Soós Tamás

Szakdolgozat

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Műszaki Mechanikai Tanszék

Szakdolgozat

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Műszaki Mechanikai Tanszék
Szakdolgozat

Digitális admittancia szabályozó stabilitásának vizsgálata

Soós Tamás

Konzulens:
Vizi Máté Benjámin

Témavezető:
Tóth András

Budapest, 2023.12.13.

Nyilatkozatok

Beadhatósági nyilatkozat

A jelen szakdolgozat/diplomaterv az üzem/intézmény által elvárt szakmai színvonalnak mind tartalmilag, mind formailag megfelel, beadható.

Kelt, Budapest, 2019.12.13.

Az üzem részéről:

. . . .

üzemi konzulens

Elfogadási nyilatkozat

Ezen szakdolgozat/diplomaterv a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kara által a Diplomatervezési és Szakdolgozat feladatokra előírt valamennyi tartalmi és formai követelménynek, továbbá a feladatkiírásban előírtaknak maradéktalanul eleget tesz. E szakdolgozatot/diplomatervet a nyilvános bírálatra és nyilvános előadásra alkalmasnak tartom.

A beadás időpontja: 2019.12.13.

. . . .

témavezető

Nyilatkozat az önálló munkáról

Alulírott, Majoros Tamás (`NEPTUN KOD`), a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem hallgatója, büntetőjogi és fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem és sajátkezű aláírásommal igazolom, hogy ezt a szakdolgozatot/diplomatervet meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, és dolgozatomban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a hatályos előírásoknak megfelelően, a forrás megadásával megjelöltem.

Budapest, 2019.12.13.

. . . .

szigorló hallgató

Köszönetnyilvánítás

Kivonat

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

1. Bevezetés

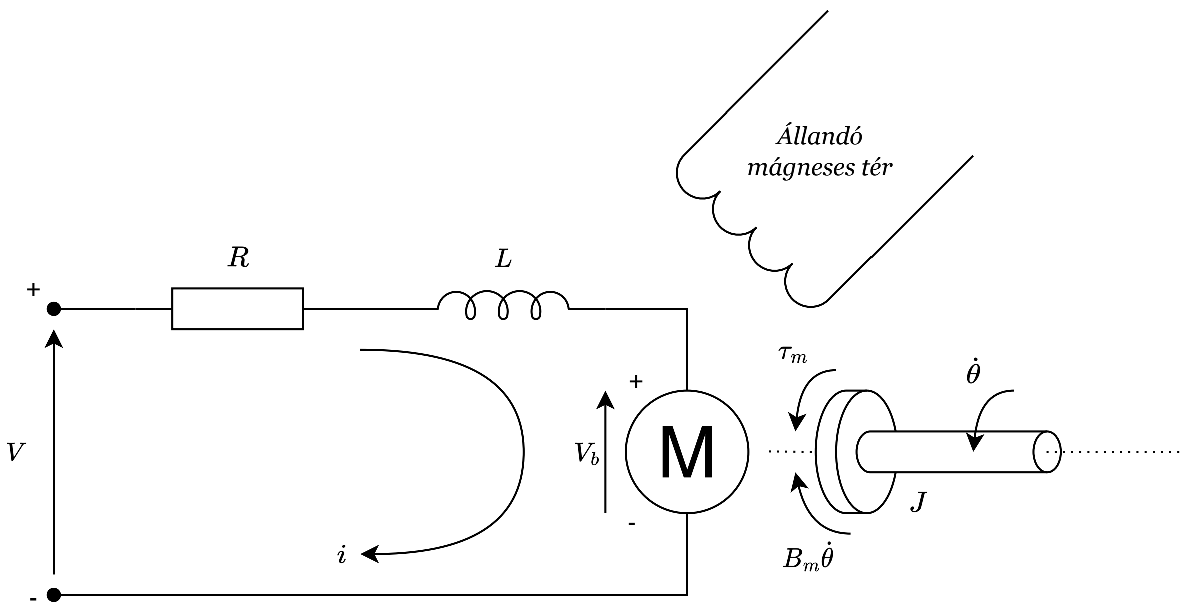
2. Fizikai modell

2.1. Egyenáramú motor dinamikája

A robot motorjának modelljét az 2.1-es ábra mutatja. A felhasznált motor feltételezetten állandó gerjesztésű. A kifejtett nyomaték a Biot-Savart-törvény szerint arányos a forgórészen átfolyó árammal. A forgórészben indukált feszültség pedig arányos annak szögsebességével. A Lenz-törvény alapján

$$\begin{aligned} \tau_m &= K_\tau i, \\ V_b &= K_e \dot{\theta}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

ahol K_τ a nyomatékállandó, K_e a sebesség-feszültség állandó, τ_m a kifejtett nyomaték, i a rotor árama, V_b az rotorban indukált feszültség és $\dot{\theta}$ a rotor szögsebessége. Az



2.1. ábra. Egyenáramú motor áramkör és szabadtest ábra energia-megmaradás törvénye alapján a két konstans értéke megegyezik

$$K_m = K_\tau = K_e, \tag{2.2}$$

így a következőkben K_m paraméterként jelennek meg. A forgórész áramkörére Kirchhoff I. törvénye alapján felírható

$$V - Ri - L\frac{di}{dt} - K_m\dot{\theta} = 0, \tag{2.3}$$

ahol R a forgórész tekercsének ellenállása, L a tekercs induktivitása, K_m a motorállandó, V a motor feszültsége, i a motoráram és θ a szögelfordulás. A forgórészt mechanikailag egy merev testként tekintve Newton II. törvénye alapján

$$J\ddot{\theta} = -B_m\dot{\theta} + K_m i + \tau, \tag{2.4}$$

ahol J a forgórész tehetetlensége, B_m a viszkózus csillapítási együttható, K_m a motorállandó, θ a szögelfordulás, i a motoráram és τ a forgórészre ható külső nyomaték. Ez a két lineáris differenciálegyenlet egyértelműen leírja a rendszer időtartománybeli viselkedését. A további vizsgálathoz kedvezőbb a differenciálegyenleteket állapottér modellként felírni. Egy állapottér modell általánosan

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}\,,\\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned} \tag{2.5}$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{x} = [\theta \;\; \dot{\theta} \;\; i]^\mathsf{T}$ az allapotvektor, ... A két bemenet a külső nyomaték és a motorra adott feszültség. A kimenet a forgórész szöge. A paramétereket kifejtve (2.3) és (2.4) alapján a modell

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{B_m}{J} & \frac{K_m}{J}\\ 0 & -\frac{K_m}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{J} & 0\\ 0 & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tau\\ V\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$\theta = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tau\\ V\end{bmatrix} \tag{2.7}$$

alakba írható át. A frekvenciatartománybeli vizsgálatokhoz felírható a rendszer szög-nyomaték és szög-feszültség átviteli függvénye. Az állapottér modellt felhasználva

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + D \tag{2.8}$$

általános formában, ahol $\boldsymbol{I}$ az identitás mátrix. Behelyettesítve (2.6) és (2.7) paramétereit (2.8) felírható

$$\begin{bmatrix} \frac{\theta(s)}{\tau(s)} \\ \frac{\theta(s)}{V(s)} \end{bmatrix} = \frac{1}{s\left(JLs^2 + (B_mL + JR)\,s + K_m^2 + B_mR\right)} \begin{bmatrix} Ls + R \\ K_m \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

alakban.

2.2. Egyenáramú motor stabilitása

A szabályozókör visszacsatoló ágának megbomlása instabilitáshoz vezet, ha a szabályozó vagy a szabályozott rendszer önmagában instabil. Ez a valós rendszernél szaturációt eredményez, mely a jelen alkalmazás kontextusában nem elfogadható. A motor stabilitása ezért egy rendszerkövetelmény, ami a karakterisztikus egyenletből meghatározható. Az (2.9)-es átviteli függvény alapján a karakterisztikus egyenlet

$$JLs^2 + (B_mL + JR)\,s + K_m^2 + B_mR = 0, \tag{2.10}$$

ahol a nullában elhelyezkedő pólussal átszorozva a szögsebesség a vizsgált kimenet. Ez a polinom valós együtthatókkal rendelkezik, így a Liénard–Chipart kritérium (a Routh–Hurwitz kritérium módosított alakja) segítségével a stabilitás szükséges és elégséges feltételei

$$JL > 0, \quad B_mL + JR > 0, \quad K_m^2 + B_mR > 0. \tag{2.11}$$

A feltételekben megjelenő paraméterek mind pozitívak a valós rendszerben, így a rendszer önmagában aszimptotikusan stabil. Ezen felül linearitásából következik, hogy exponenciálisan stabil.

2.3. Irányíthatóság és megfigyelhetőség

A felhasznált aktuátorok és szenzorok minimalizálása érdekében egy bemenet és egy kimenet használata a cél. Az impedancia modell teljes realizálásához további követelmény, hogy a rendszer szögelfordulása és szögsebessége irányítható legyen a bemeneti feszültség megváltoztatásával, és a szögelfordulás mérésével minden állapot megfigyelhető legyen. Az (2.5)-os állapottér modell alapján az irányíthatóság feltétele, hogy

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{CB} & \boldsymbol{CAB} & \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \end{array}\right] \tag{2.12}$$

legyen maximális rangú. Behelyettesítve (2.6) és (2.7) paramétereit a kimeneti mátrixot kiegészítve a szögsebességgel

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{K_m}{JL} & 0 \\ 0 & \frac{K_m}{JL} & -\frac{K_m(B_m L + JR)}{J^2L^2} & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

redukált lépcsős alakban

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

mely mátrix rangja megegyezik sorainak számával, így az irányíthatósági feltétel teljesül. Az előzőekhez hasonlóan a megfigyelhetőség feltétele, hogy

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{C} \\ \hline \boldsymbol{CA} \\ \hline \boldsymbol{CA}^2 \end{array}\right] \tag{2.15}$$

legyen maximális rangú, ahol $\boldsymbol{C}$ csupán a szöglfordulást tartalmazza. Ismét behelyettesítve (2.6) és (2.7) paramétereit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B_m}{J} & \frac{K_m}{J} \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

redukált lépcsős alakban

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

tehát a rendszer minden állapota megfigyelhető a szögelfordulás méréséből.

3. Szabályozó modellezése

3.1. Impedancia modell

Az eredményes ember-robot interakció érdekében a szabályozó előírása nem csupán az elérni kívánt pozíció vagy kifejtett nyomaték, hanem a mozgásállapot és a kifejtett nyomaték közötti összefüggés. Ezt az összefüggést linearitása végett egy tömeg-rugó-csillapitás modell adja meg a továbbiakban. A modell három paraméterrel

$$M_e\ddot{\theta} + B_e\dot{\theta} + K_e\theta = \tau, \tag{3.1}$$

ahol M_e a rendszer előírt tehetetlensége, B_e a viszkózus csillapítása, K_e a rugóállandója és τ a rendszerre ható külső nyomaték.

3.2. Állapotmegfigyelő

Az állapotvisszacsatoláshoz szükséges belső állapotok közül csak a szögelfordulás áll rendelkezésre közvetlen mérésből. A többi állapotra egy megfigyelő ad becslést. Elkülönítve a mért és becsült állapotokat (2.5) és (**??**) felírható

$$\left[\begin{array}{c}\dot{\theta}\\ \hline \dot{\boldsymbol{x}}_b\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}A_{\theta\theta} & \boldsymbol{A}_{\theta b}\\ \hline \boldsymbol{A}_{b\theta} & \boldsymbol{A}_{bb}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\theta\\ \hline \boldsymbol{x}_b\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}B_\theta\\ \hline \boldsymbol{B}_b\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\tau\\ V\end{array}\right] \tag{3.2}$$

$$\theta = \left[\begin{array}{c|c}1 & \boldsymbol{0}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\theta\\ \hline \boldsymbol{x}_b\end{array}\right] \tag{3.3}$$

alakban, ahol $\boldsymbol{x}_b$ jelöli a becsült állapotokat. Továbbá jelölje $\tilde{*}$ a becsült paramétereket. Ezután legyen

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{A}_{bb} - \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{A}_{\theta b} \\ \hat{\boldsymbol{B}} &= \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{K}_e + \boldsymbol{A}_{b\theta} - \boldsymbol{K}_e A_{\theta\theta} \\ \hat{\boldsymbol{F}} &= \boldsymbol{B}_b - \boldsymbol{K}_e B_\theta,\end{aligned} \tag{3.4}$$

ahol $\hat{\boldsymbol{A}}$ a megfigyelő belső állapotának (továbbiakban $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$) dinamikáját adja meg, $\hat{\boldsymbol{B}}$ és $\hat{\boldsymbol{F}}$ a mért illetve a becsült állapotok bemeneti mátrixai. A becsült állapotok és az állapotváltozók közötti összefüggés ekkor

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{x}_b - \boldsymbol{K}_e\theta \\ \tilde{\boldsymbol{\eta}} &= \tilde{\boldsymbol{x}}_b - \boldsymbol{K}_e\theta\end{aligned} \tag{3.5}$$

alakban adható meg. A belső állapot dinamikája

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = \hat{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\boldsymbol{B}}\theta + \hat{\boldsymbol{F}}u. \tag{3.6}$$

Végül (3.3) átalakításával a rendszer becsült állapotvektora

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{C}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\boldsymbol{D}}\theta, \tag{3.7}$$

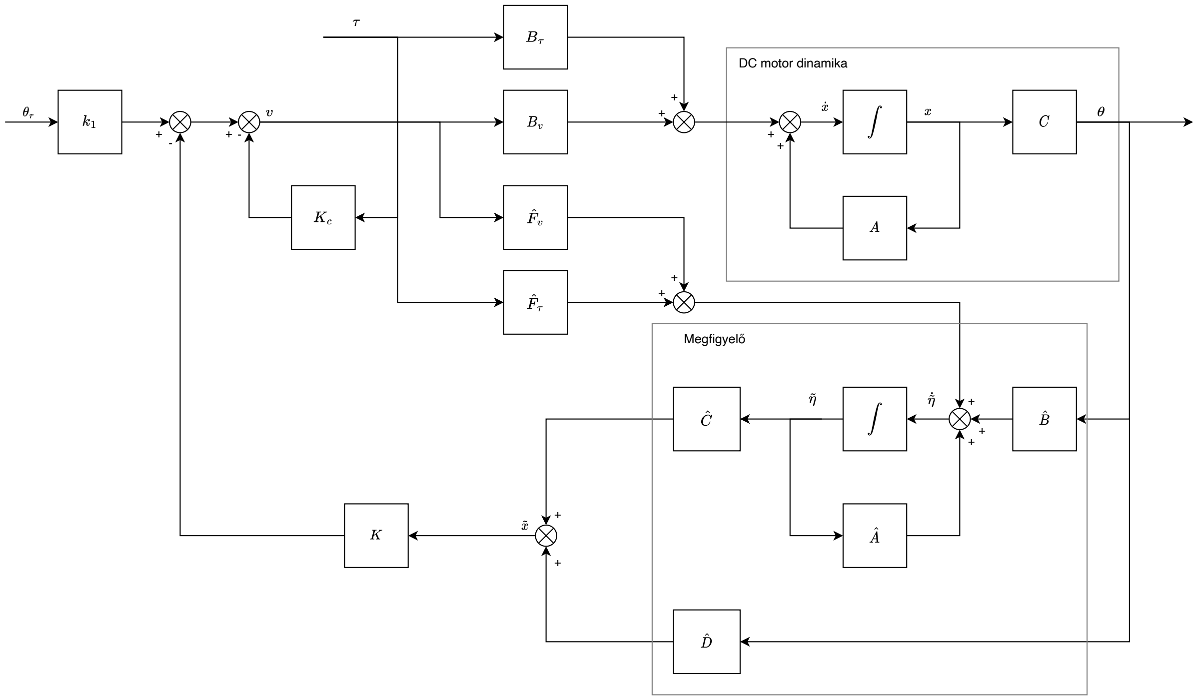
ahol

$$\hat{\boldsymbol{C}} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{I}_{n-1} \end{array}\right], \quad \hat{\boldsymbol{D}} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline \boldsymbol{K}_e \end{array}\right], \tag{3.8}$$

mely tartalmazza a mért állapotot is.

3.3. Nyomaték kompenzáció

A modell két bemenete közül csak a feszültségre van hatással a szabályozó. A külső nyomaték környezeti hatásokból ered. Az impedancia modell mindkét bemenetre adott válasz alakját előírja, így a környezet hatását a feszültség megváltoztatásával kell kompenzálni. A kompenzáció a külső nyomaték direkt vagy indirekt visszacsatolásával érhető el. Direkt mérés esetén a külső nyomaték értékét egy szenzor adja meg, mely dinamikája jelen vizsgálat során elhanyagolható. Az állapotmegfigyelővel és kompenzációval ellátott rendszer teljes blokkdiagramját az 3.1-es ábra mutatja. A teljes rendszer dinamikája az (2.6)-es állapottér modell és az (3.2)-es állapotmegfigyelő



3.1. ábra. Impedancia szabályozó közvetlen nyomaték méréssel

összekapcsolásával írható le, a következő visszacsatolási összefüggéssel

$$V = -\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}} - K_c\tau + k_1\theta_r, \tag{3.9}$$

ahol $\boldsymbol{K}$ az állapot visszacsatolási mátrix, K_c a nyomaték kompenzációs együttható, k_1 a az állapot visszacsatolási mátrix első eleme és θ_r az előírt szögelfordulás. Behelyettesítve (2.6)-ba

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_V\left[-\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}} - K_c\tau + k_1\theta_r\right] + \boldsymbol{B}_\tau\tau, \tag{3.10}$$

ahol a bemeneti mátrix $\boldsymbol{B}$ oszlopai elkülönítve $\boldsymbol{B}_V$ és $\boldsymbol{B}_\tau$ paraméterként jelennek meg. Bevezetve a valós és becsült állapot közötti hibát, mint

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}, \tag{3.11}$$

(3.10) a következő alakra hozható

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_V\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_V\boldsymbol{K}\boldsymbol{e} + \left(\boldsymbol{B}_\tau - \boldsymbol{B}_V K_c\right)\tau + \boldsymbol{B}_V k_1\theta_r, \tag{3.12}$$

a becsült állapot kiküszöbölésével. A valós és becsült állapot közötti eltérés dinamikája pedig (3.2) felhasználásával

$$\dot{\boldsymbol{x}}_b = \boldsymbol{A}_{b\theta} x_\theta + \boldsymbol{A}_{bb} \boldsymbol{x}_b + \boldsymbol{B}_{bB} V + \boldsymbol{B}_{b\tau} \tau, \tag{3.13}$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_b = \left(\boldsymbol{A}_{bb} - \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{A}_{\theta b}\right) \tilde{\boldsymbol{x}}_b + \boldsymbol{A}_{b\theta} x_\theta + \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{A}_{\theta b} \boldsymbol{x}_b + \boldsymbol{B}_{bB} V + \boldsymbol{B}_{b\tau} \tau, \tag{3.14}$$

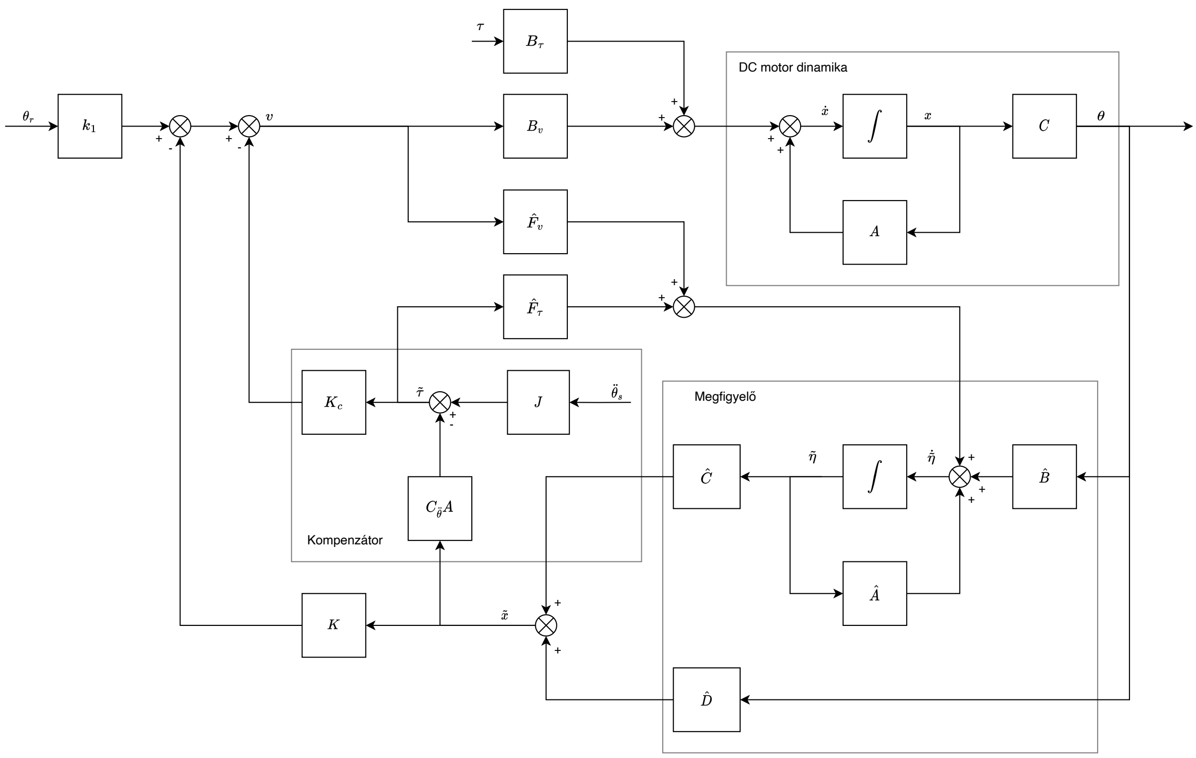
melyeket kivonva egymásból

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \left(\boldsymbol{A}_{bb} - \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{A}_{\theta b}\right) \boldsymbol{e}. \tag{3.15}$$

A rendszer dinamikája blokk mátrix alakban

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_V \boldsymbol{K} & \boldsymbol{B}_V \boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{bb} - \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{A}_{\theta b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_\tau - \boldsymbol{B}_V K_c & \boldsymbol{B}_V k_1 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ \theta_r \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Indirekt nyomaték visszacsatolás kontextusában, a rendszer szöggyorsulásának mérése alapján, az 3.2-es ábra mutatja a teljes blokkdiagramot. Ekkor egy becsült



3.2. ábra. Impedancia szabályozó szöggyorsulás méréssel nyomaték érték kerül visszacsatolásra, melyeket

$$\tilde{\tau} = J\ddot{\theta}_s - \boldsymbol{C}_{\ddot{\theta}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{3.17}$$

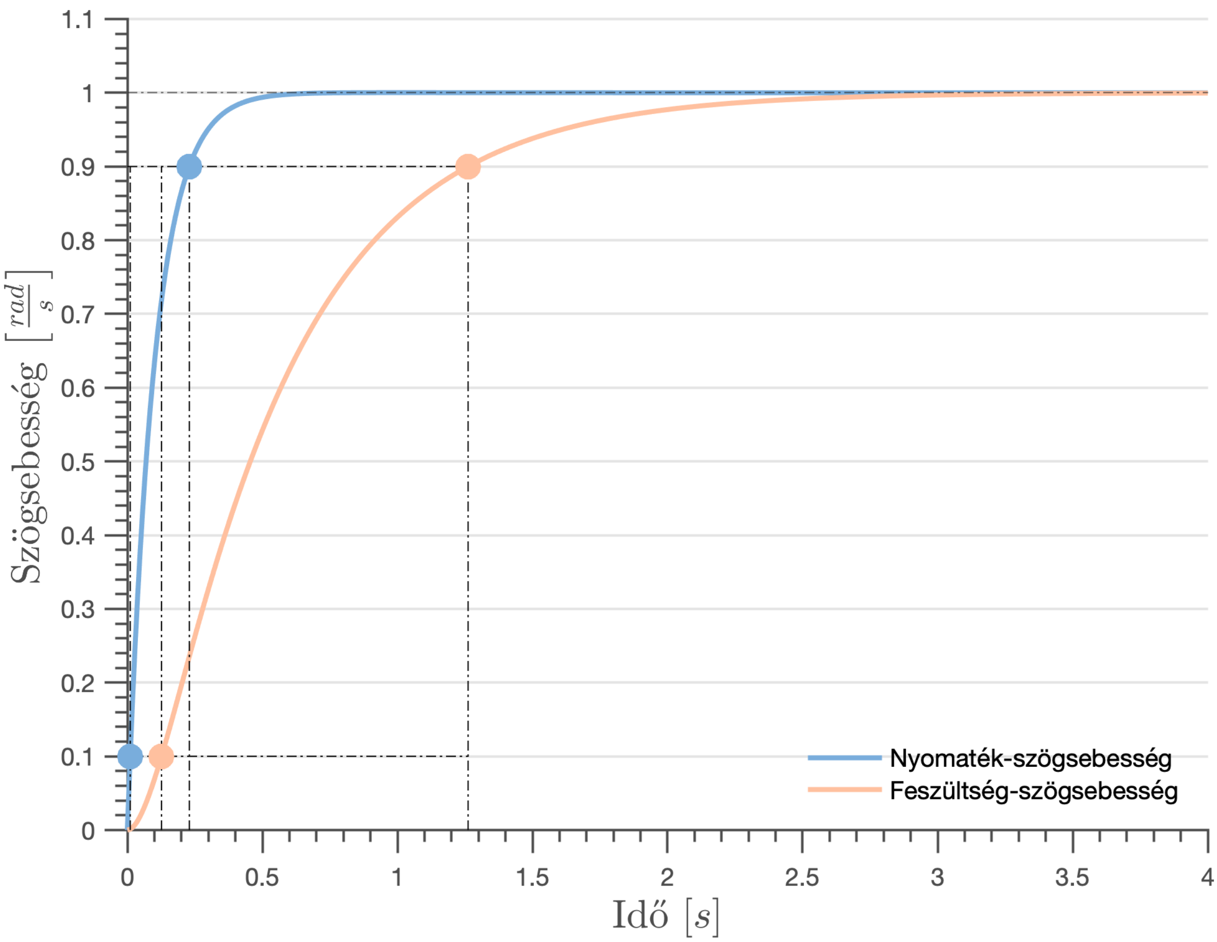
$$\boldsymbol{C}_{\ddot{\theta}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

alakban, a becsült állapot és a mért szöggyorsulás kombinációjával adható meg. A feszültségjel a becsült nyomatékértékkel

$$V = -\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}} - K_c\tilde{\tau} + k_1\theta_r. \tag{3.19}$$

Az előző levezetéshez hasonlóan a teljes rendszer dinamikája blokk mátrix alakban

Ez a kompenzáció csak akkor lehet eredményes, ha a rendszer feszültségre és külső nyomatékra egyaránt közel azonos sebességgel reagál. Az eltérő válaszokat



3.3. ábra. Külső nyomatékra és feszültségre adott válasz összehasonlítása, $J = 0.01\left[kg \cdot m^2\right]$, $K_m = 0.01\left[kg \cdot \frac{m^2}{s^2}\right]$, $B_m = 0.1\left[kg \cdot \frac{m^2}{s}\right]$, $L = 0.5\,[H]$, $R = 1\,[\Omega]$

3.1. táblázat. Physical parameters of the laboratory rig

Symbol	and parameter name	Value
m	pendulum mass (metal)	0.191 kg
J_p	pendulum mass moment (metal)	$5.73 \cdot 10^{-3}$ kgm^2
J_a	mass moment wrt. rotor axis (metal)	$3.027 \cdot 10^{-3}$ kgm^2
m	pendulum mass (plastic)	0.134 kg
J_p	pendulum mass moment (plastic)	$4.02 \cdot 10^{-3}$ kgm^2
l	pendulum half-length	0.15 m
r	arm radius	0.094 m
$\tilde{b}_1$	arm combined damping coeff.	1.148 Nms
b_2	pendulum damping coeff.	0.039 Nms
C	pendulum dry friction param.	0.011 Nm
N	motor constant	1.045 Nm/V
g	gravitational acceleration,	9.81 m/s^2
n_{gb}	gearbox ratio	8523/265
λ_1	1st eigenvalue of system matrix **A**	4.39 s^{-1}
λ_2	2nd eigenvalue of system matrix **A**	−11.09 s^{-1}
λ_3	3rd eigenvalue of system matrix **A**	−656.7 s^{-1}

szemlélteti 3.3-es ábra, mely az (2.9)-es egyenletben szereplő átviteli függvények alapján a szögsebesség egységugrásra adott válaszát mutatja. A két válasz végértékét egységnyire normalizálva jeleníti meg az ábra a fefutási idő összehasonlításának megkönnyítése érdekében.

3.4. Szabályozó stabilitása

4. Stabilitásvizsgálat időkéséssel

4.1. Vizsgálati módszerek összehasonlítása

A rúd differenciálegyenlete

$$\ddot{\phi}(t) - \frac{6g}{l}\phi(t) + \frac{6D}{ml}\dot{\phi}(t-\tau) + \frac{6P}{ml}\phi(t-\tau) = 0 \tag{4.1}$$

A differenciálegyenlet Laplace transzformáltja

$$s^2\phi(s) - s\phi_0 - \dot{\phi}_0 - \frac{6g}{l}\phi(s) + \frac{6D}{ml}\left(se^{-s\tau}\phi(s) - \phi_{-\tau}\right) + \frac{6P}{ml}e^{-s\tau}\phi(s) = 0 \tag{4.2}$$

Kifejezve $\phi(s)$-t

$$\phi(s) = \frac{s\phi_0 + \dot{\phi}_0 + \frac{6D}{ml}\phi_{-\tau}}{s^2 + \frac{6D}{ml}se^{-s\tau} + \frac{6P}{ml}e^{-s\tau} - \frac{6g}{l}} \tag{4.3}$$

A végérték frekvenciatartománybeli reprezentációban

$$\lim_{t\to\infty}\phi(t) = \lim_{s\to 0}\phi(s) = \frac{\dot{\phi}_0 + \frac{6D}{ml}\phi_{-\tau}}{\frac{6P}{ml} - \frac{6g}{l}} \tag{4.4}$$

Az időkésést Taylor-sorral közelítve

$$\phi(t-\tau) = \phi(t-) - \frac{1}{1!}\dot{\phi}(t)\tau + \frac{1}{2!}\ddot{\phi}(t)\tau^2 - \frac{1}{3!}\dddot{\phi}(t)\tau^3 + \dots \tag{4.5}$$

különböző rendű közelítéssekkel

4.2. Stabilitás folytonos időben

4.3. Stabilitás diszkrét időben

5. Kísérleti eredmények

6. Összegzés

7. Következtetések

FÜGGELÉK

A. Measurement dataset

A.1. táblázat. Dataset for the equilibrium position measurement.

U_{in}	$\dot{\varphi}$	θ	U_{in}	$\dot{\varphi}$	θ
1.3	0	3.1415926536	1.3	0	3.1415926536
1.4	4.3	3.1415926536	1.4	-4.3	3.1415926536
1.5	4.7	3.1415926536	1.5	-4.7	3.1415926536
1.6	5.2	3.1415926536	1.6	-5.2	3.1415926536
1.7	5.67	3.1415926536	1.7	-5.67	3.1415926536
1.8	6.34	3.1415926536	1.8	-6.34	3.1415926536
1.9	6.61	3.1415926536	1.9	-6.61	3.1415926536
2	7.22	3.1415926536	2	-7.22	3.1415926536
2.1	7.72	3.1415926536	2.1	-7.72	3.1415926536
2.2	8.02	3.1415926536	2.2	-8.02	3.1415926536
2.3	8.5	3.8746309394	2.3	-8.3366666667	3.1415926536
2.4	9.0033333333	3.9677151662	2.4	-8.78	2.3561944902
2.5	9.5366666667	4.0666171571	2.5	-9.26	2.2514747351
2.6	9.9666666667	4.1306125631	2.6	-9.7	2.1758438008
2.7	10.4366666667	4.2120612615	2.7	-10.2	2.1060306307
2.8	10.7833333333	4.264421139	2.8	-10.63	2.0594885174
2.9	11.3933333333	4.3284165449	2.9	-11.1333333333	1.9605865264
3	11.84	4.3516876016	3	-11.55	1.9198621772
2.9	11.41	4.3225987808	2.9	-11.1033333333	1.9722220548
2.8	11.0133333333	4.2818744316	2.8	-10.6433333333	2.0653062815
2.7	10.5233333333	4.2353323182	2.7	-10.2633333333	2.1060306307
2.6	10.0566666667	4.1655191481	2.6	-9.7733333333	2.1700260366
2.5	9.5933333333	4.1015237422	2.5	-9.31	2.21656815
2.4	9.1266666667	4.0666171571	2.4	-8.8633333333	2.2514747351
2.3	8.55	3.9735329304	2.3	-8.4566666667	2.3329234335
2.2	8.2	3.8571776469	2.2	-7.9366666667	2.4609142453
2.1	7.71	3.7466401276	2.1	-7.5366666667	2.5539984721

B. Poster

Abstract

Irodalomjegyzék