

# 椭圆型偏微分方程加密网格的生成及实现

魏明明, 卢志伟

(西安工业大学机电工程学院, 陕西 西安 710032)

Generation and Realization of Clustering Grid with Elliptic Partial Differential Equations

WEI Ming-ming, LU Zhi-wei

(School of Mechatronic Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China)

**摘要:**运用有限差分对 Poisson 方程的边值问题进行数值求解。根据控制点的分布构造出源项  $P$  和  $Q$  的函数,使物面附近的网格线与物面正交,同时控制边界网格点的密度分布,通过超松弛迭代调整控制方程式中的源项  $P$  和  $Q$ 。最后以 C 型网格作为数值算例,利用 VB 语言对实例进行模拟,证明所用方法有效可行。

**关键词:**有限差分;正交;坐标变换;网格加密

**中图分类号:**V211.3;TB126

**文献标识码:**A

**文章编号:**1001-2257(2010)09-0010-03

**Abstract:** This paper use finite difference techniques for the boundary problem of the Poisson to numerically solve. According to the distributing of the control point to construct the function of the forcing terms  $P$  and  $Q$ , enforce orthogonality between the boundary and its adjacent line of grid, and control the density distribute of the grid point of the boundary. Adjust the forcing terms  $P$  and  $Q$  in governing equations by successive overrelaxation iteration. Finally, this paper uses C type of grids as numerical example and has made the programs for the example by VB language, which proves that the ways used in the paper is effective and feasible.

**Key words:** finite difference; orthogonality; coordinate transform; grid clustering

## 0 引言

网格是计算流体力学模型的几何表达形式,也是模拟与分析的载体。在计算流体力学领域,几乎

所有的方法都离不开网格,网格是各种数值计算方法的基础。网格质量的好坏直接影响数值结果的精度,甚至影响到数值计算的成败。随着计算流体力学解决的问题越来越复杂,对网格质量的要求也越来越高<sup>[1-2]</sup>。作为计算流体力学,人们更为关心的是物理实体边界附近处物理量的变化情况,要求在贴近物面附近的网格点更加细密化、正交化等,使我们能更进一步了解和分析网格点变化量和变化趋势。

## 1 控制方程及坐标变换

### 1.1 控制方程

微分方程法是通过一个微分方程把物理平面转化为计算平面,其实质是微分方程边值问题的求解。在该方法中,可使用椭圆、双曲型和抛物型偏微分方程来生成网格<sup>[3-4]</sup>。在本文中运用椭圆型方程对网格进行控制和计算,其中最简单的椭圆型方程就是 Laplace 方程:

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

利用 Laplace 方程构造的网格具有分布均匀、适应性强且网格生成速度快等特点。为了方程的求解,可以将  $\xi$  和  $\eta$  看成是物理平面上 Laplace 方程的解,只要在物理平面区域边界上规定  $\xi(x, y)$  和  $\eta(x, y)$  的取值方法,方程就可以求解。为了控制网格的密度及网格的正交性,可以在式(1)的右边加入“源项”,这样 Laplace 方程就变成了 Poisson 方程,即

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \end{cases} \quad (2)$$

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^M a_i \operatorname{sgn}(\xi - \xi_i) e^{-c_i |\xi - \xi_i|} -$$

收稿日期:2010-06-03

基金项目:陕西省教育厅专项科研项目(09JK484)

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{j=1}^N b_j \operatorname{sgn}(\xi - \xi_j) e^{-d_j[(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2]^{1/2}} - \sum_{i=1}^M a_i \operatorname{sgn}(\eta - \eta_i) e^{-c_i[(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2]^{1/2}}$$

$P(\xi, \eta)$  和  $Q(\xi, \eta)$  是用来调节区域内部网格的疏密和正交性(边界的夹角)的函数,称为源函数或控制函数。给定不同的函数式,可得到不同的网格。其中,  $a_i, b_j$  为密集强度;  $c_i, d_j$  为衰减因子;  $\operatorname{sgn}()$  为符号函数;  $m, n$  分别为纵、横向网格数。这些参数均用来调节网格的质量。

## 1.2 坐标变换

### 1.2.1 贴体坐标的网格生成

如果计算区域的各边界是一个与坐标轴都平行的规则区域,则可以很方便地划分该区域,快速生成均匀网格。但实际工程问题的边界不可能与各种坐标系正好相符,需要采用数学方法构造一种坐标系,使其各坐标轴恰好与被计算物体的边界相适应,这种坐标系就称为贴体坐标系,如图 1 所示。在图 1a 所示的是在  $X-Y$  平面内的不规则区域,为了构造与该区域相适应的贴体坐标系,在该区域中相交的 2 边界作为曲线坐标系的 2 个轴,记为  $\xi$  和  $\eta$ 。在该区域的 4 个边界上,可规定不同点的  $\xi$  和  $\eta$  值。例如,可以假设在 A 点有  $\xi=0, \eta=0$ ,而在 C 点有  $\xi=1, \eta=1$ 。这样就可以把  $\xi-\eta$  看成是另一个计算平面上的直角坐标系的 2 个轴。根据上面规定的  $\xi$  和  $\eta$  的取值原则,在计算平面上的求解区域就简化成了一个矩形区域,只要给定每个方向的节点总数,立即可以生成一个均匀分布的网格如图 1b 所示。

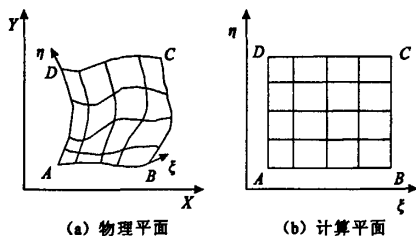


图 1 贴体坐标变换

### 1.2.2 贴体坐标变换

如果能在  $X-Y$  的物理平面上找出与  $\xi-\eta$  计算平面上任意一点相对应的位置,则在物理平面上的网格可轻松生成。以  $x, y$  为自变量的二元坐标,即

《机械与电子》2010(9)

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

转换为以  $\xi, \eta$  为自变量的二元坐标,即

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad (4)$$

经过式(3)和式(4)之间的相互变换,式(2)在坐标系中的表达式为:

$$\begin{aligned} & \alpha \begin{bmatrix} x_\xi \\ y_\xi \end{bmatrix} - 2\beta \begin{bmatrix} x_\eta \\ y_\eta \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} x_\eta \\ y_\eta \end{bmatrix} \\ & = -J^2 [P \quad Q] \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$   $\alpha = x_\xi^2 + y_\xi^2$

$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$   $\gamma = x_\eta^2 + y_\eta^2$

## 2 网格加密以及边界正交化处理

数值求解 Poisson 方程的边值问题,关键在于如何根据控制点的分布给出源项  $P$  和  $Q$ ,不仅使物面附近的网格线与物面正交,同时要根据需要控制边界网格点的密度分布,并且要控制毗邻物面的第 1 条网格与物面之间的距离<sup>[5-7]</sup>。

### 2.1 控制第 1 网格线与边界的间距

为了控制毗邻物面的第 1 条网格线与物面( $\eta_1$  和  $\eta_2$ )之间的距离,需要对其间距进行设定。控制方程为了保证各网格线之间连续性或光滑性,设定在  $\eta=\eta_1$  边界的间距  $\Delta s$ ,如图 2a 所示。

$$\Delta s = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{1/2} |_{\xi=\text{const}}$$

则

$$\begin{aligned} ds &= [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} \\ &= [(x_\xi d\xi + x_\eta d\eta)^2 + (y_\xi d\xi + y_\eta d\eta)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (6)$$

由于沿着  $\eta$  坐标方向  $\xi$  为常值,因此关于  $\xi$  的所有偏导数为 0,则

$$ds = [(x_\eta)^2 + (y_\eta)^2]^{1/2} d\eta |_{\xi=\text{const}} \quad (7)$$

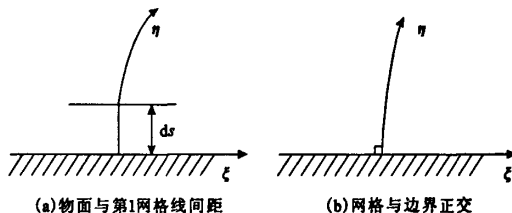


图 2 间距和正交示意图

### 2.2 控制方程的网格加密

对式(2)中的调节因子进行构造,使其向人为规定的边界加密靠拢。对于  $P, Q$ ,使网格向  $\eta_1$  边界靠

扰,则式(5)简化为:

$$\begin{aligned} & \alpha \begin{bmatrix} x_{\xi} \\ y_{\xi} \end{bmatrix} - 2\beta \begin{bmatrix} x_{\eta} \\ y_{\eta} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} x_{\eta} \\ y_{\eta} \end{bmatrix} \\ & = -J^2 [P_1 e^{-a(\tau-\eta)} \quad Q_1 e^{-b(\tau-\eta)}] \begin{bmatrix} x_{\xi} & y_{\xi} \\ x_{\eta} & y_{\eta} \end{bmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

式中  $P_1 = P(\xi, \eta)$   $Q_1 = Q(\xi, \eta)$

### 2.3 边界正交化处理

为了得出网格与边界正交化的控制方程,通过推导得出网格相交两边的一般位置关系表达式:

$$[\xi_x \quad \xi_y] \cdot \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix} = [(\xi_x^2 + \xi_y^2)(\eta_x^2 + \eta_y^2)]^{1/2} \cos\theta \quad (9)$$

对上式进行坐标变换,分别需要得到其中的  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$  变换表达式,即

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\xi} & x_{\eta} \\ y_{\xi} & y_{\eta} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_{\eta} & -x_{\eta} \\ -y_{\xi} & x_{\xi} \end{bmatrix} \quad (10)$$

并且分别代入到式(9)中,得:

$$x_{\xi} y_{\eta} + y_{\xi} x_{\eta} = -[(x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)(x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2)]^{1/2} \cos\theta \quad (11)$$

当  $\theta = \pi/2$  时,两交线产生正交,如图 2b 所示。正交时,  $x_{\xi} y_{\eta} + y_{\xi} x_{\eta} = 0$ , 即  $\beta = 0$ 。则有  $J^2 = \alpha\gamma$ 。

在沿着  $\eta = \eta_1$  边界,假定  $x$  和  $y$  对  $\xi$  的所有阶导数都是已知的以及假定都是连续的。可以推导出  $x_{\eta}$  和  $y_{\eta}$  的表达式:

$$\begin{cases} x_{\eta} = s_{\eta}(-x_{\xi} \cos\theta - y_{\xi} \sin\theta)(x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2)^{-1/2} \\ y_{\eta} = s_{\eta}(-y_{\xi} \cos\theta + x_{\xi} \sin\theta)(x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2)^{-1/2} \end{cases} \quad (12)$$

$\theta$  和  $s_{\eta} = ds/d\eta|_{\xi}$  都是  $\xi$  的函数,其中  $s_{\eta}$  用来控制与边界点相邻的第 1 条网格线的间距。

### 2.4 松弛迭代法

运用超松弛迭代法来调整控制方程中的源项中  $P$  和  $Q$ 。由于边界上  $x$  和  $y$  是已知的,可以通过内部的点来确定  $x_{\eta}$  和  $y_{\eta}$ 。式(5)在边界上可以得到 2 个相互独立的表达式:

$$\begin{aligned} P_1 &= J^{-3}(-y_{\eta}(\alpha x_{\xi} - 2\beta x_{\eta} + \gamma x_{\eta}) + x_{\eta}(\alpha y_{\xi} - \\ & \quad 2\beta y_{\eta} + \gamma y_{\eta}))|_{\tau=\eta_1} \\ Q_1 &= J^{-3}(y_{\xi}(\alpha x_{\xi} - 2\beta x_{\eta} + \gamma x_{\eta}) - x_{\xi}(\alpha y_{\xi} - \\ & \quad 2\beta y_{\eta} + \gamma y_{\eta}))|_{\tau=\eta_1} \end{aligned} \quad (13)$$

若要在边界处产生正交,由 2.3 节中知  $x_{\xi} y_{\eta} + y_{\xi} x_{\eta} = 0$ , 即  $\beta = 0$ ;  $J^2 = \alpha\gamma$ 。把式(13)化简得:

$$P_1 = J^{-2} \left[ \frac{-y_{\eta} x_{\xi} + x_{\eta} y_{\xi}}{\gamma} + \frac{-y_{\eta} x_{\eta} + x_{\eta} y_{\eta}}{\alpha} \right] |_{\tau=\eta_1}$$

$$Q_1 = J^{-2} \left[ \frac{y_{\xi} x_{\xi} - x_{\xi} y_{\xi}}{\gamma} + \frac{y_{\xi} x_{\eta} - x_{\xi} y_{\eta}}{\alpha} \right] |_{\tau=\eta_1} \quad (14)$$

在  $\eta = \eta_1$  处,运用超松弛迭代法对  $P_1$  和  $Q_1$  进行迭代(令  $P_1 = P'_1, Q_1 = Q'_1$ ),即

$$\begin{cases} P_1^{(n+1)} = P_1^{(n)} + \omega_P [P'_1^{(n+1)} - P_1^{(n)}] \\ Q_1^{(n+1)} = Q_1^{(n)} + \omega_Q [Q'_1^{(n+1)} - Q_1^{(n)}] \end{cases} \quad (15)$$

$\omega_P$  和  $\omega_Q$  取值都很小,一般取 0.02~0.06。

## 3 数值算例

本文运用上面构造出的  $P, Q$ ,以 C 型网格为例进行了数值模拟。取小圆半径为 0.1,大半圆半径为 1,右边矩形横向长为 4,纵向长为 2。横向取网格数为  $M=192$ ,纵向取网格数  $N=20$ ,则  $\Delta x = \Delta y = 0.05$ 。 $s_{\eta} = 1/20 = 0.05$ ,  $\omega_P = \omega_Q = 0.002$ ,  $a = b = 0.1$ ,迭代次数为 300,误差精度为  $esp = 0.0001$ 。运用 VB 语言对 C 型网格进行模拟,利用本文构造出源项  $P$  和  $Q$  的函数,程序运行结果如图 3 和图 4 所示(图 3b 和图 4b 为图 3a 和图 4a 的局部放大图)。

图 3 是式(1)的运行结果;图 4 是运用式(2)进行控制而得到运行结果。从图 3 和图 4 的运行结果作比较,可以明显看出图 4 中的控制源在边界网格正交和加密控制的效果。

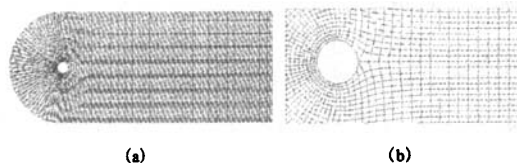


图 3 没有控制源项运行结果

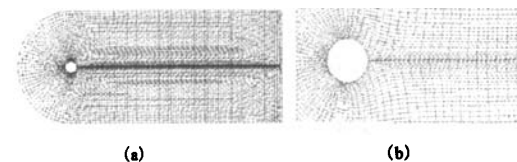


图 4 有控制源项运行结果

## 4 结束语

运用有限差分对 Poisson 方程的边值问题进行数值求解,构造了源项  $P$  和  $Q$  的函数,分析了网格加密及边界正交化处理方法,并进行了算例分析,运行结果表明,本文构造出的  $P$  和  $Q$  函数,对于网格的加密和边界正交是一种很好的网格生成方法。

# 小位移挤压式磁流变阻尼器的实验研究

周 瑾, 刘 勇

(南京航空航天大学机电学院, 江苏 南京 210016)

The Experiment Research of Squeeze Mode MR Fluid Damper with Small Displacement

ZHOU Jin, LIU Yong

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**摘要:**设计了小位移、大阻尼力特性的挤压式磁流变阻尼器,并进行了相应的实验研究,包括示功特性和阻尼特性,以及所选用的重庆仪表材料研究所磁流变液 MRF-01K 的饱和磁场强度。实验结果表明,随着电流的增加,减振器示功图曲线包围面积逐渐增大,耗能增加,减振效果增强,其与激振器的激振频率关系不大;由阻尼特性曲线可知,阻尼器的输出力既与阻尼器电流有关,又与激振器频率有关,频率越大,电流越大,输出的力越大。

**关键词:**磁流变阻尼器;挤压式

**中图分类号:**TH133

**文献标识码:**A

**文章编号:**1001-2257(2010)09-0013-03

**Abstract:** The experiment research of the squeeze mode MR fluid damper which has small displacement is presented in this paper. The absorbing power identity and damp identity as well as the saturation magnetic of the MRF-01K made by Chongqing Instrument Material Research Institute

are described detailed. Testing showed that: with the current increase in the shock absorber, the indicator diagram curve area surrounded increases gradually, the power dissipation is increased, and the vibration is suppressed as well. There is less relationship between the indicator diagram curve area and frequency of vibration exciter. Moreover the force-velocity figure shows that the output force of the MR fluid damper not only has relationship with current but also with frequency. The current and frequency are greater; the output force of MR fluid damper is bigger.

**Key words:** MR fluid damper; squeeze mode

## 0 引言

磁流变液属剪切强度可控流体,是当前智能材料研究领域的一个重要分支<sup>[1-2]</sup>。其主要特点是:在外加磁场下,磁流变体的流变特性会随外加磁场强度的变化而变化。随着对磁流变液体研究的深入,发现磁流变体的表观粘度在外加磁场增加时,会显著增加甚至变为固体;当外加磁场撤去时,磁流变

收稿日期:2010-04-26

基金项目:江苏省自然科学基金资助项目(BK2007590);航空科学基金资助项目(2008ZB52018)

## 参考文献:

- [1] 王瑞利.数值求解中网格自适应加密和合并技术的研究[J].数值计算与计算机应用,2004,25(2):145-150.
- [2] 何国建.定边界点二维正交曲线网格的数值生成方法[J].河海大学学报,2004,32(2):140-143.
- [3] 陆金甫,关治编.偏微分方程数值解法[M].北京:北京大学出版社,2004.
- [4] 章本照,印建安,张宏基.流体力学数值方法[M].北京:机械工业出版社,2003.

- [5] Anderson J D, Degrez G. Computational Fluid Dynamics[M]. Verlag, Springer-Verlag, 1992.
- [6] Thompson J F. Body-filled coordinate system for numerical solution of partial differential equations[J]. Computer Physics, 1982, 1(2): 47-50.
- [7] 王盛玺,宋松和,邹正平.二维矢量边界推进非结构网格生成方法[J].计算物理,2008,25(3):275-278.

**作者简介:**魏明明 (1978-),男,陕西白水人,讲师,博士研究生,研究方向为流体润滑技术;卢志伟 (1979-),男,河南南阳人,工程师,研究方向为流体润滑技术。