Rozwiązanie równania potencjału grawitacyjnego używając metody elementów skończonych

Tomasz Smyda

17 stycznia 2024

1 Problem

Celem tego ćwiczenia jest rozwiązanie poniższego równania

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 4\pi G\rho(x)$$

z podanymi założeniami:

$$u(0) = 5$$

$$u(3) = 4$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in (1,2] \\ 0 & x \in (2,3] \end{cases}$$

$$u : [0,3] \to \mathbb{R}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$$

2 Sformułowanie wariacyjne

Niech $U = \{f \in H^1(0,3) : f(0) = f(3) = 0\}$. Funkcja u spełnia warunki równania wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $v \in U$

$$\int_0^3 u''vdx = \int_0^3 4\pi G\rho vdx.$$

Całkując powyższe równanie przez części otrzymujemy

$$u'v\Big|_0^3 - \int_0^3 u'v'dx = 4\pi G \int_0^3 \rho vdx.$$

Ponieważ $v \in U$, $u'v\Big|_0^3 = 0$. Co więcej, $\rho(x) \neq 0 \iff x \in [1,2]$ oraz $\rho(x) = 1$ dla $x \in [1,2]$, zatem

$$-\int_0^3 u'v'dx = 4\pi G \int_1^2 vdx. \tag{1}$$

Zdefiniujmy funkcje $\bar{u}$ i w takie że

$$u = \bar{u} + w \tag{2}$$

oraz $w \in U$. Zatem $w(0) = w(3) = 0$, co implikuje $\bar{u}(0) = u(0) = 5$ oraz $\bar{u}(3) = u(3) = 4$. Zgodnie z powyższym, definiujemy

$$\bar{u}(x) = 5 - \frac{x}{3}. \tag{3}$$

Stosując (2) oraz (3) możemy zapisać (1) jako

$$\int_0^3 (\frac{1}{3} - w')v'dx = 4\pi G \int_1^2 vdx$$

co jest równoważne sformułowaniu wariacyjnemu zadanego równania

$$\int_0^3 w'v'dx = \frac{1}{3}\int_0^3 v'dx - 4\pi G \int_1^2 vdx. \tag{4}$$

3 Dyskretyzacja

Obieram $n+1$ punktów na przedziale $[0,3]$ wliczając w to punkty brzegowe. Punkty są w równych odległościach od siebie, zatem długość jednego przedziału jest równa $h = \frac{3}{n}$.

$$\forall i \in \{0, ..., n\} : x_i = h \cdot i$$

Definiuję funkcje bazowe jako:

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1 & \text{dla } x \in (x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{x}{h} + i + 1 & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

$$\forall i \in \{1, ..., n-1\}$$

Dysktretyzacja polega na wybraniu dyskretnej podprzestrzeni $V \subset U$ i rozwiązaniu w tej podprzestrzeni problemu. Niech $V = Lin\{e_1, ..., e_{n-1}\}$. Cały problem sprowadza się do rozwiązania równania (4) gdzie $v, w \in V$.

4 Postać macierzowa

Z faktu $w \in V$ wynika że $w = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$. Wprowadźmy oznaczenia $B(w,v) = \int_0^3 w'v'dx$ oraz $\bar{L}(v) = \frac{1}{3}\int_0^3 v'dx - 4\pi G \int_1^2 vdx$, przyjmując $v = e_j$ dla $j \in \{1, ..., n-1\}$ możemy zapisać równanie (4) w formie

$$B(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i, e_j) = \bar{L}(e_j) \qquad \forall j \in \{1, ..., n-1\}$$

co jest równoważne

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i B(e_i, e_j) = \bar{L}(e_j) \qquad \forall j \in \{1, ..., n-1\}$$

Powyższe równanie możemy zapisać w postaci macierzowej jako

$$\begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_2,e_1) & \cdots & B(e_{n-1},e_1) \\ B(e_1,e_2) & B(e_2,e_2) & \cdots & B(e_{n-1},e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1,e_{n-1}) & B(e_2,e_{n-1}) & \cdots & B(e_{n-1},e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{L}(e_1) \\ \bar{L}(e_2) \\ \vdots \\ \bar{L}(e_{n-1}) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

5 Uproszczenie głównej macierzy

Zauważmy, że $B(e_i, e_j) \neq 0 \iff |i-j| \leqslant 1$. Skoro

$$e_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ -\frac{1}{h} & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0 & x \in (-\infty, x_{i-1}) \cup (x_{i+1}, +\infty) \end{cases},$$

dostajemy stałe wartości:

$$a = B(e_i, e_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx = \frac{2}{h}$$

$$b = B(e_i, e_j) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{h^2} dx = -\frac{1}{h} \text{ dla } |i-j| = 1.$$

Zauważmy też, że

$$\int_0^3 e_i' dx = 0 \qquad \forall i \in \{1, ..., n-1\}$$

A co za tym idzie

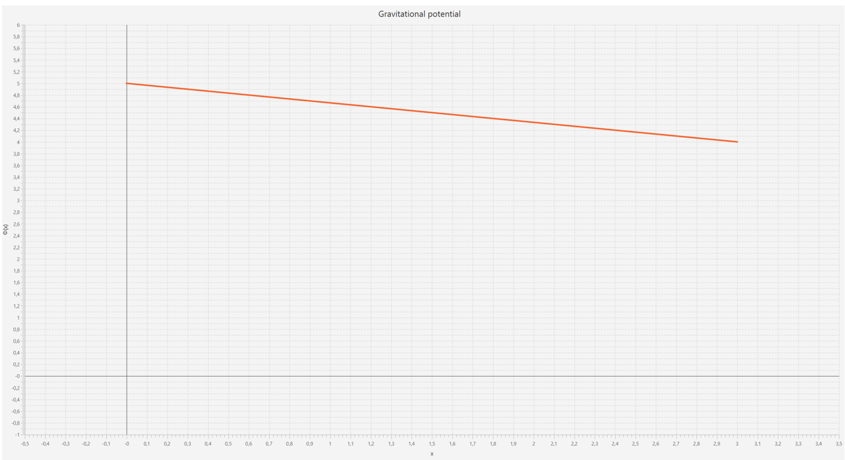
$$\bar{L}(e_i) = -4\pi G \int_1^2 v dx.$$

Teraz możemy zapisać macierz w uproszczonej formie:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & a & b & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & a & b & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b & a & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & b & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{L}(e_1) \\ \bar{L}(e_2) \\ \vdots \\ \bar{L}(e_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

6 Wykres rozwiązania

Wykres został wygenerowany przy użyciu programu napisanego przez autora z wykorzystaniem biblioteki JavaFX.



Rysunek 1: Wykres rozwiązania, wybrano 100 punktów podziału