范德蒙法

2023年5月13日 星期六 11:47

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n} (a_i - a_j).$$

推论：第 n 行减上 a_1 倍的 n-1 行，第 n-1 行减上 a_1 倍的 n-2 行。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & \cdots & a_n^2-a_na_1 \\ 0 & a_2^3-a_2^2a_1 & \cdots & a_n^3-a_n^2a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_n^{n-2}a_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{展开1行1列}$$

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_3a_1 & \cdots & a_n^2-a_na_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix} \Rightarrow \text{提个自行公因式}$$

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

同理，n 行-(n-1)行 a_2 倍

$$\Rightarrow (a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1) \times (a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)\cdots$$

推理得 $\prod_{0\le j<i\le n} (a_i-a_j)$