PROJET L3 - RAPPORT DE SÉANCE

LU3MA201 - ENCADREMENT PAR BARBARA GRIS

Thomas Nguyen

Séance du 06/02/2023

1 INFORMATIONS

- Prochaine séance : mardi 21 février à 14h.
- Pour les comptes rendus personnels : à rendre au maximum le vendredi précédant la séance pour donner le temps à Mme.Gris de les lire !
- Vraiment ne pas hésiter à poser des questions par mail.
- Mise en place d'un Overleaf pour faciliter les futurs travaux commun.
- Création d'un GitHub pour faciliter l'organisation et le partage de fichiers. Il n'y a pour l'instant que le notebook python de première séance de Thomas.
  Lien : `https://github.com/tstln/projetL3_appariement_de_formes`

2 RETOUR SUR NOS TRAVAUX

Cette séance a avant tout été un passage en revue des travaux de chacun et chacune avec des suggestions et des indications de Mme.Gris pour avancer.

2.1 Yddir

Je rappelle brièvement le contexte. Se référer au rapport de Yddir de la séance du mardi 24 janvier pour plus de précisions. On cherche un appariement φ tel que $\varphi \cdot S = T$ avec un coût minimal. Il faut définir G l'ensemble des appariements φ possibles et c le coût.
On a deux cas possibles, où l'on cherche à minimiser deux quantités différentes :

- L'appariement exact (E) : $inf\{c(\varphi) | \varphi \in G, \varphi \cdot S = T\}$.
- L'appariement inexact (I) : $inf\{c(\varphi) + \lambda D(\varphi \cdot S, T))^2\}$ avec ici une partie "attache aux données" où l'on doit définir en plus une distance D et un paramètre λ (le poids).

On se restreint au cas des petites déformations, telles qu'avec un champ de vecteurs $V \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ on écrive $\varphi = I_2 + v$, $v \in V$ et $c(\alpha) = |v|_V^2$. Ainsi, $\varphi \cdot S = (x_1 + v(x_1), ..., x_n + v(x_n))$.

Yddir a présenté sa preuve de l'existence d'une solution à (E) dans le cas des petites déformations. Il y a eu une ré-écriture au tableau avec Mme.Gris, l'idée de la preuve est la suivante :

Rappel (Théorème de projection orthogonale)

- Soient $\mathscr{H}$ de Hilbert, soit $A \subseteq \mathscr{H}$ un sous-espace affine fermé non vide. Alors :

$$\forall x \in \mathscr{H}\,,\ \ \exists ! y \in A, \quad \inf_{a \in A} ||x - a|| = ||x - y||$$

Avec V espace vectoriel de dimension finie (donc fermé), on définit un sous-espace affine de V :

$$V_\star = \{v \in V | (v + I_2)(S) = T\} = \{v \in V | v(S) = T - S\}$$

(Si $(\alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est telle que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, si $(f_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ forme une famille de $V_\star$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (T - S) = (T - S) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = T - S)$$

Puis on écrit :

$$\forall f \in V, \exists ! g \in V_\star, \inf_{v \in V_\star} ||f - v|| = ||f - g||$$

$$\exists ! g \in V_\star, \inf_{v \in V_\star} ||v|| = ||g||$$

On utilise le théorème de projection orthogonale avec $\mathscr{H} = V$, $A = V_\star$, et $x = 0$ pour conclure l'existence d'un unique g telle que sa norme soit minimale et donc telle que le coût de $g + I_2$ soit minimal.

Pour la prochaine séance, il reste la question de l'existence d'une solution à (I) pour les petites déformations avec $D = Dist$ (voir page 3 pour la définition de $Dist$). Mme.Gris lui a conseillé de bien choisir ses notations et de détailler ses comptes rendus pour les prochaines fois (dactylographiés si possible).

2.2 Garance

N'a pas pu faire un rendu pour un motif justifié auprès de Mme.Gris. La première question dont devait s'occuper Garance était de voir si les éléments de G sont des difféomorphismes ou non. Mme.Gris nous a indiqué qu'il y a des cas de non bijectivité, avec un exemple : si $\varphi(x) = x + v(x)$ avec $v = -I$, il n'y a évidemment pas bijection. L'idée serait notamment de voir quand il y a "superposition des points" après déformation. On pourrait regarder :

$$v(x_1) - v(x_2) = x_2 - x_1 \text{ avec } V \hookrightarrow \mathscr{C}^2$$

Et penser en quelque sorte à comment contrôler la norme, dans le sens tenter de lier la norme de chaque vecteur à l'amplitude des vecteurs et de la différentielle (désolé pour la formulation imprécise). Ou réfléchir au processus :

$$(I + \epsilon V) \circ (I + \epsilon V) \circ \cdots$$

avec par exemple ϵ de plus en plus petit...
Aussi voir comment on peut visualiser cela numériquement (à connecter avec le travail de Thomas).

Ensuite, Garance devait montrer que la famille des $v_{k,l}$ forme une base de V. On rappelle le contexte, avec :

$$V = \{x \mapsto \sum_{k=1}^{D} \alpha_k e^{\frac{-|x-z_k|^2}{2\sigma^2}} | \alpha_k \in \mathbb{R}^2, k \in [\![1, D]\!]\} \text{ avec } \sigma > 0$$

On doit faire une descente de gradient sur :

$$J : \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_D) \in (\mathbb{R}^2)^D \mapsto \sum_{k=1}^{D} |\alpha_k|^2 + \lambda Dist(\varphi_\alpha \cdot S, T)^2$$

Où : $\varphi_\alpha = I_2 + \sum_{k=1}^{D} \sum_{l=1}^{2} v_{k,l}^{\alpha_k(l)}$ et $v_{k,l} : x \mapsto e^{\frac{-|x-z_k|^2}{2\sigma^2}} e_l$ avec $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$.

Le caractère générateur est évident. Pour la liberté, penser à une projection sur des espaces orthogonaux (qui sont e_1, e_2 ?).

2.3 Victor

Distance proposée ($Dist$)

- Avec $A = (a_1, ..., a_n)$ et $B = (b_1, ..., b_n)$ deux listes de n points de $\mathbb{R}^2$, on définit :

$$Dist(A,B) = \max\{\max_i(\min_j |a_i - b_j|), \max_j(\min_i |a_i - b_j|)\}$$

Il restait à Victor l'inégalité triangulaire pour montrer que $Dist$ est bien une distance. L'indication donnée à la séance précédente était de considérer les voisinages :

$$V_r(A) = \{z \in \mathbb{R}^2, \inf_{a \in A} |z - a| \leq r\}$$

("frontière de A décalée de r")
Voici des indications supplémentaires :
En exploitant $V_r(A)$ avec r distance (par exemple, avec $d(A,B) = \alpha$ et $V_\alpha(B)$), regarder $V_{r_1}(V_{r_2}(A))$ et faire des liens avec $V_{r_1+r_2}(A)$, où $r_1, r_2 \in \{Dist(A,B), Dist(A,C), Dist(B,C)\}$.
À noter qu'il n'est pas nécessaire de trop se focaliser sur cette démonstration, ce n'est pas la priorité.

2.4 Thomas

L'objectif était de s'occuper de l'implémentation en Python de la solution de l'appariement inexact dans le cas des petites déformations (*cf. notebook : Rapport de Thomas Nguyen pour le 06/02/2023* dans le GitHub).

Une liste des différents conseils de Mme.Gris :
- Il est préférable d'utiliser les *array* plutôt que les listes, cela est bien plus facile à manipuler et c'est même plus optimisé : la façon dont c'est codé dans Numpy permet de mieux faire les calculs.
- Pour les différents tests, les effectuer en fixant des paramètres et en faire varier un à la fois pour mieux comprendre le rôle de chaque.
- Il y a eu des soucis de dimension des variables dans l'implémentation du champ de vecteurs, il faut y aller pas à pas et ne pas hésiter à *print* la dimension des variables à chaque étape pour vérifier la taille et s'assurer que l'on fait bien ce qu'on pense.

Il y a plusieurs objectifs pour la prochaine fois. D'une part corriger la définition du champ de vecteurs puis afficher une déformation sur une grille, on pourra en profiter pour vérifier les cas de bijectivité, regarder quand cela n'est pas le cas et comment cela se retranscrit sur la grille (à connecter avec le travail de Garance). Et bien sûr finir la descente de gradient en n dimensions plutôt que juste 2 : pour cela il faut trouver un bon un moyen de calculer des gradients.

3 OBJECTIFS

- Pas de questions supplémentaires, mis à part continuer les travaux respectifs.
- Commencer à travailler en groupe, pour les questions d'implémentation notamment.