圏論周圏論

つばきちゃん

2024 年 5 月 21 日

目 次

集合をスカラーという.

函手 $(F:\mathbb{C}\to\mathbb{Set})$ をベクトルと呼び，$F_{\mathbb{C}}$ と表す.

函手 $(G:\mathbb{D}^{\mathbb{op}}\to\mathbb{Set})$ をコベクトルと呼び，$G^{\mathbb{D}}$ と表す.

双函手 $(H:\mathbb{D}^{\mathbb{op}}\times\mathbb{C}\to\mathbb{Set})$ を行列と呼び，$H_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}$ と表す.

$F_{\mathbb{C}}$ に $c\in\mathbb{C}$ を代入したものは集合となり，$F_{(c)}$ と表す.

$G^{\mathbb{D}}$ に $d\in\mathbb{D}$ を代入したものは集合となり，$G^{(d)}$ と表す.

$H_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}$ に $c\in\mathbb{C}$ を代入したものはコベクトルとなり，$H_{(c)}^{\mathbb{D}}$ と表す.

$H_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}$ に $d\in\mathbb{D}$ を代入したものはベクトルとなり，$H_{\mathbb{C}}^{(d)}$ と表す.

ある集合 S を $\hat{S}:\mathbb{1}\to\mathbb{Set}$ として考え，$\hat{S}(*)=S$ とすると $\hat{S}=\hat{S}_{\mathbb{1}}=\hat{S}^{\mathbb{1}}$ であり，$S=\hat{S}_{(*)}=\hat{S}^{(*)}$ と表すことができる，

行列 $P_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}}$ のエンドを $\displaystyle\int P_{(x)}^{(x)}{}^{dx}$ と表す.

行列 $P_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}}$ のコエンドを $\displaystyle\int P_{(x)}^{(x)}dx$ と表す.

米田埋め込み $\mathrm{Hom}(A,B)$ を $\Delta_{(B)}^{(A)}$ と表す.

添え字がついた文字をテンソルという．つまりスカラー，ベクトルやコベクトル，行列はテンソルである.

それぞれ上付きと下付きの同じ添え字を持つテンソルは合成することができる.

例 0.1. 行列 $F_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}$ と $G_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}$ の合成はエンドを用いて次のように計算される.

$$F_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}G_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}=\int F_{\mathbb{A}}^{(b)}G_{(b)}^{\mathbb{C}}{}^{db}$$

定理 0.2. 行列 $E_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}$ と $F_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}$，$G_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}$ にの合成には結合率が成り立つ．つまり，

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}(F_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}G_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}) &= E_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}\left(\int F_{\mathbb{B}}^{(c)}G_{(c)}^{\mathbb{D}}{}^{dc}\right)\\
&= \int E_{\mathbb{A}}^{(b)}\left(\int F_{(b)}^{(c)}G_{(c)}^{\mathbb{D}}{}^{dc}\right)^{db}\\
&= \int\left(\int E_{\mathbb{A}}^{(b)}F_{(b)}^{(c)}{}^{db}\right)G_{(c)}^{\mathbb{D}}{}^{dc}\\
&= \left(\int E_{\mathbb{A}}^{(b)}F_{(b)}^{(c)}{}^{db}\right)G_{(c)}^{\mathbb{D}}\\
&= (E_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}F_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}})G_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}
\end{aligned}$$

(証明) 略記として $E_a^{(b)}F_{(c)}^{(d)}G_{(e)}^{f}=T_{a(c)(e)}^{(b)(d)f}$ を用いる.

$E_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}(F_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}G_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}})=(E_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}F_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}})G_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}$ を示すために $\displaystyle\int E_{\mathbb{A}}^{(b)}\left(\int F_{(b)}^{(c)}G_{(c)}^{\mathbb{D}}{}^{dc}\right)^{db}=\int\left(\int E_{\mathbb{A}}^{(b)}F_{(b)}^{(c)}{}^{db}\right)G_{(c)}^{\mathbb{D}}{}^{dc}$ を示す.

任意の対象 $x,y\in\mathbb{C}$，$p,q\in\mathbb{B}$ に対して次の図式が可換になる.

$$
\begin{tikzcd}
 & & T^{(p)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(p)(x)} \arrow[dr] & & \\
 & \int E^{(b)}_{\mathbb{A}} \left(F^{(x)}_{(b)} G^{\mathbb{D}}_{(x)} \right)^{db} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & T^{(p)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(x)} & \\
 & & T^{(q)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(x)} \arrow[ur] & T^{(p)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(p)(y)} \arrow[dr] & \\
\int E^{(b)}_{\mathbb{A}} \left(\int F^{(c)}_{(b)} G^{\mathbb{D}}_{(c)}{}^{dc} \right)^{db} \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \int E^{(b)}_{\mathbb{A}} \left(F^{(x)}_{(b)} G^{\mathbb{D}}_{(y)} \right)^{db} \arrow[ur] \arrow[dr] & & T^{(p)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(y)} \\
 & & T^{(p)(y)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(p)(y)} \arrow[dr] & T^{(q)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(y)} \arrow[ur] & \\
 & \int E^{(b)}_{\mathbb{A}} \left(F^{(y)}_{(b)} G^{\mathbb{D}}_{(y)} \right)^{db} \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] & & T^{(p)(y)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(y)} & \\
 & & T^{(q)(y)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(y)} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & T^{(p)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(p)(x)} \arrow[dr] & & \\
 & \int \left(E^{(p)}_{\mathbb{A}} F^{(c)}_{(p)} \right) G^{\mathbb{D}}_{(c)}{}^{dc} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & T^{(p)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(p)(y)} & \\
 & & T^{(p)(y)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(p)(y)} \arrow[ur] & T^{(p)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(x)} \arrow[dr] & \\
\int \left(\int E^{(b)}_{\mathbb{A}} F^{(c)}_{(b)}{}^{db} \right) G^{\mathbb{D}}_{(c)}{}^{dc} \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \int \left(E^{(p)}_{\mathbb{A}} F^{(c)}_{(q)} \right) G^{\mathbb{D}}_{(c)}{}^{dc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & T^{(p)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(y)} \\
 & & T^{(q)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(x)} \arrow[dr] & T^{(p)(y)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(y)} \arrow[ur] & \\
 & \int \left(E^{(q)}_{\mathbb{A}} F^{(c)}_{(q)} \right) G^{\mathbb{D}}_{(c)}{}^{dc} \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] & & T^{(q)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(y)} & \\
 & & T^{(q)(y)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(y)} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & T^{(p)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(p)(x)} & & \\
 & \int E^{(b)}_{\mathbb{A}} \left(F^{(x)}_{(b)} G^{\mathbb{D}}_{(x)} \right)^{db} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \int \left(E^{(p)}_{\mathbb{A}} F^{(c)}_{(p)} \right) G^{\mathbb{D}}_{(c)}{}^{dc} \arrow[ul] \arrow[ddl] & \\
 & & T^{(q)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(x)} & & \\
\int E^{(b)}_{\mathbb{A}} \left(\int F^{(c)}_{(b)} G^{\mathbb{D}}_{(c)} dc \right)^{db} \arrow[uur] \arrow[ddr] & & & & \int \left(\int E^{(b)}_{\mathbb{A}} F^{(c)}_{(b)}{}^{db} \right) G^{\mathbb{D}}_{(c)}{}^{dc} \arrow[uul] \arrow[ddl] \\
 & & T^{(p)(y)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(p)(y)} & & \\
 & \int E^{(b)}_{\mathbb{A}} \left(F^{(y)}_{(b)} G^{\mathbb{D}}_{(y)} \right)^{db} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \int \left(E^{(q)}_{\mathbb{A}} F^{(c)}_{(q)} \right) G^{\mathbb{D}}_{(c)}{}^{dc} \arrow[uul] \arrow[dl] & \\
 & & T^{(q)(y)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(y)} & &
\end{tikzcd}
$$

ここで，エンドの普遍性により一意的な射！が存在する．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & T^{(p)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(p)(x)} & & \\
 & \int E^{(b)}_{\mathbb{A}}\left(F^{(x)}_{(b)}G^{\mathbb{D}}_{(x)}\right)^{db} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \int\left(E^{(p)}_{\mathbb{A}}F^{(c)}_{(p)}\right){G^{\mathbb{D}}_{(c)}}^{dc} \arrow[ul] \arrow[dddl] & \\
 & & T^{(q)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(x)} & & \\
\int E^{(b)}_{\mathbb{A}}\left(\int F^{(c)}_{(b)}{G^{\mathbb{D}}_{(c)}}^{dc}\right)^{db} \arrow[uur] \arrow[ddr] \arrow[uurrr, "!"] \arrow[ddrrr, "!"] & & & & \int\left(\int E^{(b)}_{\mathbb{A}}{F^{(c)}_{(b)}}^{db}\right){G^{\mathbb{D}}_{(c)}}^{dc} \arrow[uul] \arrow[ddl] \arrow[uulll, "!"'] \arrow[ddlll, "!"'] \\
 & & T^{(p)(y)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(p)(y)} & & \\
 & \int E^{(b)}_{\mathbb{A}}\left(F^{(y)}_{(b)}G^{\mathbb{D}}_{(y)}\right)^{db} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \int\left(E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(c)}_{(q)}\right){G^{\mathbb{D}}_{(c)}}^{dc} \arrow[dl] \arrow[uuul] & \\
 & & T^{(q)(y)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(y)} & &
\end{tikzcd}
$$

更にもう一度，エンドの普遍性を用いることで，

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & T^{(p)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(p)(x)} & & \\
 & \int E^{(b)}_{\mathbb{A}}\left(F^{(x)}_{(b)}G^{\mathbb{D}}_{(x)}\right)^{db} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \int\left(E^{(p)}_{\mathbb{A}}F^{(c)}_{(p)}\right){G^{\mathbb{D}}_{(c)}}^{dc} \arrow[ul] \arrow[dddl] & \\
 & & T^{(q)(x)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(x)} & & \\
\int E^{(b)}_{\mathbb{A}}\left(\int F^{(c)}_{(b)}{G^{\mathbb{D}}_{(c)}}^{dc}\right)^{db} \arrow[uur] \arrow[ddr] \arrow[rrrr, shift right, "!"'] & & & & \int\left(\int E^{(b)}_{\mathbb{A}}{F^{(c)}_{(b)}}^{db}\right){G^{\mathbb{D}}_{(c)}}^{dc} \arrow[uul] \arrow[ddl] \arrow[llll, shift right, "!"'] \\
 & & T^{(p)(y)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(p)(y)} & & \\
 & \int E^{(b)}_{\mathbb{A}}\left(F^{(y)}_{(b)}G^{\mathbb{D}}_{(y)}\right)^{db} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \int\left(E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(c)}_{(q)}\right){G^{\mathbb{D}}_{(c)}}^{dc} \arrow[dl] \arrow[uuul] & \\
 & & T^{(q)(y)\mathbb{D}}_{\mathbb{A}(q)(y)} & &
\end{tikzcd}
$$

よって $\int E^{(b)}_{\mathbb{A}}\left(\int F^{(c)}_{(b)}{G^{\mathbb{D}}_{(c)}}^{dc}\right)^{db} = \int\left(\int E^{(b)}_{\mathbb{A}}{F^{(c)}_{(b)}}^{db}\right){G^{\mathbb{D}}_{(c)}}^{dc}$ が示される． □

定理 0.3.

$$\Delta^{\mathbb{C}}_{(a)}F_{\mathbb{C}} = \int {\Delta^{(c)}_{(a)}F_{(c)}}^{dc}$$