LICZBY ZESPOLONE

$\boxed{i=\sqrt{-1}}$ – definicja $\Rightarrow$ $i^2=-1$ (!)

taka liczba nie istnieje wśród „zwykłych" liczb

ale...

wyobraźmy sobie, że istnieje, natomiast trzeba ją traktować inaczej i nie można „mieszać" ze zwykłymi liczbami

$\Downarrow$

Możemy sobie wyobrazić uogólnienie zwykłych liczb typu:

$$a + ib$$

„zwykłe" liczby (rzeczywiste)

$z = a + ib$ – nazywamy liczbą zespoloną, bo składa się z 2 składników a i b

a i b nigdy nie można mieszać ze sobą

a – część rzeczywista, b – część urojona np.

$2 + 3i$

2 – część rzeczywista

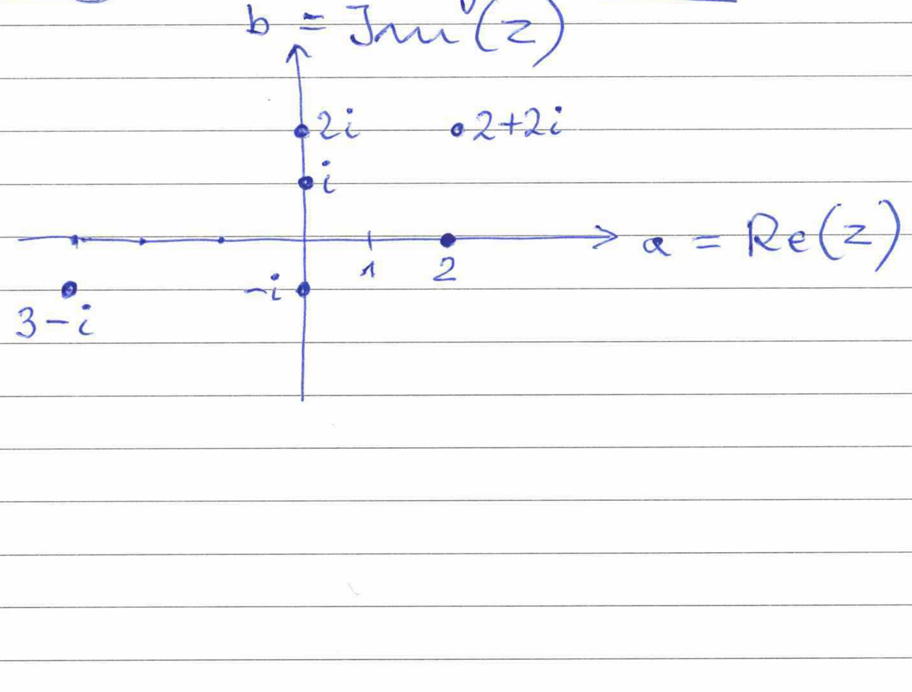
$3i$ – część urojona

Zwykłe liczby rzeczywiste są szczególnym przypadkiem liczb zespolonych, gdzie część urojona wynosi 0

Inne przykłady liczb zespolonych:

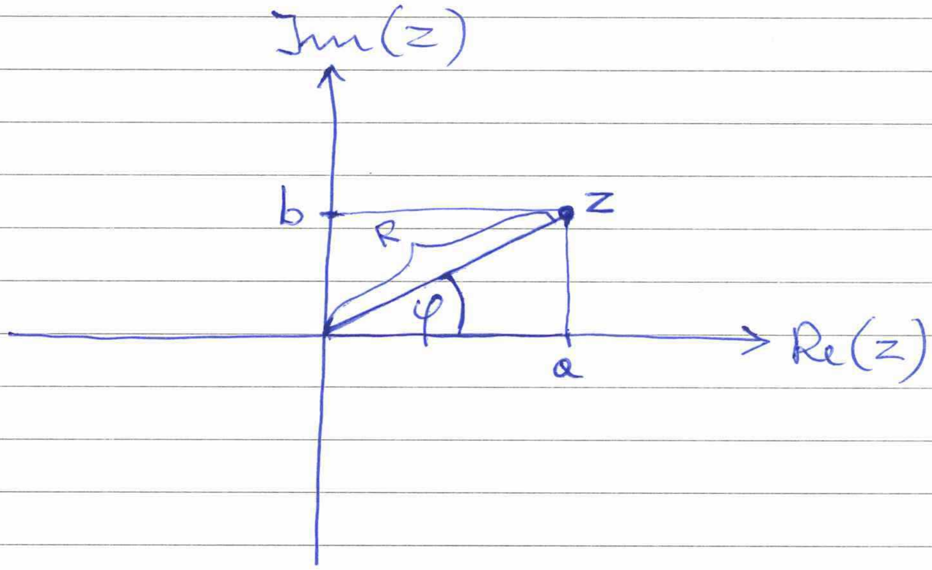
i, $-i$, 2, $58i$, $2+17i$, $1-i$, itd.

Płaszczyzna zespolona



Postać trygonometryczna

(wzór Eulera)



$$z = a + ib = R\cos\varphi + i \cdot R\sin\varphi =$$

$$= Re^{i\varphi}$$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Żeby zdefiniować liczbę zespoloną możemy podać albo a, b, albo R, φ. Te reprezentacje są równorzędne / równoważne.

Sprzężenie zespolone

$$z = a + ib$$

$$z^* = a - ib$$

↳ sprzężenie zespolone liczby z

Moduł:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot z^*} = R$$

$$z \cdot z^* = (a+ib)(a-ib) = a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - \underbrace{i^2}_{-1} b = a^2 + b^2$$

$$\boxed{|z|^2 = z \cdot z^*}$$

Operacje na liczbach zespolonych są oczywiste:

$$z_1 = 2+i$$
$$z_2 = 1-i$$

$$z_1 + z_2 = 2+i+1-i = 3$$

$$z_1 - z_2 = 2+i-(1-i) = 2+i-1+i = 1+2i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2+i)(1-i) = 2-2i+i-i^2 = 2-2i+i+1 = 3-i$$

Stany w komputerze kwantowym

- $\hookrightarrow$ żyją w tzw. przestrzeni Hilberta
- $\hookrightarrow$ innymi stany, są to wektory o współrzędnych zespolonych
- $\hookrightarrow$ stany kwantowe są unormowane

Norma

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \qquad \langle\psi| = \left(|\psi\rangle^*\right)^T$$

~~Aby Ze~~ $\cancel{\langle\psi|\psi\rangle}$

$$\langle\psi| = [1, -i]$$

$$|\psi|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = [1, -i]\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 1 - i^2 = 1+1 = 2$$

Stan jest unormowany, jeśli

$$\boxed{\langle\varphi|\varphi\rangle = 1}$$

Wszystkie stany kwantowe są unormowane!

Żeby unormować dowolny wektor (stan) wystarczy go pomnożyć przez jakąś liczbę.

Dla przykładu:

$$\langle \psi | \psi \rangle = 2$$

$$|\varphi\rangle = \left\{ \begin{array}{c} \text{unormowany} \\ |\psi\rangle \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}} |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} i \end{bmatrix}$$

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} i \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} i \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Dla 2 różnych stanów $|\zeta\rangle$ i $|\xi\rangle$

$\langle\zeta|\xi\rangle$ - oznacza miarę równoległości

$\langle\zeta|\xi\rangle$ małe (bliskie 0) $\Rightarrow$ wektory są prawie prostopadłe (mówimy ortogonalne)

$\langle\zeta|\xi\rangle$ duże (bliskie 1) $\Rightarrow$ wektory są prawie równoległe

---

Stany bazowe

Weźmy 2 qubity.

Mamy 4 stany bazowe: $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$

Dowolny stan układu 2 qubitów jest postaci:

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - tzw. amplitudy, w ogólności zespolone

↓

Operatory

- W przestrzeni Hilberta operatory reprezentują obroty wektorów, czyli operacje, które jeden wektor przekształcają w inny wektor (jeden stan kwantowy w drugi)
- operatory to macierze a stany to wektory
- operatory odpowiadają wielkościom fizycznym (energia, pęd, itd.)

$|\psi\rangle$ - stan (wektor)
$\hat{H}$ - operator (macierz)

$|\varphi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$ - działanie operatora to po prostu mnożenie przez macierz

- operatory w przypadku komputera kwantowego, to po prostu zbiór bramek kwantowych
- każdy zbiór bramek to operator

↓

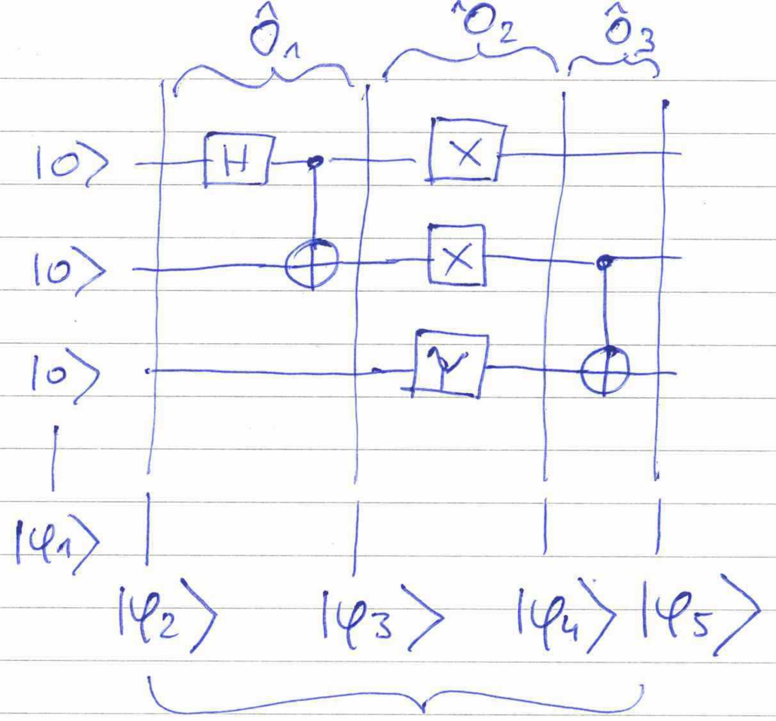
Przykład

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = [0, -i] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} =$$

$$= [0, -i] \cdot \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$



$$\hat{O} = \hat{O}_1 \hat{O}_2 \hat{O}_3$$

Wartość oczekiwana operatora

- Mamy układ w stanie $|\psi\rangle$
- $\hat{H}$ jest operatorem energii

Jaką energię ma nasz układ?

$$E = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \langle\psi|\left(\hat{H}|\psi\rangle\right)$$

najpierw liczymy to (daje nam to jakiś stan nowy)

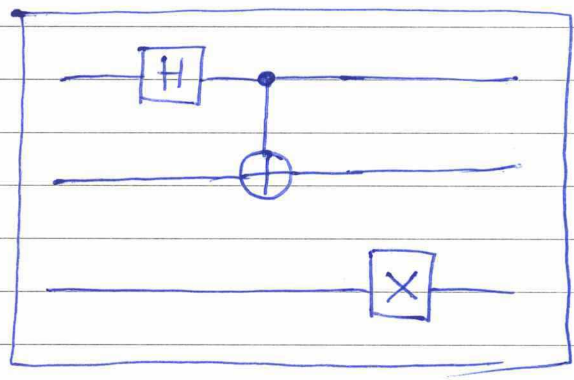
Exercises

1) Find state of single qubit for which probability of measuring 0 i four times larger than measuring 1.

2) Normalize states: $\begin{bmatrix} i \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 2i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) What is the result of applying operator $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ on the 2-qubit Bell state?

4) Find matrix representation of the following operator:



4.1) Define it also as the linear combination of basis states.

5) Write program in Qiskit calculating expectation value (using estimator primitive) of the operator from previous exercise in the GHZ state (3 qubits)

6) Use estimator to calculate expectation value of observable

$$\hat{O} = 2II - 2XX + 3YY - 3ZZ$$

in Bell's state.

7) Znajdź postać macierzową operatora $\hat{O}$.