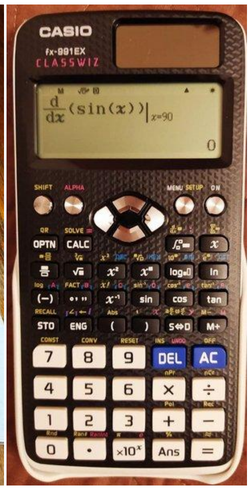
ЗАЧЕМ НАМ ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ, КОГДА ОСТЫВАЕТ ВОДА В ЧАШКЕ

ТАЛИПОВ С.Н., г. Павлодар, 2021



__Что мы имеем:__

1) Стакан с горячей водой (42,5 °C)
2) Градусник (водный, можно аквариумный)
3) Таймер (можно взять кухонный таймер)
4) Ручка, блокнот
5) Крутой калькулятор Casio fx-991EX (если нет, то возьмите эмулятор для ПК или телефона, а лучше купите!)
6) Программы построения графиков для ПК:
   a. Advanced Grapher: https://www.alentum.com/files/AGrapherSetup.exe
   b. Graph: https://www.padowan.dk/bin/SetupGraph-4.4.2.exe

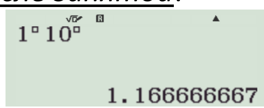
__Что мы хотим:__

1) Узнать, когда конкретно остынет вода в нашем стакане (до 24 °C)
2) Понять, зачем нам нужна производная и интеграл, когда мы ждем остывание

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Время	**Температура, °C**		**Время, мин**	**dT (комнатная-текущая), °C**
0	42,50		0,00	18,50
1:10	42,00		1,17	18,00
2:47	41,00		2,78	17,00
6:00	40,00		6,00	16,00
14:18	38,00		14,30	14,00
18:20	37,00		18,33	13,00
34:00	34,00	--->	34,00	10,00
41:15	33,00		41,25	9,00
48:00	32,00		48,00	8,00
58:20	30,90		58,33	6,90
1:02:30	30,50		62,50	6,50
Температура в комнате: 24,00 °C				

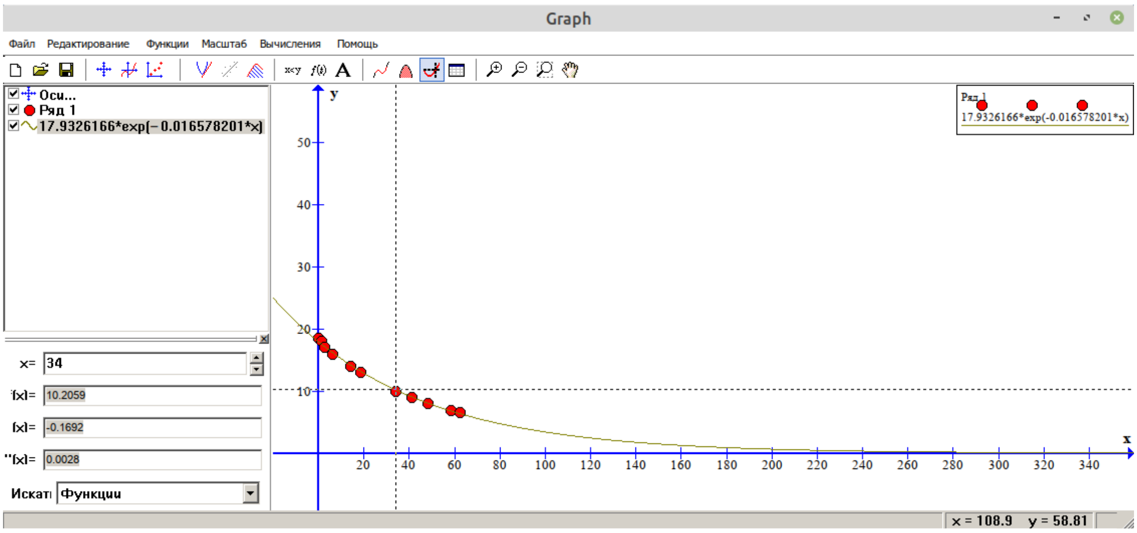
Перевод времени с обычного на минутное производим с помощью специальной функции калькулятора *__и округлим до 2 знаков после запятой__*:



2. НАЧАЛО АНАЛИЗА – ПОИСК ФОРМУЛЫ

Определяем с помощью программы Advanced Grapher или нашего калькулятора формулу остывания воды в нашем стакане (регрессионный анализ экспоненциальной зависимостью [1]): f(x)= 17.9326166*exp(-0.016578201*x) , где x- время от начала остывания (минуты), f(x) – разница между текущей температурой воды и комнатной температурой (°C).

С помощью программы Graph посмотрим график нашей функции:



Вычислим таблицу значений найденной функции с шагом 30 минут. Это можно сделать с помощью программы Graph или функции построения таблиц у калькулятора.

Из таблицы видно, что на 355 минуте (это 5 часов 55 минут, или 5,92 часа) вода практически стала комнатной:

x	f(x)
0	17,9326
30	10,9056
60	6,6322
90	4,0333
120	2,4528
150	1,4917
180	0,9071
210	0,5517
240	0,3355
270	0,204
300	0,1241
330	0,0755
355	0,0499

Сверим контрольные точки расчета и реальных показаний (учтем, что у градусника есть погрешности в крайних значениях):

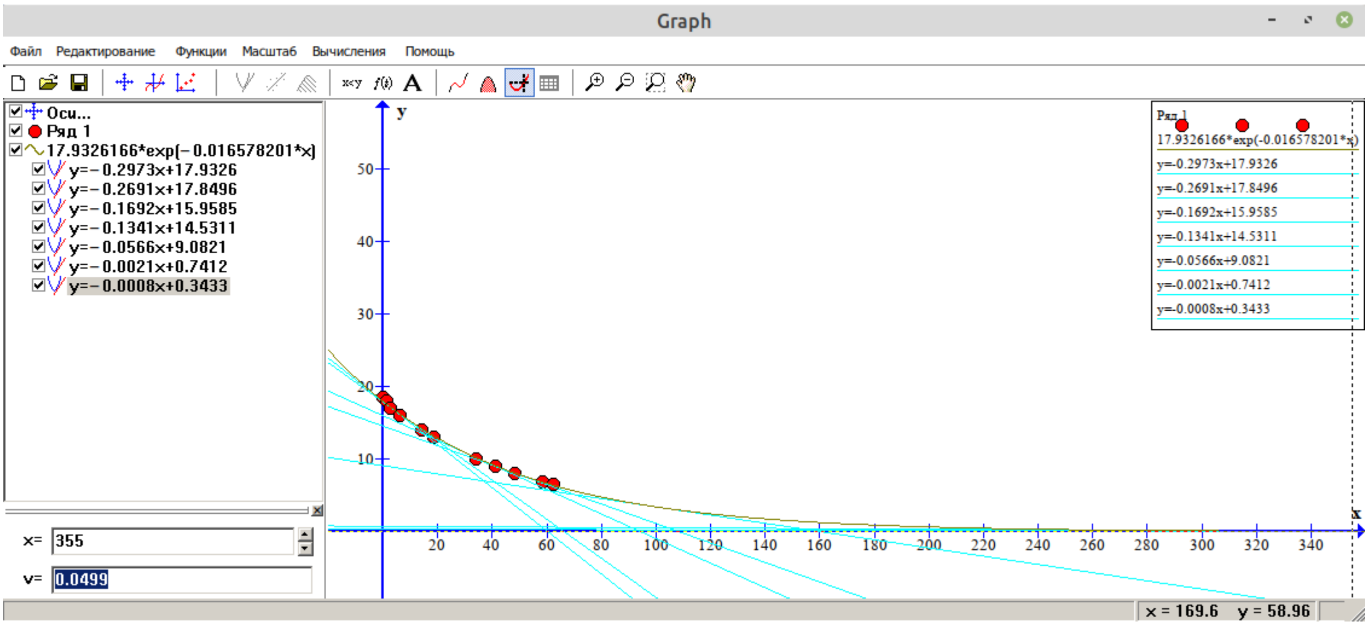
x, мин	f(x), °C	Наши реальные замеры, °C
0	17,9326	18,50
6	16,2347	16,00
34	10,2059	10,00
48	8,0919	8,00

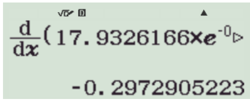
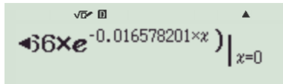
Хм, Ньютон был прав, все сходится!

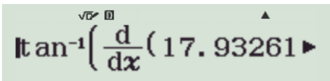
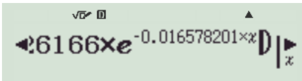
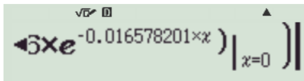
[1] В конце 17 века британский ученый Исаак Ньютон изучал охлаждение тел. Эксперименты показали, что скорость охлаждения примерно пропорциональна разнице температур между нагретым телом и окружающей средой. Этот факт описывается в виде экспоненциальной зависимости.

3. ДЕЛАЕМ КАСАТЕЛЬНЫЕ К ГРАФИКУ НАШЕЙ ФОРМУЛЫ

Делаем касательные к нашим точкам графика с помощью программы Graph и определяем значение f(x) для точки x, для которой мы сделали касательную:

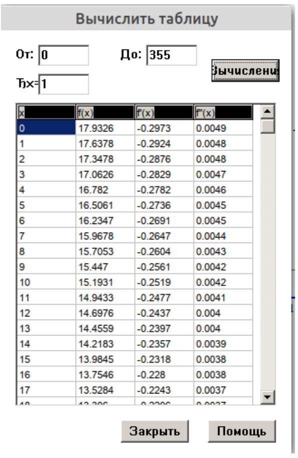


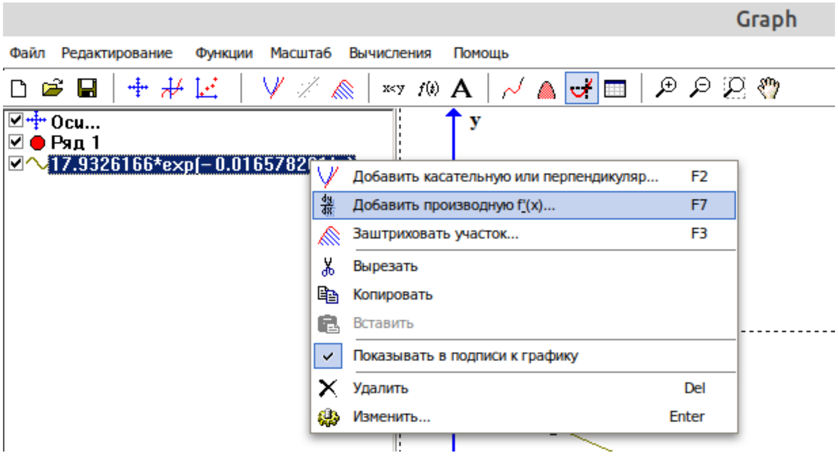
Найдем аппроксимированные значения производной нашей функции с помощью калькулятора для конкретных x (<u>*единица измерения ГРАДУС!*</u>)  , а также арктангенсы производной:

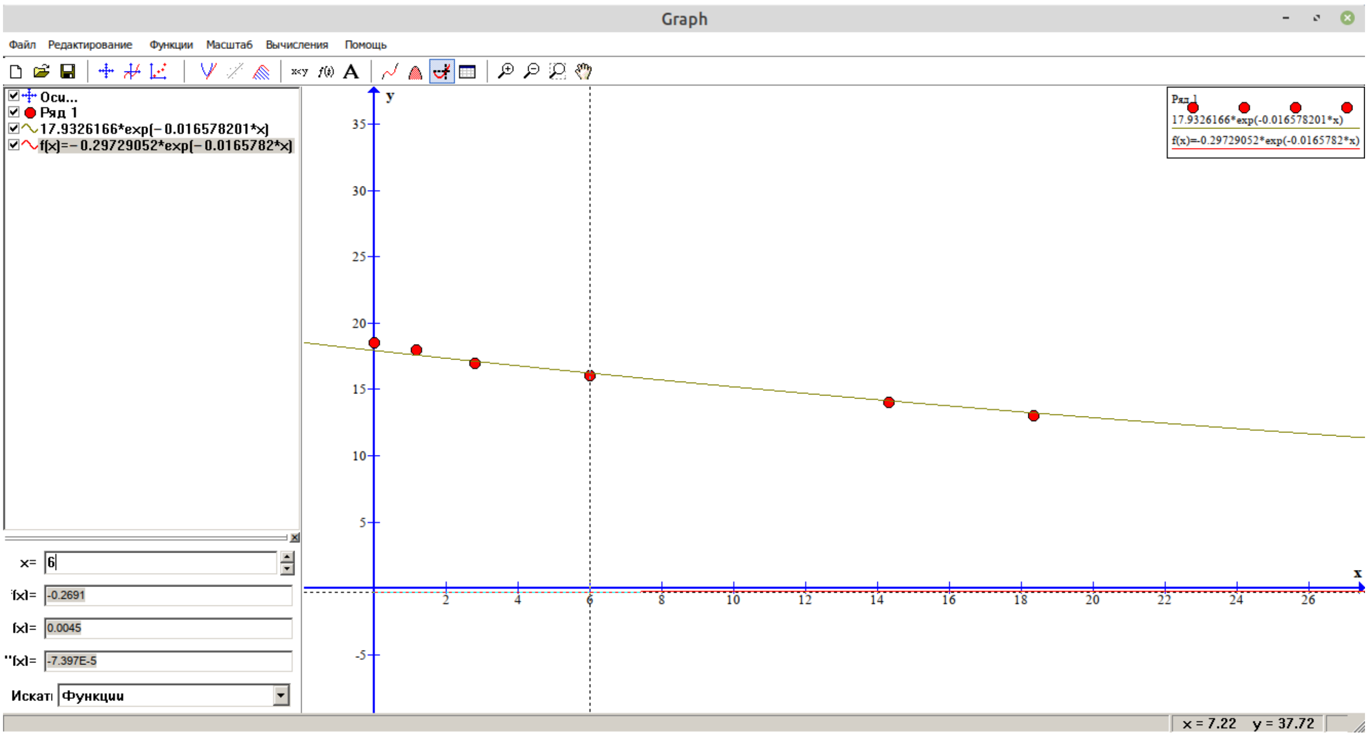
x, мин	f(x), °C	Найдем аппроксимированные значения производной функции f(x): f'(x), °C/мин **ЭТО СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА МОМЕНТ x**	Найдем арктангенсы аппроксимированного значения производной arctan(f'(x)), градусы **ЭТО УГОЛ КАСАТЕЛЬНОЙ НА МОМЕНТ x**
0	17,9326	-0,2973	-16.6
6	16,2347	-0,2691	-15.1
34	10,2059	-0,1692	-9.6
48	8,0919	-0,1341	-7.7
100	3,4171	-0,0566	-3.2
300	0,1241	-0,0021	-0.1
355	0,0499	-0,0008	0

Найдем значения производной, ее график и формулу для нашей функции с помощью программы Graph:





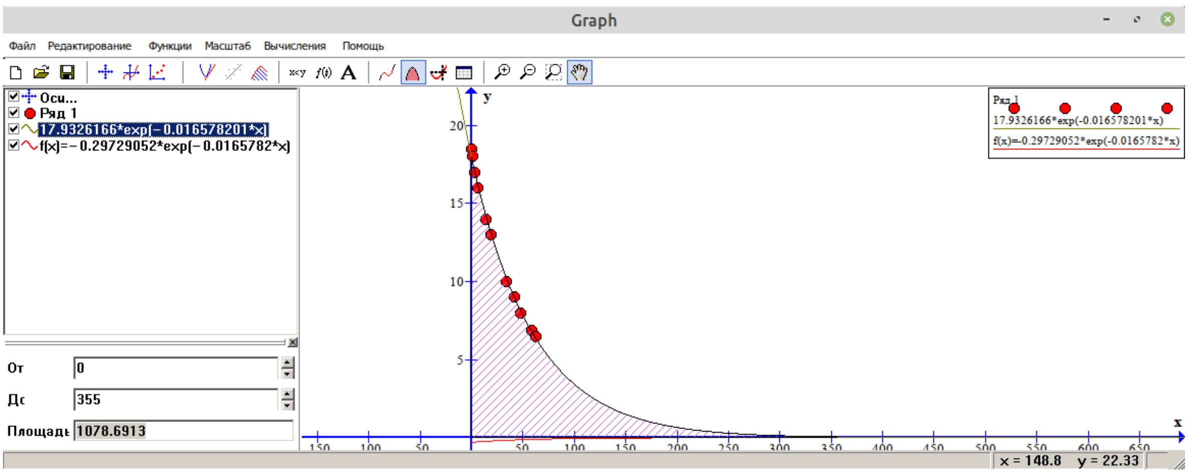
Производная нашей функции определилась такой: f'(x)=-0.29729052*exp(-0.0165782*x) :



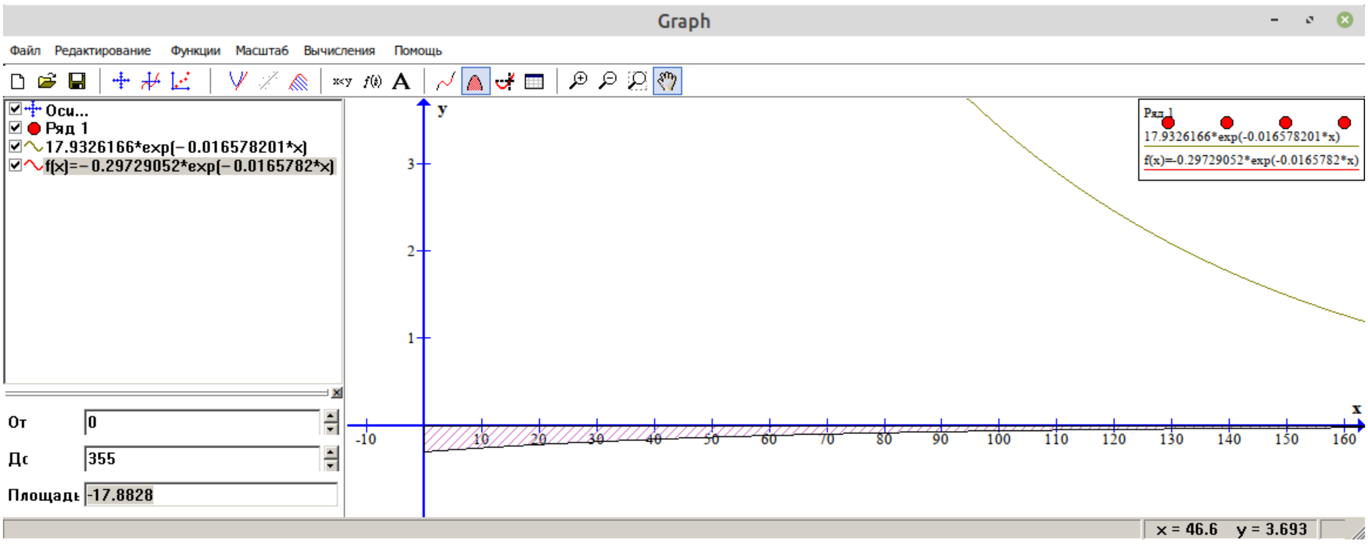
Вычисленные данные производных в программе Graph совпали со значениями, полученными на калькуляторе! Можете сами проверить! Отлично!

4. ЗАЧЕМ НАМ ИНТЕГРАЛ

Давайте посмотрим площадь нашей функции f(x) с помощью программы Graph:

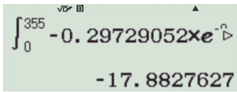


Ничего ценного… А теперь давайте посмотрим площадь нашей функции f'(x), т.е. производной с помощью программы Graph:



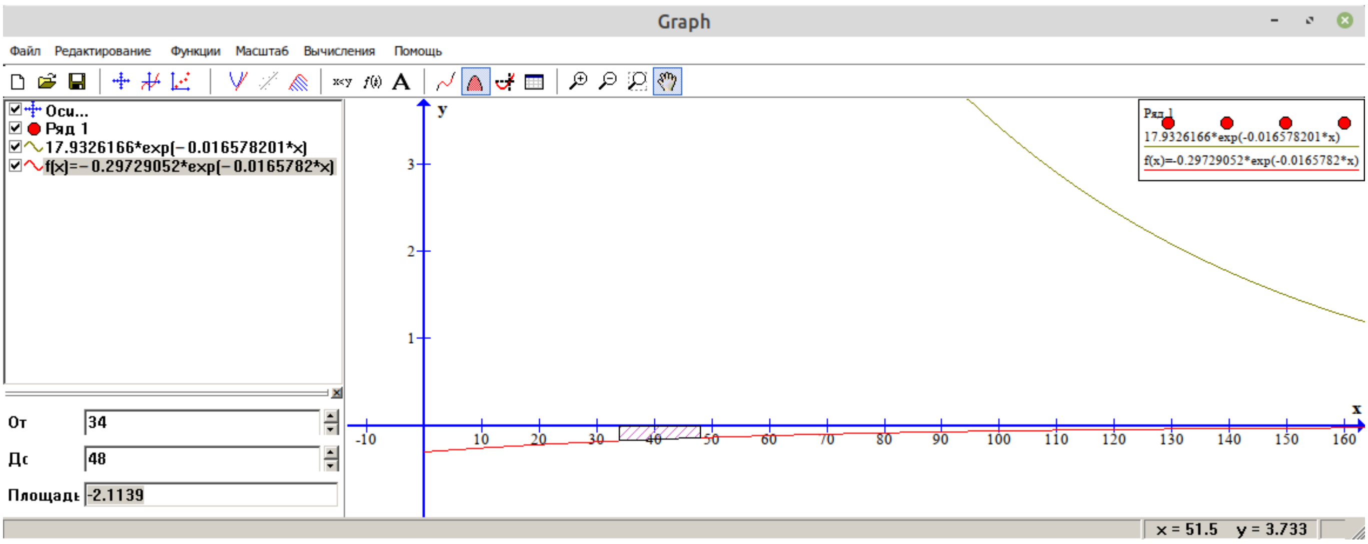
Что мы увидели? Что площадь фигуры с производной для x от 0 до 355 равна -17,9 °C, а это есть наше значение для начала отсчета! Таким образом, это означает, что за 355 минут наша вода остыла на 17,9 °C. Вот такс!

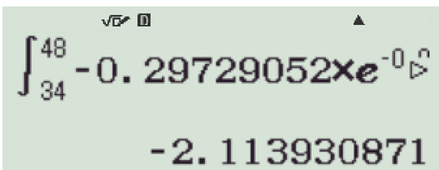
НАХОЖДЕНИЕ ТАКОЙ ПЛОЩАДИ ЭТО И ЕСТЬ ЗНАЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛА:



Найдем площадь от 34 °C до 48 °C. Что мы увидели? Что площадь фигуры с производной для x от 34 до 48 равна -2.1 °C, а это соответствует ***10.2059-8,0919=2.144***. Таким образом, это означает, что с 34 по 48 минуту наша вода остыла на 2,1 °C.

x, мин	f(x), °C
34	10,2059
48	8,0919





5. ИТОГИ

t, мин	f(t), °C	Производная $\frac{d}{dx}$ функции f(t): f'(t), °C/мин ***ЭТО СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА МОМЕНТ t***	arctan(f'(t)), градусы ***ЭТО УГОЛ КАСАТЕЛЬНОЙ НА МОМЕНТ t***	Интеграл $\int$ производной функции от 0 до времени t, результат в °C ***ЭТО РАЗНИЦА МЕЖДУ ТЕМПЕРАТУРОЙ И ЕЕ НАЧАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ***
0	17,9326	-0,2973 (остывает 18 °C в час)	-16.6	0
6	16,2347	-0,2691 (остывает 16 °C в час)	-15.1	-1,7 (уже остыла на 2 °C с 18 °C)
34	10,2059	-0,1692 (остывает 10 °C в час)	-9.6	-7,7 (уже остыла на 8 °C с 18 °C)
48	8,0919	-0,1341 (остывает 8 °C в час)	-7.7	-9,8 (уже остыла на 10 °C с 18 °C)

Нахождение производной $\frac{d}{dx}$ основной функции f(t) для заданной температуры показывает, с какой скоростью изменяется температура в это время. Отрицательное значение означает уменьшение температуры.

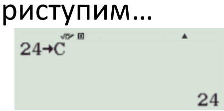
Арктангенс значения производной $\frac{d}{dx}$ основной функции f(t) для заданной температуры показывает угол касательной для данной температуры. Отрицательное значение означает уменьшение температуры.

Нахождение интеграла $\int_{34}^{48}$ производной функции f'(t) для заданного диапазона времени показывает, как изменилась температура за это время. Отрицательное значение означает уменьшение температуры.

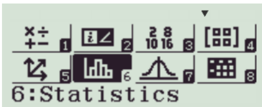
6. А ЕСЛИ ЕСТЬ ТОЛЬКО КАЛЬКУЛЯТОР ?

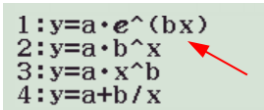
С помощью калькулятора можно все рассчитать даже быстрее чем на компьютере, если знать хорошо его возможности и функции. Не верите? Приступим…

1) Вводим в ячейку C значение 24: [2] [4] [STO] [x^{-1}]



2) Далее выбираем экспоненциальную регрессию

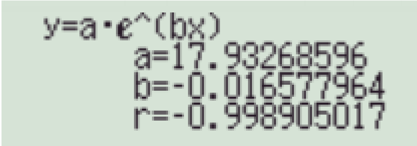




и вводим туда входные данные в удобном естественном виде, как было во время нашего эксперимента:

Время - x	Темп., °C - y
0 [=]	42.5 [−] [SHIFT] [STO] [x^{-1}] [=]
1 [°'''] 10 [°'''] [=]	42 [−] [SHIFT] [STO] [x^{-1}] [=]
2 [°'''] 47 [°'''] [=]	41 [−] [SHIFT] [STO] [x^{-1}] [=]
6 [°'''] 0 [°'''] [=]	40 [−] [SHIFT] [STO] [x^{-1}] [=]
14 [°'''] 18 [°'''] [=]	38 [−] [SHIFT] [STO] [x^{-1}] [=]
18 [°'''] 20 [°'''] [=]	37 [−] [SHIFT] [STO] [x^{-1}] [=]
34 [°'''] 0 [°'''] [=]	34 [−] [SHIFT] [STO] [x^{-1}] [=]
41 [°'''] 15 [°'''] [=]	33 [−] [SHIFT] [STO] [x^{-1}] [=]
48 [°'''] 0 [°'''] [=]	32 [−] [SHIFT] [STO] [x^{-1}] [=]
58 [°'''] 20 [°'''] [=]	30.9 [−] [SHIFT] [STO] [x^{-1}] [=]
60 [+] 2 [°'''] 30 [°'''] [=]	30.5 [−] [SHIFT] [STO] [x^{-1}] [=]

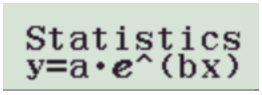
Получаем формулу регрессии:

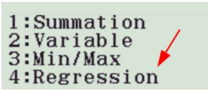


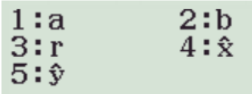
f(t)= 17.93268596*exp(-0.016577964*t)

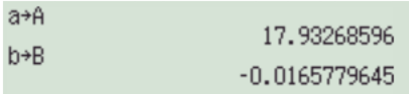
Формула немного отличается от той, что была ранее, потому что теперь наше время задано *<u>более точно</u>* в минутах без округлений, как это было в самом начале в первой таблице.

Сохраним теперь a и b в одноименные ячейки калькулятора:

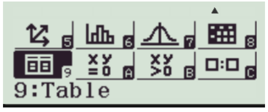


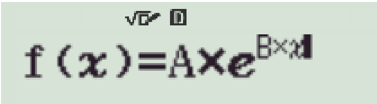


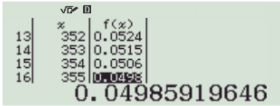




2) Создаем таблицу значений найденной функции и таким образом узнаем, когда вода остынет:

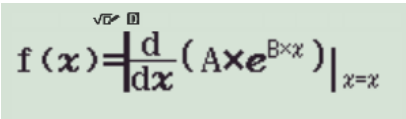


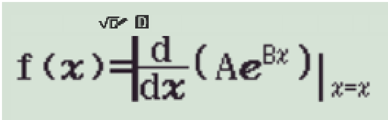




Тут мы использовали наши ячейки А и В, и это круто!

3) Находим для желаемых точек значения производной с помощью $\frac{d}{dx}$ - т.е. узнаем скорость изменения температуры в нужные нам моменты времени. КСТАТИ!!! Можно делать также таблицы производных, вот так задавая функцию:

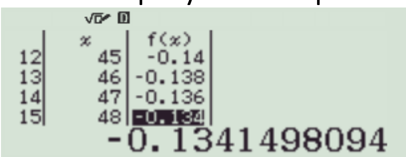


или даже так


.

Хитрость в x=x и получается цикл с разным x, как нам и надо!

А вот и результаты производных для разного времени:



4) Мы не сможем найти нужные нам интегралы, пока не узнаем формулу производной. Методом регрессии она не подберется. Остается воспользоваться правилами нахождения производных (смотрим учебник с правилами нахождения производных) и самим выводим формулу:

f(t)= 17.93268596*exp(-0.016577964*t)
f'(t)= (17.93268596*-0.016577964)*exp(-0.016577964*t) = -0.29728742226819*exp(-0.016577964*t)

Производная получилась практически такая же, как и ранее через программу Graph! Математика рулит! Ура!

5) Находим нужные нам интегралы через $\int$ - т.е. узнаем, насколько вода остыла за выбранный промежуток времени.

На этом все! Всем добра!