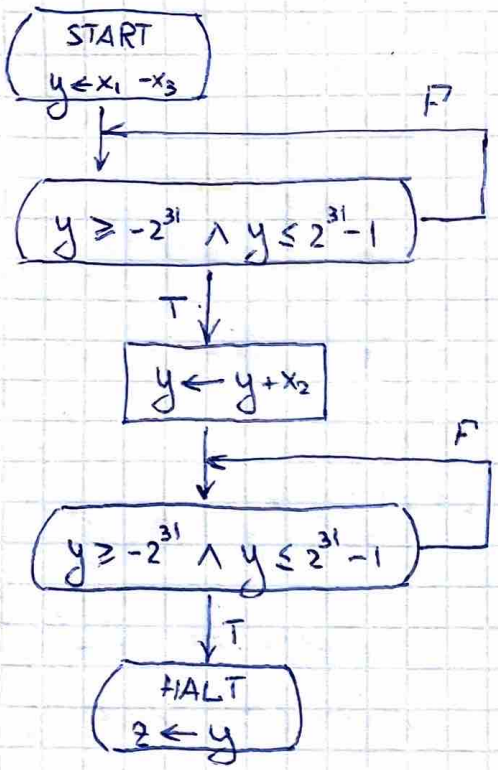
Задание 1.1

P_1: $D_{\bar{x}} = D_{\bar{y}} = D_{\bar{z}} = \mathbb{Z}$



Требование T_1:

$$\varphi_1(\bar{x}) \equiv (-2^{31} \leq x_1 \leq 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \leq x_2 \leq 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \leq x_3 \leq 2^{31}-1) \wedge$$
$$\wedge (-2^{31} \leq x_1 - x_3 \leq 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \leq x_1 - x_3 + x_2 \leq 2^{31}-1)$$

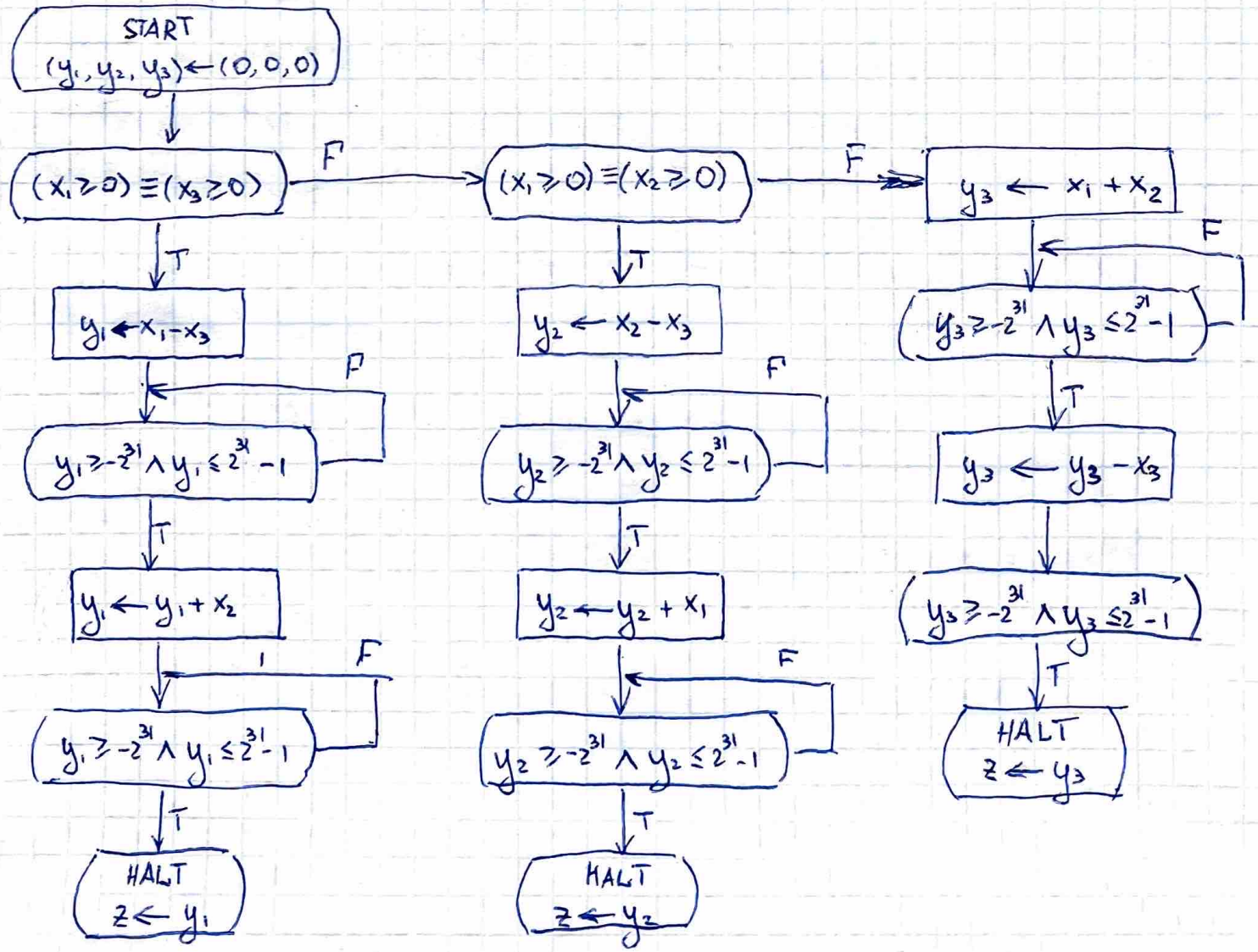
$$\psi_1(\bar{x}, z) \equiv z = x_1 - x_3 + x_2$$

Требование T_2:

$$\varphi_2(\bar{x}) \equiv (-2^{31} \leq x_1 \leq 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \leq x_2 \leq 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \leq x_3 \leq 2^{31}-1) \wedge$$
$$\wedge (-2^{31} \leq x_1 + x_2 - x_3 \leq 2^{31}-1)$$

$$\psi_2(\bar{x}, z) \equiv z = x_1 + x_2 - x_3$$

P_2: $D_{\bar{x}} = D_{\bar{y}} = D_{\bar{z}} = \mathbb{Z}$



$$M[P_1](\bar{x}) = y = \begin{cases} y, & -2^{31} \le y \le 2^{31}-1 \\ \omega, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} (x_1 - x_3) + x_2, & (-2^{31} \le x_1 - x_3 + x_2 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le x_1 - x_3 \le 2^{31}-1) \\ \omega, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$M[P_2](\bar{x}) = \begin{cases} y_1, & -2^{31} \le y_1 \le 2^{31}-1 \\ y_2, & -2^{31} \le y_2 \le 2^{31}-1 \\ y_3, & -2^{31} \le y_3 \le 2^{31}-1 \\ \omega, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} y_1 + x_2, & (-2^{31} \le y_1 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le y_1 + x_2 \le 2^{31}-1) \\ y_2 + x_1, & (-2^{31} \le y_2 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le y_2 + x_1 \le 2^{31}-1) \\ y_3 - x_3, & (-2^{31} \le y_3 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le y_3 - x_3 \le 2^{31}-1) \end{cases} \approx$$

$$\approx \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3, & (-2^{31} \le x_1 + x_2 - x_3 \le 2^{31}-1) \wedge ((x_1 \ge 0 \equiv x_3 \ge 0) \wedge (-2^{31} \le x_1 - x_3 \le 2^{31}-1)) \vee \\ & \vee (\neg(x_1 \ge 0 \equiv x_3 \ge 0) \wedge (\neg(x_1 \ge 0 \equiv x_2 \ge 0) \wedge (-2^{31} \le x_1 + x_2 \le 2^{31}-1)) \vee \\ & \vee (\neg(x_1 \ge 0 \equiv x_3 \ge 0) \wedge (x_1 \ge 0 \equiv x_2 \ge 0) \wedge (-2^{31} \le x_2 - x_3 \le 2^{31}-1)) \\ \omega, & \text{иначе} \end{cases}$$

1) P_1 – T_1 част. корр.:

$\psi_1(\bar{x}) \wedge M[P_1](\bar{x}) \neq \omega \Rightarrow M[P_1](\bar{x}) = x_1 - x_3 + x_2 \Rightarrow \psi_1(\bar{x}, M[P_1](\bar{x})) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\psi_1\}\ P_1\ \{\psi_1\}$

2) P_1 – T_2 част. корр.

$\psi_2(\bar{x}) \wedge M[P_1](\bar{x}) \neq \omega \Rightarrow M[P_1](\bar{x}) = x_1 - x_3 + x_2 \Rightarrow \psi_2(\bar{x}, M[P_1](\bar{x})) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\psi_2\}\ P_1\ \{\psi_2\}$

3) P_1 – T_1 полн. корр.

$\psi_1(\bar{x})$ обеспеч. $M[P_1](\bar{x}) = x_1 - x_3 + x_2 \Rightarrow M[P_1](\bar{x}) \neq \omega \wedge \psi_1(\bar{x}, M[P_1](\bar{x})) \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \psi_1 \rangle\ P_1\ \langle \psi_1 \rangle$

4) P_1 – T_2 полн. корр. отсутствует

Контрпример $x_1' = -2^{31}$ $x_2' = 2^{31}-1$ $x_3' = 1$

$\psi_2(\bar{x}') = true$, однако $M[P_1](\bar{x}') = \omega$ т.к. $x_1' - x_3' = -2^{31} - 1 < -2^{31}$

5) P_2 – T_1 част. корр.

$\psi_1(\bar{x}) \wedge M[P_2](\bar{x}) \neq \omega \Rightarrow M[P_2](\bar{x}) = x_1 + x_2 - x_3 \Rightarrow \psi_1(\bar{x}, M[P_2](\bar{x})) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\psi_1\}\ P_2\ \{\psi_1\}$

6) P_2 – T_2 част. корр.

$\psi_2(\bar{x}) \wedge M[P_2](\bar{x}) \neq \omega \Rightarrow M[P_2](\bar{x}) = x_1 + x_2 - x_3 \Rightarrow \psi_2(\bar{x}, M[P_2](\bar{x})) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\psi_2\}\ P_2\ \{\psi_2\}$

7) P_2_T_1 полн. корр.

$\varphi_1(\bar{x}) \Rightarrow M[P_2](\bar{x}) = \omega \wedge \psi_1(\bar{x}, \bar{z})$ равносильно $\varphi_1(\bar{x}) \Rightarrow M[P_2](\bar{x}) \neq \omega$

Док-во:

$(-2^{31} \le x_1 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le x_2 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le x_3 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le x_1 - x_3 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le x_1 - x_3 + x_2 \le 2^{31}-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2^{31} \le x_1 - x_3 + x_2 \le 2^{31}-1) \wedge ((x_1 \ge 0 \equiv x_3 \ge 0) \wedge (-2^{31} \le x_1 - x_3 \le 2^{31}-1) \vee (\neg(x_1 \ge 0 \equiv x_3 \ge 0)) \wedge$

$\wedge (\neg(x_1 \ge 0 \equiv x_2 \ge 0)) \wedge (-2^{31} \le x_1 + x_2 \le 2^{31}-1)) \vee ((\neg(x_1 \ge 0 \equiv x_3 \ge 0)) \wedge (x_1 \ge 0 \equiv x_2 \ge 0) \wedge$

$\wedge (-2^{31} \le x_2 - x_3 \le 2^{31}-1))$

Очевидно, что $(-2^{31} \le x_1 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le x_3 \le 2^{31}-1) \wedge (x_1 \ge 0 \equiv x_3 \ge 0) \Rightarrow -2^{31} \le x_1 - x_3 \le 2^{31}-1$

Аналогично:

$(-2^{31} \le x_1 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le x_2 \le 2^{31}-1) \wedge (\neg(x_1 \ge 0 \equiv x_2 \ge 0)) \Rightarrow -2^{31} \le x_1 + x_2 \le 2^{31}-1$

$(-2^{31} \le x_2 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le x_3 \le 2^{31}-1) \wedge (\neg(x_1 \ge 0 \equiv x_3 \ge 0) \wedge (x_1 \ge 0 \equiv x_2 \ge 0)) \Rightarrow -2^{31} \le x_2 - x_3 \le 2^{31}-1$

$(x_1 \ge 0 \equiv x_3 \ge 0) \vee (\neg(x_1 \ge 0 \equiv x_3 \ge 0) \wedge (\neg(x_1 \ge 0 \equiv x_2 \ge 0)) \vee (\neg(x_1 \ge 0 \equiv x_3 \ge 0) \wedge (x_1 \ge 0 \equiv x_2 \ge 0)) =$

$= A \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) = A \vee (\neg A \wedge (B \vee \neg B)) = true$

⇓

Достаточно доказать:

$(-2^{31} \le x_1 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le x_2 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le x_3 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le x_1 - x_3 \le 2^{31}-1) \wedge (-2^{31} \le x_1 - x_3 + x_2 \le 2^{31}-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2^{31} \le x_1 - x_3 + x_2 \le 2^{31}-1$ - что авл. очевидным. $\Rightarrow \langle \varphi_1 \rangle P_2 \langle \psi_1 \rangle$

8) P_2_T_2 полн. корр.

Док-во идентично предыдущему пункту т.к. не использовалась часть предусловия φ_1 $-2^{31} \le x_1 - x_3 \le 2^{31}-1 \Rightarrow \langle \varphi_2 \rangle P_2 \langle \psi_2 \rangle$