \Rightarrow bN=1 \Rightarrow b=\frac{1}{N}$



1.5.3 Используя линеаризацию, определите устойчивость особых точек уравнения.

$f'(N) = -a(1\cdot\ln(bN) + x\cdot\frac{1}{x}) = -a(\ln(bN)+1)$

$f'(\frac{1}{b}) = -a(\ln 1 + 1) = 1\cdot a < 0 \Rightarrow \frac{1}{b}$ – устойчивая