1. Prüfungsteil: Aufgaben

Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4 % der hergestellten Teile fehlerhaft. Die **Zufallsvariable X: „Anzahl fehlerhafter Teile"** unter zufällig ausgewählten Teilen kann als **binomialverteilt** angenommen werden.

800 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt.

a) Bestimme für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Genau 32 der Teile sind fehlerhaft."
B: „Höchstens 20 der Teile sind fehlerhaft."
C: „Mindestens 25 Teile sind fehlerhaft."

b) Bestimme die zu erwartende Anzahl fehlerhafter Teile und die Standardabweichung von X (zur Kontrolle: $\sigma \approx 5{,}543$)

c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der fehlerhaften Teile um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

d) Skizziere das Diagramm der Binomialverteilung (keine genaue Zeichnung) und erläutere wesentliche Aspekte.

e) Pro Kunststoffteil möchte das Unternehmen einen durchschnittlichen Gewinn von 1 Euro machen. Dabei belaufen sich die Herstellungskosten auf 0,50 Euro pro Kunststoffteil. Der Verkaufspreis v wird vom Unternehmen festgesetzt, wobei fehlerhafte Teile nicht verkauft werden.

Begründe, dass mit Hilfe der Gleichung $0{,}04 \cdot (-0{,}5) + 0{,}96 \cdot (v - 0{,}5) = 1$ der Verkaufspreis bestimmt werden kann und berechne den Verkaufspreis v.

f) Erläutere folgenden Zusammenhang: $B_{n,p}(k) = B_{n;1-p}(n-k)$

Bereite Dich auf eine Präsentation Deiner Ergebnisse mit Hilfe der Dokumentenkamera vor.

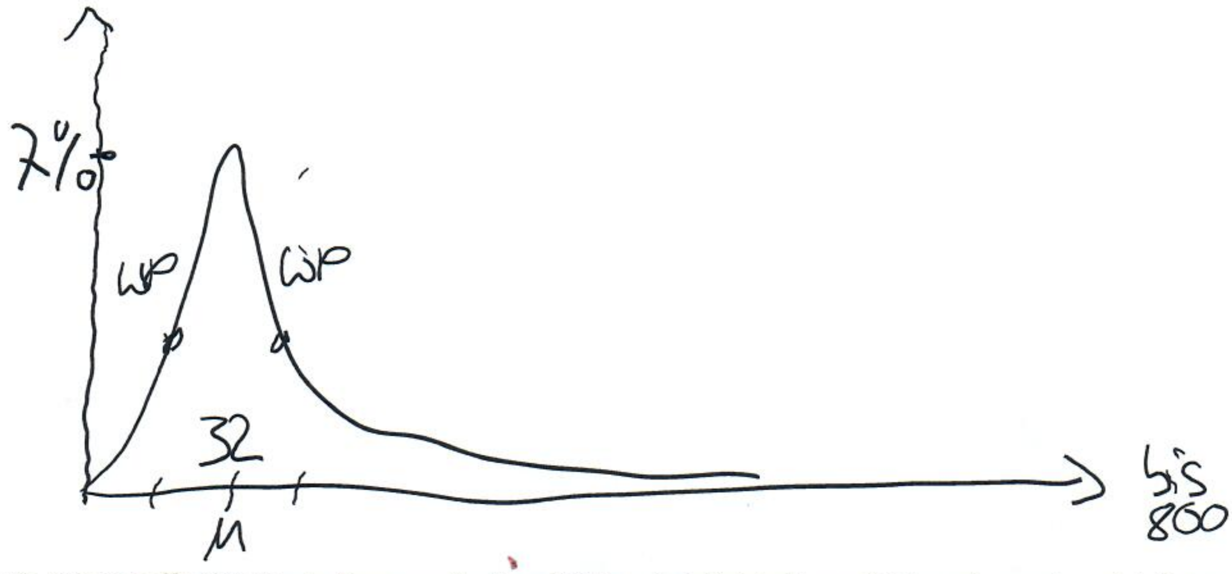
1. Prüfungsteil: Lösungsskizze

a) $P(X = 32) = B_{800;0,04}(30) \approx 0{,}0718$
$P(X \leq 20) = F_{800;0,04}(20) \approx 0{,}0144$
$P(X \geq 25) = 1 - F_{800;0,04}(24) \approx 1 - 0{,}0837 = 0{,}9163$

b) Der Erwartungswert beträgt $\mu = 800 \cdot 0{,}04 = 32$. Es sind also 32 fehlerhafte Teile zu erwarten.
Für die Standardabweichung von X gilt $\sigma = 800 \cdot 0{,}04 \cdot (1 - 0{,}04) \approx 5{,}543$.

c) Das zu betrachtende Intervall ist $[32 - 5{,}543; 32 + 5{,}543] = [26{,}457; 37{,}543] \approx [27; 37]$
$F_{800;0,04}(37) - F_{800;0,04}(26) \approx 0{,}8398 - 0{,}1604 = 0{,}6694$

d)



e) Ist ein Kunststoffteil fehlerhaft, was mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,04 vorkommt, entstehen Kosten in Höhe von 0,50 Euro und es kann nicht verkauft werden. Ist es nicht fehlerhaft, was mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,96 vorkommt, macht das Unternehmen einen Gewinn von (v - 0,50) Euro. Da der durchschnittliche Gewinn 1 Euro pro Kunststoffteil betragen soll, kann mit der angegebenen Gleichung der Verkaufspreis bestimmt werden. Es ergibt sich: v = 1,5625

f) Im Hinblick auf den Sachkontext kann man z.B. notieren:
Auf der linken Seite steht die Wahrscheinlichkeit, bei einer Fehlerquote von 4% unter 800 Teilen 20 fehlerhafte Teile zu haben. Auf der rechten Seite steht die Wahrscheinlichkeit, bei einer Trefferquote von 96% unter 800 Teilen 780 fehlerfreie Teile zu erwischen.
Diese beiden Wahrscheinlichkeiten sind gleich.
Man kann alternativ auch über den Binomialkoeffizienten argumentieren, denn es gilt:
$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{n-k} (1-p)^{n-k} (1-(1-p))^k$