圏論周圏論

つばきちゃん

June 14, 2024

Contents

定義 0.1. $0 \neq q \in \mathbb{C}$ に対して，$q-$ 整数 $[n]_q$ は通常

$$[n]_q := \frac{q^n - 1}{q - 1}(= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

のように定義される．

しかし，ここでは次の定義を採用する．$q \in \mathbb{C}, |q| > 0$ に対して，$q-$ 整数 $[n]_q$ を

$$[n]_q := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}(= q^{1-n} + q^{3-n} + \cdots + q^{n-3} + q^{n-1})$$

のように定義する．

これらを区別するため，通常の $q-$ 整数を $(n)_q$ と書き分ける．

$(n)_q$ と $[n]_q$ の間には次のような関係が成り立つ．

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = \frac{q(q^{2n} - 1)}{q^n(q^2 - 1)} = q^{1-n}(n)_{q^2}$$

定理 0.2. $q-$ 整数 $(n)_q$ や，$[n]_q$ に対して $q \to 1$ と置き換えることでこれらは整数 n と一致する．

(証明)

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to 1}[n]_q &= \lim_{q\to 1}\frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = \lim_{q\to 1}(q^{1-n} + q^{3-n} + \cdots + q^{n-3} + q^{n-1}) \\
&= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 = n \\
\lim_{q\to 1}(n)_q &= \lim_{q\to 1}\frac{q^n - 1}{q - 1} = \lim_{q\to 1}(n)_q(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}) \\
&= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 = n
\end{aligned}$$

□

定義 0.3. $q-$ 整数 $[n]_q$ に対して $q-$ 階乗 $[n]_q!$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
[n]_q! &= [n]_q[n-1]_q! \\
[0]_q! &= 1
\end{aligned}$$

また同様に $(n)_q$ に対しても階乗を

$$\begin{aligned}
(n)_q! &= (n)_q(n-1)_q! \\
(0)_q! &= 1
\end{aligned}$$

と定義する．

また $[n]_q!$ と $(n)_q!$ には次の関係がある．

$$
\begin{aligned}
[n]_q! &= [n]_q[n-1]_q \\
&= q^{1-n}(n)_{q^2}[n-1]_q \\
&= q^{1-n}q^{1-(n-1)}(n)_{q^2}(n-1)_{q^2}[n-2]_q \\
&\dots \\
&= q^{1-n}q^{2-n}\dots q^{-1}q^{0}(n)_{q^2}(n-1)_{q^2}\dots(2)_{q^2}(1)_{q^2}[0]_q \\
&= q^{\frac{(1-n)n}{2}}(n)_{q^2}!
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

定義 0.4. $q-$ 二項関係を次のように定義する．

$$
\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_q = \frac{(n)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!}
$$

$$
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}
$$

これらの間には次の対応がある．(0.1) により $(n)_q! = q^{\frac{(n-1)n}{4}}[n]_{q^{\frac{1}{2}}}!$ であるので，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_q &= \frac{(n)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!} \\
&= \frac{q^{\frac{(n-1)n}{4}}[n]_{q^{\frac{1}{2}}}!}{q^{\frac{(k-1)k}{4}}[k]_{q^{\frac{1}{2}}}!q^{\frac{(n-k-1)(n-k)}{4}}[n-k]_{q^{\frac{1}{2}}}!} \\
&= q^{\frac{(n-1)n-(k-1)k-(n-k-1)(n-k)}{4}}\frac{[n]_{q^{\frac{1}{2}}}!}{[k]_{q^{\frac{1}{2}}}![n-k]_{q^{\frac{1}{2}}}!} \\
&= q^{\frac{(n-k)k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
\tag{0.2}
$$

定理 0.5. $q-$ 二項関係について次が成り立つ．

$$
\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_q = q^k\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}_q + \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}_q
$$

(証明)

$$\begin{aligned}
q^k\binom{n-1}{k}_q+\binom{n-1}{k-1}_q &= q^k\frac{(n-1)_q!}{(k)_q!(n-1-k)_q!}+\frac{(n-1)_q!}{(k-1)_q!(n-k)_q!}\\
&= q^k\frac{(n-k)_q(n-1)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!}+\frac{(k)_q(n-1)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!}\\
&= (q^k(n-k)_q+(k)_q)\frac{(n-1)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!}\\
&= \left(q^k\frac{q^{n-k}-1}{q-1}+\frac{q^k-1}{q-1}\right)\frac{(n-1)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!}\\
&= \left(\frac{q^n-q^k+q^k-1}{q-1}\right)\frac{(n-1)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!}\\
&= \left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)\frac{(n-1)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!}\\
&= (n)_q\frac{(n-1)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!}\\
&= \frac{(n)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!}\\
&= \binom{n}{k}_q
\end{aligned}$$

□

また，このことにより次が成り立つ．

定理 0.6.

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q = q^k\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q + q^{k-n}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_q$$

(証明) (0.2) により

$$\begin{aligned}
q^{\frac{(n-k)k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q^{\frac{1}{2}}} &= q^kq^{\frac{(n-1-k)k}{2}}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{q^{\frac{1}{2}}} + q^{\frac{(n-k)(k-1)}{2}}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_{q^{\frac{1}{2}}}\\
\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q^{\frac{1}{2}}} &= q^{\frac{(n+1-k)k-(n-k)k}{2}}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{q^{\frac{1}{2}}} + q^{\frac{(n-k)(k-1)-(n-k)k}{2}}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_{q^{\frac{1}{2}}}\\
&= q^{\frac{k}{2}}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{q^{\frac{1}{2}}} + q^{\frac{k-n}{2}}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_{q^{\frac{1}{2}}}\\
\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q &= q^k\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q + q^{k-n}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_q
\end{aligned}$$

□

形式的に $xy = q^{-2}yx$ が成り立つ文字 x, y を考える.
この時次が成り立つ.

定理 0.7.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n-k)} x^{n-k} y^k$$

(証明) $n = 0$ のとき,

$$(x+y)^0 = \sum_{k=0}^{0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n-k)} x^{n-k} y^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q q^0 x^0 y^0 = 1$$

が成り立つ.

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n-1-k)} x^{n-1-k} y^k$$

が成り立つことを仮定し, $(x+y)^n$ を考える.

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n-1-k)} x^{n-1-k} y^k \right)(x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n-1-k)} x^{n-1-k} y^k x + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n-1-k)} x^{n-1-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n-1-k)} q^{2k} x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n-1-k)} x^{n-1-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n+1-k)} x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n-1-k)} x^{n-1-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n+1-k)} x^{n-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{(k-1)(n-k)} x^{n-k} y^k \\
&= \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{kn+k-k^2} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{kn+k-k^2-n} \right) x^{n-k} y^k + \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_q y^n \\
&= \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{k-n} \right) q^{kn-k^2} x^{n-k} y^k + \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_q y^n \\
&= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n-k)} x^{n-k} y^k + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q y^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n-k)} x^{n-k} y^k
\end{aligned}$$

□