



Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Синяков Анатолий Алексеевич
608 группа
5 вариант

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Москва
2022

1 Введение

В качестве модельной задачи предлагается задача вычисления многомерного интеграла методом Монте-Карло.

Программная реализация должна быть выполнена на языке C или C++ с использованием библиотеки параллельного программирования MPI.

Требуется исследовать масштабируемость параллельной MPI-программы на следующих параллельных вычислительных системах ВМК МГУ:

1. IBM Polus

2 Математическая постановка задачи

Функция $f(x, y, z)$ — непрерывна в ограниченной замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^3$. Требуется вычислить определённый интеграл:

$$I = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz ,$$

где функция $f(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$,

область $G = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, y^2 + z^2 \leq 1\}$

3 Численный метод решения задачи

Пусть область G ограничена параллелепипедом

$$\Pi : \begin{cases} a_1 \leq x \leq b_1, \\ a_2 \leq y \leq b_2, \\ a_3 \leq z \leq b_3 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию:

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in G \\ 0, & (x, y, z) \notin G \end{cases}$$

Преобразуем искомый интеграл:

$$I = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Pi} F(x, y, z) dx dy dz$$

Пусть $p_1(x_1, y_1, z_1), p_2(x_2, y_2, z_2), \dots$ — случайные точки, равномерно распределённые в Π . Возьмём n таких случайных точек. В качестве приближённого значения интеграла предлагается использовать выражение:

$$I \approx |\Pi| \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(p_i),$$

где $|\Pi|$ - объём параллелепипеда Π . $|\Pi| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$

4 Нахождение точного значения интеграла аналитически

$$\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 x^3 y^2 z dx dy dz = \int_{-1}^0 x^3 dx \int_{-1}^0 y^2 dy \int_{-1}^0 z dz = \frac{1}{24} \quad (1)$$

5 Описание программной реализации

Параллельная MPI-программа принимает на вход требуемую точность и генерирует случайные точки до тех пор, пока требуемая точность не будет достигнута. Программа вычисляет точность как модуль разности между приближённым значением, полученным методом Монте-Карло, и точным значением, вычисленным аналитически.

Программа считывает в качестве аргумента командной строки требуемую точность ϵ и выводит четыре числа:

- Посчитанное приближённое значение интеграла
- Ошибка посчитанного значения: модуль разности между приближённым и точным значениями интеграла
- Количество сгенерированных случайных точек
- Время работы программы в секундах

Время работы программы измеряется следующим образом. Каждый MPI-процесс измеряет своё время выполнения, затем среди полученных значений берётся максимум.

Была реализована независимая генерация точек MPI-процессом. Каждый процесс генерирует свой набор точек и считает свою часть суммы на этих точках. Далее идёт операция редукции (Allreduce) и считается ошибка (разница между истинным значением и приближённым). Если ошибка превышает нужную точность, то расчёт продолжается по выше описанной схеме.

6 Исследование масштабируемости программы на системе Polus

Таблица 1: Таблица с результатами расчётов для системы Polus

Точность ϵ	Число MPI-процессов	Время работы программы (с)	Ускорение	Ошибка
$3.0 \cdot 10^{-5}$	1	1.74824	1	1.0562e-05
	4	0.438134	3.990	1.0565e-05
	16	0.139696	12.514	1.0558e-05
$5.0 \cdot 10^{-6}$	1	10.4679	1	1.363e-06
	4	2.72096	3.847	1.363e-06
	16	0.808128	12.953	1.363e-06
$1.5 \cdot 10^{-6}$	1	34.9826	1	7.095e-07
	4	9.03132	3.873	7.093e-07
	16	2.59769	13.466	7.067e-07

Таблица 2: Таблица с результатами расчётов для различных сидов на точности $5e - 06$

Seed	Число MPI-процессов	Время работы программы (с)	Ускорение	Ошибка
$rank + 10$	1	41.9467	1	4.00173e-06
	4	10.7858	3.889	4.00173e-06
	16	3.2651	12.846	4.00173e-06
$rank + 100$	1	10.4625	1	1.13473e-06
	4	2.69612	3.880	1.13473e-06
	16	0.802998	13.029	1.13473e-06
$rank + 1000$	1	31.4402	1	4.9782e-06
	4	8.1318	3.866	4.9782e-06
	16	2.35756	13.335	4.9782e-06
$rank + 10000$	1	31.3884	1	3.8851e-06
	4	8.24965	3.804	3.8851e-06
	16	2.38829	13.142	3.8851e-06
$rank + 100000$	1	10.5096	1	2.70874e-06
	4	2.70114	3.890	2.70874e-06
	16	0.81954	12.823	2.70874e-06

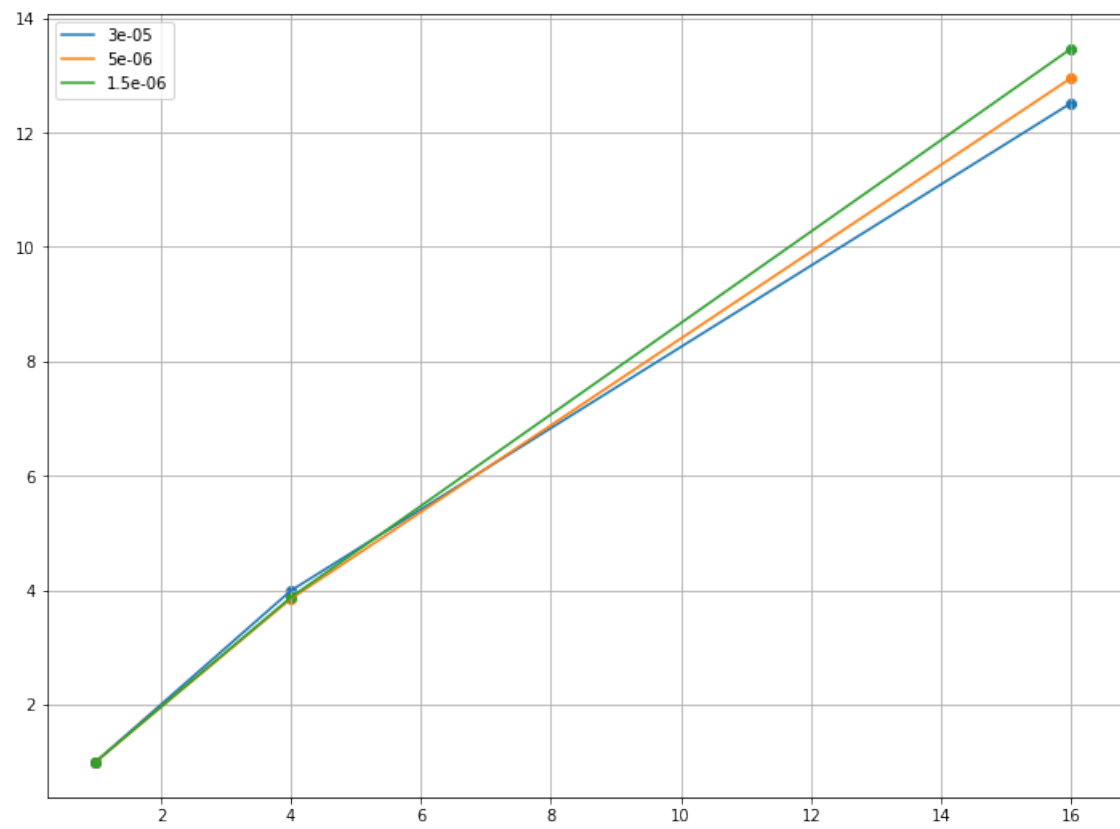


Рис. 1: График ускорения

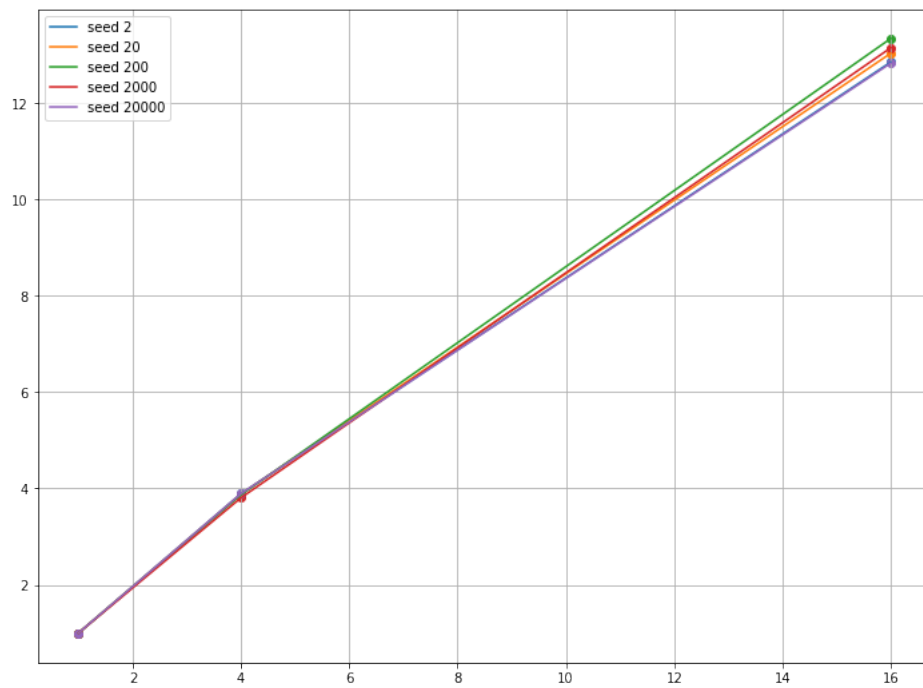


Рис. 2: Графики ускорения с различными seed