Analysis

Extremwertaufgaben mit funktionaler Nebenbedingung

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

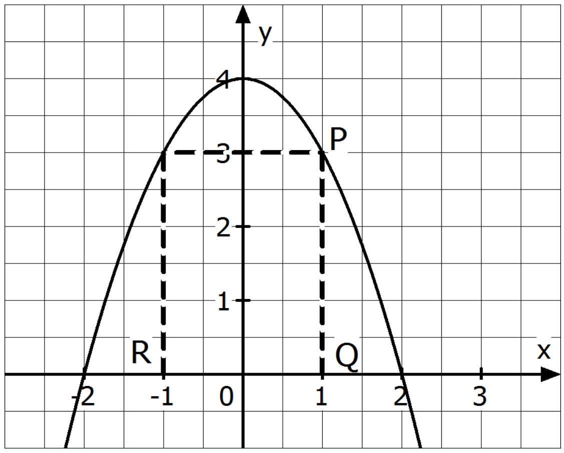
November 2018

Aufgabe 1:
Gegeben ist die Funktion mit $f(x) = -x^2 + 4$, $-2 \le x \le 2$
Die Abbildung zeigt ihr Schaubild. Dem Schaubild wird ein achsenparalleles Rechteck einbeschrieben, wobei der Punkt P einer der Eckpunktes des Rechtecks ist.
Wie müssen die Koordinaten des Punktes P gewählt werden, damit

a) der Umfang des Rechtecks maximal wird?

b) der Inhalt des Rechtecks maximal wird?

c) das Volumen des Drehkörpers, der bei einer Rotation des Rechtecks um die y-Achse entsteht, extremal wird?



Aufgabe 2:
P(u/v) sei ein beliebiger Punkt auf der Parabel mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
mit $-2 \le x \le 2$. Gemeinsam mit den Punkten A(-2/0) und B(u/0) bildet er ein Dreieck ABP.

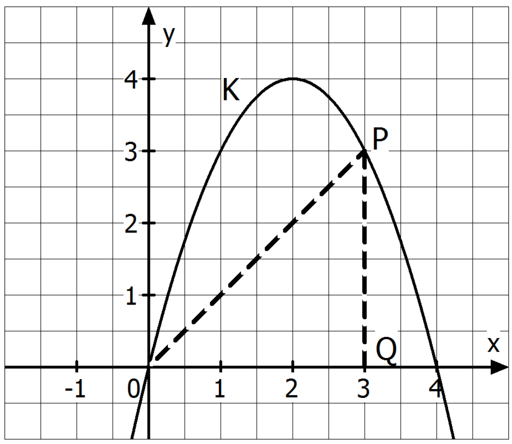
a) Skizziere das Schaubild von f.
Bestimme P so, dass das Dreieck ABP den größtmöglichen Flächeninhalt hat.
Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?

b) Für welchen Punkt P ist im Dreieck ABP die Summe der Kathetenlängen maximal?

Aufgabe 3:
Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = -x^2 + 4x$, $x \in \mathbb{R}$

Ihr Schaubild ist die Kurve K.
Die Punkte O(0/0), Q(u/0) und der Kurvenpunkt P(u/f(u)) mit 0 < u < 4 bilden ein Dreieck.

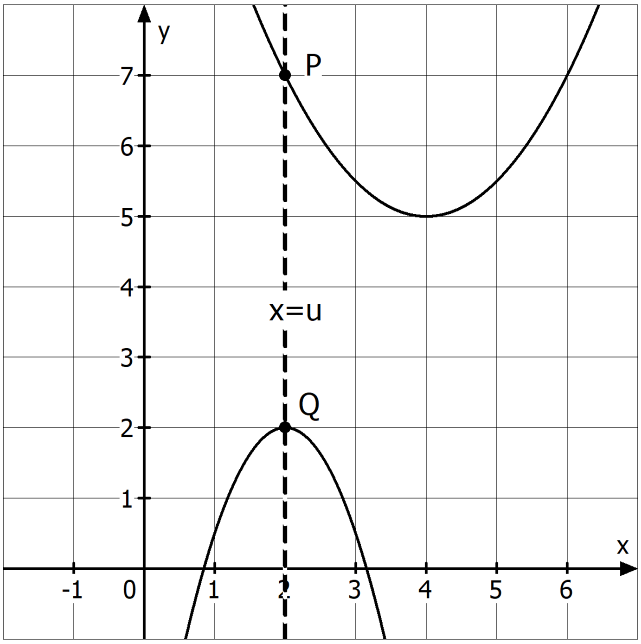
Wie muss u gewählt werden, damit der Inhalt des Dreiecks OPQ maximal wird?
Gib den maximalen Flächeninhalt an.



Aufgabe 4:

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 0{,}5x^2 - 4x + 13$ und $g(x) = -1{,}5x^2 + 6x - 4$.

Die Gerade x = u mit $1 \le u \le 4$ schneidet den Graphen von f im Punkt P und den Graphen von g im Punkt Q. Für welchen Wert von u ist die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ minimal und wie lang ist die minimale Streckenlänge?



Lösungen

Aufgabe 1:

Die allgemeinen Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks lauten:
P(u/f(u)) mit 0 < u < 2
Q(u/0)
R(-u/0)
Für die Streckenlängen gilt: $\overline{QR} = u-(-u) = 2u$ und $\overline{PQ} = f(u)-0 = f(u) = -u^2+4$

a) Der Umfang des Rechtecks soll maximal werden.
Die Formel für den Umfang lautet $U = 2\cdot\overline{QR}+2\cdot\overline{PR}$
Die Zielfunktion lautet $U(u) = 2\cdot 2u + 2\cdot f(u) \Leftrightarrow U(u) = 4u + 2\cdot(-u^2+4)$

$U(u) = 4u - 2u^2 + 8$ mit 0 < u < 2

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion U(u):
$U'(u) = 4-4u$ und $U''(u) = -4$

Bedingung für ein relatives Maximum: $U'(u) = 0$ und $U''(u) < 0$

$4-4u = 0 \Rightarrow u = 1$
$U''(1) = -4 < 0$ also relatives Maximum für u = 1 mit U(1) = 10 LE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt U(0) = 8 und U(2) = 8.
Damit ist U(1) = 10 auch das absolute Maximum.
Für P(1/f(1)) = P(1/3) ist der Umfang des Rechtecks maximal.

b) Der Inhalt des Rechtecks soll maximal werden.
Die Formel für den Flächeninhalt lautet $A = \overline{QR}\cdot\overline{PR}$

Die Zielfunktion lautet $A(u) = 2u\cdot f(u) \Leftrightarrow A(u) = 2u\cdot(-u^2+4) = -2u^3+8u$ mit 0 < u < 2.

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion A(u):
$A'(u) = -6u^2+8$ und $A''(u) = -12u$

Bedingung für ein relatives Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

$-6u^2+8 = 0 \Rightarrow u^2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow u = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$, wobei nur $u = \sqrt{\frac{4}{3}}$ in Frage kommt.

$A''(\sqrt{\frac{4}{3}}) < 0$ also relatives Maximum für $u = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15$ mit $A(\sqrt{\frac{4}{3}}) = 6{,}16$ FE

Untersuchung der Randwerte: Es gilt A(0) = 0 und A(2) =0.

Damit ist $A(\sqrt{\frac{4}{3}}) = 6{,}16$ FE auch das absolute Maximum.

Für P(1,15/f(1,15)) = P(1,15/2,68) ist der Inhalt des Rechtecks maximal.

c) Bei Rotation des Rechtecks um die y-Achse entsteht ein Zylinder.
Die Formel für das Zylindervolumen lautet $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \overline{OQ}^2 \cdot \overline{PQ}$

Die Zielfunktion lautet $V(u) = \pi \cdot u^2 \cdot f(u) = \pi \cdot u^2 \cdot (-u^2 + 4) = -\pi \cdot u^4 + 4\pi \cdot u^2$ mit 0 < a < 2.

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion V(u):
$V'(u) = -4\pi \cdot u^3 + 8\pi \cdot u$ und $V''(u) = -12\pi \cdot u^2 + 8\pi$

Bedingung für ein relatives Maximum: $V'(u) = 0$ und $V''(u) < 0$

$-4\pi \cdot u^3 + 8\pi \cdot u = 0 \Rightarrow 4\pi u \cdot \left(-u^2 + 2\right) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): u = 0 (kommt als Lösung nicht in Frage)
Gleichung II): $u^2 = 2 \Rightarrow u = \pm\sqrt{2}$ (es kommt nur $u = \sqrt{2}$ in Frage)

$V''(\sqrt{2}) = -16\pi < 0$ also relatives Maximum für $u = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ mit $V(\sqrt{2}) = 12{,}57$

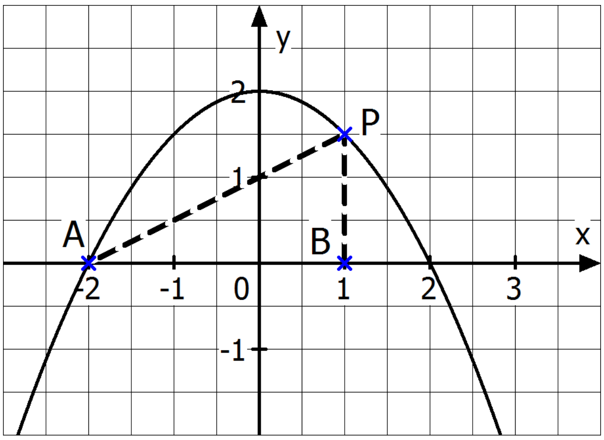
Untersuchung der Randwerte: Es gilt V(0) = 0 und V(2) =0.

Damit ist $V(\sqrt{2}) = 12{,}57$ auch das absolute Maximum.

Für P(1,41/f(1,41)) = P(1,41/2) ist das Volumen des Zylinders maximal.

Aufgabe 2:

Skizze von der Parabel und dem Dreieck:



Die allgemeinen Koordinaten der Punkte lauten: P(u/f(u)) B(u/0) A(-2/0)

a) Die Fläche des Dreiecks soll maximal werden.
Die Formel für die Dreiecksfläche lautet $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BP}$
Mit den Koordinaten der Punkte ergibt sich $\overline{AB} = u - (-2) = u + 2$ und $\overline{BP} = f(u) - 0 = f(u)$

Die Zielfunktion lautet $A_{Dreieck}(u) = \frac{1}{2}(u+2) \cdot f(u) = \frac{1}{2}(u+2) \cdot (-\frac{1}{2}u^2 + 2)$ mit $-2 \le u \le 2$

$A(u) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}u^3 + 2u - u^2 + 4) = -\frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u + 2$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion A(u):
$A'(u) = -0,75u^2 - u + 1$ und $A''(u) = -1,5u - 1$

Bedingung für ein relatives Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

$-0,75u^2 - u + 1 = 0 \quad \Rightarrow u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-0,75) \cdot 1}}{-1,5} = \frac{1 \pm 2}{-1,5}$ also $u_1 = \frac{2}{3}$ und $u_2 = -2$

$A''(-\frac{2}{3}) = -2 < 0$, also relatives Maximum mit $A(\frac{2}{3}) \approx 2,39$
$A''(-2) = 2 > 0$, also relatives Minimum

Untersuchung der Randwerte: Es gilt A(-2) = 0 und A(2) =0.

Damit ist $A(\frac{2}{3}) \approx 2,39$ auch das absolute Maximum.

Für P(0,67/f(0,67)) = P(0,67/1,78) ist der Inhalt des Dreiecks maximal.

b) Die Summe der Kathetenlängen soll maximal werden.
Die Formel für die Summe der Kathetenlängen lautet $L = \overline{AB} + \overline{BP}$
Mit den Koordinaten der Punkte ergibt sich $\overline{AB} = u - (-2) = u + 2$ und $\overline{BP} = f(u) - 0 = f(u)$

Die Zielfunktion lautet $L(u) = u + 2 + f(u) = u + 2 - \frac{1}{2}u^2 + 2 = -\frac{1}{2}u^2 + u + 4$ mit $-2 \le u \le 2$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion L(u):
$L'(u) = -u + 1$ und $L''(u) = -1$

Bedingung für ein relatives Maximum: $L'(u) = 0$ und $L''(u) < 0$

$-u + 1 = 0 \Rightarrow u = 1$
$L''(1) = -1 < 0$, also relatives Maximum mit $L(1) = 4,5$ LE

Untersuchung der Randwerte: Es gilt L(-2) = 0 und L(2) =4.
Damit ist L(1) = 4,5 LE auch das absolute Maximum.

Für P(1/f(1)) = P(1/1,5) ist die Summe der Kathetenlängen maximal.

Aufgabe 3:

Die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks lautet $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OQ} \cdot \overline{QP}$.
Koordinaten der Eckpunkte: O(0/0), Q(u /0), P(u/f(u))

Die Streckenlängen betragen $\overline{OQ} = u - 0 = u$ und $\overline{QP} = f(u) - 0 = -u^2 + 4u$

Die Zielfunktion lautet $A(u) = \frac{1}{2} u \cdot (-u^2 + 4u) = -\frac{1}{2}u^3 + 2u^2$ mit 0 < u < 4.

Gesucht ist das absolute Maximum der Zielfunktion.

Es gilt $A'(u) = -1{,}5u^2 + 4u$ und $A''(u) = -3u + 4$

Bedingung für ein relatives Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

$-1{,}5u^2 + 4u = 0 \Rightarrow u \cdot (-1{,}5u + 4) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): u = 0 (da u > 0 sein soll, ist dies keine Lösung)
Gleichung II): $-1{,}5u + 4 = 0 \Rightarrow u = \frac{8}{3}$
$A''(\frac{8}{3}) = -4 < 0$, also relatives Maximum mit $A(\frac{8}{3}) = 4{,}74$ FE

Untersuchung der Randwerte: Es gilt A(0) = 0 und $A(4) = 0$
Damit ist $A(\frac{8}{3}) = 4{,}74$ FE auch das absolute Maximum.

Aufgabe 4:

Koordinaten der Punkte P und Q:
P(u/f(u)) und Q(u/g(u)).

Die Streckenlänge beträgt $\overline{PQ}(u) = d(u) = f(u) - g(u) = 0{,}5u^2 - 4u + 13 - (-1{,}5u^2 + 6u - 4)$
$= 2u^2 - 10u + 17$ mit $1 \le u \le 4$ (dies ist die Zielfunktion)

Gesucht ist das absolute Minimum der Zielfunktion.

Es gilt $d'(u) = 4u - 10$ und $d''(u) = 4$

Bedingung für ein relatives Minimum: $d'(u) = 0$ und $d''(u) > 0$

$4u - 10 = 0 \Rightarrow u = 2{,}5$
$d''(2{,}5) = 4 > 0$, also relatives Minimum mit $d(2{,}5) = 4{,}5$ LE

Untersuchung der Randwerte: Es gilt d(1) = 9 und $d(4) = 9$
Damit existiert für u = 2,5 das absolute Minimum. Die minimale Streckenlänge beträgt 4,5 LE.