Домашнее задание №2 по курсу "Машинное обучение"

Прокопенко Тимофей

Задача 2.

Решение:
а) Докажем сначала, что для любого $c \in \mathbb{R}$, |c| = $min_{a \geq 0} a$, такое что c $\leq a$ и c $\geq -a$.
Если c $\leq a$ и c $\geq -a$, причем $a \geq 0$, то $|c| \leq a$. Из $|c| \leq a$ при $a \geq 0$ напрямую следует, что |c| = $min_{a \geq 0} a$.

б) Перейдем к задаче. Очевидно, что если нам удастся найти такое w, что $| < w, x_i > -y_i| = 0$, то задача будет решена. На практике это вряд ли достижимо, поэтому введем пороговую ошибку $\varepsilon_i \geq 0$ и попробуем ее минимизировать.
Используем доказанное в пункте а):

$$| < w, x_i > -y_i| \leq \varepsilon_i => \begin{cases} < w, x_i > -y_i \leq \varepsilon_i \\ < w, x_i > -y_i \geq -\varepsilon_i \end{cases} => \begin{cases} - < w, x_i > +\varepsilon_i \geq -y_i \\ < w, x_i > +\varepsilon_i \geq y_i \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} < [-x_i, 0 \ldots 1_i \ldots 0], [w, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_m] > & \geq -y_i \\ < [x_i, 0 \ldots 1_i \ldots 0], [w, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_m] > & \geq y_i \end{cases}$$

Теперь мы можем сформулировать следующую задачу линейного программирования:

$$max < U, w >$$

при

$$Aw \geq v$$

где

$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_d, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_m) \in \mathbb{R}^{d+m}$$

$$U = (0_1, 0_2, \ldots, 0_d, -1_1, \ldots -1_m) \in \mathbb{R}^{d+m}$$

$$A = \begin{bmatrix} -x_1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ x_m & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times (d+m)}$$

$$v = \begin{bmatrix} -y_1 \\ y_1 \\ . \\ . \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$$