

Soós Tamás  
SZAKDOLGOZAT



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK



SZAKDOLGOZAT





---

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Gépészmérnöki Kar  
Műszaki Mechanikai Tanszék  
Szakdolgozat

# DIGITÁLIS ADMITTANCIA SZABÁLYOZÓ STABILITÁSÁNAK VIZSGÁLATA

**Soós Tamás**

*Konzulens:*

Vizi Máté Benjámin

*Témavezető:*

Tóth András

Budapest, 2023.12.13.



# Nyilatkozatok

---

## *Beadhatósági nyilatkozat*

A jelen szakdolgozat/diplomaterv az üzem/intézmény által elvárt szakmai színvonalnak mind tartalmilag, mind formailag megfelel, beadható.

Kelt, Budapest, 2019.12.13.

Az üzem részéről:

.....

*üzemi konzulens*

## *Elfogadási nyilatkozat*

Ezen szakdolgozat/diplomaterv a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kara által a Diplomatervezési és Szakdolgozat feladatokra előírt valamennyi tartalmi és formai követelménynek, továbbá a feladatkiírásban előírtaknak maradéktalanul eleget tesz. E szakdolgozatot/diplomatervet a nyilvános bírálatra és nyilvános előadásra alkalmasnak tartom.

A beadás időpontja: 2019.12.13.

.....

*témavezető*

## *Nyilatkozat az önálló munkáról*

Alulírott, Majoros Tamás (NEPTUN KOD), a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem hallgatója, büntetőjogi és fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem és sajátkezű aláírással igazolom, hogy ezt a szakdolgozatot/diplomatervet meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, és dolgozatomban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a hatályos előírásoknak megfelelően, a forrás megadásával megjelöltem.

Budapest, 2019.12.13.

.....

*szigorló hallgató*





# Köszönetnyilvánítás

---



# Kivonat

---



# Tartalomjegyzék

---



# Ábrák jegyzéke

---





# Táblázatok jegyzéke

---



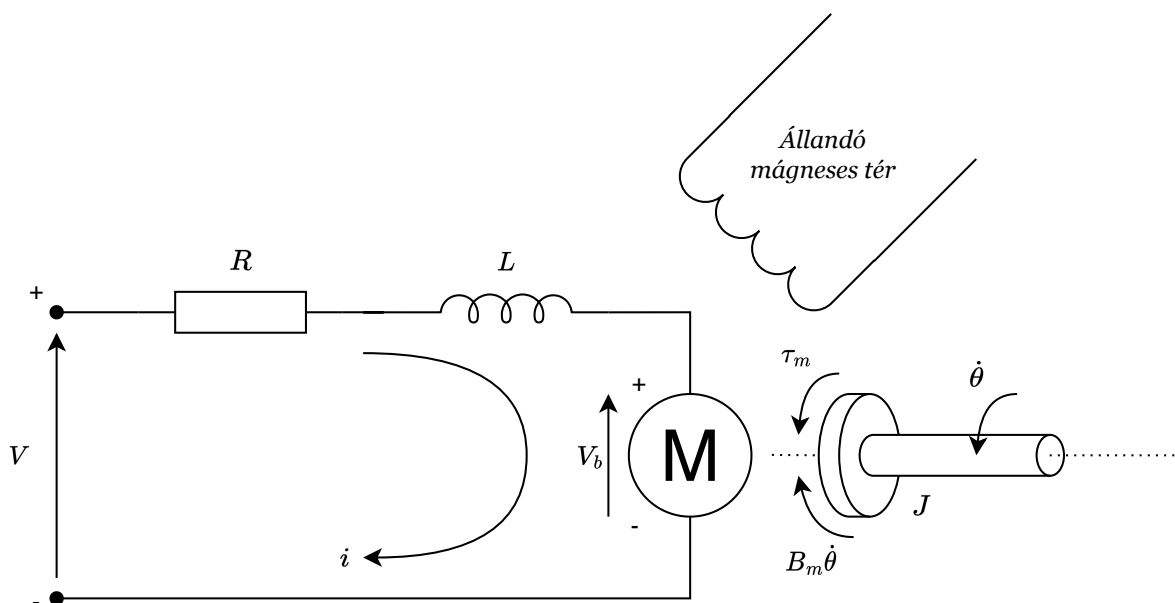
# Bevezetés

---



# 1. Fizikai modell

## 1.1. Egyenáramú motor dinamikája



1.1. ábra. Egyenáramú motor áramkör és szabadtest ábra

A robot motorjának modelljét az ??-es ábra mutatja. A felhasznált motor feltételezetten állandó gerjesztésű. A kifejtett nyomaték a Biot-Savart-törvény szerint arányos a forgórészen átfolyó árammal. A forgórészben indukált feszültség pedig arányos annak szögsebességével. A Lenz-törvény alapján

$$\tau_m = K_\tau i, \quad (1.1)$$

$$V_b = K_e \dot{\theta}, \quad (1.2)$$

ahol  $K_\tau$  a nyomatékállandó,  $K_e$  a sebesség-feszültség állandó,  $\tau_m$  a kifejtett nyomaték,  $i$  a rotor árama,  $V_b$  az rotorban indukált feszültség és  $\dot{\theta}$  a rotor szögsebessége. Az

energia-megmaradás törvénye alapján a két konstans értéke megegyezik

$$K_m = K_\tau = K_e, \quad (1.3)$$

így a következőkben  $K_m$  paraméterként jelennek meg. A forgórész áramkörére Kirchhoff I. törvénye alapján felírható

$$V - Ri - L \frac{di}{dt} - K_m \dot{\theta} = 0, \quad (1.4)$$

ahol  $R$  a forgórész tekercsének ellenállása,  $L$  a tekercs induktivitása,  $K_m$  a motorállandó,  $V$  a motor feszültsége,  $i$  a motoráram és  $\theta$  a szögelfordulás. A forgórészt mechanikailag egy merev testként tekintve Newton II. törvénye alapján

$$J \ddot{\theta} = -B_m \dot{\theta} + K_m i + \tau, \quad (1.5)$$

ahol  $J$  a forgórész tehetetlensége,  $B_m$  a viszkózus csillapítási együttható,  $K_m$  a motorállandó,  $\theta$  a szögelfordulás,  $i$  a motoráram és  $\tau$  a forgórészre ható külső nyomaték. Ez a két lineáris differenciálegyenlet egyértelműen leírja a rendszer időtartománybeli viselkedését. A további vizsgálathoz kedvezőbb a differenciálegyenleteket állapotter modellként felírni. Egy állapotter modell általánosan

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.6)$$

$$y = Cx + Du \quad (1.7)$$

alakban írható fel. A két bemenet a külső nyomaték és a motorra adott feszültség. A kimenet a forgórész szöge. A paramétereket kifejtve (??) és (??) alapján a modell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B_m}{J} & \frac{K_m}{J} \\ 0 & -\frac{K_m}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ V \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ V \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

alakba írható át. A frekvenciatartománybeli vizsgálatokhoz felírható a rendszer szög-

nyomaték és szög-feszültség átviteli függvénye. Az állapotter modellt felhasználva

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.10)$$

általános formában, ahol  $I$  az identitás mátrix. Behelyettesítve (??) és (??) paramétereit (??) felírható

$$\begin{bmatrix} \frac{\theta(s)}{\tau(s)} \\ \frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)} \end{bmatrix} = \frac{1}{s(JLs^2 + (B_m L + JR)s + K_m^2 + B_m R)} \begin{bmatrix} Ls + R \\ K_m \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

alakban.

## 1.2. Egyenáramú motor stabilitása

A szabályozókör visszacsatoló ágának megbomlása instabilitáshoz vezet, ha a szabályozó vagy a szabályozott rendszer önmagában instabil. Ez a valós rendszernél szaturációt eredményez, mely a jelen alkalmazás kontextusában nem elfogadható. A motor stabilitása ezért egy rendszerkövetelmény, ami a karakterisztikus egyenletből meghatározható. Az (??)-es átviteli függvény alapján a karakterisztikus egyenlet

$$JLs^2 + (B_m L + JR)s + K_m^2 + B_m R = 0, \quad (1.12)$$

ahol a nullában elhelyezkedő pólussal átszorozva a szögsebesség a vizsgált kimenet. Ez a polinom valós együtthatókkal rendelkezik, így a Liénard–Chipart kritérium - a Routh-Hurwitz kritérium módosított alakja - segítségével a stabilitás szükséges és elégséges feltételei

$$JL > 0, \quad B_m L + JR > 0, \quad K_m^2 + B_m R > 0. \quad (1.13)$$

A feltételekben megjelenő paraméterek mind pozitívak a valós rendszerben, így a rendszer önmagában aszimptotikusan stabil. Ezen felül linearitásából következik, hogy exponenciálisan stabil.

## 1.3. Irányíthatóság és megfigyelhetőség

A felhasznált aktuátorok és szenzorok minimalizálása érdekében egy bemenet és egy kimenet használata a cél. Az impedancia modell teljes realizálásához további követelmény, hogy a rendszer szögelfordulása és szögsebessége irányítható legyen a bemeneti feszültség megváltoztatásával, és a szögelfordulás mérésével minden állapot

megfigyelhető legyen. Az (??)-os állapotter modell alapján az irányíthatóság feltétele, hogy

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} CB & CAB & CA^2B & D \end{array} \right] \quad (1.14)$$

legyen maximális rangú. Behelyettesítve (??) és (??) paramétereit a kimeneti mátrixot kiegészítve a szögsebességgel

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{K_m}{JL} & 0 \\ 0 & \frac{K_m}{JL} & -\frac{K_m(B_m L + JR)}{J^2 L^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

redukált lépcsős alakban

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

mely mátrix rangja megegyezik sorainak számával, így az irányíthatósági feltétel teljesül. Az előzőekhez hasonlóan a megfigyelhetőség feltétele, hogy

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

legyen maximális rangú, ahol  $C$  csupán a szöglfordulást tartalmazza. Ismét behelyettesítve (??) és (??) paramétereit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B_m}{J} & \frac{K_m}{J} \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

redukált lépcsős alakban

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

tehát a rendszer minden állapota megfigyelhető a szöglfordulás méréséből.



## 2. Szabályozó modellezése

---

### 2.1. Impedancia modell

Az eredményes ember-robot interakció érdekében a szabályozó előírása nem csupán az elérni kívánt pozíció vagy kifejtett nyomaték, hanem a mozgásállapot és a kifejtett nyomaték közötti összefüggés. Ezt az összefüggést linearitása végett egy tömeg-rugó-csillapítás modell adja meg a továbbiakban. A modell három paraméterrel

$$M_e \ddot{\theta} + B_e \dot{\theta} + K_e \theta = \tau, \quad (2.1)$$

ahol  $M_e$  a rendszer előírt tehetetlensége,  $B_e$  a viszkózus csillapítása,  $K_e$  a rugóállandója és  $\tau$  a rendszerre ható külső nyomaték.

### 2.2. Állapotmegfigyelő

Az állapotvisszacsatoláshoz szükséges belső állapotok közül csak a szögelfordulás áll rendelkezésre közvetlen mérésből. A többi állapotra egy megfigyelő ad becslést. Elkülönítve a mért és becsült állapotokat (??) és (??) felírható

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\theta\theta} & A_{\theta b} \\ A_{b\theta} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\theta \\ B_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ V \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

alakban, ahol  $x_b$  jelöli a becsült állapotokat. Továbbá jelölje  $\tilde{x}$  a becsült paramétereket. Ezután legyen

$$\begin{aligned}\hat{A} &= A_{bb} - K_e A_{\theta b} \\ \hat{B} &= \hat{A} K_e + A_{b\theta} - K_e A_{\theta\theta} \\ \hat{F} &= B_b - K_e B_{\theta},\end{aligned}\tag{2.4}$$

ahol  $\hat{A}$  a megfigyelő belső állapotának (továbbiakban  $\tilde{\eta}$ ) dinamikáját adja meg,  $\hat{B}$  és  $\hat{F}$  a mért illetve a becsült állapotok bemeneti mátrixai. A becsült állapotok és az állapotváltozók közötti összefüggés ekkor

$$\begin{aligned}\eta &= x_b - K_e \theta \\ \tilde{\eta} &= \tilde{x}_b - K_e \theta\end{aligned}\tag{2.5}$$

alakban adható meg. A belső állapot dinamikája

$$\dot{\tilde{\eta}} = \hat{A}\tilde{\eta} + \hat{B}\theta + \hat{F}u.\tag{2.6}$$

Végül (2.5) átalakításával a rendszer becsült állapotvektora

$$\tilde{x} = \hat{C}\tilde{\eta} + \hat{D}\theta,\tag{2.7}$$

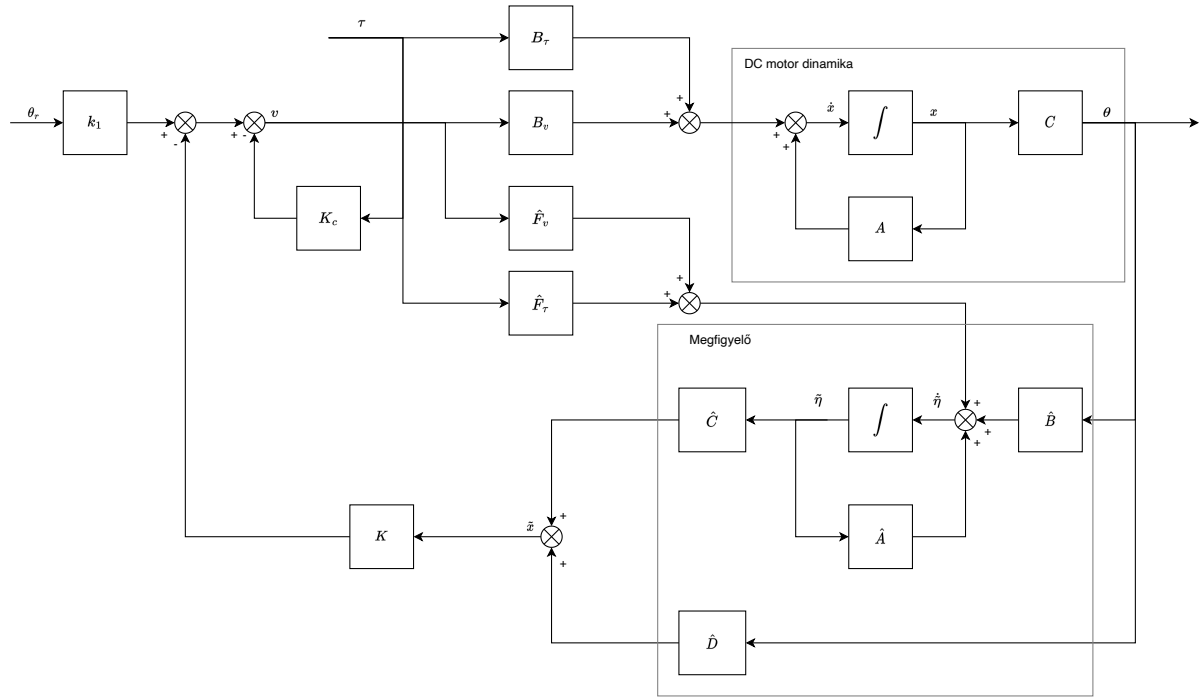
ahol

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ K_e \end{bmatrix},\tag{2.8}$$

mely tartalmazza a mért állapotot is.

## 2.3. Nyomaték kompenzáció

A modell két bemenete közül csak a feszültségre van hatással a szabályozó. A külső nyomaték környezeti hatásokból ered. Az impedancia modell mindkét bemenetre adott válasz alakját előírja, így a környezet hatását a feszültség megváltoztatásával kell kompenzálni. A kompenzáció a külső nyomaték direkt vagy indirekt visszacsatolásával érhető el. Direkt mérés esetén a külső nyomaték értékét egy szenzor adja meg, mely dinamikája jelen vizsgálat során elhanyagolható. Az állapotmegfigyelővel és kompenzációval ellátott rendszer teljes blokkdiagramját az 2.3-es ábra mutatja. A teljes rendszer dinamikája az (2.3)-es állapottér modell és az (2.4)-es állapotmegfigyelő



2.1. ábra. Impedancia szabályozó közvetlen nyomaték méréssel

összekapcsolásával írható le, a következő visszacsatolási összefüggéssel

$$V = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} - K_c\tau + k_1\theta_r, \quad (2.9)$$

ahol  $\mathbf{K}$  az állapot visszacsatolási mátrix,  $K_c$  a nyomaték kompenzációs együttható,  $k_1$  a az állapot visszacsatolási mátrix első eleme és  $\theta_r$  az előírt szögelfordulás. Behelyettesítve (2.9)-ba

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_V[-\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} - K_c\tau + k_1\theta_r] + \mathbf{B}_\tau\tau, \quad (2.10)$$

ahol a bemeneti mátrix  $\mathbf{B}$  oszlopai elkülönítve  $\mathbf{B}_V$  és  $\mathbf{B}_\tau$  paraméterként jelennek meg. Bevezetve a valós és becsült állapot közötti hibát, mint

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, \quad (2.11)$$

(2.11) a következő alakra hozható

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_V\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}_V\mathbf{K}\mathbf{e} + (\mathbf{B}_\tau - \mathbf{B}_VK_c)\tau + \mathbf{B}_Vk_1\theta_r, \quad (2.12)$$

a becsült állapot kiküszöbölésével. A valós és becsült állapot közötti eltérés dinamikája pedig (??) felhasználásával

$$\dot{\mathbf{x}}_h = \mathbf{A}_{h\theta}x_\theta + \mathbf{A}_{hh}\mathbf{x}_h + \mathbf{B}_{hB}V + \mathbf{B}_{h\tau}\tau, \quad (2.13)$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{\theta b}) \tilde{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{b\theta} x_\theta + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{\theta b} \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_{bB} V + \mathbf{B}_{b\tau} \tau, \quad (2.14)$$

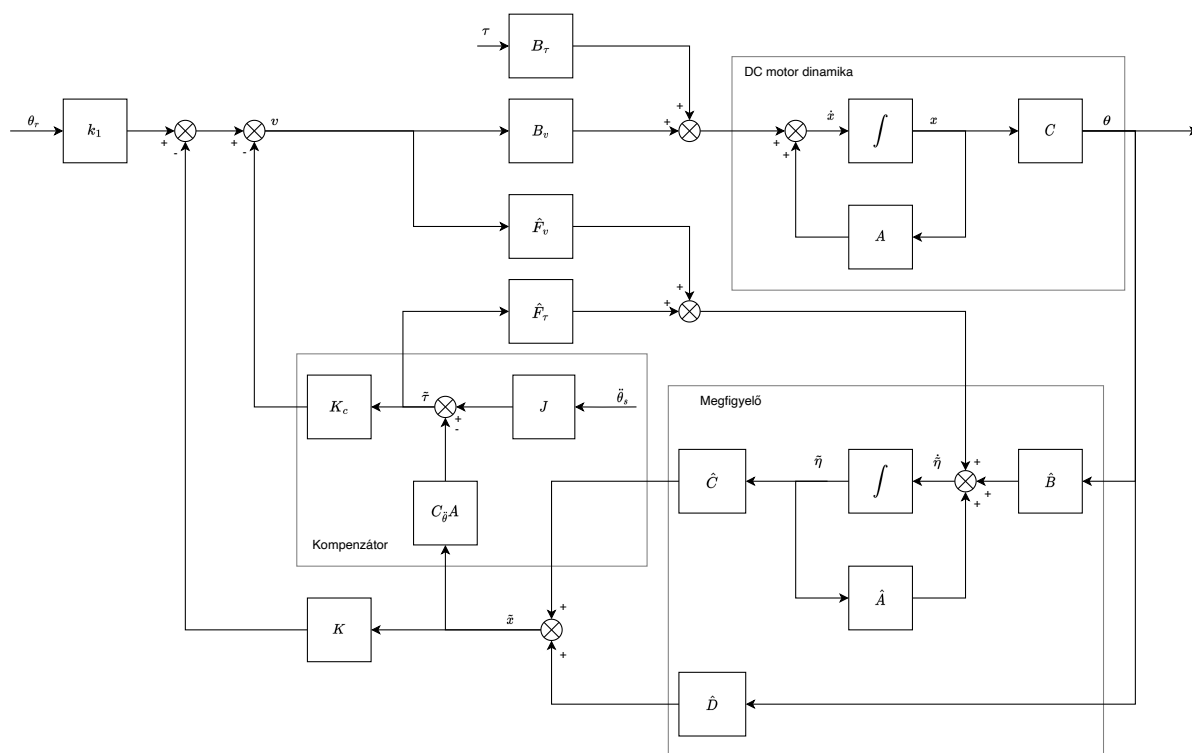
melyeket kivonva egymásból

$$\dot{e} = (\mathbf{A}_{hh} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{\theta h}) e. \quad (2.15)$$

A rendszer dinamikája blokk mátrix alakban

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_V K & B_V K \\ 0 & A_{bb} - K_e A_{\theta b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\tau - B_V K_c & B_V k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ \theta_r \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Indirekt nyomaték visszacsatolás kontextusában, a rendszer szöggyorsulásának mérése alapján, az ??-es ábra mutatja a teljes blokkdiagramot. Ekkor egy becsült



### 2.2. ábra. Impedancia szabályozó szöggyorsulás méréssel

nyomaték érték kerül visszacsatolásra, melyeket

$$\tilde{\tau} = J\ddot{\theta}_s - C_{\tilde{\theta}}A\tilde{x} \quad (2.17)$$

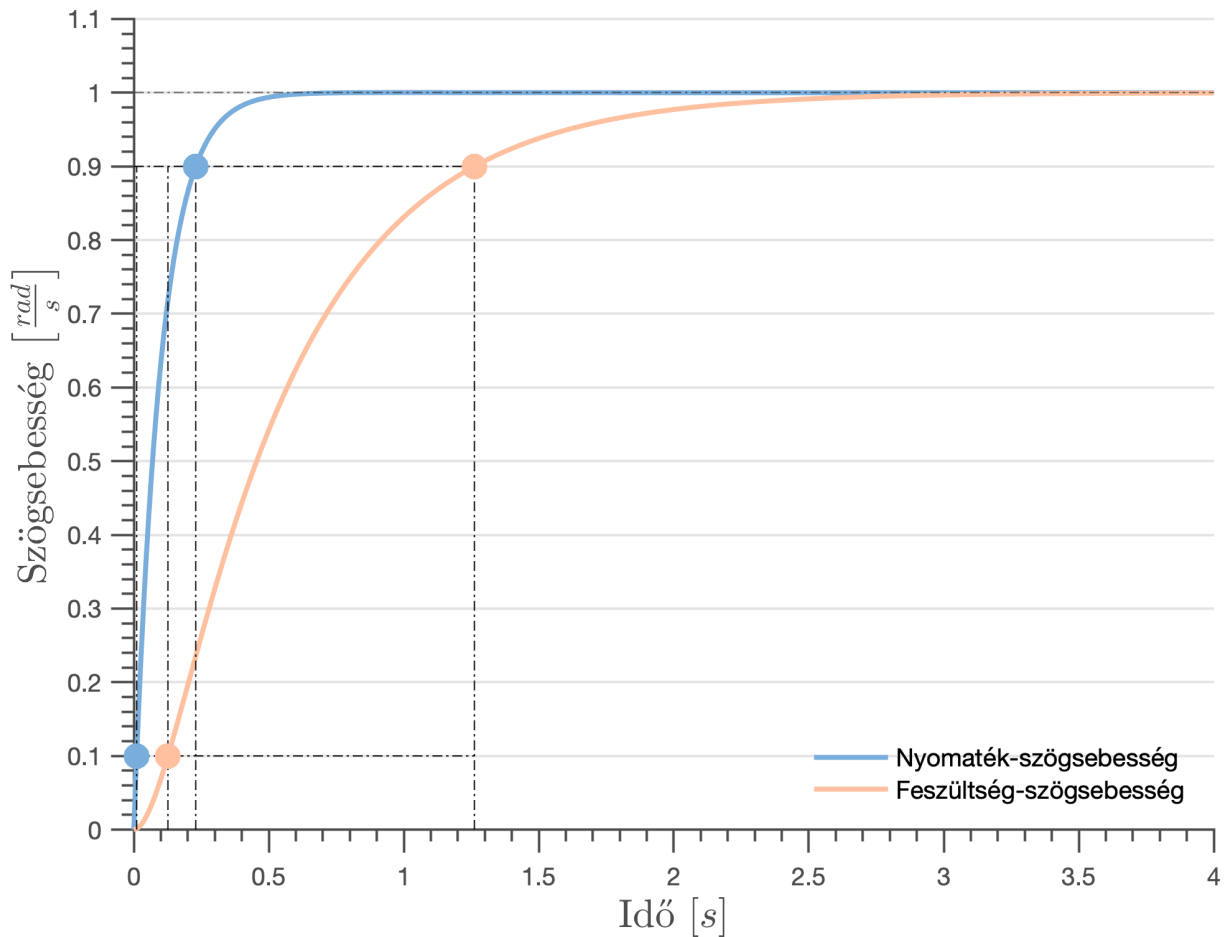
$$C_{\tilde{\theta}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

alakban, a becsült állapot és a mért szöggyorsulás kombinációjával adható meg. A feszültséggel a becsült nyomatékértékkel

$$V = -K\tilde{x} - K_c\tilde{\tau} + k_1\theta_r. \quad (2.19)$$

Az előző levezetéshez hasonlóan a teljes rendszer dinamikája blokk mátrix alakban

Ez a kompenzáció csak akkor lehet eredményes, ha a rendszer feszültségre és külső nyomatékokra egyaránt közel azonos sebességgel reagál. Az eltérő válaszokat



2.3. ábra. Külső nyomatékokra és feszültségre adott válasz összehasonlítása,  $J = 0.01 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$ ,  $K_m = 0.01 \text{ [kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}]$ ,  $B_m = 0.1 \text{ [kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}]$ ,  $L = 0.5 \text{ [H]}$ ,  $R = 1 \text{ [}\Omega\text{]}$

szemlélteti ??-es ábra, mely az (??)-es egyenletben szereplő átviteli függvények alapján a szögsebesség egységugrásra adott válaszát mutatja. A két válasz végértékét egységre normalizálva jeleníti meg az ábra a felfutási idő összehasonlításának megkönnyítése érdekében.

## **2.4. Szabályozó stabilitása**

## **3. Stabilitásvizsgálat időkéssel**

---

**3.1. Vizsgálati módszerek összehasonlítása**

**3.2. Stabilitás folytonos időben**

**3.3. Stabilitás diszkrét időben**





## **4. Kísérleti eredmények**

---

A rúd differenciálegyenlete

$$\ddot{\phi}(t) - \frac{6g}{l}\phi(t) + \frac{6D}{ml}\dot{\phi}(t - \tau) + \frac{6P}{ml}\phi(t - \tau) = 0 \quad (4.1)$$

A differenciálegyenlet Laplace transzformáltja

$$s^2\phi(s) - s\phi_0 - \dot{\phi}_0 - \frac{6g}{l}\phi(s) + \frac{6D}{ml}(se^{-s\tau}\phi(s) - \phi_{-\tau}) + \frac{6P}{ml}e^{-s\tau}\phi(s) = 0 \quad (4.2)$$

Kifejezve  $\phi(s)$ -t

$$\phi(s) = \frac{s\phi_0 + \dot{\phi}_0 + \frac{6D}{ml}\phi_{-\tau}}{s^2 + \frac{6D}{ml}se^{-s\tau} + \frac{6P}{ml}e^{-s\tau} - \frac{6g}{l}} \quad (4.3)$$

A végérték frekvenciatartománybeli reprezentációban

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \phi(s) = \frac{\dot{\phi}_0 + \frac{6D}{ml}\phi_{-\tau}}{\frac{6P}{ml} - \frac{6g}{l}} \quad (4.4)$$

Az időkésést Taylor-sorral közelítve

$$\phi(t - \tau) = \phi(t-) - \frac{1}{1!}\dot{\phi}(t)\tau + \frac{1}{2!}\ddot{\phi}(t)\tau^2 - \frac{1}{3!}\ddot{\phi}(t)\tau^3 + \dots \quad (4.5)$$

különböző rendű közelítésekkel

## 5. Összegzés

---



## **6. Következtetések**

---



FÜGGELÉK





# A. Measurement dataset

---

A.1. táblázat. Dataset for the equilibrium position measurement.

$U_{\text{in}}$	$\dot{\phi}$	$\theta$	$U_{\text{in}}$	$\dot{\phi}$	$\theta$
1.3	0	3.1415926536	1.3	0	3.1415926536
1.4	4.3	3.1415926536	1.4	-4.3	3.1415926536
1.5	4.7	3.1415926536	1.5	-4.7	3.1415926536
1.6	5.2	3.1415926536	1.6	-5.2	3.1415926536
1.7	5.67	3.1415926536	1.7	-5.67	3.1415926536
1.8	6.34	3.1415926536	1.8	-6.34	3.1415926536
1.9	6.61	3.1415926536	1.9	-6.61	3.1415926536
2	7.22	3.1415926536	2	-7.22	3.1415926536
2.1	7.72	3.1415926536	2.1	-7.72	3.1415926536
2.2	8.02	3.1415926536	2.2	-8.02	3.1415926536
2.3	8.5	3.8746309394	2.3	-8.3366666667	3.1415926536
2.4	9.0033333333	3.9677151662	2.4	-8.78	2.3561944902
2.5	9.5366666667	4.0666171571	2.5	-9.26	2.2514747351
2.6	9.9666666667	4.1306125631	2.6	-9.7	2.1758438008
2.7	10.4366666667	4.2120612615	2.7	-10.2	2.1060306307
2.8	10.7833333333	4.264421139	2.8	-10.63	2.0594885174
2.9	11.3933333333	4.3284165449	2.9	-11.1333333333	1.9605865264
3	11.84	4.3516876016	3	-11.55	1.9198621772
2.9	11.41	4.3225987808	2.9	-11.1033333333	1.9722220548
2.8	11.0133333333	4.2818744316	2.8	-10.6433333333	2.0653062815
2.7	10.5233333333	4.2353323182	2.7	-10.2633333333	2.1060306307
2.6	10.0566666667	4.1655191481	2.6	-9.7733333333	2.1700260366
2.5	9.5933333333	4.1015237422	2.5	-9.31	2.21656815
2.4	9.1266666667	4.0666171571	2.4	-8.8633333333	2.2514747351
2.3	8.55	3.9735329304	2.3	-8.4566666667	2.3329234335
2.2	8.2	3.8571776469	2.2	-7.9366666667	2.4609142453
2.1	7.71	3.7466401276	2.1	-7.5366666667	2.5539984721



## B. Poster

---



# Abstract

---

