数学 1E ノート

Tsubasa

2020 年 1 月 29 日

1　常微分方程式 Ordinary Differential Equation

1.1　定数分離　$f(y)dy = g(x)dx$

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{C}$$

例題

$$y' = x^2 e^{2y}$$

$$y = -\frac{1}{2}\log\left(-\frac{2}{3}x^2 + \mathrm{C}\right)$$

1.2　定数変化法　定数分離できる形 $= p(x)$

まず 左辺 $= 0$ の解を $f(x)$ として、積分定数 C を $C(x)$ として、代入し特殊解を求める。

$$y = C(\text{同次式の解}) + \text{特殊解}$$

例題

$$xy' + y = x$$

$$y = \frac{1}{2}x + \mathrm{C}\,x^{-1}$$

1.3　同次線形 $y'' + ay' + by = 0$

$y = \exp(\lambda x)$ を代入して特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ を解く

$$y = \begin{cases} \mathrm{C}_1\exp(\lambda_1 x) + \mathrm{C}_2\exp(\lambda_2 x) \\ \mathrm{C}_1\exp(\lambda_0 x) + \mathrm{C}_2\,x\exp(\lambda_0 x) \quad (\text{特性方程式が重解の時}) \end{cases}$$

例題

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0$$

$$y = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2\exp(2x) + \mathrm{C}_3\exp(3x)$$

1.4　線形非同次　$y'' + ay' + by = f(x)$

(左辺) $= 0$ の解を y_1, y_2 と求める。特殊解を定数変化法か未定係数法（ $y = ax + b$ や $y = e^{kx}$ などと置いてみる）で特殊解 y_0 を求める。

$$y = \mathrm{C}_1\, y_1 + \mathrm{C}_2\, y_2 + y_0$$

例題

$$y'' + 3y' + 2y = xe^x$$

$$y = \mathrm{C}_1\, e^{-x} + \mathrm{C}_2\, e^{-2x} + \left(\frac{1}{6}x - \frac{5}{36}\right) e^2$$

1.5　1 階連立 ODE

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

$\mathbf{y} = {}^t[y_1, y_2]$ とすると

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

対角化して

$$\mathbf{y} = \mathrm{C}_1\, \mathbf{v}_1 \exp(\lambda_1 x) + \mathrm{C}_2\, \mathbf{v}_2 \exp(\lambda_2 x)$$

2　ベクトル解析

省略

3　変分法

汎関数 $I[f] = \int F(x, f', f) dx$ の最小値を極小値を求める。
オイラーラグランジュ方程式から求められる。

$$\frac{\partial}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

x が現れない $F(f', f)$ のときは

$$F - f'\frac{\partial F}{\partial f'} = \mathrm{const}$$

3.1　ラグランジュの未定乗数法

minimize $f(x, y)$ subject to $g(x, y) = 0$

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$