# 动量和动量守恒

(第三章)

# 目录

1 动量，质点的动量定理

2 质点组的动量定理

3 质心

4 质心的性质

# §1 动量，质点的动量定理

## 1.1 质点的动量

**定义**

质点的质量与速度矢量的乘积为质点的动量

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

说明

- 动量是状态量，国际单位（SI）： Kg·m/s
- 因为

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\vec{v}\right)$$

牛顿第二定律可以写为： $\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$

# §1 动量，质点的动量定理

## 1.2 力的冲量

**定义**

力对时间的积分为力在该时间内的冲量

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t} \quad \boxed{\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t}$$

- 冲量是过程量，并有叠加性。SI： N·s
- 冲量的计算：

$$\boxed{\vec{I} = \hat{i}\int_{t_1}^{t_2} F_x\mathrm{d}t + \hat{j}\int_{t_1}^{t_2} F_y\mathrm{d}t + \hat{k}\int_{t_1}^{t_2} F_z\mathrm{d}t}$$

- 恒力的冲量可以写为：$\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F}\Delta t$

# §1 动量，质点的动量定理

## 1.3 质点的动量定理

### 质点的动量定理

作用在质点上力的总冲量等于质点的动量的增量

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \qquad \sum \vec{F} \mathrm{d}t = \mathrm{d}(mv)$$

- 动量定理只在惯性系中成立
- 应用之一：可以方便求冲量
- 若某变力的冲量的大小与恒力的冲量的大小相等，则称恒力为平均冲力：$\vec{F}_{平均}(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t$

显然有 $$\vec{F}_{平均} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

例1 一质量为 1 Kg 的质点受力 $\vec{F}=2\hat{i}+2t\hat{j}+3t^2\hat{k}$(SI)，从静止开始运动，求 $t=1$s 时的速度大小。

解： 由动量定理，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

注意到 $\vec{v}_1=0$，得

$$\vec{v}_2=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t}{m}=\int_0^1(2\hat{i}+2t\hat{j}+3t^2\hat{k})\mathrm{d}t$$

$$\vec{v}_2=\hat{i}\int_0^1 2\mathrm{d}t+\hat{j}\int_0^1 2t\mathrm{d}t+\hat{k}\int_0^1 3t^2\mathrm{d}t$$

$$\vec{v}_2=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\qquad\Longrightarrow v_2=\sqrt{6}\,\mathrm{m/s}$$

例2 一质量为 $m$ 的小球从 $H$ 高处静止落下，被地面弹起 $\frac{H}{2}$，又静止落下...最后停在水平地面上。求地面支持力的冲量。

解： 整个过程，只有支持力和重力作用。利用质点的动量定理

$$\vec{I}_N + \vec{I}_G = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = 0$$

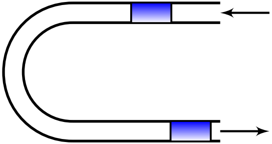
$\vec{I}_N = -\vec{I}_G$ 取竖直向上为 $x$ 正向

$$= mg\Delta t\hat{i}$$

$$= mg\hat{i}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} + 2\sqrt{\frac{2H}{g}}\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cdots\right)$$

$$= mg\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(1 + \frac{4}{\sqrt{2}-1}\right)\hat{i}$$

例3 一密度 $\rho$ 的液体以流速 $u$ 流过截面积为 $S$ 的 U 形管。求水对管壁的压力。忽略重力



解： 取 $\Delta t$ 时间，并取左为 $x$ 正向，有

$$\vec{P_1} = \Delta m \vec{v}_1 = \rho S u^2 \Delta t \hat{i}$$

$$\vec{P_2} = \Delta m \vec{v}_2 = -\rho S u^2 \Delta t \hat{i}$$

由动量定理

$$\vec{F} = \frac{\vec{P_2} - \vec{P_1}}{\Delta t} = -2\rho S u^2 \hat{i}$$

所以水对管的作用

$$\vec{F}' = -\vec{F} = 2\rho S u^2 \hat{i}$$

大小：$2\rho S u^2$

方向：左

**例4** 一长为 $l$ 质量为 $m$ 的均匀软绳，手提一端使其自然下垂，下端刚好与水平桌面接触。现让其由静止开始自由下落，并以此开始计时，求全部落到桌面前任一时刻桌面所受到的压力。

解：桌面受到的压力等于桌面上部分的重力与绳对桌面的冲力之和。

设 $t$ 时刻绳掉到桌面上的长度为 $l_1$，有

$$F_{重} = m_1 g = \frac{mgl_1}{l}$$

设 $t$ 时刻绳的速率为 $v$，考虑 $t \sim t+\Delta t$，有

$$\Delta m = \frac{m}{l} v \Delta t, \quad \left|\Delta P\right| = \left|0 - \Delta m v\right| = \frac{m v^2 \Delta t}{l}$$

从而求得冲力部分

$$F_{冲} = \left|\frac{\Delta P}{\Delta t}\right| = \frac{mv^2}{l}$$

两力相加，得桌面所受的压力

$$\begin{aligned} F &= F_{重} + F_{冲} \\ &= \frac{mgl_1}{l} + \frac{mv^2}{l} \end{aligned}$$

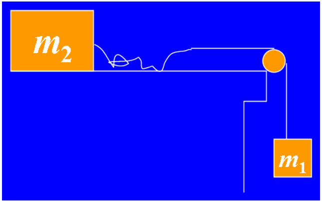
注意绳作自由下落，所以

$$l_1 = \frac{1}{2}gt^2, \quad v = gt$$

最后得

$$F = \frac{3mg^2t^2}{2l}$$

例5 如图，当 $m_1$ 从静止开始下降 $H$ 高后，绳被拉直。设绳不能伸长，求此时共同的运动速度。




解：$m_1$ 自由下落过程

$$v_1^2 = 2gH \Longrightarrow v_1 = \sqrt{2gH}$$

绳拉直的瞬间，设共同运动速率为 $u$，有

$$T\Delta t = m_2 u$$

$$m_1 g\Delta t - T\Delta t = m_1 u - m_1 v_1$$

两式相加，得

$$m_1 g\Delta t = m_1 u - m_1 v_1 + m_2 u$$

因为作用时间极短，$\Delta t \to 0$，所以

$$m_1 u - m_1 v_1 + m_2 u = 0$$

$$u = \frac{m_1\sqrt{2gH}}{m_1 + m_2}$$

# §2 质点组的动量定理

## 2.1 质点组的动量

**定义**

质点组动量为其中每个质点的动量的矢量和

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$$

## 2.2 内力与外力

内力：施力物体与受力物体都在系统内

外力：受力物体在系统内，施力物体在系统外

内力的特征之一：内力的矢量和为零。因而内力的冲量和为零。

# §2 质点组的动量定理

## 2.3 质点组的动量定理

### 质点组的动量定理

作用在质点组上外力的总冲量等于质点组动量的增量

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}_{外力} \mathrm{d}t = \sum m_i \vec{v}_{i2} - \sum m_i \vec{v}_{i1}$$

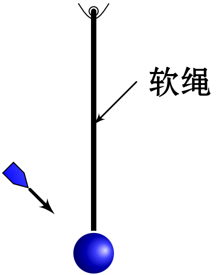
## 2.4 动量守恒定律

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}_{外力} \mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \sum m_i \vec{v}_i = 不变量$$

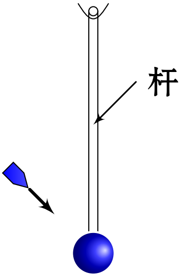
作用在质点组上的所有外力的冲量矢量和为零时，质点组的动量守恒。或更明显地，作用在质点组上的所有外力的矢量和为零时，质点组的动量守恒。

# §2 质点组的动量定理

经常使用的是某一方向上的动量守恒：作用在质点组上的所有外力的矢量和在某一方向上的分量为零时，质点组的动量在该方向上的分量守恒。




子弹、球系统水平动量守恒




子弹、球系统水平动量不守恒

**例1** 一质量为 $m$ 长为 $l$ 的均匀软绳手提一端竖直垂下，下端刚好与水平地面接触。现静止释放，以此为零时刻，试求下落过程中任意时刻绳对地面的冲力。

解： 将整个绳看作一个系统，取竖直向上为正，显然

$$(N - mg)\Delta t = \Delta P$$

而

$$P = P(t) = m_{\text{竖直}} v_{\text{竖直}}$$

$$P = P(t) = -m\frac{l - \frac{1}{2}gt^2}{l}gt$$

化简，得

$$P(t) = -mgt + \frac{mg^2t^3}{2l}$$

所以

$$\Delta P = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\Delta t = \left(-mg + \frac{3mg^2t^2}{2l}\right)\Delta t$$

最后得 $$N = \frac{3mg^2t^2}{2l}$$

**例2** 质量为 $m$ 的人站在质量为 $m'$ 的静止船头。不计水的阻力，当人从船头走到船尾时，船相对于水运动的距离。设船长 $L$。

解：不计水的阻力，水平动量守恒

$$mv = m'V$$

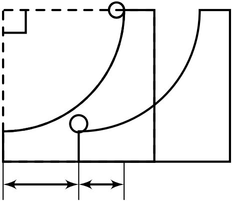
将上式两边同时对时间积分，得

$$\int_{t_1}^{t_2} mv\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} m'V\mathrm{d}t \Longrightarrow m\int_{t_1}^{t_2} v\mathrm{d}t = m'\int_{t_1}^{t_2} V\mathrm{d}t$$

即

$$\left.\begin{aligned} ms &= m's' \\ s + s' &= L \end{aligned}\right\} \Longrightarrow s' = \frac{m}{m+m'}L$$

**例3** 半径为 $R$，质量为 $m_1$ 的圆弧形槽放在光滑水平面上，质量为 $m_2$ 的小球从槽顶端静止开始滑下，求滑到最低位置时槽移动的距离。




解： 系统水平方向动量守恒

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

对时间积分，得

$$m_1 \int_{t_1}^{t_2} v_1 \mathrm{d}t = m_2 \int_{t_1}^{t_2} v_2 \mathrm{d}t$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{得} & m_1 x_1 = m_2 x_2 \\ \text{又} & x_1 + x_2 = R \end{array}\right\} \cdots$$

**例4** 倾角为 $\theta$ 的光滑斜面上有一质点为 $M$ 的小车，车上有一质量为 $m$ 的炮弹。当它从静止开始下降 $H$ 高时，沿水平方向射出炮弹。设小车在发射炮弹后的瞬间速度变为零，求炮弹的发射速度。

解： 下降过程

$$v_t^2 - v_0^2 = 2g\sin\theta \frac{H}{\sin\theta} \Longrightarrow v_t = \sqrt{2gH}$$

发射炮弹过程，斜面方向动量守恒。

$$(m+M)v_t = mv\cos\theta$$

联立以上二式，求得

$$v = \frac{m+M}{m\cos\theta}\sqrt{2gH}$$

# §4 质心的性质