Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Отчет по лабораторной работе № 14

Тема «Решение краевой задачи для ОДУ 2 порядка методом суперпозиции»

Выполнил студент гр. 5030102/20001 Цителадзе Г.А.
Преподаватель: Козлов К. Н.

Санкт-Петербург
2024

Постановка задачи

С помощью метода суперпозиций решить ОДУ 2 порядка методом суперпозиций

Данное ОДУ и граничное условие:

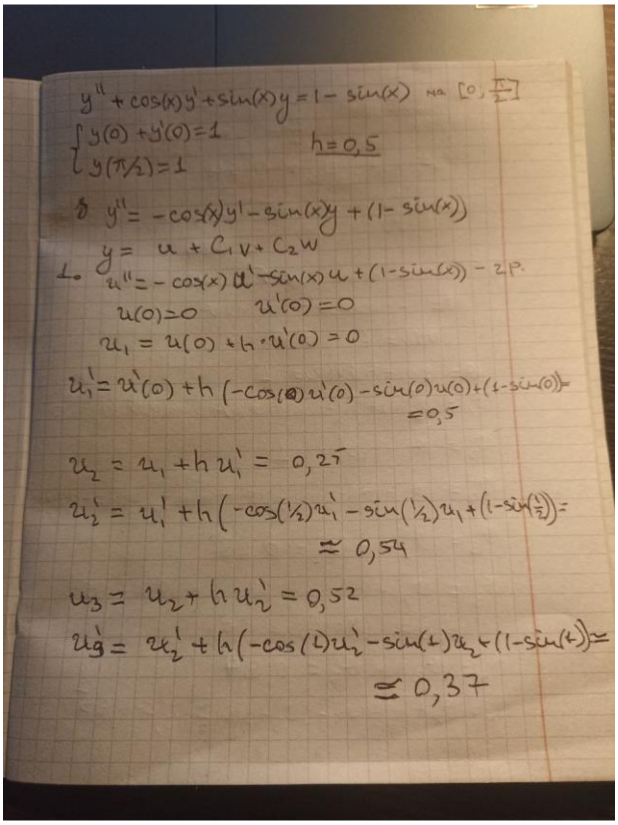
$$y`` + \cos(x)\,y` + \sin(x)\,y = 1 - \sin(x) \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y(0) + y`(0) = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Аналитическое решение необходимое для анализа $y = \sin(x)$

Демонстрация алгоритма “ручным” способом



$y'' + \cos(x)y' + \sin(x)y = 1 - \sin(x)$ на $[0; \frac{\pi}{2}]$

$\begin{cases} y(0) + y'(0) = 1 \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases}$ $\underline{h = 0,5}$

$y'' = -\cos(x)y' - \sin(x)y + (1 - \sin(x))$

$y = u + C_1 v + C_2 w$

1. $u'' = -\cos(x)u' - \sin(x)u + (1 - \sin(x))$ – 2 р.

$u(0) = 0 \quad u'(0) = 0$

$u_1 = u(0) + h \cdot u'(0) = 0$

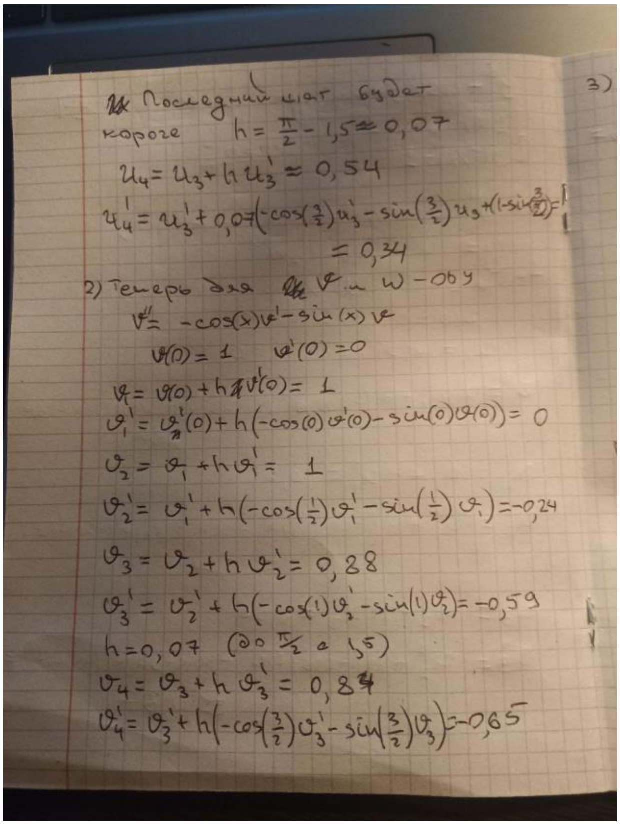
$u_1' = u'(0) + h(-\cos(0)u'(0) - \sin(0)u(0) + (1 - \sin(0))) = 0,5$

$u_2 = u_1 + h u_1' = 0,25$

$u_2' = u_1' + h(-\cos(\frac{1}{2})u_1' - \sin(\frac{1}{2})u_1 + (1 - \sin(\frac{1}{2}))) \simeq 0,54$

$u_3 = u_2 + h u_2' = 0,52$

$u_3' = u_2' + h(-\cos(1)u_2' - \sin(1)u_2 + (1 - \sin(1))) \simeq 0,37$



3)

Последний шаг будет короче $h = \frac{\pi}{2} - 1,5 \approx 0,07$

$u_4 = u_3 + h u_3' \approx 0,54$

$u_4' = u_3' + 0,07(-\cos(\frac{3}{2})u_3' - \sin(\frac{3}{2})u_3 + (1 - \sin(\frac{3}{2}))) = 0,34$

2) Теперь для v и w – одУ

$v'' = -\cos(x)v' - \sin(x)v$

$v(0) = 1 \quad v'(0) = 0$

$v_1 = v(0) + h v'(0) = 1$

$v_1' = v'(0) + h(-\cos(0)v'(0) - \sin(0)v(0)) = 0$

$v_2 = v_1 + h v_1' = 1$

$v_2' = v_1' + h(-\cos(\frac{1}{2})v_1' - \sin(\frac{1}{2})v_1) = -0,24$

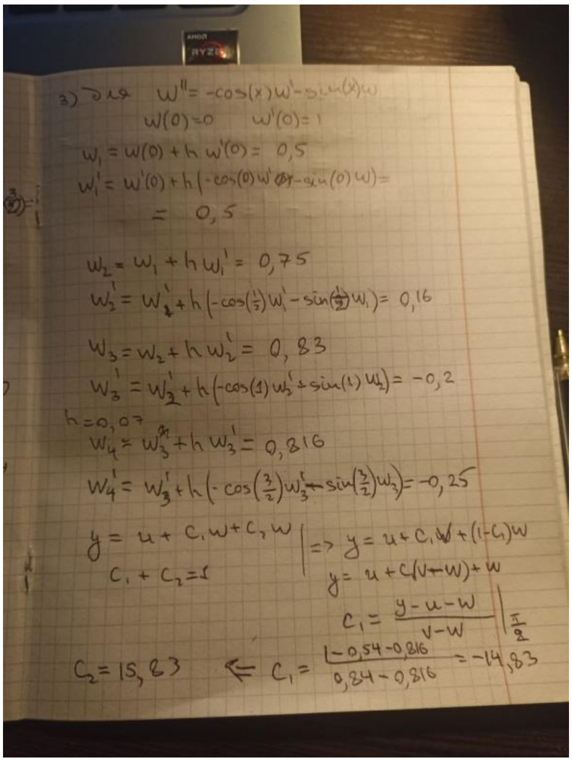
$v_3 = v_2 + h v_2' = 0,88$

$v_3' = v_2' + h(-\cos(1)v_2' - \sin(1)v_2) = -0,59$

$h = 0,07$ (до $\frac{\pi}{2}$ с 1,5)

$v_4 = v_3 + h v_3' = 0,84$

$v_4' = v_3' + h(-\cos(\frac{3}{2})v_3' - \sin(\frac{3}{2})v_3) = -0,65$



3) Для $w'' = -\cos(x)w' - \sin(x)w$

$w(0)=0 \quad w'(0)=1$

$w_1 = w(0) + h\,w'(0) = 0{,}5$

$w_1' = w'(0) + h(-\cos(0)w' - \sin(0)w) =$

$= 0{,}5$

$w_2 = w_1 + h\,w_1' = 0{,}75$

$w_2' = w_1' + h(-\cos(\tfrac{1}{2})w_1' - \sin(\tfrac{1}{2})w_1) = 0{,}16$

$w_3 = w_2 + h\,w_2' = 0{,}83$

$w_3' = w_2' + h(-\cos(1)w_2' - \sin(1)w_2) = -0{,}2$

$h=0{,}07$

$w_4 = w_3 + h\,w_3' = 0{,}816$

$w_4' = w_3' + h(-\cos(\tfrac{3}{2})w_3' - \sin(\tfrac{3}{2})w_3) = -0{,}25$

$y = u + C_1 w + C_2 w$

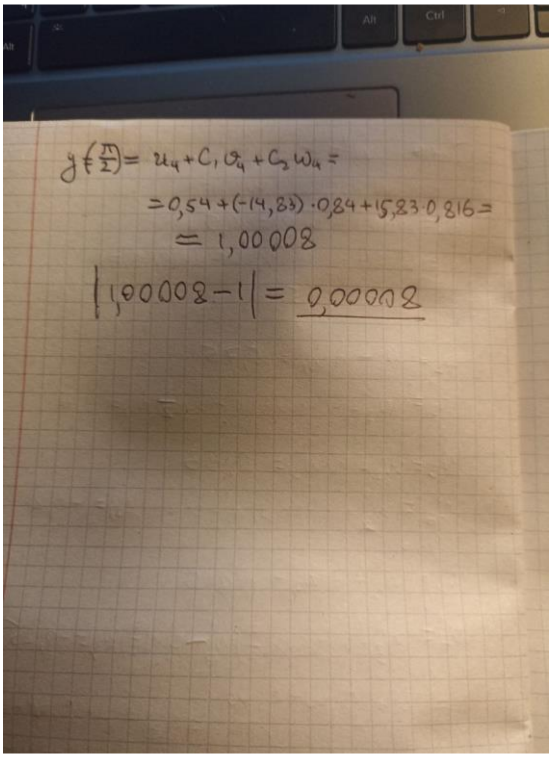
$C_1 + C_2 = 1$

$\Rightarrow y = u + C_1 v + (1-C_1)w$

$y = u + C(v-w) + w$

$C_1 = \dfrac{y-u-w}{v-w}\Big|_{\frac{\pi}{2}}$

$C_2 = 15{,}83 \Leftarrow C_1 = \dfrac{1-0{,}54-0{,}816}{0{,}84-0{,}816} = -14{,}83$



$y(\tfrac{\pi}{2}) = u_4 + C_1 v_4 + C_2 w_4 =$

$= 0{,}54 + (-14{,}83)\cdot 0{,}84 + 15{,}83\cdot 0{,}816 =$

$= 1{,}00008$

$|1{,}00008 - 1| = \underline{0{,}00008}$

Иллюстрация работы метода

График решений для разного значения шага:

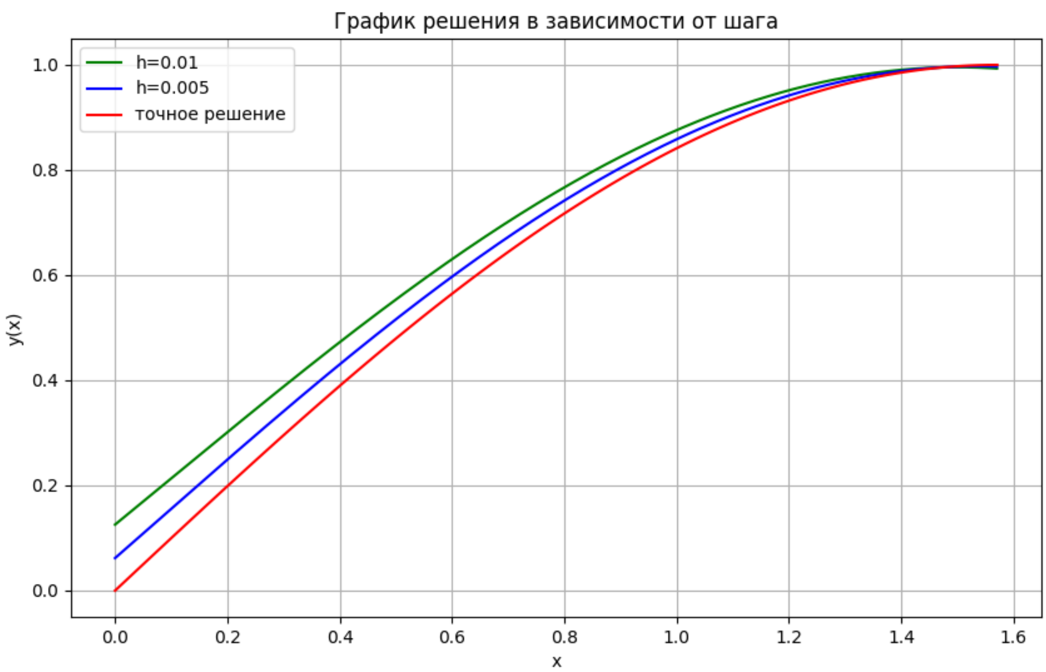
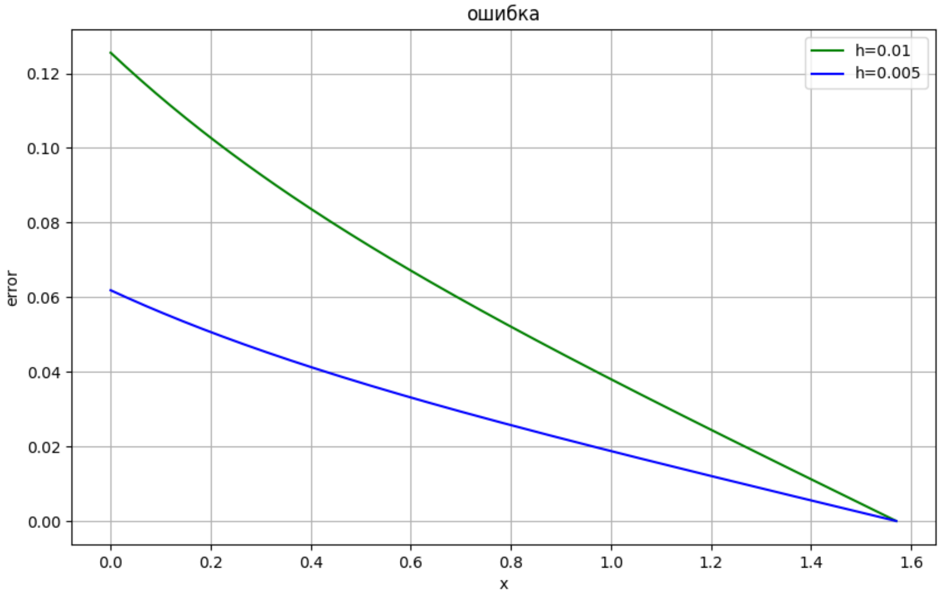
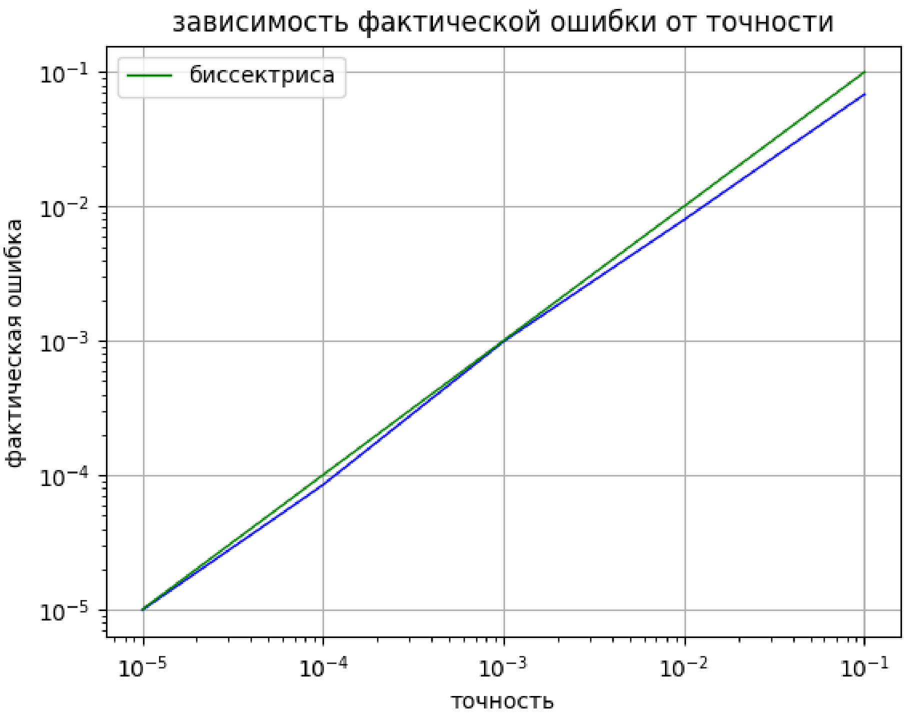


График ошибки в зависимости от заданного значения шага



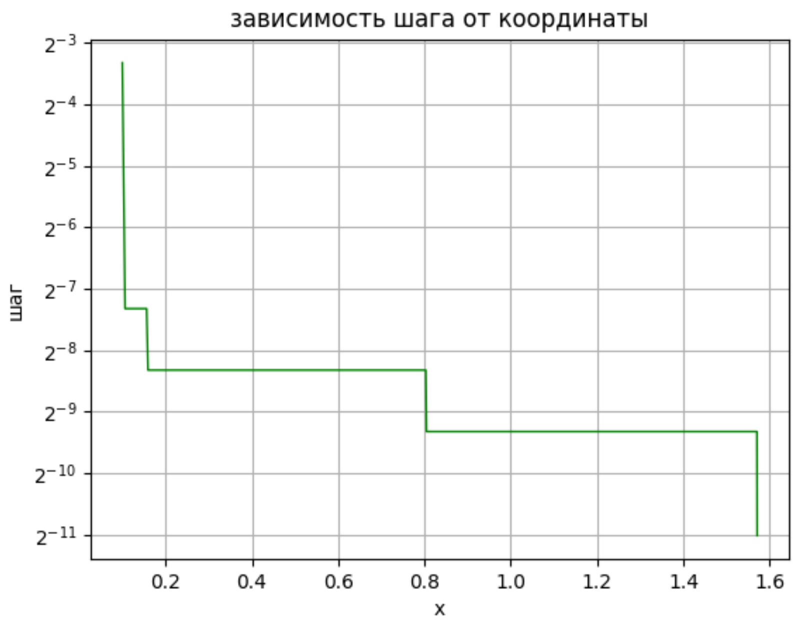
Зависимость фактической ошибки от заданной точности

Зависимость фактической ошибки от заданной точности (оцениваем точность как максимальная оценка по правилу Рунге седи трех ДУ)



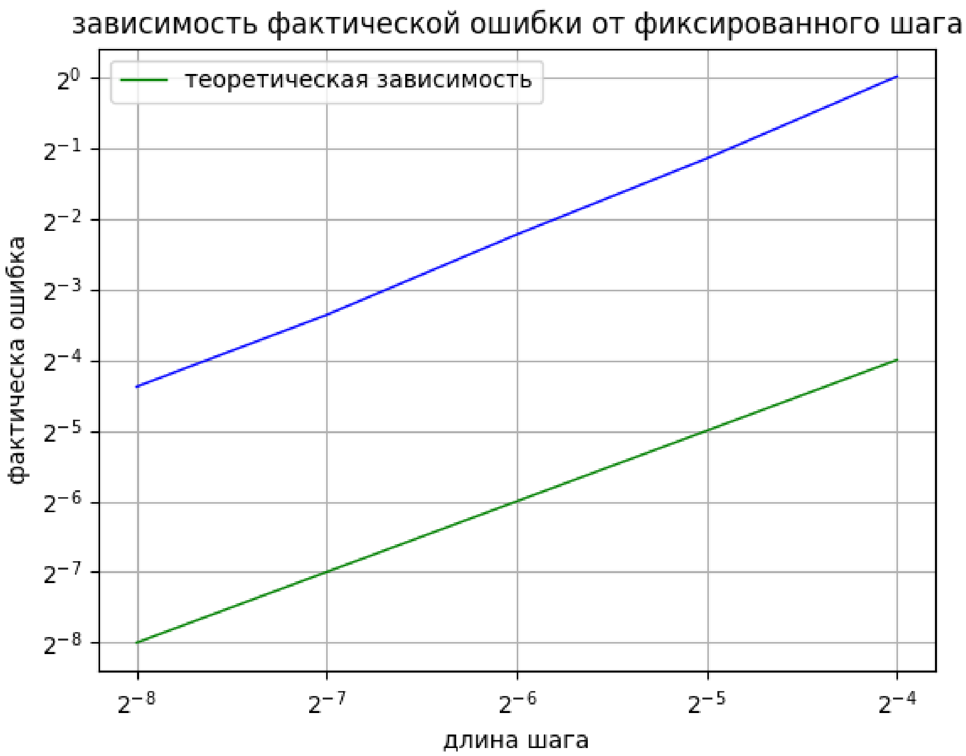
По графику видно, что фактическая ошибка очень близка к заданной точности и не превосходит её

График изменения шага по отрезку при заданной изначально точности 1e-6



Адаптивный шаг уменьшается вдоль всего отрезка, что позволяет проводить более эффективное вычисление.

Исследование сходимости метода



При решении ДУ при методе суперпозиций использовался метод Эйлера 1ого порядка, как мы видим коэффициент наклона графика равен единицы, что свидетельствует о том что метод является методом первого порядка точности. (зеленная биссектриса- теоретическая зависимость)

Вывод

В данной лабораторной работе был применен метод суперпозиции для решения краевой задачи второго порядка с использованием метода Эйлера первого порядка для решения отдельных ДУ. Сравнение фактической ошибки с заданной точностью подтвердило соответствие результатов теоретическим ожиданиям, а линейный характер зависимости ошибок от шага продемонстрировал, что метод обладает первым порядком точности. Таким образом, метод суперпозиции показал свою надежность и эффективность для решения краевых задач данного типа.