质点运动学

（第一章）

目录

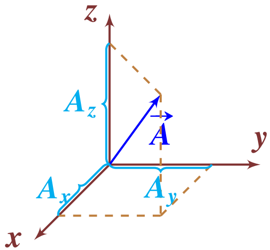
§1 矢量简介

1.1 矢量的定义

定义

既有大小，又有方向且遵从平行四边法则的量称为矢量，时常以 $\vec{A}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$ 等表示。大小用 A、r、v 或 $|\vec{r}|$ 等表示

1.2 矢量的表示



几何表示

从几何上看，矢量可以用有方向的线段表示。其长度称为矢量的大小

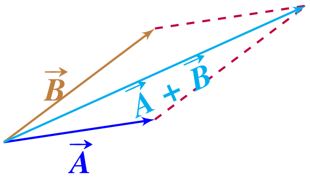
A_x ——矢量的 x 分量

A_y ——矢量的 y 分量

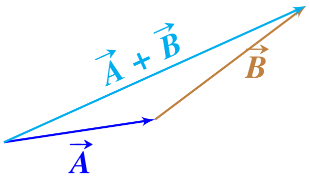
A_z ——矢量的 z 分量

1.3 矢量的计算

① 矢量的加法——平行四边形法则



平行四边形法则



三角形法则

可以证明

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$$

§1 矢量简介

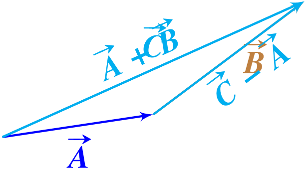
② 矢量的减法

若

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

则称

$$\vec{B} = \vec{C} - \vec{A}$$



三角形法则

③ 矢量的数乘

数乘指矢量与一个数 λ 相乘，其方向在 $\lambda > 0$ 时不变；当 $\lambda < 0$ 时反向。大小变为原大小的 $|\lambda|$ 倍

显然有

$$(\lambda + \mu)\vec{A} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{A}$$

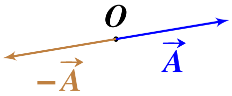
$$\lambda(\vec{A} + \vec{B}) = \lambda\vec{A} + \lambda\vec{B}$$

$$\lambda(\mu\vec{A}) = \mu(\lambda\vec{A}) = (\lambda\mu)\vec{A}$$

§1 矢量简介

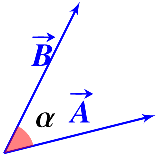
另外，记

$$-1 \cdot \vec{A} = -\vec{A}$$



负号的意义

④ 矢量的标量积



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\alpha$$

性质

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$$

$$\lambda\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) = \left(\lambda\vec{A}\right) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \left(\lambda\vec{B}\right)$$

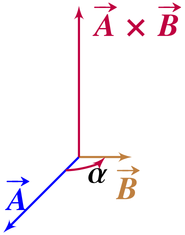
对于两不为零的矢量，有

$$\vec{A} \perp \vec{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

⑤ 矢量的矢量积

两矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的矢量积 $\vec{A}\times\vec{B}$，其结果为一矢量：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{cases}\text{大小：}\ AB\sin\alpha\\ \text{方向：}\ \text{右手螺旋法则}\end{cases}$$



右手螺旋法则

性质

$$\vec{A}\times\vec{A}=0$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$$

$$\lambda\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(\lambda\vec{A}\right)\times\vec{B}=\vec{A}\times\left(\lambda\vec{B}\right)$$

⑥ 矢量函数的微分

设 λ 为常数，ϕ 为标量函数，$\vec{C}$ 为恒定矢量。

$$\mathrm{d}\left(\lambda\vec{A}\right)=\lambda\mathrm{d}\vec{A}\qquad \mathrm{d}\left(\phi\vec{C}\right)=\mathrm{d}\phi\vec{C}$$

$$\mathrm{d}\left(\phi\vec{A}\right)=\mathrm{d}\phi\vec{A}+\phi\mathrm{d}\vec{A}$$

$$\mathrm{d}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{B}$$

$$\mathrm{d}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\mathrm{d}\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\mathrm{d}\vec{B}$$

⑦ 矢量函数的导数

设 λ 为常数，ϕ 为标量函数，$\vec{C}$ 为恒定矢量。

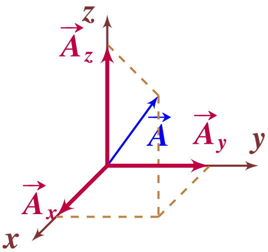
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda\vec{A}\right)=\lambda\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\qquad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\phi\vec{C}\right)=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\vec{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\phi\vec{A}\right)=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\vec{A}+\phi\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

1.4 矢量的解析表示及运算



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$\begin{cases} \vec{A}_x = A_x\hat{i} \\ \vec{A}_y = A_y\hat{j} \\ \vec{A}_z = A_z\hat{k} \end{cases}$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

可以证明

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\hat{i} + \left(A_y \pm B_y\right)\hat{j} + (A_z \pm B_z)\hat{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \cdot (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \\ &= A_xB_x\hat{i} \cdot \hat{i} + A_xB_y\hat{i} \cdot \hat{j} + A_xB_z\hat{i} \cdot \hat{k} + \cdots \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{aligned}$$

§1 矢量简介

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$
$$=A_xB_x\hat{i}\times\hat{i}+A_xB_y\hat{i}\times\hat{j}+A_xB_z\hat{i}\times\hat{k}+\cdots$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$\mathrm{d}\vec{A}=\mathrm{d}A_x\hat{i}+\mathrm{d}A_y\hat{j}+\mathrm{d}A_z\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\hat{i}+\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\hat{j}+\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\int\vec{A}\mathrm{d}t=\left(\int A_x\mathrm{d}t\right)\hat{i}+\left(\int A_y\mathrm{d}t\right)\hat{j}+\left(\int A_t\mathrm{d}x\right)\hat{k}$$

§2 参考系和坐标系

2.1 参考系

在研究运动过程中，用来作为参考的物体，称为参考物或参考系。

参考系的选取是任意的，可以由问题的方便而定

2.2 坐标系

为了定量描写运动，我们需要在参考系上固定一个坐标系。

坐标系的选取是任意的，可以由问题的方便而定

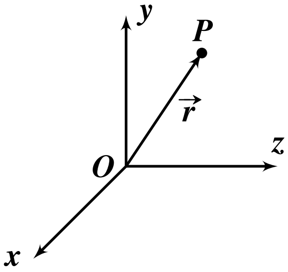
§3 描写运动的物理量

3.1 质点

质点：只有质量而没有体积的物体。

自然界中没有真正的质点。当所研究的问题与物体的大小、形状、转动等无关时，可以近似看成质点。

3.2 位置矢量——位矢



定义

位置矢量是由原点 O 指向质点所在处 P 的有向线段，用 $\vec{r}$ 表示。

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

直角坐标系中，有 $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$。

3.3 运动方程

运动的物体的位矢随时间在变化，所以可以写为

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

在直角坐标系中，可以写为：

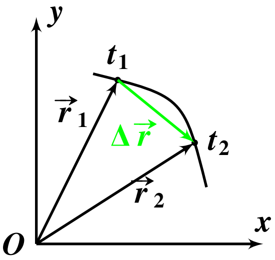
$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

轨迹的计算方法

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Longrightarrow \text{消去 } t \Longrightarrow \text{轨迹方程}$$

§3 描写运动的物理量

3.4 位移



定义

位移是质点位矢的增量

$$位移 = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

理解下面内容

$$\Delta\vec{r} \neq \Delta r,\ \left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta r$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta s(路程)$$

$$\mathrm{d}\vec{r} \neq \mathrm{d}r,\ \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \neq \mathrm{d}r$$

$$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s,\ \mathrm{d}\vec{r}沿切线方向$$

§3 描写运动的物理量

3.5 速度矢量—描写运动快慢的物理量

定义(1)：平均速度矢量 $\vec{v}_{平均}$

$$\vec{v}_{平均}=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

定义(2)：瞬时速度矢量 $\vec{v}$

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}}$$

国际单位：m/s。

理解

$$\begin{cases}\text{大小：}\ v=|\vec{v}|=\dfrac{|d\vec{r}|}{dt}\\ \text{方向：轨道切线方向}\end{cases}$$

$$v=\frac{ds}{dt}\neq\frac{dr}{dt}$$

§3 描写运动的物理量

3.6 加速度矢量—描写速度变化快慢的物理量

定义(1)：平均加速度矢量 $\vec{a}_{平均}$

$$\vec{a}_{平均}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

定义(2)：瞬时加速度 $\vec{a}$

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}}\quad 或\quad \boxed{\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

加速度的国际单位：m/s^2

理解

$$a=|\vec{a}|=\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|\neq\frac{dv}{dt}$$

§4 不同坐标系下的速度与加速度

4.1 直角坐标

1，位矢

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

2，速度。 由速度的定义 $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$，得：

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

写成分量形式：

$$\boxed{\begin{cases} v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{cases}}$$

大小：$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

方向：$\cos(v, x) = \dfrac{v_x}{v}, \cdots$

3，加速度

由加速度的定义 $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$，得：

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

写成分量形式：

$$\boxed{\begin{cases} a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}}$$

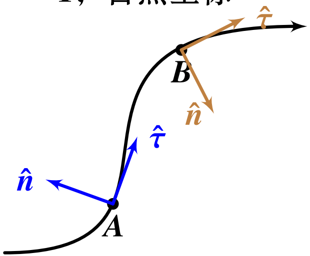
大小：$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

方向：$\cos(a, x) = \dfrac{a_x}{a}, \cdots$

§4 不同坐标系下的速度与加速度

4.2 自然坐标

1，自然坐标



定义

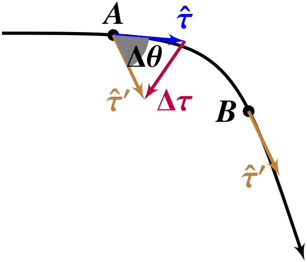
质点在运动轨道的任意一点处的切线方向和法线方向所组成的正交系为自然坐标系

2，自然坐标系的特点

- 两个单位矢量 $\boxed{\hat{\tau}、\hat{n}\text{ 是变化的}}$
- 速度可以方便地表达成：$\boxed{\vec{v}=v\hat{\tau}}$

下面来求 $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}t}$ 的结果。

§4 不同坐标系下的速度与加速度



由定义知：$\dfrac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\hat{\tau}}{\Delta t}$

$$\begin{cases} \text{大小: } \left|\dfrac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t}\right| \\ \text{方向: 法线方向} \end{cases}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t}\right| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\hat{\tau}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\hat{\tau}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

所以，有：$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{n}}$ 同理：$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}}$

3，自然坐标下的速度和加速度

- 速度 $\boxed{\vec{v} = v\hat{\tau}}$
- 加速度

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\hat{\tau}) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{n}$$

$$= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau} + v^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\hat{n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}$$

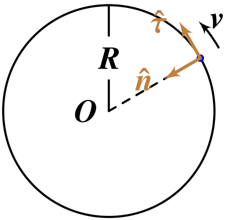
$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}} \qquad \rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\text{(曲率半径)}$$

§4 不同坐标系下的速度与加速度

分量形式
$$\boxed{\begin{cases} a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(\text{切向}) \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho}(\text{法向}) \\ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}(\text{总}) \end{cases}}$$

$$\rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}{(y'')}$$

下面看一个特例——匀速圆周运动：



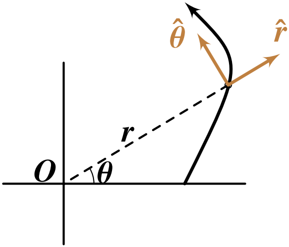
速度：沿切线方向

加速度：
$$\begin{cases} a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \\ a_n = \dfrac{v^2}{R}\ (\text{向心}) \end{cases}$$

§4 不同坐标系下的速度与加速度

4.3 极坐标*

1，极坐标



定义

由原点指向质点的单位矢 $\hat{r}$ 和与之垂直且指向角度增大的方向单位矢 $\hat{\theta}$ 组成的正交系，称为极坐标。

$\hat{r}$ —— 径向　　$\hat{\theta}$ —— 横向

类似于自然坐标，有

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta}\\ \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{r}\end{aligned}}$$

§4 不同坐标系下的速度与加速度

2，极坐标下的位矢、速度和加速度

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\hat{r} + \left[r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right]\hat{\theta}$$

特例——匀速圆周运动：

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0 \\ v_\theta = r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\omega \end{cases} \qquad \begin{cases} a_r = \dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -r\omega^2 \\ a_\theta = r\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

§4 不同坐标系下的速度与加速度

4.4 运动学的两类问题

1，已知运动情况，求速度和加速度

先写出运动方程，再求导

2，已知加速度，求速度和运动情况

求积分

例1 已知质点运动方程为

$$\vec{r}(t) = A\cos\omega t\hat{i} + B\sin\omega t\hat{j}$$

A、B、ω为常数，求其速度与加速度，并证明加速度始终指向原点。

解：利用速度与加速度的定义立即可得

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin\omega t\hat{i} + B\omega\cos\omega t\hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos\omega t\hat{i} - B\omega^2\sin\omega t\hat{j}$$

因为

$$\vec{a} = -\omega^2(A\cos\omega t\hat{i} + B\sin\omega t\hat{j}) = -\omega^2\vec{r}$$

所以加速度始终与位矢反向，可知始终指向原点

例2 质点作匀速率运动，证明其运动的速度和加速度始终相互垂直。

证明：方法一，用直角坐标。

因为速度大小不变，有

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \text{常数}$$

将上式两边同时对时间求一次导数，得

$$v_x\dot{v}_x + v_y\dot{v}_y + v_z\dot{v}_z = 0$$

利用加速度的定义，上式即为

$$v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} \perp \vec{a}$$

方法二，用自然坐标

$$\begin{cases} \vec{v} = v\hat{\tau} \\ \vec{a} = \dot{v}\hat{\tau} + \dfrac{v^2}{\rho}\hat{n} \end{cases}$$

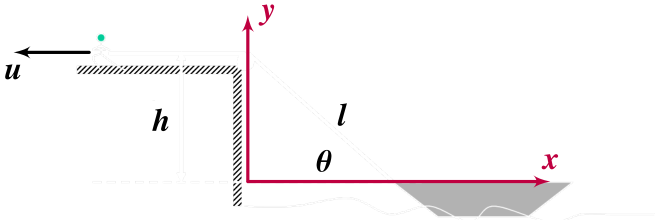
由题意，知

$$\begin{cases} \vec{v} = v\hat{\tau} \\ \vec{a} = \dfrac{v^2}{\rho}\hat{n} \end{cases}$$

显然有

$$\vec{v} \perp \vec{a}$$

例3 如图，一人以匀速率 u 向左拉动静水中的船运动，求当绳与水平线成 θ 时船的速度和加速度大小。



解：先写出船的坐标

$$x = \sqrt{l^2 - h^2}$$

求导，得速度

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}} \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

$$v = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}}(-u) = -\frac{u}{\cos\theta}$$

将速度求导得加速度

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{lu}{\sqrt{l^2 - h^2}}\right)$$

$$= \left[\frac{l^2 u}{(\sqrt{l^2 - h^2})^3} + \frac{u}{\sqrt{l^2 - h^2}}\right]\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\frac{u^2 \tan^3\theta}{h}$$

例4 已知质点沿 x 轴运动，$a = \cos\omega t$，ω 为常数，设 $t = 0$ 时，$v = 0$，$x = 0$。求 t 时刻的速度与位置

解：一维情况，省略下标。由加速度的定义

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}v = a(t)\mathrm{d}t$$

两边同时对时间积分，得

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a(t)\mathrm{d}t$$

代入加速度，得

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t \cos\omega t\mathrm{d}t \Longrightarrow v = \frac{1}{\omega}\sin\omega t$$

又由速度定义 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 得

$$\mathrm{d}x = v(t)\mathrm{d}t \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t \Longrightarrow x = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos\omega t)$$

例5 已知质点沿 x 轴运动，$a = -kv$，k 为常数，设 $t = 0$ 时，$v = u$，$x = 0$。求 t 时刻的速度与位置

解：一维情况，省略下标。由加速度的定义

$$a(v) = \frac{dv}{dt} \implies dt = \frac{1}{a(v)}dt$$

两边同时对时间积分，得

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v_t} \frac{dv}{a(v)}$$

代入加速度，得

$$\int_0^t dt = \int_u^v \frac{dv}{-kv} \implies v = ue^{-kt}$$

又由速度定义 $v = \frac{dx}{dt}$ 得

$$dx = v(t)dt \implies \int_{x_0}^{x_t} dx = \int_0^t v(t)dt \implies x = \frac{u}{k}(1 - e^{-kt})$$

例6 已知质点沿 x 轴运动，$a = 2x + 2$，设 $t = 0$ 时，$v = 0$，$x = \sqrt{2} - 1$。求 t 时刻的位置

解：因为

$$a(x) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

所以

$$v\mathrm{d}v = a(x)\mathrm{d}x \Longrightarrow \int_{v_0}^{v_t} v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x_t} a(x)\mathrm{d}x$$

$$v = \sqrt{2}(x + 1)$$

又

$$v(x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v(x)} \Longrightarrow \int_0^t \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_t} \frac{\mathrm{d}x}{v(x)}$$

$$x = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - 1$$

例7 沿半径为 R 的圆运动的质点，其加速度与速度的夹角为 θ(常数)。已知初速率为 u。求任意时刻的速率。

解：由题意知

$$a_n = a_\tau \tan\theta$$

代入切向和法向加速度公式，得

$$\frac{v^2}{R} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\tan\theta$$

积分，得

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{t}{R\tan\theta}$$

例8 （补充例题）一质点在 xoy 平面内作匀加速运动，加速度大小为 a，沿负 y 方向。质点的运动轨迹是 $y = bx - cx^2$，其中 b、c 为正的常数。求质点在任意位置时的速率。

解：将轨迹两边对时间求导得

$$\dot{y} = b - 2cx\dot{x} \Longrightarrow v_y = b - 2cxv_x$$

再对时间求导得

$$\dot{v}_y = -2c\dot{x}v_x - 2cx\dot{v}_x \Longrightarrow a_y = -2cv_x^2 - 2cxa_x$$

$$-a = -2cv_x^2$$

$$\begin{cases} v_x = \sqrt{\dfrac{a}{2c}} \\ v_y = b - \sqrt{2cax} \end{cases} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{a}{2c} + \left(b - \sqrt{2cax}\right)^2}$$

例9 （补充例题）一质点在 xoy 平面内运动，速度的 x 分量始终为常数 c，证明加速度大小可表示为

$$a = \frac{v^3}{c\rho} \quad (v \text{ 为速率，} \rho \text{ 为轨道曲率半径})$$

解：由题意得

$$\begin{cases} v_y = \sqrt{v^2 - c^2} \\ a = \dot{v}_y \end{cases}$$

又 $$\begin{cases} a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_\tau = \dfrac{\sqrt{v^2 - c^2}}{v} a \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

利用 $$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2 \Longrightarrow a^2 = \frac{v^2 - c^2}{v^2} a^2 + \frac{v^4}{\rho^2}$$

化简，即得所证结果。

例10 （补充例题）一质点沿抛物线 $y^2 = 2pc$ 运动，其切向加速度的量值为法向加速度量值的 $-2k$ 倍。此质点从正焦弦 $(\frac{p}{2}, p)$ 的一端以速率 u 出发，试求达到正焦弦另一端时的速率。

解：由题意得

$$a_\tau = -2ka_n$$

又
$$\begin{cases} a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases} \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2k\frac{v^2}{\rho} = -2kv^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$

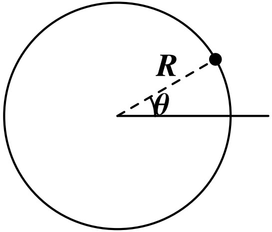
$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -2k\mathrm{d}\theta$$

积分
$$\int_u^v \frac{\mathrm{d}v}{v} = -2k\int_0^\alpha \mathrm{d}\theta$$

解得

$$v = ue^{-2k\alpha} = ue^{-k\pi}$$

§5 圆周运动的角量描写



角坐标：θ

角位移：$\Delta\theta$ 或 $\mathrm{d}\theta$

角速度：$\boxed{\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}$

角加速度：$\boxed{\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}}$

常见关系

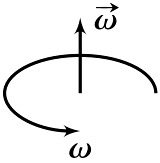
$$\boxed{v = \omega R}, \quad \boxed{a_\tau = \beta R}, \quad \boxed{a_n = \omega^2 R}$$

特别对匀变速圆周运动，有

$$\boxed{\begin{cases} \omega_t = \omega_0 + \beta t \\ \omega_t^2 - \omega_0^2 = 2\beta\Delta\theta \\ \Delta\theta = \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\beta t^2 \end{cases}}$$

§5 圆周运动的角量描写

角速度矢量：



定义

角速度矢量的大小等于旋转的角速度，方向沿转轴，且与旋转成右手关系

利用角速度矢量，可以很方便地写出速度矢量

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

适用条件

$$\boxed{\text{原点在转轴上}}$$

例1 飞轮以 600 转每分转动，受到一个制动而匀速减速。经过 10s 停止。求（1）角加速度；（2）制动 5 秒末半径为 1m 的质点的速度和加速度大小。

解：飞轮作匀变速运动，由

$$\omega_t = \omega_0 + \beta t$$

解得角速度

$$\beta = \frac{\omega_t - \omega_0}{t} = -2\pi\,(\mathrm{rad/s})$$

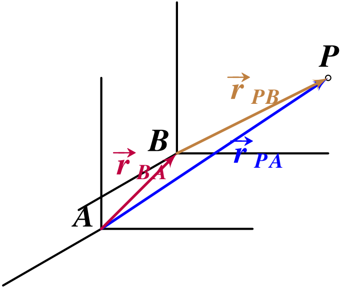
半径为 1m 的质点的速度和加速度

$$v = \omega r = (\omega_0 + \beta t)r = 10\pi\,(\mathrm{m/s})$$

$$\left.\begin{aligned} a_\tau &= \beta r \\ a_n &= \omega^2 r = (\omega_0 + \beta t)^2 r \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

§6 相对运动

6.1 相对运动



A B 两观察者分别位于两坐标系的原点。观察空间中一点 P，有

$$(\overrightarrow{AP})_A = (\overrightarrow{BP})_A + (\overrightarrow{AB})_A$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

$\vec{r}_{PA}$—P 相对于 A 的位矢

$\vec{r}_{PB}$—P 相对于 B 的位矢

$\vec{r}_{BA}$—B 相对于 A 的位矢

上述过程隐含了：空间的长短与观察者无关，牛顿称为绝对空间。

§6 相对运动

将位矢关系两边取微分，得

$$\mathrm{d}\vec{r}_{PA} = \mathrm{d}\vec{r}_{PB} + \mathrm{d}\vec{r}_{BA}$$

设此过程 A 发现用时 $\mathrm{d}t_A$，则有

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{PA}}{\mathrm{d}t_A} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{PB}}{\mathrm{d}t_A} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{BA}}{\mathrm{d}t_A}$$

改写成

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{PA}}{\mathrm{d}t_A} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{PB}}{\mathrm{d}t_B} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{BA}}{\mathrm{d}t_A}$$

最后得

$$\boxed{\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}}$$

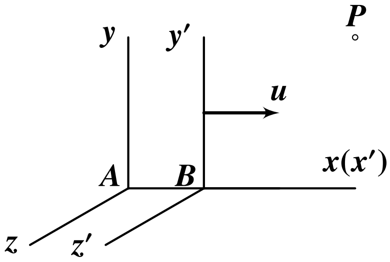
上述过程隐含了：时间的长短与观察者无关，牛顿称为绝对时间。

§6 相对运动

同理可得加速度关系

$$\boxed{\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA}}$$

6.2 伽利略变换

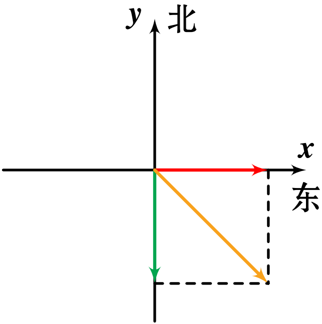


零时刻两坐标重合，S' 系沿 x 方向以 u 相对于 S 系运动，则有

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

伽利略变换

例1 一人骑自行车以5m/s 匀速行驶。当他沿正东行驶时，感到风从正北吹来；当他沿正南行驶时，感到风从正西吹来。求风速的大小与方向。



解：建如图的坐标，由

$$\vec{v}_{风对地} = \vec{v}_{风对人} + \vec{v}_{人对地}$$

得

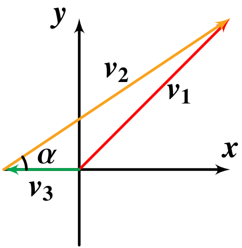
$$\vec{v}_{风对地} = v_{风对人}(-\hat{j}) + 5\ \mathrm{m/s}\ \hat{i}$$

$$\vec{v}_{风对地} = v_{风对人}\ \hat{i} + 5\ \mathrm{m/s}(-\hat{j})$$

解得

$$\vec{v}_{风对地} = 5\hat{i} - 5\hat{j}\ \mathrm{m/s} \Longrightarrow \begin{cases} 大小：\sqrt{50}\ \mathrm{m/s} \\ 方向：东偏南45^\circ \end{cases}$$

例2 水平地面上有一弹簧发射器，仰角为 α。现发射器相对于它发射一小球。已知小球射程 L，射高 H。求小球相对于发射器的发射速度的发射器的反冲速度



解：小球对地的速度 v_1，小球相对于发射器的速度 v_2 和发射器的反冲速度 v_3 的关系如图。

α 代表哪个角？

列方程

$$
\left.\begin{aligned}
v_{1x} &= \frac{L}{\sqrt{2H/g}} \\
v_{1y} &= \sqrt{2gH} \\
v_2 \sin\alpha &= v_{1y} \\
v_3 &= v_2\cos\alpha - v_{1x}
\end{aligned}\right\}
$$

求出结果

例3　一竖直向上的礼花弹在最高点炸成速度相等的碎片。证明任何时刻碎片都处于一个球面上，并求球心的位置和半径大小。

证明：方法一，用直角坐标，以地为参考系。

任一块碎片的坐标为

$$\begin{cases} x = v_x t \\ y = v_y t \\ z = v_z t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_x t \\ y = v_y t \\ z + \frac{1}{2} g t^2 = v_z t \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (z + \frac{1}{2} g t^2)^2 = v^2 t^2$$

这是一个以 $(0, 0, -\frac{1}{2} g t^2)$ 为圆心，vt 为半径的球面方程。

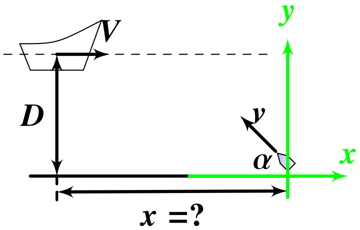
方法二，用相对运动，设一质点在礼花最高点位置，并在爆炸时开始自由下落。以该竖直下落的质点为参考系。

- 所有碎片均以相同初速率向四周运动
- 所有碎片相对加速度为零（失重）

由此可知，所有碎片匀相对于该质点以相同的速率作匀速运动，所以任意时刻碎片都在以该质点为球心的球面上，球面的半径为 vt。

例4 一船平行于平直的海岸线航行，离岸的距离为 D，速率 V。一艘速率为 v（$v < V$）的海上警卫快艇从一港口出发去截住该船。证明快艇必须在这条船驶过海岸线上一点以前出发才行，该点离港口的距离为

$$x = \frac{D\sqrt{V^2 - v^2}}{v}$$

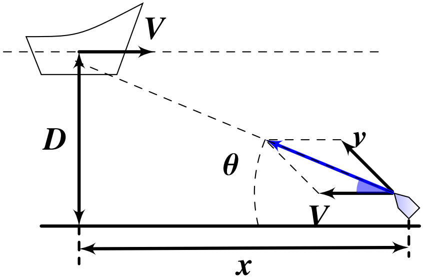


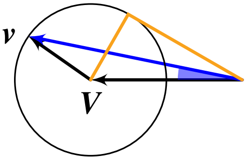
$$\left.\begin{aligned} -x + Vt &= -v\cos\alpha \cdot t \\ D &= v\sin\alpha \cdot t \end{aligned}\right\}$$

$$x = V\frac{D}{v\sin\alpha} + D\cot\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = 0$$

求得 x 的最小值





$$\tan\theta = \frac{D}{x}$$

$$\sin\theta \le \frac{v}{V}$$

联立二式，可求得

$$x \ge \frac{D\sqrt{V^2 - v^2}}{v}$$

§6 相对运动