$f(x) = (2x+1)\cdot e^{-x}$

a) Ansatz: $f(x)=0 \Rightarrow (2x+1)=0$, da $e^{-x} \neq 0$

Eine lineare Gleichung hat genau eine Lösung, also kann es nur diese eine Nullstelle geben, $x=-\frac{1}{2}$

b) $f'(x) = 2\cdot e^{-x} + (-1)\cdot e^{-x}\cdot(2x+1) = e^{-x}\cdot(1-2x) = e^{-x}\cdot(-2x+1)$

$f''(x) = -1\cdot e^{-x}\cdot(1-2x) + (-2)\cdot e^{-x} = e^{-x}\cdot(-3+2x) = e^{-x}\cdot(2x-3)$

Mit derselben Begründung wie oben gibt es für die Gleichungen $f'(x)=0$ bzw. $f''(x)=0$ nur genau eine Lösung.

$f'(x)=0$ liefert $x=\frac{1}{2}$ und $f''(\frac{1}{2})<0$ wg. $1-3<0$, also HP

$f''(x)=0$ liefert $x=\frac{3}{2}$, die mögliche Wendestelle liegt also rechts der Maximalstelle.

Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ wg. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Wenn der Graph in der Umgebung des HPs eine Rechtskrümmung aufweist, sich aber im weiteren Verlauf der x-Achse im 1. Quadranten asymptotisch annähert, muss der Graph rechts vom HP in eine Linkskurve übergehen, es muss also ein Krümmungswechsel erfolgen und damit an $x=\frac{3}{2}$ eine Wendestelle vorliegen. (Alternative $f'''(\frac{3}{2})\neq 0$)

c) $F(x) = (-2x-3)\cdot e^{-x}$ $\quad F'(x) = -2\cdot e^{-x} + (-1)\cdot(-2x-3)\cdot e^{-x}$
$= e^{-x}\cdot(1+2x) = f(x)$ ☺!!

d) $\int\limits_{-0,5}^{u} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{-0,5}^{u} = (-2u-3)\cdot e^{-u} - (-2)\cdot e^{\frac{1}{2}}$

$= (-2u-3)\cdot e^{-u} + 2\sqrt{e}$

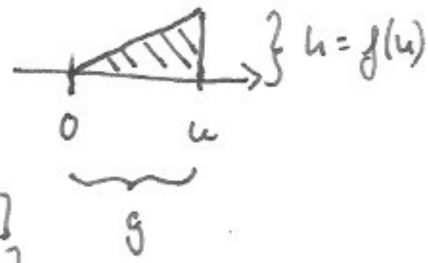
$= 2\sqrt{e} - \underbrace{(2u+3)\cdot e^{-u}}_{>0}$ $\qquad 2u+3 \geq 0$

$\qquad 2u \geq -3$

$< 2\sqrt{e}$ $\qquad u \geq -\frac{3}{2}$!! ☺

Buch, Seite 285, Nr. 15 – Seite 2 –

15. e) $P(0|f(0))$ $\quad Q(u|0)$ $\quad R(u|f(u))$



(1) $P(0|1)$ $\quad Q(2|0)$ $\quad R(2|\frac{5}{e^2})$

$$A = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{5}{e^2} = 5e^{-1}\ [FE]$$
$$\approx 0{,}68\ [FE]$$

(2) allg.: $\quad A(u) = \frac{1}{2}\cdot u\cdot f(u) = \frac{1}{2}\cdot u\cdot(2u+1)\cdot e^{-u}$

$$= \frac{(2u^2+u)\cdot e^{-u}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(2u^2+u)\cdot e^{-u} = (u^2+0{,}5u)e^{-u}$$

„Berechnen" verlangt eigtl. einen vollständigen Lösungsweg unter Angabe von $A'(u)$ und $A''(u)$.

$$A'(u) = (2u+0{,}5)\cdot e^{-u} + (-1)\cdot e^{-u}\cdot(u^2+0{,}5u)$$
$$= e^{-u}\cdot\left(-u^2 + \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}\right) = 0$$

notw. Bed. $\quad A'(u)=0 \Rightarrow -u^2+\frac{3}{2}u+\frac{1}{2}=0$, da $e^{-u} \neq 0$

GTR liefert $u \approx 1{,}78$

$A'(1) \approx 0{,}37 > 0$ $\qquad A'(2) \approx -0{,}07 < 0$

VZW von + nach –, also Maximalstelle!

Der Inhalt wird für $u \approx 1{,}78$ maximal, da $\underbrace{A(0)=1}_{\text{linker Rand!}}$

$[A(1{,}78) \approx 0{,}68]$

und $\underbrace{\lim_{u\to\infty} A(u) = 0}_{\text{rechter „Rand"}}$ (wg. $\lim_{u\to\infty} e^{-u}=0$)

$\Rightarrow$ Es wird immer erwartet, dass man überprüft, ob das gefundene Maximum (oder Minimum) auch ein (innerhalb des angegebenen Intervalles) „globales" ist.