

Wydział Informatyki	Imię i nazwisko: 1. Kawa Michał 2. Smyda Tomasz		Rok: II	Grupa: 5	Zespół: 3
PRACOWNIA FIZYCZNA WFiIS AGH	Temat: Moduł Younga				Nr ćwiczenia: 11
Data wykonania: 10.10.2023	Data oddania: 13.10.2023	Zwrot do popr.:	Data oddania:	Data zaliczenia:	OCENA:

Moduł Younga

Ćwiczenie nr 11

Kawa Michał
Smyda Tomasz

Spis treści

1	Wstęp	2
1.1	Cel ćwiczenia	2
1.2	Opis ćwiczenia	2
2	Układ pomiarowy	3
3	Przebieg doświadczenia	3
4	Wyniki pomiarów	4
5	Opracowanie wyników pomiarów	6
5.1	Nachylenia prostych	7
5.2	Wyznaczenie modułu Younga	8
5.3	Wyznaczenie niepewności	8
5.4	Wyniki końcowe	8
5.5	Ocena zgodności z wartościami tabelarycznymi	8
6	Wnioski	9

1 Wstęp

1.1 Cel ćwiczenia

Celem doświadczenia jest wyznaczenie modułu Younga metodą statyczną za pomocą pomiaru wydłużenia drutu z badanego metalu obciążonego stałą siłą.

1.2 Opis ćwiczenia

W doświadczeniu oprzemy się na równaniu prawa Hook'a, mówiącemu o proporcjonalności odkształcenia sprężystego do przyłożonej siły:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot S}$$

Wartość E to stała materiałowa - mierzony przez nas moduł Younga.

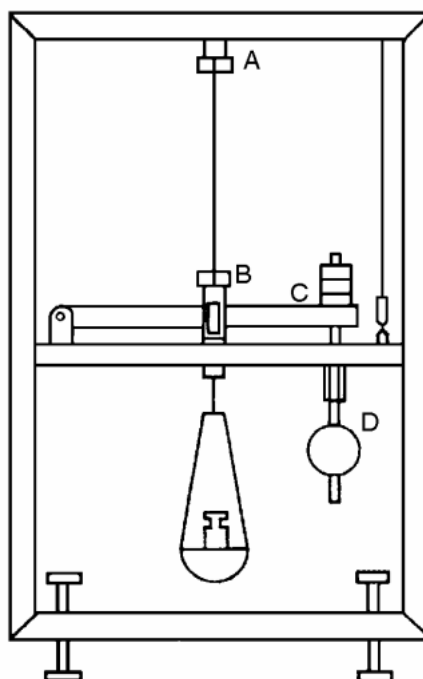
Prawo Hook'a można również zapisać jako: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, gdzie σ to napężenie normalne ($\sigma = \frac{F}{S}$), a ε to normalne odkształcenie względne ($\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$).

Zgodnie z prawem Hooke'a zależność $\Delta l(F)$ powinna być prostą $\Delta l = a \cdot F + b$, zatem współczynnik $a = \frac{l}{E \cdot S}$. Z tego otrzymujemy:

$$E = \frac{l}{a \cdot S} = \frac{4l}{\pi \cdot d^2 \cdot a}$$

Niepewność złożoną $u_c(E)$ otrzymujemy:

$$\frac{u_c(E)}{E} = \sqrt{\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{u(d)}{d}\right)^2 + \left(-\frac{u(a)}{a}\right)^2}$$



Rysunek 1: Urządzenie pomiarowe

2 Układ pomiarowy

W skład układu pomiarowego wchodzi następujące elementy:

1. Druty - stalowy i mosiężny, będące obiektem pomiaru.
2. Przyrząd do pomiaru wydłużenia drutu pod wpływem stałej siły (rys.1), zaopatrzony w czujnik mikrometryczny do pomiaru wydłużenia drutu.
3. Zestaw odważników.
4. Śruba mikrometryczna.
5. Przemyślnik milimetryczny.

3 Przebieg doświadczenia

Na samym początku dokonaliśmy pomiaru długości pręta wykonanego ze stali oraz za pomocą śruby mikrometrycznej zmierzaliśmy średnicę drutu wykonując trzy pomiary w różnych miejscach drutu. Następnie wyzerowaliśmy czujnik mikrometryczny i rozpoczęliśmy właściwe pomiary.

Badaliśmy odległość za pomocą czujnika mikrometrycznego obciążając szalkę za pomocą coraz większych odważników zaczynając od 0 kg, a kończąc na 10 kg ze skokiem 1 kg, a następnie zmniejszaliśmy obciążenie na szalce również co 1 kg aż do 0.

Taką samą procedurę pomiarów dokonaliśmy dla drutu mosiężnego. Jedyną różnicą było maksymalne obciążenie, do którego użyliśmy obciążników o łącznej wadze 6 kg - wynika to z mniejszej wytrzymałości drutu.

4 Wyniki pomiarów

Numer pomiaru	Masa odważników [kg]	Siła [N]	Wskazanie czujnika ↑ [mm]	Wskazanie czujnika ↓ [mm]	Wydłużenie średnie Δl [mm]
1.	1	9,81	0,86	1,22	0,52
2.	2	19,62	1,64	1,9	0,89
3.	3	29,43	2,08	2,36	1,11
4.	4	39,24	2,63	2,77	1,35
5.	5	49,05	2,9	3,11	1,50
6.	6	58,86	3,19	3,42	1,65
7.	7	68,67	3,45	3,71	1,79
8.	8	78,48	3,89	4,02	1,98
9.	9	88,29	4,08	4,33	2,10
10.	10	98,1	4,41	4,39	2,2

Tabela 1: Wyniki pomiarów dla drutu stalowego

Numer pomiaru	Masa odważników [kg]	Siła [N]	Wskazanie czujnika ↑ [mm]	Wskazanie czujnika ↓ [mm]	Wydłużenie średnie Δl [mm]
1.	1	9,81	0,32	0,31	0,18
2.	2	19,62	0,61	0,62	0,30
3.	3	29,43	0,89	0,88	0,44
4.	4	39,24	1,1	1,15	0,56
5.	5	49,05	1,28	1,34	0,66
6.	6	58,86	1,5	1,55	0,76

Tabela 2: Wyniki pomiarów dla drutu mosiężnego

STALOWY

Długość: 107,5 cm

Srednica \varnothing (3 pomiarów) 1) 0,75 mm, 2) 0,77 mm, 3) 0,78 mm

$u(1) = 0,000001 \text{ mm}$
 $u(d) = 0,01 \text{ mm}$

MO>1E2NY

Długość: 108,9 cm

Srednica: 1) 0,77 mm, 2) 0,79 mm, 3) 0,8 mm

Masa	Sieci	Ciepota \uparrow	Ciepota \downarrow	Srednia
1 kg		0,32 mm	0,31 mm	
2 kg		0,61 mm	0,62 mm	
3 kg		0,89 mm	0,88 mm	
4 kg		1,1 mm	1,15 mm	
5 kg		1,28 mm	1,37 mm	
6 kg		1,5 mm	1,55 mm	
10 kg				

Masa	Sieci	Ciepota \uparrow	Ciepota \downarrow	Srednia
1 kg		0,86 mm	1,22 mm	
2 kg		1,65 mm	1,9 mm	
3 kg		2,08 mm	2,36 mm	
4 kg		2,63 mm	2,77 mm	
5 kg		2,80 mm	3,11 mm	
6 kg		3,13 mm	3,42 mm	
7 kg		3,45 mm	3,71 mm	
8 kg		3,89 mm	4,02 mm	
9 kg		4,08 mm	4,33 mm	
10 kg		4,41 mm	4,35 mm	

H. Miko

5 Opracowanie wyników pomiarów

Dla obu drutów otrzymaliśmy długości $l_s = 107,5$ cm oraz $l_m = 107,9$ cm.

Na podstawie trzech wykonanych pomiarów ustaliliśmy średnicę drutu stalowego oraz oszacowaliśmy niepewność typu B:

$$d_s = 0,77 \text{ mm}$$
$$u(d_s) = \frac{0,01 \text{ mm}}{\sqrt{3}} = 0,006 \text{ mm}$$

Analogicznie dla drutu mosiężnego:

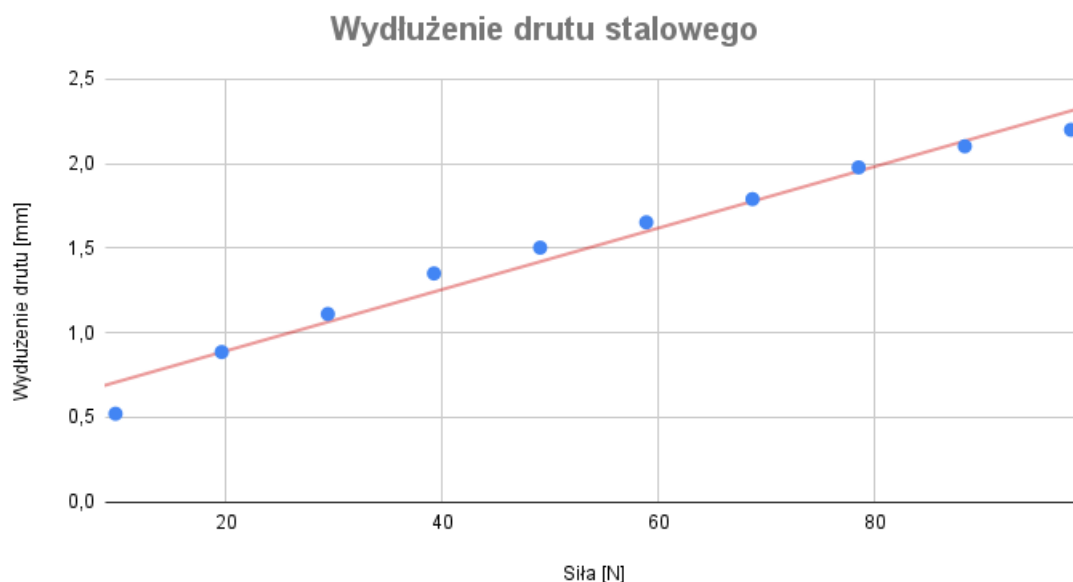
$$d_m = 0,79 \text{ mm}$$
$$u(d_m) = \frac{0,01 \text{ mm}}{\sqrt{3}} = 0,006 \text{ mm}$$

Wobec czego otrzymaliśmy:

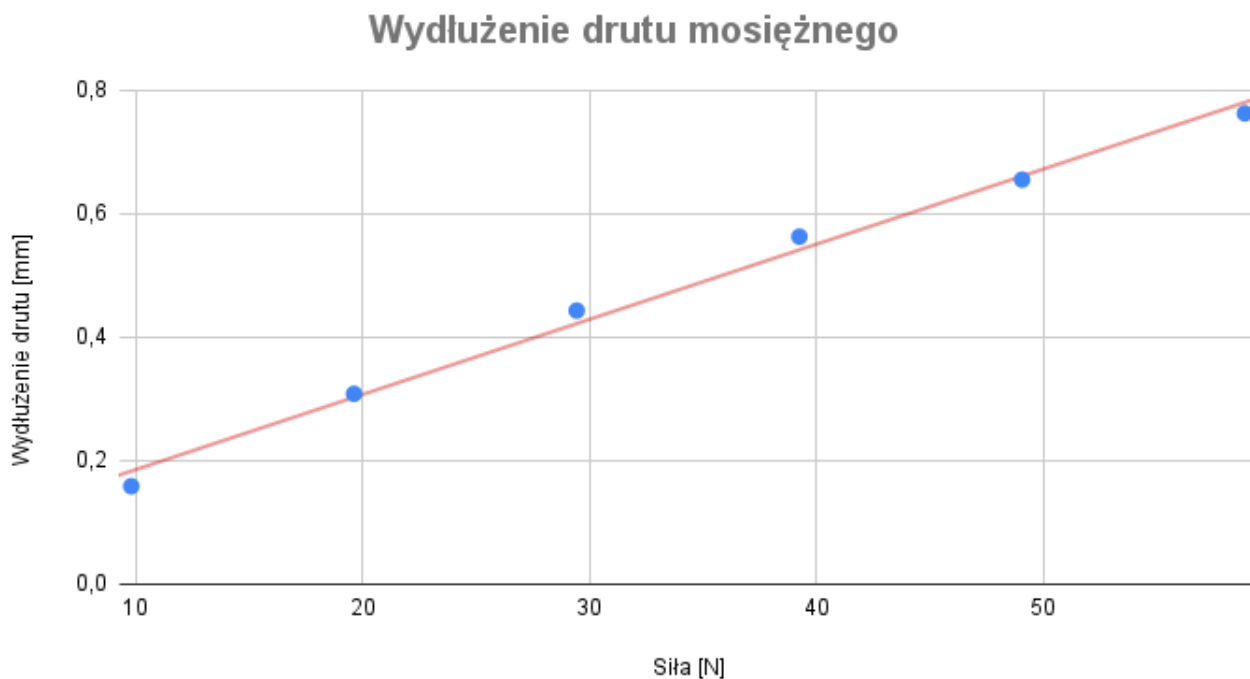
$$d_s = 0,77 \pm 0,006 \text{ mm}$$

$$d_m = 0,79 \pm 0,006 \text{ mm}$$

Następnie nanieśliśmy wyniki dokonanych pomiarów na wykresy, a następnie dopasowaliśmy prostą przy pomocy regresji liniowej metodą najmniejszych kwadratów w programie MS Excel.



Rysunek 2: Wykres odkształcenia drutu stalowego w zależności od obciążenia



Rysunek 3: Wykres odkształcenia drutu miedziowego w zależności od obciążenia

W celu obliczenia modułu Younga posłużymy się wzorem roboczym:

$$E = \frac{4 \cdot l}{\pi \cdot d^2 \cdot a}$$

5.1 Nachylenia prostych

Dla drutu stalowego:

$$a_s = 0,018 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{m}}{\text{Pa} \cdot \text{m}^2} \right]$$

$$u(a_s) = 0,001 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{m}}{\text{Pa} \cdot \text{m}^2} \right]$$

Dla drutu miedziowego:

$$a_m = 0,012 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{m}}{\text{Pa} \cdot \text{m}^2} \right]$$

$$u(a_m) = 0,00053 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{m}}{\text{Pa} \cdot \text{m}^2} \right]$$

5.2 Wyznaczenie modułu Younga

$$E_s = \frac{4l_s}{\pi d_s^2 a_s} = \frac{4 \cdot 1,08 \text{ m}}{\pi \cdot (0,77 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot 0,018 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{Pa} \cdot \text{m}^2}} = 128,85 \text{ GPa}$$
$$E_m = \frac{4l_m}{\pi d_m^2 a_m} = \frac{4 \cdot 1,08 \text{ m}}{\pi \cdot (0,79 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot 0,012 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{Pa} \cdot \text{m}^2}} = 183,61 \text{ GPa}$$

5.3 Wyznaczenie niepewności

Niepewność modułu Younga wyliczona z zasady przenoszenia niepewności względnej:

$$\frac{u(E)}{E} = \sqrt{\left[\frac{\partial E}{\partial l} \cdot u(l)\right]^2 + \left[\frac{\partial E}{\partial d} \cdot u(d)\right]^2 + \left[\frac{\partial E}{\partial a} \cdot u(a)\right]^2}$$
$$u(E_s) = E_s \cdot \sqrt{\left(\frac{u(l_s)}{l_s}\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{u(d_s)}{d_s}\right)^2 + \left(-\frac{u(a_s)}{a_s}\right)^2} \approx 8,31 \text{ GPa}$$
$$u(E_m) = E_m \cdot \sqrt{\left(\frac{u(l_m)}{l_m}\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{u(d_m)}{d_m}\right)^2 + \left(-\frac{u(a_m)}{a_m}\right)^2} \approx 6,54 \text{ GPa}$$

5.4 Wyniki końcowe

Po uwzględnieniu wyliczonej niepewności otrzymane wyniki wynoszą:

$$E_s = (128,85 \pm 8,31) \text{ GPa}$$

$$E_m = (183,61 \pm 6,54) \text{ GPa}$$

5.5 Ocena zgodności z wartościami tabelarycznymi

Stała Younga podana w tabeli w opisie ćwiczenia wynosi 210-220 GPa dla stali oraz 100 GPa dla mosiądzu.

Wyliczamy niepewność rozszerzoną jako podwojona niepewność:

$$U(E_s) = 2 \cdot u(E_s) = 16,62 \text{ GPa}$$

$$U(E_m) = 2 \cdot u(E_m) = 13,08 \text{ GPa}$$

Różnica pomiędzy wartościami wyznaczonymi a tabelarycznymi jest znaczna i nie mieści się w niepewności rozszerzonej.

6 Wnioski

Wyznaczone wartości modułu Younga dla obu materiałów różnią się znacznie od wartości oczekiwanej, może to wynikać z faktu, że druty użyte do ćwiczeń po wielokrotnym używaniu nie odzwierciedlają parametrów dla nowego drutu. Na wykresie możemy zaobserwować podobne zachowanie, gdyż dla małych obciążeń nie wydłużają się liniowo.