圏論周圏論

つばきちゃん

2024 年 5 月 22 日

目 次

集合をスカラーという．

函手 $(F : \mathbb{C} \to \mathbb{Set})$ をベクトルと呼び，$F_{\mathbb{C}}$ と表す．

函手 $(G : \mathbb{D}^{\mathbb{op}} \to \mathbb{Set})$ をコベクトルと呼び，$G^{\mathbb{D}}$ と表す．

双函手 $(H : \mathbb{D}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C} \to \mathbb{Set})$ を行列と呼び，$H^{\mathbb{D}}_{\mathbb{C}}$ と表す．

$F_{\mathbb{C}}$ に $c \in \mathbb{C}$ を代入したものは集合となり，$F_{(c)}$ と表す．

$G^{\mathbb{D}}$ に $d \in \mathbb{D}$ を代入したものは集合となり，$G^{(d)}$ と表す．

$H^{\mathbb{D}}_{\mathbb{C}}$ に $c \in \mathbb{C}$ を代入したものはコベクトルとなり，$H^{\mathbb{D}}_{(c)}$ と表す．

$H^{\mathbb{D}}_{\mathbb{C}}$ に $d \in \mathbb{D}$ を代入したものはベクトルとなり，$H^{(d)}_{\mathbb{C}}$ と表す．

ある集合 S を $\hat{S} : \mathbb{1} \to \mathbb{Set}$ として考え，$\hat{S}(*) = S$ とすると $\hat{S} = \hat{S}_{\mathbb{1}} = \hat{S}^{\mathbb{1}}$ であり，$S = \hat{S}_{(*)} = \hat{S}^{(*)}$ と表すことができる，

行列 $P^{\mathbb{X}}_{\mathbb{X}}$ のエンドを $\overline{\bigotimes_{x \in \mathbb{X}}} P^{(x)}_{(x)}$ と表す．

行列 $P^{\mathbb{X}}_{\mathbb{X}}$ のコエンドを $\overline{\bigoplus_{x \in \mathbb{X}}} P^{(x)}_{(x)}$ と表す．

米田埋め込み $\mathrm{Hom}(A, B)$ を $\Delta^{(A)}_{(B)}$ と表す．

添え字がついた文字をテンソルという．つまりスカラー，ベクトルやコベクトル，行列はテンソルである．

それぞれ上付きと下付きの同じ添え字を持つテンソルは合成することができる．

例 0.1. 行列 $F^{\mathbb{B}}_{\mathbb{A}}$ と $G^{\mathbb{C}}_{\mathbb{B}}$ の合成はコエンドを用いて次のように計算される．

$$F^{\mathbb{B}}_{\mathbb{A}} G^{\mathbb{C}}_{\mathbb{B}} = \overline{\bigoplus_{b \in \mathbb{B}}} F^{(b)}_{\mathbb{A}} G^{\mathbb{C}}_{(b)}$$

定理 0.2. 行列 $E^{\mathbb{B}}_{\mathbb{A}}$ と $F^{\mathbb{C}}_{\mathbb{B}}$，$G^{\mathbb{D}}_{\mathbb{C}}$ にの合成には結合率が成り立つ．つまり，

$$\begin{aligned}
E^{\mathbb{B}}_{\mathbb{A}}(F^{\mathbb{C}}_{\mathbb{B}} G^{\mathbb{D}}_{\mathbb{C}}) &= E^{\mathbb{B}}_{\mathbb{A}} \left(\overline{\bigoplus_{c \in \mathbb{C}}} F^{(c)}_{\mathbb{B}} G^{\mathbb{D}}_{(c)} \right) \\
&= \overline{\bigoplus_{b \in \mathbb{B}}} E^{(b)}_{\mathbb{A}} \left(\overline{\bigoplus_{c \in \mathbb{C}}} F^{(c)}_{(b)} G^{\mathbb{D}}_{(c)} \right) \\
&= \overline{\bigoplus_{c \in \mathbb{C}}} \left(\overline{\bigoplus_{b \in \mathbb{B}}} E^{(b)}_{\mathbb{A}} F^{(c)}_{(b)} \right) G^{\mathbb{D}}_{(c)} \\
&= \left(\overline{\bigoplus_{b \in \mathbb{B}}} E^{(b)}_{\mathbb{A}} F^{(c)}_{(b)} \right) G^{\mathbb{D}}_{(c)} \\
&= (E^{\mathbb{B}}_{\mathbb{A}} F^{\mathbb{C}}_{\mathbb{B}}) G^{\mathbb{D}}_{\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

(証明) $E^{\mathbb{B}}_{\mathbb{A}}(F^{\mathbb{C}}_{\mathbb{B}} G^{\mathbb{D}}_{\mathbb{C}}) = (E^{\mathbb{B}}_{\mathbb{A}} F^{\mathbb{C}}_{\mathbb{B}}) G^{\mathbb{D}}_{\mathbb{C}}$ を示すために $\overline{\bigoplus_{b \in \mathbb{B}}} E^{(b)}_{\mathbb{A}} \left(\overline{\bigoplus_{c \in \mathbb{C}}} F^{(c)}_{(b)} G^{\mathbb{D}}_{(c)} \right) = \overline{\bigoplus_{c \in \mathbb{C}}} \left(\overline{\bigoplus_{b \in \mathbb{B}}} E^{(b)}_{\mathbb{A}} F^{(c)}_{(b)} \right) G^{\mathbb{D}}_{(c)}$ を示す．

任意の射 $(f : x \to y) \in \mathbb{C}$，$(g : p \to q) \in \mathbb{B}$ に対して次の図式が可換になる．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & E^{(p)}_{\mathbb{A}}F^{(x)}_{(p)}G^{\mathbb{D}}_{(x)} \arrow[dl] & & \\
 & \overline{\bigoplus_{b\in\mathbb{B}}}E^{(b)}_{\mathbb{A}}\left(F^{(x)}_{(b)}G^{\mathbb{D}}_{(x)}\right) \arrow[ddl] & & E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(x)}_{(p)}G^{\mathbb{D}}_{(x)} \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
 & & E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(x)}_{(q)}G^{\mathbb{D}}_{(x)} \arrow[ul] & E^{(p)}_{\mathbb{A}}F^{(y)}_{(p)}G^{\mathbb{D}}_{(x)} \arrow[dl] & \\
\overline{\bigoplus_{b\in\mathbb{B}}}E^{(b)}_{\mathbb{A}}\left(\overline{\bigoplus_{c\in\mathbb{C}}}F^{(c)}_{(b)}G^{\mathbb{D}}_{(c)}\right) & & \overline{\bigoplus_{b\in\mathbb{B}}}E^{(b)}_{\mathbb{A}}\left(F^{(y)}_{(b)}G^{\mathbb{D}}_{(x)}\right) \arrow[uul] \arrow[ddl] & & E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(y)}_{(p)}G^{\mathbb{D}}_{(x)} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & & E^{(p)}_{\mathbb{A}}F^{(y)}_{(p)}G^{\mathbb{D}}_{(y)} \arrow[dl] & E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(y)}_{(q)}G^{\mathbb{D}}_{(x)} \arrow[ul] & \\
 & \overline{\bigoplus_{b\in\mathbb{B}}}E^{(b)}_{\mathbb{A}}\left(F^{(y)}_{(b)}G^{\mathbb{D}}_{(y)}\right) \arrow[uul] & & E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(y)}_{(p)}G^{\mathbb{D}}_{(y)} \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
 & & E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(y)}_{(q)}G^{\mathbb{D}}_{(y)} \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & E^{(p)}_{\mathbb{A}}F^{(x)}_{(p)}G^{\mathbb{D}}_{(x)} \arrow[dl] & & \\
 & \overline{\bigoplus_{c\in\mathbb{C}}}\left(E^{(p)}_{\mathbb{A}}F^{(c)}_{(p)}\right)G^{\mathbb{D}}_{(c)} \arrow[ddl] & & E^{(p)}_{\mathbb{A}}F^{(y)}_{(p)}G^{\mathbb{D}}_{(x)} \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
 & & E^{(p)}_{\mathbb{A}}F^{(y)}_{(p)}G^{\mathbb{D}}_{(y)} \arrow[ul] & E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(x)}_{(p)}G^{\mathbb{D}}_{(x)} \arrow[dl] & \\
\overline{\bigoplus_{c\in\mathbb{C}}}\left(\overline{\bigoplus_{b\in\mathbb{B}}}E^{(b)}_{\mathbb{A}}F^{(c)}_{(b)}\right)G^{\mathbb{D}}_{(c)} & & \overline{\bigoplus_{c\in\mathbb{C}}}\left(E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(c)}_{(p)}\right)G^{\mathbb{D}}_{(c)} \arrow[uul] \arrow[ddl] & & E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(y)}_{(p)}G^{\mathbb{D}}_{(x)} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & & E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(x)}_{(q)}G^{\mathbb{D}}_{(x)} \arrow[dl] & E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(y)}_{(p)}G^{\mathbb{D}}_{(y)} \arrow[ul] & \\
 & \overline{\bigoplus_{c\in\mathbb{C}}}\left(E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(c)}_{(q)}\right)G^{\mathbb{D}}_{(c)} \arrow[uul] & & E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(y)}_{(q)}G^{\mathbb{D}}_{(x)} \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
 & & E^{(q)}_{\mathbb{A}}F^{(y)}_{(q)}G^{\mathbb{D}}_{(y)} \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}
$$

ここで次の図式について考える.

$$
\begin{tikzcd}
\overline{\bigoplus_{b\in\mathbb{B}}}\left(E_{\mathbb{A}}^{(b)}F_{(b)}^{(x)}\right)G_{(x)}^{\mathbb{D}} & E_{\mathbb{A}}^{(q)}F_{(q)}^{(x)}G_{(x)}^{\mathbb{D}} \arrow[l, "\pi_1"'] \\
\overline{\bigoplus_{b\in\mathbb{B}}}\left(E_{\mathbb{A}}^{(b)}F_{(b)}^{(y)}\right)G_{(x)}^{\mathbb{D}} \arrow[u, "\overline{\bigoplus_{b\in\mathbb{B}}}\left(E_{\mathbb{A}}^{id_b}F_{id_b}^{f}\right)G_{id_x}^{\mathbb{D}}"] & E_{\mathbb{A}}^{(q)}F_{(q)}^{(y)}G_{(x)}^{\mathbb{D}} \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[u, "E_{\mathbb{A}}^{id_q}F_{id_q}^{f}G_{id_x}^{\mathbb{D}}"']
\end{tikzcd}
$$

$\square$