

圏論周圏論

つばきちゃん

2024年5月21日

目 次

集合をスカラーという.

関手 $(F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set})$ をベクトルと呼び, $F_{\mathbb{C}}$ と表す.

関手 $(G : \mathbb{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set})$ をコベクトルと呼び, $G^{\mathbb{D}}$ と表す.

双関手 $(H : \mathbb{D}^{\text{op}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set})$ を行列と呼び, $H_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}$ と表す.

$F_{\mathbb{C}}$ に $c \in \mathbb{C}$ を代入したものは集合となり, $F_{(c)}$ と表す.

$G^{\mathbb{D}}$ に $d \in \mathbb{D}$ を代入したものは集合となり, $G^{(d)}$ と表す.

$H_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}$ に $c \in \mathbb{C}$ を代入したものはコベクトルとなり, $H_{(c)}^{\mathbb{D}}$ と表す.

$H_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}$ に $d \in \mathbb{D}$ を代入したものはベクトルとなり, $H_{\mathbb{C}}^{(d)}$ と表す.

ある集合 S を $\hat{S} : \mathbb{1} \rightarrow \mathbf{Set}$ として考え, $\hat{S}(*) = S$ とすると $\hat{S} = \hat{S}_{\mathbb{1}} = \hat{S}^{\mathbb{1}}$ であり, $S = \hat{S}_{(*)} = \hat{S}^{(*)}$ と表すことができる,

行列 $P_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}}$ のエンドを $\int P_{(x)}^{(x)dx}$ と表す.

行列 $P_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}}$ のコエンドを $\int P_{(x)}^{(x)} dx$ と表す.

米田埋め込み $\text{Hom}(A, B)$ を $\Delta_{(B)}^{(A)}$ と表す.

添え字がついた文字をテンソルという. つまりスカラー, ベクトルやコベクトル, 行列はテンソルである.

それぞれ上付きと下付きの同じ添え字を持つテンソルは合成することができる.

例 0.1. 行列 $F_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}$ と $G_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}$ の合成はコエンドを用いて次のように計算される.

$$F_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}} G_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}} = \int F_{\mathbb{A}}^{(b)} G_{(b)}^{\mathbb{C}} db$$

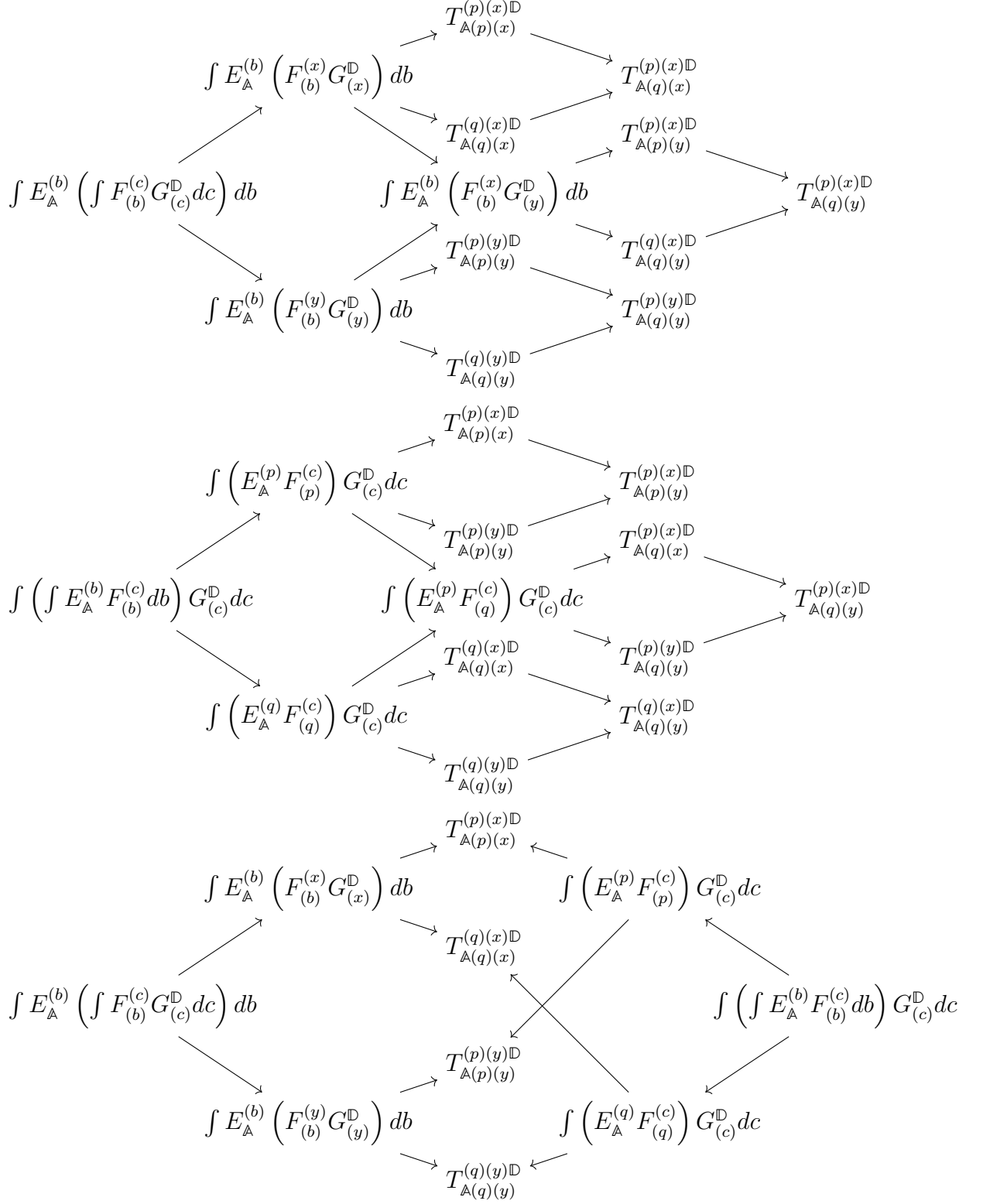
定理 0.2. 行列 $E_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}$ と $F_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}$, $G_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}$ への合成には結合率が成り立つ. つまり,

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}(F_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}} G_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}) &= E_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}} \left(\int F_{\mathbb{B}}^{(c)} G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \right) \\ &= \int E_{\mathbb{A}}^{(b)} \left(\int F_{(b)}^{(c)} G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \right) db \\ &= \int \left(\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} F_{(b)}^{(c)} db \right) G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \\ &= \left(\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} F_{(b)}^{(c)} db \right) G_{(c)}^{\mathbb{D}} \\ &= (E_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}} F_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}) G_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}} \end{aligned}$$

(証明) 略記として $E_a^{(b)} F_{(c)}^{(d)} G_{(e)}^f = T_{a(c)(e)}^{(b)(d)f}$ を用いる.

$E_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}(F_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}} G_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}) = (E_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}} F_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}) G_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}$ を示すために $\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} \left(\int F_{(b)}^{(c)} G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \right) db = \int \left(\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} F_{(b)}^{(c)} db \right) G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc$ を示す.

任意の対象 $x, y \in \mathbb{C}$, $p, q \in \mathbb{B}$ に対して次の図式が可換になる.



ここで、エンドの普遍性により一意的な射!が存在する.

$$\begin{array}{ccccc}
& & T_{\mathbb{A}(p)(x)}^{(p)(x)\mathbb{D}} & & \\
& \nearrow & \swarrow & \nwarrow & \searrow \\
\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} \left(F_{(b)}^{(x)} G_{(x)}^{\mathbb{D}} \right) db & & & & \int \left(E_{\mathbb{A}}^{(p)} F_{(p)}^{(c)} \right) G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \\
& \nwarrow & \nearrow & \swarrow & \nwarrow \\
& & T_{\mathbb{A}(q)(x)}^{(q)(x)\mathbb{D}} & & \\
& \nearrow & \swarrow & \nwarrow & \searrow \\
\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} \left(\int F_{(b)}^{(c)} G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \right) db & & & & \int \left(\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} F_{(b)}^{(c)} db \right) G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \\
& \nwarrow & \nearrow & \swarrow & \nwarrow \\
& & T_{\mathbb{A}(p)(y)}^{(p)(y)\mathbb{D}} & & \\
& \nearrow & \swarrow & \nwarrow & \searrow \\
\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} \left(F_{(b)}^{(y)} G_{(y)}^{\mathbb{D}} \right) db & & & & \int \left(E_{\mathbb{A}}^{(q)} F_{(q)}^{(c)} \right) G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \\
& \nwarrow & \nearrow & \swarrow & \nwarrow \\
& & T_{\mathbb{A}(q)(y)}^{(q)(y)\mathbb{D}} & &
\end{array}$$

更にもう一度，エンドの普遍性を用いることで，

$$\begin{array}{ccccc}
& & T_{\mathbb{A}(p)(x)}^{(p)(x)\mathbb{D}} & & \\
& \nearrow & \swarrow & \nwarrow & \searrow \\
\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} \left(F_{(b)}^{(x)} G_{(x)}^{\mathbb{D}} \right) db & & & & \int \left(E_{\mathbb{A}}^{(p)} F_{(p)}^{(c)} \right) G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \\
& \nwarrow & \nearrow & \swarrow & \nwarrow \\
& & T_{\mathbb{A}(q)(x)}^{(q)(x)\mathbb{D}} & & \\
& \nearrow & \swarrow & \nwarrow & \searrow \\
\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} \left(\int F_{(b)}^{(c)} G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \right) db & \xleftrightarrow{\quad \quad \quad} & & & \int \left(\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} F_{(b)}^{(c)} db \right) G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \\
& \nwarrow & \nearrow & \swarrow & \nwarrow \\
& & T_{\mathbb{A}(p)(y)}^{(p)(y)\mathbb{D}} & & \\
& \nearrow & \swarrow & \nwarrow & \searrow \\
\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} \left(F_{(b)}^{(y)} G_{(y)}^{\mathbb{D}} \right) db & & & & \int \left(E_{\mathbb{A}}^{(q)} F_{(q)}^{(c)} \right) G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \\
& \nwarrow & \nearrow & \swarrow & \nwarrow \\
& & T_{\mathbb{A}(q)(y)}^{(q)(y)\mathbb{D}} & &
\end{array}$$

よって $\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} \left(\int F_{(b)}^{(c)} G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc \right) db = \int \left(\int E_{\mathbb{A}}^{(b)} F_{(b)}^{(c)} db \right) G_{(c)}^{\mathbb{D}} dc$ が示される。 \square

定理 0.3.

$$\Delta_{(a)}^{\mathbb{C}} F_{\mathbb{C}} = \int \Delta_{(a)}^{(c)} F_{(c)} dc$$