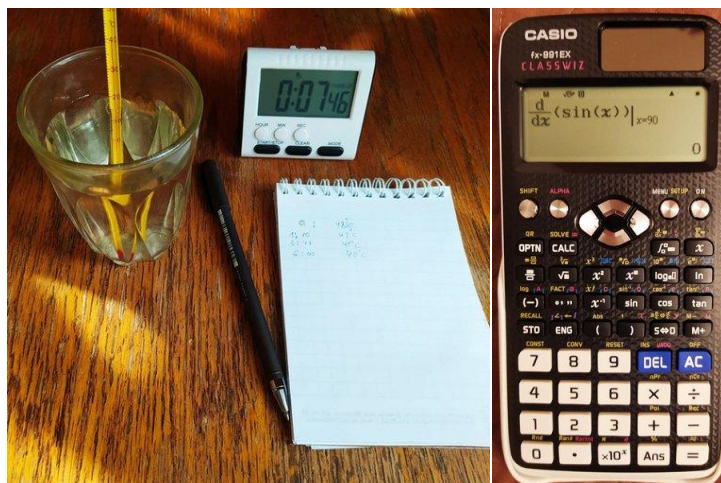


ЗАЧЕМ НАМ ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ,
КОГДА ОСТЫВАЕТ ВОДА В ЧАШКЕ
ТАЛИПОВ С.Н., г. Павлодар, 2021



Что мы имеем:

- 1) стакан с горячей водой (42,5 °C)
- 2) Градусник (водный, можно аквариумный)
- 3) Таймер (можно взять кухонный таймер)
- 4) Ручка, блокнот
- 5) Крутой калькулятор Casio fx-991EX (если нет, то возьмите эмулятор для ПК или телефона, а лучше купите!)
- 6) Программы построения графиков для ПК:
 - a. Advanced Grapher: <https://www.alentum.com/files/AGrapherSetup.exe>
 - b. Graph: <https://www.padowan.dk/bin/SetupGraph-4.4.2.exe>

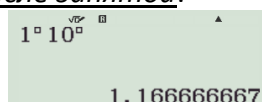
Что мы хотим:

- 1) Узнать, когда конкретно остынет вода в нашем стакане (до 24 °C)
- 2) Понять, зачем нам нужна производная и интеграл, когда мы ждем остывание

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Время	Температура, °C		Время, мин	dT (комнатная-текущая), °C
0	42,50		0,00	18,50
1:10	42,00		1,17	18,00
2:47	41,00		2,78	17,00
6:00	40,00		6,00	16,00
14:18	38,00		14,30	14,00
18:20	37,00		18,33	13,00
34:00	34,00	--->	34,00	10,00
41:15	33,00		41,25	9,00
48:00	32,00		48,00	8,00
58:20	30,90		58,33	6,90
1:02:30	30,50		62,50	6,50
Температура в комнате: 24,00 °C				

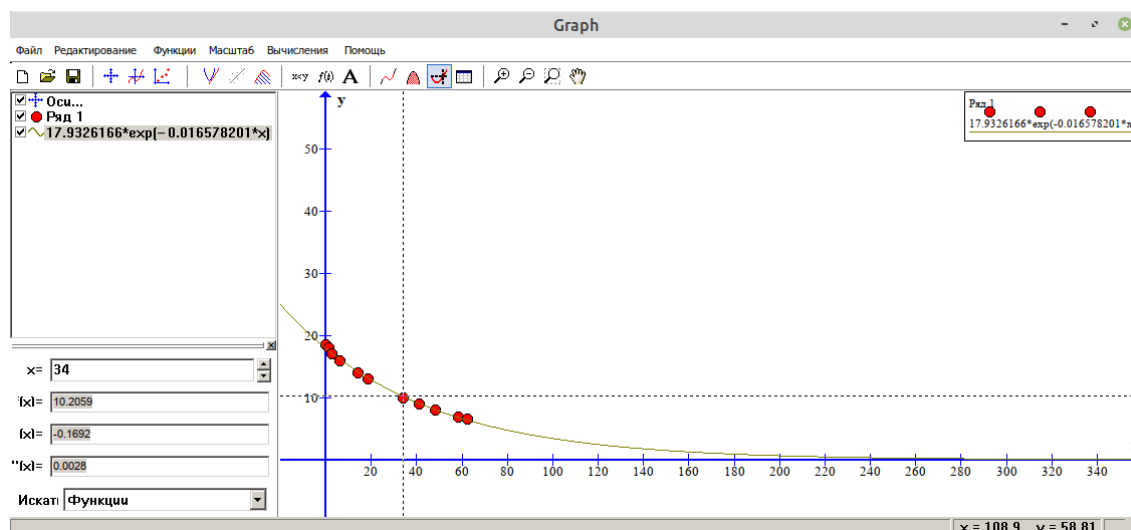
Перевод времени с обычного на минутное производим с помощью специальной функции калькулятора и округлим до 2 знаков после запятой:



2. НАЧАЛО АНАЛИЗА – ПОИСК ФОРМУЛЫ

Определяем с помощью программы Advanced Grapher или нашего калькулятора формулу остывания воды в нашем стакане (регрессионный анализ экспоненциальной зависимостью ¹): $f(x) = 17.9326166 * \exp(-0.016578201 * x)$, где x - время от начала остывания (минуты), $f(x)$ – разница между текущей температурой воды и комнатной температурой (°C).

С помощью программы Graph посмотрим график нашей функции:



Вычислим таблицу значений найденной функции с шагом 30 минут. Это можно сделать с помощью программы Graph или функции построения таблиц у калькулятора.

Из таблицы видно, что на 355 минуте (это 5 часов 55 минут, или 5,92 часа) вода практически стала комнатной:

x	f(x)
0	17,9326
30	10,9056
60	6,6322
90	4,0333
120	2,4528
150	1,4917
180	0,9071
210	0,5517
240	0,3355
270	0,204
300	0,1241
330	0,0755
355	0,0499

Сверим контрольные точки расчета и реальных показаний (учтем, что у градусника есть погрешности в крайних значениях):

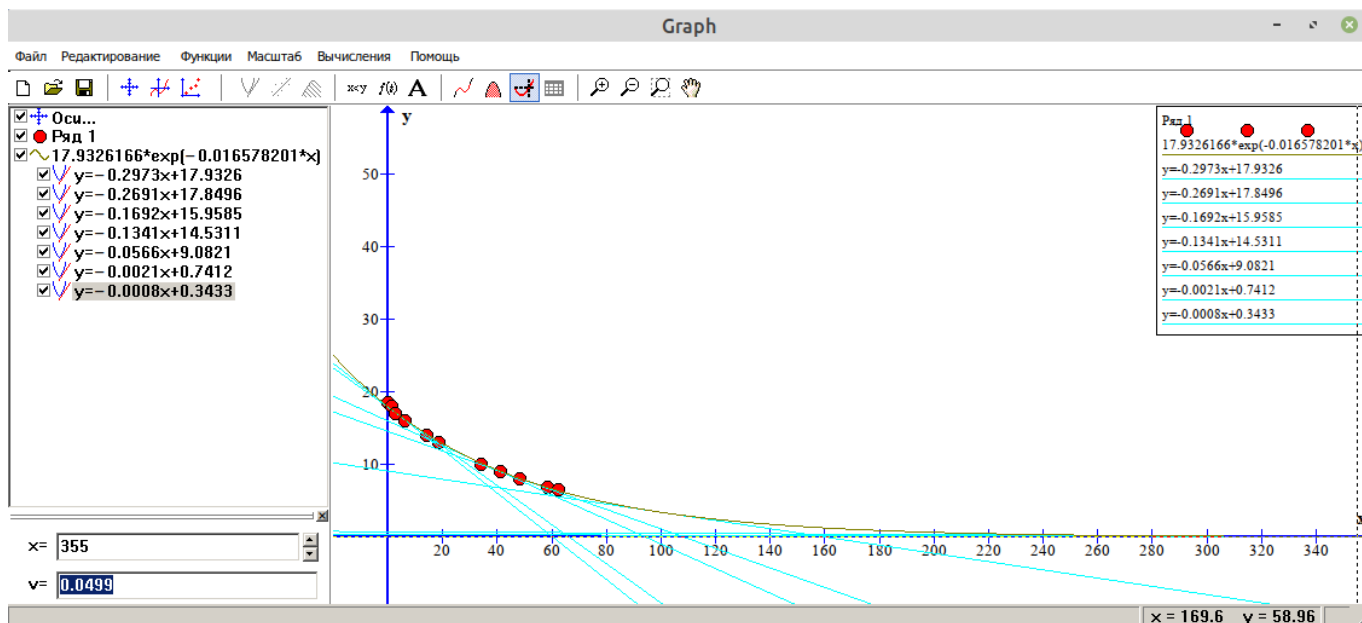
x, мин	f(x), °C	Наши реальные замеры, °C
0	17,9326	18,50
6	16,2347	16,00
34	10,2059	10,00
48	8,0919	8,00

Хм, Ньютон был прав, все сходится!

¹ В конце 17 века британский ученый Исаак Ньютон изучал охлаждение тел. Эксперименты показали, что скорость охлаждения примерно пропорциональна разнице температур между нагретым телом и окружающей средой. Этот факт описывается в виде экспоненциальной зависимости.

3. ДЕЛАЕМ КАСАТЕЛЬНЫЕ К ГРАФИКУ НАШЕЙ ФОРМУЛЫ

Делаем касательные к нашим точкам графика с помощью программы Graph и определяем значение $f(x)$ для точки x , для которой мы сделали касательную:



Найдем аппроксимированные значения производной нашей функции с помощью калькулятора

$$\frac{d}{dx} (17.9326166 \cdot e^{-0.016578201 \cdot x}) \Big|_{x=0} = -0.2972905223$$

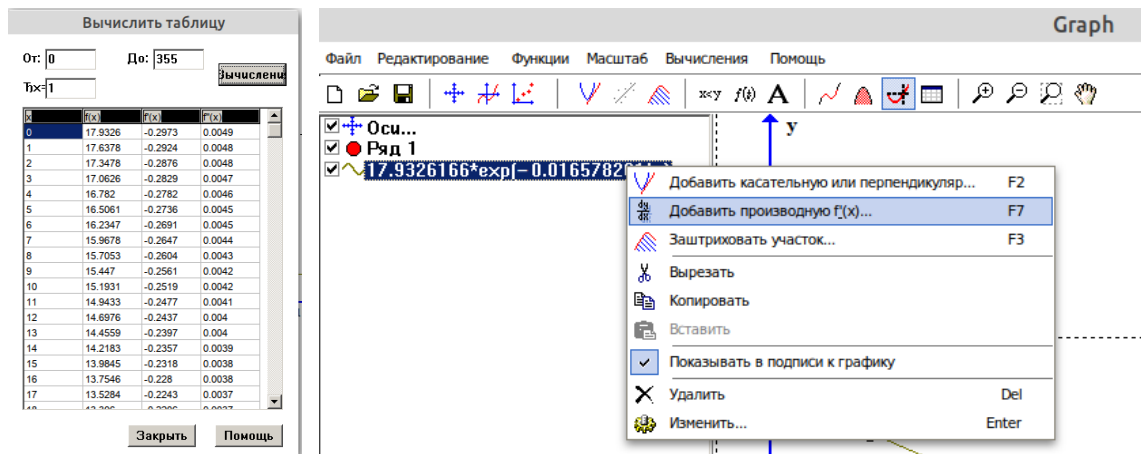
для конкретных x (единица измерения ГРАДУС!)

арктангенсы производной:

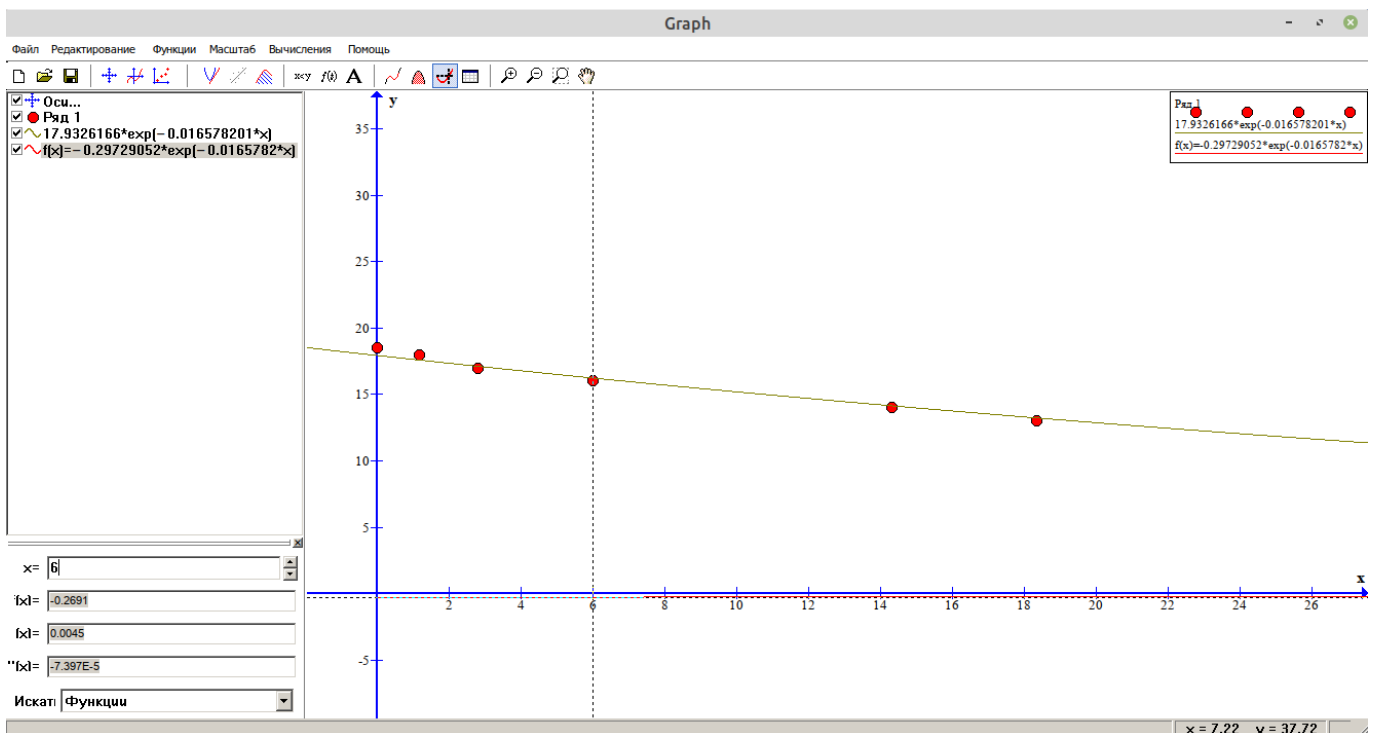
$$\arctan^{-1} \left(\frac{d}{dx} (17.93261 \cdot e^{-0.016578201 \cdot x}) \Big|_{x=0} \right)$$

x , мин	$f(x)$, °C	Найдем аппроксимированные значения производной функции $f(x)$: $f'(x)$, °C/мин ЭТО СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА МОМЕНТ x	Найдем арктангенсы аппроксимированного значения производной $\arctan(f'(x))$, градусы ЭТО УГОЛ КАСАТЕЛЬНОЙ НА МОМЕНТ x
0	17,9326	-0,2973	-16.6
6	16,2347	-0,2691	-15.1
34	10,2059	-0,1692	-9.6
48	8,0919	-0,1341	-7.7
100	3,4171	-0,0566	-3.2
300	0,1241	-0,0021	-0.1
355	0,0499	-0,0008	0

Найдем значения производной, ее график и формулу для нашей функции с помощью программы Graph:



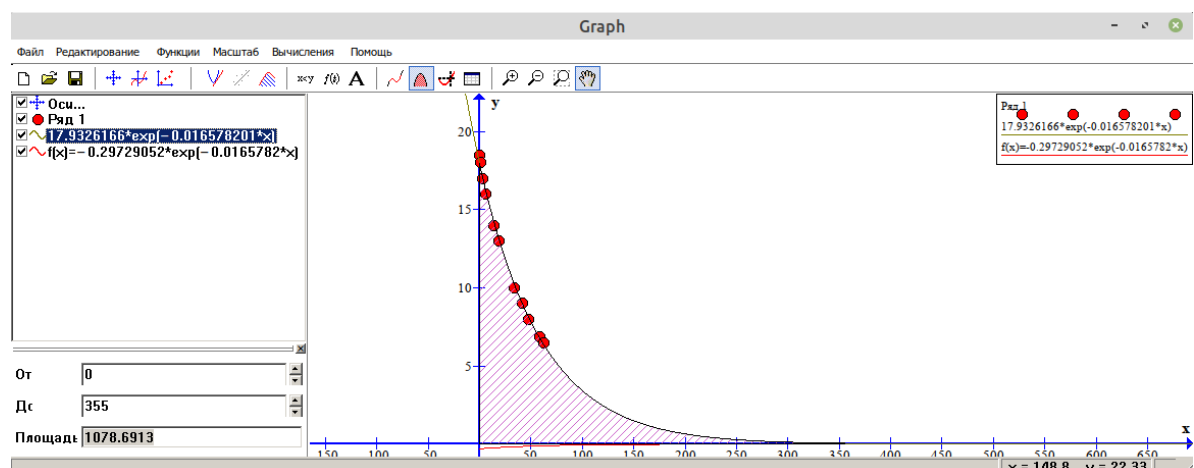
Производная нашей функции определилась такой: $f'(x) = -0.29729052 \cdot \exp(-0.0165782 \cdot x)$:



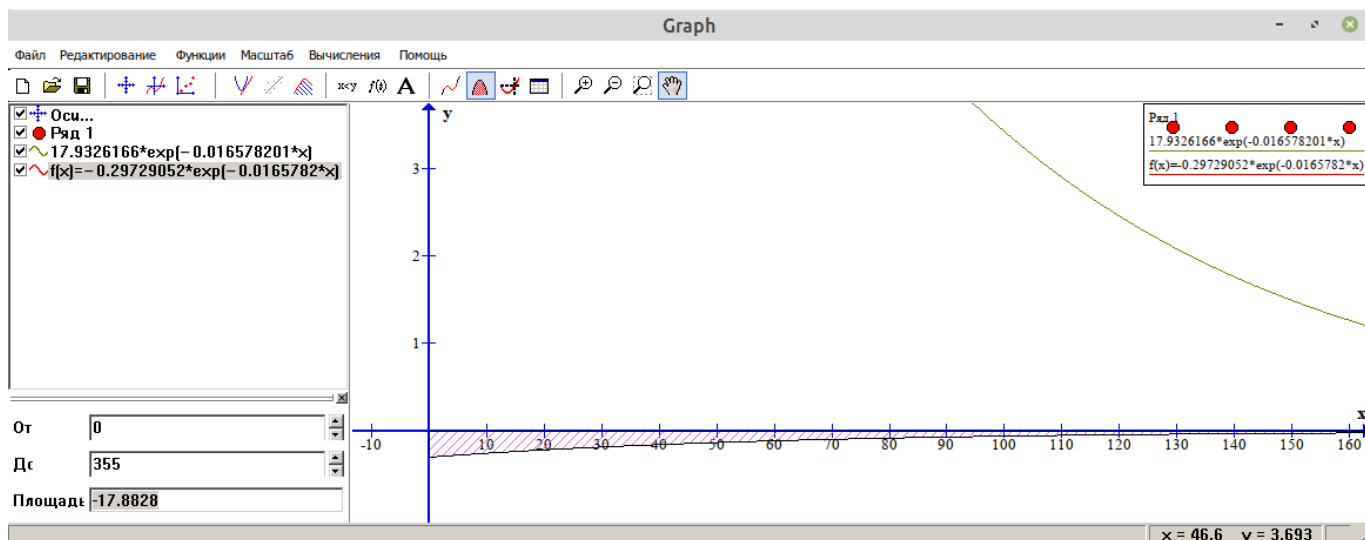
Вычисленные данные производных в программе Graph совпали со значениями, полученными на калькуляторе! Можете сами проверить! Отлично!

4. ЗАЧЕМ НАМ ИНТЕГРАЛ

Давайте посмотрим площадь нашей функции $f(x)$ с помощью программы Graph:



Ничего ценного... А теперь давайте посмотрим площадь нашей функции $f'(x)$, т.е. производной с помощью программы Graph:



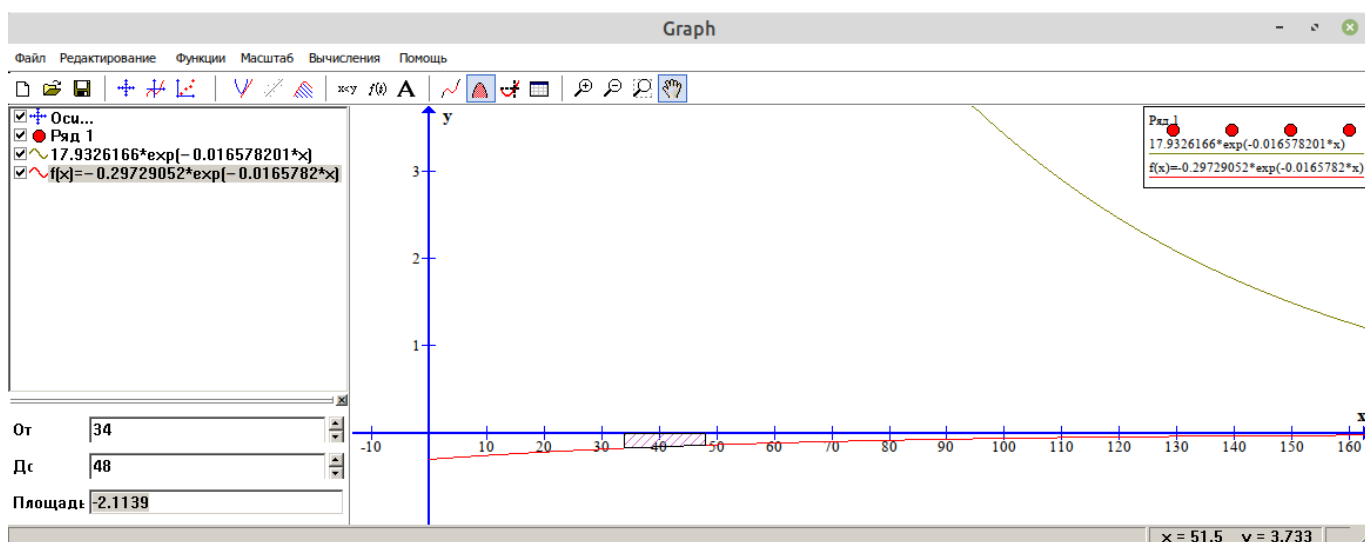
Что мы увидели? Что площадь фигуры с производной для x от 0 до 355 равна -17,9 °C, а это есть наше значение для начала отсчета! Таким образом, это означает, что за 355 минут наша вода остыла на 17,9 °C. Вот так!

НАХОЖДЕНИЕ ТАКОЙ ПЛОЩАДИ ЭТО И ЕСТЬ ЗНАЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛА:

$$\int_0^{355} -0.29729052 \times e^{-0.0165782 \times x} dx = -17.8827627$$

Найдем площадь от 34 °C до 48 °C. Что мы увидели? Что площадь фигуры с производной для x от 34 до 48 равна -2.1 °C, а это соответствует $10.2059 - 8.0919 = 2.144$. Таким образом, это означает, что с 34 по 48 минуту наша вода остыла на 2,1 °C.

х, мин	f(x), °C
34	10,2059
48	8,0919



$$\int_{34}^{48} -0.29729052 \times e^{-0.0165782 \times x} dx = -2.113930871$$

5. ИТОГИ

t, мин	f(t), °C	Производная $\frac{d}{dx}$ функции f(t): f'(t), °C/мин ЭТО СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА МОМЕНТ t	$\arctan(f'(t))$, градусы ЭТО УГОЛ КАСАТЕЛЬНОЙ НА МОМЕНТ t	Интеграл \int производной функции от 0 до времени t, результат в °C ЭТО РАЗНИЦА МЕЖДУ ТЕМПЕРАТУРОЙ И ЕЕ НАЧАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ
0	17,9326	-0,2973 (остывает 18 °C в час)	-16.6	0
6	16,2347	-0,2691 (остывает 16 °C в час)	-15.1	-1,7 (уже остыла на 2 °C с 18 °C)
34	10,2059	-0,1692 (остывает 10 °C в час)	-9.6	-7,7 (уже остыла на 8 °C с 18 °C)
48	8,0919	-0,1341 (остывает 8 °C в час)	-7.7	-9,8 (уже остыла на 10 °C с 18 °C)

Нахождение производной $\frac{d}{dx}$ основной функции f(t) для заданной температуры показывает, с какой скоростью изменяется температура в это время. Отрицательное значение означает уменьшение температуры.

Арктангенс значения производной $\frac{d}{dx}$ основной функции f(t) для заданной температуры показывает угол касательной для данной температуры. Отрицательное значение означает уменьшение температуры.

Нахождение интеграла \int_{34}^{48} производной функции f'(t) для заданного диапазона времени показывает, как изменилась температура за это время. Отрицательное значение означает уменьшение температуры.

6. А ЕСЛИ ЕСТЬ ТОЛЬКО КАЛЬКУЛЯТОР ?

С помощью калькулятора можно все рассчитать даже быстрее чем на компьютере, если знать хорошо его возможности и функции. Не верите? Приступим...

1) Вводим в ячейку C значение 24 (°C): **2 4 STO x^1**



2) Далее выбираем экспоненциальную регрессию



и вводим туда входные данные в удобном естественном виде, как было во время нашего эксперимента:

Время, минуты и секунды - x	Температура, °C - y
0 =	42.5 = SHIFT STO x^1 =
1 ''' 10 ''' =	42 = SHIFT STO x^1 =
2 ''' 47 ''' =	41 = SHIFT STO x^1 =
6 ''' 0 ''' =	40 = SHIFT STO x^1 =
14 ''' 18 ''' =	38 = SHIFT STO x^1 =
18 ''' 20 ''' =	37 = SHIFT STO x^1 =
34 ''' 0 ''' =	34 = SHIFT STO x^1 =
41 ''' 15 ''' =	33 = SHIFT STO x^1 =
48 ''' 0 ''' =	32 = SHIFT STO x^1 =
58 ''' 20 ''' =	30.9 = SHIFT STO x^1 =
60 + 2 ''' 30 ''' =	30.5 = SHIFT STO x^1 =

Получаем формулу регрессии:

$$y = a \cdot e^{(bx)}$$

$$a = 17.93268596$$

$$b = -0.016577964$$

$$r = -0.998905017$$




$$f(t) = 17.93268596 \cdot \exp(-0.016577964 \cdot t)$$

Формула немного отличается от той, что была ранее, потому что теперь наше время задано более точно в минутах без округлений, как это было в самом начале в первой таблице.

Сохраним теперь а и b в одноименные ячейки калькулятора:

Statistics $y = a \cdot e^{(bx)}$	1: Summation 2: Variable 3: Min/Max 4: Regression	1: a 3: r 5: \hat{y}	2: b 4: \hat{x}	a → A b → B	17.93268596 -0.016577964
--------------------------------------	--	------------------------------	----------------------	----------------	-----------------------------

2) Создаем таблицу значений найденной функции и таким образом узнаем, когда вода остынет:

												
9:Table		<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>13</td> <td>352 0.0524</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>353 0.0515</td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>354 0.0506</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>355 0.0498</td> </tr> </tbody> </table>	x	f(x)	13	352 0.0524	14	353 0.0515	15	354 0.0506	16	355 0.0498
x	f(x)											
13	352 0.0524											
14	353 0.0515											
15	354 0.0506											
16	355 0.0498											

Тут мы использовали наши ячейки A и B, и это круто!

3) Находим для желаемых точек значения производной с помощью $\frac{d}{dx}$ - т.е. узнаем скорость изменения температуры в нужные нам моменты времени. **КСТАТИ!!!** Можно делать также таблицы производных, вот так задавая функцию:

$$f(x) = \left. \frac{d}{dx} (A x e^{B x}) \right|_{x=x}$$

или даже так

$$f(x) = \left. \frac{d}{dx} (A e^{B x}) \right|_{x=x}$$

Хитрость в $x=x$ и получается цикл с разным x , как нам и надо!

А вот и результаты производных для разного времени:

x	f(x)
12	45 -0.14
13	46 -0.138
14	47 -0.136
15	48 -0.134

-0.1341498094

4) Мы не сможем найти нужные нам интегралы, пока не узнаем формулу производной. Методом регрессии она не подберется. Остается воспользоваться правилами нахождения производных (смотрим учебник с правилами нахождения производных) и самим выводим формулу:

$$f(t) = 17.93268596 \cdot \exp(-0.016577964 \cdot t)$$

$$f'(t) = (17.93268596 \cdot -0.016577964) \cdot \exp(-0.016577964 \cdot t) = -0.29728742226819 \cdot \exp(-0.016577964 \cdot t)$$

Производная получилась практически такая же, как и ранее через программу Graph! Математика рулит! Ура!

5) Находим нужные нам интегралы через \int - т.е. узнаем, насколько вода остыла за выбранный промежуток времени, например:

- насколько вода остыла с начала остывания до 355 минут:

$$\int_0^{355} A B e^{B x} dx$$

-17.88282666

Ответ: на 18°C. Сверим данные с таблицей исходных данных: 42.5°C - 24°C = 18.5°C. Небольшое расхождение связано с большей погрешностью использованного термометра в его крайних измеряемых значениях;

- насколько вода остыла с 6 минут от начала остывания до 48 минут:

$$\int_6^{48} A B e^{B x} dx$$

-8.142747751

Ответ: на 8°C. Сверим данные для указанного времени с таблицей исходных данных: 40°C - 32°C = 8°C. Тут все сходится! **На этом все! Всем добра!**