质点动力学

（第二章）

目录

1 牛顿定律

2 非惯性系中的牛顿定律

§1 牛顿定律

1.1 牛顿定律

1，牛顿第一定律

物体在不受力或受到平衡力的作用下，始终保持原有运动状态（静止或匀速直线运动状态）。也称惯性定律。

说明：

- 惯性的存在。惯性—保持原有运动状态的能力。
- 力不是维持运动的原因。
- 将惯性定律严格成立的参考系称为惯性参考系，简称惯性系。

2，牛顿第二定律

物体在加速度与受力成正比。

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}}$$

说明：

- 式中 m 反映了惯性大小—称为惯性质量。
- 力是改变运动状态的原因。
- 在惯性参考系中才成立。
- 多个力同时作用时，可以先求出合力，再求加速度。也可以先分别求出每个力的加速度，再求矢量和。

§1 牛顿定律

- 分量形式

$$\begin{cases} F_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ F_y = m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \\ F_z = m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_\tau = ma_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

2，牛顿第三定律

或称作用力与反作用力定律。作用力与反作用力大小相等、方向相反、作用在同一条直线上。

说明：

- 作用力与反作用力与平衡力的区别。

§1 牛顿定律

1.2 几种常见的力

1，重力

大小：mg，方向：竖直向下

2，弹力

大小：$F = kx$，　x表示伸长量，方向：与形变相反。

可以统一成：$\boxed{F = -kx}$（平衡位置为原点）

3，摩擦力

①静摩擦力

大小：$\le \mu N$，方向：阻碍相对运动趋势。

②滑动摩擦力

大小：$F = \mu N$，方向：阻碍相对运动。

§1 牛顿定律

4，万有引力

大小：$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$　方向：略

m_1, m_2：引力质量

统一写成：$\vec{F}_{12} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}_{12}$

现代实验在很高的精度证明物体的惯性质量与引力质量相等。

1.3 牛顿定律的应用

①已知受力，求运动规律（速度、位置）$\boxed{\text{用积分}}$

②已知运动规律，求受力$\boxed{\text{求导}}$

步骤：

- 受力分析
- 建坐标
- 列出牛顿第二定律方程（运动微分方程）
- 解方程

例1 求质量为 m 的质点从静止开始竖直下落。若空气阻力与速度成正比 $f=-kmv$，(k 为常数)。求速率与时间的关系。

解：取竖直向下为正向，有

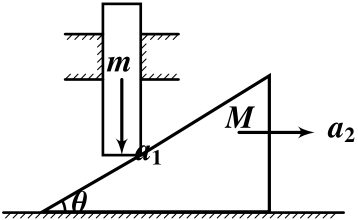
$$-kmv+mg=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

即 $$-kv+g=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

积分 $$\int_0^v\frac{\mathrm{d}v}{-kv+g}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

解得 $$v=\frac{g}{k}(1-e^{-kt})$$

例2 如图，所有接触面均光滑。求两物体的加速度。



解：设 m 向下的加速度和 M 向右的加速度为 a_1，a_2。

$$mg - N\cos\theta = ma_1$$

$$N\sin\theta = Ma_2$$

立即可得加两物体的加速度关系

$$a_1 = a_2\tan\theta$$

联立以上方程，求得结果。

例3 飞机以 u 的水平初速着陆，设飞机受的空气阻力为 mcv^2，升力为 mkv^2。与地面的滑动摩擦系数 μ。试求飞机着陆所滑行的距离。

解：列出水平和竖直方向的运动微分方程

$$-N\mu - mcv^2 = ma$$

$$N + mkv^2 - mg = 0$$

求得 $$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (k\mu - c)v^2 - g\mu$$

变形 $$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = (k\mu - c)v^2 - g\mu$$

即 $$\frac{v\mathrm{d}v}{(k\mu - c)v^2 - g\mu} = \mathrm{d}x$$

积分 $$\int_u^0 \frac{\mathrm{d}v^2}{2(k\mu - c)v^2 - 2g\mu} = s$$

例4 桌面上平直放有一静止的长 L 的链条，开始时有长为 a 的一段自然下垂于桌边。链条与桌面的滑动摩擦系为 μ。求链条全部滑离桌面时的速度。

解：设当链条滑到垂于桌边的长为 x 时

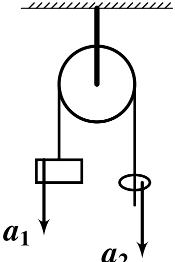
$$\frac{x}{L}mg-\frac{L-x}{L}mg\mu=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

即 $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{L}g-\frac{L-x}{L}g\mu$$

变形 $$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{L}g-\frac{L-x}{L}g\mu$$

积分 $$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_a^L\left(\frac{x}{L}g-\frac{L-x}{L}g\mu\right)\mathrm{d}x$$

例5 一条轻绳跨过摩擦可被忽略的轻滑轮，绳的一端挂有质量为 m_1 的物体，绳的另一端穿过一质量为 m_2 的环，求当环相对于绳以恒定的加速度 a_0 沿绳向下滑动时，物体和环相对于地面的加速度各是多少？环与绳间的摩擦力多大？



解：设物体向下以 a_1 加速，环向下以 a_2 加速，取竖直向上为正。

$$T - m_1 g = -m_a a_1$$

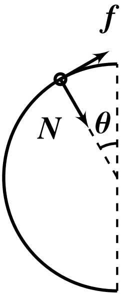
$$f - m_2 g = -m_2 a_2$$

绳与滑轮不计质量，$T = f$

由相对运动规律知：$-a_2 = -a_0 + a_1$

联立求解结果

例6 水平桌面上有一半径为 R 的半圆形的槽，一质量为 m 的小球从一端入射，初速 v_0。已知小球与槽的滑动摩擦系数为 μ。求小球滑出的速率。



$$\left.\begin{aligned} -f &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ N &= m\frac{v^2}{R} \\ f &= N\mu \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu}{R}v^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu}{R}v^2 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mu}{R}v$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int_0^{\pi R}\frac{\mu}{R}\mathrm{d}s$$

$$v = v_0 e^{-\pi\mu}$$

例7 补充例题1，在 xoy 平面运动的质点，$t=0$ 时位于原点，速度 $v=v_0$，沿 y 轴正向。质点受力 $F=f_0t$，沿 x 轴正向。求质点的轨迹

解：因为合力只在 x 方向，y 方向作匀速运动。有

$$y=v_0t$$

写出 x 方向运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=f_0t$$

积分一次得

$$\int_0^{v_x} m\mathrm{d}v_x=\int_0^t f_0t\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad v_x=\frac{f_0t^2}{2m}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{f_0 t^2}{2m}$$

再积分一次，得

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{f_0 t^2}{2m}\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{f_0 t^3}{6m}$$

所以得运动方程为

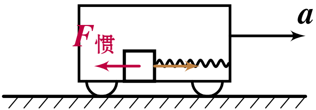
$$\begin{cases} x = \dfrac{f_0 t^3}{6m} \\ y = v_0 t \end{cases}$$

消去时间，得轨迹

$$x = \frac{f_0 y^3}{6m v_0^3}$$

§2 非惯性系中的牛顿定律

2.1 平动加速参考系中的牛顿定律



设想一列沿平直轨道加速行驶的火车车厢，在车厢光滑地板上的一个质量为 m 的物体。

地面的观察者认为，弹簧有拉力

$F = k\Delta x = ma$。

车厢内的观察者：弹簧有拉力 $F = k\Delta x = ma$，但物体却没有水平加速度。

结论

在平动的加速参考系中，只要将所研究的对象在所受真实力的基础上，外加假想力（称为惯性力）

$\boxed{F_{惯} = ma \quad \text{方向与参考系的加速度反向}}$

的力后，就可以应用牛顿定律。

§2 非惯性系中的牛顿定律

2.2 匀速转动参考系中静止的物体

结论

在一个以 ω 匀速转动的参考系中，研究静止的质量为m的物体，其惯性力为

$$\boxed{F_{惯} = m\omega^2 r \quad 方向向外}$$

2.3 匀速转动参考系中运动的物体*

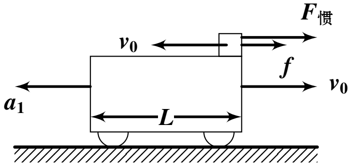
以 ω 匀速转动的参考系中，运动的物体，惯性力

$$\left\{\begin{array}{ll} F_{惯}^{1} = m\omega^2 r & 方向向外 \\ F_{惯}^{2} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega} & \end{array}\right.$$

惯性离心力

科里奥利力

例1 光滑水平地面上有一个质量 M、长 L 的小车，以初速 v_0 沿直线运动。现将一质量为 m 的小球静止地放在前端。要使小球不掉下小车，求 L 至少多长？设车与小球的滑动摩擦系数为 μ。



以地为参考系

$$f = mg\mu$$

$$a_1 = \frac{f}{M} = \frac{mg\mu}{M}$$

以小车为参考系

$$a = \frac{f + F_{惯}}{m} = \mu g \frac{m + M}{M}$$

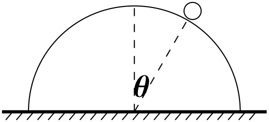
匀减速运动

不掉下的最小长度满足

$$-2aL = 0 - v_0^2$$

$$L = \frac{Mv_0^2}{2g\mu(m + M)}$$

例2 光滑水平地面上有一质量为 M 半径为 R 的静止的半圆形物体，其顶端有一 m 的小球。由于某种扰动，小球沿圆表面下滑。不计摩擦，求小球在何处与半圆形物体脱离。



$$mv_{1x} = Mv_2$$

$$mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m(v_{1x}^2+v_{1y}^2)+\frac{1}{2}Mv_2^2$$

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x}+v_2} = \tan\theta$$

$$m\frac{(v_{1x}+v_2)^2+v_{1y}^2}{R} = mg\cos\theta$$