Binomialverteilung/Bernoulli-Experiment

Bedingung:

- Es gibt genau 2 mögliche Ergebnisse (Treffer/Niete)
- Die Wahrscheinlichkeiten sind unabhängig voneinander
- p die Wahrscheinlichkeit bleibt Konstant

Bernoulli-Formel

Ziel: Die Wahrscheinlichkeit eines Bernoulli-Experiments berechnen

- n = Anzahl der Möglichkeiten
- k = Anzahl der gewünschten Möglichkeiten
- p = Wahrscheinlichkeit der gewünschten Möglichkeiten
- X = Name des gewünschten Ergebnisses

$$P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

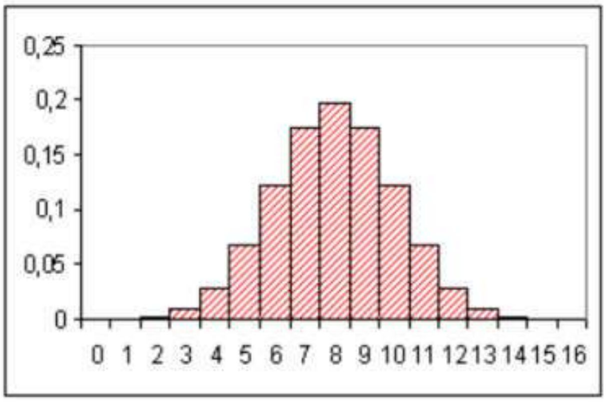
Erwartungswert / Standardabweichung

Ziel: μ und σ eines Bernoulli-Experimentes einfach berechnen

- Berechnung: $\mu = np$
  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Histogramme:

Ziel: Wahrscheinlichkeitsverteilung grafisch darstellen



Der höchste Balken eines Histogramms ist immer der Erwartungswert μ der Binomialverteilung

Parameter bestimmen:

Manchmal fehlen gewisse Parameter bei einer Binomialverteilung, die man berechnen muss.

Berechnung an Beispielen:

Ein Flugzeug hat 194 Plätze. Die Fluggesellschaft verkauft aber 200 Tickets, weil laut ihrer Statistik durchschnittlich nur 95% aller Gäste, die gebucht haben, zum Flug erscheinen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss mehr als ein Fluggast entschädigt werden?

- **Wenn mindestens 196 Fluggäste erscheinen, muss mehr als ein Fluggast entschädigt werden: $P(X \geq 196) = 1 - P(X \leq 195) = 0{,}0264$**

Parameter n bestimmen: In einem Land sind 4% der männlichen Bevölkerung farbenblind. Wie groß muss eine Gruppe von Männern in dem Land mindestens sein, damit mit mindestens 90 Prozent Wahrscheinlichkeit fünf aus der Gruppe farbenblind sind?

- **Es muss gelten: $P(F \geq 5) \geq 0{,}9$ bzw. $P(F \leq 4) \leq 0{,}1$**

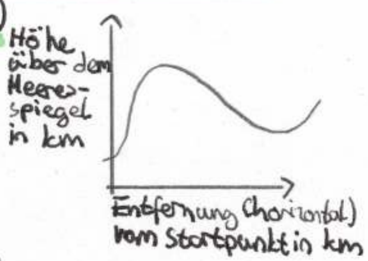
Parameter p bestimmen: Jedes Bauteil in einer Produktionsserie fällt mit der Wahrscheinlichkeit p aus. Wie groß darf p höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% höchstens zehn von 100 Bauteilen ausfallen?

- **Es muss gelten: $P(A \leq 10) \geq 0{,}8$**

Funktionen im Sachzusammenhang

Ganzrationale Funktionen (Ableitungen)

Funktion $f(x)$ beschreibt eine Rennstrecke



$f(x) \Rightarrow$ Höhe bei x km Entfernung

$f'(x) \Rightarrow$ momentane Steigung bei x km Entfernung

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ höchste/niedrigste Stelle der Strecke (Steigung ist 0)

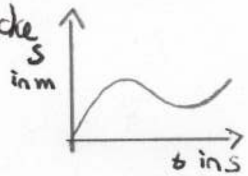
$f''(x) = 0 \Rightarrow$ steilste Steigung der Strecke (Krümmung ist 0)

gilt: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ die Strecke wird immer steiler, es gibt keine Wendestelle mehr

knickfreier Übergang in eine geradlinige Strecke: Tangentengleichung aufstellen mit Steigung an der Stelle des Übergangs

---

Funktion $f(t)$ beschreibt die zurückgelegte Strecke in der Abhängigkeit von der Zeit



$f'(t)$ beschreibt die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t (m/s)

$f'(t) > 0$ Vorwärtsbewegung $\quad f'(t) < 0$ Rückwärtsbewegung

$f''(t)$ beschreibt die Beschleunigung zum Zeitpunkt t (m/s^2)

$f''(t) = 0 \Rightarrow$ lokales Maximum von $f'(x)$: höchste Geschwindigkeit

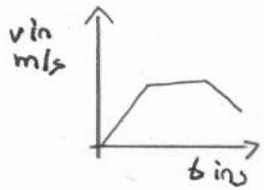
$f''(t) > 0$ Beschleunigung $\quad f''(t) < 0$ Abbremsen

$f''(t) = 0$ v ist konstant

$f(x)$ beschreibt...	$f'(x)$ beschreibt...
... das Volumen in Abhängigkeit von der Zeit x	... die Abfluss/Zuflussrate
... Höhe einer Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit x	... die Wachstumsgeschwindigkeit
... das Volumen in Abhängigkeit von Radius x	... dem Oberflächeninhalt !

Ganzrationale Funktionen (Integrale)

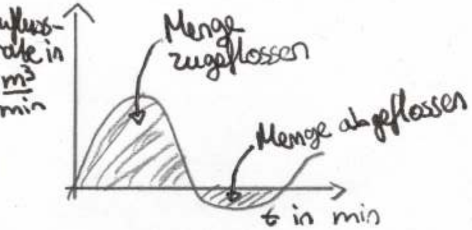
$f(t)$ beschreibt die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t



$\int_0^t f(x)\,dx \Rightarrow$ zurückgelegte Strecke bis zum Zeitpunkt t

---

$f(t)$ beschreibt die Zuflussrate zum Zeitpunkt t



$\int_0^t f(t)\,dx$ beschreibt die zugeflossene Menge

e-Funktionen

exponentielles Wachstum/Abnahme liegt vor wenn in einem bestimmten Zeitraum ein Bestand um den Faktor a zu-/abnimmt

$\Rightarrow f(t) = f(0) \cdot a^t = f(0) \cdot e^{k \cdot t}$

$f'(t)$ beschreibt die Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t

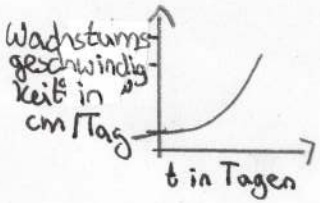
Verdopplungszeit T_V beschreibt die Zeit in der sich der Anfangsbestand verdoppelt: $f(T_V) = 2f(0) = f(0) \cdot e^{k \cdot T_V}$

$$2 = e^{k \cdot T_V}$$

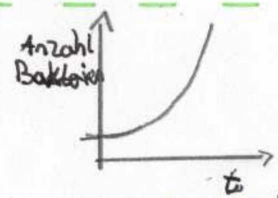
$$T_V = \frac{\ln(2)}{k}$$

analog gilt für die Halbwertszeit T_H bei exponentieller Abnahme:

$$T_H = \frac{\ln(0{,}5)}{k}$$



$\int_0^t f(x)\,dx \Rightarrow$ Höhe in cm nach t Tagen



$f(t) \Rightarrow$ Anzahl Bakterien zum Zeitpunkt t

$f'(t) \Rightarrow$ momentane Änderungsrate an Bakterien

Bsp. für eine Funktionschar:

$f_a(x) = ax^2 - 2ax + 4$

Parameter, für den jede beliebige reelle Zahl eingesetzt werden kann.
z. B. $f_2(x) = 2x^2 - 2 \cdot 2x + 4 = 2x^2 - 4x + 4$
Die Funktion $f_2(x)$ gehört somit zur Funktionschar $f_a(x)$, deren Funktionen sich im Parameter a unterscheiden.

Funktionsscharen

Ableiten von Funktionsscharen:

$f_a(x) = ax^2 - 2ax + 4$
$f_a'(x) = 2ax - 2a$
$f_a''(x) = 2a$

Fallunterscheidungen können nicht nur über die Art von Extremstellen, sondern auch über die Anzahl von Extrem-/Null-/ und Wendestellen Aufschluss geben

Untersuchung von Funktionsscharen (hier wird a immer wie eine Zahl behandelt)

für das Verhalten im unendlichen und Nahe 0 und die Symetrie bei Funktionsscharen gelten dieselben Regeln wie bei einzelnen Funktionen

Null-/ Extrem-/ und Wendestellen von Funktionen einer Schar

Bsp.: $f_a'(x) = 0$
$2ax - 2a = 0 \quad | +2a$
$2ax = 2a \quad | :2a$
$x = 1$

$f_a(1) = a - 2a + 4 = -a + 4 \Rightarrow P(1 | -a+4)$

$f_a''(x) = 2a \Rightarrow$ wenn $a > 0$ ist P, ist P ein Tiefpunkt
wenn $a < 0$, ist P ein Hochpunkt
wenn $a = 0$ ist, liegt in diesem Fall die constante $f_a(x) = 4$ vor*

$\Rightarrow$ z. B. hat f_5 den TP $(1 | -1)$

Liegt ein Punkt auf einem der Graphen der Schar?: Siehe Beispiele aus „Einteilung der Aussagen"

* grundsätzlich können in einem solchen Fall auch eine Sattelstelle oder ein HP bzw. TP vorliegen, in dem der Graph nicht gekrümmt ist.

Einteilung der Aussagen über Funktionen einer Funktionschar

Aussage gilt für manche Funktionen der Schar:
$f_a(1) = 4$
$4 = a - 2a + 4$
$4 = -a + 4 \quad | -4$
$0 = -a \quad | :(-1)$
$0 = a \Longrightarrow$ Fallunterscheidung:

$f_a(1) = 4$ gilt, wenn $a = 0$

$f_a(1) = 4$ gilt nicht, wenn $a \neq 0$

Aussage gilt für keine Funktion
z. B $f_a(0) = 1$

Aussage gilt für jede Funktion
z. B $f_a(0) = 4$

Überblick: Punkte, Geraden, Ebenen + Körper

→ Schnittpunkte d. Graphen mit der x-Achse (Nullstelle)

→ Funktionsterm $f(x)$ wird gleich null gesetzt und die sich ergebende Gleichung $f(x) = 0$ nach x aufgelöst

↳ Lösungen sind die Nullstellen $x_1, x_2, x_3 \dots$ der Funktion; Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse sind $(x_1|0)$, $(x_2|0)$, $(x_3|0)$ …

algebraische Bestimmung:

→ Ausklammern von x

→ quadratische Gleichung mit der pq-Formel lösen

→ Schnittpunkte zweier Graphen

→ Sind zwei Funktionen f und g gegeben, dann bestimmt man die Schnittpunkte durch Lösen der Gleichung $f(x) = g(x)$

↳ Wenn man die Gleichung umformt, sodass auf der linken Seite ein Term steht, und auf der rechten Seite null, dann wird das Problem „Schnittstellen zweier Graphen berechnen" zum Problem „Nullstellen bestimmen" (Lösungsverfahren ↑)

↳ Anschließend darf man nicht vergessen, die y-Koordinate der Schnittpunkte zu bestimmen (falls verlangt)
Dazu setzt man die erhaltenen Schnittstellen (x-Koordinaten) in die Funktionsgleichung von f oder g ein (oder beides zur Kontrolle)

↳ es muss bei beiden das gleiche Ergebnis herauskommen

→

Beispiele:

Schnittpunkte mit x-Achse:

$f(x) = -x^3 + 4x^2$

$f(x) = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = -x^3 + 4x^2 \quad |$ Auskl. von $-x^2$

$\Rightarrow \quad 0 = -x^2 \cdot (x-4)$

$\underline{\underline{x_1 = 0}}$ $\vee$ $\quad \hookrightarrow x - 4 = 0$

$\underline{\underline{x_2 = 4}}$

$\Rightarrow$ Schnittpkte: $P_1(0|0)$

$P_2(4|0)$

Schnittpunkte zweier Graphen:

$f(x) = -x^3 + 4x^2$; $g(x) = x^3 - 4x^2 - 4x$

$f(x) = g(x)$

$-x^3 + 4x^2 = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

$0 = 2x^3 - 8x^2 - 4x + 16$

$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot (x-4) \cdot (x^2 - 2) = 0$

$x_1 = 4$

$x_2 = -\sqrt{2}$

$x_3 = \sqrt{2}$

$f(4) = 0 \quad \Rightarrow P_1(0|0)$

$f(-\sqrt{2}) = 10{,}83 \quad \Rightarrow P_2(-\sqrt{2}|10{,}83)$

$f(\sqrt{2}) = 5{,}17 \quad \Rightarrow P_3(\sqrt{2}|5{,}17)$

→ Lokale Extrempunkte

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

(I) Hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$ — $< HP$, $> TP$

(II) Hinreichende Bedingung (Vorzeichenwechselkriterium): VZW von − nach + → lok. Minimum

von + nach − → lok. Maximum

> Bedingung $f'(x) = 0$ bedeutet, dass die Tangente an der Extremstelle parallel zur x-Achse verläuft.

Absolute Extrempunkte:

→ Vergleicht man alle lokalen Minima / Maxima und die Funktionswerte an den Rändern des Intervalls I, so ist der kleinste / größte Wert daraus das absolute Minimum / Maximum

→ Wendepunkte

Wendestellen sind also Extremstellen der ersten Ableitung

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

(I) Hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0$

(II) Hinreichende Bedingung (Vorzeichenwechselkriterium): VZW von − nach + / + nach − ⇒ Wendestelle

→ Sattelpunkte

↳ Sattelpunkte sind Wendepunkte mit einer zur x-Achse parallelen Tangente

Hinreichende Bedingung:

$$f'(x) = 0$$
$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$
$$f'''(x) \neq 0$$

→ Bei der Untersuchung von Wendestellen in einem Sachzusammenhang, der mit einer math. Funktion beschrieben wird, können diese als Stellen mit maximaler / minimaler Änderungsrate im Kontext gedeutet werden

Körper:

→ Quader:

Eigenschaften:
→ 8 Ecken
→ 12 Kanten
→ wird von 6 Rechtecken begrenzt; gegenüberliegende Rechtecke passen genau aufeinander („deckungsgleich")
→ in jeder Ecke laufen 3 Kanten zusammen

Oberfläche O = (Grundfläche + Vorderfläche + Seitenfläche) · 2

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

Volumen V = Länge · Breite · Höhe

$$V = a \cdot b \cdot h$$

→ Würfel:

Eigenschaften:
→ 8 Ecken
→ 12 Kanten
→ 6 Begrenzungsflächen
→ Alle Kanten sind gleich lang
→ Ein Würfel wird von 6 gleich großen deckungsgleichen Quadraten begrenzt

Oberfläche O = Quadratfläche · 6

$$O = a \cdot a \cdot 6 = a^2 \cdot 6$$

Volumen $V = a \cdot a \cdot a = a^3$

→

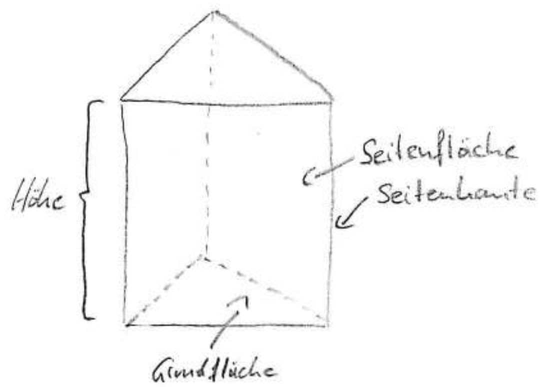
→ Prisma:

→ wird von zwei zueinander parallelen + deckungsgleichen Vielecken, sowie von Rechtecken begrenzt

→ Vielecke ⇒ Grundflächen
Rechtecke ⇒ Seitenflächen (bilden zusammen die Mantelfläche des Primas)

→ Alle Seitenkanten sind zueinander parallel + gleich lang (normal zur Grundfläche)

→ Ein Prisma wird nach seiner Grundfläche benannt (vierseitiges, fünfseitiges)



Oberfläche O = 2 · Grundfläche + Mantelfläche ⇒ $O = 2 \cdot G + M$

Volumen V = Grundfläche · Höhe ⇒ $V = G \cdot h$

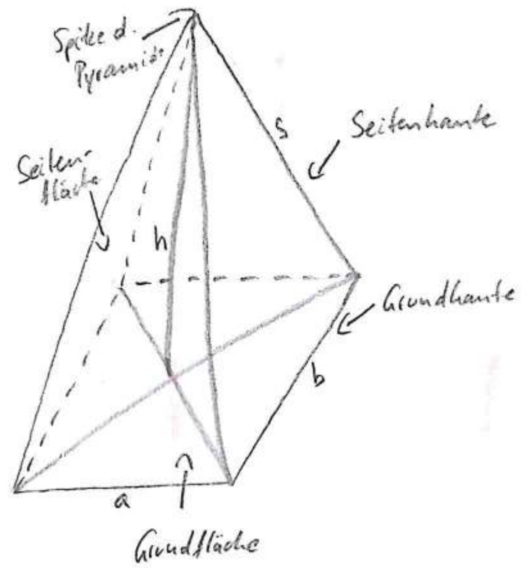
→ Pyramide:

→ wird von einem Vieleck (Grundfläche) + von Dreiecken begrenzt

→ Pyramide wird nach seiner Grundfläche benannt (Viereck, Fünfeck)

Oberfläche O = Grundfläche + Mantel ⇒ $O = G + M$

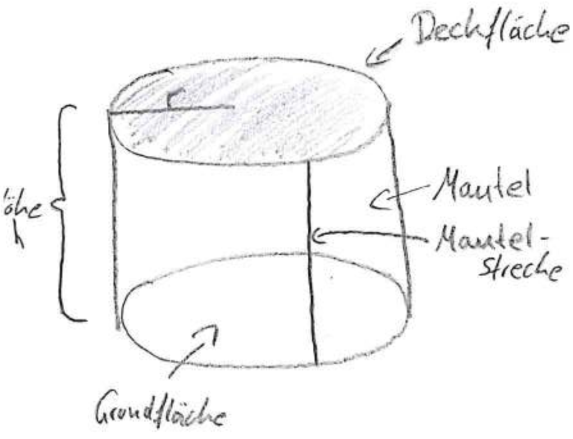
Volumen V = $\frac{1}{3}$ · Grundfläche · Höhe ⇒ $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$



→ Drehzylinder:

→ Zylinder mit Kreisfläche als Grundfläche = Kreiszylinder

→ ein Zylinder entsteht durch Drehung eines Rechtecks (= Drehzylinder)



Oberfläche O = 2 · Grundfläche + Mantel

$$O = 2 \cdot G + M$$
$$= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$
$$= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$$

Mantel M = Umfang Grundfläche · Höhe

$$= U_G \cdot h$$
$$= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

→

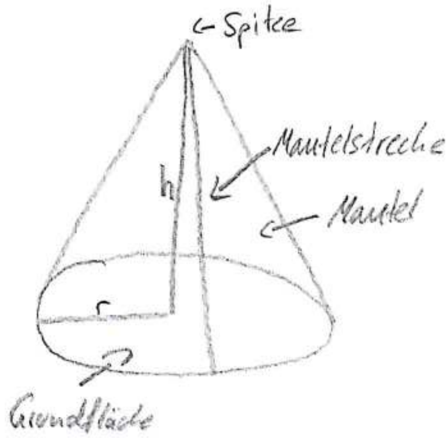
Volumen V = Grundfläche · Höhe

$$V = G \cdot h$$

$$\boxed{V = r^2 \cdot \pi \cdot h}$$

→ Drehkegel:

→ Kegel mit Kreisfläche als Grundfläche = Kreiskegel
→ " entsteht durch Drehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete (= Drehkegel)



Umfang $\boxed{u = 2 \cdot r \cdot \pi}$

Mantelfläche $M = \frac{1}{2} \cdot u \cdot s$

$$M = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot s$$

$$\boxed{M = r \cdot \pi \cdot s}$$

Oberfläche O = Grundfläche + Mantelfläche

$$O = G + M$$

$$O = \overbrace{r^2 \cdot \pi} + \overbrace{r \cdot \pi \cdot s}$$

$$\boxed{O = r \cdot \pi \cdot (r + s)}$$

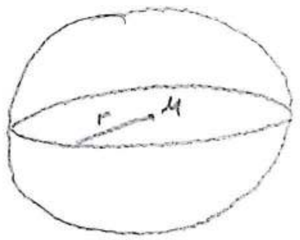
Volumen $V = \frac{1}{3}$ · Grundfläche · Höhe

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$\boxed{V = \frac{(r^2 \cdot \pi \cdot h)}{3}}$$

→ Kugel:

→ Kugel entsteht durch Drehung eines Halbkreises um den Halbkreisdurchmesser
↳ „Rotationskörper"



Oberfläche einer Kugel ist viermal so groß wie eine Kreisfläche

$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$

Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot r^3 \cdot \pi$

Analytische Geometrie:

Parameterdarstellungen für Geraden (aus 2 Pkten) + Ebenen (aus 3 Pkten):

Gerade: $\boxed{g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} = a + r \cdot (\vec{b} - \vec{a})}$

Bsp.: $A(2|3|-1)$; $B(4|-2|2)$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4-2 \\ -2-3 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2r \\ 3-5r \\ -1+3r \end{pmatrix}$$

Ebene: $\boxed{E: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})}$

Bsp. $A(2|2|4)$; $B(-1|5|2)$; $C(1|-2|-4)$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1-2 \\ 5-2 \\ 2-4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1-2 \\ -2-2 \\ -4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Koordinaten eines konkreten Punktes + Punktprobe:

↳ um einen konkreten Punkt zu ermitteln, muss ein beliebiger Wert für den / die Parameter eingesetzt werden

Bsp. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; $r = 2$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{P(9|12|15)}$$

Punktprobe:

Gerade: $A(-7|-5|8)$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 3+5t &= -7 \\ \underline{\underline{t}} &\underline{\underline{= -2}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -1+2\cdot(-2) &= \underline{-5} \\ 2+(-3)\cdot(-2) &= \underline{\underline{8}} \end{aligned}$$

↳ für $t=-2$ sind alle drei Gleichungen erfüllt

Ebene: $A(7|5|-3)$; $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LGS:

$$\begin{aligned} 2 + r + 2s &= 7 \\ 3r - s &= 5 \\ 1 + 5r + s &= -3 \end{aligned} \Rightarrow \left.\begin{aligned} r + 2s &= 5 \\ 3r - s &= 5 \\ 5r + s &= -4 \end{aligned}\right\}$$

$r = 5 - 2s \rightarrow 3 \cdot (5 - 2s) - s = 5$

$s = \frac{10}{7}$

$r = \frac{15}{7}$

$5 \cdot \frac{15}{7} + \frac{10}{7} = \frac{85}{7} \neq 4$

$\Rightarrow$ keine Lösung; A liegt nicht in E

Spurpunkte + Spurgeraden:

(1) Spurpunkte d. Geraden $\Rightarrow$ Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen

(2) Spurpunkte d. Ebene $\Rightarrow$ Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen

(3) Spurgeraden d. Ebene $\Rightarrow$ Schnittgeraden einer Ebene mit den Koordinateneben

Bsp. (I) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Spurpunkte:

x_1x_2-Ebene: Bedingung $x_3 = 0$

$2 + r \cdot (-2) = 0 \quad |-2|:(-2)$

$r = 1$

$\rightarrow$ $r = 1$ in Parameterdarstellung eins.:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow P(2|1|0)$

x_1x_3-Ebene: Bed.: $x_2 = 0$

$2 + r \cdot (-1) = 0 \quad |-2|:(-1)$

$r = 2$

$\rightarrow$ $r = 2$ in Parameterdarst. eins.:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow P(3|0|-2)$

(II) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

SP mit x_1-Achse: Bed.: $x_2 = 0$; $x_3 = 0$

$\left| \begin{aligned} 0 + 2r + 1s &= 0 \\ 1 + 1r + 2s &= 0 \end{aligned} \right| \rightarrow \left| \begin{aligned} 2r + s &= 0 \\ 1r + 2s &= -1 \end{aligned} \right| \rightarrow \begin{aligned} r &= \tfrac{1}{3} \\ s &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$

$\rightarrow$ Eins. in Parameterdarst.:

$3 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-1) = 4$

$\Rightarrow S_{x_1}(4|0|0)$

Analog dazu:

$S_{x_2}(0|-4|0)$

$S_{x_3}(0|0|4)$

(III) Geraden durch je 2 Spurpunkte sind Spurgeraden der Koordinatenebenen:

$g_{x_1x_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g_{x_1x_3}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$g_{x_2x_3}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gerade in x_1x_2 - Ebene projizieren:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehungen zwischen Geraden + Ebenen:

→ gegenseitige Lage von Geraden: parallel, identisch, windschief, schneidend

parallel oder identisch? [Richtungsvektoren müssen kollinear sein!]

(i)

$$g: \vec{x} = \overset{P}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

$$h: \vec{x} = \overset{Q}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

Q in g:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

I $3 = 1 + 3r$
II $4 = 1 + r$
III $1 = 3r$

↳ III liefert: $1 = 3r \quad |:3$
$r = \frac{1}{3}$

in I eins.: $3 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{3}$
$3 = 2$ ✗

in II eins.: $4 = 1 + \frac{1}{3}$
$4 = \frac{4}{3}$ ✗

⇒ Geraden sind parallel

(ii)

$$g: \vec{x} = \overset{P}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

$$h: \vec{x} = \overset{Q}{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

Q in g:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

I $7 = 1 + 3r$
II $3 = 1 + r$
III $6 = 3r$

↳ III liefert: $6 = 3r \quad |:3$
$r = 2$

in I eins.: $7 = 1 + 3 \cdot 2$
$7 = 7$ ✓

in II eins.: $3 = 1 + 2$
$3 = 3$ ✓

⇒ Geraden sind identisch

→

schneidend oder windschief?

(I) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$

g=h

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

I $1 - 2r = 1 + 6s$
II $3r = -2s$
III $-4 + 5r = -4 + 2s$

↳ II liefert: $3r = -2s \quad |:3$
$r = -\frac{2}{3}s \Rightarrow r = 0$

in I eins.: $1 - 2 \cdot (-\frac{2}{3})s = 1 + 6s$
$1 + \frac{4}{3}s = 1 + 6s \quad |-1|-6s$
$s = 0$

in III eins.: $-4 + 5 \cdot 0 = -4 + 2 \cdot 0$
$-4 = -4$ ✓

Schnittpkte bestimmen:

r=0 in g eins.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \ldots$
$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow P(1|0|-4)$

⇒ Geraden schneiden sich

(II) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

g=h

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

I $1 + 3s = 3 + 4t$
II $1 + s = 2$
III $3s = 1 + t$

↳ II liefert: $1 + s = 2 \quad |-1$
$s = 1$

in I eins.: $1 + 3 \cdot 1 = 3 + 4t$
$4 = 3 + 4t \quad |-3|:4$
$t = \frac{1}{4}$

in III eins.: $3 \cdot 1 = 1 + \frac{1}{4}$
$3 = 1{,}25$ ✗

⇒ Geraden sind windschief

→ Lagebeziehungen zwischen Ebenen + Geraden:

allg.: $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$

$E: \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$

Falls die Gleichung $\boxed{p + t \cdot \vec{u} = \vec{q} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}}$ ...

↳ genau 1 Lösung hat, schneiden sich E und g

↳ keine Lösung hat, sind E und g parallel

↳ unendlich viele Lösungen hat, liegt g in E

Bsp.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

g = E

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & 1t + 1r = & -3 \\ \text{II} & -2t - 2r - 3s = & -4 \\ \text{III} & 1t + 1r + 2s = & 6 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \text{II} + 2 \cdot \text{I} \\ \text{I} - \text{III} \end{array}$$

$$\hookrightarrow \left|\begin{array}{lll} \text{I} & 1t + 1r = & -3 \\ \text{II} & 0 + 0 - 3s = & -10 \\ \text{III} & 0 + 0 - 2s = & -9 \end{array}\right|$$

→ LGS hat keine Lösung,

also sind E und parallel!

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

<u>g = E</u>

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ll} \text{I} & 1t - 2r + 1s = -1 \\ \text{II} & -1t + 0r + 1s = -1 \\ \text{III} & 1t - 1r - 3s = 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \text{II} + \text{I} \\ \text{I} - \text{III} \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} 1t - 2r + 1s = -1 \\ 0 \quad 0 + 2s = -2 \\ 0 \quad -1r + 4s = -5 \end{array} \right| \; 2 \cdot \text{III} - \text{I}$$

$$\left| \begin{array}{l} 1t - 2r + 1s = -1 \\ 0 \quad 0 + 2s = -2 \\ 0 \quad 0 + 7s = -9 \end{array} \right|$$

$\Rightarrow$ LGS hat <u>keine Lösung</u>, g und E sind <u>parallel</u>!

auf Orthogonalität prüfen:

→ Skalarprodukt zweier Vektoren berechnen, da das Skalarprodukt zweier Vektoren genau dann gleich null ist, wenn diese zueinander orthogonal sind.

Bsp. $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = -3 + 1 + 2 = \underline{\underline{0}}$$

Länge von Strecken im Raum + Betrag von Vektoren:

Betrag eines Vektors: $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^3}}$$

Vektor mit dem Betrag 1 nennt man Einheitsvektor.

$\vec{v_0} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$

Länge einer Strecke: $\boxed{|\vec{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}}$

Bsp. Betrag d. Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 0 + 9} = \sqrt{13}$

↳ der dazu gehörige Einheitsvektor ist $\vec{u_0} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Länge d. Strecke PQ mit $P(1|3|-1)$ und $Q(5|-2|0)$ ist

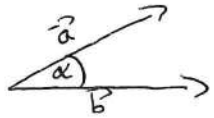
$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(5-1)^2 + (-2-3)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{16 + 25 + 1} = \sqrt{42}$$

→

Winkel zwischen Vektoren:

→ Winkel zwischen Geraden: $\cos(\varphi) = \frac{|u_1 * u_2|}{|u_1| \cdot |u_2|}$ (Skalarprodukt)

Bsp.



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

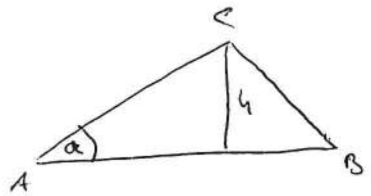
$$= \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{18}}$$

$$\cos(\alpha) = 0{,}9428$$

$$\underline{\underline{\alpha = 19{,}47^\circ}}$$

shift $\cos^{-1}$

Flächeninhalt eines Dreiecks:



$A = \frac{1}{2} \cdot$ Grundseite $\cdot$ Höhe

Ein Dreieck ABC wird durch die Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ aufgespannt, Höhe kann beschrieben werden durch:

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{|AC|} \Rightarrow h = |AC| \cdot \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB} * \vec{AC}}{|AB| \cdot |AC|}$$

$$\Rightarrow A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|AB|^2 \cdot |AC|^2 - (\vec{AB} * \vec{AC})^2}$$

Volumen einer Pyramide:

$V = \frac{1}{3} \cdot$ Grund~~fläche~~ $\cdot$ Raumhöhe

Um die Raumhöhe zu bestimmen, bestimmt man einen beliebigen Vektor $\vec{n}$, welcher orthogonal zu $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ ist

$$V_{Tetraeder} = \frac{1}{6} \cdot \frac{|\vec{n} * \vec{AD}|}{|\vec{n}|} \cdot \sqrt{|AB|^2 \cdot |AC|^2 - (\vec{AB} * \vec{AC})^2}$$

Auflösen von $e^x = b$:

$e^x = b$

$x = \ln(b)$

↳ natürlicher Logarithmus

Bsp: $e^{x} = 4$

$x = \ln(4)$

Basiswechsel: („Umschreibung")

$f(x) = a^x$

$= e^{\ln(a)\cdot x}$

$f'(x) = \ln(a)\cdot e^{\ln(a)\cdot x}$

$F(x) = \ln(a)^{-1}\cdot e^{\ln(a)\cdot x}$

$= \frac{1}{\ln(a)}\cdot e^{\ln(a)\cdot x}$

Bsp.

$f(x) = 2^x$

$= \left(e^{\ln(2)}\right)^x = e^{\ln(2)\cdot x}$

$g(x) = 5^x$

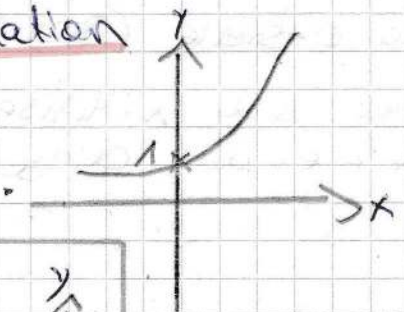
$= \left(e^{\ln(5)}\right)^x$

$= e^{\ln(5)\cdot x}$

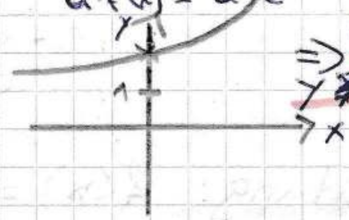
$\boxed{\text{Übungen im Buch: S. 103 - 108}}$

Transformation

$f(x) = e^x$

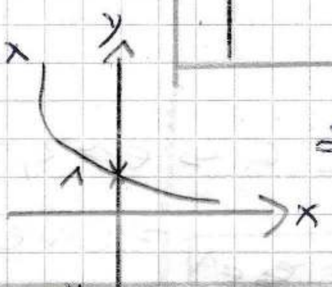


$a\cdot f(x) = a\cdot e^x$



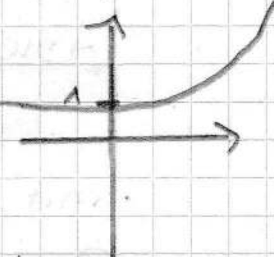
⇒ Streckung auf y-Achse

$f(-x) = e^{-x}$



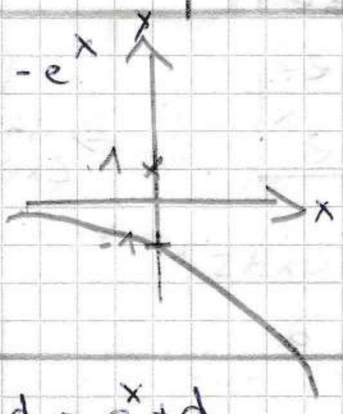
⇒ spiegeln an y-Achse

$f(b\cdot x) = e^{bx}$



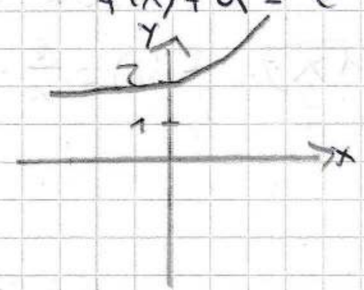
↳ Streckung auf x-Achse

$-f(x) = -e^x$



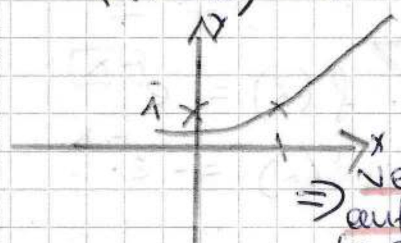
⇒ Spiegeln an x-Achse

$f(x) + d = e^x + d$



⇒ Verschiebung y-Achse um d

$f(x-c) = e^{x-c}$



⇒ Verschiebung auf x-Achse (+ ≙ rechts, - ≙ links)

Auflösen von $e^x = b$:

$e^x = b$

$x = \ln(b)$

↳ natürlicher Logarithmus

Bsp: $e^{\cancel{3}x} = 4$

$x = \ln(4)$

Basiswechsel: („Umschreibung“)

$f(x) = a^x$

$= e^{\ln(a)\cdot x}$

$f'(x) = \ln(a) \cdot e^{\ln(a)\cdot x}$

$F(x) = \ln(a)^{-1} \cdot e^{\ln(a)\cdot x}$

$= \frac{1}{\ln(a)} \cdot e^{\ln(a)\cdot x}$

Bsp.

$f(x) = 2^x$

$= \left(e^{\ln(2)}\right)^x = e^{\ln(2)\cdot x}$

$g(x) = 5^x$

$= \left(e^{\ln(5)}\right)^x$

$= e^{\ln(5)\cdot x}$

Übungen im Buch:

S. 103 - 108

Zusammenfassung „Basics"

Grundlegende Potenzregeln:

MERKE: In Potenzen wird ausgedrückt, dass eine Zahl mehrere Male mit sich selbst multipliziert wird.

$a^0 = 1$ → Potenz mit dem Exponent 0

$a^1 = a$ → Potenz mit dem Exponent 1

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ → Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem ihre Exponenten addiert werden.

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ → Potenzen werden potenziert, indem alle Exponenten miteinander multipliziert werden.

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$ → Potenzen mit gleichem Exponent werden multipliziert, indem die Basen multipliziert werden.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ → Potenz mit negativen Exponenten

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ → Division von Potenzen mit gleicher Basis

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ → Potenz deren Exponent das Inverse einer natürlichen Zahl ist

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ → Potenz deren Exponent ein Bruch ist

Ableitungen:

Potenzregel: $f(x) = x^n$
$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Faktorregel: $f(x) = r \cdot g(x)$
$f'(x) = r \cdot g'(x)$

Summenregel: $f(x) = k(x) + h(x)$
$f'(x) = k'(x) + h'(x)$

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Kettenregel: $f(x) = u(v(x))$
$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

p-q-Formel:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$0 = \underbrace{x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

$$0 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \quad | \pm\sqrt{\ldots}$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = x + \frac{p}{2} \quad | -\frac{p}{2}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Binomische Formel:

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Gleichsetzungsverfahren:

Bsp: I $2y = 2x + 10$

II $2y = -3 + 20$

I und II gleichsetzen

$2x + 10 = -3 + 2 \quad | +3x \quad | -10$

$5x = 10$

$x = 2$

$x = 2$ einsetzen in I

$2y = 2 \cdot 2 + 10 = 14$

$y = 7$

$L = \{(2; 7)\}$

Additionsverfahren:

Bsp: I $2x + 4y = 10$

II $x + y = 4 \quad | \cdot(-2)$

I $2x + 4y = 10$

II $-2x - 2y = -8$

$2y = 2 \quad | :2$

$y = 1$

$y = 1$ einsetzen in II

$x + 1 = 4 \quad | -1$

$x = 3$

$2x + 4 \cdot 1 = 10$

$2x + 4 = 10 \quad | -4$

$2x = 6 \quad | :2$

$x = 3$

Terme mit Klammern auflösen:

$a + (b + c) = a + b + c$

$a + (b - c) = a + b + c$

$a - (b + c) = a - b - c$

$a - (b - c) = a - b + c$

Ausklammern (Terme):

$ab + ac = a(b + c)$

$4x + 4y = 4(x + y)$

$4x^2 + 8y = 4x^2 + 4 \cdot 2y = 4(x^2 + 2y)$

Ausmultiplizieren (Terme):

$a \cdot (b + c) = ab + ac$

$a \cdot (b - c) = ab - ac$

Bsp:

$4 \cdot (a + 2) = 4a + 8$

$2 \cdot (3 + 1) = 6 + 2 = 8$

$4(x^2 + 2y) = 4x^2 + 8y$

$2x(3x + 1 - 2y) = 6x^2 + 2x - 4xy$

Flächeninhalte berechnen:

Quadrat: $A = a^2$

Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

Kreis: $A = \pi \cdot r^2$

$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

Trapez: $A = m \cdot h$

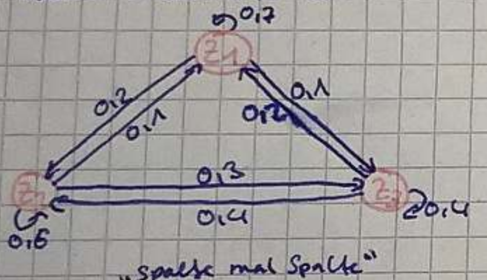
$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$

von Greta Dachler

Stochastische Prozesse

Prozessdiagramm/Gerichtsgraph

(gibt grafisch die Folge von Zustandsverteilungen und den W'keiten dafür an)



$\longrightarrow$ lässt sich übersetzen in

Übergangsmatrix (U)

$$U = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline z_1 & 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ z_2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ z_3 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}$$

hier: 3x3 - Matrix, lässt sich z.B. variieren in 3x2, 4x4 oder 4x3

U ist eine stochastische Matrix, da:

1. Spaltensummen jeweils 1
2. Werte zwischen 0 und 1 (W'keiten)
3. quadratisch (3x3)

Folgeverteilung $\vec{v_0} \cdot U$ = Vektor · Matrix ergibt Vektor

„Zeile mal Spalte"

$$U \cdot \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1150 \\ 0 \\ 950 \end{pmatrix}}_{\vec{v_0}} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \cdot 1150 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 950 \\ 0{,}1 \cdot 1150 + 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 950 \\ 0{,}2 \cdot 1150 + 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 950 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 900 \\ 400 \\ 800 \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}}$$

$$\text{Allgemein} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Weitere Verteilungen $\rightarrow$ z.B.: $U \cdot \vec{v_1} = \vec{v_2}$ $U \cdot \vec{v_2} = \vec{v_3}$ ...

$$U \cdot \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 900 \\ 400 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 780 \\ 490 \\ 820 \end{pmatrix} = \vec{v_2} \quad \ldots$$

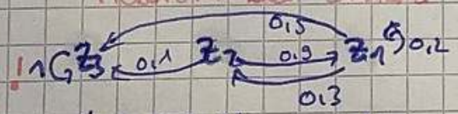
„Spalte mal Spalte"

Addition von Matrizen (Subtraktion entsprechend)

$$U + A = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} + a_{11} & u_{12} + a_{12} & u_{13} + a_{13} \\ u_{21} + a_{21} & u_{22} + a_{22} & u_{23} + a_{23} \\ u_{31} + a_{31} & u_{32} + a_{32} & u_{33} + a_{33} \end{pmatrix}$$

Absorbierender Zustand



$$U = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix} ! \quad \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v_1}$$ erhöht sich

$$U \cdot \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}31 \\ 0{,}06 \\ 0{,}63 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v_2}$$

...

$$U \cdot \vec{v_{12}} \approx \begin{pmatrix} 0{,}005 \\ 0{,}002 \\ 0{,}992 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

langfristig „absorbiert" Zustand 3 die W'keiten, mit sehr hoher W'keit trifft später nur noch dieser ein.

Skalare Multiplikation von Matrizen

$$r \cdot U = \begin{pmatrix} r \cdot u_{11} & r \cdot u_{12} & r \cdot u_{13} \\ r \cdot u_{21} & r \cdot u_{22} & r \cdot u_{23} \\ r \cdot u_{31} & r \cdot u_{32} & r \cdot u_{33} \end{pmatrix}$$

Längerfristige Verteilung $U^n \cdot \vec{v_0}$

z.B.: $U^{10} \cdot \vec{v_0} \overset{GTR}{\approx} \begin{pmatrix} 664 \\ 552 \\ 884 \end{pmatrix}$ oder $U^{30} \cdot \vec{v_0} \overset{GTR}{\approx} \begin{pmatrix} 664 \\ 552 \\ 884 \end{pmatrix}$! schon große Annäherung

dahinter steckt: $U \cdot U \ldots U \cdot (U \cdot \vec{v_0}) = U^n \cdot \vec{v_0}$

Grenzmatrix berechnen (Matrix · Matrix)

$$U^{100} \overset{GTR}{\approx} \begin{pmatrix} 0{,}3158 & 0{,}3158 & 0{,}3158 \\ 0{,}2632 & 0{,}2632 & 0{,}2632 \\ 0{,}4211 & 0{,}4211 & 0{,}4211 \end{pmatrix} = U^{101} \Rightarrow G$$

$$G \cdot \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 663 \\ 553 \\ 884 \end{pmatrix}$$ langfristiger Zustand

andere Möglichkeit: alternierende Matrizen als „quasi Grenzmatrix" die sich immer abwechseln ($A \to B \to A \to B$ ...)

In der 4-Feldertafel wird eingetragen, wie wahrscheinlich es ist, dass in der gleichen Spalte und das in der gleichen Zeile, beide zutreffen.

Bsp.: Schraube ist verkauft und OK

↳ 0,855

Schraube ist verkauft.

↳ 0,856

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

Bsp.: Eine verkaufte Schraube ist OK.

$$P_V(OK)$$

$$= \frac{P(V \cap OK)}{P(V)}$$

$$= \frac{0{,}855}{0{,}856}$$

=> Damit sich Sachen gleichzeitig bedingen können braucht man zwei Sachen mit Wahrscheinlichkeiten.
Diese zwei Sachen nennt man Ereignis.

Ergenis ≙ Irgendwas, was mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auftritt.

Von Chiara und Leonie

Vierfeldertafel – Baumdiagramm – bedingte Wahrscheinlichkeit

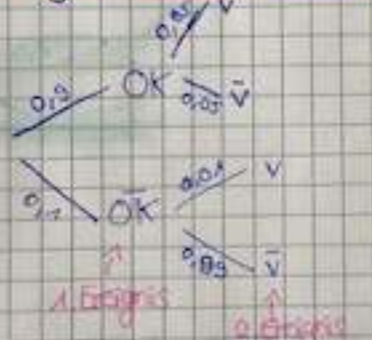
⇒ Regeln beim Baumdiagramm

1) Multiplikationsregel für Pfade
2) Summenregel für Pfade

Beispielaufgabe:

90 % der Schrauben sind OK, von diesen werden 95 % verkauft. Von den kaputten Schrauben werden 1 % verkauft.

Baumdiagramm erstellen:



0,855 $P(OK \cap V)$

0,045 $P(OK \cap \bar{V})$

0,001 $P(\overline{OK} \cap V)$

0,099 $P(\overline{OK} \cap \bar{V})$

Vierfeldertafel erstellen:

	OK	$\overline{OK}$		
V	0,855	0,001	0,856	$P(V)$ Summe wie oft verkauft
$\bar{V}$	0,045	0,099	0,144	$P(\bar{V})$ Summe wie oft nicht verkauft
	0,9	0,1	1	
	Summe wie oft OK	Summe wie oft nicht OK		