角动量和角动量守恒

（第五章）

目录

§1 角动量、力矩，质点的角动量定理

1.1 质点的角动量矢量

定义

定义质点相对于某一指定点的位置矢量与质点的动量矢量的矢量积为质点对该指定点的角动量（也称动量矩）

$$\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

- 角动量是状态量，国际单位（SI）： $\mathrm{Kg \cdot m^2/s}$
- 角动量的计算(I)

$$\begin{cases} \text{大小} \quad J = rmv\sin\theta \\ \text{方向：右手法则} \end{cases}$$

§1 角动量、力矩，质点的角动量定理

- 角动量的计算(II)：用行列式计算

$$\vec{J} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_x \end{vmatrix}$$

- 角动量的计算(III)：直接求矢量积

$$\vec{J} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \times (mv_x\hat{i} + mv_y\hat{j} + mv_z\hat{k})$$

$$\begin{cases} \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \end{cases}$$

§1 角动量、力矩，质点的角动量定理

1.2 力对定点的力矩矢量

定义

定义力对某指定点的力矩等于力的作用点相对于该点的位矢与力的矢量积

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- 国际单位（SI）：**N · m**
- 力矩的计算：

  I，分别计算大小与方向

  II，行列式

  III，直接求矢量积

§1 角动量、力矩，质点的角动量定理

1.3 质点的角动量（动量矩）定理

质点的角动量（动量矩）定理

作用在质点上所有力的总力矩等于质点的角动量对时间的一次导数

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t}$$

- 角动量定理只在惯性系中成立
- 角动量定理与牛顿定律的相似性
- 在求力矩与角动量时，参考点不能变化。

§1 角动量、力矩，质点的角动量定理

1.4 质点的角动量守恒定律

质点的角动量守恒定律

作用在质点上所有力的总力矩恒为零，质点的角动量守恒

$$\vec{M} \equiv 0 \Longrightarrow \vec{J}\text{守恒}$$

- 角动量守恒的普适性
- 角动量守恒不但指大小不变，而且方向也不能改变。
- 角动量守恒的条件。

例1 已知质点运动方程为

$$\vec{r}(t) = A\cos\omega t\hat{i} + B\sin\omega t\hat{j}$$

A、B、ω为常数，求质点对原点的角动量及合力对原点的力矩。

解：速度和加速度

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin\omega t\hat{i} + B\omega\cos\omega t\hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos\omega t\hat{i} - B\omega^2\sin\omega t\hat{j}$$

角动量

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{r}\times m\vec{v}\\ &= m(A\cos\omega t\hat{i} + B\sin\omega t\hat{j})\times\\ &\quad(-A\omega\sin\omega t\hat{i} + B\omega\cos\omega t\hat{j})\\ &= mAB\omega\hat{k}\end{aligned}$$

同理可求得

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = m\vec{r} \times \vec{a} = \cdots = 0$$

例2 证明行星的绕日运动（1）为平面运动；（2）单位时间内相对于太阳扫过的面积为常数。

解： 由角动量守恒，得

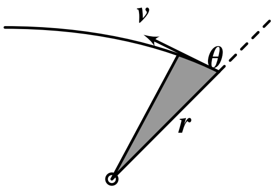
$$\vec{J} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{不变矢量}$$

用 $\vec{r}$ 点乘左右两边，得

$$\vec{r} \cdot \vec{J} = 0$$

这是一个以 $\vec{J}$ 为法线的平面方程，即行星必然在过太阳且与 $\vec{J}$ 垂直的平面上运动。

$$mrv \sin\theta = J$$



$$mrv\sin\theta\,\mathrm{d}t = J\mathrm{d}t$$
$$mr\mathrm{d}s\sin\theta = J\mathrm{d}t$$
$$2m\mathrm{d}S = J\mathrm{d}t$$
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{J}{2m}$$

于是证明了，在太阳万有引力作用下，行星的角动量守恒，导致单位时间相对于太阳扫过的面积为常数。

例3 光滑水平桌面上有一质量为 m 的小球，用一轻绳通过桌面上的小孔拉住。开始时小球以半径 a、角速度 ω 作匀速圆周运动。现缓慢拉动到半径为 $a/2$。求拉力作的功。

解： 整个过程，角动量守恒

$$rmv\sin\theta = r'mv'\sin\theta'$$

化简得

$$ma^2\omega = \frac{a}{2}mv'$$

然后由动能定理，求得拉力的功

$$W = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \cdots$$

例4 光滑水平桌面上有一轻弹簧，倔强系数为 k，一端固定，另一端系一质量为 m 的小球。系统开始静止。现给小球一垂直于弹簧的水平初速 u，若发现弹簧的最大伸长为 a，求弹簧原长。

解： 机械能守恒

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ka^2$$

角动量守恒

$$mlu = m(l+a)v\sin\theta$$

在弹簧最大伸长时，必有

$$\theta = 90^\circ$$

联立，解得结果 (略)

例5 长为 l，质量为 m 的单摆，初始时与竖直线的夹角为 θ。现给它一垂直于单摆所在的竖直平面的初速 u。要使单摆刚好能摆动到的最高点为摆水平位置，求初速 u 为多大。

解： 只有重力作功，机械能守恒。

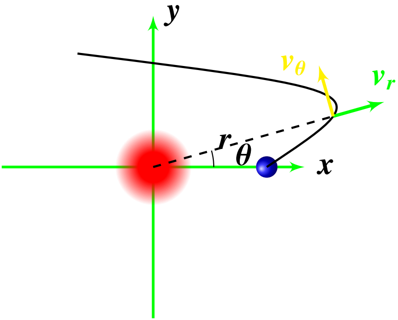
$$\frac{1}{2}mu^2 - mgl\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2$$

作用在单摆上的总力矩始终垂直于竖直线，所以在竖直方向上没有力矩，可以用竖直的角动量分量守恒

$$lmu\sin\theta = lmv$$

联立求得结果

例6 *，研究行星绕日运动的轨迹。



$$rmv_\theta = J(\text{常数})$$

$$\frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{GmM}{r} = E(\text{常数})$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{mr^2}{J}\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{J^2}{m^2r^2}}$$

$$r = \frac{J^2/m^2M^2G^2}{1 + \sqrt{1 + 2J^2E/m^3M^4G^4}\cos(\theta - \theta_0)}$$

§2 质点组的角动量定理

2.1 质点组的角动量

定义

质点组总角动量为其中每个质点的角动量的矢量和

$$\vec{J}=\sum\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$$

2.2 内力的总力矩为零

2.3 质点组的角动量定理

质点组的角动量定理

作用在质点组上所有外力的总力矩等于质点组总角动量的变化率

$$\sum\vec{M}_{外力}=\frac{\mathrm{d}\vec{J}_{总}}{\mathrm{d}t}$$

2.4 质点组的角动量守恒定律

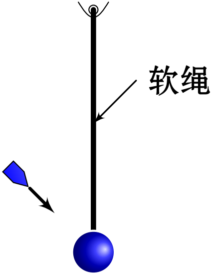
质点组的角动量守恒定律

作用在质点组上的所有外力的总力矩始终为零，质点组的角动量守恒。

§2 质点组的角动量定理

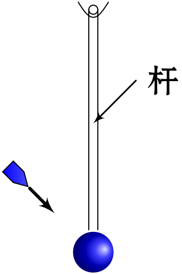
总结

- 内力的总冲量为零
- 内力的总力矩为零
- 内力的总功一般不为零



子弹、球系统水平动量守恒

子弹、球系统角动量守恒



子弹、球系统水平动量不守恒

子弹、球、杆系统角动量守恒

§3 刚体力学初步

★ 转动

(1) 定轴转动

刚体运动时，只有一条直线上的点是静止的，所有的点都围绕该直线作圆周运动，且圆心就在线上，称为定轴转动

(2) 定点转动

刚体运动时只有一点是静止的，称为定点转动

★ 一般运动

刚体的一般运动可以看成平均动和转动的叠加。

3.3 刚体动力学

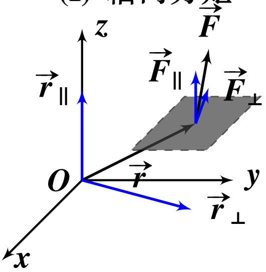
★ 平动：使用质心运动定理

★ 定轴转动：本节的任务

3.4 刚体的定轴转动

设刚体绕 z 作定轴转动，并取原点 O 为参考点。

(I) 轴向力矩

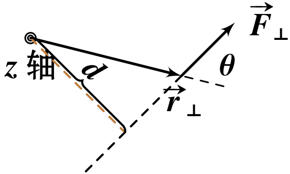


$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= (\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}) \times (\vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel})$$

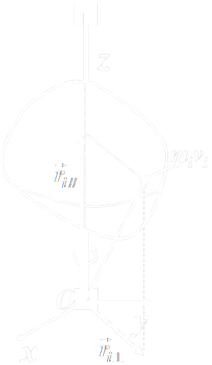
$$= \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp} + \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\parallel} + \vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\parallel}$$

$$\vec{M}_z = \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp}$$



$$\begin{cases} M_z = r_{\perp} F_{\perp} \sin\theta = F_{\perp} d \\ \text{方向：正负代表} \end{cases}$$

(II) 刚体的轴向角动量



$$\vec{J}_i = \vec{r}_i \times m\vec{v}_i$$

$$= (\vec{r}_{i\perp} + \vec{r}_{i\parallel}) \times m\vec{v}_i$$

$$= \vec{r}_{i\perp} \times m\vec{v}_i + \vec{r}_{i\parallel} \times m\vec{v}_i$$

$$\vec{J}_z = \sum \vec{r}_{i\perp} \times m\vec{v}_i$$

可以改写成

$$\begin{cases} J_z = \sum m r_{i\perp} v_i \\ \text{方向：正负代表} \end{cases}$$

进一步改成用角速度表示

$$\begin{cases} J_z = \sum m r_{i\perp}^2 \omega \\ \text{方向：正负代表} \end{cases}$$

定义：

$$\boxed{I_z = \sum m_i r_{i\perp}^2}$$

称为刚体绕 z 轴的转动惯量

于是有：

$$\boxed{\begin{cases} J_z = I_z \omega \\ \text{方向：正负代表} \end{cases}}$$

(III) 刚体定轴转动定理

作用在刚体上的力的轴向力矩等于刚体的轴向角动量对时间的一次导数

$$\boxed{M_z = \frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t}} \quad \boxed{M_z = \frac{\mathrm{d}(I_z\omega)}{\mathrm{d}t}}$$

一般略去下标，写为

$$\boxed{M = \frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t}}$$

当转动惯量不变时，有

$$\boxed{M = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}$$

(IV) 刚体的角动量守恒

作用在刚体上的力在轴向力矩恒为零，刚体的轴向角动量守恒

$$M_z \equiv 0 \Longrightarrow I_z\omega\text{守恒}$$

(V) 刚体定轴转动的动能

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

(VI) 力矩的功

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$$

(VII) 转动惯量的求法

★ 离散系统

$$I = \sum m_i r_i^2$$

★ 连续系统

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m \quad \begin{cases} I = \int_{\text{曲线}} r^2 \lambda \mathrm{d}l \\ I = \iint_{\text{面}} r^2 \sigma \mathrm{d}S \\ I = \iiint_{\text{体积}} r^2 \rho \mathrm{d}V \end{cases}$$

§3 刚体力学初步

★ 两个有用的定理

(1) 总的转动惯量等于各部分的转动惯量之和

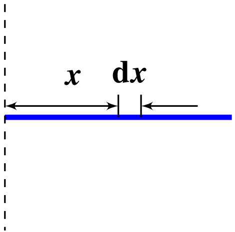
$$
\begin{aligned}
I &= \sum m_i r_i^2 \\
&= \sum_{\text{部分1}} m_i r_i^2 + \sum_{\text{部分2}} m_i r_i^2 + \cdots \\
&= I_1 + I_2 + \cdots
\end{aligned}
$$

(2) 平行轴定理：

刚体绕某轴的转动惯量等于绕平行于该轴且过质心的轴的转动惯量加上刚体的质量与两轴距离平方的乘积

$$\boxed{I = I_C + md^2}$$

例1 求均匀细杆（m，l）绕通过一端且与之垂直轴的转动惯量



解： 在杆上取微元 $x \sim x + \mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

所以

$$I = \int_{杆} r^2 \mathrm{d}m$$

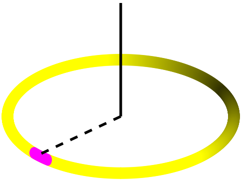
$$= \int_0^l x^2 \frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

结论 $\boxed{I = \frac{1}{3}ml^2}$

由平行轴定理，得匀质细杆绕中垂线转动的转动惯量为

$$\boxed{I = \frac{1}{12}ml^2}$$

例2 求均匀圆环（m，R）绕轴线的转动惯量



解： 如图，取微元，有

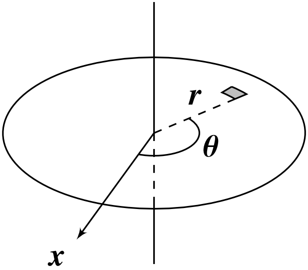
$$I = \int_{环} r^2 \mathrm{d}m$$

$$I = \int_{环} R^2 \mathrm{d}m$$

$$I = R^2 \int_{环} \mathrm{d}m$$

结论 $\boxed{I = mR^2}$

例3 求均匀圆盘（m，R）绕轴线的转动惯量



解：距圆心 r 处取微元 $\mathrm{d}S$

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{\pi R^2}\mathrm{d}S$$

于是得

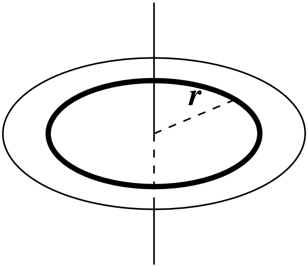
$$I=\int_{圆} r^2\mathrm{d}m$$

$$=\int_{圆} r^2\frac{m}{\pi R^2}\mathrm{d}S$$

$$=\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2\frac{m}{\pi R^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

结论：匀质圆盘绕轴线转动的转动惯量 $\boxed{I=\frac{1}{2}mR^2}$

适当选取微元形状，可以用一重积分求解



解法II：如图，取 $r \sim r + \mathrm{d}r$ 的圆环

$$\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}r$$

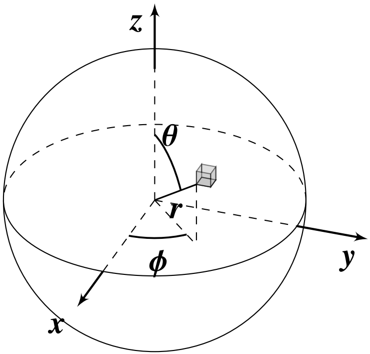
$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R^2}\mathrm{d}S = \frac{2m}{R^2} r \mathrm{d}r$$

于是得

$$I = \int_{圆} \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}m$$

$$= \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 \mathrm{d}r$$

例4 求均匀球（m，R）绕通过直径的转动惯量



解： 距球心 r 处取微元 $\mathrm{d}V$

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{4\pi R^3/3}\mathrm{d}V$$

于是得

$$I = \int_{球} (r\sin\theta)^2 \mathrm{d}m$$

$$= \int_{球} (r\sin\theta)^2 \frac{3m}{4\pi R^3}\mathrm{d}V$$

$$= \int_0^R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{3m}{4\pi R^3} r^4 \sin^3\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

结论：匀质圆盘绕轴线转动的转动惯量 $\boxed{I = \frac{2}{5}mR^2}$

例5 水平桌面上有一匀质圆盘（R，m），绕轴线以初速 ω 转动。求经过多长时间静止

解：先求摩擦力矩，距圆心 r 处取微元 $\mathrm{d}S$

$$\mathrm{d}M = -fr = -r\mu g\mathrm{d}m = -r\mu g\frac{m}{2\pi R}\mathrm{d}S$$

求得总的摩擦力矩

$$M = \int_{圆盘}\mathrm{d}M = -\int_{圆盘}\frac{mg\mu r}{2\pi R}\mathrm{d}S = -\frac{2}{3}mg\mu R$$

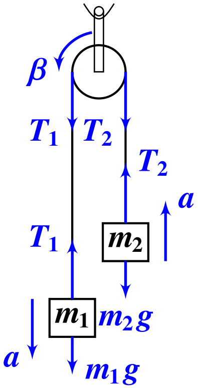
再由刚体转动定理得

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}mg\mu R$$

积分，得

$$t = \frac{3R\omega}{4g\mu}$$

例6 如图，求二物体的加速度。将滑轮看成质量为 m，半径为 R 匀质圆盘，且绳与滑轮无滑动



解： 解：m_1 的方程（竖直向上为正）

$$T_1 - m_1 g = -m_1 a$$

m_2 的方程

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

滑轮方程

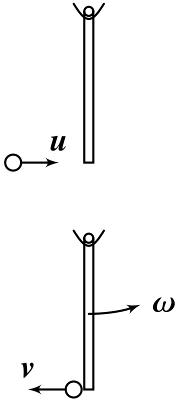
$$T_1 R - T_2 R = \frac{1}{2} m R^2 \beta$$

运动之间的关系

$$a = \beta R$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m/2} g$$

例7 如图，长为 l 质量为 m 的细直杆，悬于水平光滑轴 O，一质量为 m 的小球以水平初速 u 垂直入射到杆的最下端，设碰撞为完全弹性，求碰撞后小球速度和杆能达到的最大角度



解： 碰撞过程，角动量守恒

$$lmu = -lmv + \frac{1}{3}ml^2 \cdot \omega$$

动能不变

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ml^2 \cdot \omega^2$$

杆摆动过程，机械能守恒

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ml^2 \cdot \omega^2 = mg\frac{1}{2}l(1-\cos\theta)$$

例8 一均匀圆盘（R，M），可绕竖直轴线无摩擦地转动。盘边缘有一质量为 m 的人。系统开始静止。现人沿边缘相对于盘走一圈，求盘转过的角度。

解： 盘与人必沿相反的方向转动，且角动量守恒

$$mR^2\omega_{人} = \frac{1}{2}MR^2\omega_{盘}$$

两边同时对时间积分

$$mR^2\int\omega_{人}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}MR^2\int\omega_{盘}\mathrm{d}t$$

得

$$mR^2\theta_{人} = \frac{1}{2}MR^2\theta_{盘}$$

又

$$\theta_{人} + \theta_{盘} = 2\pi$$

例9 光滑水平面上有一长 a，质量为 m 的均匀细杆。系统开始时以 ω_0 绕通过杆的一端的竖直轴无摩擦转动。其中点处有一质量为 m' 的环用一不可伸长的轻绳系于离转轴 $l/2$ 处。由于某种原因，轻绳突然断开，求环滑到最边缘时的速率。

解： 角动量守恒

$$\left[\frac{1}{3}ml^2 + m'\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega_0 = \frac{1}{3}ml^2\omega + lm'v_\perp$$

机械能守恒

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3}ml^2 + m'\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}m'\left(v_\perp^2 + v_\parallel^2\right)$$

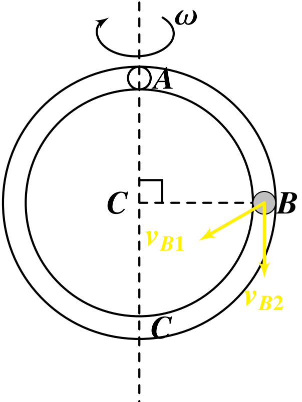
又因为

$$v_\perp = \omega l$$

求得

$$v = \sqrt{v_\perp^2 + v_\parallel^2} = \cdots$$

例10 一半径为 R 的圆管，绕铅垂直径 AC 轴以角速度 ω 无摩擦转动，转动惯量 I。管内最高点 A 处有一 m 的小球。由于某微小干扰，小球由静止开始自 A 点下落，求小球达到 B 和 C 点的速度大小。



解： 机械能守恒(原点为零势能)

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2+mgR=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}m\left(v_{B1}^2+v_{B2}^2\right)$$

对轴的角动量守恒

$$I\omega_0=I\omega+Rmv_{B1}$$

又因为

$$v_{B1}=\omega R$$

联立求得$v_B=v_{B1}^2+v_{B2}^2$

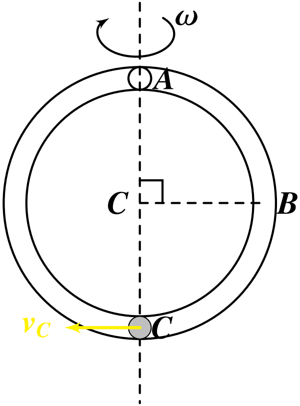
机械能守恒(原点为零势能)

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2+mgR=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}mv_B^2$$

对轴的角动量守恒

$$v_B = \sqrt{\frac{Im\omega^2R^4 + 2I^2\omega^2R^2}{(I + mR^2)^2} + 2gR}$$

同理可求 C 点时的速率



机械能守恒(C 点为零势能)

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 + 2mgR = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2$$

对轴的角动量守恒

$$I\omega_0 = I'\omega = I\omega$$

解得

$$v_C = 2\sqrt{gR}$$

例11 将地月系统看成孤立系统，并设月球绕地球作圆周运动，轨道平面与地球自转轴垂直。因月球的转速较慢，其引力使海水逆着地球自转方向运动，对地球产生摩擦，使地球自转角速度减小。设地球自转角速度由 ω_0 减小到 ω，试估算1）月球轨道半径变化的近似值2）月球速率变化的近似值。(地球转动量为 I，月球质量 m)

解： 地月系统，角动量守恒

$$I\omega + mrv = \text{常数}$$

又因月球作圆周运动

$$G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

将以上两式分别微分

$$I\Delta\omega + mv\Delta r + mr\Delta v = 0$$

$$2vr\Delta v + v^2\Delta r = 0$$

且 $\Delta\omega = \omega - \omega_0$

解得结果…