Compte rendu n°1 - Projet L3

LU3MA201 - Encadrement par Barbara Gris

Garance Henrion

Février 2023

1 Contexte, rappel des notations

La référence pour les notations et la numérotation des questions est le compte rendu de la première séance.

Soit D un entier naturel non nul. On considère dans le plan une grille $(z_k)_{k\in[\![1,D]\!]}$ de points deux-à-deux distincts et $V = \{x \mapsto \sum_{k=1}^{D} \alpha_k e^{\frac{-|x-z_k|^2}{2\sigma^2}} | \alpha_k \in \mathbb{R}^2, k \in [\![1,D]\!]\}$ avec $\sigma > 0$, un espace vectoriel de dimension finie muni de la norme $|\cdot|_V$; soit $G = I_2 + V$.

2 Question 3

L'objectif de ce paragraphe est de répondre à la question : est-ce que les éléments de G sont des difféomorphismes ? Si non, essayer de trouver des critères pour qu'ils le soient, des exemples ou contre-exemples.

Après une brève introduction, je vais exposer des pistes de réponse. Je n'ai pas encore eu le temps d'aller au bout de mes idées.

Définition 2.1 *Une application est un difféomorphisme si elle est différentiable, bijective, et de réciproque différentiable.*

On note les éléments de G comme suit : $\varphi = I_2 + v$, v étant un élément de V, et donc de $C^n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. On s'intéresse donc à une somme de deux fonctions de classe C^n. La différentiabilité des éléments de G est donc immédiate. On va donc étudier les conditions d'inversibilité. Examinons quelques exemples pour fixer les idées :

— Si $v = 0$ (où 0 est la fonction nulle), alors $\varphi = I_2 + 0 = I_2$ est bien une bijection différentiable, d'inverse elle-même.
  On remarque que $0 \in V$: il faut et il suffit de prendre $\alpha_k = 0 \ \forall\ k \in [\![1,D]\!]$;

— Si $v = I_2$, alors $\varphi = I_2 + I_2 = 2I_2$, est bien une bijection différentiable, dont l'inverse $\varphi^{-1} = \frac{1}{2}I_2$ est différentiable.
Contre-exemple :
— Si $v = -I_2$, alors $\varphi = I_2 - I_2 = 0$, qui n'est pas injective.

2.1 Première idée :

L'inversion de φ me fait furieusement penser au développement en série entière suivant :

$$\frac{1}{1+v} = \sum_{i=1}^{\infty} (-v)^i$$

de rayon de convergence 1.

Définissons les itérations des éléments de V : $\forall v \in V, v^0 = I_2, v^1 = v, v^2 = v \circ v, ..., v^k = v \circ ... \circ v$ $\forall k \in \mathbb{N}$. A faire : vérifier que les itérations restent dans V.

Si on pose $u = -v$, inverser φ revient à inverser $I_2 - u$.

Définissons maintenant la suite

$$S_k = I_2 + \sum_{i=1}^{k} u^i \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

A ce stade, j'ai réalisé qu'il y avait des problèmes dans les suites de mon raisonnement. J'ai besoin de plus de temps pour travailler dessus. On peut remarquer que si on travaillait avec des applications linéaires, on pourrait rapidement conclure.

2.2 Seconde idée :

Théorème d'inversion locale, théorème d'inversion globale.
Remarque : valables pour espaces de Banach (complétude)

3 Question 6

L'objectif de ce paragraphe est de prouver que $(v_{k,l} : x \mapsto e^{\frac{-|x-z_k|^2}{2\sigma^2}} e_l)_{\substack{k\in[\![1,D]\!]\\ l\in 1,2}}$ avec $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$, est une base de V.

Définition 3.1 *Une base est une famille à la fois libre et génératrice.*

3.1 Famille génératrice

Définition 3.2 *Une famille est génératrice si tout vecteur de l'espace s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de cette famille.*

Soit $v \in V$. Alors : $\exists (\alpha_k)_{k \in [\![1,D]\!]} \in (\mathbb{R}^2)^D \mid v(x) = \sum_{k=1}^{D} \alpha_k e^{\frac{-|x-z_k|^2}{2\sigma^2}} \forall\, x \in [\![1,D]\!] \in \mathbb{R}^2$.
Or $\forall k \in [\![1,D]\!], \alpha_k e^{\frac{-|x-z_k|^2}{2\sigma^2}} = \alpha_k e^{\frac{-|x-z_k|^2}{2\sigma^2}} e_1 + \alpha_k e^{\frac{-|x-z_k|^2}{2\sigma^2}} e_2 = \alpha_k(v_{k,1} + v_{k,2})$, CQFD

3.2 Famille libre

Définition 3.3 *Une famille est libre si la nullité d'une combinaison linéaire formée par les vecteurs de cette famille entraîne la nullité des coefficients de cette combinaison linéaire, i.e. aucun élément n'est combinaison linéaire des autres.*

Commençons par remarquer que e_1 et e_2 sont orthogonaux. Ainsi, montrer la liberté de la famille équivaut à montrer la liberté de $(v_k : x \mapsto e^{\frac{-|x-z_k|^2}{2\sigma^2}})_{k \in [\![1,D]\!]}$

Pour montrer la liberté d'une famille, la méthode classique est de prendre une famille de coefficients telle qu'on obtienne une combinaison linéaire nulle des éléments de la famille. Pour conclure, il faut montrer que tous ces coefficients sont nuls.

Mon idée est d'utiliser le fait que les z_k sont distincts les uns des autres. J'évalue la combinaison linéaire nulle en chacun des z_k, ce qui me donne un système linéaire de D équations à D inconnues (les coefficients).

Pour montrer que la famille est libre, il reste à inverser la matrice associée à ce système.

J'ai testé ceci avec D = 2,3, mais je manque de temps pour en donner le détail ici. Je pourrai néanmoins vous présenter mes calculs lors du prochain rdv.

Il me reste à généraliser ceci pour D quelconque.

Conclusions personnelles

J'ai fourni en deux semaines, en terme de volume horaire, le travail à fournir en trois semaines. J'ai réparti mon temps entre le travail sur mes questions, le dialogue avec mes collègues et la relecture de leur travail. J'ai consacré à ce document une journée de travail, et donc le quota horaire d'une semaine (je dois dire que ma maîtrise du LaTeX n'est pas encore totalement fluide). Je n'ai donc pas totalement rattrapé le temps que j'aurais du passer sur ces questions pendant les deux semaines écouée entre le premier et le deuxième rdv. Je compte l'avoir fait d'ici le 4e rdv. Je sens bien ce manque de temps dans les développements qu'il me reste à faire, que j'ai indiqués tout du long de ce compte-rendu. C'est assez frustrant de ne pas pouvoir explorer ces pistes avant de vous envoyer ce travail. J'imagine qu'initialement, vous aviez prévu qu'on ait terminé de traiter ces questions en vue du 3e rdv. N'empêche, le temps passé sur ces questions fut très stimulant.