Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
Высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа 5 по вычислительной математике

Интерполяция функции

Вариант №10

Преподаватель: Малышева Татьяна Алексеева
Выполнил: Состанов Тимур Айратович
Группа: P3214

Г. Санкт-Петербург

2024

Оглавление

Цель работы

Решить задачу интерполяции, найти значение функции при заданных аргументах, отличных от узловых точек

Порядок выполнения работы

Обязательное задание (до 80 баллов)

Вычислительная реализация задачи:

1. Выбрать из табл. 1 заданную по варианту таблицу $y = f(x)$ (таблица 1.1 – таблица 1.5);

2. Построить таблицу конечных разностей для заданной таблицы. Таблицу отразить в отчете;

3. Вычислить значения функции для аргумента $X1$ (см. табл.1), используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться;

4. Вычислить значения функции для аргумента $X2$ (см. табл. 1), используя первую или вторую интерполяционную формулу Гаусса. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться;

5. Подробные вычисления привести в отчете.

Программная реализация задачи:

1. Исходные данные задаются тремя способами:

   a) в виде набора данных (таблицы x,y), пользователь вводит значения с клавиатуры;

   b) в виде сформированных в файле данных (подготовить не менее трех тестовых вариантов);

   c) на основе выбранной функции, из тех, которые предлагает программа, например, $\sin x$. Пользователь выбирает уравнение, исследуемый интервал и количество точек на интервале (не менее двух функций).

2. Сформировать и вывести таблицу конечных разностей;

3. Вычислить приближенное значение функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, указанными методами (см. табл. 2). Сравнить полученные значения;

4. Построить графики заданной функции с отмеченными узлами интерполяции и интерполяционного многочлена Ньютона/Гаусса (разными цветами);

5. Программа должна быть протестирована на различных наборах данных, в том числе и некорректных.

6. Проанализировать результаты работы программы.

Необязательное задание (до 20 баллов)

1. Реализовать в программе вычисление значения функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, используя схемы Стирлинга;

2. Реализовать в программе вычисление значения функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, используя схемы Бесселя

Рабочие формулы

Многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_i(x)$$

$$Ln(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (8)$$

Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях n ($n < 20$).

К недостаткам можно отнести то, что с изменением числа узлов приходится все ***вычисления проводить заново***.

Многочлен Ньютона

Разделенные разности k-го порядка определяются через разделенные разности порядка $k-1$:

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Они определяются рекуррентно, начиная с первого порядка.

Используя понятие разделенной разности интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в следующем виде:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0,\ x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0,\ x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \cdots + f(x_0,\ x_1, \dots, x_n) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$\boldsymbol{N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f(x_{0,} x_1, \dots, x_k) \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)} \qquad (9)$$

Отметим, что при добавлении новых узлов первые члены многочлена Ньютона остаются неизменными.

Для повышения точности интерполяции в сумму могут быть добавлены новые члены, что требует подключения дополнительных интерполяционных узлов. При этом безразлично, в каком порядке подключаются новые узлы. Этим формула Ньютона выгодно отличается от формулы Лагранжа.

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Введем обозначение: $t = (x - x_0)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед:**

$$N_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Полученное выражение может аппроксимировать функцию на всем отрезке изменения аргумента $[x_0, x_n]$. Однако более целесообразно (с точки зрения повышения точности расчетов) использовать эту формулу для $x_0 \le x \le x_1$. При этом за x_0 может приниматься любой узел интерполяции x_k. Например, для $x_1 \le x \le x_2$, вместо x_0 надо взять значение x_1. Тогда интерполяционный многочлен Ньютона:

$$N_n(x) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \cdots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i \quad (*)$$

Интерполяционную формулу (*) обычно используют для вычислений значений функции в точках левой половины отрезка.

Для правой половины отрезка разности вычисляют справа налево: $t = (x - x_n)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **второй интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования назад:**

$$N_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

Первая интерполяционная формула Гаусса $(x > a)$

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$
$$+ \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$
$$+ \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} \dots$$
$$+ \frac{(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}$$
$$+ \frac{(t+n-1)\dots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Вторая интерполяционная формула Гаусса $(x < a)$

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}$$
$$+ \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots$$
$$+ \frac{(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n}$$
$$+ \frac{(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n})(t+n-1)\dots(t-n+\mathbf{1})}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Вычислительная реализация задачи

X	Y
2,10	3,7587
2,15	4,1861
2,20	4,9218
2,25	5,3487
2,30	5,9275
2,35	6,4193
2,40	7,0839

X_1	X_2
2,355	2,254

Таблица конечных разностей:

Конечные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах:

$$\Delta^0 y_i = y_i$$

Конечными разностями k-го порядка называют величины:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

Таким образом:

№	$\Delta^0 y_i$	$\Delta^1 y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0 (-3)	3.7587	0.4274	0.3083	-0.6171	1.0778	-1.7774	2.9757
1 (-2)	4.1861	0.7357	-0.3088	0.4607	-0.6996	1.1983	-
2 (-1)	4.9218	0.4269	0.1519	-0.2389	0.4987	-	-
3 (0)	5.3487	0.5788	-0.087	0.2598	-	-	-
4 (1)	5.9275	0.4918	0.1728	-	-	-	-
5 (2)	6.4193	0.6646	-	-	-	-	-
6 (3)	7.0839	-	-	-	-	-	-

Вычислим значение функции для аргумента $X_1 = 2.355$, используя формулу Ньютона для интерполяции назад, так как X_1 лежит во второй половине отрезка

$$t = \frac{x - x_n}{h} = \frac{x - x_6}{h}$$

Где h – шаг равномерно распределенного значения x, поэтому

$$h = x_1 - x_0$$

$$N_6(x) = y_6 + t\Delta y_5 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_4 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_3 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_2 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}{5!}\Delta^5 y_1 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)}{6!}\Delta^6 y_0$$

$$h = x_1 - x_0 = 2{,}15 - 2{,}10 = 0{,}05$$

$$t = \frac{2{,}355 - 2{,}40}{0{,}05} = -0{,}9$$

$$\mathrm{y}(2.355) = 7.0839 + (-0.9) \cdot 0.6646 + \frac{(-0.9) \cdot 0.1}{2 \cdot 1} \cdot 0.1728 + \frac{(-0.9) \cdot 0.1 \cdot 1.1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 0.2598 + \frac{(-0.9) \cdot 0.1 \cdot 1.1 \cdot 2.1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 0.4987 + \frac{(-0.9) \cdot 0.1 \cdot 1.1 \cdot 2.1 \cdot 3.1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1.1983 + \frac{(-0.9) \cdot 0.1 \cdot 1.1 \cdot 2.1 \cdot 3.1 \cdot 4.1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2.9757 = 6.4520$$

Вычислим значение функции для аргумента $X_2 = 2.254$, используя первую интерполяционную формулу Гаусса, так как X_2 лежит в правой половине отрезка (выделенно желтым)

$$h = x_1 - x_0 = 2{,}15 - 2{,}10 = 0{,}05$$

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2.254 - 2.25}{0.05} = 0.08$$

$$P_3(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)(t-3)}{6!}\Delta^6 y_{-3}$$

$$\mathrm{y}(2.254) = 5.3487 + 0.08 \cdot 0.5788 + \frac{0.08 \cdot (-0.92)}{2 \cdot 1} \cdot 0.1519 + \frac{1.08 \cdot 0.08 \cdot (-0.92)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (-0.2389) + \frac{1.08 \cdot 0.08 \cdot (-0.92) \cdot (-1.92)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (-0.6996) + \frac{2.08 \cdot 1.08 \cdot 0.08 \cdot (-0.92) \cdot (-1.92)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1.1983 + \frac{2.08 \cdot 1.08 \cdot 0.08 \cdot (-0.92) \cdot (-1.92) \cdot (-2.92)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2.9757 = 5.3875$$

Программная реализация задачи

Листинг программы:

```python
def lagrange_interpolation(x, y, x_val):
    n = len(x)
    result = 0
    for i in range(n):
        term = y[i]
        for j in range(n):
            if j != i:
                term *= (x_val - x[j]) / (x[i] - x[j])
        result += term
    return result
```

```python
def newton_divided_differences(x, y):
    n = len(x)
    coef = np.zeros([n, n])
    coef[:, 0] = y

    for j in range(1, n):
        for i in range(n - j):
            coef[i][j] = (coef[i + 1][j - 1] - coef[i][j - 1]) / (x[i + j] - x[i])

    return coef

def newton_interpolation(x_data, y_data, x):
    coef = newton_divided_differences(x_data, y_data)
    n = len(x_data) - 1
    p = coef[0][n]
    for k in range(1, n + 1):
        p = coef[0][n - k] + (x - x_data[n - k]) * p
    return p
```

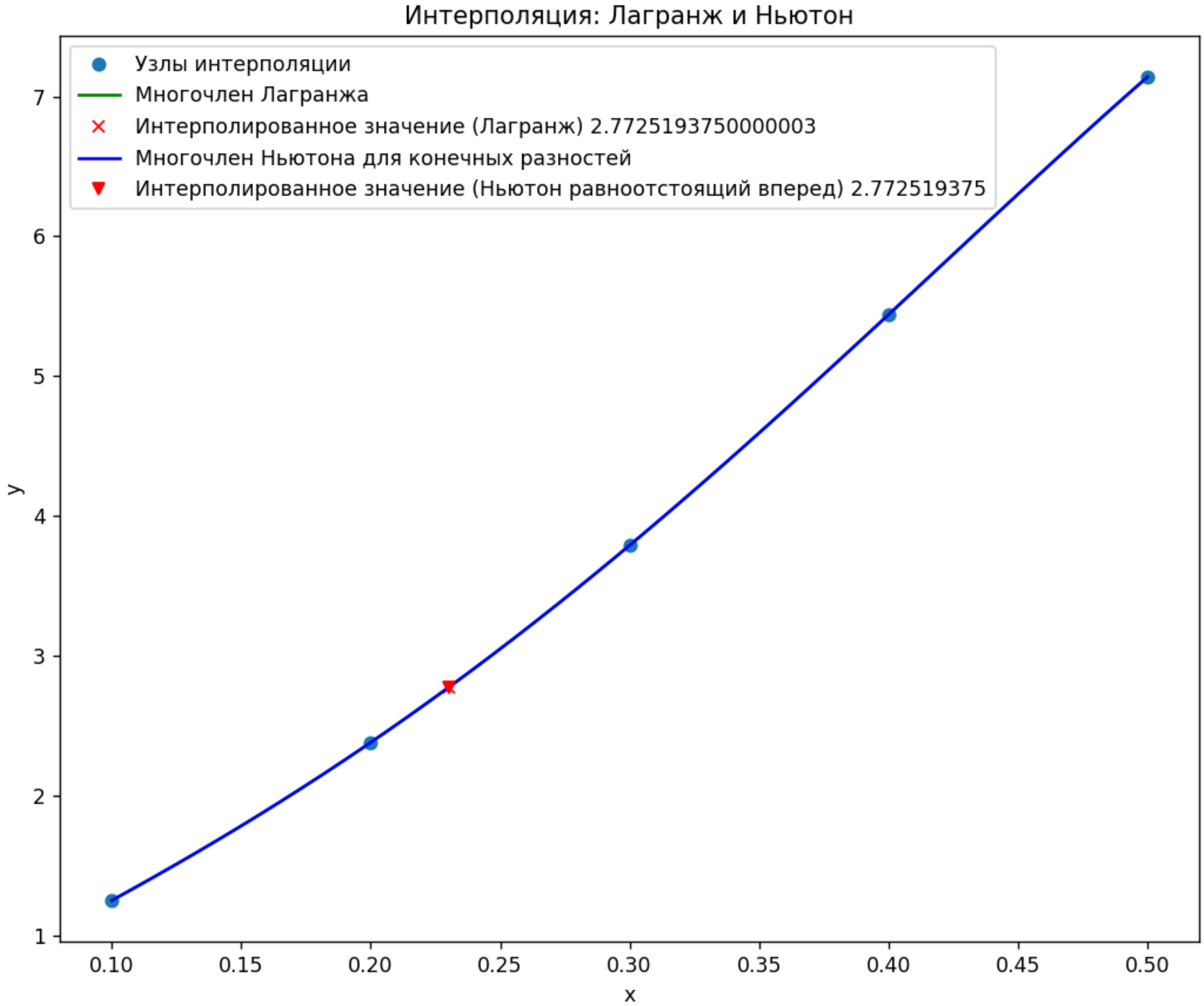
```python
def newton_finite_differences_first(x, x_value, table):
    n = len(x)
    coef = table[0]
    t = (x_value - x[0]) / (x[1] - x[0])
    result = round(coef[0], 4)

    for j in range(1, n):
        delta_t = t
        term = round(coef[j], 4)
        for i in range(j):
            term *= (delta_t - i)
            term /= (i + 1)
        result += term
    return result


3 usages
def newton_finite_differences_second(x, x_value, coef):
    n = len(x)
    t = (x_value - x[-1]) / (x[1] - x[0])
    result = round(coef[-1][0], 4)
    for j in range(1, n):
        delta_t = t
        term = round(coef[-(j + 1)][j], 4)
        for i in range(j):
            term *= (delta_t + i)
            term /= (i + 1)
        result += term
    return result
```

Результат работы программы:

data.txt   NewtonDivided

```
x,y
0.1,1.25
0.2,2.38
0.3,3.79
0.4,5.44
0.5,7.14
```

```
Выберите способ ввода данных:
1: Ввод с клавиатуры
2: Загрузка из файла
3: Генерация на основе функции
Ваш выбор (1/2/3): 2
Введите имя файла: data.txt

Таблица точек (x, y):
+-----+------+
|  x  |  y   |
+-----+------+
| 0.1 | 1.25 |
| 0.2 | 2.38 |
| 0.3 | 3.79 |
| 0.4 | 5.44 |
| 0.5 | 7.14 |
+-----+------+
Введите значение аргумента для интерполяции: 0.23
```

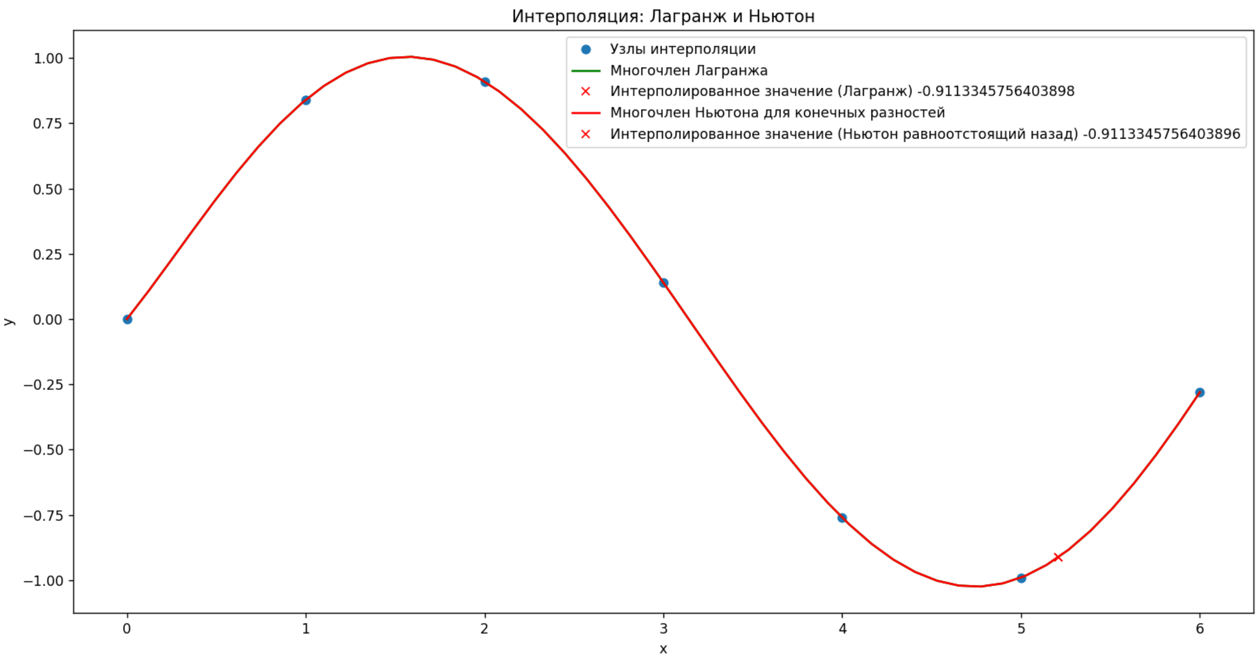



```
Приближенное значение функции в точке (многочлен Лагранжа) 0.23: 2.7725193750000003

Значения x равномерно распределены.

Таблица конечных разностей:
+------+------+------+-------+-------+
| Δ^0y | Δ^1y | Δ^2y |  Δ^3y |  Δ^4y |
+------+------+------+-------+-------+
| 1.25 | 1.13 | 0.28 | -0.04 | -0.15 |
| 2.38 | 1.41 | 0.24 | -0.19 |  0.0  |
| 3.79 | 1.65 | 0.05 |  0.0  |  0.0  |
| 5.44 | 1.7  | 0.0  |  0.0  |  0.0  |
| 7.14 | 0.0  | 0.0  |  0.0  |  0.0  |
+------+------+------+-------+-------+
Рассматриваемое значение лежит в первой половине

Приближенное значение функции в точке (многочлен Ньютона вперед) 0.23: 2.772519375
```

addeddata.txt | data.txt

```
x,y
0,0
1,0.84
2,0.91
3,0.14
4,-0.76
5,-0.99
6,-0.28
```

```
Выберите способ ввода данных:
1: Ввод с клавиатуры
2: Загрузка из файла
3: Генерация на основе функции
Ваш выбор (1/2/3): 2
Введите имя файла: addeddata.txt

Таблица точек (x, y):
+---+-------+
| x |   y   |
+---+-------+
| 0 |  0.0  |
| 1 |  0.84 |
| 2 |  0.91 |
| 3 |  0.14 |
| 4 | -0.76 |
| 5 | -0.99 |
| 6 | -0.28 |
+---+-------+
Введите значение аргумента для интерполяции: 5.21
```




```
Приближенное значение функции в точке (многочлен Лагранжа) 5.21: -0.9113345756403898

Значения x равномерно распределены.

Таблица конечных разностей:
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+------+
|  Δ^0y |  Δ^1y |  Δ^2y |  Δ^3y |  Δ^4y |  Δ^5y | Δ^6y |
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+------+
|  0.0  |  0.84 | -0.77 | -0.07 |  0.78 | -0.69 | 0.07 |
|  0.84 |  0.07 | -0.84 |  0.71 |  0.09 | -0.62 | 0.0  |
|  0.91 | -0.77 | -0.13 |  0.8  | -0.53 |  0.0  | 0.0  |
|  0.14 |  -0.9 |  0.67 |  0.27 |  0.0  |  0.0  | 0.0  |
| -0.76 | -0.23 |  0.94 |  0.0  |  0.0  |  0.0  | 0.0  |
| -0.99 |  0.71 |  0.0  |  0.0  |  0.0  |  0.0  | 0.0  |
| -0.28 |  0.0  |  0.0  |  0.0  |  0.0  |  0.0  | 0.0  |
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+------+
Рассматриваемое значение лежит во второй  половине

Приближенное значение функции в точке (многочлен Ньютона назад) 5.21: -0.9113345756403896
```

Исходный код: https://github.com/tsostanov/CompMath5

Вывод

В ходе работы были изучены различные методы интерполяции функции и были реализованы методы с использованием многочлена Лагранжа, Ньютона для разделенных и конечных разностей и Гаусса