

Soós Tamás  
Szakdolgozat



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

GÉPGYÁRTÁSTUDOMÁNY ÉS -TECHNOLÓGIA TANSZÉK



SZAKDOLGOZAT





---

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Gépész Mérnöki Kar  
Gépgyártástudomány és -technológia Tanszék  
Szakdolgozat

## DIGITÁLIS ADMITTANCIA SZABÁLYOZÓ STABILITÁSÁNAK VIZSGÁLATA

**Soós Tamás**

Konzulens:  
Vizi Máté Benjámin

Témavezető:  
Tóth András

Budapest, 2023.12.13.



# **Nyilatkozatok**

---



# Köszönetnyilvánítás

---

Szeretném megköszönni a konzulensemnek, Vizi Máténak a számtalan konzultációt. Köszönöm Tóth András tanár úrnak a szakmai észrevételeit és a bizalmát. Végül nagyon köszönöm a páromnak a rengeteg támogatást a félév során.



# Kivonat

---

A REHAROB egy egészségügyi robot, mely többek között a sztrók okozta mozgásszervi zavar rehabilitációjában alkalmazható. Az eddigi tesztek során a robot többször került közel instabil állapotba. A stabilitásvesztés könnyen a pácienset is veszélyeztető szituációt idézhet elő. Ebben a dolgozatban a robot kézmoduljának egy egyszerűsített egy dimenziós modelljére készült egy admittancia szabályozó. A szabályozó pozíció és nyomaték bemenettel dolgozik, és egy virtuális másodrendű tömeg-rugó-csillapítás mozgását képes emulálni. A dolgozat az időkésés stabilitásra gyakorolt hatását tárgyalja folytonos és diszkrét időben.



# Tartalomjegyzék

---

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2. Fizikai modell</b>	<b>5</b>
2.1. Egyenáramú motor dinamikája . . . . .	5
2.2. Egyenáramú motor stabilitása . . . . .	8
2.3. Megfigyelhetőség . . . . .	8
2.4. Irányíthatóság . . . . .	9
<b>3. Szabályozó modellezése</b>	<b>11</b>
3.1. Állapotmegfigyelő . . . . .	11
3.2. Pozíció szabályozás . . . . .	12
3.3. Nyomaték kompenzáció . . . . .	15
<b>4. Stabilitásvizsgálat időkésessel</b>	<b>27</b>
4.1. Stabilitás folytonos időben . . . . .	27
4.2. Stabilitás diszkrét időben . . . . .	32
<b>5. Kísérlet</b>	<b>39</b>
5.1. Mérési összeállítás . . . . .	39
5.2. Paraméter identifikáció . . . . .	42
5.3. Eredmények . . . . .	48
<b>6. Összegzés</b>	<b>55</b>
<b>7. Jövőbeli munka</b>	<b>57</b>
<b>FÜGGELÉK</b>	<b>59</b>
<b>A. A PWM frekvencia hatása DC motor vezérlésénél</b>	<b>61</b>
<b>B. Adatlapok</b>	<b>63</b>



# Ábrák jegyzéke

---

1.1.	A kéz rehabilitációjánál alkalmazott robotok típusai . . . . .	1
1.2.	A REHAROB rehabilitációs robot kézmodulja . . . . .	3
2.1.	Az egyenáramú motor áramköri diagramja . . . . .	5
2.2.	Az egyenáramú motor szabadtest ábrája . . . . .	6
3.1.	Az impedanciamodell és a szabályozó összehasonlítása pozíció egységugrás bemenetre . . . . .	14
3.2.	Az impedanciamodell és a szabályozó összehasonlítása külső nyomaték egységugrás bemenetre . . . . .	15
3.3.	Impedancia szabályozó közvetlen nyomaték méréssel . . . . .	16
3.4.	Impedancia szabályozó szöggyorsulás méréssel . . . . .	17
3.5.	Az impedanciamodell és a kompenzált szabályozó összehasonlítása pozíció egységugrás bemenetre . . . . .	19
3.6.	Az impedanciamodell és a kompenzált szabályozó összehasonlítása külső nyomaték egységugrás bemenetre . . . . .	20
3.7.	Az előírható tehetetlenség és a független pólus közötti összefüggés . . . . .	23
3.8.	Az impedanciamodell és a kalibrált szabályozó összehasonlítása pozíció egységugrás bemenetre . . . . .	24
3.9.	Az impedanciamodell és a kalibrált szabályozó összehasonlítása külső nyomaték egységugrás bemenetre . . . . .	24
4.1.	Reprezentatív ábra az időkésés hatásáról folytonos időben . . . . .	28
4.2.	Időkésessel kiegészített egyszerűsített blokk diagram . . . . .	29
4.3.	Folytonos idejű stabilitástérkép . . . . .	31
4.4.	Reprezentatív ábra az időkésés hatásáról diszkrét időben . . . . .	32
4.5.	Az időkésés periodikus függvénye . . . . .	33
4.6.	Diszkrét idejű stabilitástérkép . . . . .	36
4.7.	Diszkrét idejű stabilitástérkép . . . . .	37
4.8.	Diszkrét idejű stabilitástérkép . . . . .	38

## ÁBRÁK JEGYZÉKE

---

5.1. Mérési összeállítás . . . . .	40
5.2. Szabályozó szoftveres implementációjának egyszerűsített vázlata . . . . .	41
5.3. A szabályozó kommunikációs protokollja . . . . .	42
5.4. Felfüggesztett terhelés tehetetlenségi nyomaték méréshez . . . . .	44
5.5. Motor driver lineáritás vizsgálata . . . . .	46
5.6. Motor végsebesség és kapocsfeszültség közötti kapcsolat . . . . .	48
5.7. Egységugrás válasz $\theta_r = \pi/3$ referencia szögállásra, 5 ms időkéséssel és 95%-os toleranciasávval . . . . .	49
5.8. Stabilitástérkép 10ms időkéséssel . . . . .	50
5.9. Stabilitástérkép 5ms időkéséssel . . . . .	51
5.10. Stabilitástérkép 2.5ms időkéséssel . . . . .	51
5.11. Mért beállási idők összehasonlítása a modellel 5ms késéssel . . . . .	52
A.1. A motor állandósult sebessége és a kitöltési tényező viszonya 20 kHz-es PWM jellet . . . . .	61
B.1. Motor adatlap . . . . .	64
B.2. Hajtómű adatlap . . . . .	65
B.3. Enkóder adatlap . . . . .	66

# Táblázatok jegyzéke

---

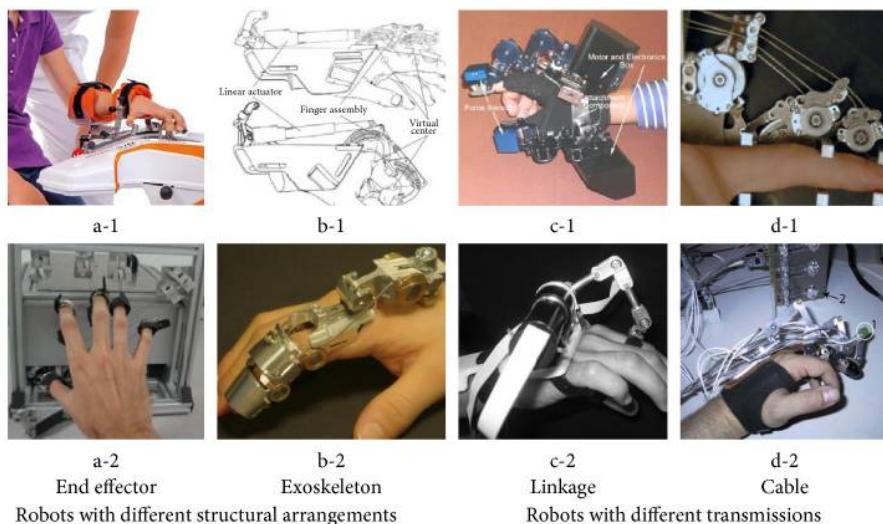
3.1. Pozíció referencia bemenetre adott egységugrás jelnél alkalmazott paraméterek . . . . .	14
3.2. A kompenzált szabályozónál alkalmazott paraméterek . . . . .	18
3.3. A kalibrált szabályozónál alkalmazott paraméterek . . . . .	23
4.1. A folytonos idejű stabilitásvizsgálatnál alkalmazott paraméterek . . . . .	31
4.2. A diszkrét idejű stabilitásvizsgálatnál alkalmazott paraméterek . . . . .	36
5.1. További mérési eszközök . . . . .	42
5.2. Ellenállás mérés adatok . . . . .	43
5.3. Terhelés lengési idő mérési adatok . . . . .	44
5.4. Terhelés tehetetlenségi nyomaték számítás adatok . . . . .	45
5.5. Vezérlő jel és kapocsfeszültség mérések . . . . .	45
5.6. Motor végsebesség és kapocsfeszültség mérések . . . . .	47



# 1. Bevezetés

---

A sztrók évente közel 30 000 (Bereczki és tsai., 2023) embert érint ma Magyarországon. A betegség szövődményei között gyakori a beszéd-, látás-, vagy mozgászavar, de akár teljes bénulást is okozhat. Az egészségügyi robotok alkalmazása a rehabilitáció során elősegítheti a hatékonyabb gyógyulást (Chang és tsai., 2013). A kéz rehabilitációjának optimalizálása különösen fontos, hiszen alapvető szerepe van a minden nap feladatak elvégzésében. A kézfej méretéből és ízületeinek számából adódóan sajatos kihívásokkal kell megbirkózni egy rehabilitációs robot megtervezésénél. Az irodalomban megjelenő megoldások főbb típusai közül szemléltet párat az 1.1. ábra (Yue és tsai., 2017). Két fő



1.1. ábra. A kéz rehabilitációjánál alkalmazott robotok típusai

kategóriát lehet megkülönböztetni a robot és a felhasználó fizikai kapcsolatát tekintve. Vannak teljesen különálló egységek és olyan megoldások, melyeket a felhasználó visel. Az ujjakat lehet külön-külön vagy csoportokban mozgatni. A meghajtás lehet elektromos, pneumatikus vagy hidraulikus, de akár piezoelektromos vagy alak emlékező fémötvözeten alapuló is. A elektromos meghajtás igen elterjedt, mert széles választék áll rendelkezésre különféle motorokból, valamint kedvező az ára és igen megbízható. Az erőátvitel lehet közvetlen, gyakran azonban közvetítő elem (csuklók, kábelek)

## 1. BEVEZETÉS

---

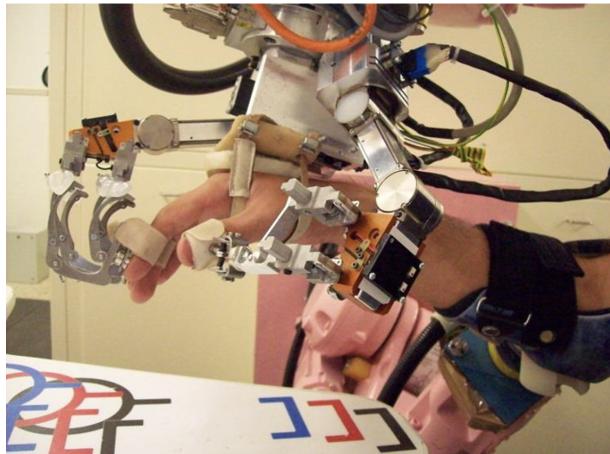
segítségével történik. A páciens aktív részvételle jobb eredményeket mutat a passzív, erőkifejtés nélküli mozgatással szemben (Remsik és tsai., 2016), ezért elengedhetetlen a páciens mozgási szándékáról valamilyen visszajelzés közvetítése a robot felé. Ezután a robot a pácienssel összhangban hajthatja végre a gyakorlatot. A szenzorokat tekintve vannak megoldások melyek a mozgásállapotot mérik (erő, nyomaték, elmozdulás) (Bauer és tsai., 2021), de megjelennek bioelektromos jeleket mérő szenzorok is (Satakogiu és tsai., é. n.).

A hardveren túl a szabályozó típusa szerint is csoportosíthatók a különböző megoldások. Vannak erőszabályozáson alapuló rendszerek (Kovács László L. és tsai., 2003), de leggyakrabbak a hibrid erő és pozíció szabályozáson alapuló egységek (Hua és tsai., 2019; Xie és tsai., 2021), azonban vannak például fuzzy szabályozáson alapuló architektúrák is (Hu és tsai., 2023). A hibrid erő és pozíció szabályozásnak számos előnye van a tisztán pozíció vagy erő visszacsatolással szemben (Hogan, 1984, 1985a,b,c; Kovács László L. és tsai., 2003; Stépán Gábor, 2001). Ez a szabályozó típus kifejezetten jól alkalmazható ember-robot interakciót igénylő feladatoknál, mint amilyen a rehabilitáció is. A szabályozó referencia jele nem csupán az elérni kívánt pozíció vagy kifejtett nyomaték, hanem a mozgásállapot és a kifejtett nyomaték közötti összefüggés. Ezt az összefüggést egy tömeg-rugó-csillapítás modell adja meg a továbbiakban, mely a következő alakban írható fel:

$$M_e \ddot{\theta} + B_e \dot{\theta} + K_e(\theta - \theta_r) = \tau_e . \quad (1.1)$$

A modell három paraméterrel rendelkezik,  $M_e$  a rendszer előírt tehetetlensége,  $B_e$  a viszkózus csillapítása, és  $K_e$  a rugóállandója.  $\theta_r$  és  $\tau_e$  az elérni kívánt pozíció és a rendszerre ható külső nyomaték.

Ez a dolgozat elsősorban az Országos Mozgásszervi Intézetben megépített REHAROB 3.0 rehabilitációs robot kézmoduljában alkalmazott robotujj hatékonyságának javításához kíván hozzájárulni. A robot kézmodulja az 1.2. ábrán látható.



1.2. ábra. A REHAROB rehabilitációs robot kézmodulja

A REHAROB 3.0 rehabilitációs robot működhet passzív vagy aktív üzemmódban. Passzív üzemmódban előre felvett mozgáspályákon halad végig, míg aktív üzemmódban előre beprogramozott hétköznapi feladatok kivitelezésében asszisztálja a pácienset. A kézmodul közvetlen hajtással rendelkezik. A mutatóujj, a középső ujj és a gyűrűs ujj együtt, míg a hüvelyujj külön mozgatható. A kisujj nem vesz részt a mozgatásban. Cserélhető ortézisek teszik lehetővé, hogy különböző kéz mérettel rendelkező páciensek is használhassák a berendezést.

A dolgozat a robotujj egyszerűsített egyszabadságfokú modelljére alkalmazott admittancia szabályozó stabilitását vizsgálja. A digitális rendszerek stabilitására nagy hatással lehet az időkésés (Stépán Gábor, 1989, 2001), így a stabilitásvizsgálat során fő szempont lesz ennek a hatásnak az elemzése.

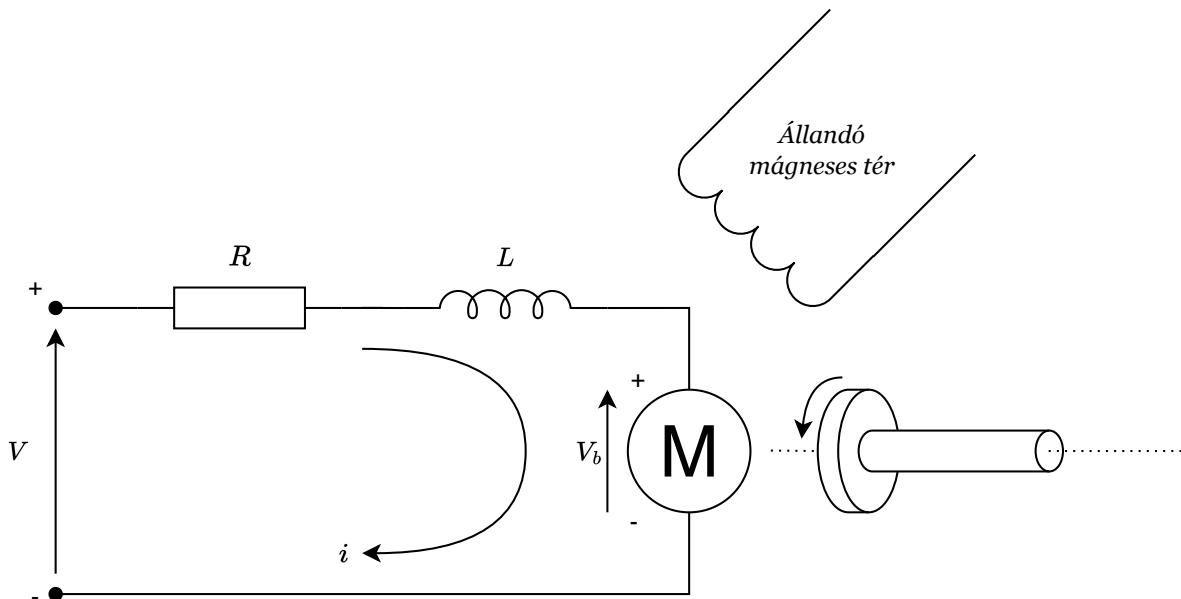


## 2. Fizikai modell

---

Ebben a fejezetben a robotujj egyetlen motorjának fizikai modellje kerül bevezetésre. A kapott dinamikai leírás lehetővé teszi az időkéséssel kiegészített stabilitásvizsgálatot.

### 2.1. Egyenáramú motor dinamikája



2.1. ábra. Az egyenáramú motor áramköri diagramja

A robot motorjának modelljét a 2.1. ábra szemlélteti. A felhasznált motor feltételezetten állandó gerjesztésű. Kifejtett nyomatéka a Biot–Savart-törvény szerint arányos a forgórészen átfolyó árammal. A forgórészben indukált feszültség pedig arányos annak szögsebességével. A Lenz-törvény alapján

$$\begin{aligned}\tau_m &= K_\tau i, \\ V_b &= K_e \dot{\theta},\end{aligned}\tag{2.1}$$

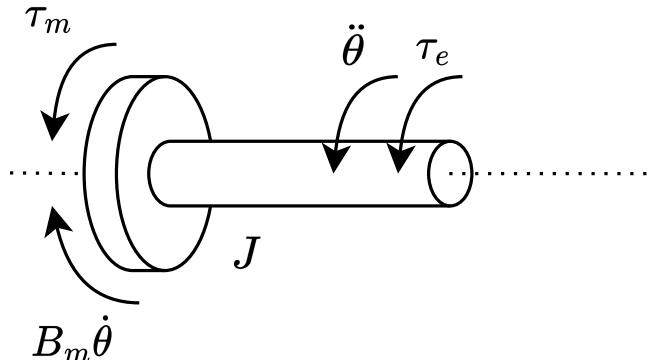
ahol  $K_\tau$  a nyomatékkállandó,  $K_e$  a sebesség-feszültség állandó,  $\tau_m$  a kifejtett nyomaték,  $i$  a rotor árama,  $V_b$  a rotorban indukált feszültség és  $\dot{\theta}$  a rotor szögsebessége. Az energiamegmaradás törvénye alapján a két konstans értéke SI mértékegységekben kifejezve megegyezik

$$K_m \stackrel{\text{def}}{=} K_\tau = K_e, \quad (2.2)$$

így a következőkben  $K_m$  paraméterként jelennek meg. A forgórész áramkörére Kirchhoff I. törvénye alapján felírható

$$V - Ri - L \frac{di}{dt} - K_m \dot{\theta} = 0, \quad (2.3)$$

ahol  $R$  a forgórész tekercsének ellenállása,  $L$  a tekercs induktivitása,  $K_m$  a motorállandó,  $V$  a motor feszültsége,  $i$  a motoráram és  $\theta$  a szögfordulás. A forgórészt merev testnek



2.2. ábra. Az egyenáramú motor szabadtest ábrája

tekintve, annak mozgáságyenlete a dinamika alaptétele és a 2.2. számú szabadtest-ábra alapján a következő alakban írható fel:

$$J \ddot{\theta} + B_m \dot{\theta} = \tau_m + \tau_e, \quad (2.4)$$

ahol  $J$  a forgórész teheteretlensége,  $B_m$  a viszkózus csillapítási együttható,  $K_m$  a motorállandó,  $\theta$  a szögfordulás,  $i$  a motoráram,  $\tau_m$  a motor által kifejtett nyomaték és  $\tau_e$  a forgórészre ható külső nyomaték.

A (2.3) és (2.4) egyenletek egyértelműen leírják a rendszer időtartománybeli viselkedését. A további vizsgálathoz kedvezőbb a differenciálegyenleteket állapottér modellként felírni. Az állapottér modell általánosan (Kálmán Rudolf Emil, 1963)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.5)$$

alakban írható fel. Legyen  $\mathbf{x} = [\theta \ \dot{\theta} \ i]^T$  az állapotvektor,  $\mathbf{u} = [\tau_e \ V]^T$  a bemeneti vektor és  $y = \theta$  a kimenet. A (2.3) és a (2.4) egyenleteket átrendezve az állapot-átmeneti mátrix  $\mathbf{A}$ , a bemeneti mátrix  $\mathbf{B}$ , a kimeneti mátrix  $\mathbf{C}$  és a segédmátrix  $\mathbf{D}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B_m}{J} & \frac{K_m}{J} \\ 0 & -\frac{K_m}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{2.6}$$

alakban származtatható. A későbbiekben ismertetett kísérleti összállítás paraméterei nem teszik lehetővé a forgórész áramának modellezését. Bővebb indoklás az 5. fejezetben talalható. Az induktivitással kiegészített modell mellett mindig megjelenik az induktivitás nélküli modell, ahol szükséges. Az egyszerűsített állapottér modell állapotvektora  $\mathbf{x} = [\theta \ \dot{\theta}]^T$ , bemeneti vektora változatlan,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  és  $\mathbf{D}$  mátrixa pedig

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B_m R + K_m^2}{JR} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J} & \frac{K_m}{JR} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{2.7}$$

A frekvenciatartománybeli vizsgálatokhoz felírható a rendszer szög-nyomaték és szög-feszültség átviteli függvényeit. Az állapottér modellt felhasználva

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\tag{2.8}$$

általános formában, ahol  $\mathbf{I}$  az identitás mátrix. Behelyettesítve (2.6) paramétereit (2.8) alapján a karakterisztikus polinom felírható

$$p(s) = s \left( J L s^2 + (B_m L + JR) s + K_m^2 + B_m R \right)\tag{2.9}$$

alakban. Az átviteli függvények pedig ez alapján

$$\begin{aligned}\frac{\theta(s)}{\tau_e(s)} &= \frac{Ls + R}{p(s)}, \\ \frac{\theta(s)}{V(s)} &= \frac{K_m}{p(s)}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Hasonlóan az indkutivitást elhanyagolva a karakterisztikus polinom

$$p(s) = s \left( JR_s + K_m^2 + B_m R \right),\tag{2.11}$$

valamint az átviteli függvények

$$\begin{aligned}\frac{\theta(s)}{\tau_e(s)} &= \frac{R}{p(s)}, \\ \frac{\theta(s)}{V(s)} &= \frac{K_m}{p(s)}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

## 2.2. Egyenáramú motor stabilitása

A motormodell stabilitási tulajdonságai a (2.11) egyenletben szereplő karakterisztikus polinom segítségével meghatározhatók. A karakterisztikus polinom egyik zérusa az origóban helyezkedik el. Ebből következik, hogy a rendszer egységugrás bemenetre korlátlanul nagy szögelfordulással válaszol. Ez utóbbi a jelen alkalmazásban nem elfogadható. Ha a szabályozókör visszacsatoló ága megszakad, a motor a megengedhető mozgástartományon kívülre fordulhat. A biztonságos működéshez szükséges például egy végálláskacsolót beépíteni, mely segítségével a motor mozgása a szabályozástól függetlenül is az előírt tartományon belülre korlátozható.

## 2.3. Megfigyelhetőség

A felhasznált szenzorok számának minimalizálása érdekében a lehető legkevesebb belső állapot közvetlen mérése a cél. A továbbiakban egyedül a szögelfordulás áll elő közvetlen mérésből. A szabályozó teljes állapotvisszacsatolásra épül, így a kimenet mérésével minden további belső állapot megfigyelhető kell legyen. A (2.5) és (2.6) egyenletek alapján a kimeneti megfigyelhetőség feltétele, hogy a

$$\begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline CA^2 \end{bmatrix}\tag{2.13}$$

mátrix legyen maximális rangú. A feltételben szereplő mátrixot a motorparaméterekkel kifejezve a (2.6) egyenlet alapján:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B_m}{J} & \frac{K_m}{J} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

mely redukált lépcsős alakban

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

ami valóban maximális rangú, tehát a rendszer minden állapota megfigyelhető a szögelfordulás méréséből. Az induktivitást elhanyagolva a feltétel

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

még egyszerűbb alakkal rendelkezik. Behelyettesítve az egyszerűsített modell paramétereit (2.7)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

a kapott mátrix azonnal redukált lépcsős alakban adódik. A rendszer minden állapota megfigyelhető ebben az esetben is.

## 2.4. Irányíthatóság

A szabályozó akkor tudja követni a számára előírt impedanciamodellt, ha megfelelő bemeneti feszültség alkalmazásával eljuttatható az előírt állapotba (Kálmán Rudolf Emil és tsai., 1963). A rendszer pólusai áthelyezhetők kell legyenek az impedanciamodell pólusaiba. Ehhez a rendszer teljesen állapot irányítható kell legyen. A (2.5) egyenlet állapottér modellje alapján a teljes állapot irányíthatóság feltétele, hogy a

$$\left[ \mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \right] \quad (2.18)$$

mátrix legyen maximális rangú. Felhasználva a (2.6) kifejezés paramétereit a (2.13) feltételben szereplő mátrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{K_m}{JL} \\ 0 & \frac{K_m}{JL} & -\frac{K_m(B_m L + JR)}{J^2 L^2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} & -\frac{K_m^2 L + JR^2}{JL^3} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

alakba írható át. Továbbá ez a mátrix redukált lépcsős alakban

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

mely mátrix rangja megegyezik sorainak számával, így az teljes állapot irányíthatóság feltétele teljesül. Az induktivitást elhanyagolva az irányíthatósági feltételben megjelenő mátrix

$$\left[ \begin{array}{c|cc} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{array} \right]. \quad (2.21)$$

Az egyszerűsített modell paramétereit behelyettesítve

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

a kapott mátrix láthatóan megfelel a feltételnek.

## 3. Szabályozó modellezése

---

Az ebben fejezetben levezetett állapotmegfigyelő és a szögelfordulás közvetlen mérése együtt a rendszer teljes állapotvektorát elérhetővé teszi. A rendszer pólusai a 2.4. fejezetben vizsgált irányíthatósági feltétel teljesülése miatt szabadon áthelyezhetők. Az impedanciamodell által előírt dinamikai összefüggés részben teljes állapotvisszacsatolással érhető el, azonban a nyomatékválasz külön figyelmet igényel.

### 3.1. Állapotmegfigyelő

Ahogy a jelen alkalmazásban is, sokszor nem áll rendelkezésre az állapotvisszacsatoláshoz szükséges összes belső állapotot közvetlen mérésből. Ilyenkor egy állapotmegfigyelő adhat becslést az ismeretlen állapotokra (Kálmán Rudolf Emil, 1960; Ogata, 2001). Elküldönítve a mért és a becsült állapotokat (2.5) felírható:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{aa} & | & A_{ab} \\ \hline A_{ba} & | & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \hline B_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_e \\ V \end{bmatrix}, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & | & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

alakban, ahol  $x_a = \theta$  a mért szögelfordulás és  $\mathbf{x}_b = [\dot{\theta} \ i]^T$  jelöli a becsült állapotokat. A továbbiakban jelölje  $\tilde{x}$  a becsült állapotok megfigyelő által számított értékeit. Legyen

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}, \\ \hat{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{A}} \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}, \\ \hat{\mathbf{F}} &= \mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a, \end{aligned} \quad (3.2)$$

ahol  $\hat{\mathbf{A}}$  a megfigyelő belső állapotának (továbbiakban  $\tilde{\eta}$ ) dinamikáját adja meg,  $\hat{\mathbf{B}}$  és  $\hat{\mathbf{F}}$  a mért illetve a becsült állapotok bemeneti mátrixai és  $\mathbf{K}_e$  a megfigyelő hibájának a visszacsatoló mátrixa. A megfigyelő belső állapota és a becsült állapotváltozók közötti

összefüggés ekkor

$$\begin{aligned}\eta &= \mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e y, \\ \tilde{\eta} &= \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y\end{aligned}\quad (3.3)$$

alakban adható meg. A megfigyelő belső állapotának dinamikája

$$\dot{\tilde{\eta}} = \hat{\mathbf{A}}\tilde{\eta} + \hat{\mathbf{B}}y + \hat{\mathbf{F}}u. \quad (3.4)$$

Végül (3.1) kimeneti egyenletének átalakításával a rendszer becsült állapotvektora

$$\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{C}}\tilde{\eta} + \hat{\mathbf{D}}y, \quad (3.5)$$

ahol

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{K}_e \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Ez a teljes állapotvektor, így tartalmazza a mért szögelfordulást is.

## 3.2. Pozíció szabályozás

Az előírt modell két független bemenettel rendelkezik. Jelen esetben a szögelfordulásra és a külső nyomatékra előírt válasz viszont csak az amplitúdójukban térnek el. Ezt kihasználva először kizárolag a szögelfordulás referencia jelére előírt válasz alapján kerülnek áthelyezésre a pólusok. Teljes állapotvisszacsatolás esetén a motorra kapcsolt feszültség

$$V = K_r \theta_r - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}} \quad (3.7)$$

összefüggéssel adható meg, ahol  $\mathbf{K}$  az állapotvisszacsatolási mátrix,  $K_r$  a referencia jel erősítési tényezője és  $\theta_r$  az előírt szögfordulás. A (3.7) egyenlet felhasználásával a (2.5) egyenletben szereplő állapottér modell belső állapotának dinamikája

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_V [K_r \theta_r - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}}] + \mathbf{B}_\tau \tau_e \quad (3.8)$$

alakra írható át. A  $\mathbf{B}$  mátrix oszlopai elkülönítve  $\mathbf{B}_V$  és  $\mathbf{B}_\tau$  paraméterekként jelennek meg. Legyen a továbbiakban a motor becsült állapotai és a megfigyelő által számított

állapotok közötti hiba:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b . \quad (3.9)$$

A (3.8) egyenlet a megfigyelő által számított állapotok vektorának kiküszöbölésével

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_V \mathbf{K}) \mathbf{x} + \mathbf{B}_V \mathbf{K}_b \mathbf{e} + \mathbf{B}_\tau \tau + \mathbf{B}_V K_r \theta_r \quad (3.10)$$

alakra hozható. A valós és becsült állapot közötti hiba dinamikája (3.1) felhasználásával

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_b &= \mathbf{A}_{ba} x_a + \mathbf{A}_{bb} \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_{Vb} V + \mathbf{B}_{\tau b} \tau_e , \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \tilde{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{ba} x_a + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_{Vb} V . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Melyeket kivonva egymásból

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{e} + \mathbf{B}_{\tau b} \tau_e . \quad (3.12)$$

A rendszer dinamikája blokk mátrix alakban

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_V \mathbf{K} & \mathbf{B}_V \mathbf{K}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\tau & \mathbf{B}_V K_r \\ \mathbf{B}_{\tau b} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_e \\ \theta_r \end{bmatrix} . \quad (3.13)$$

A referencia jel erősítési tényezője a teljes rendszer átviteli függvénye alapján a végérték tételelhető meg. A rendszer válaszának végértéke (3.13) szerint egységugrás bemenetre:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \theta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{K_m K_r M_e}{JL(p-s)(M_e s^2 + B_e s + K_e)} \frac{s}{s} = -\frac{K_m K_r M_e}{JL p K_e} , \quad (3.14)$$

ahol  $p$  a megfigyelő pólusa, feltételezve, hogy az összesen kettő darab szabadon választható pólus értéke ugyanaz, és ez az érték valós. Az erősítési tényező ez alapján:

$$K_r = -\frac{JL p K_e}{K_m M_e} . \quad (3.15)$$

A megfigyelő belső hibájának ( $\mathbf{e}$ ) megváltozása nem csak a pillanatnyi belső hibától függ. Még ha a  $\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}$  mátrix sajátértékei minden negatív valós résszel is rendelkeznek, a megfigyelő belső hibája akkor sem tart feltétlenül nullához külső nyomaték jelenlétében. Amennyiben a  $\mathbf{A} - \mathbf{B}_V \mathbf{K}$  mátrix sajátértékei minden negatív valós résszel rendelkeznek, a teljes rendszer exponenciálisan stabil, de a külső nyomatékre adott válasz végértéke eltér az impedanciamodell által előírt értéktől. Ez a szabályozó még nem felel meg az alkalmazás előírásainak. A rendszer válasza a pozíció referencia bemenetre adott

### 3. SZABÁLYOZÓ MODELLEZÉSE

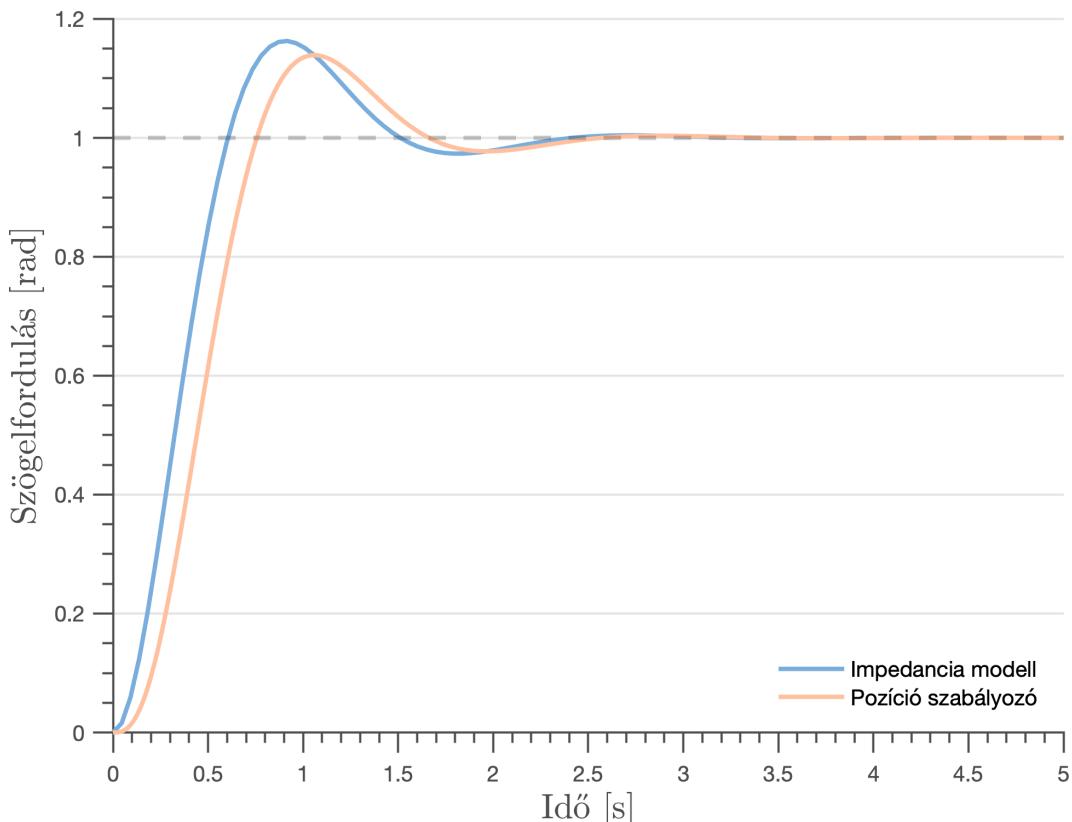
---

egységugrás jelre a 3.1. ábrán látható. Az alkalmazott paramétereket az 3.1. táblázat tartalmazza.

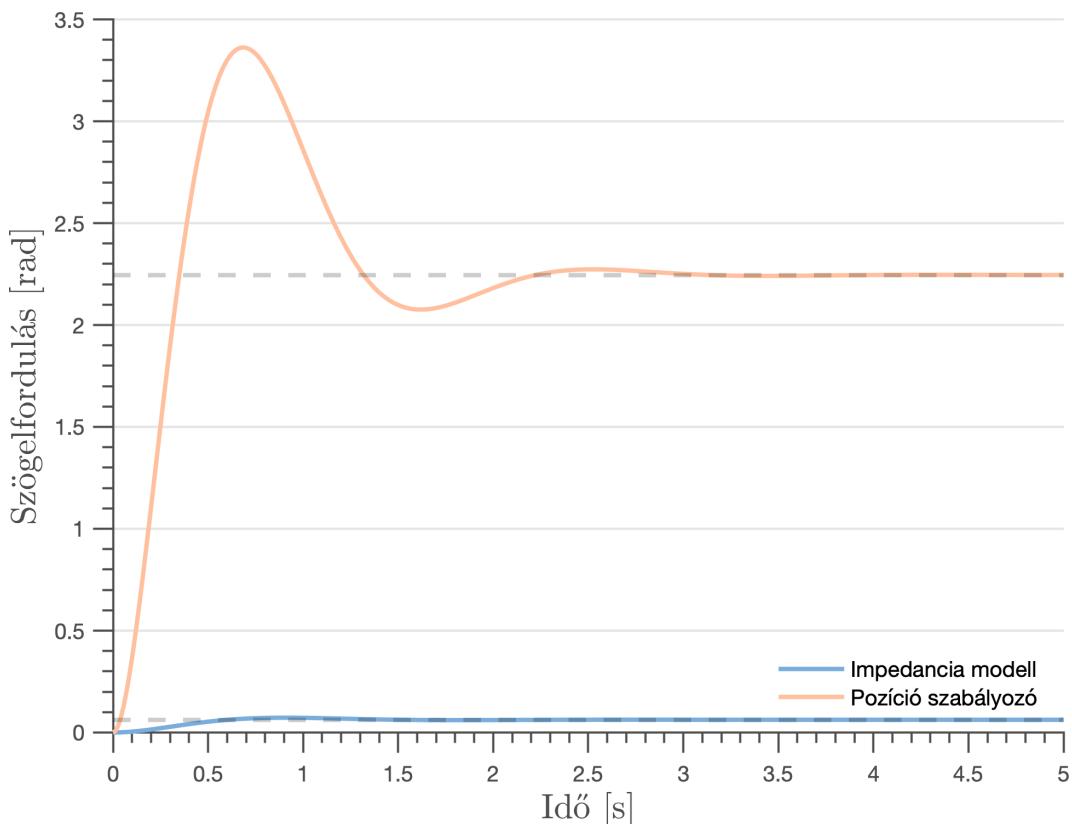
3.1. táblázat. Pozíció referencia bemenetre adott egységugrás jelnél alkalmazott paraméterek

Szimbólum és paraméter név	Érték
$M_e$ Előírt tehetetlenség	$1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$B_e$ Előírt viszkózus csillapítás	$4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$K_e$ Előírt rugóállandó	$16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
$J$ Motor tehetetlensége	$0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$K_m$ Motor nyomatékállandója	$0.01 \text{ Nm} \cdot \text{A}^{-1}$
$B_m$ Motormodell viszkózus csillapítása	$0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$L$ Motor induktivitása	$0.2 \text{ H}$
$R$ Motor ellenállása	$1 \Omega$

Az áthelyezett pólusok  $P = [-2.00 - 3.46i \quad -2.00 + 3.46i \quad -8.00]$  és a megfigyelő pólusai  $P_o = [-8.00 \quad -8.00]$ . Az első két áthelyezett pólust az impedanciamodell határozza meg.



3.1. ábra. Az impedanciamodell és a szabályozó összehasonlítása pozíció egységugrás bemenetre



3.2. ábra. Az impedanciamodell és a szabályozó összehasonlítása külső nyomaték egységugrás bemenetre

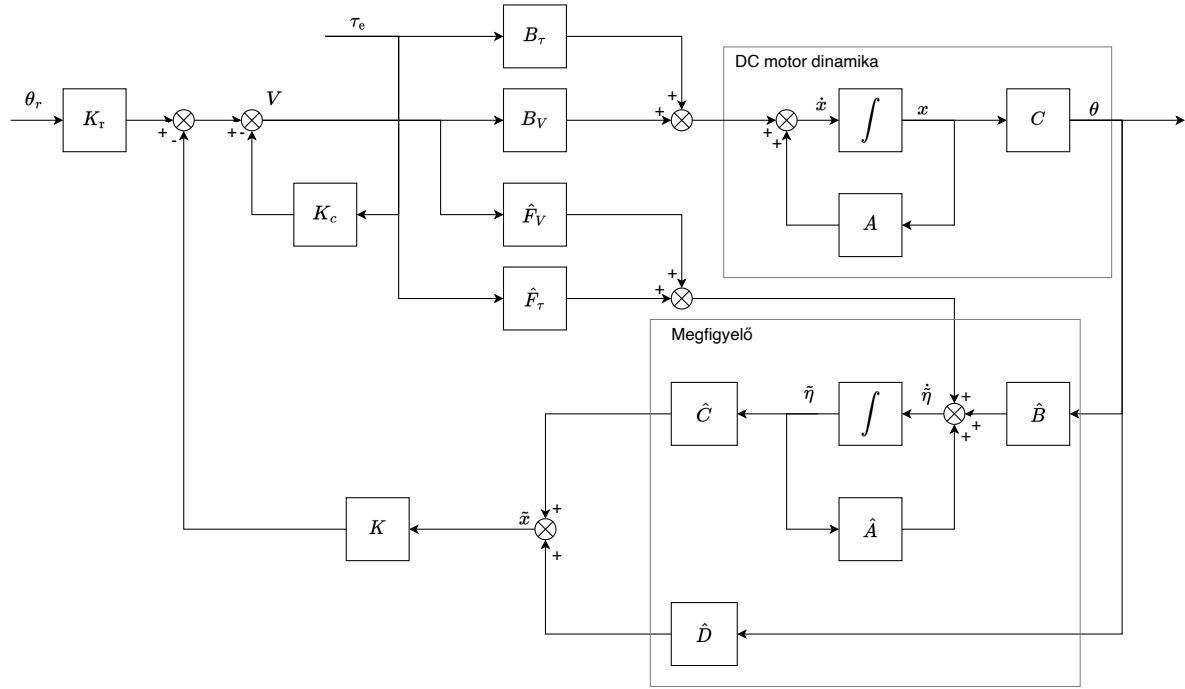
A többi pólus meghatározásához szükséges feltételek vizsgálata a nyomatékválasz korrigálása után következik. A pólusok alapján a visszacsatolási mátrixok az Ackermann formulával lettek meghatározva.

### 3.3. Nyomaték kompenzáció

A rendszer válasza a külső nyomaték bemenetre adott egységugrás jelre a 3.2. ábrán látható. Az alkalmazott paraméterek a 3.1. táblázatban szerepelnek. A végérték nem egyezik meg az impedanciamodell által előírt értékkel, így további módosításokra van szükség. A modell két bemenete közül csak a feszültségre van hatással a szabályozó, így a környezet által kifejtett külső nyomaték hatását is a feszültség megváltoztatásával kell kompenzálni. A kompenzáció többek között a külső nyomaték direkt vagy indirekt visszacsatolásával érhető el. Direkt mérés esetén a külső nyomaték értékét egy szenzor adja meg. A további vizsgálatok során feltételezett, hogy a szenzor dinamikája elhanyagolhatónak tekinthető. Az állapotmegfigyelővel és kompenzációval ellátott rendszer teljes blokkdiagramját a 3.3. ábra mutatja.

A kompenzált rendszernél alkalmazott visszacsatolási összefüggés a (3.7) egyenlethez

### 3. SZABÁLYOZÓ MODELLEZÉSE



3.3. ábra. Impedancia szabályozó közvetlen nyomaték méréssel

hasonló, azonban megjelenik a mért külső nyomaték:

$$V = K_r \theta_r - K_c \tau_e - \mathbf{K} \tilde{x}, \quad (3.16)$$

ahol  $\mathbf{K}$  az állapot visszacsatolási mátrix,  $K_c$  a nyomaték kompenzációs együttható,  $K_r$  a bemeneti erősítési tényezője és  $\theta_r$  az előírt szögelfordulás. A pozíció szabályozónál alkalmazott levezetéshez hasonlóan meghatározható a módosított rendszer teljes dinamikája. A visszacsatolási összefüggést behelyettesítve az (2.5). egyenletbe:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_V [-\mathbf{K}\tilde{x} - K_c\tau + K_r\theta_r] + \mathbf{B}_\tau\tau, \quad (3.17)$$

mely a becsült és a valódi állapotok közötti hibával kifejezve

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_V \mathbf{K}) \mathbf{x} + \mathbf{B}_V \mathbf{K} \mathbf{e} + (\mathbf{B}_\tau - \mathbf{B}_V K_c) \tau + \mathbf{B}_V K_r \theta_r \quad (3.18)$$

alakra hozható. A megfigyelő bemenetét kiegészítve a mért külső nyomatékkal:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_b &= \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{A}_{bb}x_b + \mathbf{B}_{Vb}V + \mathbf{B}_{\tau b}\tau_e, \\ \dot{\tilde{x}}_b &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \tilde{x}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}x_b + \mathbf{B}_{Vb}V + \mathbf{B}_{\tau b}\tau_e, \end{aligned} \quad (3.19)$$

melyeket kivonva egymásból

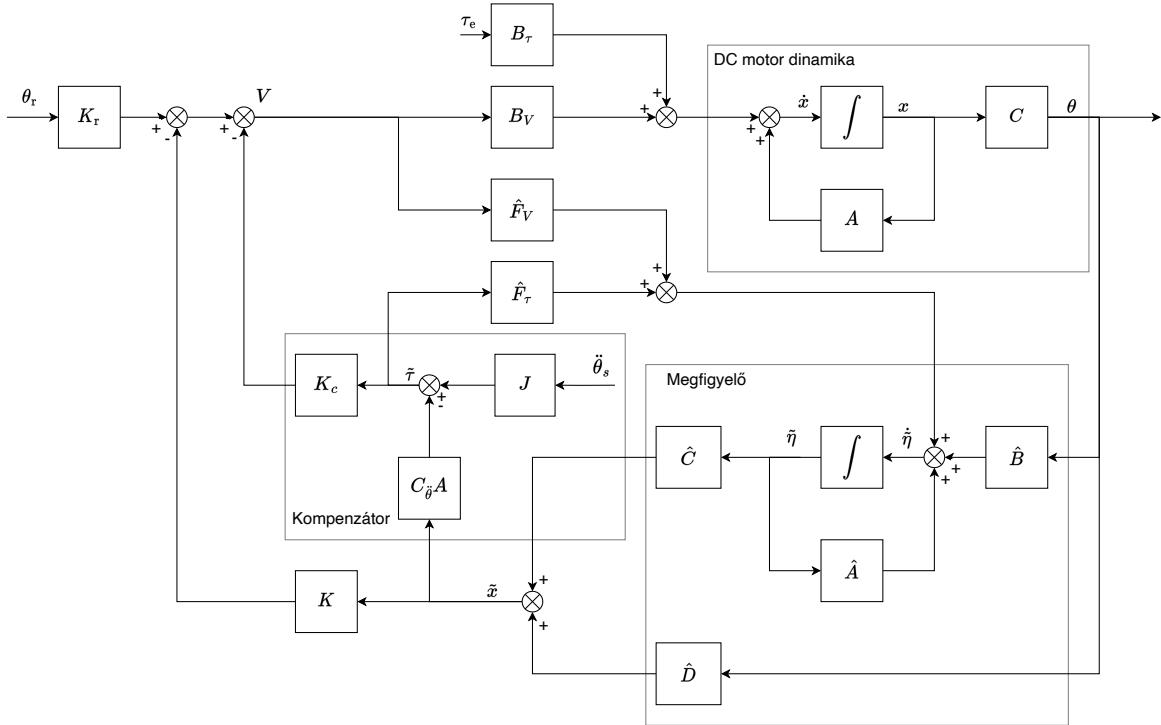
$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{e}. \quad (3.20)$$

A rendszer dinamikája blokk mátrix alakban

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_V \mathbf{K} & \mathbf{B}_V \mathbf{K}_b \\ 0 & \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\tau - \mathbf{B}_V \mathbf{K}_c & \mathbf{B}_V \mathbf{K}_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_e \\ \theta_r \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

A megfigyelő belső hibájának megváltozása már csak a pillanatnyi belső hibától függ. A  $\mathbf{K}_e$  mátrixot megfelelően kiválasztva a rendszer belső hibáját tekintve exponenciálisan stabil. Mivel a rendszer teljesen irányítható, a  $\mathbf{K}$  visszacsatolási mátrixot megfelelően kiválasztva a teljes rendszer is exponenciálisan stabil. Továbbá a  $K_c$  nyomaték kompenzációs paraméter segítségével a nyomatékválasz végértéke is beállítható.

Indirekt nyomaték visszacsatolás kontextusában (a rendszer szögggyorsulásának mérése alapján) a 3.4. ábra mutatja a teljes blokdiagramot. Ekkor egy becsült nyomaték



3.4. ábra. Impedancia szabályozó szögggyorsulás méréssel

érték kerül visszacsatolásra:

$$\tilde{\tau} = J \ddot{\theta}_s - \mathbf{C}_{\ddot{\theta}} \mathbf{A} \tilde{x}, \quad (3.22)$$

ahol  $\ddot{\theta}_s$  a forgórész mért szögggyorsulása és  $\mathbf{C}_{\ddot{\theta}} = [0 \ 1 \ 0]$ , tehát a becsült állapot és

### 3. SZABÁLYOZÓ MODELLEZÉSE

---

a mért szöggylorsulás lineáris kombinációjával adható meg. A feszültséggel a becsült nyomatékértékkal:

$$V = K_r \theta_r - K_c \tilde{\tau} - \mathbf{K} \tilde{x}. \quad (3.23)$$

Az előző vezetéshez hasonlóan meghatározható a teljes rendszer dinamikája:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_V \mathbf{K} & \mathbf{B}_V (\mathbf{K}_b - \mathbf{C}_{\ddot{\theta}} \mathbf{A}_{*b} K_c) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{B}_{tb} \mathbf{C}_{\ddot{\theta}} \mathbf{A}_{*b} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\tau - \mathbf{B}_V K_c & \mathbf{B}_V K_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_e \\ \theta_r \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

A megfigyelő visszacsatolási mátrixának kiválasztása valamelyest módosul, de a megfelelő mátrixokkal a rendszer továbbra is exponenciálisan stabil. Ebben az alkalmazásban direkt mérés alapján kerül meghatározásra a rendszerre ható külső nyomaték, így a továbbiakban a 3.3. ábrán látható modell vizsgálata fog folytatódni.

A kompenzáció csak akkor lehet eredményes, ha a modellezett motor feszültség és külső nyomaték hatására is egyaránt közel azonos sebességgel reagál. Ennek pontos definiálása következik most. A direkt nyomaték méréssel kompenzált modell válasza egységugrás bemenetre a 3.5. és 3.6. ábrán látható. A nyomaték jelre adott válasznál a bemenet 0.1 Nm nagyságú. A felhasznált paramétereket a 3.2 táblázat tartalmazza.

3.2. táblázat. A kompenzált szabályozónál alkalmazott paraméterek

Szimbólum és paraméter név	Érték
$M_e$ Előírt tehétetlenség	$1.00 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$B_e$ Előírt viszkózus csillapítás	$4.00 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$K_e$ Előírt rugóállandó	$1.60 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
$J_a$ Rotor tehétetlensége	$1.44 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$J_L$ Terhelés tehétetlensége	$1.00 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$J$ Átszámított tehétetlenség	$1.58 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$g$ Áttételi arány	84.3284
$i_f$ Terhelés nélküli állapot állandósult motorárama	$4.01 \times 10^{-2} \text{ A}$
$\dot{\theta}_f$ Terhelés nélküli állapot állandósult szögsebessége	$7.10 \times 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
$B_m$ Motormodell viszkózus csillapítása	$5.64 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$K_m$ Motor nyomatékállandója	$0.998 \text{ Nm} \cdot \text{A}^{-1}$
$L$ Motor induktivitása	0.452 H
$R$ Motor ellenállása	10.6 Ω

A pólusok továbbra is a 3.1. táblázat után definitált értékek. A motorparaméterek a függelékből található ?? és ?? ábrákon szereplő paraméterek alapján lettek meghatározva. Az ábrák egy valós kísérleti összeállítás motorjának paramétereit tartalmazzák. Ez az összeállítás tartalmaz egy fogaskerekes áttételeket, így bizonyos paramétereket át kell számítani a terhelési oldalról a motor oldalára. A motor viszkózus csillapítása és

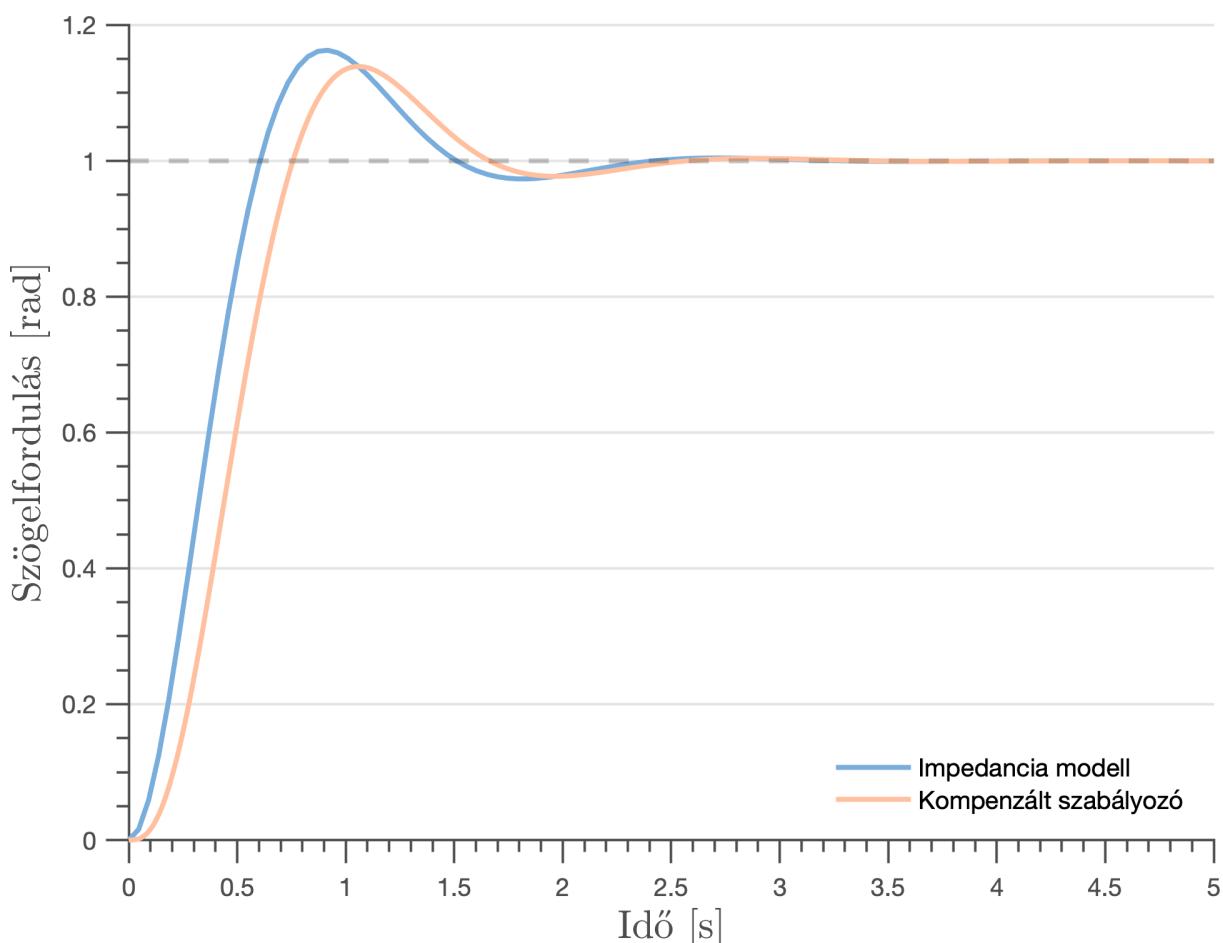
tehetetlensége származtatott értékek, melyek

$$\begin{aligned} J &= J_a + \frac{1}{g^2} J_L, \\ B_m &= \frac{K_m i_f}{\dot{\theta}_f}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A nyomaték kompenzációs együttható

$$K_c = L \frac{-B_m M_e + B_e J - J M_e p + J^2 p}{J K_m M_e} \quad (3.26)$$

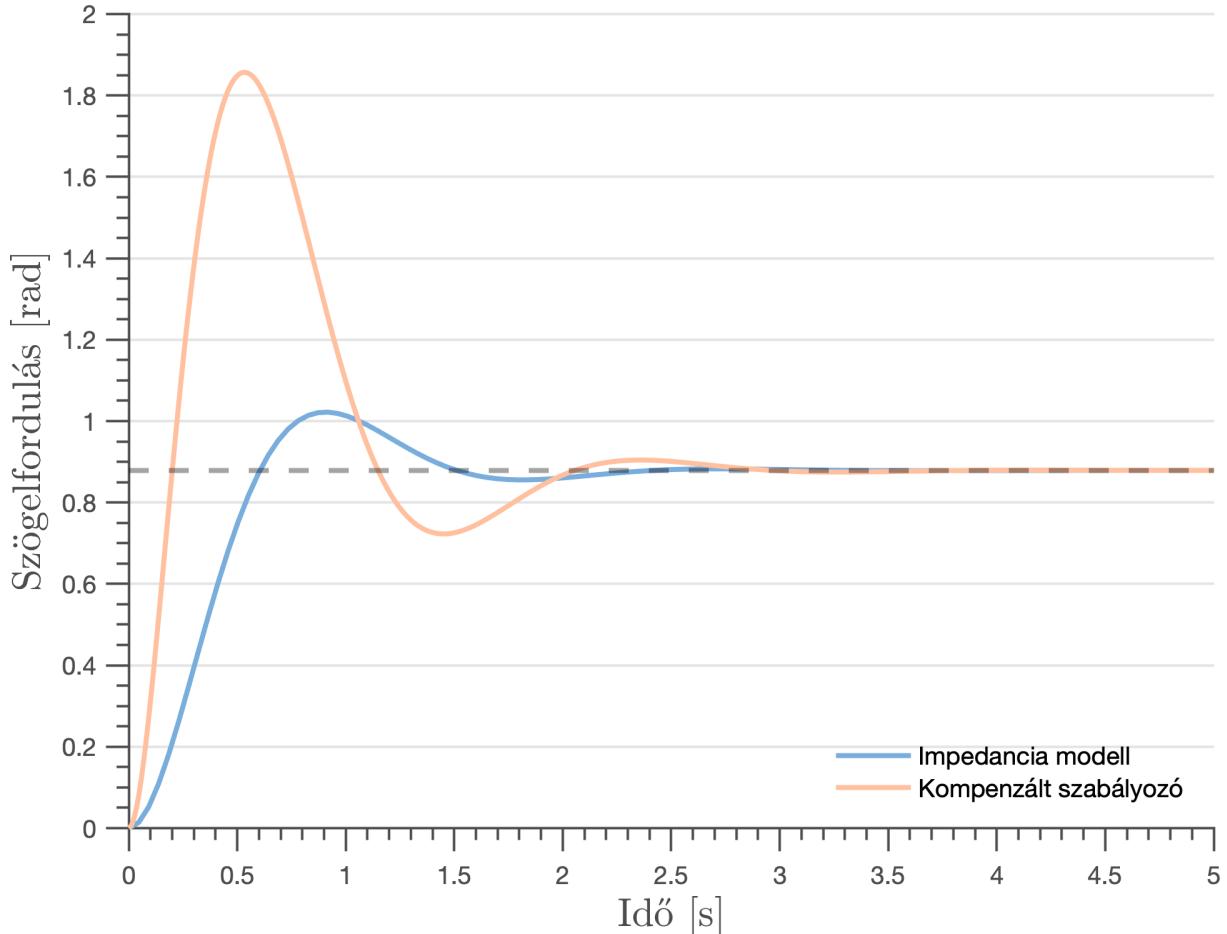
összefüggés szerint számolható a végérték tétel alapján a (3.14) egyenlethez hasonlóan. A pozíció referencia jelre adott válasz változatlan, azonban a külső nyomatékre adott válasz végértéke már megegyezik az impedanciamodell által előírt értékkel. A válaszban megfigyelhető túllövés kiküszöböléshez a motor és az impedanciamodell paraméterei, valamint a rendszer válasza közötti kapcsolat további vizsgálata szükséges.



3.5. ábra. Az impedanciamodell és a kompenzált szabályozó összehasonlítása pozíció egységugrás bemenetre

### 3. SZABÁLYOZÓ MODELLEZÉSE

---



3.6. ábra. Az impedanciamodell és a kompenzált szabályozó összehasonlítása külső nyomaték egységugrás bemenetre

Először is az impedanciamodell paraméterei minden valós pozitív értékkal kell rendelkezzenek, enélkül a rendszer azonnal instabil lesz. Ez a Routh–Hurwitz kritérium alapján következik az impedanciamodell karakterisztikus egyenletéből. Az áthelyezett pólusok közül az első kettőt az impedanciamodell előírt értékei határozzák meg. A harmadik áthelyezett pólus, illetve a megfigyelő pólusai függetlenek. A független pólusok meghatározásához minden egyik azonos lesz és valós értékű. Ha a pólusok túl közel helyezkednek el az impedanciamodell pólusaihoz, esetleg még a képzetes tengelyhez is közelebb vannak, akkor eltorzítják a választ. Ha túl nagy negatív valós értékkel rendelkeznek, az a szabályozó kimenetének szaturációjához vezet, illetve magát a szabályozót is instabillá teszik. Ennek elkerülése érdekében a lehető legkisebb abszolút értékű negatív valós pólus használata a cél. A rendszer átviteli függvénye a pozíció referencia jelet tekintve (3.15) felhasználásával:

$$\frac{\theta(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K_e p}{(p - s)(M_e s^2 + B_e s + K_e)}, \quad (3.27)$$

ahol  $p$  a keresett szabadon választható pólus. A pólus hatása közelíthető egy időkéses taggal, mivel

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s + \dots, \quad (3.28)$$

ahol  $\tau$  az időkésés. Fontos megjegyezni, hogy ez a közelítés csak  $p \gg 1$  esetben alkalmazható. Az átviteli függvény a következő késleltetett másodrendű rendszerrel közelíthető:

$$\frac{\theta(s)}{\theta_r(s)} \approx \frac{K_e}{M_e s^2 + B_e s + K_e} e^{\frac{1}{p}s}, \quad (3.29)$$

tehát  $\tau = -\frac{1}{p}$  felhasználható a pólus maximumának meghatározásához. A továbbiakban ez az időkésés a rendszer beállási idejének legfeljebb 5%-ára lesz korlátozva. Eszerint a pólus legfeljebb:

$$p_{\max} = -\frac{1}{\frac{4}{\zeta \omega_0} \cdot 0.05} = -\frac{B_e}{8M_e \cdot 0.05} \quad (3.30)$$

lesz. A külső nyomatékkra adott válasz időtartománybeli vizsgálata további feltételekhez vezet. Nem minden paraméterkombináció ad elfogadható választ, ahogy a 3.6. ábrán is látszik. A rendszer átviteli függvénye a külső nyomaték jelet tekintve:

$$\frac{\theta(s)}{\tau_e(s)} = \frac{Jp - M_e s}{J(p-s)(M_e s^2 + B_e s + K_e)} = \frac{1 - \frac{M_e}{Jp} s}{(1 - \frac{1}{p}s)(M_e s^2 + B_e s + K_e)}. \quad (3.31)$$

Hasonlóan az előző feltételhez a függvény közelíthető egy késleltetett másodrendű rendszerrel. A válaszban megjelenik a bemenet deriváltja. A derviált tag hatásának korlátozása ad újabb maximumot a független pólusok értékére. A továbbiakban a bemeneti jel deriváltjának együtthatója legalább egy nagyságrenddel kisebb kell legyen egynél. Ebből következik, hogy a pólus értékének maximuma:

$$p_{\max} = -10 \cdot \frac{M_e}{J} \quad (3.32)$$

A két feltétel együtt azt eredményezi, hogy a pólus értéke abszolút értékben a lehető legkisebb, amikor az előírt tehetetlenség és a pólus értékének maximuma:

$$\begin{aligned} M'_e &= 0.5 \cdot \sqrt{JB_e}, \\ p'_{\max} &= -5 \cdot \sqrt{\frac{B_e}{J}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3. SZABÁLYOZÓ MODELLEZÉSE

---

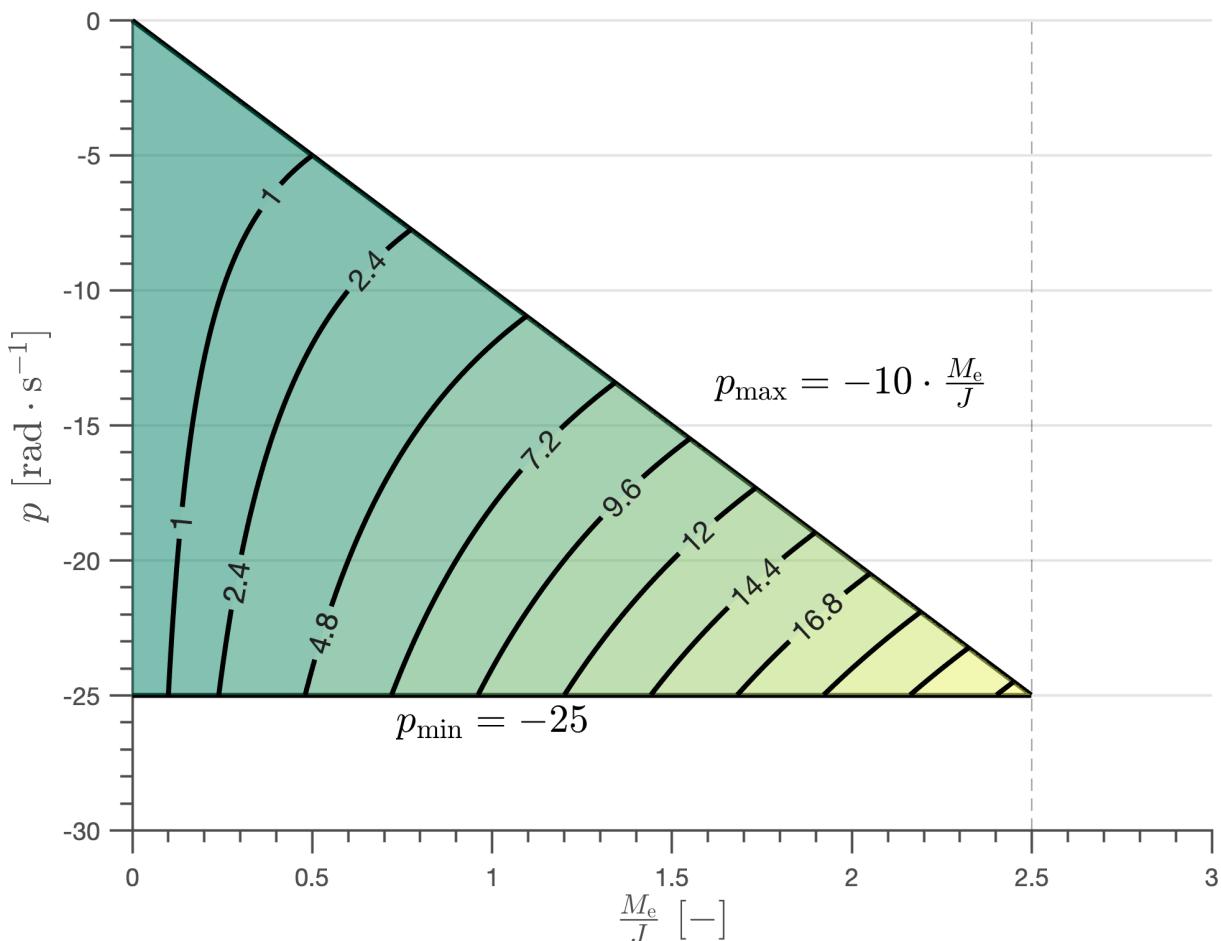
A szaturáció elkerüléséhez szükséges feltételek részletes vizsgálata túlmutat ezen a dolgozaton, azonban feltételezhetően a pólusválasztásnál van egy minimum érték, mely alatt a rendszer nem képes követni az impedanciamodellt. Jelölje  $p_{\min}$  ezt a minimumot. Ekkor az előírt tehetetlenség lehetséges értékei a (3.30) és a (3.32) egyenletekben szereplő feltételek szerint egy adott intervallumra korlátozódnak:

$$-\frac{B_e}{8p_{\min} \cdot 0.05} < M_e < -0.1 \cdot Jp_{\min}, \quad (3.34)$$

illetve az előírt viszkózus csillapítási együtthatóra is adódik egy maximális korlát (3.33) alapján:

$$B_{e,\max} = 0.04 \cdot Jp_{\min}^2, \quad (3.35)$$

ami felett nem választható ki olyan pólus, mely a követelményeknek megfelelő választ eredményez. Egy adott  $p_{\min}$  minimum pólus értékre és  $J$  motor tehetetlenségre ábrázolja a választható tehetetlenség - pólus párokat a 3.7. ábra. A kontúrok konstans normalizált  $\frac{B_e}{J}$  előírt viszkózus csillapítási tényezőket jelölnek a (3.30) egyenlet szerint.



3.7. ábra. Az előírható tehetetlenség és a független pólus közötti összefüggés

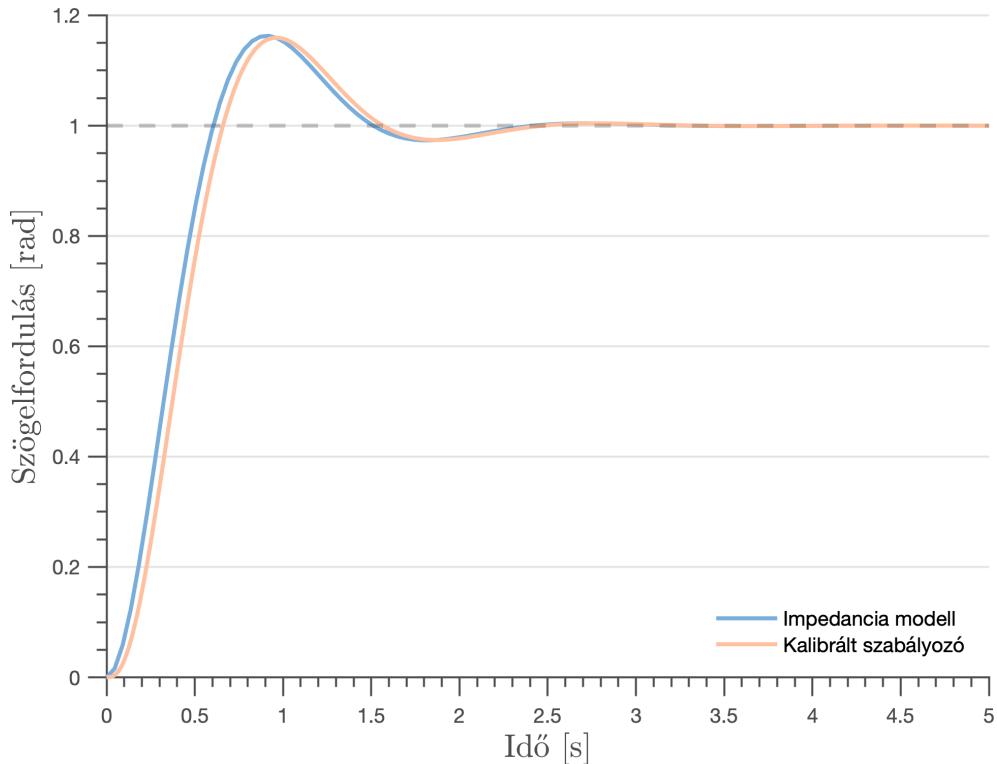
Az előző feltételek alapján a pozíció referencia jelre és külső nyomaték hatására is megfelelő válasz kapható. Egy ilyen válasz látható a 3.8. és a 3.9. ábrán. A módosított impedanciamodell paramétereit a 3.3. táblázat tartalmazza. Az összes többi paraméter továbbra is megegyezik a 3.2. táblázatban megtalálható értékekkel.

### 3.3. táblázat. A kalibrált szabályozónál alkalmazott paraméterek

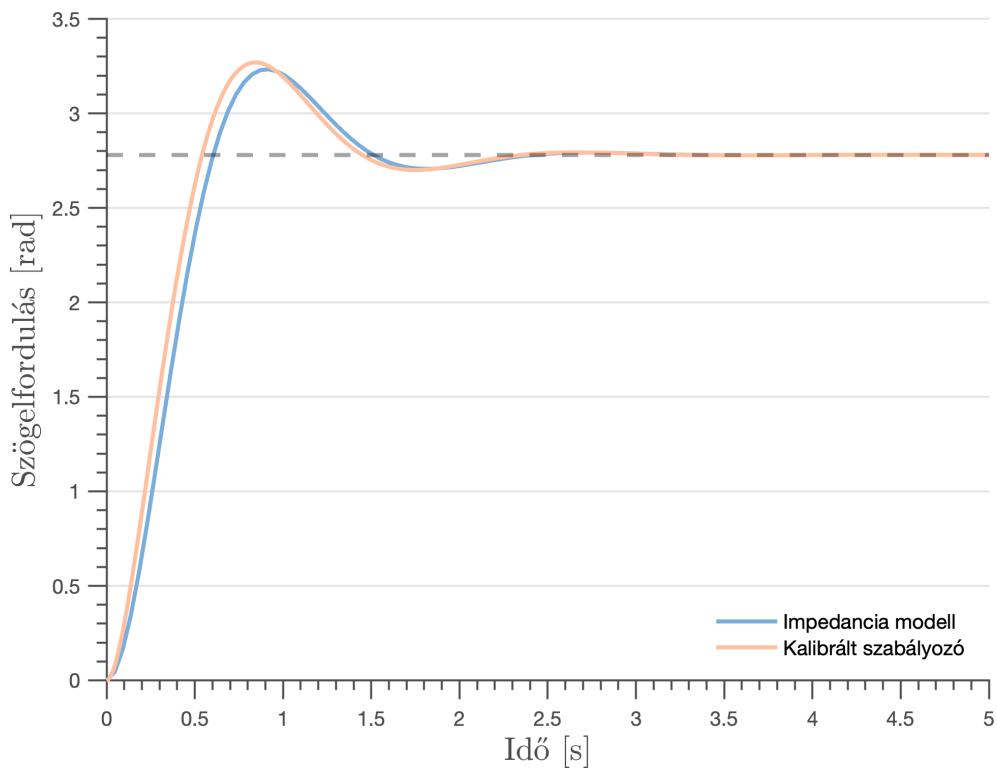
Szimbólum és paraméter név	Érték
$M_e$ Előírt tehetetlenség ( $2J$ )	$3.16 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$B_e$ Előírt viszkózus csillapítás ( $4M_e$ )	$1.26 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$K_e$ Előírt rugóállandó ( $4B_e$ )	$5.06 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
$p$ További pólusok	-20 rad · s <sup>-1</sup>
$K_c$ Nyomaték kompenzációs együttható	-160.83 V · N <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>

### 3. SZABÁLYOZÓ MODELLEZÉSE

---



3.8. ábra. Az impedanciamodell és a kalibrált szabályozó összehasonlítása pozíció egységugrás bemenetre



3.9. ábra. Az impedanciamodell és a kalibrált szabályozó összehasonlítása külső nyomaték egységugrás bemenetre

Az impedanciamodell előírt rugóállandójára az előző elemzés nem ad korlátot, viszont ennek a paraméternek a növelésével növekszik a modell sajátfrekvenciája. Ez mindenkor egyre nagyobb előírt gyorsulással jár, mely a motorra kapcsolt feszültség szaturációjához vezet.

Az áthelyezett pólusok értékeinek függvényében a szabályozó önmagában instabil lehet. Mivel a rendszer szabályozás nélkül instabil, mindenkor szükséges független biztonsági mechanizmus beépítése, így ennek az esetnek az elemzése elmarad.



# 4. Stabilitásvizsgálat időkésessel

---

A modell és a motor paramétereiken kívül a rendszer különböző elemeiben megjelenő időkésés is hatással van a stabilitásra. Elegendően nagy időkésés mellett nem csak a mozgásra előírt feltételek sérülnek, hanem teljesen instabillá válhat a rendszer. Az időkésés hatását analitikusan egyszerűbb rendszereknél például a Lambert-féle W-függvény segítségével (Sun Yi, 2007; Yi és tsai., 2012), vagy D-szeparációval lehet vizsgálni. A Lambert-féle W-függvény bonyolultabb rendszereknél nehezen vagy egyáltalán nem alkalmazható (Cepeda-Gomez és tsai., 2015), így a következő fejezetben a D-szeparáció módszere kerül alkalmazásra.

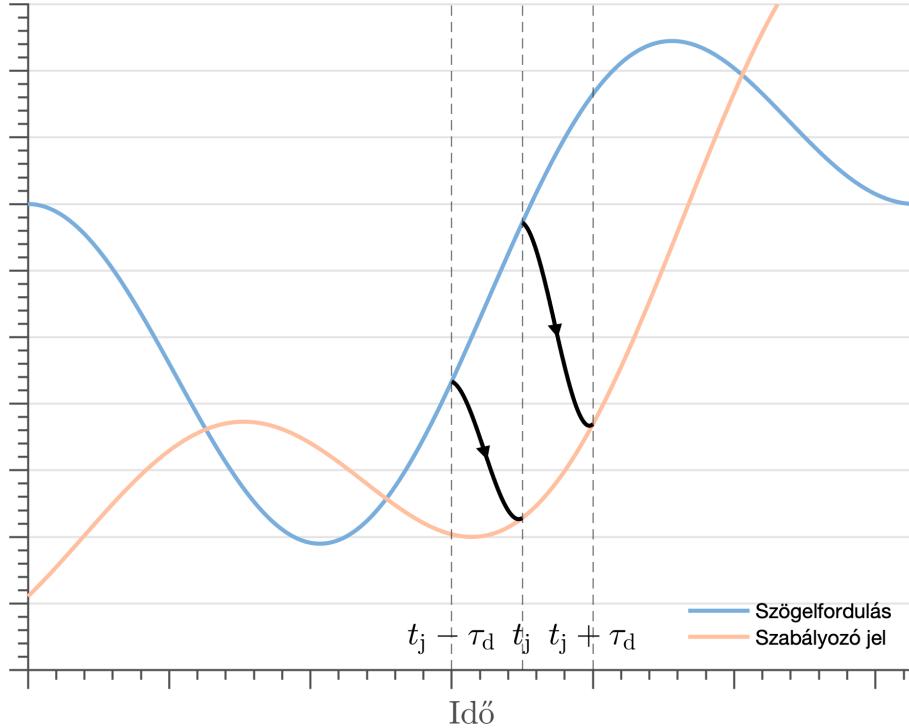
## 4.1. Stabilitás folytonos időben

Időkésés megjelenhet a rendszer különböző pontjain. A motor kimenetének mérése, az adatáramlás a szabályozó részegységei között és a szabályozó jel kiszámítása minden időt vesznek igénybe. Ezeknek a hatásoknak az összeségét egy konstans átlag időkésés reprezentálja. A továbbiakban ez a paraméter legyen  $\tau_d$ . A szabályozó jel  $\tau_d$  időegységgel eltolódva jelenik meg a motor bemenetén, ahogy a 4.1. ábra szemlélteti.

A stabilitásvizsgálat az időkéséssel kiegészített szögelfordulás-referencia jel átviteli függvényből kiindulva végezhető el. Az időkéséssel kiegészített blokk diagram egyszerűsített alakban a 4.2. ábrán látható. A motor átviteli függvényei a (2.12) egyenletekben szerepelnek. A szabályozó dinamikáját az átláthatóság érdekében a következő egyenletek összegzik:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\eta}} &= \hat{\mathbf{A}}\tilde{\eta} + \hat{\mathbf{B}}y + \hat{\mathbf{F}}_V V + \hat{\mathbf{F}}_\tau \tau_e, \\ \tilde{\eta} &= \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y, \\ V &= K_r \theta_r - K_c \tau_e - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}},\end{aligned}\tag{4.1}$$

ahol a megfigyelő belső dinamikáját leíró egyenletben megjelenő mátrixok a (3.2)



4.1. ábra. Reprezentatív ábra az időkésés hatásáról folytonos időben

kifejezésekhez hasonlóan:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}, \\ \hat{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{A}} \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}, \\ \hat{\mathbf{F}} &= \mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_a.\end{aligned}\quad (4.2)$$

A kimeneti feszültség egyenletében található becsült állapotvektor kifejezhető a megfigyelő belső állapotával és a mért kimenettel:

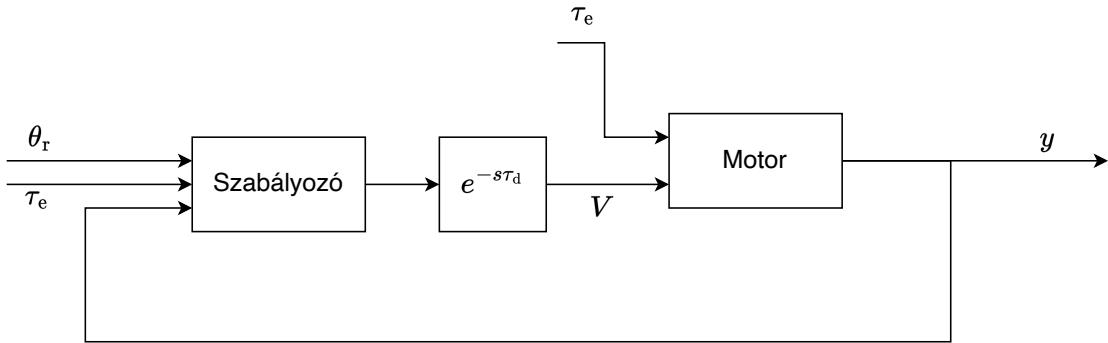
$$V = K_r \theta_r - K_c \tau_e - (K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e) y - \mathbf{K}_b \tilde{\eta}. \quad (4.3)$$

Behelyettesítve a megfigyelő dinamikai egyenletébe:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\eta}} &= \hat{\mathbf{A}} \tilde{\eta} + \hat{\mathbf{B}} y + \hat{\mathbf{F}}_V [K_r \theta_r - K_c \tau_e - (K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e) y - \mathbf{K}_b \tilde{\eta}] + \hat{\mathbf{F}}_\tau \tau_e \\ &= (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{F}}_V \mathbf{K}_b) \tilde{\eta} + [\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{F}}_V (K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e)] y + \hat{\mathbf{F}}_V K_r \theta_r + (\hat{\mathbf{F}}_\tau - \hat{\mathbf{F}}_V K_c) \tau_e.\end{aligned}\quad (4.4)$$

A szabályozó dinamikája ez alapján kifejezhető egy új állapottér modell formájában:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\eta}} &= \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\eta} + \tilde{\mathbf{B}}_y y + \tilde{\mathbf{B}}_r \theta_r + \tilde{\mathbf{B}}_\tau \tau_e, \\ V &= \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\eta} + \tilde{\mathbf{D}}_y y + \tilde{\mathbf{D}}_r \theta_r + \tilde{\mathbf{D}}_\tau \tau_e,\end{aligned}\quad (4.5)$$



4.2. ábra. Időkésessel kiegészített egyszerűsített blokk diagram

ahol a mátrix paraméterek (4.4) szerint:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{A}} &= \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{F}}_V \mathbf{K}_b, \\
 \tilde{\mathbf{B}}_y &= \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{F}}_V (K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e), \\
 \tilde{\mathbf{B}}_r &= \hat{\mathbf{F}}_V K_r, \\
 \tilde{\mathbf{B}}_\tau &= \hat{\mathbf{F}}_\tau - \hat{\mathbf{F}}_V K_c, \\
 \tilde{\mathbf{C}} &= -\mathbf{K}_b, \\
 \tilde{\mathbf{D}}_y &= -(K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e), \\
 \tilde{\mathbf{D}}_r &= K_r, \\
 \tilde{\mathbf{D}}_\tau &= -K_c.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

A szabályozó és a motor állapottér egyenletei időkésessel kiegészítve a következő átviteli függvényel írhatók le:

$$y = \left( C_r^V \theta_r + C_\tau^V \tau_e + C_y^V y \right) M_V^y e^{-s\tau_d} + M_\tau^y \tau_e, \tag{4.7}$$

ahol a  $C_m^n$  és  $M_m^n$  a szabályozó és a motor átviteli függvényei adott bemenetekre és kimenetekre. A felső index jelöli a kimenetet, az alsó index pedig a bemenetet. Az átviteli egyenlet zárt körben:

$$y = \frac{1}{1 - M_V^y C_y^V e^{-s\tau_d}} \left[ M_V^y C_r^V \theta_r e^{-s\tau_d} + \left( M_\tau^y + M_V^y C_\tau^V e^{-s\tau_d} \right) \tau_e \right] \tag{4.8}$$

alakban írható le. A motor és a szabályozó átviteli függvényei bemenettől és kimenettől függetlenül ugyanazokkal a pólusokkal rendelkeznek, így minden két bemenetre ugyanazok a stabilitási feltételek érvényesek. Az átviteli függvény pólusait a következő

egyenlet megoldásai adják:

$$s^5 + \left( c_{41} + c_{42} \frac{B_e}{M_e} \right) s^4 + \left( c_{31} + c_{32} \frac{B_e}{M_e} + c_{33} \frac{K_e}{M_e} \right) s^3 + \\ \left[ c_{21} + c_{22} \frac{B_e}{M_e} + c_{23} \frac{K_e}{M_e} + \left( c_{24} + c_{25} \frac{B_e}{M_e} + c_{26} \frac{K_e}{M_e} \right) e^{-s\tau_d} \right] s^2 + \\ \left[ c_{11} + c_{12} \frac{B_e}{M_e} + c_{13} \frac{K_e}{M_e} + \left( c_{14} + c_{15} \frac{B_e}{M_e} + c_{16} \frac{K_e}{M_e} \right) e^{-s\tau_d} \right] s + c_0 \frac{K_e}{M_e} = 0. \quad (4.9)$$

D-szeparációt alkalmazva az egyenlet valós és képzetesz részei:

$$\begin{aligned} a_4 \omega^4 - (a_{21} + a_{22} \cos \omega \tau_d) \omega^2 + a_{12} \omega \sin \omega \tau_d + a_0 \cos \omega \tau_d &= 0 \\ a_5 - a_3 \omega^3 + a_{22} \omega^2 \sin \omega \tau_d + (a_{11} + a_{12} \cos \omega \tau_d) \omega - a_0 \sin \omega \tau_d &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

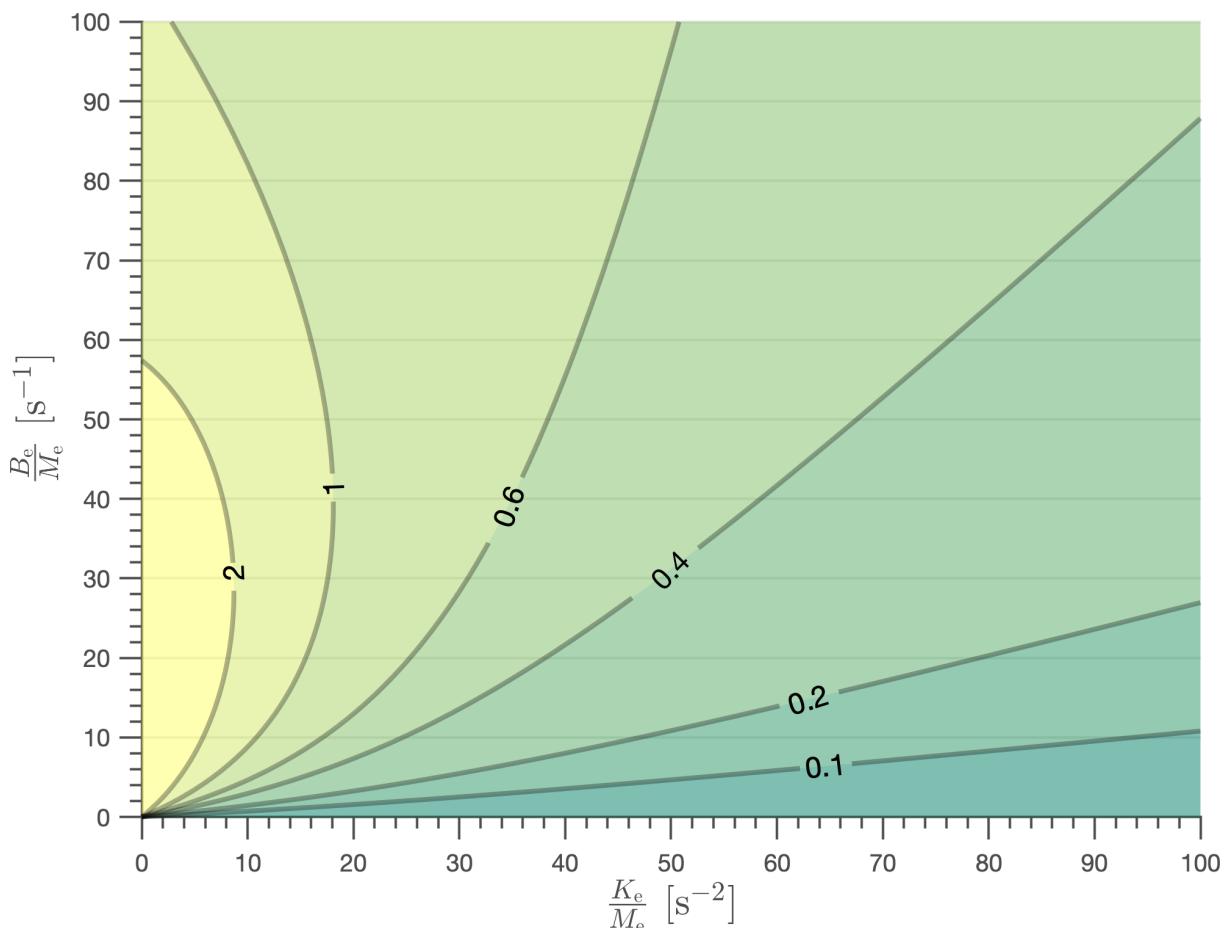
melyek  $s = jw$  behelyettesítés után adódnak. Az új együtthatók (4.9) alapján:

$$\begin{aligned} a_4 &= c_{41} + c_{42} \frac{B_e}{M_e} \\ a_3 &= c_{31} + c_{32} \frac{B_e}{M_e} + c_{33} \frac{K_e}{M_e} \\ a_{21} &= c_{21} + c_{22} \frac{B_e}{M_e} + c_{23} \frac{K_e}{M_e} \\ a_{22} &= c_{24} + c_{25} \frac{B_e}{M_e} + c_{26} \frac{K_e}{M_e} \\ a_{11} &= c_{11} + c_{12} \frac{B_e}{M_e} + c_{13} \frac{K_e}{M_e} \\ a_{12} &= c_{14} + c_{15} \frac{B_e}{M_e} + c_{16} \frac{K_e}{M_e} \\ a_0 &= c_0 \frac{K_e}{M_e}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

A (4.10)-ben szereplő egyenletrendszer megoldva  $\frac{B_e}{M_e}$  és  $\frac{K_e}{M_e}$  kifejezésekre egy paraméteres görbe adódik. A független paraméter  $\omega$  a stabilitás határán fellépő csillapítatlan rezgés frekvenciájával arányos. A görbe minden pontjához egy tisztán képzetesz póluspár vagy nulla kapcsolódik. A nulla megoldások a  $\frac{K_e}{M_e} = 0$  egyenesen helyezkednek el. A kapott görbét a 4.1. táblázat paramétereit behelyettesítve a 4.3. ábra mutatja. A kontúrvonalakon szereplő értékek  $\tau_d$  időkésés különböző értékeit jelölik szekundumban kifejezve.

4.1. táblázat. A folytonos idejű stabilitásvizsgálatnál alkalmazott paraméterek

Szimbólum és paraméter név	Érték
$J$ Motor tehetetlensége	$0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$K_m$ Motor nyomatékállandója	$0.01 \text{ Nm} \cdot \text{A}^{-1}$
$B_m$ Motormodell viszkózus csillapítása	$0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$L$ Motor induktivitása	$0.2 \text{ H}$
$R$ Motor ellenállása	$1 \Omega$
$p$ További pólusok	$-15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
$K_c$ Nyomaték kompenzációs együttható	$-50 \text{ V} \cdot \text{N}^{-1} \text{m}^{-1}$



4.3. ábra. Folytonos idejű stabilitástérkép

Időkésés nélkül a görbe pontjai a  $\frac{B_e}{M_e} = 0$  egyenesen maradnak. A behatárolt stabilitástartomány éppen megegyezik a Routh–Hurwitz kritérium által kapott tartománnyal, tehát:

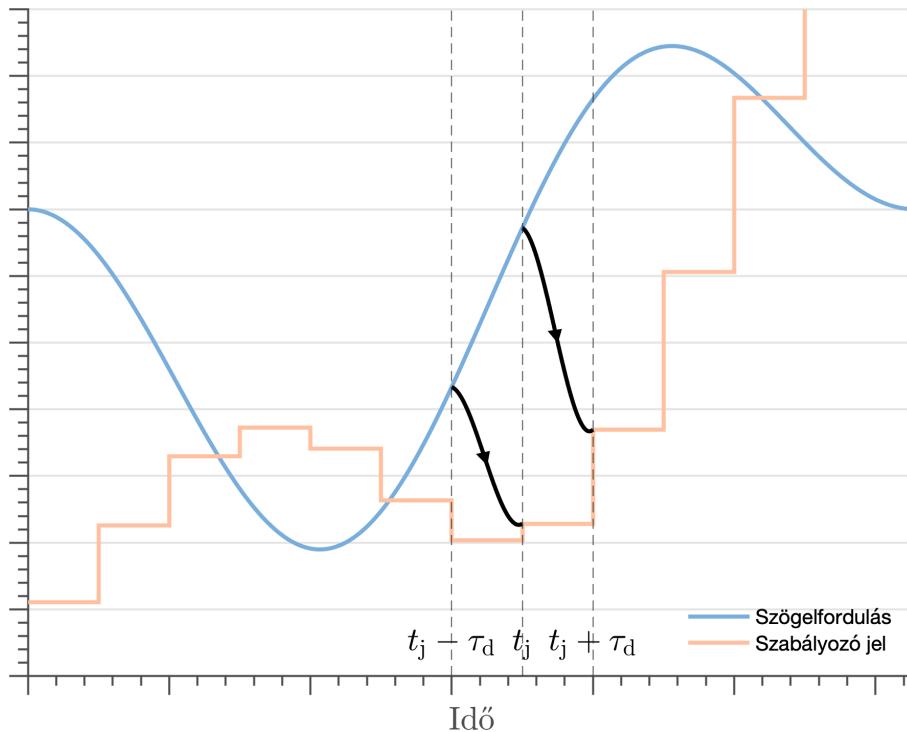
$$M_e > 0, \quad B_e > 0, \quad K_e > 0. \quad (4.12)$$

Az időkésés növekedésével egyre szűkül a stabil tartomány, egy kritikus érték alatt azonban csak  $\frac{K_e}{M_e}$  kifejezésre adódik maximum,  $\frac{B_e}{M_e}$  tetszőleges pozitív értéket felvehet.

A kritikus időkésés felett egy véges területet határolnak be a görbe  $\omega > 0$  és  $\omega = 0$  szegmensei.

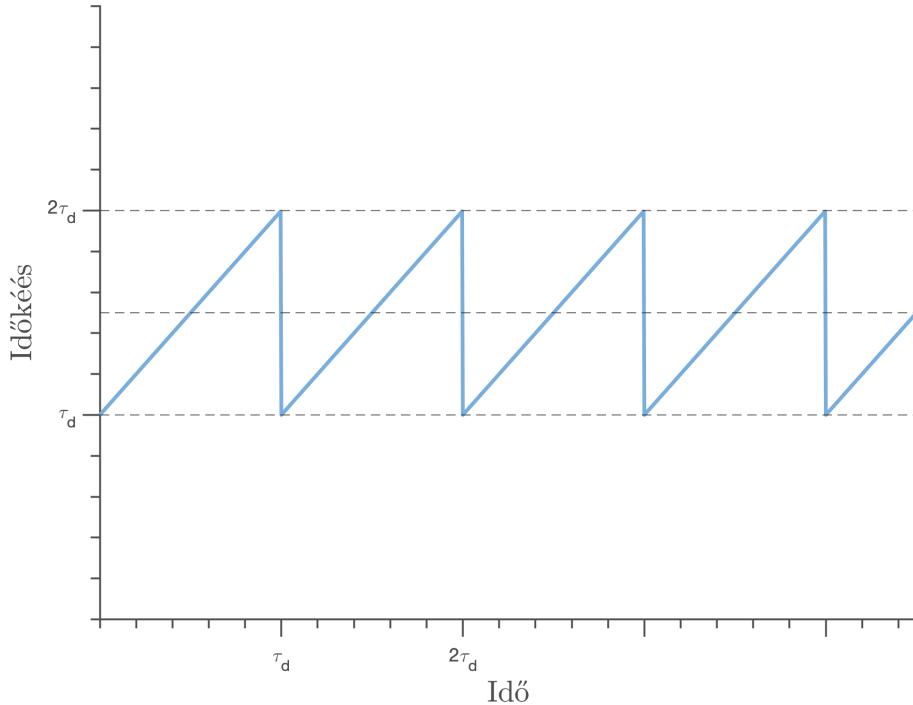
## 4.2. Stabilitás diszkrét időben

A folytonos időben végzett stabilitásvizsgálat alapján belátható, hogy az időkésés korlátozza az impedanciamodell által előírható paramétereket. A valós rendszerben egy digitális feldolgozóegység végzi el a szabályozó jel meghatározásához szükséges számításokat, közel azonos időnként. Két ilyen ciklus között a szabályozó jel állandó marad. Ezeket figyelembe véve a folytonos időben végzett stabilitásvizsgálat eredménye tovább pontosítható.



4.4. ábra. Reprezentatív ábra az időkésés hatásáról diszkrét időben

A mért szögelfordulás és a diszkrét idejű szabályozó jel kapcsolatát szemlélteti a 4.4. ábra. Két mintavételezési pont között a szabályozó jel változatlan marad (zero-order hold). A mért szögelfordulás érték feldolgozása után az új szabályozó jel minden egy mintavételezési periódussal később jelenik meg a motor bemenetén. A továbbiakban feltételezett, hogy a jelfeldolgozáshoz szükséges időn kívül minden egyéb késés elhanyagolható, így a mintavételezési periódus megegyezik a korábban bevezetett  $\tau_d$  időkéséssel. Legyen  $C(t - \tau(t))$  a szabályozó jel időfüggvénye. Ebben az alakban a mintavételezési pontok között akkor marad állandó a kimenet, ha az időkésés maga ( $\tau(t)$ ) egy periodikus fűrész jelet követ, ahogy a 4.5. ábra is mutatja.



4.5. ábra. Az időkésés periodikus függvénye

A diszkrét idejű stabilitásvizsgálathoz először diszkretizálni kell a szabályozó folytonos idejű állapottér modelljét. Ehhez legyen a kiindulási alap a (4.5) egyenletek által definiált modell. Beszorozva minden oldalt  $e^{-\tilde{A}t}$ -vel:

$$\begin{aligned} e^{-\tilde{A}t} \dot{\tilde{\eta}}(t) &= e^{-\tilde{A}t} \tilde{A} \tilde{\eta}(t) + e^{-\tilde{A}t} [\tilde{B}_y y(t) + \tilde{B}_r \theta_r(t) + \tilde{B}_\tau \tau_e(t)] \\ \frac{d}{dt} (e^{-\tilde{A}t} \tilde{\eta}(t)) &= e^{-\tilde{A}t} [\tilde{B}_y y(t) + \tilde{B}_r \theta_r(t) + \tilde{B}_\tau \tau_e(t)], \end{aligned} \quad (4.13)$$

a kapott egyenletet integrálva:

$$\begin{aligned} e^{-\tilde{A}t} \tilde{\eta}(t) - e^0 \tilde{\eta}(0) &= \int_0^t e^{-\tilde{A}t'} [\tilde{B}_y y(t') + \tilde{B}_r \theta_r(t') + \tilde{B}_\tau \tau_e(t')] dt' \\ \tilde{\eta}(t) &= e^{\tilde{A}t} \tilde{\eta}(0) + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-t')} [\tilde{B}_y y(t') + \tilde{B}_r \theta_r(t') + \tilde{B}_\tau \tau_e(t')] dt'. \end{aligned} \quad (4.14)$$

A mintavételezési periódus alatt a szabályozó összes bemenete konstans marad, így a bemenetek az integrálon kívülre helyezhetők. Legyen  $\tilde{\eta}[k] \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\eta}(k\tau_d)$  a a szabályázó belső állapota a  $k$ -adik diszkrét időlépésnél. Ezzel a (4.14). egyenlet a  $k$ -adik és a

$(k+1)$ -edik lépésekknél:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}[k] &= e^{\tilde{\mathbf{A}}k\tau_d} \tilde{\eta}(0) + \int_0^{k\tau_d} e^{\tilde{\mathbf{A}}(k\tau_d-t')} [\tilde{\mathbf{B}}_y y(t') + \tilde{\mathbf{B}}_r \theta_r(t') + \tilde{\mathbf{B}}_\tau \tau_e(t')] dt' \\ \tilde{\eta}[k+1] &= e^{\tilde{\mathbf{A}}\tau_d} \tilde{\eta}[k] + \int_{k\tau_d}^{(k+1)\tau_d} e^{\tilde{\mathbf{A}}(k\tau_d+\tau_d-t')} [\tilde{\mathbf{B}}_y y(t') + \tilde{\mathbf{B}}_r \theta_r(t') + \tilde{\mathbf{B}}_\tau \tau_e(t')] dt' \\ \tilde{\eta}[k+1] &= e^{\tilde{\mathbf{A}}\tau_d} \tilde{\eta}[k] + \int_{k\tau_d}^{(k+1)\tau_d} e^{\tilde{\mathbf{A}}(k\tau_d+\tau_d-t')} dt' [\tilde{\mathbf{B}}_y y[k] + \tilde{\mathbf{B}}_r \theta_r[k] + \tilde{\mathbf{B}}_\tau \tau_e[k]] \\ \tilde{\eta}[k+1] &= e^{\tilde{\mathbf{A}}\tau_d} \tilde{\eta}[k] + \tilde{\mathbf{A}}^{-1} (e^{\tilde{\mathbf{A}}\tau_d} - \mathbf{I}) [\tilde{\mathbf{B}}_y y[k] + \tilde{\mathbf{B}}_r \theta_r[k] + \tilde{\mathbf{B}}_\tau \tau_e[k]] .\end{aligned}\quad (4.15)$$

Tehát a diszkrét idejű szabályozó állapotér modelljét leíró mátrixok:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_d &= e^{\tilde{\mathbf{A}}\tau_d} \\ \tilde{\mathbf{B}}_d &= \tilde{\mathbf{A}}^{-1} (e^{\tilde{\mathbf{A}}\tau_d} - \mathbf{I}) [\tilde{\mathbf{B}}_y \ \tilde{\mathbf{B}}_r \ \tilde{\mathbf{B}}_\tau] \\ \tilde{\mathbf{C}}_d &= \tilde{\mathbf{C}} \\ \tilde{\mathbf{D}}_d &= \tilde{\mathbf{D}},\end{aligned}\quad (4.16)$$

ahol a mátrix exponenciális kifejezés szükség esetén például Taylor-polinommal közelíthető. A további számítások ezt a pontos alakot használják.

Következő lépésként a zárt kör dinamikáját is ki kell fejezni a diszkrét időlépések függvényeként. A szabályozónál alkalmazott vezetéshez hasonlóan (2.6)-ban szereplő mátrixok alapján:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[k+1] &= e^{\mathbf{A}\tau_d} \mathbf{x}[k] + \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}\tau_d} - \mathbf{I}) \mathbf{B}_V V[k-1] + \int_{k\tau_d}^{(k+1)\tau_d} e^{\mathbf{A}(k\tau_d+\tau_d-t')} \mathbf{B}_\tau \tau_e(t') dt' \\ y[k] &= \mathbf{C} \mathbf{x}[k].\end{aligned}\quad (4.17)$$

ahol megjelenik  $V[k-1]$  a szabályozó jel egy egész mintavételezési periódussal késleltetett értéke. Legyenek a diszkretizált motormodell új paraméterei:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_d &= e^{\mathbf{A}\tau_d} \\ \mathbf{B}_d &= \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}\tau_d} - \mathbf{I}) \mathbf{B}_V \\ \mathbf{C}_d &= \mathbf{C} \\ \mathbf{D}_d &= \mathbf{D}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

A stabilitásvizsgálathoz a bemenet zérus. A következőkben a zárt kör teljes dinamikájának vezetése következik zérus bemenettel. A (4.17) állapotegyenletbe behelyettesítve

a szabályozó késleltetett kimenetét:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d x[k] + \mathbf{B}_d (\tilde{\mathbf{C}}_d \tilde{\eta}[k-1] + \tilde{\mathbf{D}}_{d,y} y[k-1]) , \quad (4.19)$$

Felhasználva  $\tilde{\eta}$  és a paraméterek definícióját:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}_d x[k] - \mathbf{B}_d \mathbf{K}_a y[k-1] - \mathbf{B}_d \mathbf{K}_b \tilde{x}_b[k-1] \\ &= \mathbf{A}_d x[k] - \mathbf{B}_d \mathbf{K} \mathbf{x}[k-1] + \mathbf{B}_d \mathbf{K}_b \mathbf{e}[k-1] . \end{aligned} \quad (4.20)$$

A becsült állapot hibájának differencia egyenletei pedig:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}[k+1] &= \mathbf{x}_b[k+1] - \tilde{\mathbf{x}}_b[k+1] \\ &= \mathbf{E}_{xa,k} \mathbf{x}_a[k] + \mathbf{E}_{xb,k} \mathbf{x}_b[k] + \mathbf{E}_{x,k-1} \mathbf{x}[k-1] + \mathbf{E}_{e,k} \mathbf{e}[k] + \mathbf{E}_{e,k-1} \mathbf{e}[k-1] , \end{aligned} \quad (4.21)$$

ahol a mátrix együtthatók:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{xa,k} &= \mathbf{A}_{d,ba} + \tilde{\mathbf{A}}_d \mathbf{K}_e - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{d,aa} \\ \mathbf{E}_{xb,k} &= \mathbf{A}_{d,bb} + \tilde{\mathbf{A}}_d - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{d,ab} \\ \mathbf{E}_{x,k-1} &= -(\mathbf{B}_{d,b} - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_{d,a}) \mathbf{K} \\ \mathbf{E}_{e,k} &= \tilde{\mathbf{A}}_d \\ \mathbf{E}_{e,k-1} &= (\mathbf{B}_{d,b} - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_{d,a}) \mathbf{K}_b . \end{aligned} \quad (4.22)$$

A (3.13) egyenlethez hasonlóan a teljes rendszer belső állapotának dinamikája:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{e}[k] \\ \mathbf{x}[k+1] \\ \mathbf{e}[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_d \mathbf{K} & \mathbf{B}_d \mathbf{K}_b & \mathbf{A}_d & 0 \\ \mathbf{E}_{x,k-1} & \mathbf{E}_{e,k-1} & \mathbf{E}_{x,k} & \mathbf{E}_{e,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k-1] \\ \mathbf{e}[k-1] \\ \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{e}[k] \end{bmatrix} . \quad (4.23)$$

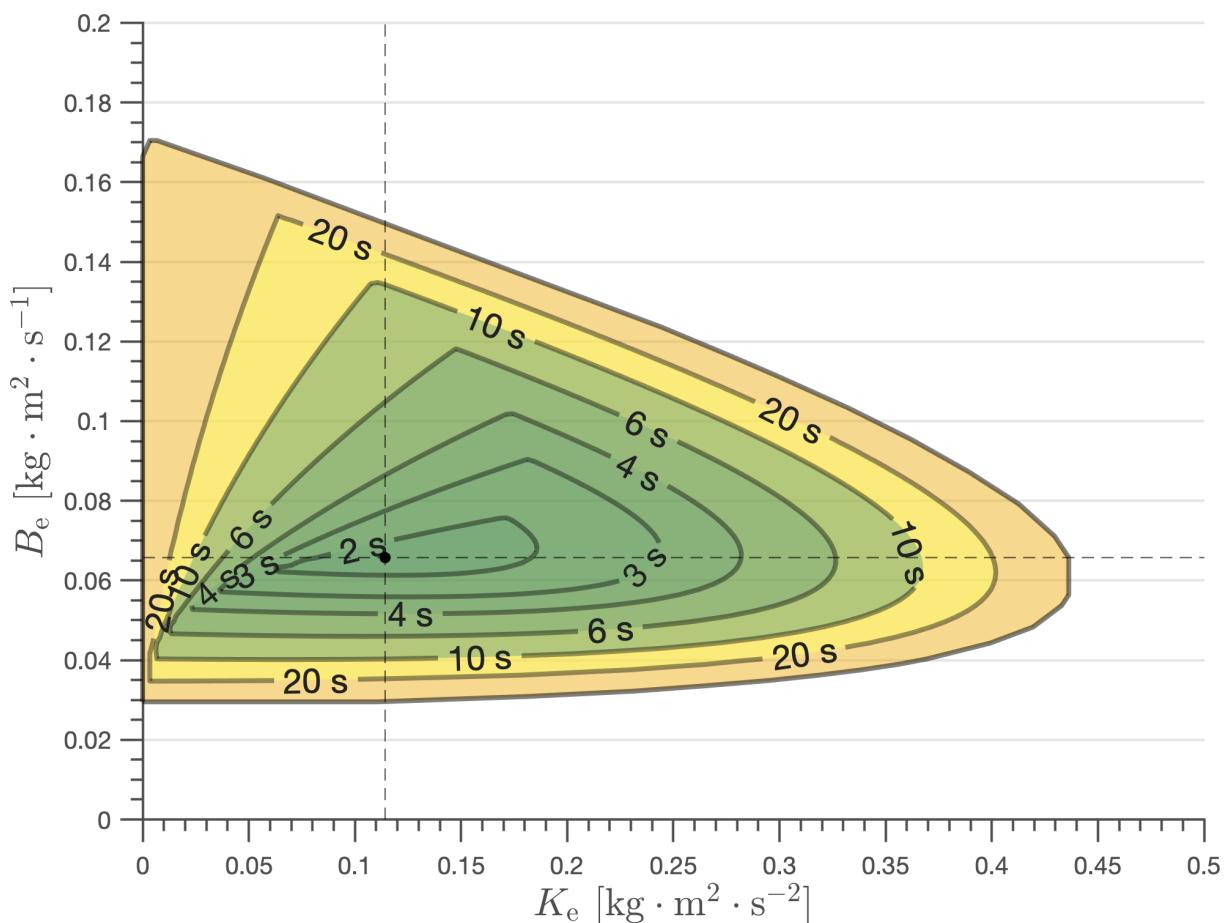
A stabilitás feltétele, hogy a kapott diszkrét állapot átmeneti mátrix minden sajátértéke abszolút értékben egynél szigorúan kisebb legyen. A 4.6. ábra a 4.2. táblázat paraméterei alapján numerikusan meghatározott stabilitástérképet ábrázolja  $K_e$  és  $B_e$  impedancia paraméterek függvényében.

## 4. STABILITÁSVIZSGÁLAT IDŐKÉSÉssel

4.2. táblázat. A diszkrét idejű stabilitásvizsgálatnál alkalmazott paraméterek

Szimbólum és paraméter név	Érték
$J$ Motor tehetetlensége	$0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$K_m$ Motor nyomatékállandója	$0.01 \text{ Nm} \cdot \text{A}^{-1}$
$B_m$ Motormodell viszkózus csillapítása	$0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$L$ Motor induktivitása	$0.2 \text{ H}$
$R$ Motor ellenállása	$1 \Omega$
$p$ További pólusok	$-15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
$M_e$ Előírt tehetetlenség	$0.015 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\tau_d$ Mintavételezsi idő	$0.1 \text{ s}$

A sajátértékek egy  $150 \times 150$  méretű, egyenletesen elosztott rács pontjain lettek meghatározva. Ezután az előbb említett stabilitási feltétel szerint különítettem el a stabil pontokat. Majd a stabil pontok Delaunay-háromszögelése (Okabe és tsai., 2000) és annak konvex burka került kirajzolásra.



4.6. ábra. Diszkrét idejű stabilitástérkép

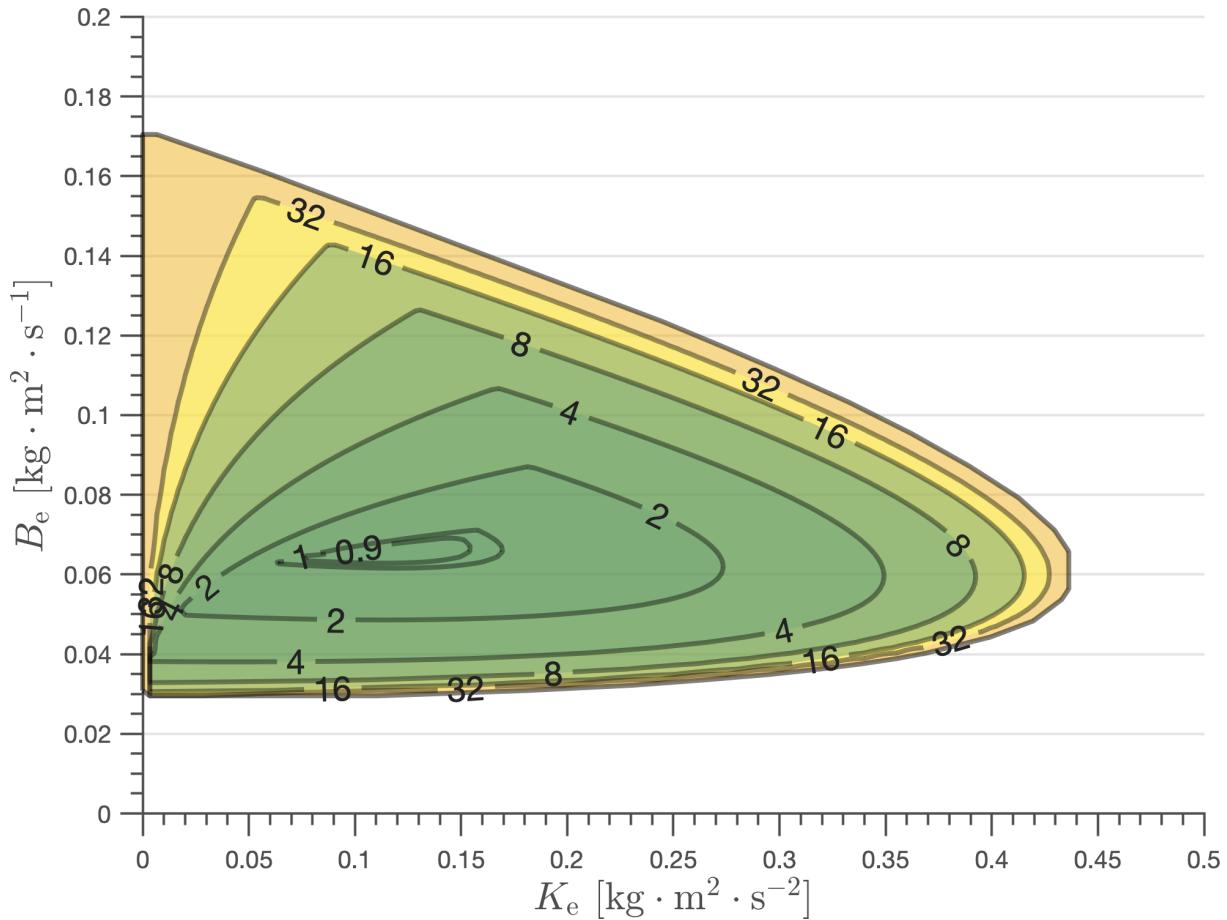
A kontúrok a különböző becsült beállási időket jelölnek, melyek a legnagyobb

abszolút értékű sajátérték alapján lettek meghatározva 2%-os hibasávot alapul véve:

$$t_s \approx \tau_d \frac{\ln 0.02}{\ln |\lambda|_{\max}}, \quad (4.24)$$

ahol  $\tau_d$  a mintavételezési idő és  $|\lambda|_{\max}$  jelöli a legnagyobb sajátértéket abszolút értékben. Az alkalmazott paraméterekkel a minimális beállási idő közelítőleg 1.2 s.

A diszkretizáció negatív hatással van a rendszer stabilitására. A folytonos idejű időkéses rendszernél 0.1 s időkésessel még mindig végtelen nagy a stabil régió ugyanazon paraméterekekkel. Az impedanciamodell által előírt beállási időt összehasonlítva a becsült beállási idővel ábrázolja a 4.7. ábra.



4.7. ábra. Diszkrét idejű stabilitásterkép

A kontúrok a becsült és az előírt beállási idők hánnyadosát jelölik. Az alkalmazás specifikációjától függően lehet, hogy csak egy igen kis része felhasználható a stabil tartomáynak. Az ábrán megfigyelhető, hogy van olyan tartomány is, ahol az előírtnál gyorsabban áll be a rendszer.

A stabilitási határon legalább egy sajátérték vagy komplex konjugált pár abszolút értékben egy. Ennek következtében a rendszer  $t \rightarrow \infty$  határértékben csillapítatlan rezgő-

## 4. STABILITÁSVIZSGÁLAT IDŐKÉSÉssel

---

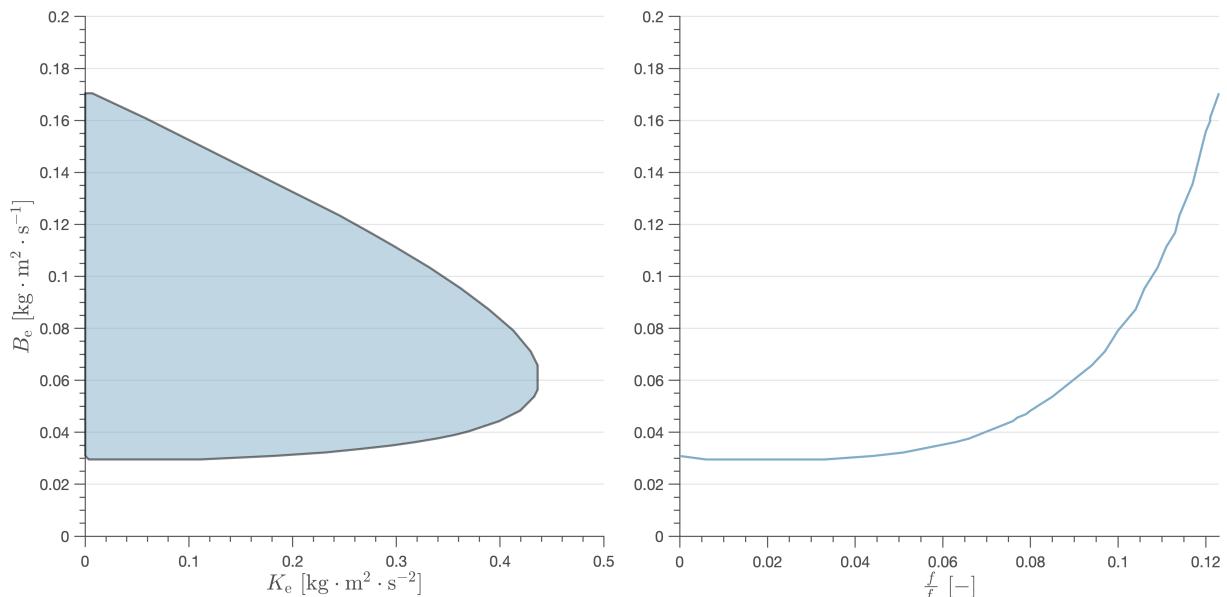
mozgást végez. A rezgőmozgás frekvenciája és az impedanciamodell paraméterei közötti összefüggés numerikusan meghatározható például a diszkrét Fourier-transzformáció segítségével. A legnagyobb frekvencia a mintavételezési frekvencia fele a Nyquist-Shannon mintavételezési tétel alapján

$$f_{\max} = \frac{1}{2\tau_d}. \quad (4.25)$$

A frekvencia felbontás pedig a mintavételek száma és a mintavételezési frekvencia alapján

$$\Delta f = \frac{1}{N\tau_d}. \quad (4.26)$$

A stabil tartomány jobb széle  $B_e$  értékével lett paraméterezve. Ezután minden pontban  $N = 100$  időlépésen át lett szimulálva a rendszer. A diszkrét Fourier-transzformált legnagyobb abszolút értékű frekvenciája és  $B_e$  közötti kapcsolat látható a 4.8. ábra jobb oldali grafikonján. A vízszintes tengelyre a csillapítatlan rezgési frenvencia és a mintavételezési frekvencia hányadosa került.



4.8. ábra. Diszkrét idejű stabilitásterkép

A stabil tartomány bal alsó sarkában nullától indulva egyre nő a csillapítatlan rezgési frekvencia, míg a tartomány bal felső sarkában el nem éri a maximumát, mely ebben az esetben  $\approx 1.2$  Hz

# 5. Kísérlet

---

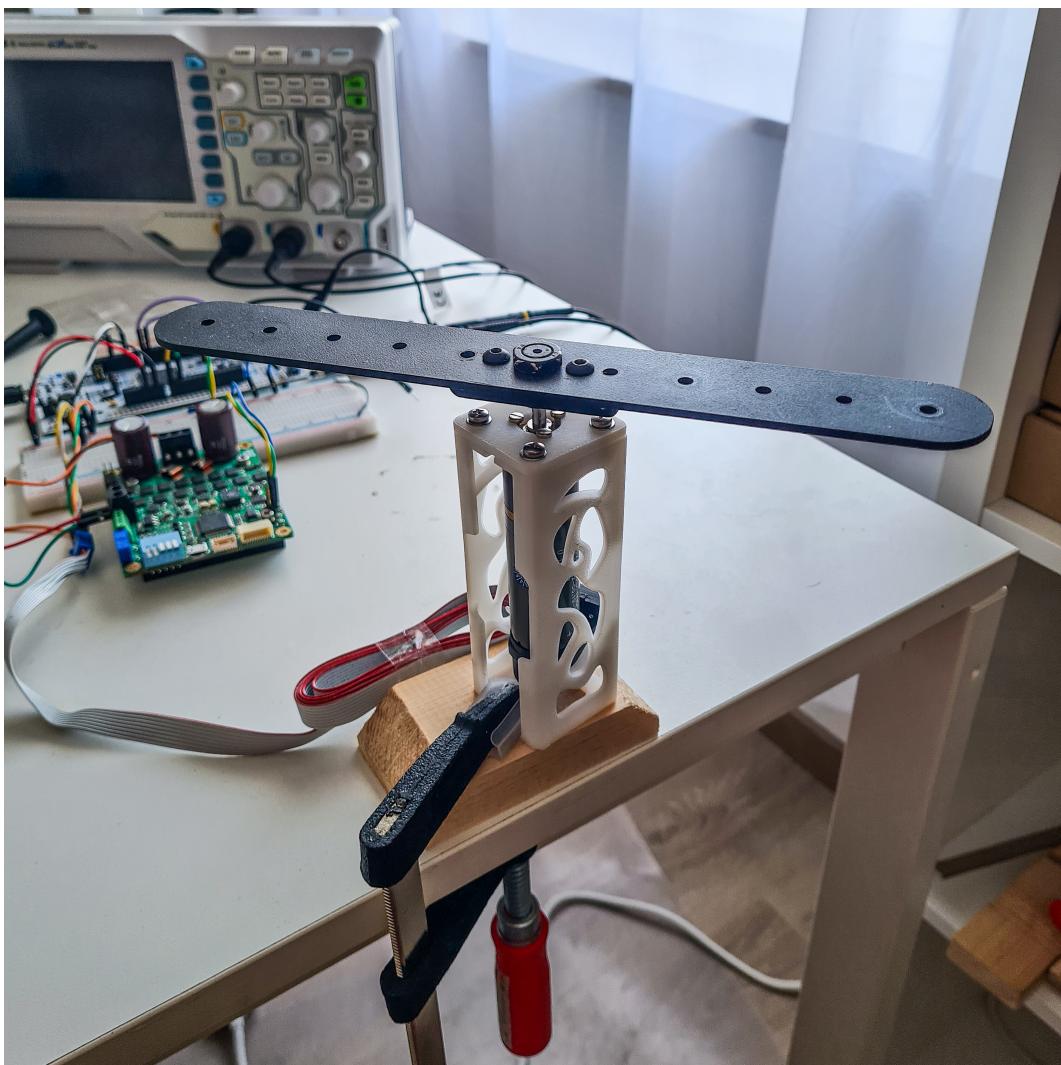
Ebben a fejezetben a kísérleti összeállítás kerül bemutatásra. A motor összeállítás és a mérési eszközök részletes dokumentációja után az alkalmazott mérési és vezérlési módszerek sajátosságainak bemutatása következik. Ezután szabályozó viselkedésének elemzésére kerül sor az előző fejezetekben bemutatott modellel összehasonlítva.

## 5.1. Mérési összeállítás

A mérésekhez felhasznált egyenáramú motor egy maxon összeállítás része. Az összeállítás egy kis teljesítményű DC motorból, egy bolygókerekes hajtóműből és egy enkóderből áll. A motor paramétereit az B.1. ábrán szereplő adatlapon találhatóak. A hajtómű és az enkóder leírása pedig a B.2. és B.3. ábrákon láthatóak. A gravitáció hatásának kiküszöbölésére a mérésekhez a motort álló helyzetben kellett rögzíteni. Ehhez készült egy 3D nyomtatott műanyag keret, ami a hajtóműhöz csatlakozik. A teljes összeállítás az 5.1. ábrán látható.

## 5. KÍSÉRLET

---



5.1. ábra. Mérési összeállítás

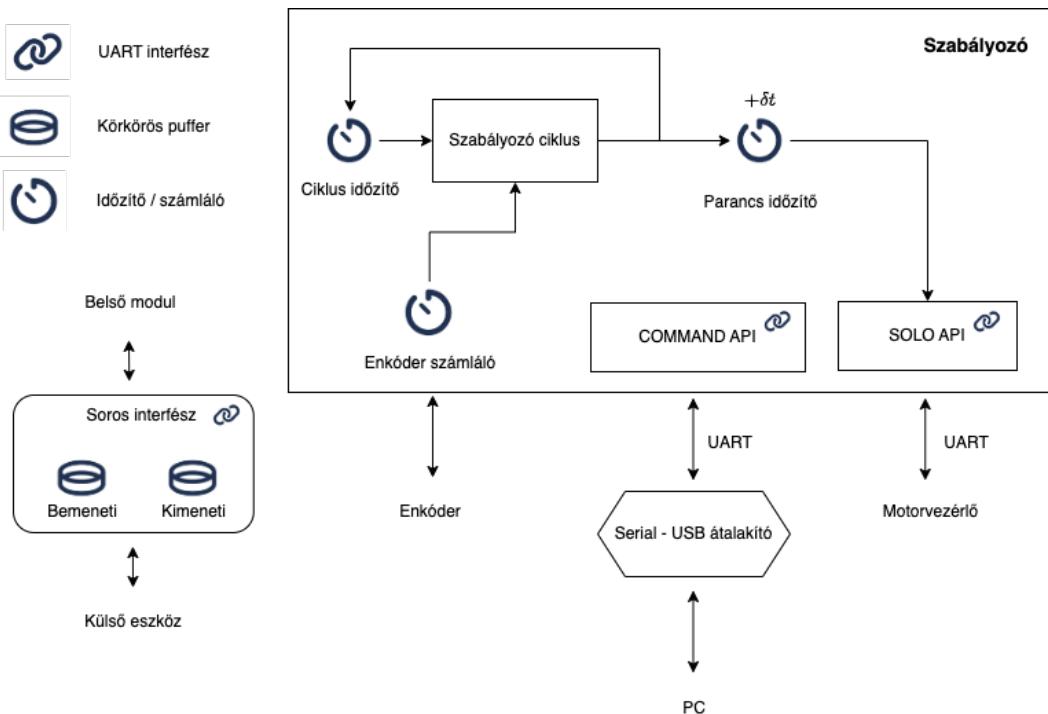
A motorvezérlő egy SOLO UNO V2 32A típusú univerzális vezérlő egység, mely egyenáramú kefés, kefe nélküli valamint PMSM és váltakozó áramú indukciós motorok vezérlésére is alkalmas 800W-ig. A kimenete változtatható frekvenciájú PWM jel. A kimeneti PWM vezérlő jel frekvenciája elméletben 80kHz-ig növelhető. A valóságban 75kHz-es beállítás felett automatikusan visszaugrott a frekvencia 20kHz-re, így a kísérletek során 75kHz volt a beállított frekvencia. CANopen és egy egyedi UART protokollon keresztül lehet kommunikálni az eszközzel. A kísérletek során a második opción lett alkalmazva.

A szabályozó futtatását egy NUCLEO-F439ZI STMicrocontrollers fejlesztői panel végzi. Alapvető feladatai:

- Az inkrementális enkóder jelének olvasása a beépített számláló és időzítő periférián keresztül

- A szabályozó belső állapotának frissítése pontosan meghatározott időközönként.
- A szabályozó kimeneti referencia jelének továbbítása a motorvezérlőnek az előírt időkésés figyelembe vételével.
- A mérés állapotának felvétele és továbbítása a számítógép felé.

A szoftver egyszerűsített vázlata az 5.2. ábrán látható.



5.2. ábra. Szabályozó szoftveres implementációjának egyszerűsített vázlata

A szabályozó szoftvere egy C-ben írt program, mely az STMicrocontrollers STM32CubeIDE nevezetű fejlesztői környezetében készült. minden időzítéssel kapcsolatos feladatot a beépített perifériák látnak el. A szabályozó ciklusa az adott méréshez előre meghatározott ciklusidő / időkésés figyelembe vételével periodikusan fut. Az implementáció a 4. fejezetben bemutatott digitalizált szabályozót követi. Az egyetlen eltérés, hogy a tekercsáram nem modellezhető az elérhető időkésések mellett. A stabil tartomány egy használhatatlanul vékony területre zsugorodik. A kísérletekhez ezért a tekercsáram nem lett külön állapotként modellezve. Mivel a motorvezérlőnek elküldött parancs meghatározásához szükséges idő lényegesen rövidebb a mérések nél használt ciklusidőknél, egy külön időzítő felel a parancsok megfelelő késleltetéséért. A soros kommunikációhoz szükséges műveleteket soros interfész modulok végzik el. minden interfész modul két körkörös pufferrel rendelkezik. Az egyik a kimenő, a másik a válasz üzeneteket tárolja. A pufferek és a UART perifériák közötti adatátvitelt a beépített DMA vezérlők valósítják

## 5. KÍSÉRLET

meg. A mérés konfigurálása, nyomonkövetése, és az eredmények visszaküldése a számítógépre egy egyszerű protokoll segítségével történik. A protokoll felépítését a 5.3. ábra mutatja.



5.3. ábra. A szabályozó kommunikációs protokollja

A START, CMD és STOP egy byte hosszúak. A DATA mező fix hosszúságú, legtöbb esetben 4 byte, de a CMD mezőtől függ. A CMD mező kódolja a parancs típusát. A CRC mező a CMD és DATA mezők alapján számított 8 bites CRC, a kommunikációs hibákból eredő félrekonfiguráció esélyének csökkentéséért felel.

A mérésekhez felhasznált egyéb eszközök a 5.1. táblázatban találhatóak.

### 5.1. táblázat. További mérési eszközök

Eszköz neve	Gyártója	Típusa	Precizitás
Mérőrás tolómérő	Berger	020701-0007	±0.02 mm
Digitális oszcilloszkóp	Rigol	DS1202Z-E	200 MHz / 1 GSa/s
DC laboratóriumi tápegység	UNI-T	UTP3315TFL-II	0-30V ± 10 mV, 0-5A ± 1 mA
Digitális multiméter	MAXWELL	MX-25304	±0.1 mV - 1 V, ± 0.1 µA - 10 mA

## 5.2. Paraméter identifikáció

A szabályozó megfelelő működésének feltétele, hogy rendelkezésre álljanak a motor pontos paraméterei. Bár az adatlapokból több szükséges paraméter is kiolvasható, vannak paraméterek, amiket külön kellett meghatározni. Ilyen a motorra terhelésként ráhelyezett propeller tehetetlenségi nyomatéka és a viszkózus csillapítási tényező. A hajtómű áttetele, a rotor tehetetlenségi nyomatéka és a nyomatékállandó esetében az adatlapokban szereplő értékek lettek alkalmazva. A rotor ellenállása és a motorvezérlő motorra adott feszültségjelének amplitúdója és a vezérlő parancs közötti viszony külön lettek meghatározva.

A rotor ellenállásának meghatározásához egy sor állandó feszültség lett kapcsolva a motorra lefogott állapotban, és a motor által felvett áram került feljegyzésre. A mért értékek a 5.2. táblázatban találhatóak.

5.2. táblázat. Ellenállás mérés adatok

Kapocsfeszültség [V] (mind ± 0.01)	Felvett áram [A] (mind ± 0.01)	Ellenállás [ $\Omega$ ] (mind ± 0.01)
2.02	0.22	9.2 ± 0.4
2.48	0.28	8.8 ± 0.3
2.64	0.29	9.1 ± 0.3
2.97	0.37	8.0 ± 0.2
2.95	0.29	10.2 ± 0.4
3.26	0.37	8.8 ± 0.2
3.26	0.38	8.6 ± 0.2
3.39	0.41	8.3 ± 0.2
3.46	0.39	8.9 ± 0.2
3.95	0.46	8.6 ± 0.19
4.05	0.46	8.8 ± 0.2
4.24	0.51	8.3 ± 0.16
4.51	0.52	8.7 ± 0.17
4.89	0.62	7.9 ± 0.13
5.08	0.65	7.8 ± 0.12
$\bar{R} = 8.7 \pm 0.15$		

A mérések alapján kapott átlag bizonytalansága az egyes minták szórásából számított standard hiba. Ez az érték szignifikánsan eltér az adatlapban szereplő értéktől. A későbbi mérések alapján az adatlapban szereplő érték nem lett felhasználva.

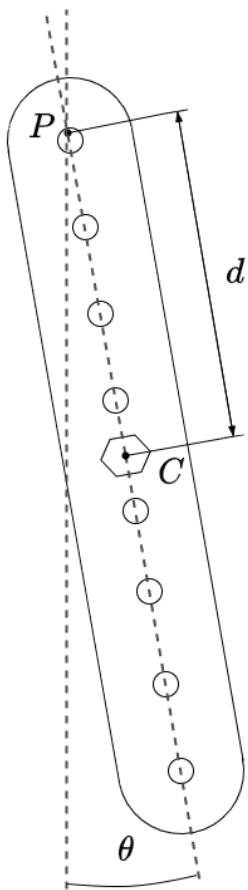
A propeller teheteratlenségi nyomatéka lengési idők mérése alapján lett meghatározva. Egy adott ponton felfüggesztett merev test lengési periódusát, mely a gravitáció hatására szabadon leng egy síkban, a következő összefüggés írja le

$$t_l = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{mgd}}, \quad (5.1)$$

ahol  $I_p$  a test teheteratlenségi nyomatéka,  $m$  a tömege,  $g$  a gravitációs állandó, és  $d$  a felfüggesztési pont és a test tömegközéppontja közötti távolság. Kifejezve a teheteratlenségi nyomatéket

$$I_p = \frac{mgd}{4\pi^2} t_l^2, \quad (5.2)$$

A mérési összeállítást szemlélteti a 5.4. ábra. Az előbbi formula relatíve kis kilengés esetén alkalmazható, így nagyjából  $10^\circ$  volt a kezdeti kilengés.



5.4. ábra. Felfüggesztett terhelés tehetetlenségi nyomaték méréshez

Minden mérés során harminc oda-vissza lengés ideje lett lemérve. Az eredmények az 5.3. táblázatban találhatóak. A számított átlag a standard hibával együtt az utolsó sorban található. Az átlag már az egy periódusra számított időt mutatja.

### 5.3. táblázat. Terhelés lengési idő mérési adatok

30 lengés periódus ideje [s] $t_{30}$
22.35
22.20
22.27
22.26
22.19
$\bar{t}_1 = \quad 0.742 \pm 0.001$

A későbbi mérésekhez a formulában szereplő felfüggesztéshez viszonyított tehetetlenségi nyomatékkal ellenben a tömegközéppontra számított tehetetlenségi nyomatékra

van szükség. A Steiner-tétel alapján

$$I_{\text{cm}} = I_P - md^2, \quad (5.3)$$

A számításhoz szükséges összes paramétert a 5.4. táblázat tartalmazza.

5.4. táblázat. Terhelés tehetetlenségi nyomaték számítás adatok

Periódusidő [s]	Felfüggesztés távolsága [mm]	Propeller tömege [g]
$t_l$	$d$	$m$
$0.742 \pm 0.001$	$110 \pm 1$	$43 \pm 1$

A felfüggesztés és a propeller tömegközéppontja közötti távolság ugyan a 5.1. táblázatban szereplő tolómérővel lett meghatározva, a felfüggesztéshez használt drót rugalmassága miatt a felfüggesztési pont számomra nem egy jól definiált pont az eszköz precizitását figyelembe véve. Emiatt nagyobb a bizonytalanság ebben a paraméterben.

A gravitációs állandó éréke minden esetben  $g = 9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . További feltételezés, hogy a hibaszámítások során bizonytalansága elhanyagolhatónak tekinthető. Ezek alapján a propeller tehetetlenségi nyomatéka

$$I_{\text{cm}} = (1.26 \pm 0.05) \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (5.4)$$

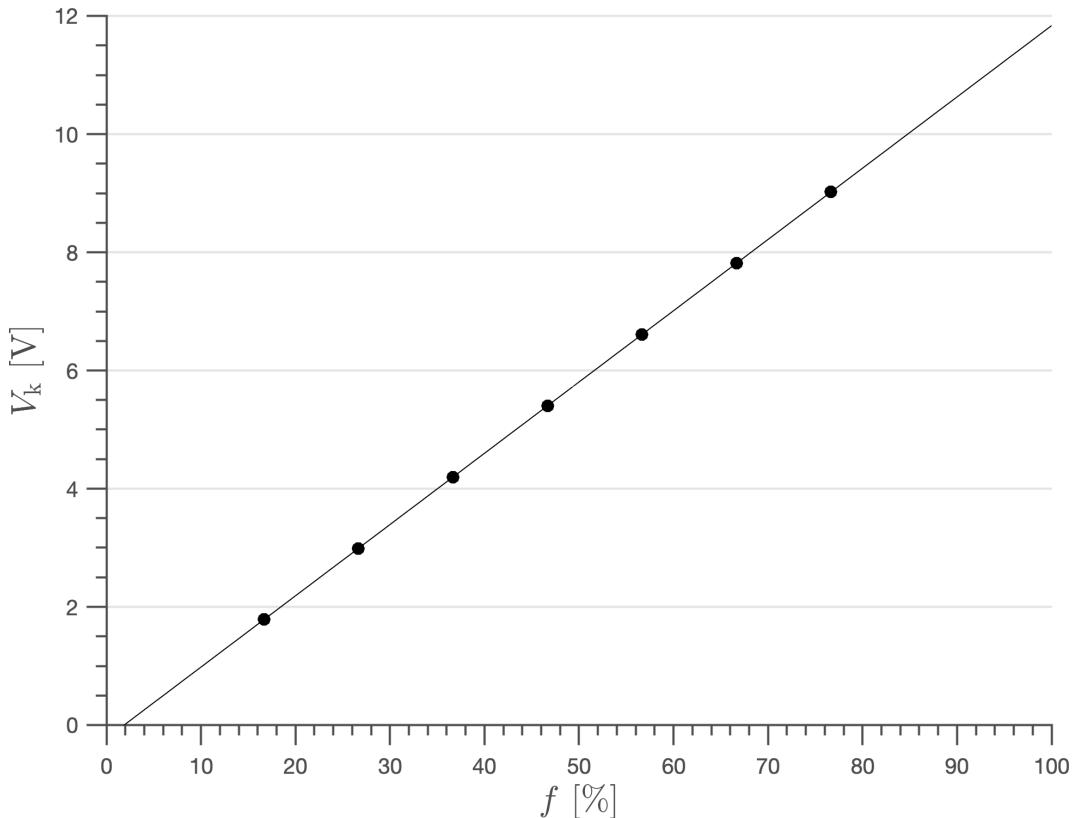
A motorvezérlő linearitásának ellenőrzéséhez és a motorra eső feszültség pontosabb meghatározásához a motor kapocsfeszültsége és PWM vezérlő jel kitöltési tényezője is ki lett mérve különböző esetekben. A mérési eredményeket a 5.5. táblázat tartalmazza. A két paraméter közötti kapcsolatot modellező egyenes lineáris regresszióval lett meghatározva. Ez az egyenes a mérési pontokkal együtt a 5.5. ábrán látható.

5.5. táblázat. Vezérlő jel és kapocsfeszültség mérések

Kitöltési tényező [%] $f$ (mind $\pm 0.1$ )	Kapocsfeszültség [V] $V_k$ (mind $\pm 0.01$ )
16.7	1.79
26.7	2.99
36.7	4.19
46.7	5.40
56.7	6.61
66.7	7.82
76.7	9.02

## 5. KÍSÉRLET

---



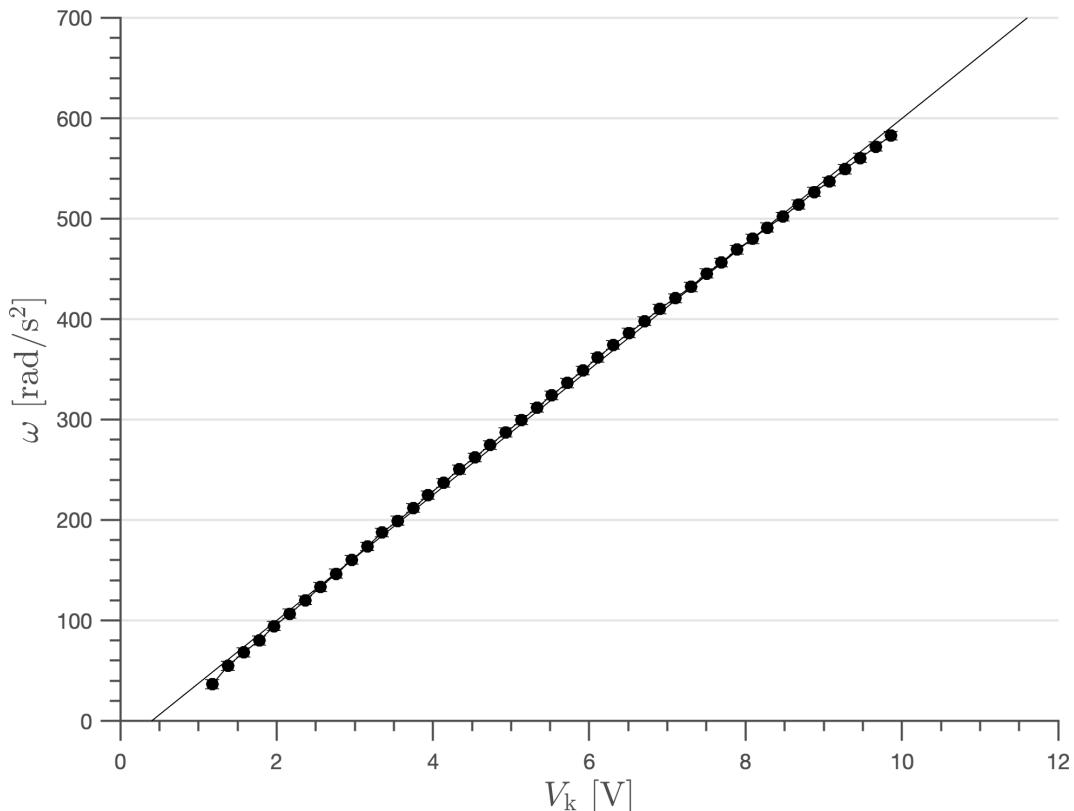
5.5. ábra. Motor driver lineáritás vizsgálata

A hibásavok kis méretük miatt nem lettek ábrázolva. A motorvezérlő kimenetének linearitása jól látható. A maximális feszültség ez alapján kicsit alacsonyabb a motorvezérőnek bementként adott nominális 12V-os feszültségnél. Értéke  $V_{\max} = 11.835 \pm 0.005$  [V].

Az adatlapokban szereplő értékekkel kiegészítve a (2.3) és (2.4) egyenletek alapján meghatározható a modell viszkózus csillapítási állandója, ha a motor állandósult állapotában mért sebessége is meghatározható. Ennek a mérésnek az eredményeit foglalja össze az 5.6. táblázat. A lineáris regresszióval illesztett egyenes és a mérési pontok az 5.6. ábrán látható.

5.6. táblázat. Motor végsebesség és kapocsfeszültség mérések

Kapocsfeszültség [V] $V_k$ (mind $\pm 0.01$ )	Rotor sebessége [rad/s] $\omega_r$ (mind $\pm 0.1$ )
1.18	36.3
1.38	54.7
1.58	68.1
1.78	79.9
1.97	94.3
2.17	106.6
2.37	120.0
2.56	133.1
2.76	146.5
2.96	160.3
3.16	173.7
3.35	187.6
3.55	199.1
3.75	211.8
3.94	224.7
4.14	237.2
4.34	250.4
4.54	262.4
4.73	274.7
4.93	287.3
5.13	299.7
5.33	311.8
5.52	324.3
5.72	336.4
5.92	349.0
6.11	361.6
6.31	374.1
6.51	386.2
6.71	397.8
6.90	410.0
7.10	420.8
7.30	432.1
7.50	445.3
7.69	456.5
7.89	469.2
8.09	479.9
8.28	491.1
8.48	502.2
8.68	514.1
8.88	526.6
9.07	537.2
9.27	549.2
9.47	560.4
9.67	571.7
9.86	582.9



5.6. ábra. Motor végsebesség és kapocsfeszültség közötti kapcsolat

A viszkózus csillapítási együtthatóra kapott becslés így

$$B_m = \frac{K_m}{R} \left( \frac{1}{\alpha_s} - K_m \right), \quad (5.5)$$

ahol  $\alpha_s$  az állandósult sebesség és a kapocsfeszültség közötti kapcsolatot leíró lineáris regresszióból kapott egyenes meredeksége. minden paraméter ismert bizonytalanságukkal együtt. A véleges becslés

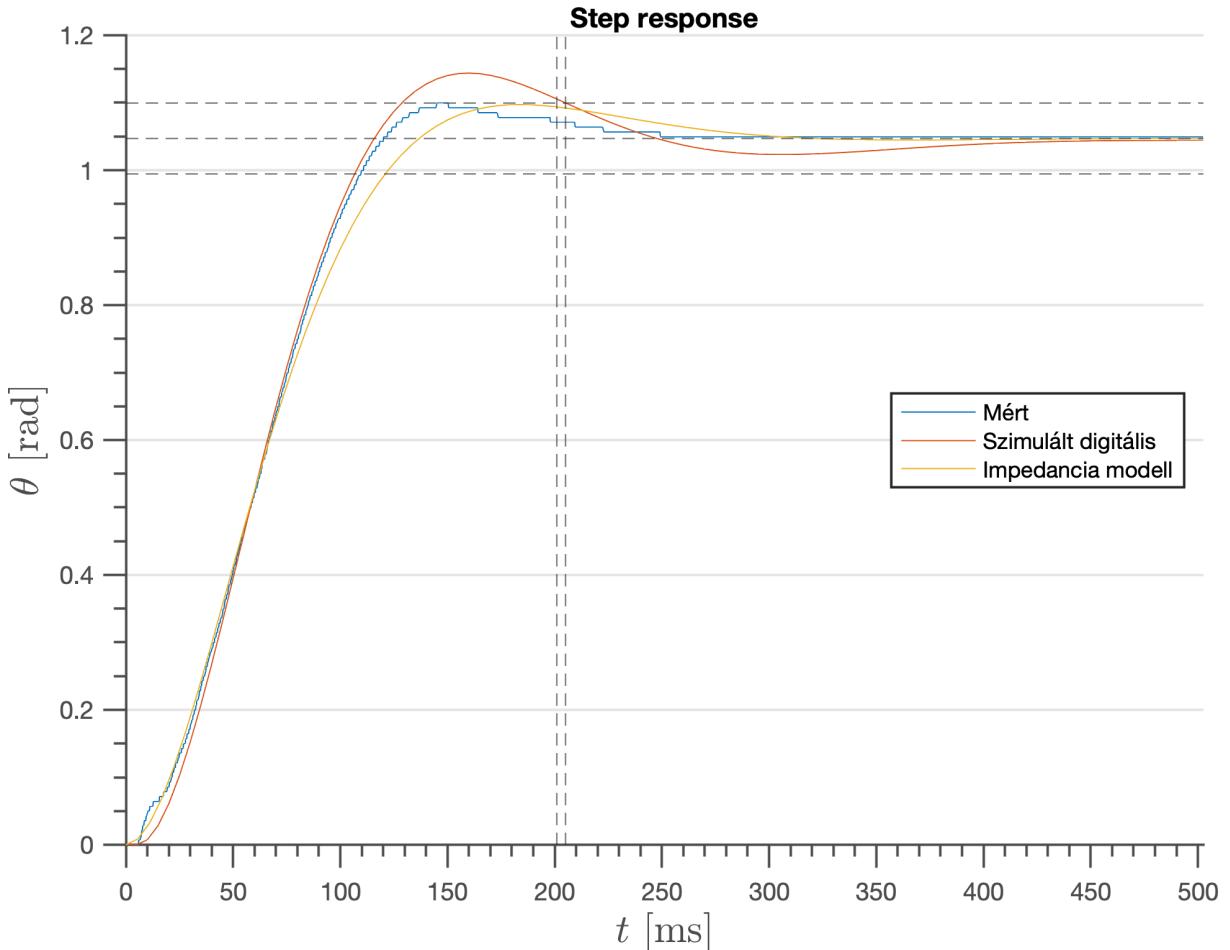
$$B_m = (1.1 \pm 0.1) \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}. \quad (5.6)$$

A mérési eredményeknél észrevehető egy kis eltérés a regresszióból kapott egyenestől, mely láthatóan nem véletlenszerű. Ennek a jelenségnek a további vizsgálata a függelék A

### 5.3. Eredmények

A motorparaméterek meghatározása után lehetőség nyílt a valós rendszer és a szimuláció összehasonlítására. Az egységugrásra adott válasz összehasonlítását a szimulált digitális

szabályozóval és a beállított impedancia modellel az 5.7. ábra mutatja. Az időkésés  $\tau = 5$  ms. Az impedancia modell paraméterei  $M_e = 7.35 \times 10^{-6}$  kg · m<sup>2</sup>,  $B_e = 2.43 \times 10^{-4}$  kg · m<sup>2</sup> · s<sup>-1</sup>,  $K_e = 4.20 \times 10^{-3}$  kg · m<sup>2</sup> · s<sup>-2</sup>. Ezek egy enyhén alulcsillapított rendszer paraméterei, 200 ms beállási idővel és 0.7-es relatív csillapítási hányadossal. Jól látszik, hogy a végérték közelében a rendszer eltér a modellezett digitális szabályozótól, de kezdeti viselkedése és a végérték tekintetében is megfelel.



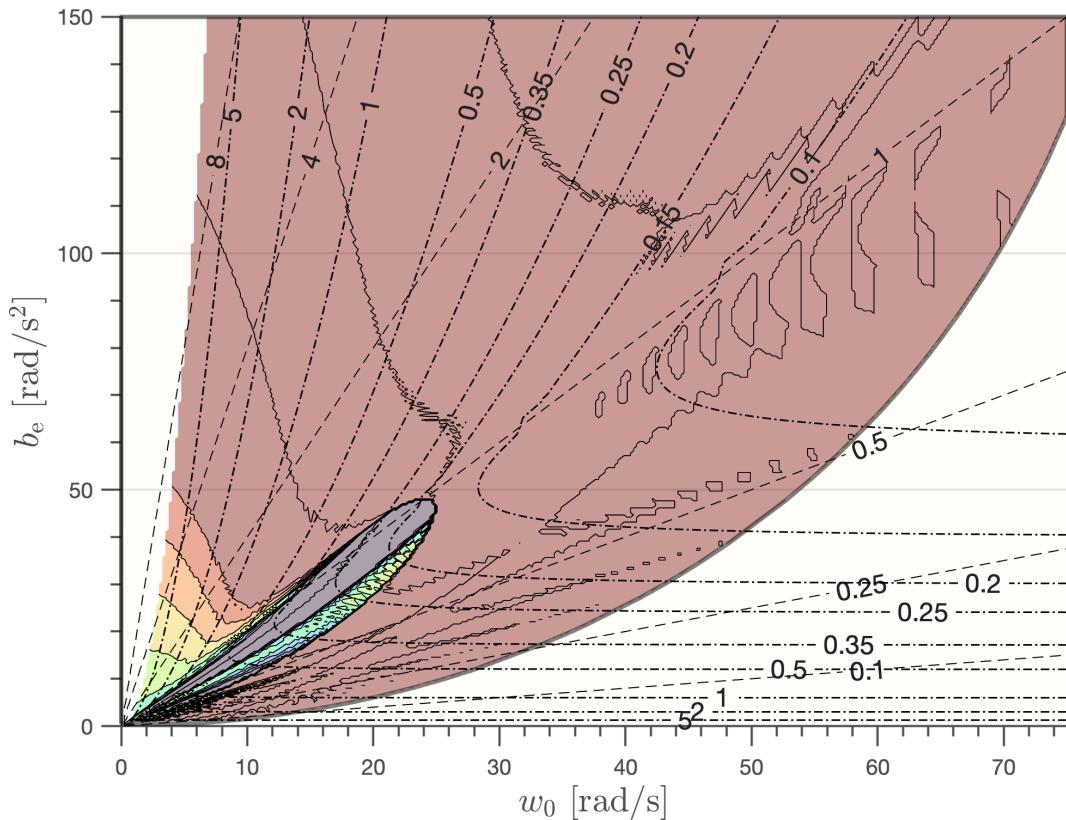
5.7. ábra. Egységugrás válasz  $\theta_r = \pi/3$  referencia szögállásra, 5 ms időkéséssel és 95%-os toleranciasávval

A mért szögelfordulás közvetlenül az enkóder jeléből lett meghatározva. A mintavételezési frekvencia közel 4kHz volt minden esetben.

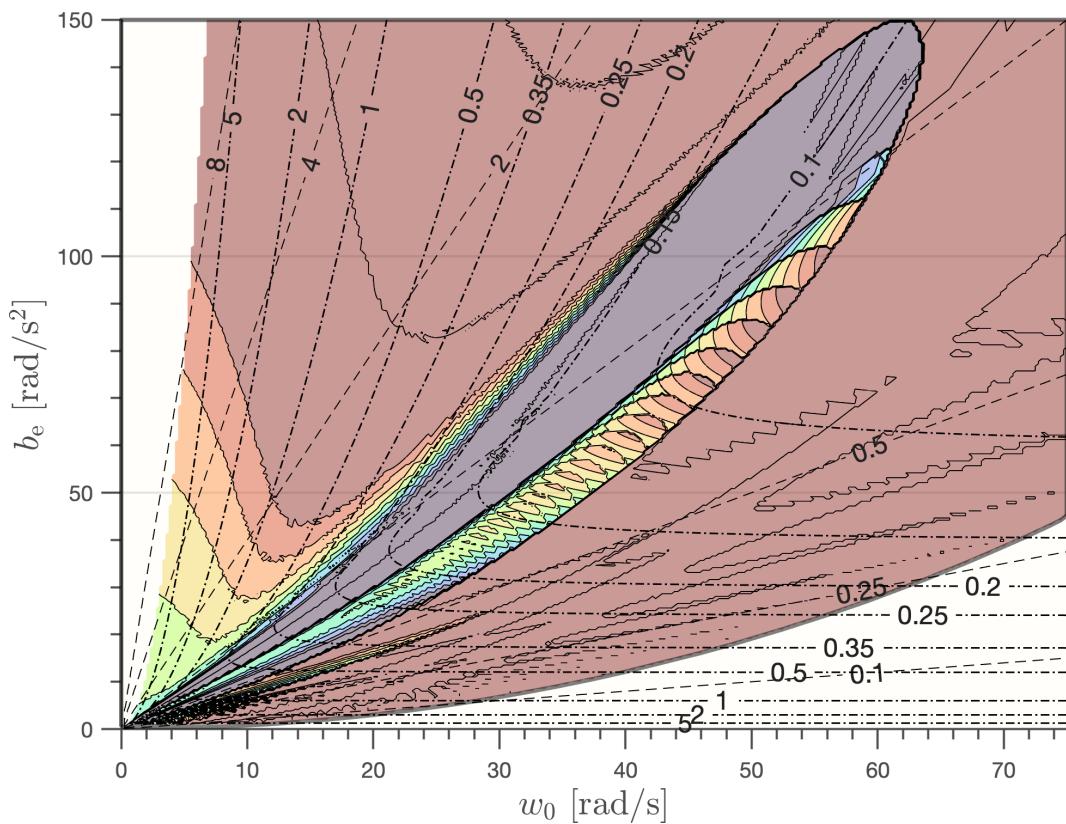
A teljes stabilitástérkép felderítéséhez a beállási idő vizsgálata tűnt a legjobb módszernek. A 4.7. ábrához hasonlóan az új motorparaméterekkel meghatározott stabilitástérkép egy része látható az 5.8. ábrán. Azonban itt a vízszintes tengelyen az elvárt impedancia modell sajátkörfrekenciája  $\omega_0$ , a függőleges tengelyen pedig az elvárt tehetetlenségi nyomatékhöz viszonyított viszkózus csillapítási állandó  $b_e$  található. Fontos eltérés még, hogy megjelennek a elvárt beállási idők kontúrjai, melyek jobbról közel vízszintesen

## 5. KÍSÉRLET

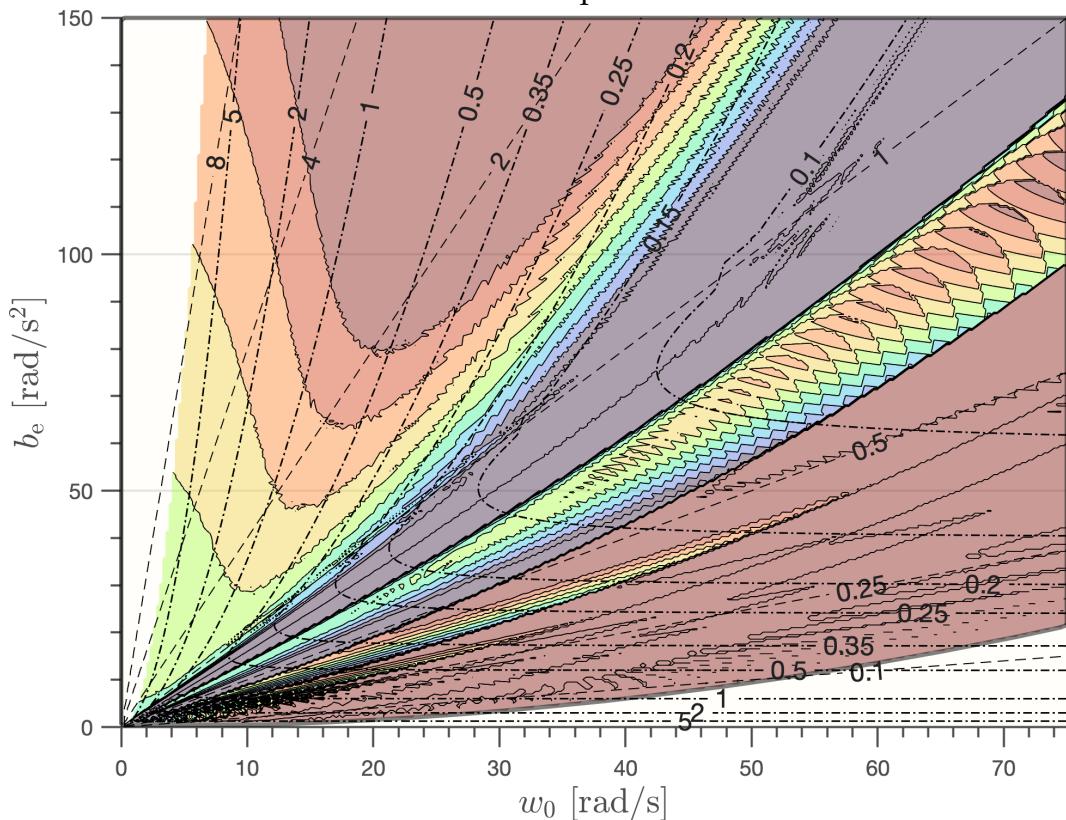
indulnak, majd a  $45^\circ$ -os átló előtt nem sokkal a függőlegestől enyhén jobbra haladnak tovább, a térkép felső széle felé. Az origóból induló egyenesek az állandó relatív csillapítási hányadosokat jelölik. A tengelyek osztásai éppen olyanok, hogy a kritikus csillapítási hányadost az egységnyi meredekségű egyenes jelöli. A színezett tartomány az aszimptotikusan stabil paraméterkombinációkat jelöli. A különböző színek és a közöttük lévő kontúrok itt is a digitális szabályozó modell és az impedancia modell beállási ideje közötti relatív hibát mutatja, azonban a színskála  $\pm 10\%$  hiba között mozog. Tehát a méretes bordó terület  $10\%$  hiba feletti eltérést, a lila  $-10\%$  alatti, míg a zöld terület  $0-2\%$  hiba közötti eltérést jelöl. Ezeken a határokon belül minden színváltás  $\pm 2\%$ -al eltérő hibát mutat. A  $10\%$  feletti területen belüli kontúrok még viszonyításként megmutatják a  $25\%$ ,  $50\%$  és  $100\%-os$  eltéréseket is. Az 5.9. és 5.10. ábrák a csökkenő időkésés hatását szemléltetik. A stabil tartomány megnövekszik, ami az alacsonyabb hibával rendelkező területek megnövekedését eredményezi. Ez lehetővé teszi, azonos hiba mellett, egy gyorsabb rendszer működtetését.



5.8. ábra. Stabilitástérkép 10ms időkéséssel



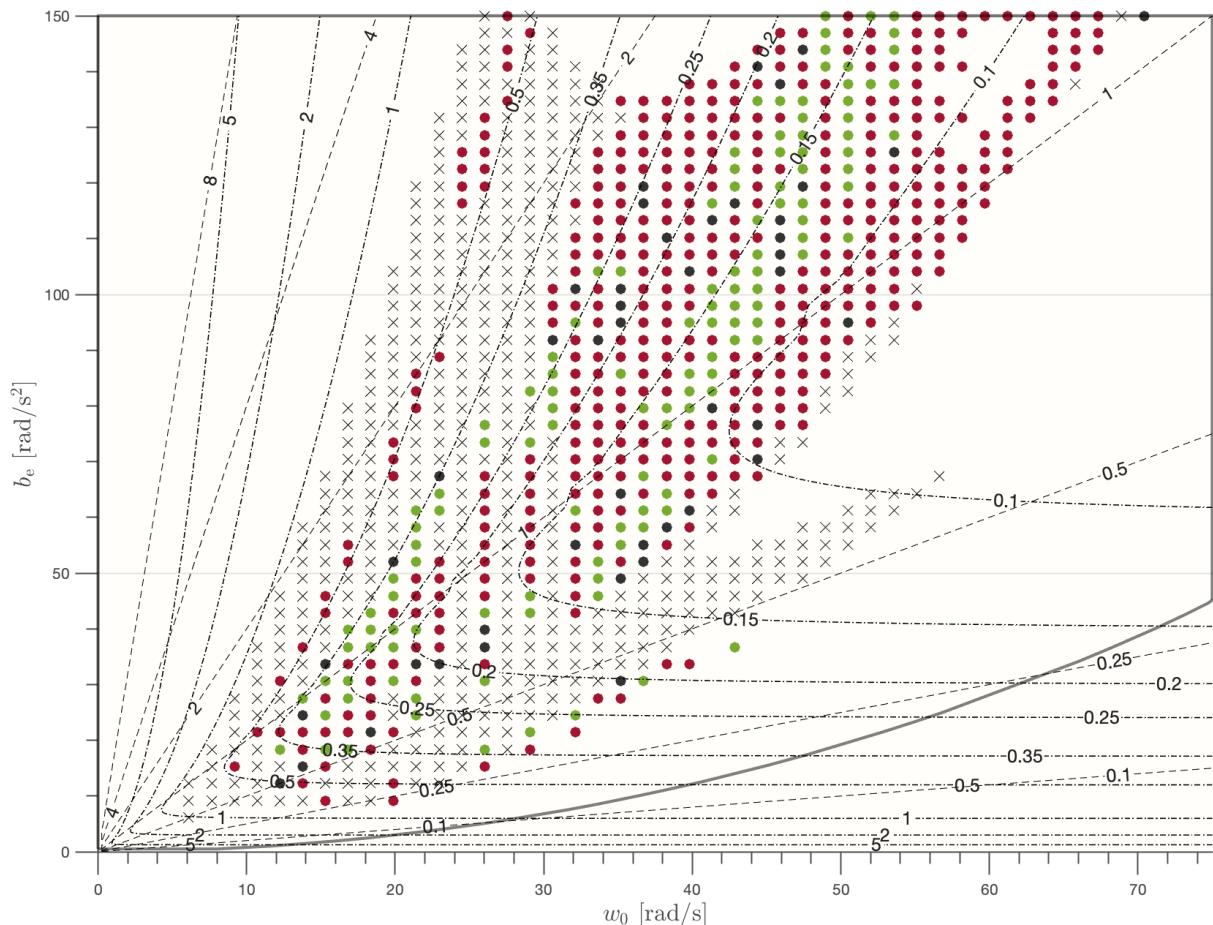
5.9. ábra. Stabilitástérkép 5ms időkéséssel



5.10. ábra. Stabilitástérkép 2.5ms időkéséssel

## 5. KÍSÉRLET

A motorvezérlővel való kommunikáció maximális sebessége és a 10% relatív hiba alatti terület méretét figyelembe véve a végső mérés 5 ms időkéséssel készült. A stabilitástérkép egy egyenletes 50x50-es rács segítségével fel lett osztva. Az így kapott 2500 potenciális mérési pont nagy része instabil, vagy a mérés kivitelezhetősége szempontjából túl nagy beállási idővel rendelkezik. A tényleges mérési pontok ez alapján a stabil tartományon belül az 1 szekundumnál kisebb beállási idővel és a digitális modell predikciója szerint kevesebb, mint 50% hibával rendelkeznek. Ezen kritériumokkal együtt a végleges mérési pontok teljes száma 992 volt. minden mérési pont meghatároz egy impedancia modell beállítást, mely az 5.3. ábrán is látható protokoll segítségével automatizált módon került át a szabályozót implementáló mikrovezérlőre. minden mérés ideális esetben 10x lett volna megismételve, azonban ha az adott paraméterek mellett nem állt be a rendszer, 10 sikertelen próbálkozás után a következő mérésre ugrott a rendszer. Előfordult olyan köztes eset is, amikor részben sikeres, részben sikertelen volt egy adott kísérlet. Ekkor is 10 sorban sikertelen vagy összesen 10 sikeres mérés volt a megállási kritérium, viszont legalább 5 sikeres mérés kellett, ahhoz hogy a végső analízisben figyelembe legyen véve az adott mérés.



5.11. ábra. Mért beállási idők összehasonlítása a modellel 5ms késéssel

A teljes futási idő nagyjából 12-15 óra volt. A kapott eredményeket ábrázolja a 5.11. ábra. A pontok közül fekete 'x' jelöli a sikertelennek ítélt méréseket. A többi esetben a mért beállási idők és a digitális szabályozóval számolt beállási idők közötti eltérés alapján 7% szignifikancia mellett irrelevánsnak ítélt diszkrepanciát jelölik a zöld pontok. 1.2-7% között indiszkriminánsnak ítélt méréseket jelölik a fekete pontok, és 1.2%-hoz mérten szignifikáns eltérést jelölik a piros pontok. Láthatóan a mérések kevesebb, mint fele felel meg ezeknek a feltételeknek. A legtöbb sikeres mérés a stabilitási tartomány azon területén található, ahol a modellezett relatív hiba negatív. Tehát a digitális rendszer az elvártnál gyorsabban áll be.



## 6. Összegzés

---

A dolgozatban a REHAROB rehabilitációs robot kézmoduljának egyszerűsített modellje került bemutatásra. Egy állandó gerjesztésű egyenáramú motorból kiindulva, egy hibrid pozíció-nyomaték szabályozón keresztül, sikerült egy másodrendű impedanciamodell által előírt mozgást rákényszeríteni a rendszerre. A szabályozó egy minimumrendű megfigyelőt felhasználva minimalizálja a beépítendő külső szenzorok számát. A beállási idő alapján megalkotott feltétel szerint felírható az impedanciamodell előírt tehetetlensége, viszkózus csillapítási együtthatója és a szabályozó pólusai közötti kapcsolat. Az előírt tehetetlenség legfeljebb a fizikai rendszer 2.5-szerese lehet. A minimumát az elvárt beállási idő és a szabályozónak beállítható legkisebb pólus határozza meg.

Az időkésessel kiegészített modell stabilitását folytonos és diszkrét időben is megvizsgáltam. Mindkét esetben elsősorban az impedanciamodell által előírt viszkózus csillapítási együttható és a rúgóállandó közti kapcsolatra adódott új összefüggés. Folytonos esetben elegendően kis időkésésnél lehetséges, hogy tetszőlegesen nagy viszkózus csillapítási együttható alkalmazható. Azonban létezik egy kritikus időkésés, ami felett a stabilitási tartomány zárt. Ekkor a viszkózus csillapítási együtthatóra is adódik egy maximum. Diszkrét időben csak numerikusan, szimulációkkal sikerült a stabilitási tartományt meghatározni. A vizsgált paraméterekkel a tartomány mindig zárt volt. A diszkretizált rendszer állapot átmeneti mátrixának levezetése után a kapott mátrix sajáterétheinek vizsgálatával meghatározható a valós és az előírt beállási idő közötti kapcsolat. Ezt is figyelembe véve az előírtható paraméterkombinációk jóval kisebb tartományban helyezkednek el a teljes stabil területhez képest. Tehát az időkésés figyelembe vétele nagyban befolyásolja a teljes rendszertervezési folyamatot. Végeredményben jobban optimalizálható a motorválasztás és a szabályozót implementáló hardver megtervezése. Költséghatékonyabb és biztonságosabb lehet a rendszer, ami egy ember-robot interakciót igénylő alkalmazásban különösen fontos.



## **7. Jövőbeli munka**

---

Ebbe a dolgozatba csak elméleti és numerikus számítások kerültek. A kapott diszkrét időkéses szabályozó tesztelése egy valós egyszabadságfokú rendszeren lenne a legkézenfekvőbb következő lépés. Össze lehet hasonlítani a kapott numerikus stabilitási térképet a valós rendszer viselkedésével. Ezen felül a REHAROB rehabilitációs robot kézmodulján is lehetne tesztelni a szabályozót, azonban ehhez szükséges lehet ezt az egyszabadságfokú modellt kiterjeszteni több szabadságfokra.



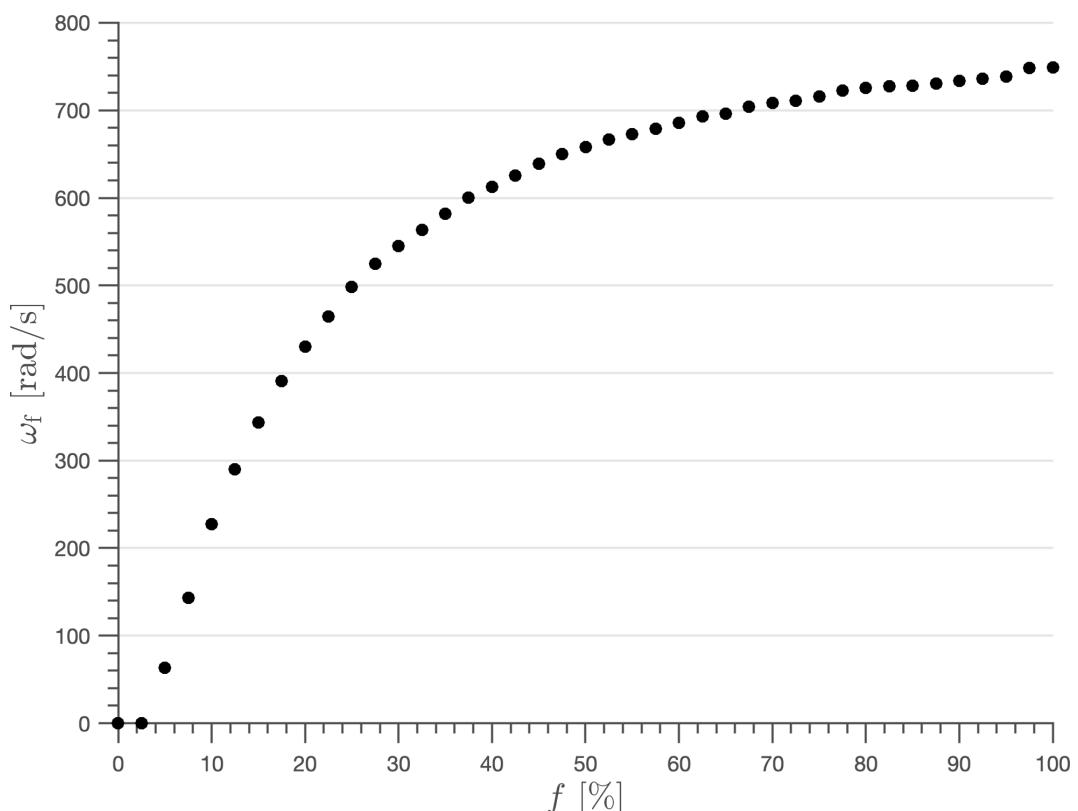
# FÜGGELEK



## A. A PWM frekvencia hatása DC motor vezérlésénél

---

A mérési összeállítás tervezése során először egy jóval alacsonyabb PWM frekvenciával működő motorvezélő lett bekötve. A motor állandósult sebessége és a PWM jel kitöltési tényezője közötti kapcsolat erősen nemlineáris volt az első tesztek során. Ennek a VNH5019 alapú Polulu motorvezérlőnek a kimeneti frekvenciája maximum 20 kHz volt. Egy ilyen előzetes mérés eredménye látható az A.1. ábrán.



A.1. ábra. A motor állandósult sebessége és a kitöltési tényező viszonya 20 kHz-es PWM jellel.

Az 5.6. ábrával ellentétben a maximális sebesség nagyobb volt, mivel a terhelésként

## 1. A PWM FREKVENCIA HATÁSA DC MOTOR VEZÉRLÉSÉNÉL

---

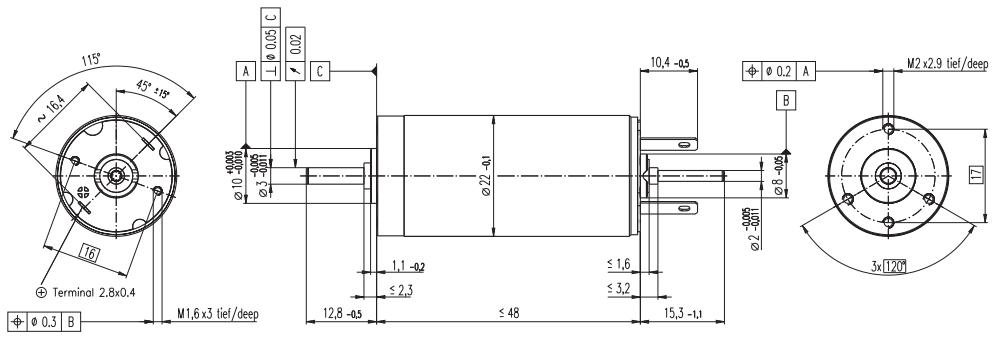
használt propeller ekkor még nem került a motorra. A szabályozó tervezése során alapfeltevés volt, hogy a motorra kapcsolt feszültség változatlan marad, ha a szabályozó kimenete állandó. Láthatóan a motor máshogy viselkedik a PWM jel hatására, mintha a PWM jel átlagfeszültségevel megegyező nagyságú állandó feszültség lenne a motorra kapcsolva. Ennek a jelenségnek a magyarázatához elég a 2. fejezetben bevezetett lineáris modell válaszát megvizsgálni PWM bemenetre.

## **B. Adatlapok**

### S 2322 Ø22 mm, Graphite Brushes, 6 Watt

**NRND** See page 13  
Not recommended for New Design

maxon special program



Stock program  
Standard program  
Special program (on request)

#### Part Numbers

Winding number	980	981	990	982	983	985	987
2322 ... -52.235-200 (Insert winding number)							

#### Motor Data

##### Values at nominal voltage

1 Nominal voltage	V	12	15	18	18	24	36	48
2 No load speed	rpm	7010	7000	7530	6690	7190	7240	6370
3 No load current	mA	42.2	33.3	30.6	25.8	21.3	14.3	8.88
4 Nominal speed	rpm	4300	4310	4840	3970	4490	4500	3580
5 Nominal torque (max. continuous torque)	mNm	11.8	12.2	12.2	12.3	12.4	12.3	12.4
6 Nominal current (max. continuous current)	A	0.807	0.654	0.583	0.520	0.420	0.279	0.184
7 Stall torque	mNm	32.9	33.5	35.9	31.4	34.1	33.4	28.8
8 Starting current	A	2.14	1.72	1.64	1.28	1.11	0.724	0.411
9 Max. efficiency	%	70	71	72	71	73	73	73

##### Characteristics

10 Terminal resistance	Ω	5.61	8.71	10.9	14.1	21.6	49.7	117
11 Terminal inductance	mH	0.492	0.790	0.995	1.26	1.97	4.43	10.2
12 Torque constant	mNm/A	15.4	19.4	21.8	24.6	30.7	46.1	69.9
13 Speed constant	rpm/V	622	491	437	389	311	207	137
14 Speed/torque gradient	rpm/mNm	227	220	219	223	219	224	228
15 Mechanical time constant	ms	13.9	13.5	13.3	13.3	13.0	12.9	12.8
16 Rotor inertia	gcm²	5.84	5.86	5.79	5.70	5.68	5.50	5.37

#### Specifications

##### Thermal data

17 Thermal resistance housing-ambient	14.1 K/W
18 Thermal resistance winding-housing	3.6 K/W
19 Thermal time constant winding	8.91 s
20 Thermal time constant motor	649 s
21 Ambient temperature	-20...+100°C
22 Max. permissible winding temperature	+125°C

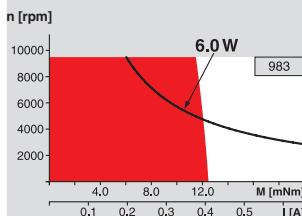
##### Mechanical data (ball bearings)

23 Max. permissible speed	9500 rpm
24 Axial play	0.05 - 0.15 mm
25 Radial play	0.025 mm
26 Max. axial load (dynamic)	2.8 N
27 Max. force for press fits (static) (static, shaft supported)	64 N
28 Max. radial loading, 5 mm from flange	240 N
	14 N

##### Other specifications

29 Number of pole pairs	1
30 Number of commutator segments	7
31 Weight of motor	92 g
Values listed in the table are nominal. Explanation of the figures on page 71.	
Option	
Sleeve bearings in place of ball bearings	

#### Operating Range



#### Comments

##### Continuous operation

In observation of above listed thermal resistance (lines 17 and 18) the maximum permissible winding temperature will be reached during continuous operation at 25°C ambient.  
= Thermal limit.

##### Short term operation

The motor may be briefly overloaded (recurring).

##### Assigned power rating

#### maxon Modular System

1 Planetary Gearhead	Ø22 mm
2 Ø22 mm	0.5 - 1.0 Nm
3 Page 250	
4 Planetary Gearhead	Ø22 mm
5 0.5 - 2.0 Nm	
6 Page 251	
7 Planetary Gearhead	Ø26 mm
8 0.5 - 2.0 Nm	
9 Page 382	

#### Overview on page 20 - 25

Encoder Enc  
22 mm  
100 CPT, 2 channels  
Page 304

#### Recommended Electronics:

ESCON 36/2 DC  
ESCON 50/5  
Notes

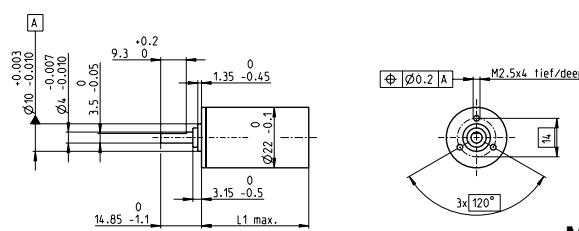
Page 320  
321  
22

May 2013 edition / subject to change

maxon special program 365

B.1. ábra. Motor adatlap

## Planetary Gearhead GP 22 A Ø22 mm, 0.5–1.0 Nm



M 1:2

Stock program  
Standard program  
Special program (on request)

### Gearhead Data

1 Reduction	3.8:1	14:1	53:1	104:1	198:1	370:1	590:1	742:1	1386:1	1996:1	3189:1
2 Absolute reduction	$\frac{15}{4}$	$\frac{225}{16}$	$\frac{3375}{64}$	$\frac{87725}{448}$	$\frac{50825}{256}$	$\frac{10556001}{48561}$	$\frac{59349}{100}$	$\frac{759375}{324}$	$\frac{15834015}{62024}$	$\frac{28602307}{142044}$	$\frac{1594323}{500}$
3 Max. motor shaft diameter	mm	4	4	4	3.2	4	3.2	4	4	3.2	3.2
<b>Part Numbers</b>	<b>110337</b>	<b>134159</b>	<b>134164</b>	<b>134168</b>	<b>134172</b>	<b>110340</b>	<b>134183</b>	<b>134186</b>	<b>134190</b>	<b>134195</b>	<b>134203</b>
1 Reduction	4.4:1	16:1	62:1	109:1	231:1	389:1	690:1	867:1	1460:1	2102:1	3728:1
2 Absolute reduction	$\frac{57}{13}$	$\frac{855}{62}$	$\frac{12825}{208}$	$\frac{2187}{50}$	$\frac{192375}{632}$	$\frac{263169}{476}$	$\frac{1121931}{1620}$	$\frac{2885625}{5328}$	$\frac{3947535}{2704}$	$\frac{7105567}{3380}$	$\frac{30292137}{8125}$
3 Max. motor shaft diameter	mm	3.2	3.2	3.2	4	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2
<b>Part Numbers</b>	<b>134157</b>	<b>110338</b>	<b>134165</b>	<b>134170</b>	<b>134174</b>	<b>134180</b>	<b>134185</b>	<b>134188</b>	<b>134196</b>	<b>134200</b>	<b>134205</b>
1 Reduction	5.4:1	19:1	72:1	128:1	270:1	410:1	850:1	1014:1	1538:1	2214:1	4592:1
2 Absolute reduction	$\frac{27}{5}$	$\frac{324}{69}$	$\frac{48735}{676}$	$\frac{4155}{525}$	$\frac{73105}{2704}$	$\frac{656}{16}$	$\frac{53144}{625}$	$\frac{1096537}{50816}$	$\frac{98415}{64}$	$\frac{17714}{60}$	$\frac{14348907}{3125}$
3 Max. motor shaft diameter	mm	2.5	3.2	3.2	3.2	3.2	4	2.5	3.2	4	4
<b>Part Numbers</b>	<b>134160</b>	<b>134166</b>	<b>134171</b>	<b>134176</b>	<b>134179</b>			<b>134191</b>	<b>110341</b>	<b>134199</b>	
1 Reduction	20:1	76:1	157:1	285:1	455:1			1068:1	1621:1	2458:1	
2 Absolute reduction	$\frac{81}{4}$	$\frac{1215}{16}$	$\frac{19685}{125}$	$\frac{18225}{64}$	$\frac{500211}{1098}$			$\frac{273375}{256}$	$\frac{60193057}{57093}$	$\frac{13005987}{5985}$	
3 Max. motor shaft diameter	mm	4	4	2.5	4	3.2		4	3.2	3.2	
<b>Part Numbers</b>	<b>134161</b>	<b>110339</b>		<b>134175</b>	<b>134181</b>			<b>134189</b>	<b>134194</b>	<b>134201</b>	
1 Reduction	24:1	41:1	84:1	316:1	479:1			1185:1	1707:1	2589:1	
2 Absolute reduction	$\frac{1539}{45}$	$\frac{185193}{2197}$		$\frac{2777895}{6788}$	$\frac{124689}{260}$			$\frac{41668425}{51513}$	$\frac{15000633}{6788}$	$\frac{3365793}{3300}$	
3 Max. motor shaft diameter	mm	3.2	3.2		3.2	3.2		3.2	3.2	3.2	
<b>Part Numbers</b>	<b>134162</b>	<b>134167</b>		<b>134177</b>	<b>134182</b>			<b>134192</b>	<b>134197</b>	<b>134202</b>	
1 Reduction	29:1	89:1		333:1	561:1			1249:1	1798:1	3027:1	
2 Absolute reduction	$\frac{725}{55}$	$\frac{467}{52}$		$\frac{69525}{208}$	$\frac{236852}{225}$			$\frac{1038825}{632}$	$\frac{373977}{208}$	$\frac{6395006}{21125}$	
3 Max. motor shaft diameter	mm	2.5	3.2		3.2	3.2		3.2	3.2	3.2	
4 Number of stages	1	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5
5 Max. continuous torque	Nm	0.5	0.5	0.8	0.8	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
6 Max. intermittent torque at gear output	Nm	0.8	0.8	1.2	1.2	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6
7 Max. efficiency	%	84	70	59	59	49	49	49	42	42	42
8 Weight	g	42	55	68	68	81	81	94	94	94	94
9 Average backlash no load	°	1.0	1.2	1.6	1.6	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
10 Mass inertia	gcm²	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
11 Gearhead length L1*	mm	22.6	29.4	36.2	36.2	43.0	43.0	49.8	49.8	49.8	49.8

\*for EC 32fl. L1 is + 7.1 mm

### Technical Data

Planetary Gearhead	straight teeth
Output shaft	stainless steel, hardened
Bearing at output	ball bearing
Option	sleeve bearing
Radial play, 10 mm from flange	max. 0.2 mm
Axial play	max. 0.2 mm
Max. axial load (dynamic)	100 N
Max. force for press fits	100 N
Direction of rotation, drive to output	=
Max. continuous input speed	6000 rpm
Recommended temperature range	-40...+100°C
Number of stages	1 2 3 4 5
Max. radial load, 10 mm from flange	30 N 50 N 55 N 55 N 55 N

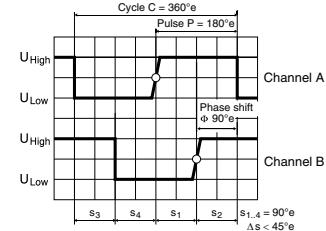
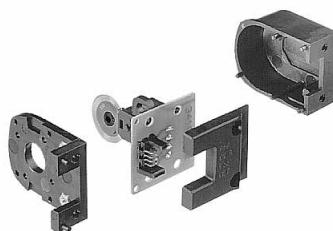
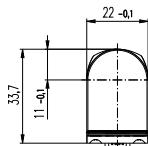
maxon gear

B.2. ábra. Hajtómű adatlap

May 2017 edition / subject to change

maxon gear 325

### Encoder Enc 22 100 CPT, 2 Channels



maxon sensor

■ Stock program  
□ Standard program  
■ Special program (on request)

#### Part Numbers

103935	110520	110521
--------	--------	--------

#### Type

Counts per turn	100	100	100
Number of channels	2	2	2
Max. operating frequency (kHz)	20	20	20
Max. speed (rpm)	12 000	12 000	12 000
Shaft diameter (mm)	3	2	3



Direction of rotation cw (definition cw p. 60)

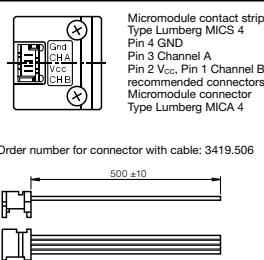
#### maxon Modular System

+ Motor	Page	+ Gearhead	Page	Overall length [mm] / ● see Gearhead
RE 25	125/127			68.6
RE 25	125/127 GP 26, 0.75 - 2.0 Nm	332		●
RE 25	125/127 GP 32, 0.75 - 4.5 Nm	334		●
RE 25	125/127 GP 32, 0.75 - 4.5 Nm	335		●
RE 25	125/127 GP 32, 1.0 - 6.0 Nm	338		●
RE 25	125/127 GP 32 S	366-368		●
A-max 19, 1.5 W	144			43.3
A-max 19, 1.5 W	144	GP 19, 0.1 - 0.3 Nm	322	●
A-max 19, 1.5 W	144	GP 22, 0.1 - 2.0 Nm	325/327	●
A-max 19, 1.5 W	144	GS 24, 0.1 Nm	331	●
A-max 19, 1.5 W	146	GP 22 S	364/365	●
A-max 19, 2.5 W	146			45.9
A-max 19, 2.5 W	146	GP 19, 0.1 - 0.3 Nm	322	●
A-max 19, 2.5 W	146	GP 22, 0.1 - 2.0 Nm	325/327	●
A-max 19, 2.5 W	146	GS 24, 0.1 Nm	331	●
A-max 19, 2.5 W	146	GP 22 S	364/365	●
A-max 22	148/150			46.3
A-max 22	148/150 GP 22, 0.1 - 0.3 Nm	323		●
A-max 22	148/150 GP 22, 0.2 - 0.6 Nm	324		●
A-max 22	148/150 GP 22, 0.1 - 2.0 Nm	323-327		●
A-max 22	148/150 GS 24, 0.1 Nm	331		●
A-max 22	148/150 GP 22 S	364/365		●
A-max 26	152-158			59.1
A-max 26	152-158 GP 26, 0.75 - 4.5 Nm	332		●
A-max 26	152-158 GS 30, 0.07 - 0.2 Nm	333		●
A-max 26	152-158 GP 32, 0.75 - 4.5 Nm	334		●
A-max 26	152-158 GP 32, 0.75 - 4.5 Nm	335		●
A-max 26	152-158 GP 32, 1.0 - 6.0 Nm	339		●
A-max 26	152-158 GS 38, 0.1 - 0.6 Nm	344		●
A-max 26	152-158 GP 32 S	366-368		●

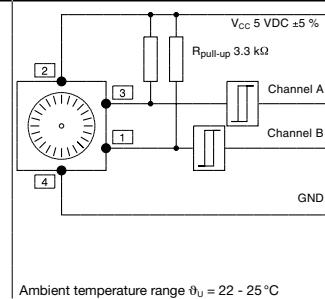
#### Technical Data

Supply voltage $V_{CC}$	5 V ± 10%
Typical current draw	18 mA
Output signal	TTL compatible
Phase shift $\Phi$	90°e ± 45°e
Signal rise time	(typically, at $C_L = 25 \text{ pF}$ , $R_L = 11 \text{ k}\Omega$ , $25^\circ\text{C}$ ) 200 ns
Signal fall time	(typically, at $C_L = 25 \text{ pF}$ , $R_L = 11 \text{ k}\Omega$ , $25^\circ\text{C}$ ) 50 ns
Operating temperature range	-20...+85 °C
Moment of inertia of code wheel	$\leq 0.05 \text{ gcm}^2$
Output current per channel	min. -1 mA, max. 5 mA

#### Pin Allocation



#### Connection example



May 2017 edition / subject to change

maxon sensor 411

B.3. ábra. Enkóder adatlap

# Irodalom

---

- Bauer, M. O., Vizi, M. B., Galambos, P. és Szalay, T. (2021). „Direct Drive Hand Exoskeleton for Robot-assisted Post Stroke Rehabilitation”. *Acta Polytechnica Hungarica* 18(5), 37–54. old. ISSN: 2064-2687. doi: [10.12700/aph.18.5.2021.5.4](https://doi.org/10.12700/aph.18.5.2021.5.4).
- Bereczki, D. és Csiba, L. (2023. jan.). „Stroke • Stroke”. *Magyar Tudomány*. ISSN: 1588-1245. doi: [10.1556/2065.184.2023.1.3](https://doi.org/10.1556/2065.184.2023.1.3).
- Cepeda-Gomez, R. és Michiels, W. (2015). „Special Cases in Using the Matrix Lambert W function for the Stability Analysis of High-Order Linear Systems with Time Delay”. *IFAC-PapersOnLine* 48(12), 7–12. old. ISSN: 2405-8963. doi: [10.1016/j.ifacol.2015.09.344](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.09.344).
- Chang, W. H. és Kim, Y.-H. (2013). „Robot-assisted Therapy in Stroke Rehabilitation”. *Journal of Stroke* 15(3), 174. old. ISSN: 2287-6405. doi: [10.5853/jos.2013.15.3.174](https://doi.org/10.5853/jos.2013.15.3.174).
- Hogan, N. (1984). „Impedance control of industrial robots”. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 1(1), 97–113. old. ISSN: 0736-5845. doi: [10.1016/0736-5845\(84\)90084-X](https://doi.org/10.1016/0736-5845(84)90084-X).
- Hogan, N. (1985a). „Impedance Control: An Approach to Manipulation: Part I—Theory”. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 107(1), 1–7. old. ISSN: 0022-0434. doi: [10.1115/1.3140702](https://doi.org/10.1115/1.3140702).
- Hogan, N. (1985b). „Impedance Control: An Approach to Manipulation: Part II—Implementation”. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 107(1), 8–16. old. ISSN: 0022-0434. doi: [10.1115/1.3140713](https://doi.org/10.1115/1.3140713).
- Hogan, N. (1985c). „Impedance Control: An Approach to Manipulation: Part III—Applications”. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 107(1), 17–24. old. ISSN: 0022-0434. doi: [10.1115/1.3140701](https://doi.org/10.1115/1.3140701).

Hu, Y., Meng, J., Li, G., Zhao, D., Feng, G., Zuo, G., Liu, Y., Zhang, J. és Shi, C. (2023. ápr.). „Fuzzy Adaptive Passive Control Strategy Design for Upper-Limb End-Effector Rehabilitation Robot”. *Sensors* 23(8), 4042. old. issn: 1424-8220.  
doi: [10.3390/s23084042](https://doi.org/10.3390/s23084042).

Hua, J., He, L., Kang, Z. és Yan, K. (2019. nov.). „A Force/Position Hybrid Controller for Rehabilitation Robot”. *INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTERS COMMUNICATIONS & CONTROL* 14(5), 615. old. issn: 1841-9836.  
doi: [10.15837/ijccc.2019.5.3651](https://doi.org/10.15837/ijccc.2019.5.3651).

Kálmán Rudolf Emil (1960). „A new approach to linear filtering and prediction problems”. *Journal of Basic Engineering* 82(1), 35–45. old. doi: [10.1115/1.3662552](https://doi.org/10.1115/1.3662552).

Kálmán Rudolf Emil (1963). „Mathematical description of linear dynamical systems”. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control* 1(2), 152–192. old. doi: [10.1137/0301010](https://doi.org/10.1137/0301010).

Kálmán Rudolf Emil, Ho, Y. és Narendra, K. (1963). „Controllability of linear systems”. *Contributions to Differential Equations* 1(2), 189–213. old.

Kovács László L. és Stépán Gábor (2003). „Dynamics of Digital Force Control Applied in Rehabilitation Robotics”. *Meccanica* 38(2), 213–226. old. issn: 1572-9648.  
doi: [10.1023/A:1022846419289](https://doi.org/10.1023/A:1022846419289).

Ogata, K. (2001). *Modern Control Engineering*. 4th. Prentice Hall PTR: USA.  
isbn: 0130609072.

Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K. és Chiu, S. N. (2000). *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. 2nd ed. Series in Probability and Statistics. John Wiley és Sons, Inc.

Remsik, A., Young, B., Vermilyea, R., Kiekhofer, L., Abrams, J., Evander Elmore, S., Schultz, P., Nair, V., Edwards, D., Williams, J. és Prabhakaran, V. (2016. máj.). „A review of the progression and future implications of brain-computer interface therapies for restoration of distal upper extremity motor function after stroke”. *Expert Review of Medical Devices* 13(5), 445–454. old. issn: 1745-2422.  
doi: [10.1080/17434440.2016.1174572](https://doi.org/10.1080/17434440.2016.1174572).

Satakogiou, I., Tsagarakis, N. és Caldwell, D. (é. n.). „Occupational and physical therapy using a hand exoskeleton based exerciser”. *2004 IEEE/RSJ International Conference*

on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566). IROS-04. IEEE.  
DOI: [10.1109/iros.2004.1389861](https://doi.org/10.1109/iros.2004.1389861).

Stépán Gábor (1989). *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*. Longman Scientific & Technical. ISBN: 9780582039322.

Stépán Gábor (2001). „Vibrations of machines subjected to digital force control”. *International Journal of Solids and Structures* 38(10), 2149–2159. old.  
DOI: [10.1016/S0020-7683\(00\)00158-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00158-X).

Sun Yi Patrick W. Nelson, A. G. U. (2007). „Delay differential equations via the matrix lambert w function and bifurcation analysis: application to machine tool chatter”. *Mathematical Biosciences and Engineering* 4(2), 355–368. old. ISSN: 1551-0018.  
DOI: [10.3934/mbe.2007.4.355](https://doi.org/10.3934/mbe.2007.4.355).

Xie, C., Yang, Q., Huang, Y., Su, S., Xu, T. és Song, R. (2021. dec.). „A Hybrid Arm-Hand Rehabilitation Robot With EMG-Based Admittance Controller”. *IEEE Transactions on Biomedical Circuits and Systems* 15(6), 1332–1342. old. ISSN: 1940-9990.  
DOI: [10.1109/tbcas.2021.3130090](https://doi.org/10.1109/tbcas.2021.3130090).

Yi, S., Duan, S., Nelson, P. és Ulsoy, A. (2012. jún.). „The Lambert W Function Approach to Time Delay Systems and the LambertW\_DDE Toolbox”. *IFAC Proceedings Volumes* 45(14), 114–119. old. ISSN: 1474-6670. doi: [10.3182/20120622-3-us-4021.00008](https://doi.org/10.3182/20120622-3-us-4021.00008).

Yue, Z., Zhang, X. és Wang, J. (2017). „Hand Rehabilitation Robotics on Poststroke Motor Recovery”. *Behavioural Neurology* 2017, 1–20. old. ISSN: 1875-8584.  
DOI: [10.1155/2017/3908135](https://doi.org/10.1155/2017/3908135).